Отчет по лабораторной работе №3 „Интерполяция естественным кубическим сплайном"

№1) Постановка задачи

Интерполировать заданную аналитическую ф-цию естественным кубическим сплайном на двух сетках (р/м и Чебышевской), сравнить точность интерполяции для двух сеток, а также точность относительно интерполяции полиномом Лагранжа в зависимости от количества узлов

№2) Алгоритм метода

Кубический сплайн дефекта 1 (естественный)

$$g(x) = \left\{ g_k(x) = a_k + b_k(x - x_k) + c_k(x-x_k)^2 + d_k(x-x_k)^3 \right.$$
$$\left. x \in [x_{k-1}, x_k] \right\}_{k=1}^{n}$$

$$g''(a) = g''(b) = 0$$

$$\begin{cases} a_k = y_k \\ d_k = \dfrac{c_k - c_{k-1}}{3h_k} \quad ; h_k = x_k - x_{k-1} \qquad k=\overline{1,n} \\ b_k = \dfrac{y_k - y_{k-1}}{h_k} + \dfrac{2}{3} h_k c_k + \dfrac{1}{3} h_k c_{k-1} \end{cases}$$

$$c_0 = 0 = c_n$$

$$k=\overline{1,n-1} \quad h_k c_{k-1} + 2(h_{k+1} + h_k)c_k + h_{k+1} c_{k+1} = 3\left(\frac{y_{k+1} - y_k}{h_{k+1}} - \frac{y_k - y_{k-1}}{h_k}\right)$$

сис-ма решается методом прогонки

№3) $\exists!$?

На каждом участке $[x_{k-1}, x_k]$ однозначно $\exists$ кубический мн-н дефекта 1, определяемый только ~~...~~ $x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, y_{k-1}, y_k, y_{k+1}$

№4) —

№5) Ручной расчет

$f(x) = \cos x$

$n = 4$; $a = 0$, $b = 2\pi$

$x_0 = 0 \quad x_1 = \pi/2 \quad x_2 = \pi \quad x_3 = \frac{3\pi}{2} \quad x_4 = 2\pi$

$y_0 = 1 \quad y_1 = 0 \quad y_2 = -1 \quad y_3 = 0 \quad y_4 = 1$

$a_1 = 0, \ a_2 = -1, \ a_3 = 0, \ a_4 = 1$

$h = \frac{\pi}{2} = const$

$c_0 = c_4 = 0$

$$\begin{array}{l} k=1 \\ k=2 \\ k=3 \end{array} \begin{cases} \frac{\pi}{2} c_0 + 2\pi c_1 + \frac{\pi}{2} c_2 = 3\left(\frac{-1-0}{\pi/2} - \frac{0-1}{\pi/2} \right) \\ 0 \quad \frac{\pi}{2} c_1 + 2\pi c_2 + \frac{\pi}{2} c_3 = 3\left(\frac{0+1}{\pi/2} - \frac{-1-0}{\pi/2} \right) \\ 0 \quad 0 \quad \frac{\pi}{2} c_2 + 2\pi c_3 + \frac{\pi}{2} c_4 = 3\left(\frac{1-0}{\pi/2} - \frac{0+1}{\pi/2} \right) \end{cases}$$

$$\cancel{k=4 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{\pi}{2} c_3 + 2\pi c_4 + \frac{\pi}{2} c_5 = 3(}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2\pi & \frac{\pi}{2} & 0 & 0 \\ \pi/2 & 2\pi & \frac{\pi}{2} & 12/\pi \\ 0 & \pi/2 & 2\pi & 0 \end{array} \right)$$

Прогоночные коэф-ты:

$S_1 = -\frac{\pi}{2} : 2\pi = -\frac{1}{4}$

$\lambda_1 = 0$

$S_2 = -\frac{\pi}{2} : \left(\frac{\pi}{2} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) + 2\pi \right) = -\frac{4}{15}$

