TEMA 5

Probabilidad

Métodos Numéricos y Estadísticos
Grado en Ingeniería Mecánica

Curso 2020-2021

Eva María Mazcuñán Navarro

Eva María Mazcuñán Navarro
Departamento de Matemáticas
Universidad de León
E-mail: emmazn@unileon.es

Contenidos

Página

Introducción

La palabra probabilidad se utiliza habitualmente en el lenguaje cotidiano. A diario escuchamos frases como:

- La probabilidad de obtener cara en el lanzamiento de una moneda equilibrada es 1/2.
- La probabilidad de obtener un cuatro en el lanzamiento de un dado equilibrado es 1/6.
- La probabilidad de que un décimo sea premiado con el primer premio en el sorteo de Navidad es de una entre cien mil.
- La probabilidad de que llueva el sábado es del 70%.

En primer lugar, tenemos que precisar que, mientras que en el lenguaje cotidiano las probabilidades se expresan a veces como porcentajes, las probabilidades matemáticas siempre se expresan como tantos por uno, o proporciones, con valores entre 0 y 1. De forma que en el tercer ejemplo diríamos que la probabilidad de ganar la lotería es $1/100000 = 0.00001$; y en último ejemplo diríamos que la probabilidad de que llueva el sábado es 0.7.

Todos tenemos una idea intuitiva del significado de probabilidad:

Cuando nos dicen que la probabilidad de que llueva el sábado es 0.7, interpretamos el valor 0.7 como una medida de la verosimilitud de que llueva, o de la confianza que tenemos en que llueva, usando la escala 0=imposible, 1=seguro. Aunque esta interpretación tiene sentido, es claro que no puede usarse como definición de probabilidad, puesto que incorpora una componente subjetiva.

Cuando decimos que la probabilidad de obtener un cuatro en el lanzamiento de un dado es 1/6, pensamos en el valor 1/6 como la proporción de lanzamientos en los que obtendremos un cuatro, uno de cada seis. Pero, naturalmente, si lanzamos un dado 6 veces no está garantizado obtener un cuatro exactamente en una ocasión, y si lo lanzamos 12 veces no es seguro que obtengamos un cuatro exactamente en 2 de las ocasiones. Pero si realizamos un número elevado de lanzamientos, sí esperamos que la proporción de lanzamientos en los que se obtiene un cuatro, se acerque a 1/6.

Siguiendo la idea anterior, podemos interpretar la probabilidad de un suceso como el límite del cociente

$$\frac{\text{número de ocurrencias del suceso}}{\text{número de repeticiones del experimento}},$$

cuando el experimento se repitiera un número indefinido de veces, esto es, cuando el número de repeticiones tiende a infinito. El cociente anterior mide la proporción, o tanto por uno, de veces que ocurre un suceso, y se denomina frecuencia relativa del suceso. Por eso, esta interpretación de la probabilidad se suele denominar interpretación *frecuentista*.

Si bien la interpretación frecuentista de la probabilidad que acaba de darse es un buen punto de partida, buscamos una definición matemática precisa de probabilidad que nos sirva de marco teórico para el cálculo de probabilidades. Naturalmente, la teoría que presentaremos será compatible con la interpretación frecuentista, y de hecho conviene tenerla en mente para entender las definiciones y resultados que veremos.

Antes de definir el concepto de probabilidad y de estudiar resultados para el cálculo de probabilidades, necesitamos introducir la terminología y notación asociada a los experimentos aleatorios.

1. Experimentos aleatorios

El cálculo de probabilidades se plantea en el contexto de un experimento aleatorio. Denominaremos **experimento aleatorio** a cualquier proceso que, al llevarse a cabo, puede generar diferentes resultados, aun repitiéndose en idénticas condiciones. El resultado obtenido en cada ocasión o repetición del experimento no puede predecirse con antelación, sino que depende del azar, de forma que no se tiene certeza del resultado del experimento hasta que no se ejecuta.

Un ejemplo de experimento aleatorio es el lanzamiento de un dado. Asumiendo que se trata de un dado clásico, de seis caras, en cada lanzamiento puede obtenerse como resultado el valor 1, 2, 3, 4, 5 o 6. Y dicho valor no puede predecirse hasta efectuar el lanzamiento.

1.1. Espacios muestrales y sucesos

El primer paso para describir un experimento aleatorio es indicar cuáles son sus posibles resultados, asociando al experimento lo que se denomina un espacio muestral. El **espacio muestral** asociado a un experimento aleatorio es el conjunto de todos los posibles resultados del experimento, de manera que, cada vez que se realiza el experimento, ocurre exactamente uno de los resultados que componen el espacio muestral. Para denotar el espacio muestral de un experimento aleatorio usaremos la letra Ω.

En el ejemplo anterior del lanzamiento de un dado, lo más natural es describir el resultado de un lanzamiento indicando el valor numérico obtenido, y definir el espacio muestral como

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Usaremos la palabra **suceso** para referirnos a cualquier subconjunto del espacio muestral de un experimento aleatorio.

Asociados al experimento del lanzamiento de un dado, con espacio muestral $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, podemos considerar los sucesos:

$$\begin{aligned} A &= \text{Obtener una puntuación igual o superior a } 3 = \{3, 4, 5, 6\}, \\ B &= \text{Obtener una puntuación impar} = \{1, 3, 5\} \\ C &= \text{Obtener un } 2 = \{2\}. \end{aligned}$$

Dos sucesos destacados de cualquier espacio muestral Ω son:

- el conjunto vacío $\emptyset$, que no contiene ningún resultado,
- y el propio espacio muestral Ω, que contiene todos los resultados.

Se dice que un suceso ocurre cuando el resultado del experimento es alguno de los resultados que componen dicho suceso. En este sentido, cada uno de los resultados que componen un suceso se llaman resultados o casos **favorables** para el suceso. Por ejemplo, decimos que el suceso A del ejemplo anterior ocurre cuando el resultado del lanzamiento es 3, 4, 5 o 6. De forma que el resultado 3 es favorable al suceso A, y también al suceso B.

El suceso $\emptyset$ nunca ocurre, y por eso suele denominarse suceso imposible, mientras que el suceso Ω siempre ocurre, y por eso se le llama también suceso seguro.

Un suceso se llama **elemental** si está formado por un único resultado; mientras que si tiene más de un elemento se denomina **compuesto**.

En nuestro ejemplo del dado, los sucesos A y B son compuestos, y el suceso C es elemental.

El suceso $\emptyset$ no es elemental ni compuesto.

1.2. Relaciones y operaciones entre sucesos

Es interesante describir las relaciones entre varios sucesos, y combinar varios sucesos para formar otros nuevos, usando las relaciones y operaciones propias

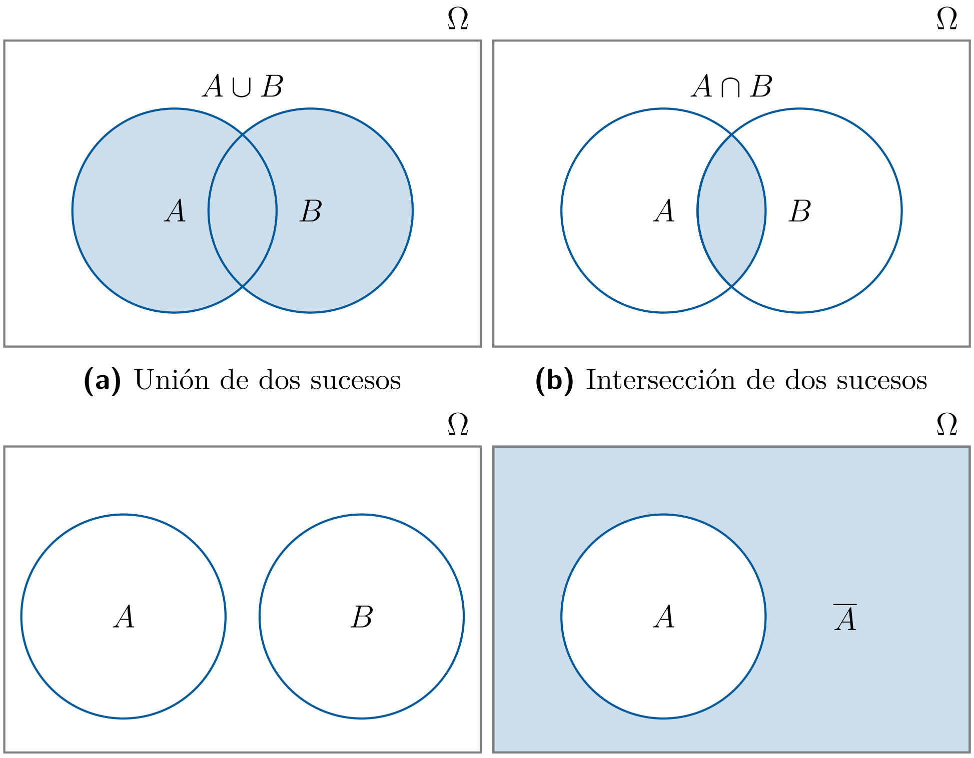


Figura 1: Relaciones y operaciones entre sucesos

de la teoría de conjuntos, que recordamos a continuación, y que se ilustran con diagramas de Venn en la Figura 1.

