Ecole Supérieur Privée d'Ingénierie et de Technologies

4 INFINI

MODÈLE DISCRET

Implémentation du modèle de Black & Scholes

Élève :
AMDOUNI Imen
AYADI Baha Eddine
ELOUAFI Samar
HADDAD Fatma
HANNACHI Oussema
KEDIDI Med Aziz

Enseignant
M. EL BENNA Slim

13 décembre 2019

Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

1 Introduction

Une institution financière comme les banques ou les sociétés d'assurance, il a besoin d'évaluer leurs actifs financiers pour améliorer leurs décisions concernant les investissements, les placements et l'acquisition d'entreprise pour augmenter leur profit.

2 Le Marché des produits dérivés

2.1 Définition du marché des produits dérivés

Les marchés dérivés permettent de gérer les risques associés aux fluctuations de cours, de taux ou de change grâce à des instruments financiers

2.2 Produit dérivé

2.2.1 Définition

Un produit dérivé est un contrat entre deux parties qui vont s'accorder sur le prix d'un actif. C'est donc un instrument financier sous-jacent d'un actif qui permet de fixer le prix de ce dernier pour une période donnée. La valeur d'un produit dérivé dépendra donc de la valeur de son actif sous-jacent au cours du temps.
Exemple :
Le produit dérivé d'une action, par exemple, peut donner le droit d'acheter une action à un prix fixé jusqu'à une date donnée. Dans ces conditions, la valeur de ce droit est directement liée au prix de l'action "sous-jacente"

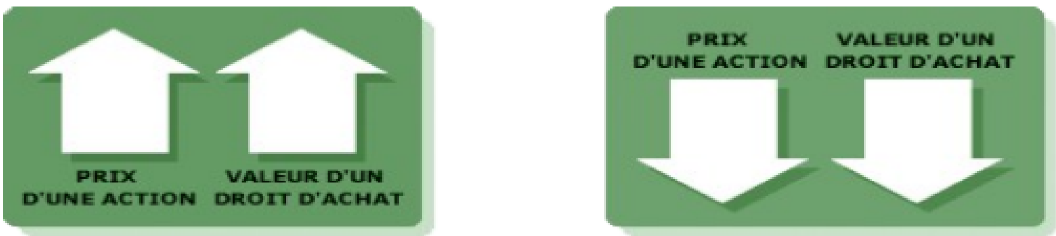

Figure 1

2.2.2 Les types de produits dérivés

Les options (d'achat ou de vente) et les swaps (swap de taux, swap de charge) sont les types de dérivés les plus fréquents.

2.2.3 La finalité des produits dérivés

Les dérivés sont généralement utilisés comme des instruments de couverture contre les risques d'évolution des actifs sous-jacents, mais peuvent aussi être utilisés à des fins spéculatives.

2.3 Un produit dérivé très utilisé : l'option

Qu'est-ce qu'une option ?
Les options sont des accords souscrits de manière contractuelle entre deux parties ; elles donnent à leurs détenteurs le droit d'acheter ou de vendre un actif déterminé (actions, obligations, devises, matières premières, métaux précieux. . .) à un prix fixé à une date précise (dans le cas d'options européennes) ou n'importe quand avant cette date (option américaine).

3 Méthode de calcul de l'option :

Les méthodes de calcul de l'option sont :

- Modèle binomial
- Modèle de Black et Scholes

Dans notre rapport, nous allons s'intéresser à la méthode de Black et Scholes.

3.1 Modèle de Black & Scholes [1]

Le formidable développement qu'ont connu les marchés des produits dérivés depuis environ trente ans n'aurait probablement pas été possible sans la publication en 1973 de l'article présentant un modèle d'évaluation d'options . C'est ce modèle et l'équation qui lui est associée que l'on va essayer d'expliquer plus que de démontrer. Le formalisme et la rigueur mathématique ne sont donc pas vraiment respectés.

3.1.1 Objectif

Il s'agit d'évaluer le prix d'un call européen (option d'achat d'une action à une date future T) dont le prix d'exercice est K. Le cadre est celui d'un marché comportant deux actifs, un actif risqué (action) et un actif non risqué de rendement r définissant le taux d'intérêt sans risque.