$\lambda_2 = \frac{12}{\pi} : \left(-\frac{\pi}{8} + 2\pi \right) = \frac{32}{5\pi^2}$

$$\delta_3 = 0;\ \lambda_3 = \frac{0 - \frac{\pi}{2}\cdot\frac{32}{5\pi^2}}{\left(\frac{\pi}{2}\left(-\frac{4}{15}\right) + 2\pi\right)} = -\frac{12}{7\pi^2}$$

$$c_3 = \lambda_3 = -\frac{12}{7\pi^2}$$

$$c_2 = \delta_2 c_3 + \lambda_2 = \frac{4}{15}\,\frac{12}{7\pi^2} + \frac{32}{5\pi^2} = \frac{48}{7\pi^2}$$

$$c_1 = \delta_1 c_2 + \lambda_1 = -\frac{1}{4}\,\frac{48}{7\pi^2} + 0 = -\frac{12}{7\pi^2}$$

$$d_4 = \frac{c_4 - c_3}{3\cdot\frac{\pi}{2}} = \frac{\frac{12}{7\pi^2}}{\frac{3}{2}\pi} = \frac{8}{7\pi^3}$$

$$d_3 = \frac{c_3 - c_2}{\frac{3}{2}\pi} = \frac{-\frac{12}{7\pi^2} - \frac{48}{7\pi^2}}{\frac{3}{2}\pi} = -\frac{40}{7\pi^3}$$

$$d_2 = \frac{c_2 - c_1}{\frac{3}{2}\pi} = \frac{\frac{48}{7\pi^2} + \frac{12}{7\pi^2}}{\frac{3}{2}\pi} = \frac{40}{7\pi^3}$$

$$d_1 = \frac{c_1 - c_0}{\frac{3}{2}\pi} = \frac{-\frac{12}{7\pi^2}}{\frac{3}{2}\pi} = -\frac{8}{7\pi^3}$$

$$b_1 = \frac{-1}{\pi/2} + \frac{2}{3}\frac{\pi}{2}\left(-\frac{12}{7\pi^2}\right) + 0 = -\frac{18}{7\pi}$$

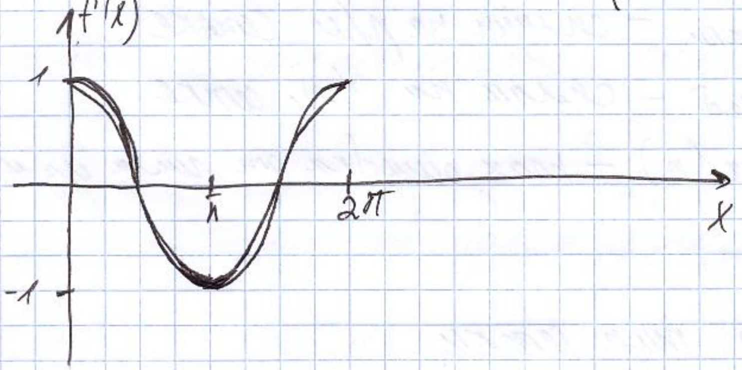
$$b_2 = -\frac{\pi}{\pi} + \frac{2}{3}\frac{\pi}{2}\left(\frac{48}{7\pi^2}\right) + \frac{1}{3}\frac{\pi}{2}\left(-\frac{12}{7\pi^2}\right) = 0$$

$$b_3 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\left(-\frac{12}{7\pi^2}\right) + \frac{\pi}{6}\left(\frac{48}{7\pi^2}\right) = \frac{18}{7\pi}$$

$$b_4 = \frac{2}{\pi} + \frac{\pi}{3}\cdot 0 + \frac{\pi}{6}\left(-\frac{12}{7\pi^2}\right) = -\frac{12}{7\pi}$$

Т.о получены сплайны:

$$\begin{cases} g_1(x) = -\frac{18}{7\pi^3}\left(x-\frac{\pi}{2}\right) - \frac{12}{7\pi^3}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{8}{7\pi^3}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3 \\ g_2(x) = -1 + \frac{48}{7\pi^2}\left(x-\pi\right)^2 + \frac{40}{7\pi^3}\left(x-\pi\right)^3 \\ g_3(x) = \frac{18}{7\pi}\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)^2 - \frac{12}{7\pi^2}\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)^2 - \frac{40}{7\pi^3}\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)^3 \\ g_4(x) = 1 - \frac{12}{7\pi}\left(x-2\pi\right)^2 + \frac{8}{7\pi^3}\left(x-2\pi\right)^3 \end{cases}$$



№6) Контрольные тесты

Ф-ция: $f(x) = \cos(x)$

Ход работы:

1) Строим интерполянту на двух сетках, отображаем на графике
2) Определяем зависимость max. ошибки от числа узлов, строим график ошибки для двух сеток
3) Сравниваем полученные результаты между собой и с интерп. полиномом Лагранжа

Тесты проводятся в программе, написанной на Python с использованием библиотек NumPy и MatPlotLib

№7) Структура программы

splin.py ⟷ interpolation.splineInterpolation ⟷ splining.py

splin.py ⟷ SPdepN ⟷ interpolation.splineInterpolation

interpolation.splineInterpolation ⟷ class spline ⟷ splining.py

1) splin.py

основной файл, где объявлены границы промежутка, функция $f(x)$ и строятся графики

Out: графики: $f(x)$

$g(x)_{р/м}$ — сплайн на р/м сетке

$g(x)_{чеб}$ — сплайн на Чеб. сетке

Error(n) — max. ошибка от числа узлов

2) splineInterpolation

Input: a, b, $f(x)$, n, тип сетки.

1) строится указанная сетка

2) вызывается ф-ция splining, возвращающая массив сплайнов

3) Для каждого x получается значение у соответствующего сплайна

Out: массивы x, y интерполированной ф-ции

3) splining

Input: X_i, Y_i — массивы сетки, n — число узлов

создается массив сплайнов вида

$$a + b(x-x_i) + c(x-x_i)^2 + d(x-x_i)^3$$

определяются коэф-ты a, b, c, d

Output: splines — массив сплайнов

4) class Spline

\# класс определяет сплайн его параметрами a, b, c, d, X_s – начало промежутка сплайна

x_e – конец промежутка

Имеет метод create, создающий сам сплайн с исп. ф-ций работы с полиномами numpy

5) SPdepN

Input: $f(x)$, a, b, тип сетки

\# ф-ция вычисляет max ошибку для $n \in [5, 40]$

Output: E – массив ошибок

N – массив числа узлов

№8) Численный анализ

Изучим полученные результаты

1) Налицо гораздо лучшая сх-ть относительно полинома Лагранжа: сплайн ведет себя более предсказуемо и при большом числе узлов гарантированно дает ошибку, стремящуюся к нулю, чего нельзя сказать о полиноме Лагранжа.

2) В минусы сплайна относительно интерполирующего полинома Лагранжа можно отнести бо́льшую вычислительную сложность (строится n полиномов против одного)

3) ~~Также~~ Относительно количества узлов наблюдается увеличение точности интерпол-

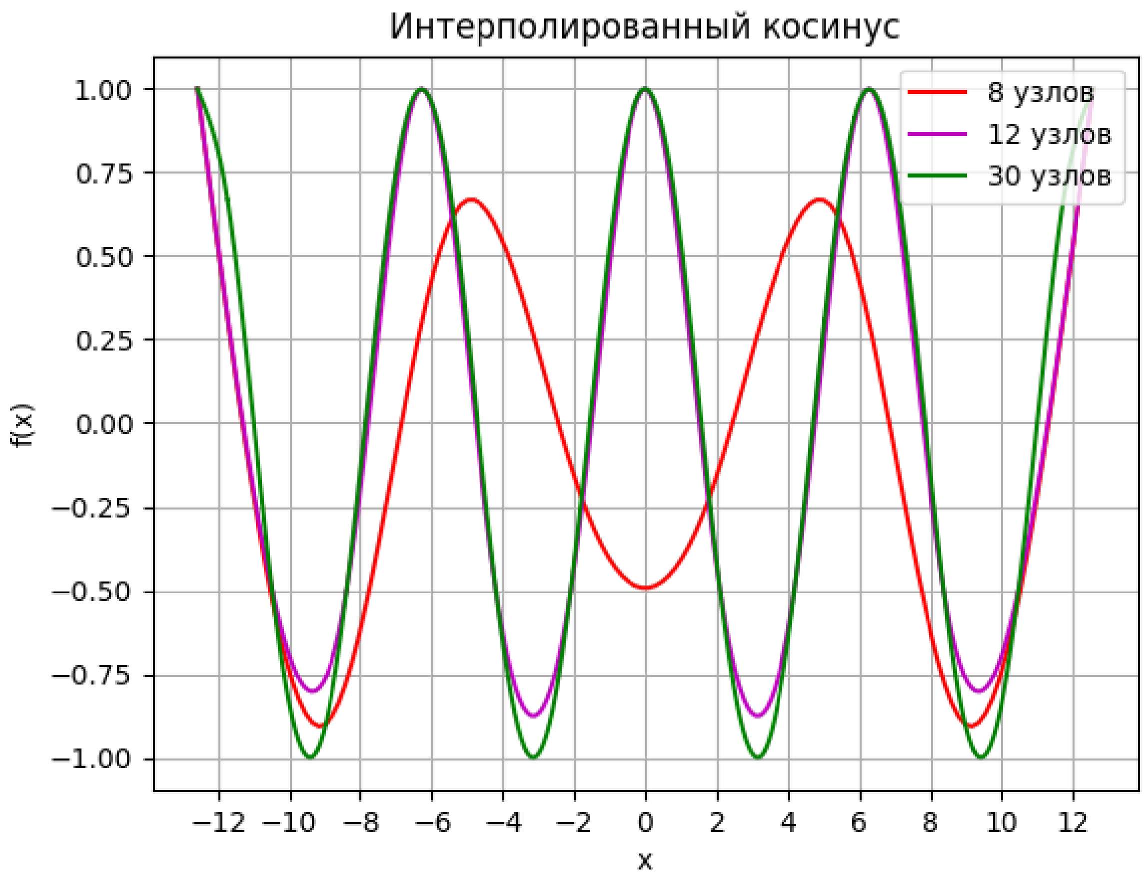
ции с ↑ числа узлов (~~[illegible]~~ монотонное для р/м сетки, немон. для сетки Чебышева). Так или иначе для обеих сеток ошибка → 0 при n → ∞

