مهسا بیگیران ۹۵۳۱۴۰۵

استقرا:

برای 1×1 ماتریس مثلثی این فرض به وضوح درست است.

برای عدد صحیح $n\geq 1$ ماتریس مثلثی (U) وارون پذیر دارای معکوس U^{-1} است.

حال فرض می‌کنیم ماتریس V یک ماتریس $(n+1)\times(n+1)$ می‌باشد و دارای معکوسی به نام A است. بنابراین $V.A = I$

$$\begin{bmatrix} U & u \\ 0^T & \mu \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A & C \\ r^T & \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

در اینجا ماتریس‌های A و U و I $n\times n$ هستند. ستون‌های u، C و 0 زیر $n\times 1$، ردیف‌های r^T و 0^T $1\times n$ و اسکالر β، μ و 1 1×1 هستند. بنابراین داریم:

$$U.A + u.r^T = I \qquad U.C + u.\beta = 0$$

$$0^T.A + \mu.r^T = 0^T \qquad 0^T.C + \mu.\beta = 1$$

از آنجایی که 0^T یک ردیف صفر است، ۲ معادله آخر به $\mu.r^T = 0^T$ و $\mu.\beta = 1$ ساده می‌شود. این معادلات زمانی قابل قبول هستند که $\mu \neq 0$ باشد (شرط لازم برای وجود U^{-1}). همچنین $\beta = \frac{1}{\mu}$ و $r^T = 0^T$. بنابراین $A = U^{-1}$ و $C = -U^{-1}\frac{u}{\mu}$. در نتیجه

$V^{-1} = A = \begin{bmatrix} U^{-1} & C \\ 0^T & \beta \end{bmatrix}$ یک بالامثلثی است چون U^{-1} نیز بالامثلثی می‌باشد.

$$U.A + u.r^T = I$$

$$U.C + u.\left(\frac{1}{\mu}\right) = 0$$