3.1.2 Hypothéses

On présente ici les principales hypothèses sur lesquelles repose le modèle de Black et Scholes.

Hypothèse 1 (H1) :
La première hypothèse du modèle est que le rendement de l'actif risqué S est caractérisé par une tendance et une composante aléatoire : Le rendement du titre S (par abus de langage on confond le prix du titre et son nom) : $\frac{\Delta S}{S}$

— La tendance : $u\Delta t$ (accroissement moyen pendant le temps Δt)

— La composante aléatoire $\sigma\Delta\chi$ (plus s est grand et plus la composante aléatoire est importante)

Le modèle pour le prix du titre est donc le suivant pour une variation infinitésimale du rendement :
$\frac{\mathrm{d}S}{S} = \mu \mathrm{d}t + \mathrm{d}\chi$ où $\mathrm{d}\chi$ est un mouvement brownien standard .
Une des propriétés de ce processus stochastique est $E(dX^2) = dt$.

Hypothèse 2 (H2) : Il est possible de vendre à découvert sans restriction (position courte).

Hypothèse 3 (H3) : Il n'y a pas d'opportunité d'arbitrage (il est impossible de faire des profit sans risque ce qui revient à dire qu'un portefeuille P sans risque rapporte exactement le taux sans risque r. H2 permet d'assurer que P ne rapporte pas moins que r).

Hypothèse 4 (H4) : Il n'y a pas de distribution de dividende (on peut relâcher cette hypothèse) .

Hypothèse 5 (H5) : Il n'y a pas de cout de transaction .

Hypothèse 6 (H6) : La cotation des actifs est continu .

Hypothèse 7 (H7) : Le taux d'intérêt sans risque r est constant.

3.1.3 Caractéristique du produit dérivé

Soit **C** le prix d'un dérivé de sous-jacent **S**. **C** dépend de **S** et du temps et on peut développer C(S,t) en série de Taylor en négligeant les termes d'ordre supérieur à dt (i.e. dt^2, dt^3,..) (développement limité)

$\mathrm{d}C = \frac{\partial C}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial C}{\partial S}\mathrm{d}S + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\mathrm{d}S + ..$
avec
$dS^2 = S^2(\mu \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}\chi)^2 = S^2\sigma^2\mathrm{d}t + 0(\mathrm{d}t)$
et
$\mathrm{d}S^3 = 0(\mathrm{d}t)$
d'où
$\mathrm{d}C = (\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial^2}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2})\mathrm{d}t + \frac{\partial C}{\partial t}\mathrm{d}S(2)$

3.1.4 Caractéristique portefeuille

Considérons maintenant le portefeuille P long d'une option et court de delta titres sous-jacents : $P = C - \Delta S$
$\mathrm{d}P = \mathrm{d}C - \Delta \mathrm{d}S$
$\mathrm{d}P = (\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial^2}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2})\mathrm{d}t + (\frac{\partial C}{\partial s} - \Delta)\mathrm{d}S(3)$
On cherche à rendre P insensible aux variations du titre S ce qui donne la relation suivante (dite de couverture D) :
$\Delta = (\frac{\partial C}{\partial S})(4)$
P est donc maintenant un portefeuille sans risque, car il est insensible aux variations du prix du titre sous-jacent. En conséquence, P doit avoir le même rendement que r, le taux d'intérêt sans risque du marché (sous peine d'opérations d'arbitrage) d'où :

$$\mathrm{d}P = rP\mathrm{d}t$$
$$\text{or } P = C - \Delta S = C - \frac{\partial C}{\partial S}S$$
$$\text{d'ou } \mathrm{d}P = r(C - \frac{\partial C}{\partial S}S)\mathrm{d}t$$

3.1.5 Black and scholes

En remplaçant dP par son expression données par (3) et en tenant compte de (4), on obtient l'équation de Black et Scholes :
. $\frac{\partial C}{\partial t} + rS\frac{\partial C}{\partial S} + \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} - rC = 0(BS)$

