延迟.pdf

最近怎么尽开新坑

- ——rust——还是蛮有意思的，可以优先
- ——这个玩意——这个先看看再说，反正就是把前面几个故事听完——毕竟正经的谁学得会啊
- ——ai4s——这个先咕着，观望观望
- ——golang——先把rust学了
- ——软件分析技术——这个还是好好学
- ——可视计算——这个打算先咕了
- ——数据科学基础——这个听听课就行了
- ——【不知道什么时候才能开始的】谈恋爱——笑死，估计大学四年都不会有女朋友了
- ——点集拓扑——摆，都可以摆
- ——非线性动力学——这个再说吧，没救了
- ——课内课程——比如数分三——比如计算机系统导论（应该先学学链接那部分，看时间了）
- ——WASM——摆
- ——

好像可以重定义

`start`

`\def \part{\partial}`

`\def \ket#1{\left|#1 \right >}`

`\def \bra#1{\left<#1 \right |}`

`\def \braket#1#2{\left<#1|#2 \right >}`

`\def \qcc#1#2{[\hat{#1},\hat{#2}]}`

`end`

History

- 时间
  - 量子力学里时间是一个参数而不是一个力学量
  - 相对论里时间和空间是可以互换的，都不是一个好的量，四维的时空才是好的量
- 各种新的东西，基于量子理论的材料技术
- 相对论量子力学——**人类科学发展史上理论和实验最接近最精确的**——（比如裂变fission和聚变fusion）
- 从1900年到大约1930年，基本全部建立。
- 扎堆的一波一波的犹太人，量子力学的几乎全部的数学基础都来自**哥廷根**，相当一部分物理来自哥廷根。
- 年轻的波尔——
- 更年轻的海森堡——研究生到处游学——游荡到了哥廷根大学（各种大佬，比如冯诺依曼在短暂53年的时间里，在数学）

- 冯的学长，魏格纳在九十三岁的时候说**【我们花了一生的时间，去了解了我们值得我们去做的问题，但是我们却没有时间去做了。】**
- 自旋为1/2，狄拉克方程；
  自旋为1，麦克斯韦方程；
  自旋为2，张量场，爱因斯坦场方程
- **量子力学不是凭空产生的，已经有无数经典力学的奠基。**

经典力学

- **很久很久之前**
- Kepler（开普勒）把Tycho（毕谷）毕生的观测数据搞成了三大定律。
- Hooke Law是（胡克）留下来的为数不多的几个定律
- Galileo（伽利略）有钱，有了望远镜，比萨斜塔之类的。提出了惯性的概念（和动量变换，角动量变换联系）
- Descartes（笛卡尔）——业余数学家，物理学家，商人，政客，顶级的哲学家。
- Newton（牛顿），从第二定律出发可以推出很多东西。
- Euler （欧拉）的方程，从而研究转动的【进动、章动、自转】
  - xxx距一般就是拿某个东西去叉乘某个东西
- Bernoulli's family
- **分析力学**
- 经典力学在牛顿力学的基础上发展出了**分析力学**【哈密顿量，正则，对易关系之类的都在分析力学中都有，量子力学】
- 3L：拉普拉斯（拉普拉斯算子，拉普拉斯方程），
- 主要是两大支方法
- 【拉格朗日方法】【位形空间】
- 【哈密顿力学】【相空间】——所有的正则变换的生成函数都是在做勒朗达变换。
- 数学物理方法里面有三个函数：勒让德函数，贝塞尔函数，厄密函数
- 哈密顿力学被直接用到量子力学里面。
- 在最简单德特殊情况下，哈密顿量为能动减势能，拉格朗日为动能加势能。量子力学中使用了这个
- 后来，哈密顿力学和拉格朗日力学都用到了量子力学。
- 非相对论，一般都是哈密顿体系，相对论情况下用拉格朗日力学，因为拉格朗日量是闵可夫斯基空间四维洛伦兹变换下不变的标量，但是哈密顿量不是
- > 拉格朗日是意大利人+法国人
  > 研究电磁场的几乎清一色的法国人【库伦——】
  > 高斯：数学家+物理学家+天文学家+......有一堆定律一堆定理。
- **经典电动力学**
- 麦克斯韦从电磁学的一套实验出发，得到一套方程
- 头两个方程是关于散度的：
- 高斯定律+高斯磁定理，分别可以从库仑定律
- 后面两个是旋度定律，分别从安培和法拉第定律推出来的。
- 麦克斯韦是关于场的，洛伦兹是关于带电粒子在电子场中如何受力的。$f=\rho(\mathrm{E}+(v/c)\times B)$

- 麦克斯韦最天才地提出了一个叫做位移电流的东西，不然没法和电荷守恒定律自洽。
- **热力学**
- 第零定律：存在一个叫做温度的东西
- 第一定律：能量是守恒的。
- 第二定律：熵是增加的，世界会越变越乱。
- 第三定律：存在绝对零度，永远都达不到
- **统计力学**
- 麦克斯韦和玻尔兹曼在这方面作用很大。
- 玻尔兹曼：建立了几乎整个统计力学，鞠躬尽为，第二次自杀成功。
    - 他的学生，埃伦费斯特提出了一个定理（Ehrenfest theorem），他也自杀了，自杀前把自己的小儿子开枪打死了。
- 提出了麦克斯韦玻尔兹曼分布，又推出了速度分布——正态分布。——还提出了能量均分定理。
- 在分析力学（哈密顿力学）里面蹦出了一个数学家，叫做刘维尔
    - 推出了一个定理（方程），变成了无论是经典力学还是量子力学都很重要的方程。通过这个方程，当 $\partial\rho/\partial t = 0$ 的时候就是平衡态。可以推出三个系综：【微正则系综，正则系综，巨中则系综】——和外界完全无交换，交换能量不交换物质，既可以交换能量又可以交换物质，都是玻尔兹曼通过刘维定理推出来的。
- Gibbs 吉布斯 一个美国人——吉布斯自由能（和汉姆霍斯自由能 ）
    - 数学家，物理学家，化学家；是矢量分析
    - 在美国，一个大学里面，长期做无薪教授——没钱！！

-

光谱学

- 光谱学积攒了大量的观测数据
    - 就好像第谷——开普勒——牛顿——
- Rydberg，Balmer 这样的人，得到经验公式—— 就是那个两个自然数平方倒数差和波长的关系
    - 像需要牛顿公式一样......需要一个......第一性公式！
- 波尔的旧量子论推出了和前面一样的公式，又预言了更多的东西。
-
    - 光谱会发生变化，外界的磁场会改变光谱的特性
    - 外界的电场也会改变光谱的特性，会出现分裂和移动的情况。

塞曼效应

- 磁场会影响光谱。
- Zeeman（塞曼）——因为这个获得了诺贝尔奖
    - 其中一个导师是，洛伦兹【变换的那个Lorentz】，另一个是?
        - 洛伦兹（1853-1928）因为名气太大了，不能因为说话不谨慎，晚节不保，提出洛伦兹变化不能迈出【以太不存在】这么一大步
        - 普朗克——德高望重，也不敢
        - 老了之后什么都有了就不敢了。
    - 四维空间中，能量和动量凑一块的四维动量在四维空间才是一个矢量，单独的动量不是一个矢量。

  - 洛伦兹力的那个洛伦兹也是他
  - 电磁场的规范不变性【磁场和电场可以分别用矢势，标势来进行表述，但是同一个磁场和电场用的势函数有无穷多组选择，我们加一些约束条件，叫做取了规范，我们有库伦规范，洛伦兹规范，等等的规范】
    - 洛伦兹规范是在相对论情况下很好用的规范，那个洛伦兹是 1928-1891的
  - 还有一个洛伦兹，非线性动力学的，有一个洛伦兹方程【洛伦兹-洛伦兹方程，说明是受到了先辈的启发】。
- 通电了，带来了磁场，一根谱线会变成几根谱线
- 有时候出现三根【磁场比较大】，调小之后会变成两根【磁场比较小】
- 今天称为正常塞曼效应（三根）和反常塞曼效应（两根）。
- 在塞曼的时代用经典力学就可以解决正常塞曼效应
- 也可以用非相对论量子力学解释正常塞曼效应——但还是解释不了反常塞曼效应
- 【这个必须使用相对论量子力学加以解释，但也只需要用弱相对论近似就能——狄拉克方程近似之后变成保利方程】

Stark效应

- 1913年，电场会引起光谱的分裂。
- 我们需要用量子力学解出这些效应。
- 最早仅限于静场——交变电场有交流Stark效应，也叫做光平移，在量子技术中经常出现。
- 【Stark是一个坚定的纳粹分子】

黑体辐射：

> 感觉 故事 听了好多好多遍。

- 能量和温度对应，对于天体物理而言，可以通过辐射能量来看温度。【分成O星，B星，……，M星，也就有蓝移，红移等等——排序大概是 `O`h! `B`e `A` `F`ine `G`irl, `K`iss `M`e！ 】
- 有好多人研究了黑体辐射，比如赫兹，玻尔兹曼
  - 有好多赫兹，老赫兹（做电磁波的，英年早逝，比诺贝尔死得还早），小赫兹（老赫兹的侄子），小小赫兹（B超，小赫兹的儿子），小小小赫兹（）
- 有一个Wien公式【短波好，长波不好】
- 又有一堆人，Rayleigh勋爵【第三代】，一个公式，1900年，【长波好，短波不好】
  - 天为什么是蓝的（Rayleigh散射），晚霞为什么是红的（）？
  - 到1905年，瑞利金斯公式
- 普朗克把两个拼在一块，用了一个假设