- Dados dos sucesos A y B, el conjunto **A unión B** es

  $$A \cup B = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A \text{ ó } \omega \in B\}.$$

  Ocurre cuando ocurre A *o* cuando ocurre B.

- Dados dos sucesos A y B, el conjunto **A intersección B** es

  $$A \cap B = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A \text{ y } \omega \in B\}.$$

  Ocurre cuando ocurren A *y* B simultáneamente.

- Se dice que dos sucesos A y B son **disjuntos**, o **incompatibles**, si $A \cap B = \emptyset$. Dos sucesos disjuntos no pueden ocurrir al mismo tiempo.

- Dado un suceso A, el suceso **complementario de A** es

  $$\overline{A} = \{\omega \in \Omega \mid \omega \notin A\}.$$

Notar que un suceso A y su complementario $\overline{A}$ son siempre disjuntos, con lo que nunca pueden ocurrir al mismo tiempo; y que $A \cup \overline{A} = \Omega$.

Para los sucesos $A = \{3, 4, 5, 6\}$ y $B = \{1, 3, 5\}$ asociados al experimento del lanzamiento de un dado, con espacio muestral $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, tenemos:

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{1, 3, 4, 5, 6\}, \\ A \cap B &= \{3, 5\}, \\ \overline{A} &= \{1, 2\}. \end{aligned}$$

2. Probabilidad

En esta sección veremos la definición formal de lo que se entiende por probabilidad en matemáticas.

2.1. Axiomas de probabilidad

A continuación se da una definición de probabilidad que contiene tan sólo tres axiomas o reglas muy básicos.

Estos tres axiomas reflejan propiedades muy simples de la probabilidad, compatibles con el uso informal de la palabra probabilidad en el lenguaje cotidiano y la interpretación frecuentista.

Definición 1 (Axiomas de probabilidad)
Una **probabilidad** es una función que asocia a cada suceso A un número real $P(A)$, que se denomina **probabilidad del suceso A**, de tal manera que se verifican los siguientes axiomas:

1. Para cualquier suceso A se tiene que $P(A) \geq 0$,
2. $P(\Omega) = 1$,
3. Si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de sucesos disjuntos dos a dos, es decir, verificando $A_i \cap A_j = \emptyset$ para cada $i \neq j$, entonces

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

Los dos primeros axiomas son requisitos muy sencillos y naturales. El tercero no es mas que la versión infinita de la siguiente propiedad: Si dos sucesos A y

B no tienen elementos comunes, entonces

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B),$$

que también resulta lógica.

A pesar de su simplicidad, los tres axiomas de probabilidad anteriores serán suficientes para derivar a partir de ellos muchas más propiedades y resultados.

2.2. Primeras propiedades

En este apartado veremos las primeras propiedades que se deducen de los tres axiomas en la definición de probabilidad. Al igual que los axiomas, las propiedades que obtendremos reflejan el significado e interpretación informales de la probabilidad.

Teorema 1
Se cumplen las siguientes propiedades:

1. $P(\emptyset) = 0$.
2. Dados k sucesos A_1, A_2, $\ldots$, A_k, disjuntos dos a dos, es decir, verificando $A_i \cap A_j = \emptyset$ para cada $i \neq j$, se cumple que
$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_k).$$
3. Para cualquier suceso A se tiene que
$$P(A) = 1 - P(\overline{A}).$$
En particular,
$$P(A) \leq 1.$$

Ejemplo 1
Consideremos el experimento consistente en lanzar un dado de seis caras, con espacio muestral $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Puesto que, asumiendo que el dado es equilibrado, los seis resultados son igualmente verosímiles, tiene sentido definir una función de probabilidad P que asigne la misma probabilidad p a los sucesos elementales $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$ y $\{6\}$.

Veamos, usando las propiedades de la probabilidad que conocemos hasta ahora, que debe ser $p = 1/6$:

$$\begin{aligned} 1 &\underset{\text{Axioma 2}}{=} P(\Omega) = P\Big(\{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \{4\} \cup \{5\} \cup \{6\}\Big) \\ &\underset{\text{Teorema 1 - Propiedad 2}}{=} P\Big(\{1\}\Big) + P\Big(\{2\}\Big) + P\Big(\{3\}\Big) + P\Big(\{4\}\Big) + P\Big(\{5\}\Big) + P\Big(\{6\}\Big) \\ &= p + p + p + p + p + p = 6p \end{aligned}$$

Despejando

$$p = \frac{1}{6}$$

y queda determinada la probabilidad de los seis sucesos elementales:

$$P\Big(\{i\}\Big) = \frac{1}{6} \qquad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

A partir de la probabilidad de los sucesos elementales, podemos calcular la probabilidad de cualquier otro suceso.
Por ejemplo, la probabilidad del suceso

$$A = \text{Obtener una puntuación de cinco o superior}$$

se calcula como

$$\begin{aligned} P(A) &= P\Big(\{5, 6\}\Big) = P\Big(\{5\} \cup \{6\}\Big) \\ &\underset{\text{Teorema 1 - Propiedad 2}}{=} P\Big(\{5\}\Big) + P\Big(\{6\}\Big) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Para calcular la probabilidad del suceso

$$B = \text{Obtener una puntuación de dos o superior} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

podríamos seguir un procedimiento similar al anterior; pero, como el suceso complementario $\overline{B} = \{1\}$ es más simple, sería más rápido lo siguiente:

$$P(B) \underset{\text{Teorema 1 - Propiedad 3}}{=} 1 - P(\overline{B}) = 1 - P(\{1\}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

Una de las ideas que hemos trabajado en el ejemplo anterior es válida para cualquier espacio muestral con un número de resultados finito o incluso infinito numerable: Para definir una regla de probabilidad en esta clase de espacios muestrales es suficiente definir las probabilidades de los sucesos elementales. Porque, una vez especificadas dichas probabilidades, la probabilidad de cualquier otro suceso se puede obtener sumando las probabilidades asociadas a los resultados que lo componen (usando el Axioma 3).

2.3. Regla de Laplace

En los primeros niveles educativos se aprende a calcular probabilidades a través de la denominada *regla de Laplace*, que se enuncia de la siguiente forma: Cuando el experimento tiene un número finito de posibles resultados y todos ellos son "igualmente verosímiles", la probabilidad de un suceso A se calcula como el cociente entre el número de casos favorables al suceso A y el número de casos posibles:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favorables a } A}{\text{número de casos posibles}}.$$

Notar que, los valores de las probabilidades calculadas en el Ejemplo 1, concuerdan con los que se obtienen aplicando la regla de Laplace:

$$\begin{aligned} A = \{5, 6\} \quad &\rightarrow \quad P(A) = \frac{2}{6} \\ B = \{2, 3, 4, 5, 6\} \quad &\rightarrow \quad P(B) = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

Un enunciado algo más formal de la regla de Laplace es el siguiente resultado, que se demostraría utilizando los mismos argumentos que en el Ejemplo 1.

Teorema 2 (Regla de Laplace)
Sea Ω un espacio muestral finito con n elementos y sea P una probabilidad que asigna el mismo valor a todos los sucesos elementales.
Si A es un suceso con m elementos, entonces

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Es necesario indicar que la regla de Laplace tiene varias limitaciones. En primer lugar, es claro que el cálculo solo tiene sentido cuando hay un número finito de casos posibles. Además, solo puede aplicarse cuando los casos posibles que se contabilizan en el denominador de la fracción son igualmente verosímiles o plausibles. Si no tenemos en cuenta este requisito, caeríamos en la falacia de decir que para cualquier suceso hay dos casos posibles, que ocurra o no, y por tanto su probabilidad es un 1/2.