№9) ~~Вы~~Вывод

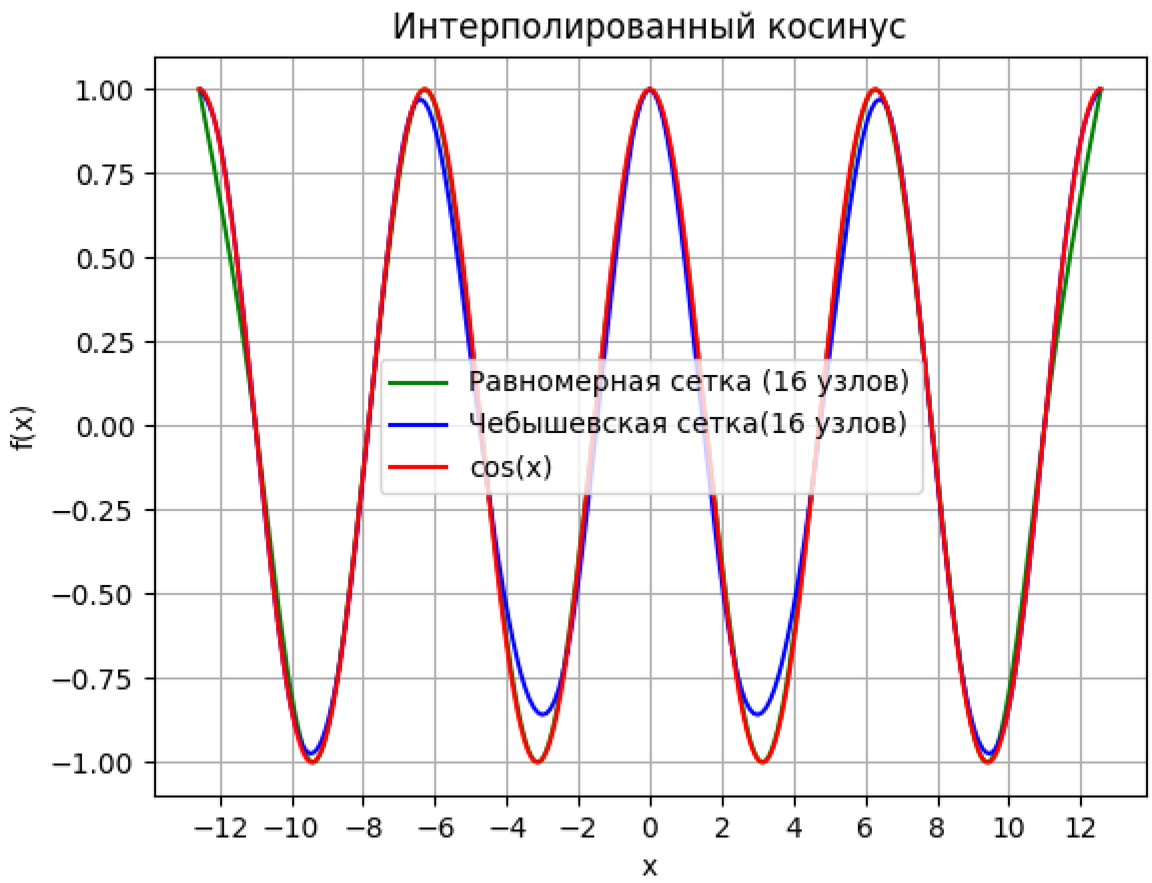
В лаб. работе был исследован метод интерполяции ф-ции естественным кубическим сплайном дефекта 1. По результатам исследования можно сделать вывод о более высокой точности и предсказуемости поведения данной интерполянты относительно полинома Лагранжа: при высокой плотности узлов сплайн позволяет добиться очень высокой точности интерполяции, но ценой за это является ~~бол~~ большая выч. сложность относительно интерполянты Лагранжа.