> 如何复习热力学统计力学（笑死大学一点物理都没看过）
>
> 1、推Wien公式
>
> 2、推Rayleigh–Jeans law
>
> 3、推普朗克公式

光电效应

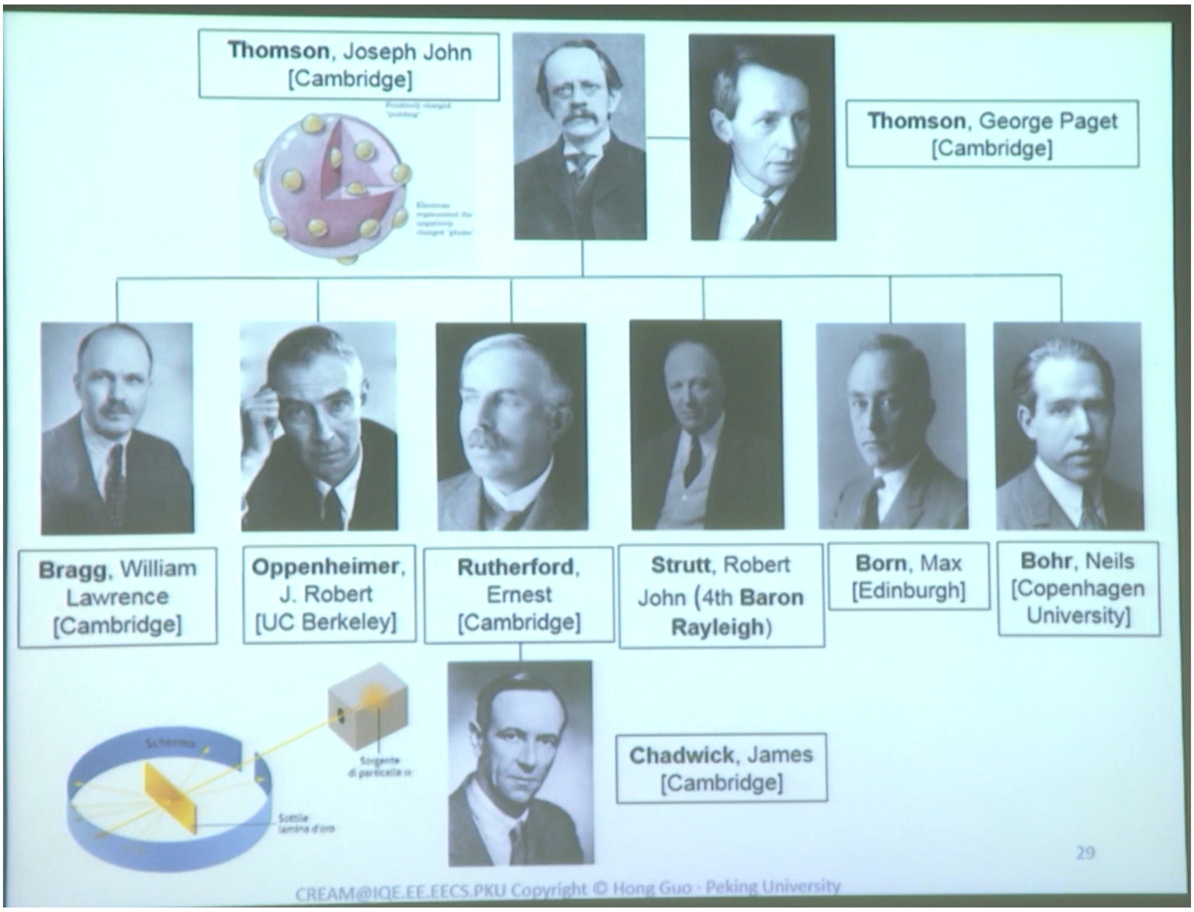
- 1839大概就有了。
- 在人们还没有遇到电磁波的时候，光电效应在赫兹时代就有了实验上的。
- 有个物理学家 Lenard 做了更多的事情，关于光电效应做了更多的实验，获得了1905年诺贝尔物理学奖
    - 它和赫兹在一个组，赫兹在搞这个，不过赫兹先去世了。
- J J Thomson 也搞了搞这个东西。
- 然后有个瑞士的专利员——从理论上进行了推导，用到了普朗克的启发。
- 1916，美国物理学家 Millikan 做了十年实验，系统研究光电效应。
- 理论解释可能需要到高等量子力学，很复杂。
- ——光的能量是量子化

Compton散射实验

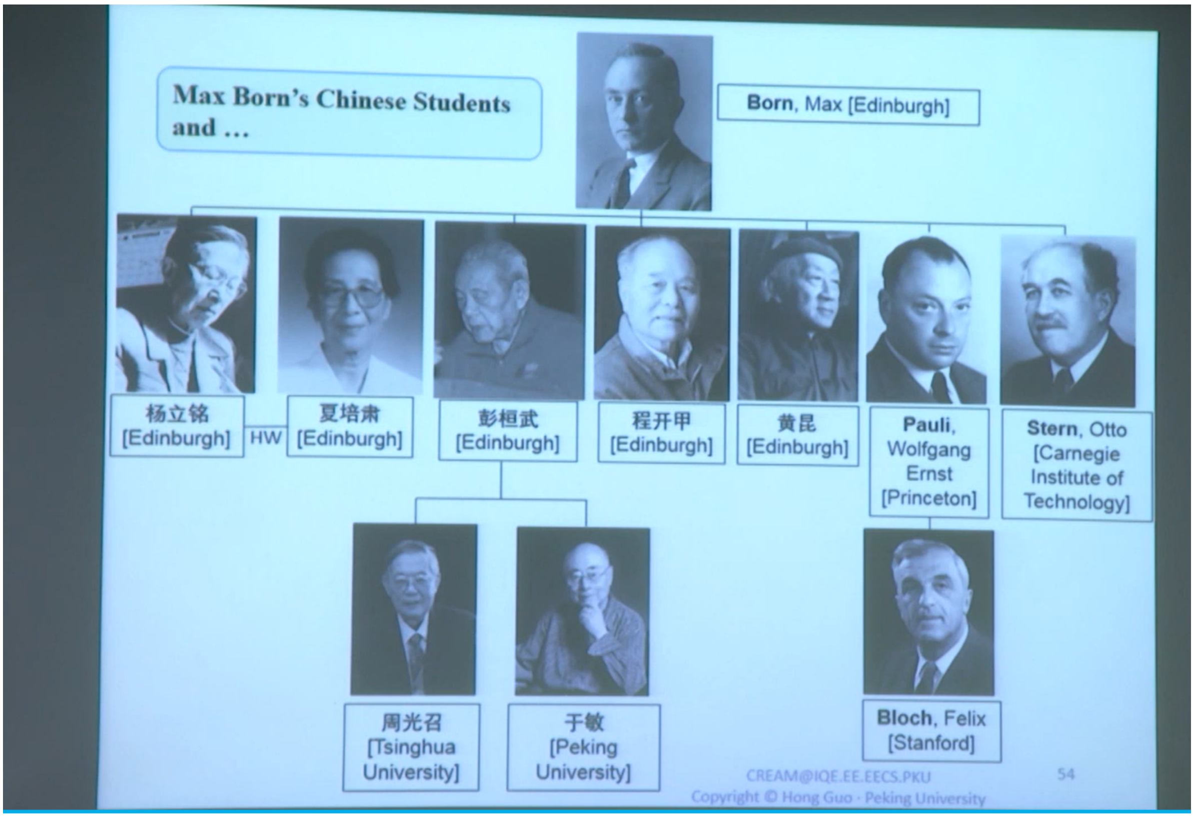
- 1922，Compton康普特
- 德拜做了理论解释，获得了诺贝尔化学奖
- ——光的动量也是量子化

