Direction de l'Energie Nucléaire
Direction déléguée aux Activités Nucléaires de Saclay
Département de Modélisation des Systèmes et Structures
Service de Thermohydraulique et de Mécanique des Fluides

Simulation numérique de la turbulence dans Trio_U : nouvelle méthode de prise en compte des lois de paroi via une condition aux limites de symétrie et un terme source de type Robin

Pierre-Emmanuel ANGELI

DEN/DANS/DM2S/STMF/LMSF/NT/13-011/A

Commissariat à l'énergie atomique et aux énergies alternatives
Centre de Saclay – DEN/DANS/DM2S/STMF – Bâtiment 454 – Point courrier 47
91191 Gif-sur-Yvette cedex - France
Tél. : +33 (0)1 69 08 91 92 – Fax : +33 – (0)1 69 08 96 96 – bernard.faydide@cea.fr
Etablissement public à caractère industriel et commercial
R.C.S. PARIS B 775 685 019

NIVEAU DE CONFIDENTIALITE				
DO	DR	CCEA	CD	SD
X				

PARTENAIRES/CLIENTS	ACCORD	TYPE D'ACTION
CEA		

REFERENCES INTERNES CEA			
DIRECTION D'OBJECTIFS	DOMAINE	PROJET	EOTP
DISN	SIMU	SITHY	A-SITHY-03-03-04
JALON	INTITULE DU JALON	DELAI CONTRACTUEL DE CONFIDENTIALITE	CAHIERS DE LABORATOIRE

SUIVI DES VERSIONS			
INDICE	DATE	NATURE DE L'EVOLUTION	PAGES, CHAPITRES
A	17/01/2014	Document initial	68, 6

	NOM	FONCTION	VISAS	DATES
REDACTEUR	P.E. ANGELI	Ingénieur		05/02/2014
VERIFICATEUR	O. CIONI	Ingénieur		13/02/2014
CONTROLE QSE	D. DUMONT	Correspondant Qualité		19/02/2014
APPROBATEUR	O. ANTONI	Chef de Laboratoire		13/02/2014
EMETTEUR	B. FAYDIDE	Chef de Service		07/03/2014

MOTS CLEFS

Lois de paroi – Flux diffusifs – Symétrie – Condition de Robin – L.E.S.

RESUME / CONCLUSIONS de même niveau de confidentialité que le document

Ce document a pour but d'introduire dans le code Trio_U une nouvelle méthode de prise en compte des lois de paroi, vouée à remplacer la précédente. On y décrira ses caractéristiques et on justifiera son intérêt dans les simulations numériques de phénomènes turbulents. On spécifiera les développements apportés dans le code pour implémenter cette nouvelle approche. Enfin, des calculs de L.E.S. permettront de comparer la qualité des résultats obtenus avec l'ancienne méthodologie et avec la nouvelle, et justifieront l'emploi de cette dernière.

DIFFUSION INITIALE

(Diffusion par email, document DO)

