

$$A = \begin{bmatrix} \cdot & 2 & 4 \\ \cdot & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

ابتدا با رابطه مرتب می‌کنیم

$$r_3 \leftrightarrow r_1$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ \cdot & 1 & 2 \\ \cdot & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$-2r_2 + r_3 \rightarrow r_3$$

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ \cdot & 1 & 2 \\ \cdot & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$LU = A \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ \cdot & 1 & 2 \\ \cdot & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= A$$

$$\rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 2 \\ c = 2 \end{cases} \rightarrow$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ \cdot & 1 & 2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

$$AX = b$$

$$LY = b \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cdot & 1 & 0 \\ \cdot & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = 8$$

$$y_2 = 4$$

$$2y_2 + y_3 = -4 \rightarrow 8 + y_3 = -4 \rightarrow \boxed{-12 = y_3}$$

$$0b \rightarrow Ax = y \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ -12 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \rightarrow 3x_1 + 0 - 3x_3 = 8 \rightarrow x_1 = x_3$$

$$x_2 + 2x_3 = 4 \rightarrow x_2 = 4 - 2x_3$$

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -12 \rightarrow 0 = -12$$

$$X = \begin{bmatrix} x_3 \\ 4 - 2x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Ax = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$Ly = b \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} =$$

$$y_1 = 0$$

$$y_2 = 1$$

$$2y_2 + y_3 = 0 \rightarrow y_3 = -2$$

$$0x = y \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$

$$x_2 + 2x_3 = 1$$

$$x_2 = 1 - 2x_3$$

$$3x_1 + 2(1 - 2x_3) + x_3 = 0$$

$$3x_1 + 2 - 3x_3 = 0 \rightarrow$$

$$x_1 = \frac{3x_3 - 2}{3}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} x_3$$