原子

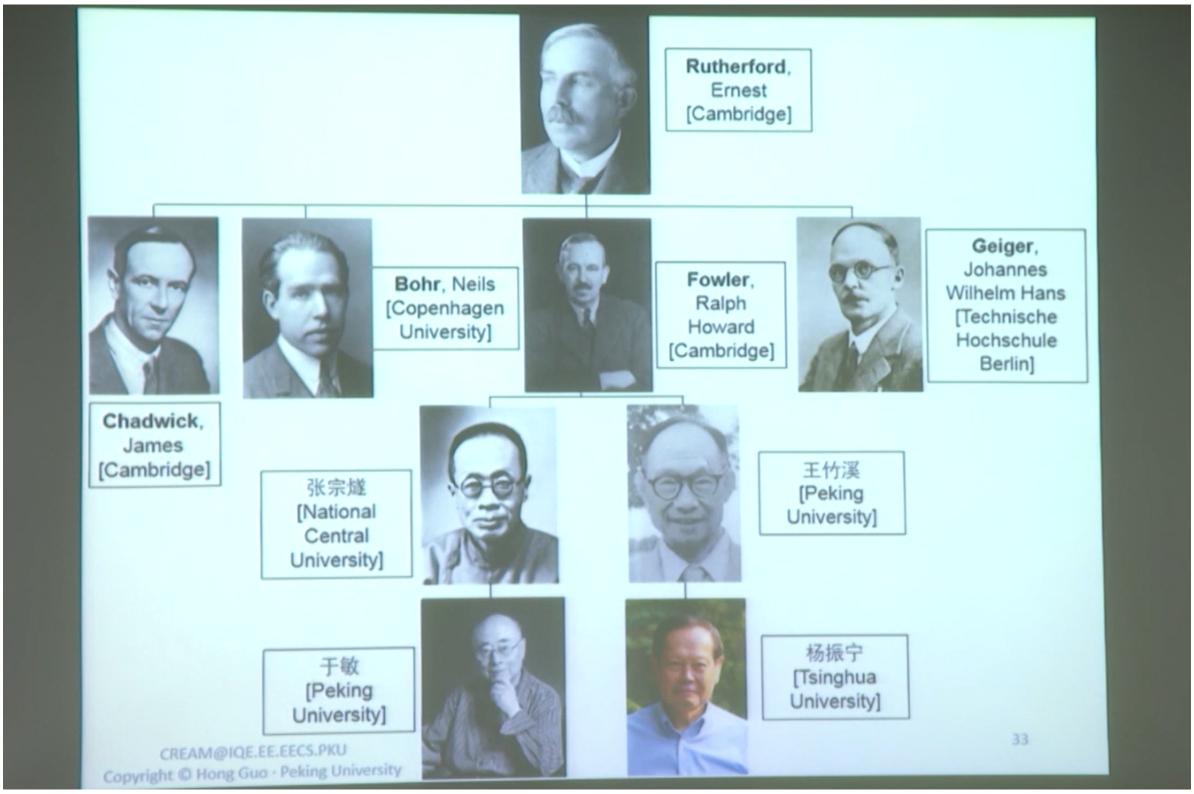
某个学术家族把这个研究给包圆了。



> 据说这个 Born,Max 和中国很有缘分。



原子的故事不再赘述。



Bohr 心无旁骛地......第一个吹响了量子力学的号角。

【如果模型是对的，那么力学错了，力学应该修改】

旧量子论

> 这个桥梁可不可以不要？我们能不能没有旧量子论，直接有量子力学？

- 1913~1924
- 现有波尔的假设

- 这段时间很热闹，比如有一个索末菲——细化成索末菲量子化条件（有些也是得量子化的）
    - 一生被提名八十多次，拥有
- 朗德：原子的磁矩和外加磁场的相互作用和某个系数有关，这个系数叫做朗德因子（学了相对论量子力学可以求解这个系数，但是朗德用旧量子论把这个因子算出来了）
- > 比较一下，用旧量子论推朗德因子和用量子力学推朗德因子的差别？
- 著名的 Stern-Gerlach 实验
    - 做量子信息的人很关注这个，角动量在空间的取项也是量子化的。
    - 发现了一种叫做自选角动量的东西，不管什么状态，这个角动量状态不变，认为是内禀角动量，自旋角动量。
    - 用来区分两个粒子的关键的东西：质量，电荷，自旋。
- **波尔**
- 迈出了一小步——
    - 【或许角动量是分立的？】能级和能级的能量差，差出了一个Rydberg公式。
        - 还搞出了一个常数 $E = m_e e^4/8h^2\delta_0^2$
    - 后期作为量子力学的 “原子核”。
    - 游学生海森堡这么评价：波尔更像一个哲学家。
        - 波尔把不确定性原理上升为互补原理
    - 以波尔为代表的哥本哈根学派的解释
        - 对同一个理论有不同的解释
- 理论：
    - 电磁学中库伦中的一些东西
    - 力学里得库仑力
    - 以及一些分立的概念
    - ~~你需要在半个小时之内推出这个东西，不然说明你的经典力学和经典电动力学没有学好~~
- 都是一回事，中心立场是指的是和径向无关，中心立场里面有一个特别重要的是平方反比律
- 伯特兰（贝特朗）定律：只有两种中心立场，粒子运动走的曲线是闭合曲线
- 拉普拉斯—龙格—楞次矢量（LRL）矢量守恒——在群论里是一个SO4群。
    - 使得天体里面有闭合曲线这件事。
    - 能子矢量守恒：会有n^2简并？
    - 简并？有一个主量子数的概念？一个能量对应好多不同的态。
        - 一个角量子数L 对应着 2 L+1个磁量子数。L受制于主量子数 n，
- 提出了一个神秘的常数，【相对论量子力学能推出来，但最早是旧量子论被索墨菲用旧量子论推出来的】
- 有一个叫做：精细结构常数，这个常数是没有量纲的。
    - 1/137
    - 这个常数的来源是什么？不知道。
- 问题：譬如不能很好解释【反常】塞曼效用——只能通过相对论量子力学。譬如不能推出海森堡不确定性原理。譬如
- 有很多需要解释的关键的实验，有些只能通过相对论量子力学，有些本科的初等量子力学就能加以解释。

  如果能分清这些东西，并对可以解释的加以解释，说明你很厉害，这门课学好了。
- **索墨菲**
- 得出精细结构常数 $\alpha = \frac{1}{137}$
- Sommerfeld-Wilson Quantization Condition：

- $\oint p\mathrm{d}q = n\hbar, (n=1,2,3...)$
    - > 从量子力学出发推出索墨菲的这个性质是很有意思的事情?
- 能量乘时间和位置乘动量的量纲是一样的
- **实验**
- 著名的 Franck-Hertz 实验，证明了原子里面一定不可能是连续的。
- Stern-Gerlach 实验：银原子（中性）穿过磁场之后变成两束。
    - 原子的角动量只有两个取向，进一步研究，这个角动量被命名为自旋角动量。
    - 只有单个电子起作用，自旋角动量有两个。
- Davisson-Germer
    - 物质波的干涉衍射?
- **德布罗意亲王**
    - 为法王征战，得到了一个可以世袭的爵位
    - 为德皇征战，得到了一个可以世袭的爵位
    - 学历史的人，经常有开阔的思维，能够借古喻近。然后又很有爱因斯坦的背书，家里又很有背景
    - 然后三年之后有个著名的实现，证明了——然后——
    - 波尔和爱因斯坦争论的时候，德布罗意和薛定谔旁观，似乎并不认为波函数解出来是几率波。

量子力学

- 相对论告诉你 $E=mc^2$，但相对论没有告诉你你怎么做这件事。
- 海森堡——矩阵力学【Max Born作为三十多岁年轻的教授，提供了数学基础】
- 薛定谔——波动力学——猫——薛定谔方程——其实一开始是相对论的克莱因-高登方程
- 狄拉克——也不是一开始学物理的，但数学特别特别好
    - 拉格朗日太厉害啦，欧拉-拉格朗日方程。一个意大利法国人
    - 哈密顿，特别佩服拉格朗日。
    - 狄拉克是一个像拉格朗日一样的人，或许可以说是开创了一个新的数学，有了 Delta 函数。有了广义函数。没极限？弱极限！不收敛？弱收敛！没连续？弱连续！——广义函数！
    - 还发明了狄拉克符号！统一了
- Max Born——因为对量子力学的诠释获得了诺奖。
    - 一个助手，培养，有了《光学原理》这本书。
- Ehrenfest
    - 导师玻尔兹曼
- 关于对称性的讨论
    - Wigner的对称性定理，D矩阵，3n-j符号。
    - 美籍匈牙利人，参加了曼哈顿计划。
    - 群论数学里面有两个系数，CG（Clebsch Gordan）系数，这两个是研究群论的数学家，在量子出现之前就去世了。

量子动力学阶段

- 在经典力学时代就有一个和海森堡方程特别像的经典力学方程。
- 有一个特殊的态，使得不确定性原理的不确定性达到最小：最小测不准态(有人叫最小测不准波包)
- 有一个海森堡方程：$\dot{H}=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V(x,t)$
- 关于薛定谔方程：$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)=\hat{H}\psi(x,t)$

    - 抛物类；虽然只有一阶导，看着像扩散方程，但时间的一阶导数前面有一个虚数单位，所以是一个波动方程。
    - 双曲类；波动方程，描述波动的方程，有一个关于时间的二阶导数。
    - 椭圆类；和事件无关，之和空间的拉普拉斯有关。
- 大家更青睐于波动方程是因为，当时的人们更喜欢解方程。
- 直到后来，狄拉克用狄拉克符号 `\bra`，`\ket` 去证明了一回事。是在不同的图像底下看待同一个东西。
    - 海森堡方程：假定力学量是随时间变化的东西，系统状态不随时间变化。——海森堡图像
    - 用 $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|v\rangle=\hat{H}\,|v\rangle$ 这个视角，在1926年。
    - 狄拉克提出了量子力学的公理化体系——不是数学家，甚至不是科班出生的物理学家，只是对这个很有兴趣。。过了一两年，冯诺依曼也独立提出了量子力学的公理化体系。
    - 所以这个公理，上个世纪三十年代，狄拉克-冯诺依曼 公理
- 狄拉克函数，零的地方无穷大-------数学家提出了一堆东西，让广义函数论成为一个自洽的东西。还有了一堆delta函数新的推广的东西。
- 费米-狄拉克统计：微观粒子只有两种统计，只和它们的自旋有关。
- 自旋为整数的**玻色子**，。喜欢扎堆，可以不断降低温度实现玻色爱因斯坦凝聚。
    - 普朗克分布就是最特殊的玻色爱因斯坦凝聚的结果。光子是一种静止质量等于0的玻色子。
- 自选为半奇数的**费米子**，电子，正电子，质子，中子
    - 最大的特点，不喜欢扎堆，比如泡利-不相容原理，每一个能级只能有最多一个电子（我印象中自旋可以不一样）。
    - 为什么不相容？提到，不证明。要到高等量子力学，量子统计力学。
- **狄拉克方程**——带领人们进入到一个全新的领域的非常重要的出发点。
- 矢量（vector），张量（tensor），标量（scalar）......全量（）是什么？
    - 一个美国物理学家+化学家+数学家，吉布斯（吉布斯自由能）（长期做无薪教授），做出了矢量分析这种很好的东西。
    - 狄拉克方程，人们找出了大量微观粒子的反物质，还有什么负能量海之类的概念。
- Born **解释**：波函数是个几率波？$P(x,t)=|\psi(x,t)|^2$
    - 二十世纪，知道了光是电磁波，知道了经典电磁场理论。
        - 1950s 和他的学生一起写的《光学原理》，光学里面的很多很像，比如最小作用量原理和费马原理如出一辙。
- 我们知道，时间平移不变性，空间平移不变性，带来了能量守恒和动量守恒。
- 量子力学里面有一些新的守恒：
    - 宇称守恒，是 空间**反演** 不变性，带来的结果。
    - 时间反演不变性不会带来守恒，但是有一些现象，比如超选择定则。
- 泡利：
    - 只要还要和原子里的电子打交道，就离不开泡利矩阵，泡利矩阵还和泡利方程有关（狄拉克方程在弱相对论近似下，只考虑自旋的相对论效应）。
    - 或许是一个很喜欢纯粹做学问的人，很多未发表的东西都写信给别人。
- 费米：
    - 据说被称为最后一个既懂物理理论也懂实验的。
    - 据说抽烟的时候把卷烟的纸，看看冲击波过来，看纸能飞多远。
- 还有很多很多人添砖加瓦
- Uhlenbeck，Goudsmit，Kramers。
- 相对论量子力学的发展：必须把标量和矢量重新定义，才能适应闵可夫斯基空间。
- 狄拉克主导，率先提出或许可以以拉格朗日力学为基础（量子力学的发展只用了哈密顿力学里的特殊形式）。

