Thermique stationnaire 1D avec gap

M. Ndjinga

February 18, 2019

Abstract

On propose une solution stationnaire au problème de deux équations 1D de diffusion de la chaleur couplées par un "gap" modélisant l'interstice entre gaine et pastille au sein d'un crayon de combustible nucléaire. La première section pose le cadre physique et mathématique du problème en dimension quelconque en précisant en particulier le type de singularité rencontré à la traversée du gap. Le lecteur uniquement intéressé par une solution stationnaire $1D$ pourra se rendre directement à la section 1.

1 Contexte

On considère deux solides occupant deux domaines Ω_1 et Ω_2 et caractérisés respectivement par des

- champs de températures $T_1(\vec{x},t)$ et $T_2(\vec{x},t)$
- conductivités thermiques $\lambda_1(T_1)$ et $\lambda_2(T_2)$
- densités $\rho_1(T_1)$ et $\rho_2(T_2)$
- capacités calorifiques $c_{p1}(T_1)$ et $c_{p2}(T_2)$

L'évolution du champ de température $T_k(\vec{x},t)$ dans le domaine Ω_k occupé par chaque solide peut être modélisée par une équation de la chaleur

$$\rho_k c_{pk}\partial_t T_k = \nabla\cdot(\lambda_k \vec{\nabla} T_k), \quad \forall \vec{x}\in\Omega_k \tag{1}$$

associée à des conditions aux limites sur $\partial\Omega_k$.
L'équation de la chaleur (1) traduit la propagation d'un flux thermique

$$\phi_k = -\lambda_k \vec{\nabla} T_k$$

à travers le domaine. En régime stationnaire 1D le flux thermique est constant dans le domaine.

Couplage de type gap On s'intéressera ici au cas où les deux domaines Ω_1 et Ω_2 partagent un élément de frontière commune $\Gamma_{gap}=\partial\Omega_1\cap\partial\Omega_2$. Des conditions limites classiques sont imposées sur $(\partial\Omega_1\cup\partial\Omega_2)\setminus\Gamma_{gap}$, de type Dirichlet (température T_k imposée) ou Neumann (flux $\phi_k=-\lambda_k\vec{\nabla}T_k$ imposé). Sur Γ_{gap}, on impose une condition de couplage de type "gap":

$$\forall \vec{x}\in\Gamma_{gap}, \quad \phi_1=\phi_2=\phi_{gap}, \tag{2}$$

où

$$\phi_{gap}(\vec{x},t) = h_{gap}(T_1,T_2)(T_1(\vec{x},t) - T_2(\vec{x},t))\vec{n}_{1\to 2}(\vec{x})$$

et $\vec{n}_{1\to 2}(\vec{x})$ est la normale en $\vec{x}$ à Γ_{gap} orientée de Ω_1 vers Ω_2.
Le gap traduit la présence d'un interstice rempli de gaz isolant qui freine la conduction thermique entre pastile et gaine de combustible. En pratique la valeur de h_{gap} dépend de l'épaisseur de l'interstice et des gaz qu'il contient. Dans les cas extrêmes on a

- Si $h_{gap} = 0$ alors $\phi_1 = \phi_2 = 0$ sur Γ_{gap} et aucune conduction thermique n'a lieu à travers le gap. Les deux domaines Ω_1 et Ω_2 ne se "voient pas" puisque Γ_{gap} est alors une paroi adiabatique (flux nul). Le champ de température est alors discontinu à la traversée du "gap".
- Si $h_{gap} = \infty$ alors $T_1 = T_2$ sur Γ_{gap}, et la conduction thermique se passe comme si le gap n'existait pas. Le champ de température rest continu à la traversée du "gap".

Dans la réalité bien sûr on a plutôt $0 < h_{gap} < \infty$, et le champ de température est alors discontinu à la traversée du "gap". L'amplitude du saut est donnée par la relation

$$T_1^{gap} - T_2^{gap} = \frac{\phi_{gap}}{h_{gap}}.$$

Le "gap" impose dont un saut de température au niveau de l'interface entre les deux domaines, et tout se passe en fait comme si on travaillait avec un coefficient de conductivité singulier comportant une masse de Dirac en Γ

$$\lambda = \lambda_1 \cdot 1_{x\in\Omega_1} + \lambda_2 \cdot 1_{x\in\Omega_2} + \frac{\phi_{gap}}{h_{gap}}\delta_\Gamma$$

défini sur $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$.
La singularité de ce type de conductivité provient de deux sources :

- premièrement la discontinuité de λ_1 à λ_2 à la traversée du "gap" qui impose une disconitnuité de la dérivée de T. Celle ci est indépendante de la valeur de h_{gap}
- deuxièmement une singularité de type masse de Dirac portée par Γ et qui impose une discontinuite sur T, discontinuité proportionelle à $\frac{1}{h_{gap}}$.

