Санкт-Петербургский политехнический университет
Институт прикладной математики и механики
Высшая школа теоретической механики

Направление подготовки
"01.03.03 Механика и математическое моделирование"

Отчет по лабораторной работе №3
Тема работы: " Численное интегрирование"
Дисциплина: "Численные методы"

Выполнил студент гр. 3630103/90002 Михеев Евгений Викторович
Преподаватель: Павлова Людмила Владимировна

Санкт-Петербург
2021

Отчет по лаб. работе №3
Численное интегрирование
Метод средних прямоугольников

№1) Постановка задачи

Вычислить численно определенный интеграл от заданной ф-ции. Получить зависимости значения интеграла от кол-ва точек разбиения, а также зависимость кол-ва итераций вычисления $\int$ по правилу Рунге от заданной точности

№2) Алгоритм метода

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$I = h\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1} + h/2)$$

Правило Рунге : $\varepsilon_R = \frac{|I_{2n} - I_n|}{2^{m}-1}$; $r = 2$

3) $\int_a^b$ $\exists$ и ! для $\forall$ непрерывной на $[a, b]$ ф-ции

4) см. 3)

5) Ручной расчет

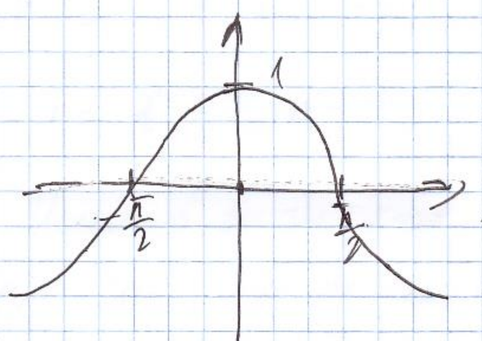
$f(x) = \cos(x)$; $a = -\frac{\pi}{2}$; $b = \frac{\pi}{2}$

$\varepsilon = 0,1$

$n = 1$: $h = \pi$

$I = \pi \cdot \cos(0) = \pi$

$n = 2$ $h = \pi/2$



$$I = \frac{\pi}{2}\left(\underbrace{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)}_{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}_{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

$$\varepsilon_R = \frac{\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\pi - \pi\right|}{3} \approx 0{,}307\ldots > \varepsilon$$

$n = 4$: $x_0 = -\frac{\pi}{2}$; $x_1 = -\frac{\pi}{4}$; $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{\pi}{4}$; $x_4 = \frac{\pi}{2}$

$h = \frac{\pi}{4}$; $\frac{h}{2} = \frac{\pi}{8}$

$$I = \frac{\pi}{4}\left(\underset{0{,}383}{\cos\left(-\frac{3\pi}{8}\right)} + \underset{0{,}924}{\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)} + \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right)$$

$$= 0{,}654\pi \approx 2{,}05$$

$$\varepsilon_R = \frac{|0{,}707\pi - 0{,}654\pi|}{3} \approx 0{,}055 < \varepsilon$$

Отв: $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x)\,dx = 2{,}05$

№6) Контрольные тесты:

Дано: $f(x) = \cos(x)$

Ход работы:

1) Вычислить $\int_a^b$ от $\cos(x)$

2) Получить зависимость кол-ва итераций по правилу Рунге от точности, варьирующейся в пределах $\varepsilon = [10^{-1}; 10^{-12}]$

3) Провести данные исследования на симм. и несимм. промежутках ($\cos(x)$ — четн ф-ция)

7) Структура программы

integral.py ⟷ NMclasses.py = {integration.rectangles()}

1) NMclasses.py

```
class integration:
  def rectangles(...)
  Input: f(x), a, b, n
  #ф-ция вычисляет опр. ∫ методом прямоугольников
  Output: ∫_a^b f(x)dx - число
```

2) integral.py

Input: принимает численные значения a, b и ф-цию f(x)

ф-ция содержит цикл вычисляющий $\int_a^b$ для точностей из диапазона $[10^{-1}, 10^{-12}]$ и заполняет массив кол-ва точек разбиения для каждой точности

Output: графики: — f(x) — график cos(x)

— I(n) — значения $\int^b$ от кол-ва точек ~~на правую~~ функц

— таблица зависимости n от Eps

— график N(Eps) — числа точек от точности.

— Также в таблице приведено время вычисления ∫ с заданной точностью в секундах (столбец „t“

8) Численный анализ: по итогам работы программы (получены графики и таблица для симм. и несимм. промежутков четной ф-ции) можно сказать следующее:

1) Для достижения высокой заданной точности потребуется достаточно большое кол-во точек разбиения (для $\varepsilon = 10^{-5}$ $n \approx 1000$, для $\varepsilon = 10^{-10}$ $n \approx 2{,}6 \cdot 10^{5}$), при этом для более высоких точностей метод или не сходится или сходится очень медленно (время „t" указано в таблице)

2) ~~метод~~ Скорость сходимости метода зависит от промежутка, но несущественно: сравнивая результаты, полученные на симм. промежутке и двух разных несимметричных, можно заметить, что ~~практ~~ в среднем для достижения одной и той же точности на разных промежутках требуется одинаковое кол-во точек разбиения, однако иногда на несимм. промежутке ~~кол~~ точек разбиения требуется меньше

9) Вывод: в лаб. работе исследован метод срединных пр/уг-ков численного интегрирования. К очевидным плюсам данного метода можно отнести его простоту и легкость реализации. К минусам же относится медленная сх-ть, особенно при высоких значения точности

Графики и таблицы

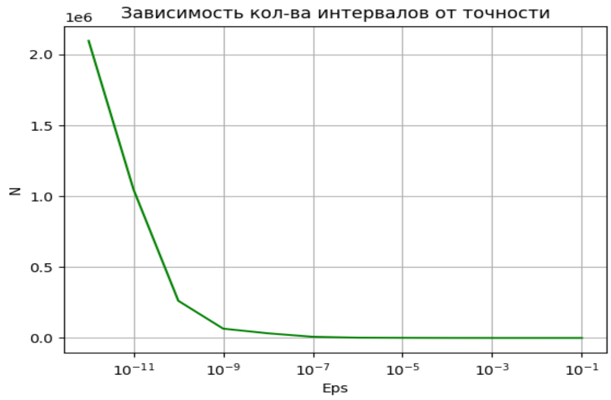
1) Симметричный промежуток

	10E-1	10E-2	10E-3	10E-4	10E-5	10E-6	10E-7	10E-8	10E-9	10E-10	10E-11	10E-12
n	16	32	128	512	1024	4096	16384	32768	131072	524288	1048576	4194304
t	0	0	0	0,001	0,002	0,00898	0,03312	0,0674	0,25648	1,03074	2,05678	8,12976

2) Несимметричный промежуток №1

	10E-1	10E-2	10E-3	10E-4	10E-5	10E-6	10E-7	10E-8	10E-9	10E-10	10E-11	10E-12
n	16	32	128	256	1024	4096	8192	32768	131072	262144	1048576	4194304
t	0	0	0	0	0	0,01453	0,01565	0,06249	0,24693	0,54827	2,08344	8,19598

3) Несимметричный промежуток №2



	10E-1	10E-2	10E-3	10E-4	10E-5	10E-6	10E-7	10E-8	10E-9	10E-10	10E-11	10E-12
n	8	32	64	256	1024	2048	8192	32768	65536	262144	1048576	2097152
t	0	0	0	0,001	0,002	0,00499	0,01695	0,05406	0,14045	0,51711	2,1067	4,1252