- 费曼从拉格朗日力学出发，搞出了一套新的量子力学体系，被称为：路径积分量子力学。
    - 我们最基本的相互作用，就得用路径积分
    - 哈密顿量不是一个洛伦兹协变下的标量，拉格朗日量是这样的。
    - 所以当我们研究相对论量子力学和量子场论和相互作用的时候，我们必须用上拉格朗日量。
- **数学**
- 希尔伯特，希尔伯特空间，函数空间中的态矢量。
    - 物理学家直接扩展到连续无穷维（数学家不敢干），归一化方法用神奇的狄拉克方程。
- 冯诺依曼，魏格纳，学数学学得非常快！
- （他1925年开始搞量子，1927年得出了这堆东西）
    - 冯诺依曼就提出了三条公理：态假设，算符假设，测量假设。是后来的五条公理的基础。
    - 还提出了冯诺依曼熵，之后香农才提出香农熵，只要 ρ 取本征值。
    - 熵，焓......之类的东西。
- 经典力学里面有了的刘维方程推广到量子力学里面
    - 冯诺依曼方程/密度矩阵方程/朗道方程/量子刘维方程
    - $i\hbar\frac{\partial\rho}{\partial t}=[H,\rho]$
    - 短暂的五十多岁的生涯为人类做出了非常巨大的贡献。
- 冯诺依曼：为了他的导师希尔伯特写了【量子力学的数学基础】
- **争论**
- 波尔和爱因斯坦的论战或许今天都没有结束
- 【量子力学对物理的描述是不是完备的】
- Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality be Considered Complete
- 催生了量子纠缠和量子纠缠的应用，副产品。
- 1972年，贝尔不等式；
- 1972年，CHSH不等式，在光学里面更容易测量的一些量；
- 量子论和相对论，在基本的概念上是矛盾的。
    - 相对论，时间和空间是平等的。
    - 非相对论量子力学，时间不是力学量。
- **应用**
- 半导体，激光，等等。
- 这个东西还是暑校的课来得多。

经典力学

牛顿力学

- 空间：欧几里得空间（物理空间，所有的事物都在这个空间里面运动，变化）
- 笛卡尔坐标
- 惯性？——质量就是惯性，质量越大，惯性就越大。
- 动量定理：牛顿第二定律——
- $\vec{p}=m\vec{v},\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{F}$，$\frac{d\vec{l}}{dt}=\vec{x}\times\vec{F}$
- 力和动量的改变成正比，力矩和角动量的改变成正比。
- 有时候把动量叫做【线动量】，角动量叫做【角动量】

- 角动量的惯性，转动惯量：mr^2，线动量，惯性：m
- **质点**
  - 质点系的概念：可以研究两体问题
  - 质心系：H质子的质量是电子质量的1836倍，可以看成质心系，就像绕着太阳转一样。
- **刚体**
  - 只能在非相对论情况下成立——相对论情况下三维的矢量都不是矢量，保持不变的是四矢量。
  - 非相对论情况下，任意两点如果距离保持不变，可以看成一起的。
  - 研究一个质点的问题只需要三个自由度。
  - 刚体只需要用三个角度就能描述——叫做欧拉角。——还有一种表示是轴+角
  - 三个运动：进动，章动，自转
    - 进动：
      - 矢量绕着轴去转
    - 章动：
      - 绕着轴转的时候还会不断点头抬头
    - 自转：
      - 自己还在转。
- 牛顿力学给我们提供了一大堆的模型和概念

分析力学(Analysical mechanics)

> 我可以不用画图，我可以用数学上的推导，计算，用分析的方法把这些东西都算出来。
>
> 欧拉，拉格朗日，等等人努力，为了研究有约束的问题（constraint problems）
>
> 比如一个球的开摆：一个球可以受力分析（两个球开始摆——今天我们知道这个是Chaos，搞不好）
>
> 什么是约束力？为了保证它能进行一个运动的（比如小幅度的圆周运动），那么就有一些约束条件，只和为止坐标有关的约束条件叫做完整约束（holonomic constraint）。

拉格朗日力学：

- 从最小的变分原理出发，推导出完整的力学。$\delta S = 0$。
- 拉格朗日方程（欧拉-拉格朗日方程）
- 可以进一步推导出量子场论的方程，是四维协变形势拉格朗日密度满足的拉格朗日方程。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}) = \frac{\partial L}{\partial q_a}$$
$$a = 1, 2, 3, \ldots$$

- L 是**拉格朗日量**，量纲是能量。是关于 $(q(t), \dot{q}(t), t)$ 的函数，函数的函数称为泛函(functional)，即 $L = L(q(t), \dot{q}(t), t)$
- S 是**作用量**(Action)，是对拉格朗日量的时间的积分，是广义坐标的一个泛函，S 是 q 的函数。$\dot{q}$ 没有了，只剩下 $\dot{q}$ 了。$S = S[q]$。作用量的量纲是能量乘时间，也就是位置乘以动量，也就是角动量的量纲。
- 普朗克常数的量纲是：能量乘时间。$\hbar = \frac{h}{2\pi}$：reduced plancles constant
- **广义坐标**，n 个点就有 $3n$ 的坐标，但是有约束，其实是不独立的，所以我们只对不受约束的其中一些量（可能不是原来的）感兴趣，而留下来的坐标是线性无关独立的（互相之间偏导数为0），这些坐标是广义坐标。
- 广义坐标所在的空间，我们称为**构形空间(Configuration space)**。
- 那么这时候的欧拉朗格朗日方程的方程数只有 d 个，比 $3n$ 个比较小。

- **这个看起来不错** 第1章 拉格朗日量 - 知乎 (zhihu.com)

哈密顿力学

- 和拉格朗日力学等价
- 其空间叫做**相空间(phase space)**，除了有 $q(t)$ 广义坐标，还有 $\phi(t)$ ， $(q(t), \phi(t))$ 。
- $q(t)$ 在哈密顿力学里叫做正则位置(canonical position)
- $\phi(t)$ 叫做正则动量(canonical momentum)——（也叫广义位置的正则共轭）
- 加起来，叫做正则坐标……
- 有好多正则……
- 从拉格朗日量做勒让德变换

$$L(q, \dot{q}, t) \overset{p=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}}{\Longrightarrow} H(q, p, t)$$

- 这时候就没有速度了，只有一个关于正则动量的东西
- 拉格朗日量 $\frac{\partial L}{\partial p} \equiv 0$。完全与动量无光。哈密顿量与速度完全无关，$\frac{\partial H}{\partial \dot{q}} \equiv 0$
- 从 D 维空间变成了 $2D$ 维空间。
- 运动方程从 D 个欧拉-拉格朗日方程（E-L方程）变成了哈密顿量得到的一组方程：

$$\begin{cases} \dot{q}_a = \frac{\partial H}{\partial p_a} = [q_a, H] \\ \dot{p}_a = -\frac{\partial H}{\partial q_a} = [p_a, H] \end{cases}$$

  有 $2D$ 个一阶微分方程——哈密顿正则运动方程，正则方程。
- 一般化，对于正则坐标的函数 $\forall f(p, q, t)$
- 有：
- $$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [f, H]_{PB}$$
  $$where. [f, H]_{PB} = \sum_a \left(\frac{\partial f}{\partial q_a}\frac{\partial H}{\partial p_a} - \frac{\partial f}{\partial p_a}\frac{\partial H}{\partial q_a}\right)$$
- 叫做PB泊松括号
- **这个看起来不错** 力学（六）—哈密顿力学之哈密顿方程与泊松括号 - 知乎 (zhihu.com)
- 有两个方程都和这个很像，一个是海森堡方程
- $$\frac{d\hat{f}}{dt} = \frac{\partial \hat{f}}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar}[\hat{f}, \hat{H}]$$
- 另一个是ehrenfest therom
- $$\frac{d}{dt}\left\langle \hat{f} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \hat{f}}{\partial t} \right\rangle + \frac{1}{i\hbar}\left\langle [\hat{f}, \hat{H}] \right\rangle$$
- 直接定义了量子力学里面什么是守恒量——当 $[\hat{f}, \hat{H}] = 0$，即与 $\hat{H}$ 对易的量
- 只不过量子力学里面
- $$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$$

  [A,B]不一定等于[B,A]在加了括号之后。

- 叫做量子的正则对易关系（QCC,Quantum canonical commutator），从经典到量子
- 并不是所有的物理量都能写成矩阵，但是所有物理量都是算符。只有有限的分立的东西才能写成矩阵，无限的连续的不行。

相空间

- 导出了一个方程，刘维定理，是量子统计力学所需要的。
- 证明相空间里面有个变换，叫做正则变换，可以把位置，动量，哈密顿量都变换，但是**对易关系不变**（泊松括号的值不变，也就意味着运动方程不变，也就意味着位置和动量随时间的导数不变）
- 相点就是在像空间中的点，一个相点叫做一个态，**相点密度**是一个正则坐标的函数，相点密度一定是满足归一化。$\int \rho(q,p,t)\mathrm{d}^D q\mathrm{d}^D P$=1。
- > 包含了所有的运动
- $$\frac{d\rho}{dt} \equiv 0 \Longrightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t} = [H,\rho]_{PB}$$

