Zeros de funções reais

Q1. Use cada um dos seguintes métodos

- método da bisseção
- método de Newton
- método das secantes
- método da posição falsa

para aproximar uma das raízes das funções a seguir:

1. $f(x) = x^5 - 8x - 2$
2. $f(x) = \cos(x^2) - x$
3. $f(x) = \ln(x) + x^2$
4. $f(x) = \ln(x^2) + 2x$
5. $f(x) = \cos(\text{sen}(x^2)) + x^3 - 2$
6. $f(x) = e^{-x^2} - x^2 + 5$
7. $f(x) = e^{\cos(x)} + \ln(x^2)$
8. $f(x) = x^2\cos(x) + x - 1$
9. $f(x) = 2\cos(e^x) - x$
10. $f(x) = x^3 + x^2 + 0.001$

Q2. Em cada um dos itens a seguir, verifique se a função g possui um único ponto fixo no intervalo dado. Em caso afirmativo, use o método do ponto fixo $p_{k+1} = g(p_k)$ para construir uma sequência de aproximações para a raiz exata de f no intervalo dado.

1. $f(x) = x^2 - 7, \quad g(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{7}{x}\right), \quad [2,3]$
2. $f(x) = x^3 - 11, \quad g(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{11}{x^2}\right), \quad [2,3]$
3. $f(x) = x^3 - 11, \quad g(x) = \sqrt{\frac{11}{x}}, \quad [2, 2.5]$
4. $f(x) = x^3 - 11, \quad g(x) = x - \frac{x^3-11}{3x^2}, \quad [2,3]$
5. $f(x) = e^x - 2x - 1, \quad g(x) = \ln(2x+1), \quad [1,2]$
6. $f(x) = x^3 - x - 4, \quad g(x) = \sqrt[3]{x+4}, \quad [1,2]$
7. $f(x) = x^4 - x^2 - 5, \quad g(x) = \sqrt[4]{x^2+5}, \quad [1,2]$
8. $f(x) = \text{sen}(x) - 2x + 4, \quad g(x) = \frac{\text{sen}(x)+4}{2}, \quad [2,3]$

Q3. Use cada um dos seguintes métodos

- da eliminação de Gauss
- iterativo de Jacobi
- iterativo de Gauss-Seidel

para encontrar/aproximar a solução de cada um dos sistemas lineares a seguir.

1. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}, \quad S = (1, -1, 3)$
2. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 7x_2 + 2x_3 = -3 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 3 \end{cases}, \quad S = (1, -1, 1)$
4. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 5 \\ -2x_2 + x_3 = -3 \\ -4x_1 + x_2 - x_3 = -2 \end{cases}, \quad S = (1, 1, -1)$
5. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 = -1 \end{cases}, \quad S = (1, -1, -1)$

Polinômio interpolador

Q4. Use o método das diferenças divididas para encontrar o polinômio interpolador que passa pela lista de pontos dada:

1. $(-2.5, 0.89), (-2.0, -1.18), (-1.5, 1.88), (-1.0, 4.06), (-0.5, 1.21)$
2. $(-2.5, -3.99), (-2.0, -5.26), (-1.5, 0.54), (-1.0, -4.29), (-0.5, -2.59), (0.0, -0.95), (0.5, -0.15)$
3. $(-2.5, 0.94), (-2.0, -3.08), (-1.5, 5.33), (-1.0, 2.57), (-0.5, -5.94), (0.0, 4.39), (0.5, -2.35), (1.0, 0.17), (1.5, 5.38), (2.0, -1.13), (2.5, -2.63)$
4. $(-2.5, -5.6), (-2.0, -4.03), (-1.5, -0.4), (-1.0, -1.12), (-0.5, 1.51), (0.0, 2.98), (0.5, -4.59), (1.0, 0.56), (1.5, -4.43), (2.0, -5.53), (2.5, 2.14), (3.0, 4.02), (3.5, 0.85), (4.0, 1.37), (4.5, 5.26), (5.0, 2.79), (5.5, 5.16), (6.0, -2.28), (6.5, -2.9), (7.0, -0.61), (7.5, -3.93), (8.0, 2.04), (8.5, 5.61), (9.0, -2.09), (9.5, 1.55), (10.0, -0.59), (10.5, -5.47), (11.0, -5.5), (11.5, 2.64), (12.0, 2.0), (12.5, 5.1)$

Q5. Use o método de Lagrange para encontrar o polinômio interpolador que passa pela lista de pontos do exercício Q1 na forma $p(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i L_i(x)$.