Зам: также стоит отметить, что в случае ~~ин~~интерполяции Чебышевская сетка не дает увеличения точности отн. равномерной (~~[illegible]~~ ошибка для Чеб. сетки ведет себя немонотонно отн. кол-ва узлов)

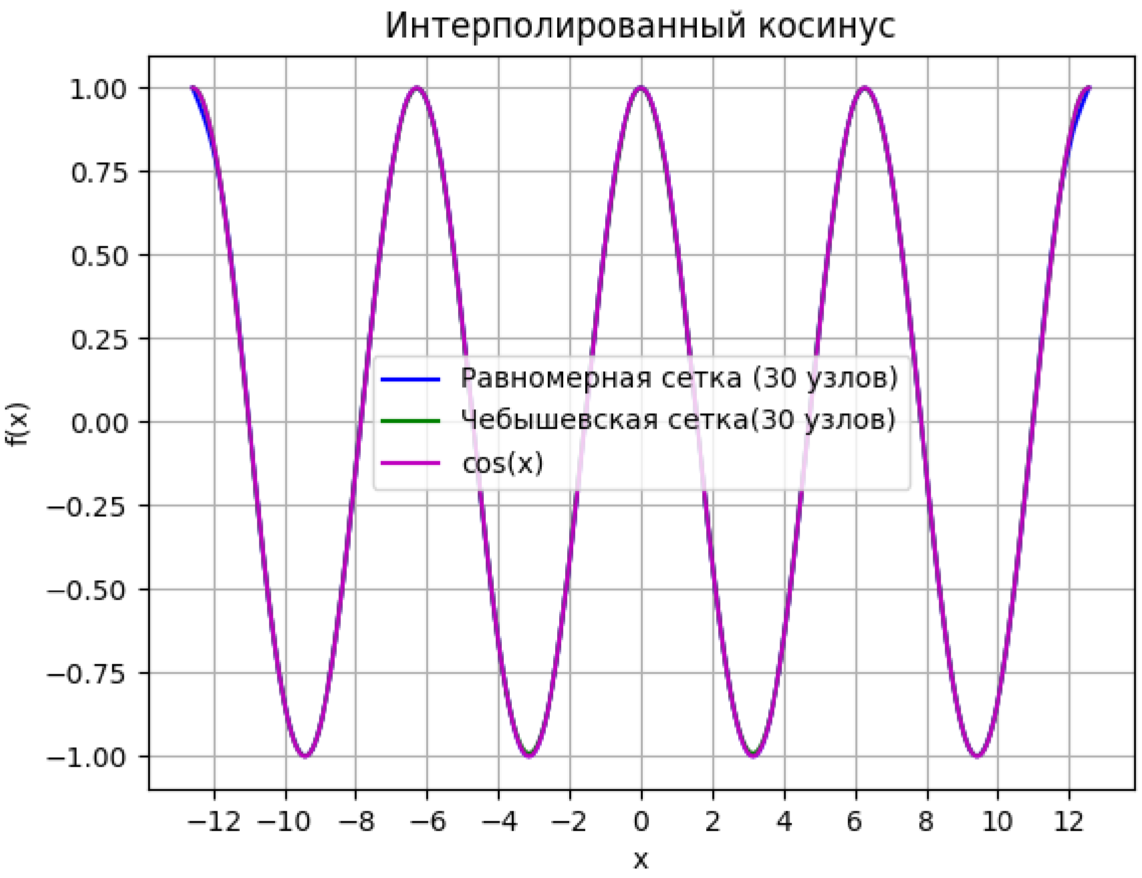
Графики

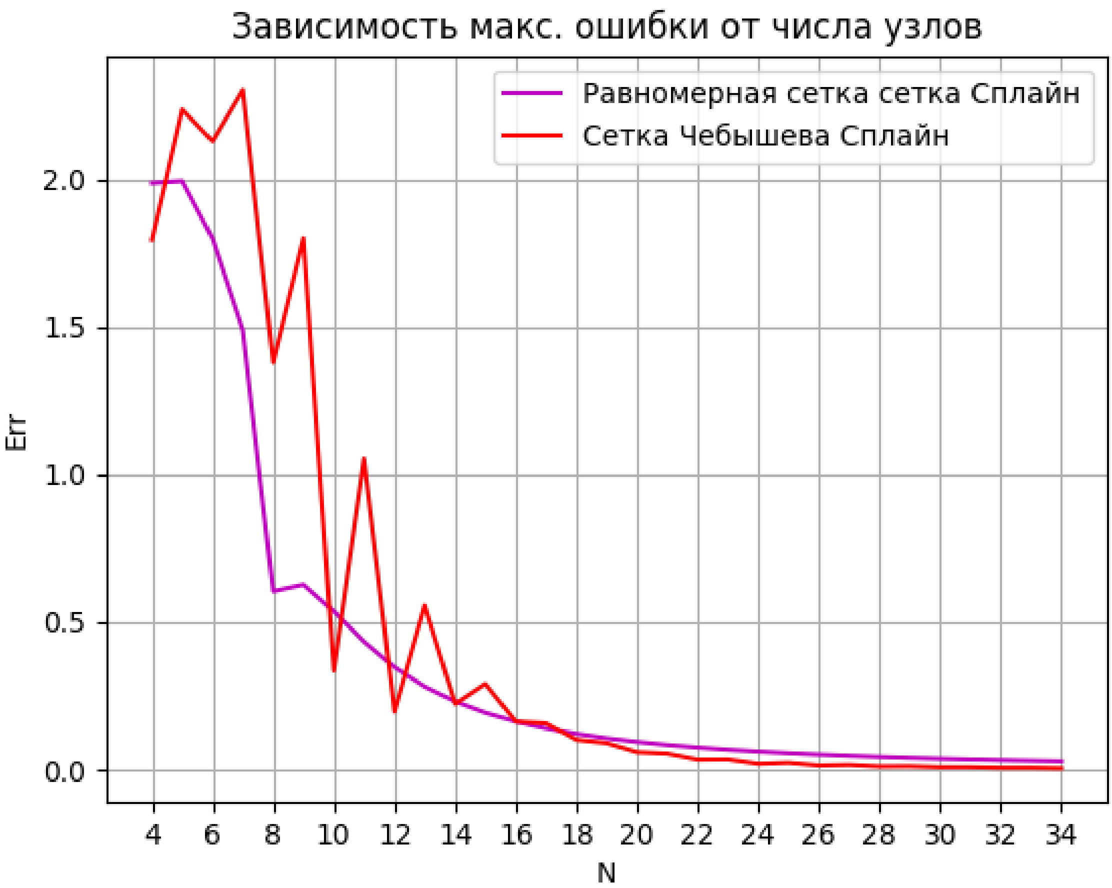


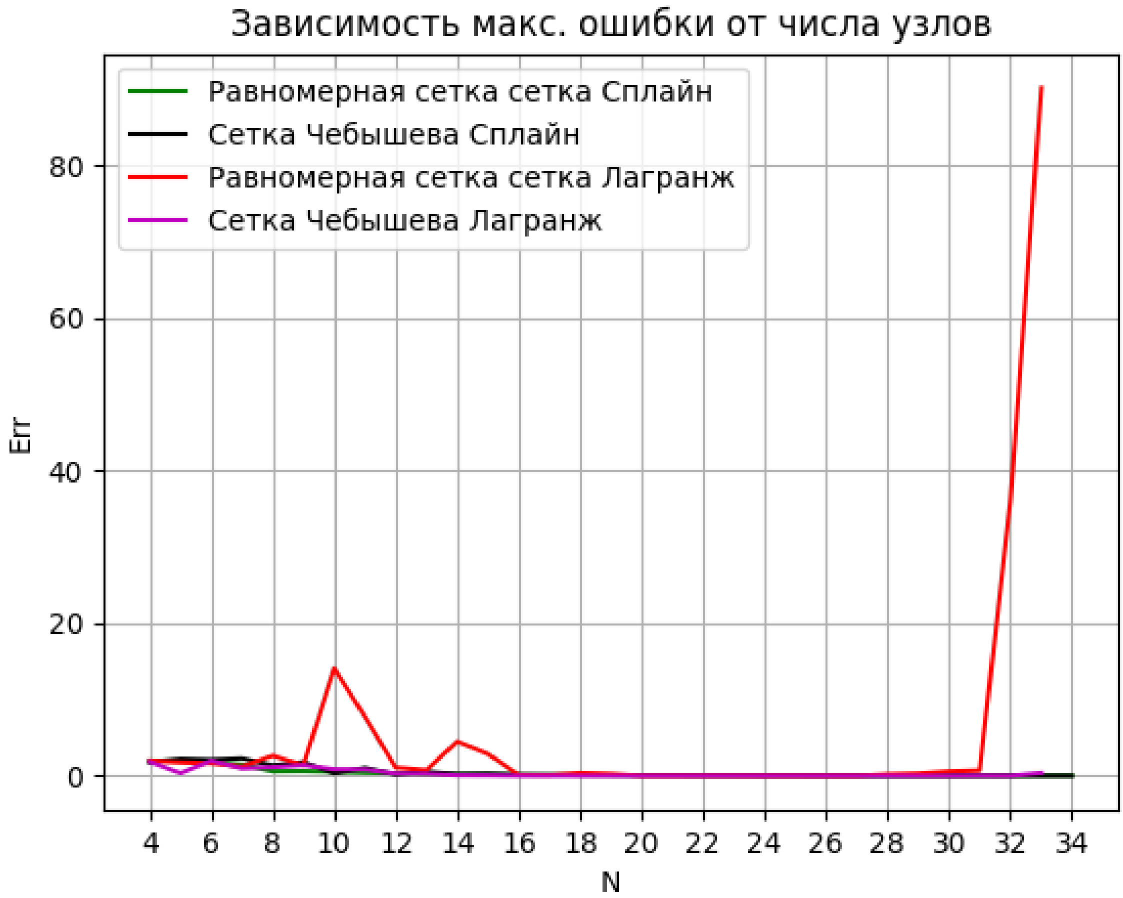
Интерполированный косинус
8 узлов
12 узлов
30 узлов
f(x)
x
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
−0.25
−0.50
−0.75
−1.00
−12
−10
−8
−6
−4
−2
0
2
4
6
8
10
12



Интерполированный косинус
Равномерная сетка (16 узлов)
Чебышевская сетка(16 узлов)
cos(x)
f(x)
x
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
−0.25
−0.50
−0.75
−1.00
−12
−10
−8
−6
−4
−2
0
2
4
6
8
10
12


Интерполированный косинус
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
−0.25
−0.50
−0.75
−1.00
f(x)
−12
−10
−8
−6
−4
−2
0
2
4
6
8
10
12
x
Равномерная сетка (30 узлов)
Чебышевская сетка(30 узлов)
cos(x)


Зависимость макс. ошибки от числа узлов
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
Err
4
6
8
10
12
14
16
18
20
22
24
26
28
30
32
34
N
Равномерная сетка сетка Сплайн
Сетка Чебышева Сплайн


Зависимость макс. ошибки от числа узлов
Равномерная сетка сетка Сплайн
Сетка Чебышева Сплайн
Равномерная сетка сетка Лагранж
Сетка Чебышева Лагранж
Err
0
20
40
60
80
4
6
8
10
12
14
16
18
20
22
24
26
28
30
32
34
N