

$$1) \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & I_m \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{1r} \\ q_{r1} & q_{rr} \end{bmatrix}$$

$$q_{11} = \begin{bmatrix} A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix} = AI_n = A$$

$$q_{1r} = \begin{bmatrix} A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ D \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow Q = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix} \checkmark$$

$$q_{r1} = \begin{bmatrix} C & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix} = CI_n = C$$

$$q_{rr} = \begin{bmatrix} C & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ D \end{bmatrix} = I_m D = D$$

$$2) \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & \bar{A}^{-1}B \\ 0 & D - C\bar{A}^{-1}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{1r} \\ q_{r1} & q_{rr} \end{bmatrix}$$

$$q_{11} = \begin{bmatrix} A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix} = AI_n = A$$

$$q_{1r} = \begin{bmatrix} A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A}^{-1}B \\ D - C\bar{A}^{-1}B \end{bmatrix} = I_n B + 0 = B \quad \Rightarrow Q = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

$$q_{r1} = \begin{bmatrix} C & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix} = CI_n + 0 = C$$

$$q_{rr} = \begin{bmatrix} C & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A}^{-1}B \\ D - C\bar{A}^{-1}B \end{bmatrix} = C\bar{A}^{-1}B + I_m(D - C\bar{A}^{-1}B) \\ = C\bar{A}^{-1}B + D - C\bar{A}^{-1}B = D$$