2.4. Más ejemplos y propiedades

Hasta ahora hemos visto que para definir una regla de probabilidad en el caso de experimentos con espacios muestrales finitos o infinitos numerables es suficiente con definir las probabilidades de los sucesos elementales. Porque la probabilidad de cualquier otro suceso se puede obtener sumando las probabilidades asociadas a los resultados que lo componen.

Y en el caso particular en que todos los sucesos elementales son equiprobables, puede aplicarse la regla de Laplace.

La definición de probabilidades en espacios muestrales con un número infinito no numerable de resultados suele ser más compleja. No obstante, hay ocasiones en que la interpretación cotidiana del significado de probabilidad es suficiente para guiarnos en la definición de una ley de probabilidad en este tipo de espacios. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 2

Se considera un círculo de radio 8, que tiene en su interior un segundo círculo de radio 2. Se selecciona al azar un punto dentro del círculo mayor. Nos planteamos calcular la probabilidad de que el punto seleccionado se encuentre también en el círculo de radio menor.

El resultado del experimento puede ser cualquier punto del círculo mayor, así que el espacio muestral Ω es el conjunto de los infinitos puntos que componen dicho círculo, o sea, el propio círculo de radio 8.

Un suceso de este espacio muestral es cualquier subconjunto del círculo de radio 8. El suceso A del que queremos calcular la probabilidad es el círculo menor de radio 2.

Calcular el cociente entre los radios de los dos círculos, y decir que la probabilidad buscada es

$$\frac{2}{8} = \frac{1}{4},$$

no es la mejor idea.

Es más acertado pensar que un subconjunto de Ω tiene tantas más posibilidades de que el punto seleccionado pertenezca a él, cuanto mayor sea la superficie que ocupa, cuanto mayor sea su área. Y el área de un círculo no es proporcional a su radio, sino a su radio al cuadrado. El área del círculo menor A es

$$\pi \cdot 2^2 = 4\pi,$$

y el área total del círculo mayor es

$$\pi \cdot 8^2 = 64\pi.$$

Parece coherente cuantificar la probabilidad del suceso A como el cociente entre el área de A y el área total:

$$\frac{4\pi}{64\pi} = \frac{1}{16}.$$

Generalizando esta idea, podemos definir la probabilidad de cualquier suceso A como

$$P(A) = \frac{\text{Área de } A}{\text{Área de } \Omega} = \frac{\text{Área de } A}{64\pi}.$$

Puede comprobase que la función P así definida satisface los tres axiomas de probabilidad.

De acuerdo con la segunda propiedad listada en el Teorema 1, si A y B son sucesos disjuntos, entonces

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B). \tag{1}$$

Sin embargo, esta fórmula no es cierta para dos sucesos A y B cualesquiera. La fórmula para calcular la probabilidad de $A \cup B$ que puede aplicarse siempre (sean A y B disjuntos o no), es la siguiente:

Teorema 3 (Principio de inclusión-exclusión para dos sucesos) Para dos sucesos cualesquiera A y B

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Notar que, cuando A y B son disjuntos, (1) se obtiene como caso particular del principio de inclusión-exclusión, porque $P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$.

El siguiente resultado muestra la fórmula general para la unión de un número finito de sucesos.

Teorema 4 (Principio de inclusión-exclusión, caso general)
Para cualesquiera sucesos A_1, A_2, ..., A_n se tiene que

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) & \\ - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) & \\ + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) & \\ \cdots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n). & \end{aligned}$$

3. Probabilidad condicionada

3.1. Definición de probabilidad condicionada

Ejemplo 3
Un profesor imparte estadística en dos titulaciones, una de la rama de ingenierías (I), con 76 alumnos matriculados, y otra de la rama de ciencias de la salud (S), con 114 alumnos. La siguiente tabla indica la distribución de hombres (H) y mujeres (M) en cada titulación:

	Hombres (H)	Mujeres (M)	Total
Ingeniería (I)	57	19	76
Ciencias de la Salud (S)	33	81	114
Total	90	100	190

Consideremos el experimento aleatorio consistente en seleccionar al azar uno de los estudiantes del profesor, mediante un sorteo.
Cada estudiante es un posible resultado del experimento, así que el espacio muestral Ω del experimento sería el conjunto de los 190 estudiantes.
Consideremos los sucesos

$$\begin{aligned} M &= \text{El estudiante seleccionado es una mujer} \\ I &= \text{El estudiante seleccionado estudia una ingeniería} \end{aligned}$$

De acuerdo con los datos de la tabla, en total hay 90 hombres y 100 mujeres. Por tanto, la probabilidad de que el ganador del sorteo sea una mujer es

$$P(M) = \frac{100}{190} = 0.53.$$

Supongamos ahora que el profesor realiza el sorteo, y que, antes de hacer público el resultado, te revela una información adicional sobre la persona seleccionada: estudia una ingeniería. Tras conocer este dato ¿dirías que la probabilidad de que se trate de una mujer sigue siendo de 0.53? Puesto que en la titulación de ingeniería hay bastantes menos mujeres que hombres, parece adecuado rebajar nuestra la certeza previa del 53%. Imaginemos los dos escenarios siguientes:

- Supongamos que en la ingeniería todos los matriculados fueran hombres. Sabiendo que el estudiante seleccionado estudia ingeniería, sería imposible que se tratara de una mujer. Por tanto, en este escenario, diríamos que la nueva probabilidad es 0.
- En el extremo contrario, si todos los estudiantes de la ingeniería fueran mujeres, la información de que el estudiante seleccionado estudia ingeniería nos daría la certeza absoluta de que se trata de una mujer, y la nueva probabilidad sería 1.

Veamos cómo recalcular la probabilidad de que el estudiante seleccionado sea mujer, condicionada a que estudia ingeniería, con nuestros datos: La titulación de la rama de ingeniería tiene 76 estudiantes, de los que 57 son hombres y 19 mujeres. De acuerdo con estos valores, la probabilidad de ser mujer entre los estudiantes de la ingeniería es

$$\frac{19}{76} = 0.25.$$

Acabamos de calcular una probabilidad condicionada. Decimos que 0.25 es la **probabilidad de M dado I**, o de M condicionado a I, y se denota

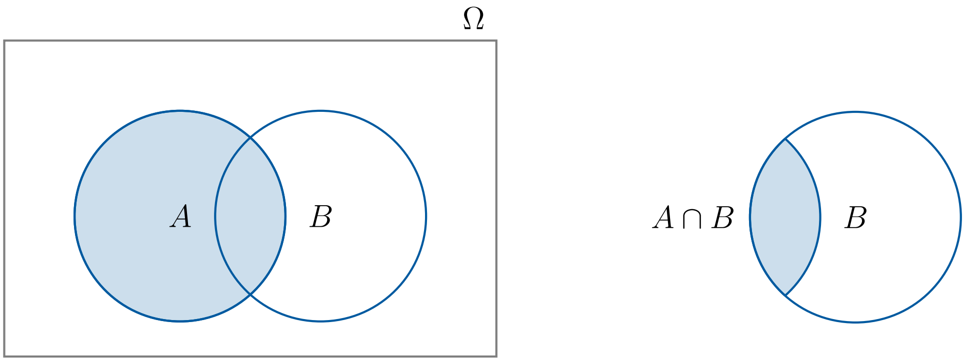
$$P(M|I) = 0.25.$$

En general, dados dos sucesos A y B de un espacio muestral Ω, la probabilidad condicionada $P(A|B)$, leído probabilidad de A dado B, se interpreta como la probabilidad de que ocurra A sabiendo que ha ocurrido B.

En nuestro ejemplo, la probabilidad

$$P(M) = 0.53$$

es una probabilidad ordinaria, la probabilidad de M, ser mujer, calculada



(a) Probabilidad ordinaria $P(A)$ **(b)** Probabilidad condicionada $P(A|B)$

Figura 2: Probabilidad condicionada

cuando es plausible que la persona seleccionada en el sorteo pertenezca a cualquier titulación. Mientras que

$$P(M|I) = 0.25$$

es una probabilidad condicionada, la probabilidad de M calculada en el nuevo escenario de posibilidades, reducido, de todos los estudiantes, a los de la ingeniería.

En general, al tener la información adicional de que ha ocurrido el suceso B, el espacio muestral inicial Ω se reduce, al descartar los resultados que no pertenecen a B. La probabilidad condicionada $P(A|B)$ representa la probabilidad de A calculada en este nuevo escenario, donde el espacio muestral ya no es todo Ω sino solo B.