3.1.6 Resolution

La résolution analytique ou numérique de cette équation permet d'évaluer le prix d'un call européen (cas de notre exemple) ainsi que toute une série d'options dont la modélisation permet de se raccrocher au cas présenté ici. Pour s et r constants, quelques changement de variable permettent d'obtenir la solution suivante (en notant N(.) la fonction de répartition d'un loi normale centrée réduite) :

$$C = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$$
$$\text{ou}$$
$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S}{K}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$
$$\text{et}$$
$$d_2 = \frac{\ln(\frac{S}{K}) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

3.1.7 Limites du modèle

- Le modèle fait l'hypothèse que le taux d'intérêt est constant.
- Le modèle fait l'hypothèse que la volatilité est constante.
- La formule n'est valide que pour les options européennes, En pratique, les options sont plus souvent américaines.
- Nous ne pouvons pas réellement prédire la direction d'un marché ou d'un actif particulier
- Les marchés sont parfaitement liquides

4 Une présentation de la société étudiée : Star

4.1 Présentation

Figure 2 – logo de la société

La Société Tunisienne d'Assurances et de Réassurances –**STAR**- est une société anonyme faisant appel public à l'épargne au capital de **23.076.930D** composé de **2.307.693** actions de 10D chacune .
Au terme du premier semestre 2019, la compagnie STAR a enregistré un chiffre d'affaire(primes émises nettes) qui à 212.2 millions de dinars contre 208.4 millions durant la même période en 2018, enregistrant une légère hausse de 1.8%.
La société a pour objet la réalisation et la gestion de contrats et de conventions d'assurances et de réassurances de toutes les branches. La société distribue ses produits et services à travers son siège - square Avenue de Paris Tunis- et ses **183** agences, **17** courtiers,**11** succursales réparties sur tout le territoire Tunisien[4].

4.2 Les finalités de la société :

La Société STAR a pour objet l'assurance et la réassurance de tous les risques pouvant entraîner tous dommages, tant corporels que matériels ou immatériels ainsi que tous les risques de responsabilité civile, professionnelle ou autre. La société a pour but d'exercer l'industrie de l'assurance dans toutes les branches et faire toutes sortes d'opérations de garantie et d'indemnité.
Elle est considérée comme le leader du marché de l'assurance tunisienne, à la 1ère place en assurance dommages avec une part de marché de 29% et au 9ème rang du marché de l'assurance vie avec une part de marché de 5%

4.3 Actionnariat

Propriétaire	Actions	%
Gouvernement tunisien	891 720	38,6%
Groupama Assurances Mutuelles SA	807 693	35,0%
Consortium tuniso-koweïtien de développement	127 500	5,52 %
Silk Invest Ltd.	4 465	0,19%
Wilmington Trust Investment Advisors, Inc.	230	0,0100 %

TABLE 1 – tableau des actionnaires[3]

4.4 Compte de résultat

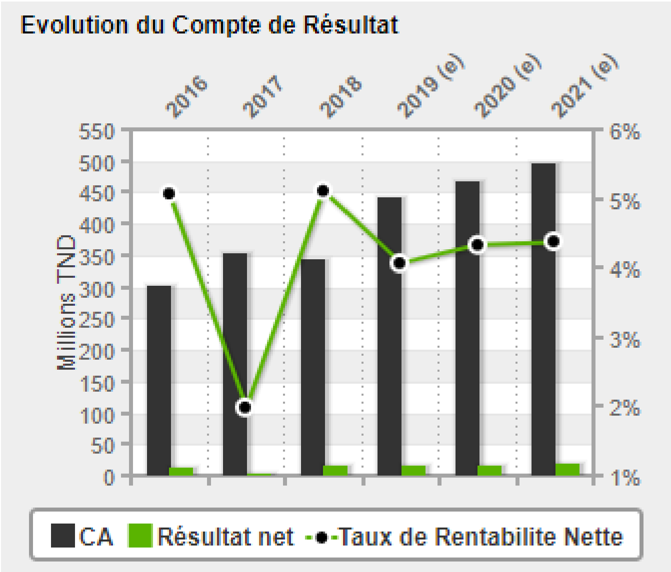

FIGURE 3 – Evolution du compte de résultat

5 Traitement fait sur les données

5.1 Collecte des données :

La 1ère étape consiste à télécharger l'historique des cotations ainsi des dividendes depuis le site de la bourse tunisienne : bvmt.com.tn[2]

