Санкт-Петербургский политехнический университет
Институт прикладной математики и механики
Высшая школа теоретической механики

Направление подготовки
"01.03.03 Механика и математическое моделирование"

Отчет по лабораторной работе №1
Тема работы: " Интерполяция полиномом Лагранжа"
Дисциплина: "Численные методы"

Выполнил студент гр. 3630103/90001 Михеев Евгений Викторович
Преподаватель: Павлова Людмила Владимировна

Санкт-Петербург
2021

Отчет по лаб. работе №1
„Интерполяция ф-ций"
„Интерполяционный полином
в форме Лагранжа"

№1) Постановка задачи

Для заданной аналитической ф-ции получить сетку значений (равномерную и Чебышевскую), построить ее интерполяционный полином в форме Лагранжа, сравнить его для разных сеток и построить зависимость максимальной ошибки от числа узлов и длины промежутка, а также для разных промежутков

№2) Алгоритм метода

а) Равномерная сетка:

Дано: $a, b, n$ ($a, b$ - границы промежутка, $n$ - кол-во узлов)

$$h = \frac{b-a}{n} \; ; \; x_i = a + ih \; (i = 0, \dots n)$$
$$y_i = f(x_i)$$

б) Чебышевская:

Дано: $a, b, n$

$$x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right) \; ; \; i = 0, 1 \dots n$$

Интерполяционный полином Лагранжа:

$$F(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{\substack{j \neq i \\ j=0}}^{n} \left( \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right)$$

№3) ∃ и !

∃! пл-н Лагранжа степени $n$, принимающий заданные значения в $n+1$ точке

№4) —

№5) $f(x) = \cos(x)$

$n = 3$; $a = 0$, $b = 2\pi$

$x_0 = 0$; $x_1 = \pi$; $x_2 = 2\pi$

$y_0 = 1$; $y_1 = -1$; $y_2 = 1$

$i = 0$: $y_0 = 1$

$$\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{x - \pi}{0 - \pi} \cdot \frac{x - 2\pi}{0 - 2\pi}$$

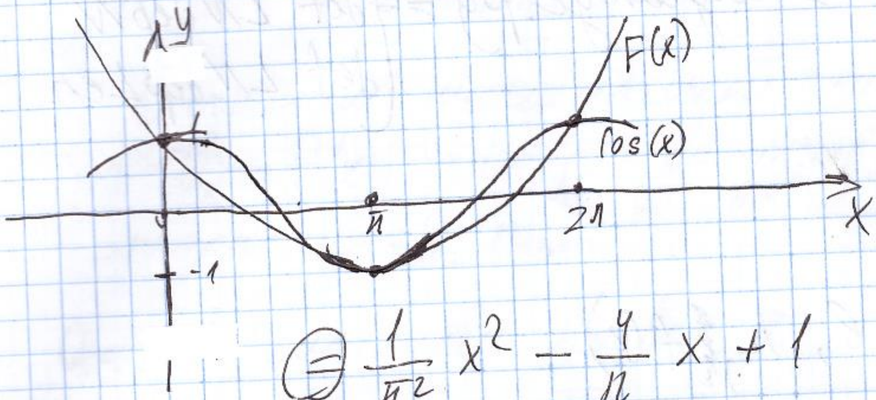
$i = 1$: $y_0 = -1$

$$\Pi = \frac{x - 0}{\pi - 0} \cdot \frac{x - 2\pi}{\pi - 2\pi}$$

$i = 2$: $y_0 = 1$

$$\Pi = \frac{x - 0}{2\pi - 0} \cdot \frac{x - \pi}{2\pi - \pi}$$

$$F(x) = \frac{x-\pi}{\pi} \cdot \frac{x-2\pi}{2\pi} - \frac{x}{\pi} \cdot \frac{x-2\pi}{-\pi} + \frac{x}{2\pi} \cdot \frac{x-\pi}{\pi} =$$




$$= \frac{1}{\pi^2} x^2 - \frac{4}{\pi} x + 1$$

№6) Контрольные тесты

Дана ф-ция: $f(x) = \cos(x)$

Ход работы:

1) Строим интерполяционный полином для двух сеток

2) При n=const строим зависимость макс. ошибки для разных длин промежутка (симметричного)

3) При фиксированной длине промежутка строим зависимость макс. ошибки от кол-ва узлов

4) Аналогичные исследования производим для несимметричных промежутков

Тесты производятся в программе, написанной на ЯП Python с использованием библиотеки NumPy и Matplotlib

№7) Структура программы

1) main.py $\Longleftrightarrow$ lagrange.py = $\begin{cases} \text{def interpolation} & 2) \\ \text{def LNdepN} & 3) \\ \text{def LNdepLen} & 4) \end{cases}$

1) main.py

Input: a, b, n, f(x)

pn = lagrange.interpolation("Normal") # полином с равномерной сеткой

pcheb = lagrang.interpolation("Cheb") # полином с чебышевской сеткой

Err., N = lagrange.LNdepN # данные для графика ошибки от числа узлов

Er, Len = lagrange.LNdepLen # данные для зав-ти ошибки от длины промежутка

Output: графики: $f(x)$

$Err_{max}(N)$

$Err_{max}(Len)$

2) lagrange.interpolation

In: f(x), a, b, n, тип сетки

# Вычисление узлов сетки и построение инт. полинома

Out: полином Лагранжа

3) lagrange. LNdep N

Input: $f(x)$, a, b, $n_{min}$, $n_{max}$, тип сетки

# Вычисление максимальной ошибки $|F(x) - f(x)|$ для кол-ва узлов из диапазона $[n_{min}, n_{max}]$

Output: массивы ошибок Err и N(числа узлов)

4) lagrange. LNdepLen

Input: $f(x)$, a, b, тип сетки

# Вычисление макс. ошибки $|F(x) - f(x)|$ для длин ~~ин~~ интервалов из диапазона [10, 34]

Output: массивы ошибок Err и длин интервалов Len

№3) Численный анализ

Изучим полученные результаты:

1) Точность интерполяции зависит от длины промежутка: чем он длиннее, тем больше максимальное отклонение инт. полинома от исходной ф-ции: в частности для равномерной сетки она растет гораздо быстрее с увеличением длины, особенно сильные отклонения наблюдаются на концах промежутка

2) Точность интерполяции зависит от числа узлов сетки, причем гораздо сильнее этому подвержена равномерная сетка, сетка Чебышева же испытывает гораздо меньшие отклонения при изменении ~~кол~~ кол-ва узлов. Для данной ф-ции ($\cos x$) оптимальным числом узлов является $n \in [16, 20]$ (длинный промежуток) и $n \in [8, 20]$ (короткий промежуток)

3) ~~Для несимметричного~~ ~~Симметричность~~ промежутка (во всяком случае для четной ф-ции) влияет на интерполяцию след. образом

Симметричность промежутка существенного влияния не оказывает: и для симм. и для несимм. промежутков точность сначала растет с $\uparrow n$ (монотонно для Чеб. сетки и немонотонно для р/м), а затем с какого-то $n^*$ начинает резко падать ($\uparrow$ макс. ошибка)

Разве что можно отметить, что падение точности с $\uparrow n$ начинается раньше для несимм. промежутка

19) Выводы: в лаб. работе исследовано интерполирование ф-ций полиномом Лагранжа, по итогам которого можно сделать след заключения: 1) чем короче промежуток, тем выше точность; 2) Чебышевская сетка дает гораздо меньшую погрешность интерполяции во всех рассмотренных случаях; 3) выбор числа узлов интерполяции зависит от конкретной ф-ции и промежутка, однако слишком малые или большие числа n влекут высокие погрешности интерполяции

# Графики

Ниже приведены графики полиномов и зависимостей для разных промежутков (нормальная сетка = равномерная)