La siguiente definición refleja el significado de la probabilidad condicionada que acaba de explicarse (ver Figura 2).

Definición 2 (Probabilidad condicionada)
Dados dos sucesos A y B, con $P(B) \neq 0$, se define la **probabilidad de A dado B** como

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

El cálculo de probabilidades condicionadas puede hacerse bien utilizando la definición anterior, o bien usando su significado.

Problema 1

Continuando con los datos del Ejemplo 3:

	Hombres (H)	Mujeres (M)	Total
Ingeniería (I)	57	19	76
Ciencias de la Salud (S)	33	81	114
Total	90	100	190

(a) Volver a calcular la probabilidad condicionada $P(M|I)$ usando la Definición 2. Comparar con el resultado previo obtenido a partir de la interpretación.

(b) Calcular además las probabilidades condicionadas $P(\overline{M}|I)$, $P(I|M)$ y $P(M|\overline{I})$. ¿Qué relaciones aprecias entre las cuatro probabilidades condicionadas calculadas?

Solución:

(a) Calculamos primero $P(M \cap I)$ y $P(I)$:

$$P(M \cap I) = \frac{19}{190}$$
$$P(I) = \frac{76}{190}.$$

Usando la definición de $P(M|I)$ queda

$$\begin{aligned} P(M|I) &= \frac{P(M \cap I)}{P(I)} \\ &= \frac{19/190}{76/190} = \frac{19}{76} = 0.25. \end{aligned}$$

Coincide con el resultado previo calculado usando la interpretación. Notar que de hecho se obtiene la misma fracción 19/76 al simplificar el denominador 190 en las fracciones de numerador y denominador.

(b) Realizamos los cálculos utilizando la interpretación de que el cálculo de probabilidades condicionadas es equivalente a sustituir el espacio muestral original por el evento al que se condiciona.

$$P(\overline{M}|I) = P(H|I) = \frac{57}{76} = 0.75$$

$$P(I|M) = \frac{19}{100} = 0.19$$
$$P(M|\overline{I}) = P(M|S) = \frac{81}{114} = 0.71.$$

Notar que
$$P(M|I) + P(\overline{M}|I) = 0.25 + 0.75 = 1.$$

Pero que no hay ninguna relación evidente, ni entre
$$P(M|I) = 0.25 \quad \text{y} \quad P(I|M) = 0.19,$$

ni entre
$$P(M|I) = 0.25 \quad \text{y} \quad P(M|\overline{I}) = 0.71,$$

más allá de que se tienen que 'compensar' para mantener el porcentaje de mujeres global del 53%. ❖

Nota 1

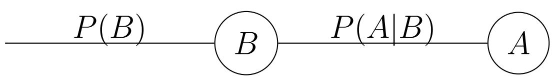
Puede comprobarse que las probabilidades condicionadas son verdaderas leyes de probabilidad. Con esto quiere decirse que, la aplicación P_B dada por
$$P_B(A) = P(A|B),$$

para cualquier suceso A del espacio muestral Ω, satisface los tres axiomas de probabilidad. Esto legitima la interpretación de que, calcular probabilidades condicionadas a B es equivalente a calcular probabilidades con B como nuevo espacio muestral.

Si, en la fórmula que define $P(A|B)$,
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

despejamos $P(A \cap B)$, obtenemos
$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B). \tag{2}$$

El siguiente esquema ayuda a recordar la fórmula anterior:



Ejemplo 4
Volvamos a considerar el ejemplo del comienzo de la sección y los sucesos

$$\begin{aligned} M &= \text{ Ser mujer} \\ I &= \text{ Estudiar ingeniería.} \end{aligned}$$

Teníamos que

$$P(I) = \frac{76}{190} = 0.4,$$

esto es, los estudiantes de la ingeniería representan el 40% de todos los alumnos del profesor.
Y también habíamos calculado

$$P(M|I) = \frac{19}{76} = 0.25,$$

es decir, entre los alumnos de la ingeniería, el porcentaje de mujeres es del 25%.
El suceso $M \cap I$ es ser mujer y estudiante de la ingeniería. Si calculamos la probabilidad de $M \cap I$ con la fórmula (2) obtenemos

$$\begin{aligned} P(M \cap I) &= P(I)P(M|I) \\ &= 0.4 \cdot 0.25 = 0.1. \end{aligned}$$

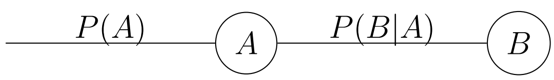
Este cálculo refleja que el porcentaje de alumnos que son mujeres y estudiantes de la ingeniería es del 10%, calculado como el 25% del 40%.

En general, la fórmula (2), leída en términos de porcentajes, expresa que, para obtener el porcentaje de veces que ocurre $A \cap B$, hemos de considerar el porcentaje de ocasiones en que ocurre B, y aplicar sobre él el porcentaje de ocasiones en que ocurre A sabiendo que ha ocurrido B.

Notar que, en (2), podemos intercambiar los papeles de A y B, y, como $A \cap B = B \cap A$, queda

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A). \tag{3}$$

Esta nueva fórmula se corresponde con el esquema siguiente:



Nos referiremos a las fórmulas (2) y (3) como regla del producto para el cálculo de la probabilidad de una intersección de sucesos:

Proposición 1 (Regla del producto)
Dados dos sucesos A y B

$$P(A \cap B) = \begin{cases} P(B)P(A|B) \\ P(A)P(B|A) \end{cases}$$

Problema 2
Una urna contiene 5 bolas rojas y 4 bolas azules. Se extrae una primera bola de la urna, y, a continuación, sin devolver la primera bola extraída a la urna, se realiza una segunda extracción.
Calcular la probabilidad de obtener dos bolas azules.

Solución:

Consideremos los sucesos siguientes:

$$\begin{aligned} A_1 = & \text{ Obtener una bola azul en la primera extracción,} \\ A_2 = & \text{ Obtener una bola azul en la segunda extracción.} \end{aligned}$$

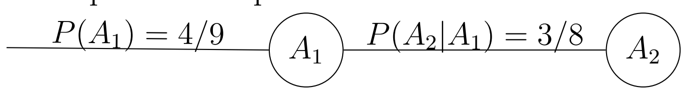
Nos piden calcular la probabilidad del suceso $A_1 \cap A_2$.
Al comenzar el experimento, la urna contiene 5 bolas rojas y 4 bolas azules, de modo que

$$P(A_1) = \frac{4}{9}.$$

Si la primera bola extraída es azul, tras esta primera extracción, en la urna quedan 5 bolas rojas y 3 bolas azules. Por tanto

$$P(A_2|A_1) = \frac{3}{8}.$$

Representamos las dos probabilidades calculadas en el siguiente esquema, que refleja los dos pasos del experimento:



Aplicando la regla del producto, obtenemos

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1) = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{6}.$$

❖

La regla del producto puede generalizarse a tres o más sucesos. En el caso de tres sucesos A, B y C se tiene que

$$P(A \cap B \cap C) = P(C)P(B|C)P(A|B \cap C). \tag{4}$$

Para recordar esta fórmula podemos utilizar el siguiente esquema:

$$\xrightarrow{P(C)} C \xrightarrow{P(B|C)} B \xrightarrow{P(A|B \cap C)} A$$

Por la conmutatividad en $A \cap B \cap C$, pueden permutarse los papeles de A, B y C en la fórmula anterior para obtener diferentes variantes.

Problema 3

Una urna contiene 5 bolas rojas y 4 bolas azules. Se realizan 3 extracciones sin reemplazamiento. Calcular la probabilidad de que las tres bolas extraídas sean azules.

Solución:

Consideremos los sucesos siguientes:

$$\begin{aligned} A_1 &= \text{ Obtener una bola azul en la primera extracción,} \\ A_2 &= \text{ Obtener una bola azul en la segunda extracción,} \\ A_3 &= \text{ Obtener una bola azul en la tercera extracción.} \end{aligned}$$

Nos piden calcular la probabilidad del suceso $A_1 \cap A_2 \cap A_3$.
Como en el Problema 2

$$\begin{aligned} P(A_1) &= \frac{4}{9} \\ P(A_2|A_1) &= \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

Si las dos primeras bolas extraídas son azules, tras esas dos extracciones, en la urna quedan 5 bolas rojas y 2 bolas azules. Por tanto

$$P(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{2}{7}.$$

Representamos las tres probabilidades anteriores en el diagrama siguiente

$$\xrightarrow{P(A_1) = 4/9} A_1 \xrightarrow{P(A_2|A_1) = 3/8} A_2 \xrightarrow{P(A_3|A_1 \cap A_2) = 2/7} A_3$$

Aplicando la regla del producto obtenemos

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{1}{21}.$$

❖

3.2. Independencia de sucesos

En el lenguaje común se entiende que dos sucesos A y B son independientes cuando la ocurrencia de uno de ellos no influencia la probabilidad de que ocurra el otro.