5.2 Importation des librairies :

Notre travaille nécessite l'importation de ces librairies :

```
Entrée [2]: import pandas as pd
            import math as m
            import numpy as numpy
            from scipy import stats
```

FIGURE 4 – Importation des librairies

5.3 Préparation des données :

Nous avons fait la lecture du fichier contenant l'historique des cotations du 2018 ainsi la sélection du notre entreprise et les colonnes nécessaires.

```
Entrée [5]: data2018=pd.read_csv("data2018.csv", header = 0, sep=",")
            starData = data2018.loc[data2018['LIB_VAL']=="STAR",]
            starDataFiltered = starData[['SEANCE', 'LIB_VAL', 'CLOTURE', 'NB_TRAN']]
            starDataFiltered
```

Out[5]:

	SEANCE	LIB_VAL	CLOTURE	NB_TRAN
41	2/1/2018	STAR	98	6
336	3/1/2018	STAR	100	4
631	4/1/2018	STAR	99.98	11
926	5/1/2018	STAR	97	15
1221	8/1/2018	STAR	96.99	3
1516	9/1/2018	STAR	95	13
1811	10/1/2018	STAR	95	11
2106	11/1/2018	STAR	94	4
2401	12/1/2018	STAR	91.18	16
2696	15/01/18	STAR	90	47
2991	16/01/18	STAR	89.89	1
3286	17/01/18	STAR	91.34	30
3581	18/01/18	STAR	91.27	8
3876	19/01/18	STAR	92.99	12
4171	22/01/18	STAR	92	7
4466	23/01/18	STAR	92	5
4761	24/01/18	STAR	91	1
5056	25/01/18	STAR	89.24	11
5351	26/01/18	STAR	89	14

FIGURE 5 – Préparation des données pour 2018

Ce travail se répète pour l'historique de 2016 et 2017 pour fusionner les trois fichiers en une seule.

```
Entrée [7]: data2017=pd.read_csv("data2017.csv", header=0, sep=",")
            starData2 = data2017.loc[data2017['VALEUR']=="STAR",]
            starDataFiltered2 = starData2[['SEANCE', 'VALEUR', 'CLOTURE', 'NB_TRANSACTION']]

Entrée [8]: data2016=pd.read_csv("data2016.csv", header=0, sep=",")
            starData3 = data2016.loc[data2016['VALEUR']=="STAR",]
            starDataFiltered3 = starData3[['SEANCE', 'VALEUR', 'CLOTURE', 'NB_TRANSACTION']]

Entrée [9]: starDataFiltered3.to_csv("data.txt", index=False,index_label=False,mode="w")
            starDataFiltered2.to_csv("data.txt", index=False,index_label=False,header=False,mode="a")
            starDataFiltered.to_csv("data.txt", index=False,index_label=False,header=False,mode="a")
```

FIGURE 6 – Préparation des données pour 2016 et 2017

Aprés l'élimination des lignes dont le nombre de transaction égale à 0, nous avons obtenu la version finale du Dataframe.

```
Entrée [10]: newDF = pd.read_csv("data.txt", sep=",", header=0)
             newDF = pd.DataFrame(newDF)
             newDF = newDF.drop(newDF[newDF.NB_TRANSACTION.astype('int64') == 0].index)
             newDF.to_csv("data.txt", index=False, index_label=False, header = True, mode="w")
             newDF = pd.read_csv("data.txt", sep=",", header=0)
             newDF
```

Out[10]:

	SEANCE	VALEUR	CLOTURE	NB_TRANSACTION
0	4/1/2016	STAR	160.00	4
1	5/1/2016	STAR	159.80	4
2	6/1/2016	STAR	160.00	15
3	7/1/2016	STAR	164.80	7
4	8/1/2016	STAR	164.80	10
5	11/1/2016	STAR	169.68	2
6	12/1/2016	STAR	169.68	16
7	13/01/2016	STAR	169.00	12
8	15/01/2016	STAR	169.00	2
9	19/01/2016	STAR	168.98	1
10	20/01/2016	STAR	163.92	8
11	21/01/2016	STAR	165.00	10
12	22/01/2016	STAR	162.00	6
13	25/01/2016	STAR	161.10	8
14	26/01/2016	STAR	162.00	21
15	27/01/2016	STAR	165.00	18
16	28/01/2016	STAR	165.00	7