  上面这个方程叫做**刘维尔定理**，推广到量子里面
- $$\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{H},\hat{\rho}]$$
- 也可以叫量子刘维方程，冯诺依曼方程，朗道方程......我们叫**密度算符方程**
- > woc，密度算符？？？？？

正则

- 正则坐标
- 正则对易
- 正则运动方程
- 正则变换
  - $H(q,p,t)$ 变换到 $K(Q,P,T)$，有些东西没有变：
  - $\dot{q} = \partial H/\partial p, \dot{p} = \partial H/\partial q, \dot{Q} = \partial K/\partial P, \dot{P} = \partial K/\partial Q$
  - $[q_i,p_j] = \delta_{i,j}$
  - $[p_i,p_j] = [q_i,q_j] \equiv 0$ 。
    - 推广到量子力学里：$[\hat{q}_i,\hat{p}_j] = i\hbar\delta_{i,j}$
  - 同时有 $[Q_i,P_j] = \delta_{i,j}$
  - $([Q,P]_{PB})_{QP} = ([Q,P]_{PB})_{qp} = \delta_{i,j}$。
  - 既然这个是相等的，在正则变化下所有的对易关系都是不变的。

经典电动力学

- 矢量代数
- 矢量微积分
- 如何从实验定律推出麦克斯韦方程
- 麦克斯韦方程的性质
  - 带电粒子的拉格朗日量和哈密顿量

矢量分析

爱因斯坦求和约定

$\sum_{i=1}^{3} x_i \vec{e}_i = x_i \vec{e}_i$ 我们称为哑指标

对于三维欧几里得空间

内积（点乘）：$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}\ (i, j = 1, 2, 3)$

- 其中 δ_{ij} 叫做 Kronecker Delta Tensor

外积（叉乘）：$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \epsilon_{ijk} \vec{e}_k\ (i, j, k = 1, 2, 3)$ 右手定则的方向。

- ϵ_{ijk} 叫做 Lavi-Civita Tensor(Lavi-Civita symbol)。——ijk不能相同。

两个张量截然相反又有联系。

- $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ 是一个对称张量。
- $\epsilon_{ijk} = (-1)(\epsilon_{jik})$ 任意两个交换会乘上负一
- $\delta_{ij} = [i = j]$ 用于描述正交性和归一性。
- $\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 \mid \text{偶排列} \\ -1 \mid \text{奇排列} \\ 0 \mid \text{非排列} \end{cases}$

如果 f_{ij} 是对称张量，则 $\epsilon_{ijk} f_{ij} \equiv 0$，对称反对称缩并为0。

任何矢量 f，$f_i \delta_{ij} = f_j$

设 $\vec{A} = A_i \vec{e}_i, \vec{B} = B_j \vec{e}_j$

则 $\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_i \vec{e}_i) \cdot (B_j \vec{e}_j) = A_i B_j \delta_{ij} = A_i B_i$

$\vec{A} \times \vec{B} = (A_i B_j) \epsilon_{ijk} \vec{e}_k = (\vec{A} \times \vec{B})_k \vec{e}_k$

- 第 k 个分量 $(A_i \times B_j)_k$ 为 $\epsilon_{kij} A_i B_j$

$\det M = \epsilon_{i_1, i_2, .., i_n} M_{1i_1} M_{1i_2} \ldots M_{ni_n}$

- 所以就有了 $\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = \epsilon_{ijk} \vec{e}_i A_j B_k$
- (1) $\epsilon_{ijk} = \vec{e}_i \cdot (\vec{e}_j \times \vec{e}_k)$
    - $\epsilon_{ijk} = \begin{vmatrix} \delta_{1i} & \delta_{2i} & \delta_{3i} \\ \delta_{1j} & \delta_{2j} & \delta_{3j} \\ \delta_{1k} & \delta_{2k} & \delta_{3k} \end{vmatrix}$
- (2) $\epsilon_{ijk} \epsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}$
- **重要(3)**：$\epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}$
- (4) $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$
- **重要公式**

- $\vec{\nabla}(uv) = u \vec{\nabla} v + v \vec{\nabla} u$
- $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times A) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot A) - \vec{\nabla}^2 A$
    - A的旋度的旋度，等于A的散度的梯度，减去A的拉普拉斯
- $\boldsymbol{\nabla} \times \vec{\nabla} \phi \equiv 0$

- 梯度无旋
- > 看不懂，救命
  >
  > [为什么在矢量分析中，梯度无旋，旋度无散？ - 知乎 (zhihu.com)]

- $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A})\equiv 0$
  - 旋度无散（无源）
  - > 不会）
    >
    > 证明好像是依据对称反对称张量的性质
- $\nabla^2(\frac{1}{r})=4\pi\delta^{(3)}(\vec{x})$
- $\nabla(\frac{1}{r})=-\frac{\vec{x}}{r^3}$
  - 就像平方反比律，左边和势函数很像，右边大概是力
- $\vec{F}=-\nabla(V)$

广义Stokes定理

- $$\int_{\partial\Omega}w=\int_{\Omega}dw$$
- 比如牛顿积分公式?
- $\int_a^b f'(x)dx=\int_a^b df=f(b)-f(a)$
- 比如格林定理?
- $\oint fdx+gdy=\iint_D(\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y})dxdy$
- 比如高斯定理（高斯好厉害，还有两个高斯定律）Gauss-Ostrogradskys定理
- > 都是数分三的内容，但是你数分三好好学了吗?

- 面积分和体积分的转换
  - > Ostrogradskys是一个乌克兰的数学家?

  - 高斯定理的形式——麦克斯韦方程的那个公式
  - $$\oiint_{\Sigma}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\Sigma=\int_V(\nabla\cdot F)\mathrm{d}V$$
  - 推论：可以是一个梯度
  - $$\oiint_{\Sigma}\psi\mathrm{d}\Sigma=\int_V(\nabla\psi)\mathrm{d}V$$
  - 推论：关于旋度
  - $$\oiint_{\Sigma}\vec{F}\times\mathrm{d}\Sigma=\int_V(\nabla\times F)\mathrm{d}V$$
  - > 经典电动力学名著

- 卡尔文斯托克斯定理Kelvin-Stokes定理
  - 这条定理说的是，线积分会变成面积分
  - $$\oint_L\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\iint(\nabla\times\vec{F})\cdot\mathrm{d}\Sigma$$

- 推论：
- $$\oint \psi \, \mathrm{d}\vec{l} = \iint_\Sigma \mathrm{d}\Sigma \times \nabla \psi$$
- > 讲义里有四五十页的篇幅）但是讲义在哪？

- 量子力学好多用的高斯单位制
  - > 电场：E，P，D：电场强度，极化强度，电位移矢量。
  - > 磁场：B，H，M：磁感应强度，磁场强度，磁化强度。
  - 在高斯单位制里面，这六个量的量纲完全相同。
  - 平方反比律连个常数都没有——取而代之，会大量出现 4π ，全方位的立体角
- Helmholtz定理
  - 任何连续可微的矢量场
  - 都可以分解成纵向场（无旋，旋度为0）和横向场（无源，散度为0）
  - 纵向场可以看成是标量场的梯度。
  - 横向场可以看成是矢量的散度
  - ——为什么麦克斯韦方程四个就完备了？

真正的（电磁学？）

- 4+1个实验定律

库伦定律

- 假如有一个区域分布着电荷，就会在远场分布着电场
- 公式略
- 从库伦定律出发，可以推出
- 是一个标势
- $$\vec{E}(\vec{x}) = -\nabla \Phi$$
- 还能推出
- $$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho(\vec{x})$$
- （高斯定律，高斯电定律）

毕奥-萨伐尔定律，磁场的

- 公式略
- 是一个矢势

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}(x)$$

- $\vec{B}$ 的散度为0，说明磁场没有磁荷（磁单极子）。
- $$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$
-
- 这个也叫高斯定律（高斯磁定律）

安培环路定则

- 直电流产生圈磁场
- $$\oint \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{l} = \frac{4\pi}{C}\iint_{\Sigma}\vec{i}\cdot\mathrm{d}\Sigma$$

  可以推出

  $$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{4\pi}{C}\vec{i}$$

  麦克斯韦加了一条电荷守恒

法拉第定律

- 磁场的通量变换产生了电动势。
- 电势差

  $$\begin{aligned}\oint_L \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} &= -\frac{1}{C}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi \\ &= -\frac{1}{C}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{\Sigma}\end{aligned}$$

- 左边用$\vec{\nabla}\times\vec{E}$ 换，右边看成 $\frac{\partial B}{\partial t}$
- 得到
- $$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{1}{C}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$
- 电荷守恒定律
  - $$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \equiv 0$$

    $$Q = \int_V \rho(\vec{x},t)\,\mathrm{d}^2\vec{x}$$
  - 推出微分形式
  - $$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} \equiv 0$$
- 所以把加了个位移电流
  - $$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{4\pi}{C}\vec{j} + \frac{1}{C}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$
- 结合上面四个，得到了麦克斯韦方程组（4个）
  - 两个关于散度的
  - 两个关于旋度的
- 洛伦兹牛顿方程
  - $$\vec{F} = q(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B})$$
  - 因为

- $$\begin{cases}\vec{E} = -\nabla\Phi - \frac{1}{C}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A} \\ \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}\end{cases}$$
  - 电场有散度和旋度。
  - 磁场就没有散度。
- 拉格朗日量
- $$L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2 - q\Phi + \frac{q}{c}\vec{v}\cdot\vec{A}$$
- 哈密顿量
- $$H = \frac{1}{2m}(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A})^2 + q\Phi$$