Con la interpretación de la probabilidad que ya hemos visto, que la ocurrencia del suceso B no influencie la ocurrencia del suceso A se puede expresar con la fórmula

$$P(A|B) = P(A)$$

(asumimos $P(B) \neq 0$). Usando la definición de probabilidad condicionada para $P(A|B)$ en la fórmula anterior tenemos

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$$

y multiplicando por $P(B)$ nos queda

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Recíprocamente, pasamos de la fórmula

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

a la fórmula

$$P(A|B) = P(A)$$

dividiendo por $P(B)$.

Con un argumento análogo se demuestra que si $P(A) \neq 0$ son equivalentes

$$P(B|A) = P(B)$$

y

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Las consideraciones anteriores demuestran que si $P(A) \neq 0$ y $P(B) \neq 0$, tanto la condición $P(A|B) = P(A)$ como la condición $P(B|A) = P(B)$ son equivalentes a

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Ésto da lugar a la siguiente definición matemática de independencia de dos sucesos:

Definición 3 (Sucesos independientes)
Se dice que dos sucesos A y B son *independientes* si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Notar que, si A y B son sucesos independientes, la regla del producto se

$$P(A \cap B) = \begin{cases} P(B)P(A|B) \\ P(A)P(B|A) \end{cases}$$

reduce a

$$P(A \cap B) = P(A)P(B),$$

la definición de independencia.

Para practicar el concepto de independencia, puedes trabajar el Problema 7.

En la Definición 3 hemos dado la noción de independencia para dos sucesos. Veamos ahora cómo se generaliza esta definición a una colección finita de sucesos.

Definición 4 (Sucesos independientes - caso general)
Se dice que los sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son independientes si

- $P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$ para cualesquiera $i < j$,
- $P(A_i \cap A_j \cap A_k) = P(A_i)P(A_j)P(A_k)$ para cualesquiera $i < j < k$,
  $\ldots$
- $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$.

En la práctica podemos suponer que una colección de sucesos es independiente cuando la ocurrencia de uno o varios de los sucesos de la colección no afecta a la probabilidad de ocurrencia de otros sucesos de la colección.

Problema 4
Un jugador de baloncesto tiene un porcentaje de acierto en el lanzamiento de tiros libres del 75%. Calcular la probabilidad de que acierte cuatro tiros libres seguidos. Suponer que el resultado de un lanzamiento no afecta a los demás.

Solución:

Para $i = 1, 2, 3, 4$, consideremos el suceso

$$A_i = \text{Acertar el lanzamiento número } i.$$

Tenemos que calcular la probabilidad del suceso $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$.
Podemos suponer que los sucesos A_1, A_2, A_3 y A_4 son independientes entre sí, porque nos dicen que el resultado de un lanzamiento no afecta a los demás. Por tanto

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) &= P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4) \\ &= 0.75 \cdot 0.75 \cdot 0.75 \cdot 0.75 = 0.75^4 = 0.3164. \end{aligned}$$

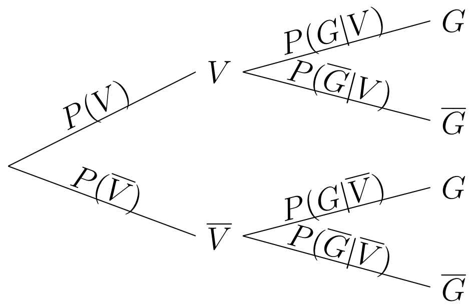
3.3. Teorema de la probabilidad total

Problema 5
Supongamos que el año pasado en España el porcentaje de personas que se vacunaron contra la gripe fue del 40%, que el 7% de los vacunados contrajo la gripe, y que el 30% de los no vacunados contrajo la gripe.
Considerar los sucesos

$$\begin{aligned} V &= \text{ Estar vacunado,} \\ G &= \text{ Padecer gripe.} \end{aligned}$$

(a) Identificar los datos del problema, en términos de probabilidades (ordinarias o condicionadas) asociadas a los sucesos V y G.

(b) Considerar el árbol siguiente, con las posibles alternativas para las combinaciones de los sucesos V y G y sus complementarios.



En cada rama, se ha escrito la probabilidad del nodo de llegada (a la derecha) asumiendo que han ocurrido los anteriores sucesos de la trayectoria (a la izquierda). Sustituir las probabilidades indicadas en las ramas del árbol por sus valores numéricos.

(c) Con ayuda del árbol del apartado anterior, calcular la proporción de españoles que contrajeron la gripe, $P(G)$.

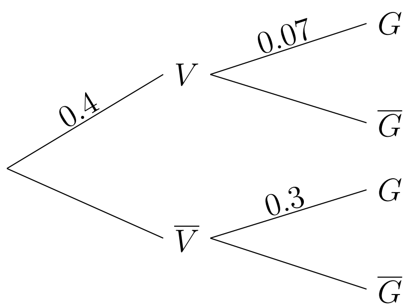
Solución:

(a) Los datos del problema en términos de probabilidades son

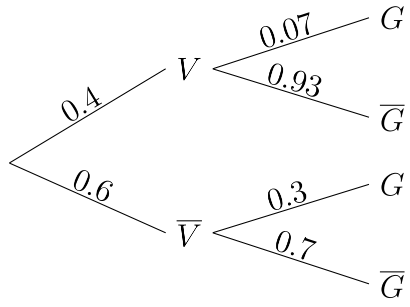
$$P(V) = 0.4$$
$$P(G|V) = 0.07$$
$$P(G|\overline{V}) = 0.3.$$

❖

(b) Ubicando en el árbol las probabilidades identificadas en el apartado anterior tenemos



Las probabilidades que faltan, son complementarias de las anteriores, con lo que el árbol de probabilidades completo queda



(c) El suceso G puede expresarse como unión de los sucesos correspondientes a dos trayectorias del árbol de la forma siguiente:

$$G = \underbrace{(V \cap G)}_{\text{Trayectoria 1}} \cup \underbrace{(\overline{V} \cap G)}_{\text{Trayectoria 3}}.$$

Evidentemente, los sucesos $V \cap G$ y $\overline{V} \cap G$ son disjuntos, así que, por la segunda propiedad en el Teorema 1

$$P(G) = P(V \cap G) + P(\overline{V} \cap G).$$

Vamos ahora a calcular la probabilidad de los dos sumandos en el lado derecho de la igualdad anterior, con la regla del producto:

$$P(V \cap G) = P(V)P(G|V) = 0.4 \cdot 0.07$$
$$P(\overline{V} \cap G) = P(\overline{V})P(G|\overline{V}) = 0.6 \cdot 0.3.$$

Notar que, usando el árbol, para calcular la probabilidad de cada uno de los sucesos anteriores, simplemente se han multiplicado las probabilidades que aparecen a lo largo de su trayectoria.
Llevando las fórmulas anteriores a la fórmula para $P(G)$ se obtiene:

$$P(G) = 0.4 \cdot 0.07 + 0.6 \cdot 0.3 = 0.208.$$

Si en la última fórmula de la solución del problema anterior, utilizamos la notación para cada probabilidad, hemos obtenido

$$P(G) = P(V)P(G|V) + P(\overline{V})P(G|\overline{V}).$$

Esto es un caso particular del resultado conocido como *teorema de la probabilidad total.* Antes de dar el enunciado general de este teorema, necesitamos definir el concepto de partición de un espacio muestral.

Definición 5 (Partición de un espacio muestral)
Se dice que una colección de sucesos $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ son una **partición de Ω** si estos sucesos cumplen que:
1. son no vacíos
2. son disjuntos dos a dos,
3. $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$.

La versión del teorema de la probabilidad total que hemos demostrado en el Problema 5 usa la partición $\{V, \overline{V}\}$.

Teorema 5 (Teorema de la probabilidad total)
Dado un suceso A y una partición $\{B_1, B_2, \cdots, B_n\}$ de Ω, se tiene que

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \cdots + P(B_n)P(A|B_n).$$

Con las ideas de este apartado, ya puedes hacer los problemas 8, 9 y 10.

