

$$A \xrightarrow{\text{ابعاد}} n \times n \quad v \xrightarrow{\text{ابعاد}} n \times 1 \quad u \xrightarrow{\text{ابعاد}} n \times 1$$

برای اثبات سوال کافی است نشان دهیم:

$$(1) (A + uv^t) \left(A^{-1} - \frac{A^{-1}uv^tA^{-1}}{1 + v^tA^{-1}u} \right) = I_n$$

$$(2) \left(A^{-1} - \frac{A^{-1}uv^tA^{-1}}{1 + v^tA^{-1}u} \right) (A + uv^t) = I_n$$

ابتدا به اثبات اولی می پردازیم:

$$\begin{aligned} & (A + uv^t) \left(A^{-1} - \frac{A^{-1}uv^tA^{-1}}{1 + v^tA^{-1}u} \right) \\ &= AA^{-1} - \frac{AA^{-1}uv^tA^{-1}}{1 + v^tA^{-1}u} + uv^tA^{-1} - \frac{uv^tA^{-1}uv^tA^{-1}}{1 + v^tA^{-1}u} \end{aligned}$$

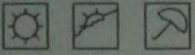
$$v^t_{1 \times n} \times A^{-1}_{n \times n} \times u_{n \times 1} \in \mathbb{C} \text{ یا } \mathbb{R} \rightarrow \text{اسکالر}$$

$$\text{مثلاً: } = I_n + uv^tA^{-1} - \frac{uv^tA^{-1} + uv^tA^{-1}uv^tA^{-1}}{1 + v^tA^{-1}u}$$

$$= I_n + uv^tA^{-1} - \frac{(u + uv^tA^{-1}u)v^tA^{-1}}{1 + v^tA^{-1}u}$$

$$= I_n + uv^tA^{-1} - \frac{u(1 + v^tA^{-1}u)v^tA^{-1}}{1 + v^tA^{-1}u}$$

$$= I_n + uv^tA^{-1} - uv^tA^{-1} = I_n \quad (1)$$



Mo	Tu	We	Th	Fr	Sa	Su
----	----	----	----	----	----	----

Memo No. _____
Date / /

حل به اینجاست دو صورت داریم:

$$\left(A^{-1} - \frac{A^{-1}uv^t A^{-1}}{1+v^t A^{-1}u} \right) (A+uv^t)$$

$$= \cancel{A^{-1}A} + A^{-1}uv^t - \frac{A^{-1}uv^t A^{-1}A}{1+v^t A^{-1}u} - \frac{A^{-1}uv^t A^{-1}uv^t}{1+v^t A^{-1}u}$$

$$= I_n + A^{-1}uv^t - \frac{A^{-1}uv^t + A^{-1}uv^t A^{-1}uv^t}{1+v^t A^{-1}u}$$

$$= I_n + A^{-1}uv^t - \frac{A^{-1}u(v^t + v^t A^{-1}uv^t)}{1+v^t A^{-1}u}$$

$$= I_n + A^{-1}uv^t - \frac{A^{-1}u(1+v^t A^{-1}u)v^t}{1+v^t A^{-1}u}$$

$$= I_n + A^{-1}uv^t - A^{-1}uv^t = I_n \quad (2)$$

(1), (2) → \square