FIGURE 7 – Fusion des DataFrames

5.4 Ajout des nouveaux champs : Rendement et dividendes

Nous avons ajouté à notre Dataframe deux nouvelles colonnes : dividendes et rendement qui prennent zéro comme valeur initiale :

```
Entrée [25]: # add rendement
             newDF.insert(4,'Rendement',0.0)
             #insertion dividendes
             newDF.insert(5, 'Dividende', 0.0)
```

FIGURE 8 – Ajout colonnes dividendes et rendement

Puis nous avons attribué les valeurs de dividendes dans les dates exactes selon leur historique :

```
newDF.loc[newDF.SEANCE == "1/6/2016", "Dividende"] = 9.200
newDF.loc[newDF.SEANCE == "1/6/2017", "Dividende"] = 2.700
newDF.loc[newDF.SEANCE == "30/05/18", "Dividende"] = 1.220
```

FIGURE 9 – Insertion des dividendes

5.5 Calcul du rendement :

Finalement nous avons calculé le rendement logarithmique :

```
newDF.loc[newDF.SEANCE == "30/05/18", "Dividende"] = 1.220
total_rows = newDF.count()[0]
for i in range(0,total_rows-1):
  if(str(newDF.SEANCE.loc[i+1])[-2:]!=str(newDF.SEANCE.loc[i])[-2:]):
    newDF.Rendement.loc[i+1] = 0
  else:
    newDF.Rendement.loc[i+1] = m.log((newDF.CLOTURE.loc[i+1]+newDF.Dividende.loc[i+1])/newDF.CLOTURE.loc[i])
print(newDF.loc[newDF.SEANCE == "1/6/2016", "Dividende"])
newDF
```

```
93    9.2
Name: Dividende, dtype: float64
```

Out[25]:

	SEANCE	VALEUR	CLOTURE	NB_TRANSACTION	Rendement	Dividende
0	4/1/2016	STAR	160.00	4	0.000000	0.0
1	5/1/2016	STAR	159.80	4	-0.001251	0.0
2	6/1/2016	STAR	160.00	15	0.001251	0.0
3	7/1/2016	STAR	164.80	7	0.029559	0.0
4	8/1/2016	STAR	164.80	10	0.000000	0.0
5	11/1/2016	STAR	169.68	2	0.029182	0.0
6	12/1/2016	STAR	169.68	16	0.000000	0.0
7	13/01/2016	STAR	169.00	12	-0.004016	0.0
8	15/01/2016	STAR	169.00	2	0.000000	0.0

FIGURE 10 – Calcul du rendement

6 Test de normalité effectué

Après la préparation des données, il est nécessaire de vérifier que le rendement suit la loi normale, et comme des tests nous avons choisi le test de normalité Shapiro et le test de Jarque Bera :

Entrée [26]:

```
# test de normalité
print(stats.shapiro(newDF.Rendement))
print(stats.jarque_bera(newDF.Rendement))
```

```
(0.9482401609420776, 4.966767082792596e-14)
(74.18243217351993, 1.1102230246251565e-16)
```

FIGURE 11 – test de normalité Shapiro et test de Jarque Bera

=> Même après avoir effectué ces tests, on ne peut toujours pas savoir si le rendement suit la loi normale vu que le résultat du p-value obtenu est inférieur à 0.05.

7 Calcul de l'option

Avant d'effectuer le calcul de l'option, on doit soustraire quelques valeurs des paramètres : la valeur de la moyenne des rendements (qu'on a noté moyRendement) de sigma (qu'on a noté SigSqr) qui correspond à la volatilité du sous-jacent, et de U (qu'on a noté mu) avec les commandes suivantes :

Tout d'abord, nous avons fixé nos deux constantes $K = 145.72$, le prix d'exercice, et $S - zero = 135.72$ qui est équivalente à la dernière valeur de l'action selon notre base de données.

```
Entrée [34]: # moyenne
moyRendement = numpy.mean(newDF.Rendement)
print(moyRendement)
# somme
somme = numpy.sum((newDF.Rendement-moyRendement)**2)
print(somme)
# sigma²
delta = 1/250.0
sigSqr = (1/delta)*(1.0/(newDF.count()[0]-1))*somme
sigma = m.sqrt(sigSqr)
print(sigma)
# mu
mu = (0.5*sigSqr)+(moyRendement*250)
print(mu)

-5.275096070379245e-05
0.168808648697305
0.25923135455
0.02041270741507597
```