3.4. Teorema de Bayes

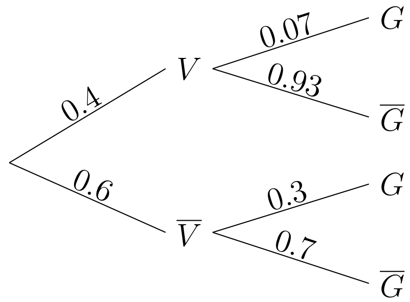
Problema 6
Continuando con el Problema 5, responder a la siguiente cuestión: Si entre las personas que contrajeron la gripe se selecciona una al azar ¿cuál es la probabilidad de que se hubiera vacunado?

Solución:

Nos piden calcular la probabilidad condicionada de V (vacunado) dado G (gripe). Usando la definición de probabilidad condicionada

$$P(V|G) = \frac{P(V \cap G)}{P(G)}.$$

En la fórmula anterior, las probabilidades de numerador y denominador son probabilidades ordinarias (no condicionadas), que podemos calcular utilizando el mismo árbol de probabilidades del Problema 5:



Nos queda

$$P(V|G) = \frac{P(V \cap G)}{P(G)} = \frac{0.4 \cdot 0.07}{0.4 \cdot 0.07 + 0.6 \cdot 0.3} = 0.1346.$$

Nota: En el denominador, podríamos haber usado directamente el valor $P(G) = 0.208$ del Problema 5. ❖

Si en la última fórmula de la solución del problema anterior, usamos la notación para cada uno de los factores en el producto del numerador, tenemos

$$P(V|G) = \frac{P(V)P(G|V)}{P(G)}.$$

Hemos deducido la fórmula conocida como *teorema de Bayes* que relaciona $P(B|A)$ con $P(A|B)$.

Teorema 6 (Teorema de Bayes)
Dados dos sucesos A y B, siendo $P(A)$ no nula,

$$P(B|A) = \frac{P(B)P(A|B)}{P(A)}.$$

Ahora ya puedes hacer todos los problemas complementarios del 11 en adelante.

Problemas complementarios

Problema 7

Se lanzan dos dados de seis caras, uno azul y otro rojo, y se anota la puntuación obtenida en cada uno de ellos. El espacio muestral del experimento está formado por los 36 resultados que se muestran en la tabla siguiente.

Segundo dado

Primer dado	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(1,6)$
⚁	$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$	$(2,4)$	$(2,5)$	$(2,6)$
⚂	$(3,1)$	$(3,2)$	$(3,3)$	$(3,4)$	$(3,5)$	$(3,6)$
⚃	$(4,1)$	$(4,2)$	$(4,3)$	$(4,4)$	$(4,5)$	$(4,6)$
⚄	$(5,1)$	$(5,2)$	$(5,3)$	$(5,4)$	$(5,5)$	$(5,6)$
⚅	$(6,1)$	$(6,2)$	$(6,3)$	$(6,4)$	$(6,5)$	$(6,6)$

Considerar los sucesos

$$A = \text{La puntuación del dado azul es menor o igual que 2},$$
$$B = \text{La suma de las dos puntuaciones es 5}.$$

(a) Calcular las probabilidades de A, B y $A \cap B$. ¿Son A y B sucesos independientes? (responder a la pregunta usando la Definición 3).

(b) Calcular las probabilidades condicionadas $P(A|B)$ y $P(B|A)$.

(c) Considerar el suceso

$$C = \text{La puntuación del dado rojo es mayor o igual que 4}.$$

¿Son A y C independientes?

Problema 8

En una bolsa hay cuatro dados: uno de 6 caras, otro de 8, otro de 12 y otro de 20.
Se extrae uno de los dados de la bolsa al azar, se lanza el dado extraído, y se observa el resultado del lanzamiento.
Calcular la probabilidad de que el resultado del lanzamiento sea igual a 5 o superior.

Problema 9

Se realizan dos lanzamientos consecutivos de una moneda.

(a) Calcular la probabilidad de obtener cara en el primer lanzamiento y cruz en el segundo.

(b) Calcular la probabilidad de obtener exactamente una cara entre los dos lanzamientos.

Problema 10

Consideremos un juego para el que tenemos una probabilidad de 0.4 de ganar.
Se juegan 3 partidas consecutivas a dicho juego.
Calcular la probabilidad de los siguientes sucesos:

(a) Ganar todas las partidas.

(b) Ganar exactamente una de las tres partidas.

(c) Ganar alguna partida.

Problema 11

Volver a considerar el experimento del Problema 8.
En una de las ejecuciones del experimento, se obtiene un resultado igual a 5 o superior. ¿Cuál es la probabilidad de que el dado seleccionado haya sido el de 12 caras?

Problema 12

Se tienen 2 urnas: la primera con 3 bolas rojas y 7 bolas verdes, y la segunda con 2 bolas rojas y 3 bolas verdes.
En primer lugar, se elige una de las urnas lanzando un dado: Si se obtiene un 1 o un 3 se elige la primera urna, y en los casos restantes (2, 4, 5 o 6) se elige la segunda urna.
Una vez elegida la urna se extrae una única bola.

(a) Calcular la probabilidad de elegir la segunda urna y extraer una bola roja.

(b) Calcular la probabilidad de que la bola extraída sea roja.

(c) Sabiendo que la bola extraída es roja, calcular la probabilidad de que se haya extraído de la primera urna.

Problema 13

Solemos realizar compras a través de la página web de una tienda de productos informáticos. Sabemos que la tienda en cuestión trabaja con dos empresas de mensajería diferentes, A y B, para hacer llegar los pedidos a sus clientes: el 35% de los pedidos son transportados por A y el 65% restante por B.
Además, se sabe que la empresa A entrega el 80% de los pedidos antes de 24 horas, mientras que la probabilidad de que la empresa B entregue un pedido antes de 24 horas es 0.7.

(a) ¿Qué porcentaje de pedidos son entregados antes de 24 horas?

(b) Supongamos que han pasado más de 24 horas desde que realizamos un pedido a la tienda y todavía no lo hemos recibido. ¿Cuál es la probabilidad de que la empresa responsable de la demora sea A?

Problema 14

El sistema de evaluación de una asignatura consiste en la realización de dos exámenes, un primer examen teórico, y un segundo examen práctico. Se sabe que el 40% de los alumnos aprueban el examen teórico. A su vez, el examen práctico lo aprueban el 90% de los alumnos que aprueban el examen teórico, y sólo el 15% de los que suspenden el examen teórico.

(a) ¿Qué porcentaje de alumnos aprueban ambos exámenes?

(b) Verificamos en el listado de notas que un determinado alumno ha aprobado el examen práctico ¿cuál es la probabilidad de haya suspendido el teórico?

Problema 15

Consideremos un test de alergia para un determinado tipo de polen. Se tienen las siguientes informaciones sobre la fiabilidad del test: sale negativo para el 93% de las personas que no tienen alergia, y sale positivo para el 95% de las personas alérgicas. Supongamos además que el 15% de las personas son alérgicas a ese tipo de polen.
Una persona realiza el test y obtiene un resultado positivo ¿cuál es la probabilidad de que realmente no sea alérgico?

Soluciones

Solución Problema 7:

(a)

	1	2	3	4	5	6
1	x	x	x	x	x	x
2	x	x	x	x	x	x
3						
4						
5						
6						

En el esquema previo, los resultados que componen el suceso A se marcan con una cruz, y los que componen el suceso B en color gris.
Por la regla de Laplace

$$P(A) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$
$$P(B) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$
$$P(A \cap B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}.$$

Las cantidades

$$P(A \cap B) = \frac{1}{18}$$

y

$$P(A)P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{27}$$

no coinciden, así que A y B no son independientes. ❖

(b) Según los cálculos del apartado anterior, la probabilidad de A dado B es

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/18}{1/9} = \frac{1}{2}.$$

Veamos otra forma de calcular esta misma probabilidad. Al condicionar a B, el espacio muestral se reduce a los 4 resultados de las celdas con fondo gris en el esquema del primer apartado. Entre ellos, hay 2 casos favorables al suceso A (celdas marcadas con 'x'). Como los 36 resultados iniciales eran equiprobables, los 4 resultados posibles al condicionar a B

también lo son, y podemos aplicar la regla de Laplace. Así que

$$P(A|B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

que naturalmente coincide con el cálculo anterior.
El hecho de que

$$P(A|B) \neq P(A)$$

confirma que A y B no son independientes.
La probabilidad de B dado A es

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/18}{1/3} = \frac{1}{6}.$$

También podríamos obtener esta probabilidad con el siguiente razonamiento. Al condicionar a A, el espacio muestral se reduce a los 12 resultados de las celdas marcadas con 'x' en el esquema del primer apartado. Entre ellos, hay 2 casos favorables al suceso B (celdas grises en el esquema del primer apartado). De nuevo podemos aplicar la regla de Laplace, y obtenemos

$$P(B|A) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}.$$ ❖

(c) Hay 18 casos favorables al suceso C, así que su probabilidad es

$$P(C) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}.$$

En el siguiente esquema se marcan con una 'x' los casos favorables al suceso A, y se colorean en gris los resultados pertenecientes al suceso C.