- 带电粒子在广义势函数中和位置有关，和速度也有关。
- 这里的 $\vec{p} = m\dot{\vec{x}} + \frac{q}{c}\vec{A}$ 是正则动量，不是运动动量
- 可以泰勒展开
- > 偶极子
  >
  > 磁矩指的磁偶极矩

> 标量场只有梯度，就是那个梯度，梯度就是最大方向的那个向量。
>
> 标量场求梯度是矢量场。
>
> 向量场有散度的概念，散度是一个标量场，其值为三个梯度的方向的大小的数值和
>
> 旋度，......是那个奇怪的行列式。
>
> 好像哪里看到过有一种东西叫做源，有一种东西叫做旋?
>
> 我还是先看看数分吧——这玩意数分里面竟然也有......
>
> 数学不好好学，屁都不会。（但是好像过于简略）
>
> ——无源场的条件是散度处处为零
>
> 　散度三维积起来相当于包络面的出去的积分，散度为零相当于没有出去的
>
> ——无旋场的条件是旋度处处为零
>
> 　这个没什么问题）
>
> 梯度场好像确实是没有旋的
>
> 但是旋度无散有点不好理解）
>
> 算了，当看动画片看
>
> 再说）

一些需要补充的

§ 量纲是什么，高斯单位制是什么

§

入门我需要知道什么

What from 经典力学

- CM和CED，经典力学和经典电动力学。
- 一个很重要的概念是来自经典力学的 Canonical（正则）
- 从坐标，位置，动量，都是正则坐标，正则位置，正则动量。
  - 而不是 kinetic 的，是 canonical 的
  - 尤其是带电粒子在电磁场中运动的时候
  - $\vec{p} = m\vec{v} + \frac{q}{c}\vec{A}$
  - 电磁场里的矢势。磁场强度等于这个矢势的旋度，电场强度一个标矢和这个矢势随着时间的导数。

正则对易关系（泊松括号）

- 任意两个量都是位置和动量的函数。
- $$[A, B]_{PB} = \sum \frac{\partial A}{\partial x_a}\frac{\partial B}{\partial p_a} - \frac{\partial A}{\partial p_a}\frac{\partial B}{\partial x_a}$$
- 有时候这个运算叫做泊松正则对易
- 正则位置写成 q，写成 x 都一样。
- $[x_i, p_j] = \delta_{ij}$
- 这个主要来自最基本的三个东西
- $$\frac{\partial x_i}{\partial x_a} = \delta_{ia}$$ $$\frac{\partial p_i}{\partial p_a} = \delta_{ia}$$ $$\frac{\partial x_i}{\partial p_a} = \frac{\partial p_i}{\partial x_a} = 0$$
- 推广到量子力学，量子**正则**对易
- $$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = \hat{x}_i\hat{p}_i - \hat{p}_i\hat{x}_i = i\hbar\delta_{ij}$$
- 差得多说明难对易，差得少可以对易。戴帽子的叫做算符。

正则运动方程：

- 时间的导数就是哈密顿量
- 回到之前的
- $$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [f, H]_{PB}$$

- 这个方程式这么推，通过
  - $$\begin{aligned}\dot{q}_a &= \frac{\partial H}{\partial p_a} = [q_a, H] \\ \dot{p}_a &= -\frac{\partial H}{\partial q_a} = [p_a, H]\end{aligned}$$
  - $$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_a \left(\frac{\partial f}{\partial q_a}\frac{\mathrm{d}q_a}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial p_a}\frac{\mathrm{d}p_a}{\mathrm{d}t}\right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_a \left(\frac{\partial f}{\partial q_a}\frac{\partial H}{\partial p_a} + \frac{\partial f}{\partial p_a}\frac{\partial H}{\partial q_a}\right)\end{aligned}$$
- 推广到量子力学里面，有海森堡方程
- $$\frac{d\hat{f}}{dt} = \frac{\partial \hat{f}}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar}[\hat{f}, \hat{H}]$$
- f 理解成 `c-number`，一个经典数，是一个可对易的数
- $\hat{f}$ 理解成 `q-number`，理解成 quantum-related number，与量子有关的数。
  - > 但不是 quantum number（因为这个是一个普通的数）。
- 以及某个定理，左边是求平均再求全导数，右边是先求偏导再求平均。

$$\frac{d}{dt}\left\langle \hat{f} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \hat{f}}{\partial t} \right\rangle + \frac{1}{i\hbar}\left\langle [\hat{f}, \hat{H}] \right\rangle$$

- 还有一个叫做正则变换的东西，把原来的哈密顿量变成了一个新的哈密顿量。保持对易关系不变。从而导致运动方程不变。也就是可以去选择最方便的正则坐标。
- 紧接着有这样一个问题
- 哈密顿量有很多选择，其实拉格朗日量也有无穷多种选择。
- $$H = p\dot{q} - L$$
- 我们要找一个最简单的处理问题最方便的。

regular Lagrangian

- 要求
- $$\det\left|\frac{\partial^2 L}{\partial q_i \partial p_j}\right| \neq 0$$
- 在这样的情况下，就可以让拉格朗日量写成
- $$L = T - V$$
- 其中 T 叫做动能，V 叫做势能。
- 动能项通常只和 p 有关，和位置无关（通常，指完整约束情况下）
- 势能只和位置有关。
- 这样就把只和 x 有关的和只和 p 有关的分开了。
- 这个时候哈密顿量可以写成
- $$H = T + V$$

- 动能加上势能，和能量这个概念的物理意义一样。
- > 但为什么是这个条件?

What from 电动力学

- 使用高斯单位制
  - 对理论计算特别方便
  - $[\vec{E}] = [\vec{P}] = [\vec{D}] = [\vec{B}] = [\vec{H}] = [\vec{M}]$ ：[]表示量纲，量纲都一样。
  - 在国际单位制中，ϵ_0, μ_0 是个东西，乘起来是 $\frac{1}{c^2}$
  - $[\phi] = [\vec{A}] = [\vec{E}][L]$
- 带电粒子在电磁场中运动的哈密顿量
- $$H = \frac{1}{2m}(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A})^2 + q\phi$$
-
- 最基本的一个定理，关于

Helmholtz 矢量分解

- 纵向场，旋度为零，也就是说梯度场
- 横向场，散度等于零，divergence-field 无散场，是某个场的旋度
  - 任何一个矢量场，只要是连续可微的，一定可以分解成为无旋的和无源的两部分。
- 因为一定可以分解成这两部分，所以也就是为什么麦克斯韦方程只有四个。
- 两个是关于散度的，都叫做高斯定律（电定律，磁定律）

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho$$
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} \equiv 0$$

- 从第一个方程可以看出，电场是一个横向场加上一个纵向场，因为散度不等于零。要研究更进一步的性质。
- 从第二个方程可以看出，B 一定可以写成一个东西的旋度。 $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$
- 两个关于旋度的方程

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$
$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

- 也就是 $\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ ，左边梯度部分只有纵向场。
  - 为什么后面电偶极子和电场相互作用，，磁偶极和磁场相互作用会不一样。
- 第三个方程叫做法拉第-麦克斯韦方程
- 第四个方程叫做安培-麦克斯韦方程，有一个位移电流。
- 有一个规范不变性（据说视频在这里写错了）
  - $\phi \to \phi' = \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{X}$
  - $\vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\mathcal{X}$
  - 在这种变换下，$\vec{E} = \vec{E}'$ ，$\vec{B} = \vec{B}'$
  - 通过变换带来方便，并且保持根本物理性质不变。

矢量分析基础重现

- $\vec{A}\cdot\vec{B}=A_iB_i$
- $(\vec{A}\times\vec{B})_i=\epsilon_{ijk}A_jB_k$
- 对称张量和反对称的东西乘起来就等于零。
- $\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}=\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}$
- 一个计算过程：基础是$[x_i,p_j]=\delta_{ij}$，以及 $\begin{matrix}[A,BC]=[A,B]C+B[A,C]\\ [AB,C]=[A,C]B+A[B,C]\\ [A,B]=-[B,A]\end{matrix}$

$$
\begin{aligned}
L_i &= (\vec{x}\times\vec{p})_i=\epsilon_{iab}x_ap_b\\
L_j &= (\vec{x}\times\vec{p})_j=\epsilon_{jcd}x_cp_d\\
[L_i,L_j]_{PB} &= \epsilon_{iab}\epsilon_{jcd}[x_ap_b,x_cp_d]\\
&= \epsilon_{iab}\epsilon_{jcd}(x_c[x_a,p_d]p_b+x_a[p_b,x_c]p_d)\\
&= \epsilon_{iab}\epsilon_{jca}x_cp_b-\epsilon_{iab}\epsilon_{jbd}x_ap_d\\
&= \epsilon_{bia}\epsilon_{ajc}x_cp_b-\epsilon_{iab}\epsilon_{bdj}x_ap_d\\
\epsilon_{bia}\epsilon_{ajc}x_cp_b &= (\delta_{bj}\delta_{ic}-\delta_{bc}\delta_{ij})x_cp_b\\
&= x_ip_j-x_bp_b\delta_{ij}\\
&= x_ip_j-(\vec{x}\cdot\vec{p})\delta_{ij}\\
-\epsilon_{bia}\epsilon_{ajc}x_cp_b &= (\vec{x}\cdot\vec{p})\delta_{ij}-x_jp_i\\
[L_i,L_j]_{PB} &= x_ip_j-x_jp_i
\end{aligned}
$$

- $$\epsilon_{ijk}L_k=x_ip_j=x_jp_i$$
  $$[L_i,L_j]=\epsilon_{ijk}L_k$$
- 也可以推广到量子力学里有 $[\hat{x}_i,\hat{p}_j]=i\hbar\delta_{ij},[\hat{x}_i,\hat{x}_j]=[\hat{p}_i,\hat{p}_j]\equiv 0$
- 推广到量子力学里也有 $[\hat{L}_i,\hat{L}_j]=i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{L}_k$
- 对易括号反对称，反对易括号对称。
- $[A,B^n]=n[A,B]B^{n-1}$ 前提是如果 B 和 $[A,B]$ 对易。在量子力学里也是这样。