Diffusion interne CEA

Pierre-Emmanuel ANGELI,	Auteur	DEN/DANS/DM2S/STMF/LMSF
Olivier CIONI,	Vérificateur	DEN/DANS/DM2S/STMF/LMSF
Olivier ANTONI,	Chef du DM2S/STMF/LMSF	DEN/DANS/DM2S/STMF/LMSF
Bernard FAYDIDE,	Chef du DM2S/STMF	DEN/DANS/DM2S/STMF/DIR
Frédéric DUCROS,	Adjoint du chef du DM2S/STMF	DEN/DANS/DM2S/STMF/DIR
Jacques SEGRE,	Assistant scientifique du DM2S/STMF	DEN/DANS/DM2S/STMF/DIR
Christian CAVATA,	Chef du DM2S	DEN/DANS/DM2S/DIR
Anne NICOLAS,	Adjoint du chef du DM2S	DEN/DANS/DM2S/DIR
Christophe CALVIN,	chef de projet SITHY	DEN/DANS/DM2S/DIR
Denis TENCHINE,		DEN/DANS/DM2S/STMF/DIR
Jean-Paul GARANDET,	Chef du DM2S/STMF/LIEFT	DEN/DANS/DM2S/STMF/LIEFT
Edwige RICHEBOIS,	Chef du DM2S/STMF/LMEC	DEN/DANS/DM2S/STMF/LMEC
Philippe EMONOT,	Chef du DM2S/STMF/LMES	DEN/DANS/DM2S/STMF/LMES
Dominique BESTION,		DEN/DANS/DM2S/STMF/LMES
Aymeric CANTON,	Chef du DM2S/STMF/LGLS	DEN/DANS/DM2S/STMF/LGLS
Gauthier FAUCHET, Eli LAUCOIN,		DEN/DANS/DM2S/STMF/LGLS
Guillaume BOIS, Alain GENTY,		DEN/DANS/DM2S/STMF/LATF
Tout le LMSF/Saclay,		DEN/DANS/DM2S/STMF/LMSF/Saclay
Thomas FORTIN, Clarisse FOURNIER,		DEN/DANS/DM2S/STMF/LMSF/Grenoble
Olivier LEBAIGUE, Patrick QUEMERE,		DEN/DANS/DM2S/STMF/LMSF/Grenoble
Jérémie CHICHEPORTICHE, Emile GARRE,		DEN/DANS/DM2S/STMF/LMSF/Grenoble
Marc DELPECH, Jean-Michel MOREY,		DEN/DISN
Jean-Paul DEFFAIN, Daniel CARUGE,		DEN/DISN/SIMU
François GAUCHE, Nicolas DEVICTOR,		DEN/DISN/R4G
Patrick DUMAZ, Thierry FORGERON,		DEN/DISN/GEN2&3
Jacques ROUAULT, Alfredo VASILE,		DEN/CAD/DER
Alain ZAETTA, Laurent MARTIN,		DEN/CAD/DER
Jean-Claude GARNIER, David PLANCQ,		DEN/CAD/DER/SESI
Jean-Christophe BOSQ, Philippe MARSAULT,		DEN/CAD/DER/SESI
Marie-Sophie CHENAUD, Romain LAVASTRE,		DEN/CAD/DER/SESI

Diffusion externe CEA

Marthe ROUX,	CS-SI
Pierre LEDAC,	CS-SI

Diffusion résumé

Murielle MARUEJOULS,	Secrétaire du DM2S	DEN/DANS/DM2S/DIR
Xavier AVERTY,	Chef du DM2S/SEMT	DEN/DANS/DM2S/SEMT
Patrick BLANC-TRANCHANT,	Chef du DM2S/SERMA	DEN/DANS/DM2S/SERMA

SOMMAIRE

LISTE DES NOTATIONS **6**

1 INTRODUCTION **8**

2 RAPPELS SUR LES ÉQUATIONS MOYENNÉES EN L.E.S. ET LES VARIABLES ADIMENSIONNÉES **8**
2.1 Définition des moyennes . . . 8
2.2 Équations moyennées et fermetures . . . 9
2.3 Adimensionnement des variables . . . 11

3 ÉLÉMENTS THÉORIQUES SUR LA PRISE EN COMPTE DES LOIS DE PAROI **12**
3.1 Caractéristiques de l'ancienne approche . . . 12
3.2 Nouvelle stratégie envisagée . . . 15
3.2.1 Idées générales . . . 15
3.2.2 Terme source de Robin pour l'hydraulique et étapes du calcul . . . 16
3.2.3 Terme source de Robin pour la thermique et étapes du calcul . . . 16
3.2.4 À propos des discrétisations VDF . . . 17
3.3 Bilan . . . 18

4 IMPLÉMENTATION DE LA NOUVELLE APPROCHE DANS TRIO_U **19**
4.1 Choix effectués pour la définition dans le jeu de données . . . 19
4.2 Développements . . . 19
4.3 Synthèse . . . 21
4.4 Améliorations prochaines . . . 21

5 VALIDATION PAR LES CALCULS NUMÉRIQUES **21**
5.1 Description des simulations numériques . . . 21
5.1.1 Domaine de calcul et maillages . . . 21
5.1.2 Propriétés physiques et schémas numériques . . . 23
5.2 Résultats des calculs . . . 25

