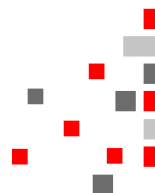

Ajuste de datos con R

Métodos Numéricos y Estadísticos
Grado en Ingeniería Informática / Mecánica

Curso 2021-2022

Eva María Mazcuñán Navarro



Contenidos

	Página
Introducción	2
Requisitos previos	2
Flujo de trabajo	2
1 Paquetes	3
2 Modelos lineales	3
2.1 Planteamiento del problema: El prisma de vidrio	3
2.2 Ajuste con <code>lm()</code>	5
2.3 Fórmulas en R	6
2.4 Coeficientes	7
2.5 Valores ajustados	8
2.6 Residuos	9
2.7 Predicciones	10
2.8 Gráfico del ajuste	11
3 Modelos no lineales	12
3.1 Planteamiento del problema: Ley de enfriamiento de Newton . .	13
3.2 Ajuste con <code>nls()</code>	14
3.3 Coeficientes	15

3.4 Predicciones	16
3.5 Gráfico ajuste	16

Introducción

En esta práctica estudiaremos cómo ajustar un modelo a un conjunto de datos experimentales, mediante la técnica de mínimos cuadrados, usando R.

Mientras que en los problemas que hemos a mano hasta ahora hemos considerado únicamente modelos lineales de uno o dos parámetros, en esta práctica consideraremos modelos tanto lineales como no lineales, y con un número arbitrario de parámetros. También podremos trabajar con un número de datos mucho más elevado que en los problemas resueltos a mano.

Seguiremos trabajando con una variable dependiente y y una única variable independiente x , aunque las técnicas que presentaremos se generalizan sin dificultad al caso de varias variables independientes.

Requisitos previos

Antes de comenzar esta práctica, necesitas:

- Tener R y RStudio instalados en tu equipo (ver [Instalación de R y RStudio](#)).
- Haber estudiado la práctica [Primeros pasos con R y RStudio](#).

Flujo de trabajo

Documenta lo que vayas aprendiendo conforme lees la práctica usando un documento R Markdown. Puedes utilizar [esta plantilla](#).

Se recomienda guardar el archivo R Markdown en una carpeta propia. En dicha carpeta se creará el archivo HTML resultante de la compilación y después añadiremos los archivos con los datos que usaremos a lo largo de la práctica.

Recuerda que para crear encabezados se utiliza la sintaxis `#` (nivel 1), `##` (nivel 2), `...`; y que los bloques de código se crean con el atajo `Ctrl + Alt + I`.

Respecto al seccionado del documento, lo más práctico es que imites la estructura de este guión de prácticas.

1. Paquetes

Para utilizar las funciones que aparecerán a lo largo de la práctica empezamos cargando el paquete tidyverse:

```
library("tidyverse")
```

Aunque se puede cargar un paquete en cualquier punto de un documento R Markdown, se considera una buena práctica cargar todos los paquetes al inicio.

Así que, si a lo largo de la práctica fuera necesario cargar más paquetes, escribe la correspondiente instrucción para cargarlos con la función `library()` al comienzo de tu documento, junto con esta primera instrucción.

2. Modelos lineales

Como hemos visto en teoría, dada una variable dependiente y y una variable independiente x , un modelo lineal de parámetros $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$ tiene la forma

$$y = \beta_1 f_1(x) + \beta_2 f_2(x) + \dots + \beta_p f_p(x),$$

siendo f_1, f_2, \dots, f_p funciones conocidas.

En este capítulo veremos cómo ajustar este tipo de modelos para un conjunto de observaciones usando la función `lm()` (linear model) de R.

Veremos también cómo representar gráficamente un ajuste usando la función `geom_smooth()` del paquete `ggplot2`.

2.1. Planteamiento del problema: El prisma de vidrio

Newton demostró con el prisma que la luz blanca es una mezcla de varios colores y que la refracción depende del color (longitud de onda).