2 Stationnaire $1D$

Les équations 1D Dans le cas $1D$, on considère deux solides contigus de longueurs respectives L_1 et L_2 ayant une jonction en x_{gap}

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= [0, L_1] \\ \Omega_2 &= [L_1, L_1 + L_2] \\ x_{gap} &= L_1. \end{aligned}$$

Les conditions limites sont imposées aux bornes du domaine

- à gauche en $x = 0$
- à droite en $x = L_1 + L_2$

et une condition de couplage est imposée

- au gap $x = x_{gap}$.

On suppose que la conductivité thermique λ_k de chaque solide est constante, de même que le coefficient h_{gap} de conduction dans le "gap".
En régime $1D$ stationnaire, les équations (1) deviennent

$$\begin{aligned} \lambda_1 \partial_{xx} T &= 0, \quad \forall x \in [0, L_1] && (3) \\ \lambda_2 \partial_{xx} T &= 0, \quad \forall x \in [L_1, L_1 + L_2], && (4) \end{aligned}$$

les équations (2) deviennent

$$\begin{aligned} -\lambda_1 \partial_x T &= h_{gap}(T^-_{gap} - T^+_{gap}) && (5) \\ -\lambda_2 \partial_x T &= h_{gap}(T^-_{gap} - T^+_{gap}), && (6) \end{aligned}$$

qu'on associe aux conditions limites de Dirichlet

$$\begin{aligned} T(0) &= T_0 && (7) \\ T(L_1 + L_2) &= T_1. && (8) \end{aligned}$$

Résolution des équations 1D (3) et (4) associées à (7) et (8) donnent

$$\begin{aligned} T(x) &= T_0 + ax, && \forall x \in [0, L_1] \\ T(x) &= T_1 + b(x - (L_1 + L_2)), && \forall x \in [L_1, L_1 + L_2], \end{aligned}$$

soit en particulier

$$\begin{aligned} T^-_{gap} &= T_0 + aL_1 \\ T^+_{gap} &= T_1 - bL_2, \end{aligned}$$

d'où une première estimation du saut de température au gap :

$$T^-_{gap} - T^+_{gap} = T_0 - T_1 + aL_1 + bL_2. \qquad (9)$$

Maintenant (5) et (6) donnent alors les valeurs de a et b en fonction du saut de température :

$$\begin{aligned} -\lambda_1 a &= h_{gap}(T^-_{gap} - T^+_{gap}) && (10) \\ -\lambda_2 b &= h_{gap}(T^-_{gap} - T^+_{gap}). && (11) \end{aligned}$$

les équations (9), (10) et (11) forment un système de 3 équations à 3 inconnues (a, b et $T^-_{gap} - T^+_{gap}$) dont la solution est donnée par

$$\begin{aligned} T^-_{gap} - T^+_{gap} &= (T_0 - T_1)\left[1 + h_{gap}\left(\frac{L_1}{\lambda_1} + \frac{L_2}{\lambda_2}\right)\right]^{-1} \\ a &= -\frac{h_{gap}}{\lambda_1}(T_0 - T_1)\left[1 + h_{gap}\left(\frac{L_1}{\lambda_1} + \frac{L_2}{\lambda_2}\right)\right]^{-1} \\ b &= -\frac{h_{gap}}{\lambda_2}(T_0 - T_1)\left[1 + h_{gap}\left(\frac{L_1}{\lambda_1} + \frac{L_2}{\lambda_2}\right)\right]^{-1} \end{aligned}$$

Expression finale de la solution Après calculs on obtient donc finalement

$$\begin{aligned}
T(x) &= T_0 - \tfrac{h_{gap}}{\lambda_1}(T_0 - T_1)\left[1 + h_{gap}\left(\tfrac{L_1}{\lambda_1} + \tfrac{L_2}{\lambda_2}\right)\right]^{-1} x, && \forall x \in [0, L_1] \\
T(x) &= T_1 - \tfrac{h_{gap}}{\lambda_2}(T_0 - T_1)\left[1 + h_{gap}\left(\tfrac{L_1}{\lambda_1} + \tfrac{L_2}{\lambda_2}\right)\right]^{-1} (x - (L_1 + L_2)), && \forall x \in [L_1, L_1 + L_2]
\end{aligned}$$

et la discontinuité au niveau du gap est

$$T^-_{gap} - T^+_{gap} = (T_0 - T_1)\left[1 + h_{gap}\left(\frac{L_1}{\lambda_1} + \frac{L_2}{\lambda_2}\right)\right]^{-1}.$$