6 CONCLUSION **30**

ANNEXE A : OBTENTION ANALYTIQUE DES LOIS DE PAROI **32**

ANNEXE B : RÉSOLUTION NUMÉRIQUE PAR POINT FIXE **36**

ANNEXE C : FICHE DE VALIDATION **38**

RÉFÉRENCES **65**

LISTE DES FIGURES **66**

LISTE DES TABLEAUX **68**

LISTE DES NOTATIONS

Lettres latines

$\vec{x}$, $\vec{y}$	Vecteurs position
t	Temps
$\vec{e}_i$	Vecteur unitaire de la direction i
$\vec{n}$	Vecteur normal sortant à la paroi
y_1	Distance à la paroi du premier point de calcul
u, v, w	Composantes du vecteur vitesse
T	Champ de température
u', T'	Fluctuation spatiale de vitesse, de température
G_Δ	Filtre passe-bas
$\overline{\overline{\mathcal{T}}}$, $\overline{\overline{Q}}$	Tenseurs de sous-maille
LP_h	Écriture formelle de la loi de paroi hydraulique
LP_t	Écriture formelle de la loi de paroi thermique
B	Constante de la loi de paroi hydraulique
Pr, Pr_t	Nombre de Prandtl et nombre de Prandtl turbulent
Re_τ	Nombre de Reynolds de frottement
u_τ, T_τ	Vitesse de frottement et température de frottement
$\vec{F}$, F'	Flux diffusifs
$\vec{R}_{\mathrm{hyd}}$, R_{th}	Termes sources de Robin

Lettres grecques

β	Constante de la loi de paroi thermique
Δ	Taille caractéristique des mailles
δ_{ij}	Symbole de Kronecker
Δt	Pas de temps d'une simulation numérique
κ	Constante de la loi de paroi hydraulique
ϕ	Flux thermique

Indices

AB, ABG	Quantité relative à la face AB, à l'élément ABG
p	Quantité évaluée à la paroi
δ	Quantité évaluée à une distance δ de la paroi
1	Quantité évaluée à une distance y_1 de la paroi
LP	Grandeur provenant de la résolution d'une loi de paroi (hydraulique ou thermique)
calc	Grandeur calculée au cours d'une simulation Trio_U

Exposants

$+$	Champ adimensionné avec les quantités de paroi
(n)	Numéro du pas de temps

Opérateurs

$\star$	Produit de convolution
$\otimes$	Produit dyadique
$\widetilde{\cdot}$	Moyenne spatiale au sens du produit de convolution
$\overline{\cdot}$	Moyenne spatiale dans un plan à $y =$ constante
$\langle \cdot \rangle$	Moyenne temporelle
tr	Trace d'un tenseur

Abréviations

D.N.S.	*Direct Numerical Simulation*
L.E.S.	*Large Eddy Simulation*
W.A.L.E.	*Wall-Adapting Local Eddy-Viscosity*
V.D.F.	Volumes Différences Finies
V.E.F.	Volumes Éléments Finis

1 INTRODUCTION

Les simulations numériques de la turbulence, en particulier les L.E.S. qui sont utilisées de manière croissante dans des contextes industriels, requièrent une finesse de maillage importante près des parois, et ce d'autant plus que la turbulence est forte. Pour se soustraire à la nécessité de créer des maillages très fins, et éviter en conséquence un allongement rédhibitoire des temps de calculs, on fait généralement appel à des lois de paroi dont le but est d'indiquer au fluide le comportement théorique qu'il devrait avoir près des parois. Dans Trio_U sont implémentées des lois de parois qui ont fait la preuve de leur efficacité, c'est-à-dire de leur aptitude à produire des résultats de calcul de bonne qualité en des temps raisonnables. Néanmoins, on cherche aujourd'hui à modifier la prise en compte mathématique des flux pariétaux de masse et d'énergie dans le logiciel. Jusque-là, Trio_U s'appuyait sur une technique présentant un certain nombre d'inconvénients, parmi lesquels l'existence d'un phénomène de convection parasite en proche paroi qui dégrade la qualité de la solution en maillage non structuré. L'objet de cette note est de proposer une nouvelle méthode, vraisemblablement la plus naturelle (en dehors d'autres avantages qui seront décrits dans le document), qui semble déjà implémentée dans nombre de codes de calcul. Cette nouvelle approche n'est pas nouvelle sur le plan de la théorie, puisqu'elle est brièvement décrite dans Mohammadi *et al.* [12]. L'idée générale est de transformer les conditions de paroi fixe en conditions de symétrie. Ceci occasionne des modifications substantielles dans Trio_U, en particulier pour ne pas impacter le post-traitement. Cependant, les choix faits permettent de minimiser le travail de développement tout en assurant une implémentation logique aux yeux de l'utilisateur futur.
Cette note suit un plan conventionnel, où nous décrirons en premier lieu les aspects théoriques de la stratégie « historique » de Trio_U, puis ceux de la nouvelle stratégie de type « symétrie/Robin ». Nous préciserons ensuite les choix faits en terme d'implémentation et donnerons quelques éléments sur le codage. Enfin, différentes simulations numériques d'un écoulement turbulent en canal plan fourniront une première base de validation aussi solide que possible. La validation pour des calculs avec modélisation k-epsilon ne rentre pas dans le cadre de cette note ; on se concentrera sur des simulations des grandes échelles.