Q6. Use um sistema linear para encontrar o polinômio interpolador que passa pela lista de pontos do exercício Q1 na forma $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$.

Splines

Q7. Encontre o spline cúbico $S(x)$ que interpola a função f na lista de pontos dada e use algum programa (por exemplo, o Geogebra) para plotar o gráfico das funções obtidas.

1. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, nos pontos $x_0 = -2, x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 2$.
2. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, nos pontos $x_0 = -2, x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 2$.
3. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, nos pontos $x_0 = 0, x_1 = 0.3, x_2 = 0.9, x_3 = 1.3, x_4 = 2$.
4. $f(x) = \frac{2}{1+x^2}$, nos pontos $x_0 = -1.97, x_1 = -1.16, x_2 = -0.34, x_3 = 0.32, x_4 = 0.38, x_5 = 0.61, x_6 = 1.09, x_7 = 1.44, x_8 = 1.81, x_9 = 1.82$
5. $f(x) = \frac{2}{1+x^2}$, nos pontos $x_0 = -4.65, x_1 = -4.62, x_2 = -4.39, x_3 = -4.25, x_4 = -4.01, x_5 = -3.6, x_6 = -3.52, x_7 = -2.62, x_8 = -0.75, x_9 = 0.47, x_{10} = 0.77, x_{11} = 0.78, x_{12} = 1.44, x_{13} = 2.45, x_{14} = 2.91, x_{15} = 3.06, x_{16} = 3.17, x_{17} = 3.7, x_{18} = 4.49, x_{19} = 4.83$

Método das diferenças finitas

Q8. Em cada um dos itens a seguir, use as fórmulas de aproximação

$$F_1(h) = \frac{f(p) - f(p-h)}{h}, \quad F_1(h) = \frac{f(p+h) - f(p-h)}{2h}, \quad F_1(h) = \frac{f(p-2h) - 8f(p-h) + 8f(p+h) - f(p+2h)}{12h}$$

para aproximar $f'(p)$. (A ordem dos erros dessas fórmulas são $O(h^1)$, $O(h^2)$ e $O(h^4)$, respectivamente.)

1) $f(x) = \cos(x^x)$, $p = 1$, com $h = 0.1$, $h = 0.05$, $h = 0.025$, $h = 0.0125$

2) $f(x) = \text{sen}(x)$, $p = 1$, com $h = 0.1$, $h = 0.05$, $h = 0.025$, $h = 0.0125$

3) $f(x) = x^{\cos(x)}$, $p = 1$, com $h = 0.1$, $h = 0.05$, $h = 0.025$, $h = 0.0125$

4) $f(x) = e^{-x^2}$, $p = 1$, com $h = 0.1$, $h = 0.05$, $h = 0.025$, $h = 0.0125$

Q9. Em cada um dos itens a seguir, encontre o polinomio interpolador $p(x)$ da função $f(x)$ nos pontos dados (use qualquer método). Em seguida, use as derivadas de $p(x)$ para aproximar a derivada pedida.

1. $f(x) = x^x$ nos pontos $x_1 = 0.99$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1.01$; $f'(1) \simeq p'(1)$ e $f''(1) \simeq p''(1)$;
2. $f(x) = \cos(x)$ nos pontos $x_1 = 0.99$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1.01$, $x_4 = 1.02$; $f'(1) \simeq p'(1)$, $f''(1) \simeq p''(1)$ e $f'''(1) \simeq p'''(1)$;
3. $f(x) = e^x$ nos pontos $x_1 = 0.98$, $x_2 = 0.99$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1.01$; $f'(1) \simeq p'(1)$, $f''(1) \simeq p''(1)$ e $f'''(1) \simeq p'''(1)$

Extrapolação de Richardson

Q10. Para cada um dos itens da Q8 use o método de extrapolação de Richardson e calcule $N_4(0.1)$ para encontrar uma aproximação com erro pelo menos $O(h^{4b})$ para $f'(1)$ (extrapole sobre cada uma das $F_1(h)$ dadas. Lembre-se de escolher b adequadamente!).