En un experimento, se eligieron diferentes longitudes de onda λ y se trazó el camino seguido por el rayo de luz que atraviesa el prisma, midiendo el ángulo de desviación para, a partir del mismo, calcular el índice de refracción n del vidrio para el color seleccionado.

Los datos obtenidos se recogen en el archivo [refraction.csv](#) (click para descargar), que contiene las variables:

- `lambda`: longitud de onda λ , medida en *nm*.
- `n`: índice de refracción.

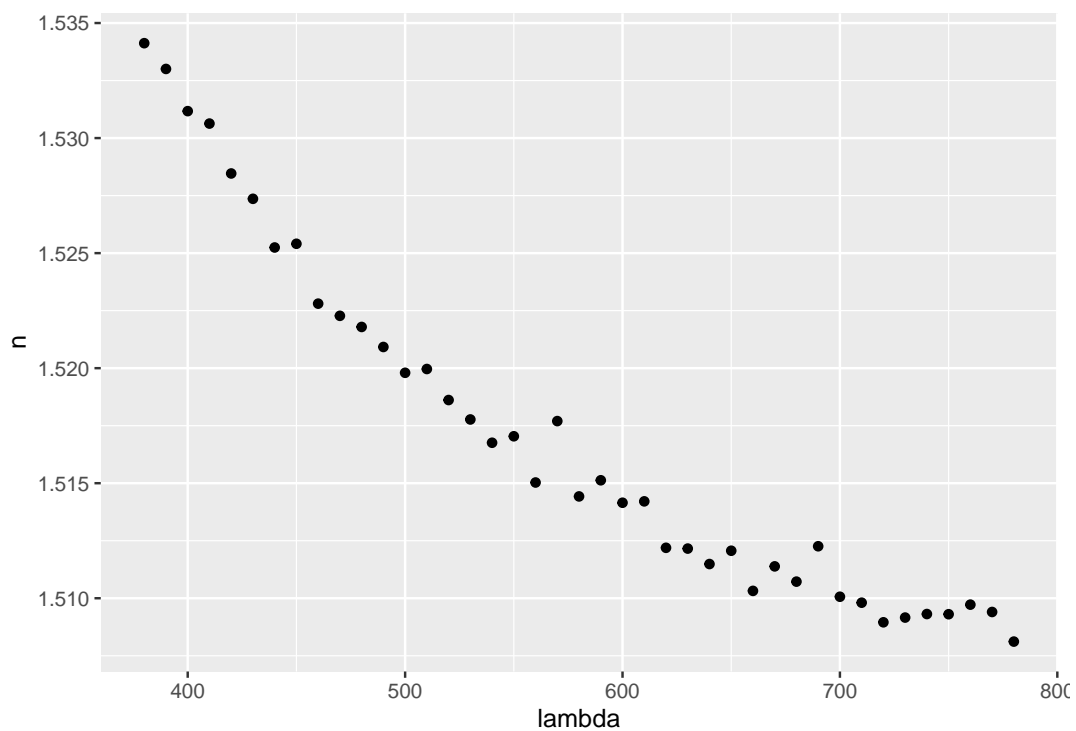
Descarga el fichero `refraction.csv` y guárdalo en una carpeta de nombre `data` dentro de tu directorio de trabajo.

Importamos los datos con `read_csv()` y los guardamos en un objeto de nombre `refraction`:

```
refraction <- read_csv("data/refraction.csv")
```

Visualizamos los datos dibujando la nube de puntos (λ, n) con `geom_point()`:

```
ggplot(  
  data = refraction,  
  mapping = aes(x = lambda, y = n)  
) +  
  geom_point()
```



2.2. Ajuste con `lm()`

Tomaremos como modelo la fórmula de Cauchy para los índices de refracción n en la región visible del espectro de longitud de onda λ :

$$n(\lambda) = \beta_1 + \frac{\beta_2}{\lambda^2} + \frac{\beta_3}{\lambda^4}$$

donde β_1 , β_2 y β_3 son los parámetros a ajustar.