	1	2	3	4	5	6
1	x	x	x	x	x	x
2	x	x	x	x	x	x
3						
4						
5						
6						

Calculemos la probabilidad de $P(C|A)$ para decidir si A y C son independientes. Al condicionar a A, el espacio muestral se reduce a los 12 resultados de las celdas marcadas con 'x'. Entre ellos, 6 hacen que ocurra el suceso C, así que

$$P(C|A) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}.$$

Como $P(C) = P(C|A)$, A y C son independientes.
La misma conclusión se obtendría de

$$P(A|C) = \frac{1}{3} = P(A).$$

Solución Problema 8:
Consideremos los sucesos

$$\begin{aligned} A = &\ \text{el resultado es igual a 5 o superior} \\ D_i = &\ \text{el dado seleccionado es el de } i \text{ caras} \qquad (i = 6, 8, 12, 20) \end{aligned}$$

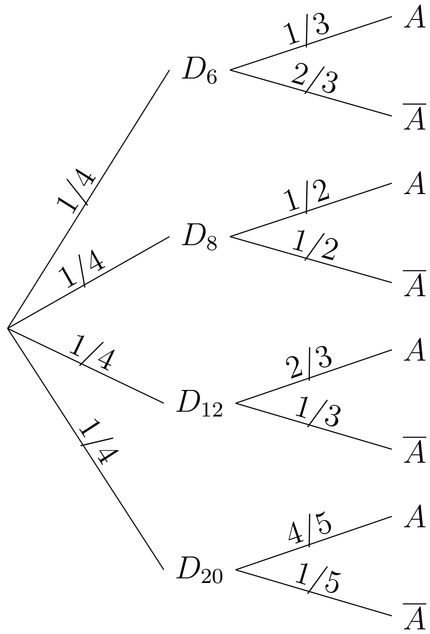
Como la extracción de uno de los cuatro dados de la bolsa se realiza al azar

$$P(D_6) = P(D_8) = P(D_{12}) = P(D_{20}) = \frac{1}{4}.$$

Fijado el dado que se lanza, sabemos calcular la probabilidad de A:

$$\begin{aligned} P(A|D_6) &= \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \\ P(A|D_8) &= \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \\ P(A|D_{12}) &= \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \\ P(A|D_{20}) &= \frac{16}{20} = \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

El árbol de probabilidades queda

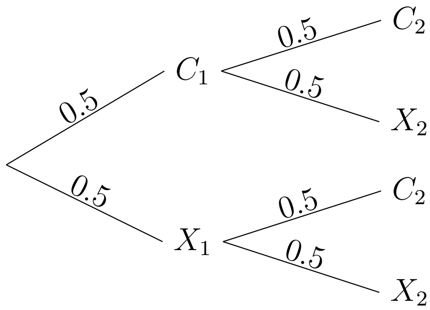


Por el Teorema de la probabilidad total

$$P(A) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5} = 0.575.$$ ❖

Solución Problema 9:

(a) Suponemos que la moneda es equilibrada y que los dos lanzamientos son independientes entre sí, de manera que la probabilidad de obtener cara o cruz en cualquiera de los dos lanzamientos es 0.5.
Denotando por C_i obtener cara en el lanzamiento i, y por X_i obtener cruz, tenemos el árbol de probabilidades



En este primer apartado nos piden calcular la probabilidad asociada la segunda trayectoria, correspondiente al suceso $C_1 \cap X_2$, que es

$$P(C_1 \cap X_2) = 0.5 \cdot 0.5 = 0.25.$$ ❖

(b) Denotemos por A el suceso consistente en obtener exactamente una cara entre los dos lanzamientos. Las dos trayectorias correspondientes a la ocurrencia del suceso A son la segunda y la tercera, esto es

$$A = (C_1 \cap X_2) \cup (X_1 \cap C_2).$$

La probabilidad buscada es

$$\begin{aligned} P(A) &= P\Big((C_1 \cap X_2) \cup (X_1 \cap C_2)\Big) \\ &= P(C_1 \cap X_2) + P(X_1 \cap C_2) \\ &= 0.5 \cdot 0.5 + 0.5 \cdot 0.5 = 2 \cdot 0.5^2 = 0.5. \end{aligned}$$ ❖

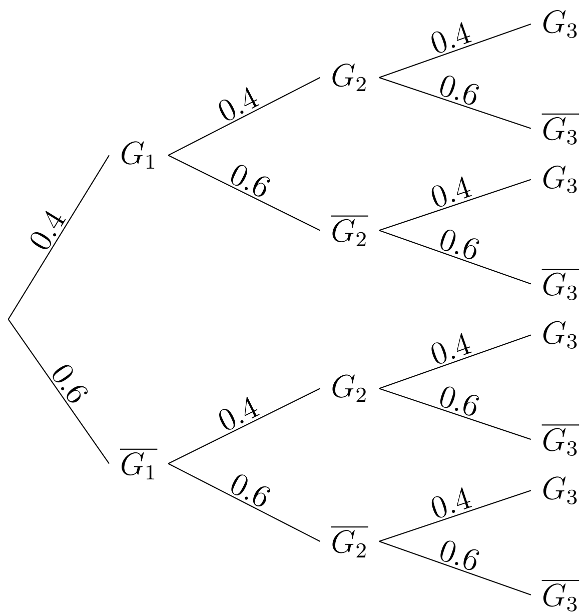
Solución Problema 10:

(a) Definamos los sucesos

$$G_i = \text{ganar la partida número } i, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Asumiendo que en el resultado de cada partida no influyen los resultados de otras partidas, tenemos el árbol de probabilidades

1ª partida 2ª partida 3ª partida



La probabilidad de ganar las tres partidas es

$$P(G_1 \cap G_2 \cap G_3) = 0.4 \cdot 0.4 \cdot 0.4 = 0.4^3 = 0.064.$$

(b) El suceso A, ganar exactamente una de las tres partidas es unión de las trayectorias número 4, 6 y 7, esto es

$$A = (G_1 \cap \overline{G_2} \cap \overline{G_3}) \cup (\overline{G_1} \cap G_2 \cap \overline{G_3}) \cup (\overline{G_1} \cap \overline{G_2} \cap G_3).$$

Por tanto

$$\begin{aligned} P(A) &= P\Big((G_1 \cap \overline{G_2} \cap \overline{G_3}) \cup (\overline{G_1} \cap G_2 \cap \overline{G_3}) \cup (\overline{G_1} \cap \overline{G_2} \cap G_3)\Big) \\ &= P(G_1 \cap \overline{G_2} \cap \overline{G_3}) + P(\overline{G_1} \cap G_2 \cap \overline{G_3}) + P(\overline{G_1} \cap \overline{G_2} \cap G_3) \\ &= 0.4 \cdot 0.6 \cdot 0.6 + 0.6 \cdot 0.4 \cdot 0.6 + 0.6 \cdot 0.6 \cdot 0.4 \\ &= 3 \cdot 0.4 \cdot 0.6^2 = 0.432. \end{aligned}$$

(c) El suceso del que nos piden calcular la probabilidad,

$$B = \text{ganar alguna partida}$$

es complementario del suceso

$$C = \text{perder las tres partidas} = \overline{G_1} \cap \overline{G_2} \cap \overline{G_3}.$$