规范不变性

- 对于 $\vec{A}$ 和 ϕ，
- $\phi\to\phi'=\phi-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{X}$
- $\vec{A}\to\vec{A}'=\vec{A}+\vec{\nabla}\mathcal{X}$
  - $\vec{E}'=\vec{E}=-\vec{\nabla}\phi-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}$
  - $\vec{B}'=\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$
- 在规范变换之后不会改变场强
  - 势函数可以有无穷多种选择，但是保持场强不变。
- 在这么多种可选的势函数里面，一种规范叫做【库伦规范 Coulomb Gauge】
  - 库伦规范要求 $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$，也就是 A 的散度等于零。
  - 如果再增加了 $\phi=0$ 的条件，这个规范叫做 【辐射规范 radiation gauge】
- 或者一种规范叫做洛伦兹规范(Lorenz)
  - $\nabla\cdot\vec{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\phi=0$，这个也就是四维闵可夫斯基情况下的散度，所以经常和相对论里的洛伦兹(Lorentz)变换联系在一起

多级展开 multipole expansion

- 外加了一个电场，光场（高频交变电磁场），磁场，会不会和电四级，磁偶极，电偶极相互作用呢？
- 在经典电动力学里，电偶极与外电场相互作用的能量
    - $W_e = -\vec{d} \cdot \vec{E}$
    - $W_m = -\vec{\mu} \cdot \vec{E}$
- 在量子力学里面，电偶极可能会出现Stark效应
- 在量子力学里面，磁偶极（在量子力学里叫做磁矩）会有Zeeman塞曼效应
- $\vec{d} = q\vec{x}$ 是关于 x 的奇函数，奇宇称，只能连接两个宇称不同的态。它的奇偶很重要，会影响到选择定则，和宇称parity有关。`electirc dipole moment`，电偶极矩
- $\mu = \frac{q\vec{L}}{2mc}$ 和轨道角动量有关，`magnetic dipole moment`，进入到量子力学后和两个角动量有关，一个是轨道角动量，一个是自旋角动量。
- > 没太懂，这一段好像有些不清楚
  >
  > 不太明白什么是电偶极，不太明白什么是作用能量
  >
  > **
- 在高斯单位制里面，电偶极矩和磁偶极矩的量纲是一样的。

第一步做什么

- CM+CED+VA -> QM
- > 我声明一下，作为一个没有学过电动力学，甚至没有学过电磁学，只有一点点高中物理基础的傻子，到现在其实还是什么都看不懂，但我觉得我之后会慢慢理解的。

1、哈密顿量

- $$\hat{H} = \frac{1}{\partial m}(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A})^2 + q\phi$$
- > 再次强调，我们似乎只能把正则动量量子化，不能把运动动量量子化。

2、外加电场

- 和带电粒子的体系（比如说原子）
    - $$\hat{H}_{Ie} = -\hat{\vec{d}} \cdot \vec{E}$$
    - $$\hat{\vec{d}} = q\hat{\vec{x}}$$
    - 能量，哈密顿量 成了一个算符，电偶极矩成了一个算符，位置也成了一个算符。我们在这里没有对电场和磁场做量子化。高量可能会对场做二次量子化。
    - 这里是电偶极矩，如果是电四极矩，可能这个东西会变成张量，电场可能会研究电四极矩之类的东西。

3、外加磁场

- 和磁偶极矩（也叫磁矩，因为没有磁单极子，研究磁四极矩很少）相互作用，也变成算符。
    - $$\hat{H}_{Im} = -\hat{\vec{\mu}} \cdot \vec{E}$$
    - $$\hat{\mu} = \frac{q\hat{\vec{L}}}{2mc}$$

4、正则量子化

- 最开始只有一种叫做正则量子化程序
- 所有的变量都必须是正则的。
- 最简单的是正则位置和正则动量。
- 所有力学量 $A(x,p)$ 变成 $\hat{A}(\hat{x},\hat{p})$
- $[\hat{x}_i,\hat{p}_j]=i\hbar\delta_{ij}$
- $\hat{\vec{L}}=\hat{x}\times\hat{p}$
- 海森堡方程
- $[\hat{L}_i,\hat{L}_j]=i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{L}_k$
- 可以有 $\hat{\vec{L}}\times\hat{\vec{L}}=i\hbar\hat{\vec{L}}$
    - 这是个很神奇的东西，矢量自己叉乘自己在经典里面一定是等于零的。

我们还需要什么

欧几里得空间&&坐标系

- 点乘是投影
- $\vec{u}\cdot\vec{v}=(u_i\vec{e}_i)\cdot(v_j\vec{e}_j)=u_iv_i$
- $\vec{u}\times\vec{v}=(u_i\vec{e}_i)\times(v_j\vec{e}_j)=(\epsilon_{ijk}u_iv_j)\vec{e}_k$
- 基矢有什么性质?
    - 正交性
    - 归一性
        - 一个是正交 orthogonal，一个是归一 normal
        - $\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j=\delta_{ij}$
    - 完备性
        - $\sum_i\vec{e}_i\vec{e}_i=I$，$I$ 是一个并矢，以并矢形式表示出来的张量。
        - 写成矩阵的形式
        - $\vec{e}_1\vec{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$
        - 这么来看，三个基矢的并矢量的求和就是单位矩阵。
        - 如果某个对角是零，比如两个基矢就是不完备的，是不够的。
- Rectangle Coordinate x,y,z
- Curvilinear Coordinate
    - 球坐标 Dphenial r,θ,ϕ
    - 柱坐标 Cylindrical Coordinate ρ,ϕ,z
        - 是二维空间极坐标的扩展
- $\mathrm{d}V=\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi=(r^2\mathrm{d}r)(\sin\theta\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta)$
    - $\mathrm{d}\Omega=\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$ 叫做立体角
    - $\theta\in[0,\pi],\phi\in[0,2\pi)$
    - $$\begin{aligned}x=&\quad r\sin\theta\cos\phi\\y=&\quad r\sin\theta\sin\phi\\z=&\quad r\cos\theta\end{aligned}$$

- 并不完全是一一对应关系，对于两个极点，比如对于 $\theta = 0$ 的时候，$r = z$，ϕ 有无穷多个取值。
- 二维空间里 $\vec{v} = v_i\vec{e}_i = v'_i\vec{e}'_i$，旋转了 θ
  - 在新的坐标系，坐标系变了，但是 $\vec{v}$ 这个矢量本身没有变。
  - 对于 $v'_j = (\vec{e}'_j \cdot \vec{e}_i)v_i = (S)_{ji}v_i$
  - 这个 $S_{ji} = \vec{e}'_j \cdot \vec{e}_i$
  - $$\begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$
  - $S_{11} = \vec{e}'_1 \cdot \vec{e}_1 = \cos\theta$
  - $S_{12} = \cos(\pi/2 + \theta) = -\sin\theta$
  - $S_{21} = \cos(\pi/2 - \theta) = \sin\theta$
  - $S_{22} = \cos\theta$
  - 从而
  - $$S = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$
  - 这个矩阵有 $S^{-1} = S^T$，这是个 Orthogonal Matrix 正交矩阵。
  - 量子力学里面有表象变换
  - > 欧几里得空间里面是转置，希尔伯特空间是转置+复共轭（厄密共轭，伴随运算）
  - 新老基矢的点乘，中文叫做转换矩阵，英文中叫【Overlap Matrix】
  - > 好妙啊，这就是坐标变换嘛！

Fundamental postulates(Axiom)

态矢量假设 State Postulate

- $|\phi\rangle \in \mathbb{H}$ (Hilbert Space)
- $\langle\phi| \in \mathbb{H}^*$ (dual space)
- 关系：$\langle\phi|^\dagger = |\phi\rangle$

算符假设 Operator Postulate

- 只描述可观测量，不管那些不能被描述的量。
- 量子力学中关心的可观测量不多。只有少数的物理量是我们关心的物理量。比如位置，动量，角动量，能量，哈密顿量。
- 只有**线性厄密算符**

测量假设 Measurement Postulate

- 蕴含了三个意思
- 测量输出，不管在什么态以下来测
  - 不确定的：我们都不知道它是什么值。
  - 确定的：我们测量出来的值一定是这个算符的某个本征值。EigenValue
  - 对应的本征值的态叫做本征矢量，本征态
- 如果在 $|\psi\rangle$ 下去得到 A_n 这个态，概率是

- $$p(A_n) = |\langle u_n| \, |\psi\rangle|^2$$
    - $$|\psi\rangle = \sum_m a_n \, |u_n\rangle$$
    - $$a_n = \langle u_n| \, |\psi\rangle$$
    - 同时，坍缩
    - $$|\psi\rangle \stackrel{collaps}{\rightarrow} |u_n\rangle$$
    - 并且所有 u_n 满足正交归一完备性
    - $$\langle u_n| \, |u_m\rangle = \delta_{nm}$$ $$\sum |u_n\rangle \langle u_n| = I$$

动力学演化假设 Dynamics Postate

- 满足薛定谔方程
- $$i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} |\psi(t)\rangle = \hat{H} \, |\psi(t))\rangle$$
- 如果这个方程，在位置表象底下
    - 什么是位置表象？就是以位置 $\vec{x}$ 的力学量的本征态作为基矢来展开的态。
    - $\hat{x}$态会变成位置表象底下的波函数。
        - $\psi \rightarrow \langle \vec{x}| \, |\psi\rangle$
        - （波函数关于狄拉克符号有点类似有笛卡尔坐标的解析几何之于抽象的几何学）
        - 更加具体
    - 在某种情况下，哈密顿量写成动能加势能，动能只和动量有关，势能只和位置有关。
    - $$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x}, t) = \frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 \psi(\vec{x}, t) + \hat{V}(\vec{x}, t) \psi(\vec{x}, t)$$
- 数学物理方程有三类，椭圆类，双曲类，抛物类
    - 这里有些是初值问题，有些是边值问题。
    - 薛定谔方程式一个初值问题。