Como se indicó antes, la función de R para ajustar modelos lineales es `lm()`. En la siguiente instrucción se utiliza la función `lm()` para ajustar el modelo propuesto a las observaciones de nuestra hoja de datos, y se guarda el resultado en un objeto de nombre `fit_cauchy`:

```
fit_cauchy <- lm(  
  data = refraction,  
  formula = n ~ I(1 / lambda^2) + I(1 / lambda^4)  
)
```

En el código anterior, hemos usado los argumentos `data`, para especificar la hoja de datos con las observaciones, y `formula`, para indicar la fórmula del modelo (enseguida explicaremos cómo construir esta fórmula).

El resultado se almacena en un objeto de nombre `fit_cauchy`.

Si imprimimos el objeto `fit_cauchy` veremos los coeficientes del ajuste:

```
fit_cauchy  
  
##  
## Call:  
## lm(formula = n ~ I(1/lambda^2) + I(1/lambda^4), data =  
refraction)  
##  
## Coefficients:  
## (Intercept) I(1/lambda^2) I(1/lambda^4)  
## 1.5 4908.3 7078041.7
```

La instrucción `summary(fit_cauchy)` revela que el objeto `fit_cauchy` contiene mucha más información de la que muestra su simple impresión:

```
summary(fit_cauchy)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = n ~ I(1/lambda^2) + I(1/lambda^4), data =
refraction)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -1.294e-03 -4.672e-04  1.711e-05  2.982e-04  2.216e-03
##
## Coefficients:
##              Estimate Std. Error  t value Pr(>|t|)
## (Intercept)  1.500e+00  7.676e-04 1954.496  < 2e-16 ***
## I(1/lambda^2) 4.908e+03  4.342e+02   11.303 1.02e-13 ***
## I(1/lambda^4) 7.078e+06  5.376e+07    0.132  0.896
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 0.0007213 on 38 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.9912, Adjusted R-squared:  0.9907
## F-statistic: 2131 on 2 and 38 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Ésta es la razón por la que hemos creado el objeto `fit_cauchy` para almacenar la salida de la función `lm()`: lo usaremos en los siguientes apartados para extraer información del ajuste realizado.

2.3. Fórmulas en R

Al usar la función `lm()`, hemos indicado el siguiente valor para el argumento `formula`:

```
n ~ I(1/lambda^2) + I(1/lambda^4)
```

La expresión anterior es un objeto de R de tipo `formula`, que se corresponde con la fórmula de Cauchy que estamos usando como modelo

$$n(\lambda) = \beta_1 + \frac{\beta_2}{\lambda^2} + \frac{\beta_3}{\lambda^4}.$$

En la siguiente tabla se muestran algunos ejemplos más de fórmulas en R correspondientes a diferentes modelos:

Modelo	formula
$y = \beta_1 + \beta_2 x$	<code>y ~ x</code>
$y = \beta_1 x$	<code>y ~ 0 + x</code>
$y = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2$	<code>y ~ x + I(x^2)</code>
$y = \beta_1 \cos(x) + \beta_2 \sin(x)$	<code>y ~ 0 + I(cos(x)) + I(sin(x))</code>

Para especificar la fórmula de un modelo en R hay que tener en cuenta las siguientes reglas:

- Cada sumando en una fórmula de R, indica la función que multiplica a un parámetro en la fórmula del modelo. Así, el sumando x en una fórmula de R será un sumando de la forma $\beta_i x$ en la fórmula matemática del modelo.
- R añade siempre una constante como primer sumando de la fórmula del modelo (β_1 en los ejemplos anteriores). Para evitar la inclusión automática de esa constante hay que escribir el sumando 0. Así, la fórmula `y ~ x` se corresponde con $y = \beta_1 + \beta_2 x$; y si se quiere omitir la constante β_1 , se ha de escribir `y ~ 0 + x`.
- Las funciones que son una transformación de la variable independiente se han de escribir incluidas en la función identidad `I()`. Por ejemplo, un término de la forma $\beta_i x^2$ en la fórmula de un modelo se escribe en R como `I(x^2)`.

2.4. Coeficientes

Para obtener los coeficientes del ajuste usamos la función `coefficients()`:

```
coefficients(fit_cauchy)
```

```
## (Intercept) I(1/lambda^2) I(1/lambda^4)
## 1.500310e+00 4.908268e+03 7.078042e+06
```

La salida nos informa de que los coeficientes que solucionan el problema de mínimos cuadrados (ecuaciones normales de Gauss) son:

$$\hat{\beta}_1 = 1.50031,$$

$$\hat{\beta}_2 = 4908.268,$$

y

$$\hat{\beta}_3 = 7078042.$$

Nota: Dependiendo de la configuración, los valores de la salida pueden aparecer en notación científica, simbolizando **e+00**, **e+03** y **e+06** que hay que multiplicar por $10^0 = 1$, $10^3 = 1000$ y $10^6 = 1000000$ respectivamente.

Por tanto el ajuste buscado es

$$n(\lambda) = 1.50031 + \frac{4908.268}{\lambda^2} + \frac{7078042}{\lambda^4}.$$

2.5. Valores ajustados

Los valores ajustados (o esperados) para la variable dependiente se obtienen con la función `fitted()`:

```
fitted(fit_cauchy)
```

```
##           1           2           3           4           5           6
7           8
## 1.534640 1.532886 1.531263 1.529759 1.528362 1.527062
1.525851 1.524721
##           9          10          11          12          13          14
15          16
## 1.523664 1.522674 1.521746 1.520875 1.520056 1.519285
1.518558 1.517873
##          17          18          19          20          21          22
23          24
## 1.517225 1.516613 1.516033 1.515484 1.514963 1.514468
1.513998 1.513552
##          25          26          27          28          29          30
31          32
## 1.513126 1.512721 1.512335 1.511967 1.511615 1.511279
1.510958 1.510650
##          33          34          35          36          37          38
39          40
## 1.510356 1.510074 1.509804 1.509545 1.509297 1.509058
1.508829 1.508608
##          41
## 1.508396
```


2.6. Residuos

Para obtener los residuos del ajuste (ε_i) usamos la función `residuals()`:

```
residuals(fit_cauchy)
```

```
##           1           2           3           4
5
## -5.158258e-04  1.192086e-04 -9.157603e-05  8.724810e-04
9.998852e-05
##           6           7           8           9
10
##  2.981569e-04 -6.063847e-04  6.853349e-04 -8.594240e-04
-3.992586e-04
##          11          12          13          14
15
##  4.507231e-05  4.592263e-05 -2.575917e-04  6.782515e-04
5.616847e-05
##          16          17          18          19
20
## -1.021129e-04 -4.671765e-04  4.270844e-04 -1.002945e-03
2.215907e-03
##          21          22          23          24
25
## -5.376294e-04  6.594862e-04  1.524706e-04  6.591191e-04
-9.333365e-04
##          26          27          28          29
30
## -5.619564e-04 -8.481528e-04  9.871010e-05 -1.294146e-03
1.065956e-04
##          31          32          33          34
35
## -2.355407e-04  1.609116e-03 -2.899098e-04 -2.667854e-04
-8.491117e-04
##          36          37          38          39
40
## -3.842938e-04  1.710620e-05  2.483173e-04  8.932864e-04
7.950677e-04
##          41
## -2.796932e-04
```

Para calcular el error cuadrático del ajuste (RSS) usamos

```
sum(residuals(fit_cauchy)^2)
```

```
## [1] 1.976785e-05
```

En el resumen del ajuste podemos leer

```
Residual standard error: 0.0007213 on 38 degrees of freedom
```

El error estandar residual, que suele denotarse σ , se obtiene con la función `sigma()`.