La probabilidad de C (última trayectoria) es

$$P(C) = 0.6 \cdot 0.6 \cdot 0.6 = 0.6^3 = 0.216.$$

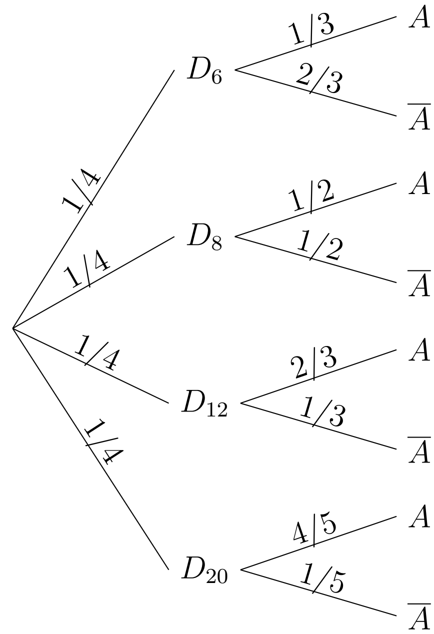
Así que la probabilidad pedida es

$$P(B) = P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 1 - 0.216 = 0.784.$$

❖

Solución Problema 11:

Hemos de calcular la probabilidad condicionada de D_{12} (dado de 12 caras) dado A (resultado mayor o igual que 5).
Utilizando la definición de probabilidad condicionada, y el mismo árbol del Problema 8



obtenemos

$$P(D_{12}|A) = \frac{P(D_{12} \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5}} = 0.2899.$$

Nota: Para el denominador podría haberse utilizado directamente la probabilidad $P(A) = 0.575$ obtenida en el Problema 8. ❖

Solución Problema 12:

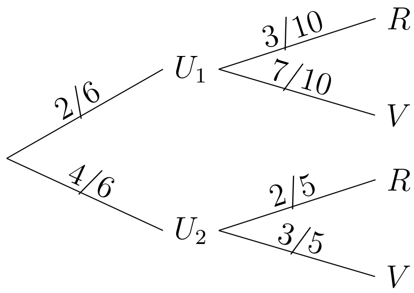
(a) Consideremos los sucesos

$$\begin{aligned} U_1 &= \text{ se elige la primera urna,} \\ U_2 &= \text{ se elige la segunda urna} = \overline{U_1}, \\ R &= \text{ la bola extraída es roja} \\ V &= \text{ la bola extraída es verde} = \overline{R}. \end{aligned}$$

De acuerdo con los datos del enunciado

$$\begin{aligned} P(U_1) &= 2/6 \\ P(R|U_1) &= 3/10 \\ P(R|U_2) &= 2/5. \end{aligned}$$

Las probabilidades anteriores, y sus complementarias, se ubican en las ramas correspondientes del siguiente árbol de probabilidades.



Nos piden calcular la probabilidad del suceso $U_2 \cap R$

$$P(U_2 \cap R) = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} = 0.2667.$$

(b) Por el teorema de la probabilidad total

$$P(R) = \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{10} + \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} = 0.3667.$$

(c) Tenemos que calcular la probabilidad condicionada de U_1 dado R.

$$\begin{aligned} P(U_1|R) &= \frac{P(U_1 \cap R)}{P(R)} \\ &= \frac{2/6 \cdot 3/10}{2/6 \cdot 3/10 + 4/6 \cdot 2/5} = 0.2727. \end{aligned}$$

Solución Problema 13:

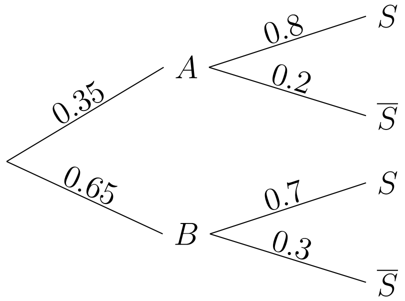
(a) Consideremos los sucesos

$$\begin{aligned} A &= \text{ el pedido es entregado por la empresa A,} \\ B &= \text{ el pedido es entregado por la empresa B} = \overline{A}, \\ S &= \text{ el pedido es entregado antes de 24 horas.} \end{aligned}$$

Los datos proporcionados en el enunciado son

$$\begin{aligned} P(A) &= 0.35 \\ P(B) &= 0.65 \\ P(S|A) &= 0.8 \\ P(S|B) &= 0.7. \end{aligned}$$

El siguiente árbol esquematiza el experimento, con las probabilidades anteriores, y sus complementarias, ubicadas en las ramas correspondientes.



Nos piden calcular el porcentaje asociado a la probabilidad $P(S)$. Aplicando el Teorema de la probabilidad total, obtenemos

$$P(S) = 0.35 \cdot 0.8 + 0.65 \cdot 0.7 = 0.735.$$

Por tanto, el porcentaje de pedidos que son entregados antes de 24 horas es del 73.5%. ❖

(b) Como sabemos que el pedido ha tardado más de 24 horas, la probabilidad pedida es la probabilidad condicionada de A dado $\overline{S}$.
Usando la definición de probabilidad condicionada, y el mismo árbol de probabilidades del apartado anterior, obtenemos

$$P(A|\overline{S}) = \frac{P(A \cap \overline{S})}{P(\overline{S})} = \frac{0.35 \cdot 0.2}{0.35 \cdot 0.2 + 0.65 \cdot 0.3} = 0.2642.$$

Nota 1: Para calcular el denominador, podríamos haber usado la probabilidad $P(S) = 0.735$ calculada en el apartado anterior, y deducir

$$P(\overline{S}) = 1 - 0.735 = 0.265.$$

Solución Problema 14:

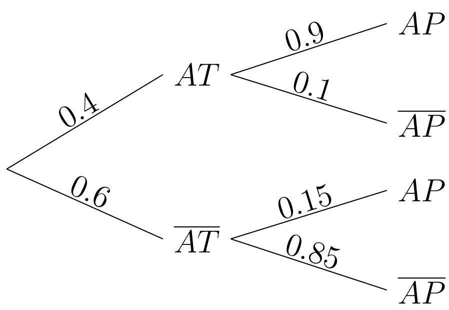
(a) Consideremos los sucesos

$$\begin{aligned} AT &= \text{ aprobar el examen teórico,} \\ AP &= \text{ aprobar el examen práctico.} \end{aligned}$$

Para saber el porcentaje que nos piden, tenemos que calcular la probabilidad $P(AT \cap AP)$.
Del enunciado sabemos que

$$\begin{aligned} P(AT) &= 0.4, \\ P(AP|AT) &= 0.9, \\ P(AP|\overline{AT}) &= 0.15. \end{aligned}$$

Utilizamos el siguiente árbol de probabilidades:



La probabilidad buscada es

$$P(AT \cap AP) = 0.4 \cdot 0.9 = 0.36.$$

Luego el porcentaje de alumnos que aprueban ambos exámenes es del 36%.

(b) Ahora tenemos que calcular la probabilidad condicionada de $\overline{AT}$ dado AP, $P(\overline{AT}|AP)$.
Usando la definición de probabilidad condicionada y el mismo árbol del apartado anterior, obtenemos

$$P(\overline{AT}|AP) = \frac{P(\overline{AT} \cap AP)}{P(AP)} = \frac{0.6 \cdot 0.15}{0.4 \cdot 0.9 + 0.6 \cdot 0.15} = 0.2.$$

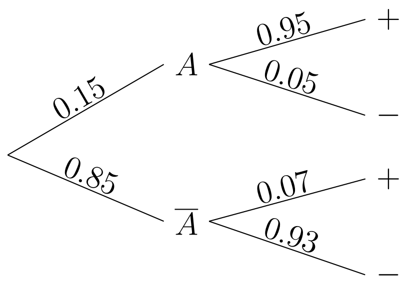
Solución Problema 15:
Consideremos los sucesos

$$\begin{aligned} A =&\ \text{ser alérgico,}\\ + =&\ \text{obtener positivo en el test,}\\ - =&\ \text{obtener negativo en el test.} = \overline{+}. \end{aligned}$$

Los datos del enunciado, expresados en términos de probabilidades, son

$$\begin{aligned} P(-|\overline{A}) &= 0.93,\\ P(+|A) &= 0.95\\ P(A) &= 0.15. \end{aligned}$$

Ubicamos estas probabilidades, y sus complementarias, en el siguiente árbol.



Como sabemos que la persona ha obtenido un resultado positivo en el test, tenemos que calcular la probabilidad de $\overline{A}$ dado $+$. Obtenemos

$$\begin{aligned} P(\overline{A}|+) &= \frac{P(\overline{A}\cap +)}{P(+)}\\ &= \frac{0.85\cdot 0.07}{0.15\cdot 0.95 + 0.85\cdot 0.07} = 0.2946. \end{aligned}$$ ❖