FIGURE 12 – Calcul de la moyenne du rendement, sigma et mu

Ici, et dans la suite de nos calculs, nous avons pris T=1, qui correspond à une année de vie de l'action. Aussi, r équivalent au taux d'intérêt sans risque est fixé à rss = 0.07.

```
Entrée [35]: #Methode 1 (Black & Scholes)
# rss : rendement sans risque
rss = 0.07
S_zero = newDF['CLOTURE'][newDF.count()[0]-1]
k=S_zero+10
```

FIGURE 13 – Fixer la valeur de k et S_zero

7.1 La première méthode : Black & Scholes

Pour pouvoir calculer l'option, il nous faut calculer d1 et d2 en utilisant la formule mathématique suivante :

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}[\ln(\frac{S_0}{K}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T]$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

```
d1 = (numpy.log(S_zero/k)+(rss+sigSqr/2))/sigma
d2 = d1 - sigma
```

FIGURE 14 – Calcul de d1 et d2

Finalement, nous avons terminé par calculer le prix :

```
prix1 = S_zero*stats.norm.cdf(d1)-k*numpy.exp(-rss)*stats.norm.cdf(d2)
print(prix1)
```

```
13.930299543714888
```

FIGURE 15 – Résultat de la première méthode

=>Prix = 13.93

7.2 La deuxième méthode : Simulation de Monte-Carlo

Pour le calcul du prix de l'option selon la deuxième méthode, il nous faut tout d'abord échantillonner un nombre important de valeurs aléatoires suivant la loi normale. Plus le nombre de ces valeurs augmentent, plus nos résultats seront précis.

```
Entrée [36]: #2eme methode
             # simulation de la loi uniforme
             uniform=numpy.random.uniform(low=0.0, high=1.0, size=10000)
             # simulation de la loi normale
             uniDF = pd.DataFrame(uniform)
             moy = uniform.mean()
             sd = uniDF.values.std(ddof=1)

             uniDF.insert(1,'normale',(uniDF-moy)/(sd))
```

FIGURE 16 – Simulation des lois

Ensuite, il faut calculer la suite S_t avec cette formule :
$S_t = S_0 e^[(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma\beta_t]$.
Son équivalent en python est le suivant :

```
# S
uniDF.insert(2,'normalee',uniDF['normale']*sigma)
test = (rss-(sigSqr/2))+uniDF.normalee
uniDF.insert(3, 'S', S_zero*(m.e ** test))
```

FIGURE 17 – Calcul de S_t

Après avoir trouvé S_t, nous allons procéder au remplissage d'une liste que nous avons créée, ici nommée xx, par la valeur maximale entre S_t –K et 0.

```
xx = []
for i in uniDF.S:
  xx.append(max(i-k, 0))
```

FIGURE 18 – Calcul du paramètre de la deuxième méthode

Finalement, nous avons terminé par calculer le prix :

```
prix2 = numpy.mean(xx)*numpy.exp(-rss)
print(prix2)
```

```
14.94242140695131
```

FIGURE 19 – Résultat de la deuxième méthode

=> Prix = 14.94

8 Conclusion

Apres avoir fait ces études , selon nos base de données et avec un prix de sous-jacent égale à 135.72dt et un taux d'intérêt sans risque à l'ordre de 7%, le souscripteur peut acquérir les sous-jacent à un prix d'exercice égale à 145.22dt après une année en payant 14dt par sous-jacent en option d'achat pour ce qui concerne la société de STAR.

Références

[1] S. DAHAN. Les limites du modèle de black scholes. 11/06/2013. Les limites du modeles de black and scholes.

[2] B. de Tunis. Site officiel. 01/01/2013. .

[3] ilBoursa. Star. 28/07/2009. STAR.

[4] Tuniscope. La star : Société tunisienne d'assurance et de réassurances. 28/07/2009. La star : Société Tunisienne d'Assurance et de réassurances.