```
sigma(fit_cauchy)
```

```
## [1] 0.0007212534
```

La relación entre esta cantidad σ y el error cuadrático RSS es:

$$\sigma = \sqrt{RSS/38}$$

o equivalentemente

$$RSS = 38\sigma^2.$$

El valor 38, se llama grados de libertad de los residuos y se obtiene de restar, a las $n = 41$ observaciones, los $p = 3$ parámetros del modelo. Se obtiene con la función `df.residual()`. Comprobamos la relación entre el error residual estandar y RSS :

```
df.residual(fit_cauchy) * sigma(fit_cauchy)^2 # RSS
```

```
## [1] 1.976785e-05
```

2.7. Predicciones

La siguiente tabla recoge las longitudes de onda correspondientes a algunos colores del arcoiris:

Color	λ
Rojos	640
Amarillo	589
Verde	509

Color	λ
Azul	486
Violeta	434

Queremos calcular los índices de refracción que predice nuestro ajuste para los colores anteriores. Para hacerlo usamos la función `predict()`:

```
# hoja de datos con los nuevos valores de lambda
new_lambda <- tibble(
  lambda = c(640, 589, 509, 486, 434)
)
# predicciones
predict(
  fit_cauchy,
  new_lambda
)
```

```
##           1           2           3           4           5
## 1.512335 1.514517 1.519360 1.521217 1.526568
```

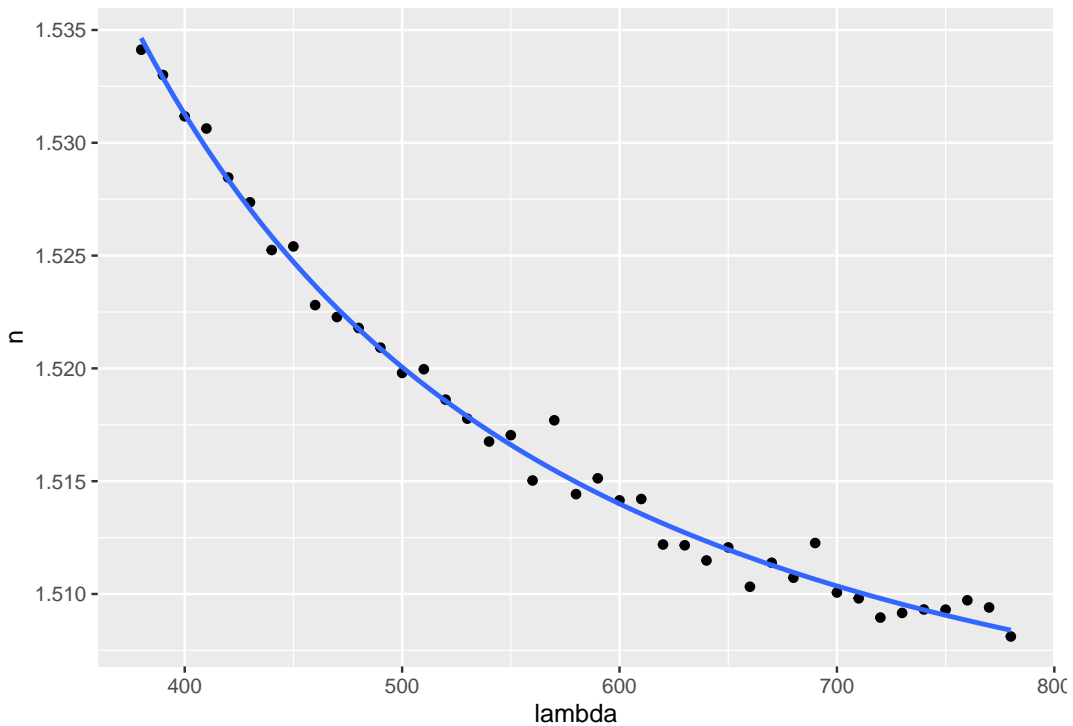
En la función `predict()` indicamos como primer argumento nuestro ajuste `fit_cauchy` y como segundo argumento una hoja de datos, que hemos llamado `new_lambda`, con los nuevos valores para la variable independiente `lambda`. Hemos construido dicha hoja de datos con la función `tibble()` (*tidy table*).

2.8. Gráfico del ajuste

Al comienzo del problema representamos la nube de puntos de nuestras observaciones con la función `geom_point()`. Añadimos ahora el gráfico del ajuste con la función `geom_smooth()`:

```
ggplot(
  data = refraction,
  mapping = aes(x = lambda, y = n)
) +
  geom_point() +
  geom_smooth(
    method = "lm",
```

```
formula = y ~ I(1 / x^2) + I(1 / x^4),
se = FALSE
)
```



En los argumentos de `geom_smooth()` hemos escrito `method = "lm"` para indicar que el ajuste se realiza con la función `lm()`.

Notar que al especificar la fórmula del modelo en el argumento `formula` no se utilizan los nombres `lambda` y `n` de las variables –como se hizo en la función `lm()`– sino los nombres `x` e `y` de las estéticas asociadas.

El argumento `se = FALSE` inhibe representar los intervalos de confianza (que estudiaremos en el último tema del curso).

3. Modelos no lineales

Modelos como

$$y = \beta_1 \beta_2^x$$

(modelo exponencial) o como

$$y = \beta_1 x^{\beta_2}$$

(modelo potencial) no tienen una estructura lineal.

Para modelos lineales, el problema de encontrar los valores de los parámetros que minimizan el error cuadrático del ajuste se traduce en resolver el sistema de ecuaciones normales de Gauss, que es un sistema lineal.

Pero en el caso de modelos no lineales como los anteriores, la situación se complica porque ahora la solución viene dada por un sistema de ecuaciones no lineales.

En este capítulo veremos cómo ajustar este tipo de modelos a una colección de observaciones, usando la función `nls()` (**n**onlinear **l**east **s**quares) de R.

3.1. Planteamiento del problema: Ley de enfriamiento de Newton

La ley de enfriamiento de Newton establece que cuando un sólido a temperatura inicial T_0 se deja enfriar en un ambiente de temperatura T_a , su temperatura en función del tiempo t viene dada por

$$T(t) = T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt}$$

donde k es una constante que depende de la forma del sólido y del calor específico del material que lo componga.

En un experimento se calentó una barra de hierro hasta una temperatura inicial de T_0 y después se dejó enfriar en un ambiente a temperatura T_a . Se midió la temperatura de la barra a intervalos de tiempo de 1 minuto, durante una hora. Los datos obtenidos se recogen en el archivo `temperatures.csv` (click para descargar), que contiene las variables:

- `time`: tiempo transcurrido, en minutos, desde el instante inicial ($t = 0$).
- `temp`: temperatura de la barra de hierro, en $^{\circ}\text{C}$.

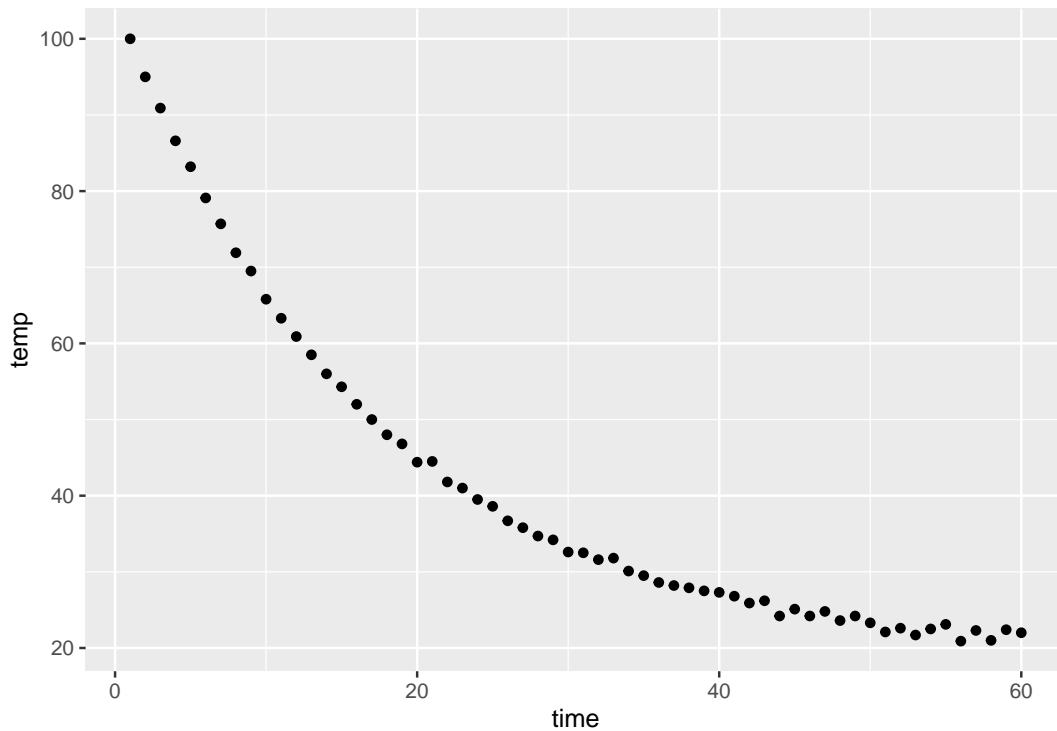
Como antes, descarga el fichero `temperatures.csv` y guárdalo en la carpeta de nombre `data` dentro de tu directorio de trabajo. Importamos los datos con `read_csv()` y los guardamos en un objeto de nombre `temperatures`:

```
temperatures <- read_csv("data/temperatures.csv")
```

Visualizamos los datos dibujando la nube de puntos (t, T) con `geom_point()`:

```
ggplot(  
  data = temperatures,
```

```
mapping = aes(x = time, y = temp)
) +
geom_point()
```



3.2. Ajuste con `nls()`

Antes de utilizar la función `nls()` crearemos una función para la fórmula de la temperatura en nuestro modelo de la ley de Newton

$$T(t) = T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt}$$

que tiene como argumentos la variable independiente t , y los tres parámetros T_0 , T_a y k . La llamamos `newton`.

```
newton <- function(t, Ta, T0, k) {
  Ta + (T0 - Ta) * exp(-k * t)
}
```

También necesitamos proporcionar unos valores iniciales para los parámetros T_0 , T_a y k . Estos valores iniciales ayudarán en el proceso de optimización del

error cuadrático (que como hemos dicho antes, pasa por resolver un sistema de ecuaciones no lineales).

A la vista de los datos tomaremos 20 como valor inicial para T_a y 100 como valor inicial para T_0 . Para el valor inicial de k , tomamos 0.05. (En la tarea de evaluación se propondrán los valores iniciales para los correspondientes parámetros).

Con los elementos anteriores, ya podemos utilizar la función `nls()`. Utilizaremos la función `newton` que acabamos de definir para el valor del argumento `formula`, e indicaremos los valores iniciales de los parámetros en el argumento `start`, en forma de lista con la función `list()`:

```
fit_newton <- nls(
  data = temperatures,
  formula = temp ~ newton(time, Ta, T0, k),
  start = list(Ta = 20, T0 = 100, k = 0.05)
)
```

En los siguientes apartados extraeremos información del objeto `fit_newton` que acabamos de crear y que contiene el ajuste realizado por la función `nls()`.

3.3. Coeficientes

Los coeficientes del ajuste son:

```
coefficients(fit_newton)
```

```
##           Ta           T0           k
## 19.0308718 104.9913468  0.0599424
```

Redondeando los resultados a dos decimales, las estimaciones obtenidas son

$$\hat{T}_a = 19.03,$$

$$\hat{T}_0 = 104.99,$$

y

$$\hat{k} = 0.06,$$

y el ajuste quedaría:

$$T(t) = 19.03 + (104.99 - 19.03)e^{-0.06t}.$$

3.4. Predicciones

Podemos realizar predicciones de los valores de la variable dependiente con la función `predict()`, igual que en el caso lineal.

Los pronósticos para las temperaturas a la que se encontrará la barra de hierro a los 70, 80 y 90 minutos serían:

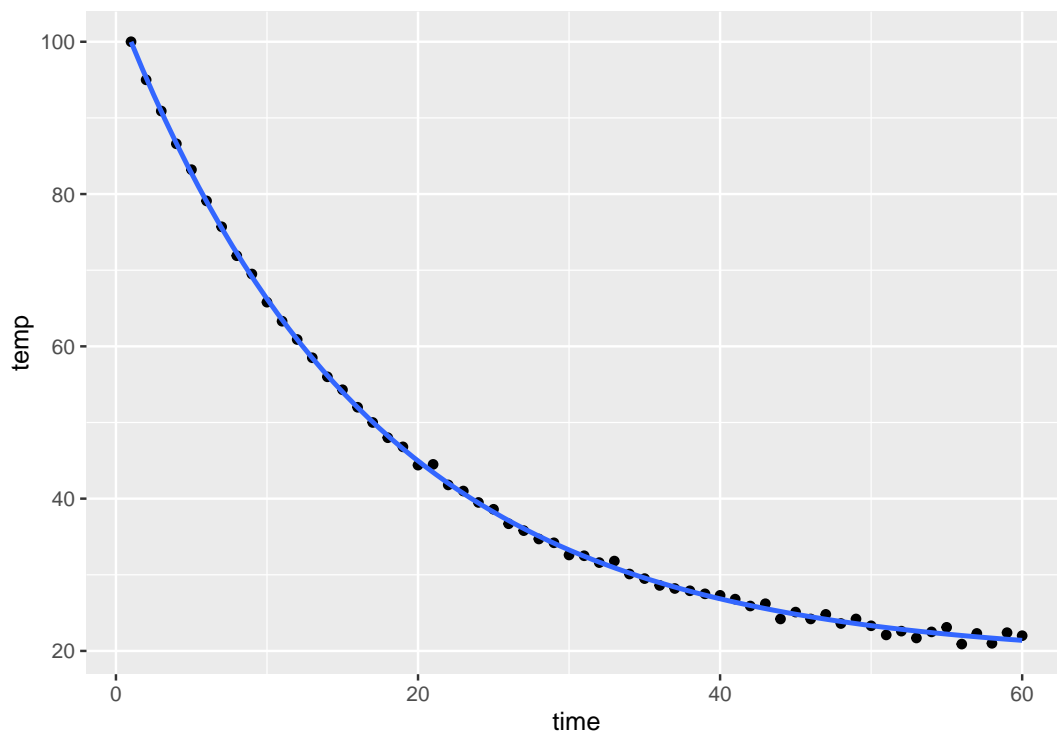
```
predict(  
  fit_newton,  
  tibble(time = c(70, 80, 90))  
)
```

```
## [1] 20.32511 19.74157 19.42114
```

3.5. Gráfico ajuste

Como en el capítulo anterior usamos la función `geom_smooth()` para representar el ajuste:

```
ggplot(  
  data = temperatures,  
  mapping = aes(x = time, y = temp)  
) +  
  geom_point() +  
  geom_smooth(  
    method = "nls",  
    formula = y ~ newton(x, T0, Ta, k),  
    method.args = list(  
      start = list(T0 = 100, Ta = 20, k = 0.05)  
    ),  
    se = FALSE # intervalo de confianza no implementado en  
               predict.nls  
  )  
)
```

En los argumentos de `geom_smooth()` hemos escrito ahora `method = "nls"` para indicar que el ajuste se realiza con la función `nls()`.

El argumento `start` que requiere la función `nls()` se especifica en `method.args = list(...)`.

Notar que hemos usado nuestra función `newton()` para especificar la fórmula del modelo, como al usar la función `nls()`, pero que en este caso no se utilizan los nombres `time` y `temp` de las variables sino los nombres `x` e `y` de las correspondientes estéticas.

El argumento `se = FALSE` es necesario en este caso (si no lo incluyes obtendrás un error) por una cuestión técnica que no vamos a detallar.

