

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_1} \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 5 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + \frac{1}{3}R_1} \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 5 \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{14}{3} \end{bmatrix}$$

ابتدا U را به این شکل بنویسیم:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - \frac{4}{3}R_3} \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & -\frac{4}{3} & \frac{16}{3} \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} = U$$

$$LU = A \quad \left\{ \begin{array}{l} L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{bmatrix} \end{array} \right\} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & -\frac{4}{3} & \frac{16}{3} \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = 1 \\ c = \frac{2}{3} \end{cases} \rightarrow L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 1 & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

اگر ماتریس بالا (پایین) معکوس باشد معکوس آن نیز بالا (پایین) معکوس است.

$$\rightarrow U^{-1} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix} \rightarrow U = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & -\frac{4}{3} & \frac{16}{3} \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow U^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{9} \\ 0 & -\frac{3}{4} & \frac{2}{9} \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} \end{bmatrix}, L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow A^{-1} = U^{-1}L^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{12} & -\frac{1}{9} \\ \frac{1}{3} & -\frac{5}{12} & \frac{2}{9} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$