2 RAPPELS SUR LES ÉQUATIONS MOYENNÉES EN L.E.S. ET LES VARIABLES ADIMENSIONNÉES

2.1 Définition des moyennes

On définit le filtrage spatial d'un champ scalaire u par le produit de convolution avec un filtre G_Δ :

$$\tilde{u}(\vec{x},t) = G_\Delta \star u(\vec{x}) = \iiint_{\mathbb{R}^3} G_\Delta(\vec{x},\vec{y})u(\vec{x}-\vec{y},t)\, d\vec{y}. \tag{1}$$

Le filtre le plus simple est un filtre rectangulaire de largeur Δ, où Δ est la taille caractéristique des mailles (Bailly et Comte-Bellot [7]). À partir de cette moyenne, on peut définir un champ de fluctuation u' par rapport à la moyenne $\tilde{u}$, tel que

$$u(\vec{x},t) = \tilde{u}(\vec{x},t) + u'(\vec{x},t). \tag{2}$$

On introduit également la moyenne du champ u dans un plan normal à la paroi, notée $\bar{u}$. Par exemple, si la direction y est perpendiculaire à la paroi et si $S_{xz}(y)$ est la surface parallèle à la paroi située à l'altitude y, cette moyenne surfacique s'écrit

$$\bar{u}(y,t) = \frac{1}{S_{xz}} \iint u(x,y,z,t)\, dxdz. \tag{3}$$

Enfin, la moyenne temporelle du champ u à partir de l'instant t_0 est, pour $t > t_0$,

$$\langle u\rangle(\vec{x},t) = \frac{1}{t-t_0}\int_{t_0}^{t} u(\vec{x},t')\, dt'. \tag{4}$$

2.2 Équations moyennées et fermetures

Les équations de Navier-Stokes et de convection-diffusion s'écrivent, sous forme conservative,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\vec{u}\otimes\vec{u}) = -\dfrac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \nu\Delta\vec{u}, & \text{(5a)} \\ \dfrac{\partial T}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\vec{u}T) = \alpha\Delta T. & \text{(5b)} \end{cases}$$

Le formalisme de la L.E.S. consiste dans un premier temps à moyenner ces équations à l'aide de l'opérateur de convolution (1), ce qui conduit aux nouvelles équations suivantes [1] :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{\vec{u}}}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\widetilde{\vec{u}\otimes\vec{u}}) = -\dfrac{1}{\rho}\vec{\nabla}\tilde{p} + \nu\Delta\tilde{\vec{u}}, & \text{(6a)} \\ \dfrac{\partial \widetilde{T}}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\widetilde{\vec{u}T}) = \alpha\Delta\widetilde{T}. & \text{(6b)} \end{cases}$$

Afin d'écrire ces équations sous forme conservative, on introduit des tenseurs de sous-maille $\overline{\overline{\mathcal{T}}}$ et $\overline{\overline{Q}}$ (respectivement d'ordre deux et d'ordre un) tels que

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\overline{\overline{\mathcal{T}}} = \tilde{\vec{u}}\otimes\tilde{\vec{u}} - \widetilde{\vec{u}\otimes\vec{u}}, & \text{(7a)} \\ \dfrac{1}{\rho C_p}\overline{\overline{Q}} = \tilde{\vec{u}}\widetilde{T} - \widetilde{\vec{u}T}. & \text{(7b)} \end{cases}$$

Les équations (6a) et (6b) sont ainsi transformées en

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{\vec{u}}}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\tilde{\vec{u}}\otimes\tilde{\vec{u}}) = -\dfrac{1}{\rho}\vec{\nabla}\tilde{p} + \nu\Delta\tilde{\vec{u}} + \dfrac{1}{\rho}\vec{\nabla}\cdot\overline{\overline{\mathcal{T}}}, & \text{(8a)} \\ \dfrac{\partial \widetilde{T}}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\tilde{\vec{u}}\widetilde{T}) = \alpha\Delta\widetilde{T} + \dfrac{1}{\rho C_p}\vec{\nabla}\cdot\overline{\overline{Q}}. & \text{(8b)} \end{cases}$$