全同粒子假设

- 在微观世界里面，任意改变两个粒子的位置，系统的状态要么不变，要么多一个负号。不变的态叫做对称的态，出一个负号的是反对称的态。
- 对称的态对应的粒子是玻色子，自旋是整数。
- 反对称的态叫做费米子，自旋一定是半奇数。
    - 两个自旋为1/2的耦合有可能成为1，光子是最为经典的自旋为1的，自旋为2的？
    - 最耳熟能详的费米子，电子，自旋为1/2。
    - 玻色子扎堆，玻色爱因斯坦凝聚。黑体辐射比如光子的玻色爱因斯坦凝聚最简单。还有很多静止质量不是零的玻色子。
    - 麦克斯韦-玻尔兹曼 分布
    - 玻色-爱因斯坦 分布
    - 费米-狄拉克 分布
        - 泡利不相容原理

态矢量

- 矢量加法，满足交换
- 标量乘法
- 内积
- 并矢，最简单的一种张量，也有些地方叫外积
- 任何一个态矢量乘上一个不等于0的复数，表示的是同一个态，等价。
  - $c\left|\psi\right\rangle \sim \left|\psi\right\rangle$

算符

- Operator can be used to be operaterd
  - $\hat{A}\left|\psi\right\rangle = \left|\phi\right\rangle$
- 两类算符
- **力学量算符**
  - 满足线性厄密。
  - $\hat{H}^\dagger = \hat{H}$
- **变换算符(Transformation)**
  - 有很多
  - 初等量子力学阶段，限制在线性幺正算符。
  - 也叫做**酉(Unitary)**
  - $\hat{H}^\dagger = \hat{H}^{-1}$
- > 并不是所有算符都满足线性性，有些会变成复共轭，反线性。会有反线性反幺正变换，时间反演就是这样的一种变换。
  >
  > 初等量子力学里面所有的对称性变换都是线性幺正变换。
  >
  > 突然想起了那个说狄拉克符号不能表示反线性算符的老教授，他还说不可能有一个平行宇宙，在那个平行宇宙希特勒毁灭世界。
- **对易子**
- `\def \h{\hat }`
-
  - $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$
  - $[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}]$
  - 和莱布尼兹那个求导法则差不多。
  - $[\hat{A}, \hat{f}(\hat{B})] = [\hat{A}, \hat{B}]\frac{\partial f}{\partial \hat{B}}$
    - 当 $[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0$
  - $[\hat{A}, [\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{B}, [\hat{C}, \hat{A}] + [\hat{C}, [\hat{B}, \hat{A}] = 0$
- $\left\langle\psi\right|\hat{A}^\dagger = (\hat{A}\left|\psi\right\rangle)^\dagger$

波动与矩阵

- 对于分立的情况，$\left\langle a | a' \right\rangle = \begin{cases} 0, (a \neq a') \\ 1, (a = a') \end{cases}$
- 对于连续的情况，两个本征态$\left\langle a | a' \right\rangle = \begin{cases} 0, (a \neq a') \\ \infty, (a = a') \end{cases}$
- 不管是分立变量还是连续变量，本质值一定是实数。

- 薛定谔图像下，力学量完全不随时间变换，只有态矢随时间变换
- 海森堡图像下，力学量随时间变换，态势完全不随时间变换
- 狄拉克相互作用图像下，力学量和态势都随时间变换。
- > 本科生的初等量子力学阶段，讨论波动力学更多。物理学家不习惯线性代数，习惯求解偏微分方程。

表象

- 如果把狄拉克符号对应的量子力学方程，可以看成普通的几何学。加上笛卡尔坐标，就成了有具体表象的几何学。表象就是对应着某基矢。
- $\vec{x}$ 表象就意味着以位置这个算符的本征态，把它作为基矢。同样，动量表象就是把动量的本征态的算符作为基矢量。哈密顿量表象作为基矢量，就看做能量表象。
- > 位置表象用得比较多，人们更习惯这个
- $\hat{\vec{x}} \left|\vec{x}\right\rangle = \vec{x} \left|\vec{x}\right\rangle$
  - $\left|\vec{x}\right\rangle$ 是本征态。$\vec{x}$ 是本征值，一定是实数。$\hat{\vec{x}}$ 是算符。
  - $\hat{\vec{x}} \left|-\vec{x}\right\rangle = -\vec{x} \left|-\vec{x}\right\rangle$
- 在位置表象的情况下
  - $\hat{\vec{x}} \to \hat{\vec{x}}$
  - $\hat{\vec{p}} \to -i\hbar \frac{\partial}{\partial \vec{x}} = -i\hbar \vec{\nabla}$
- >
- **波函数的定义：**
-
- $$\psi(\vec{x}) = \langle \vec{x} | \psi \rangle$$
  - $$\left|\psi\right\rangle = I \left|\psi\right\rangle = \left(\int \mathrm{d}\vec{x} \left|\vec{x}\right\rangle \langle \left|\vec{x}\right) \left|\psi\right\rangle$$
- $\hat{A}^{\dagger} = \hat{A}$
- 1、本征值是实数
- 2、本征态是正交归一完备的。
  - 在非简并情况，证明：可以推出
  - $$(A_n^* - A_m) \langle u_n | u_m \rangle = 0$$
  - 从而有 $A_n^* = A_n = 0$，且 $\langle u_n | u_m \rangle = 0$
- > 这一段都是想略过了。

- > 有一个好像有点像链式法则的东西
- $$\begin{aligned} \psi(\vec{x}) &= \int \mathrm{d}\vec{p}\, \Phi_{\vec{p}}(\vec{x}) \widetilde{\psi}(\vec{p}) \\ \langle \vec{x} | \psi \rangle &= \int \langle \vec{p} | \psi \rangle \langle \vec{x} | \vec{p} \rangle \,\mathrm{d}\vec{p} \\ &= N \int \widetilde{\psi}(\vec{p}) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}/\hbar} \,\mathrm{d}\vec{p} \end{aligned}$$

- $\Phi_{\vec{p}}(\vec{x}) = Ne^{i\vec{p}\cdot\vec{x}/\hbar}$，其中 $e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}/\hbar}$ 是一个平面波，$\vec{p}/h$ 就是的德布罗意波的某个东西。N 是一个归一化的系数。$N = \frac{1}{2\pi\hbar}^{3/2}$

有没有机会开始Start

- Leibniz：

对易运算

- 位置和坐标的对易关系
- $[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}$
- $[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0$
- 举个例子，比如 $i = 1$
  - $$\begin{gathered}[\hat{x}, \hat{p}_x] = \hat{x}\hat{p}_x - \hat{p}_x\hat{x} \\ \forall\psi(x) = \langle x|\psi\rangle \\ = [\hat{x}(-i\hbar\partial/\partial_x) - (-i\hbar\partial/\partial x)\hat{x}]\psi(x) \\ = -i\hbar[\hat{x}\partial/\partial x - \partial/\partial x\hat{x}]\psi(x)\end{gathered}$$
  - 然后这里把 $\hat{x}, \psi(x)$ 因为是算符，所以类似莱布尼兹的求导
  - $$\begin{gathered}= -i\hbar\{x\frac{\partial}{\partial x}\psi(x) - [1\cdot\psi(x) + x\frac{\partial}{\partial x}\psi(x)]\} \\ = i\hbar\psi(x)\end{gathered}$$
  - 所以得到 $[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar\cdot\hat{I}$，后面是一个算符
- **Jacobi Identity**
- 一个是对易运算的
- $[\hat{A}, [\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{B}, [\hat{C}, \hat{A}] + [\hat{C}, [\hat{A}, \hat{B}] = 0$
- 比如一个是叉乘的
- $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) + \vec{B}\times(\vec{C}\times\vec{A}) + \vec{C}\times(\vec{A}\times\vec{B}) = 0$
- **某个常用的东西**
- $[\hat{A}, \hat{B}^n] = n[\hat{A}, \hat{B}]\hat{B}^{n-1}$

- 角动量 $L_i = (\hat{\vec{x}}\times\hat{\vec{p}})_i$，中心立场 $V(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$
- 我们关心角动量和哈密顿量是不是对易的，如果角动量是对易的，那么说明它是守恒的。所以我们非常关心类似于 $[L_i, V(r)]$
- 那么对于 $[L_i, V(r)]$
- 基于基本对易关系，x与xyz都是对易的。

$$
\begin{aligned}
&= [\epsilon_{ijk}\hat{x}_j\hat{p}_k, V(r)] \\
&= \epsilon_{ijk}\hat{x}_j[\hat{p}_j, V(r)] \\
&= \epsilon_{ijk}\hat{x}_j[\hat{p}_k, \hat{x}_a]\partial V/\partial x_a \\
&= \epsilon_{ijk}\hat{x}_j(-i\hbar\delta_{ka})\frac{V'}{r}\hat{x}_a \\
&= \frac{-V'}{r}\epsilon_{ijk}\hat{x}_j\hat{x}_k \\
&= \frac{V'}{r}\epsilon_{ikj}\hat{x}_j\hat{x}_k \\
&\equiv 0
\end{aligned}
$$

$$
\text{其中}\partial V/\partial x_a = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\frac{\partial r}{\partial x_a} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\frac{x_a}{r}
$$

-
- ~~https://www.bilibili.com/video/BV1HL4y177J5~~
-
- note on QCQI && other | emoairx
-