Les tenseurs de sous-maille $\overline{\overline{\mathcal{T}}}$ et $\overline{\overline{Q}}$ représentent les effets des échelles non résolues ; ils ont respectivement pour coefficients $\mathcal{T}_{ij}$ et Q_i. En introduisant les champs fluctuants définis par l'égalité (2), les expressions de ces coefficients sont

1. On fait l'hypothèse de la commutativité de l'opérateur de convolution avec la dérivée temporelle et les dérivées spatiales.

$$\begin{cases} \mathcal{T}_{ij} = \rho\tilde{u}_i\tilde{u}_j - \rho\widetilde{u_i u_j} = \underbrace{\rho\tilde{u}_i\tilde{u}_j - \rho\widetilde{\tilde{u}_i\tilde{u}_j}}_{\mathcal{L}_{ij}} \underbrace{-\rho\widetilde{u'_i\tilde{u}_j} - \rho\widetilde{\tilde{u}_i u'_j}}_{\mathcal{C}_{ij}} \underbrace{-\rho\widetilde{u'_i u'_j}}_{\mathcal{R}_{ij}}, & \text{(9a)} \\ Q_i = \rho C_p\left(\tilde{u}_i\widetilde{T} - \widetilde{u_i T}\right) = \rho C_p\left(\tilde{u}_i\widetilde{T} - \widetilde{\tilde{u}_i\widetilde{T}} - \widetilde{u'_i\widetilde{T}} - \widetilde{\tilde{u}_i T'} - \widetilde{u'_i T'}\right), & \text{(9b)} \end{cases}$$

où $\mathcal{L}_{ij}$, $\mathcal{C}_{ij}$ et $\mathcal{R}_{ij}$ sont respectivement le tenseur de Leonard, le tenseur des termes croisés et le tenseur des contraintes de Reynolds. De façon analogue aux modèles statistiques, les modélisations de sous-maille font le plus souvent appel à une viscosité turbulente qui traduit l'action des petites échelles (non résolues dans le calcul) sur les grandes échelles, c'est-à-dire la dissipation de l'énergie cinétique turbulente de ces dernières. Concernant la partie thermique, on introduit de même une diffusivité turbulente. La fermeture des tenseurs inconnus par un modèle de viscosité turbulente et de diffusivité turbulente conduit aux équations fermées

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\tilde{\vec{u}}}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\tilde{\vec{u}}\otimes\tilde{\vec{u}}) = -\dfrac{1}{\rho}\vec{\nabla}\widetilde{P} + \vec{\nabla}\cdot\left[(\nu+\nu_t)\vec{\nabla}\tilde{\vec{u}}\right], & \text{(10a)} \\ \dfrac{\partial\widetilde{T}}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\tilde{\vec{u}}\widetilde{T}) = \vec{\nabla}\cdot\left[(\alpha+\alpha_t)\vec{\nabla}\widetilde{T}\right], & \text{(10b)} \end{cases}$$

où la pression $\widetilde{P}$ contient la partie isotrope du tenseur $\overline{\overline{\mathcal{T}}}$:

$$\widetilde{P} = \tilde{p} - \frac{1}{3}\mathrm{tr}\left(\overline{\overline{\mathcal{T}}}\right). \tag{11}$$

L'enjeu des modélisations L.E.S. consiste alors à exprimer la viscosité et la diffusivité turbulente. On les relie par l'intermédiaire d'un nombre de Prandtl turbulent tel que

$$\mathrm{Pr}_t = \frac{\nu_t}{\alpha_t}. \tag{12}$$

En pratique, soit on prend $\mathrm{Pr}_t \sim 1$ (ce qui revient à considérer que la turbulence diffuse de façon identique la chaleur et la quantité de mouvement), soit Pr_t est calculé en fonction du nombre de Prandtl moléculaire et du nombre de Reynolds, à l'aide de modèles existants non décrits dans cette note.
Diverses expressions de la viscosité turbulente sont disponibles dans la littérature. La première fermeture a été proposée par Smagorinsky [15] :

$$\nu_t = (C_s\Delta)^2\sqrt{2\widetilde{S}_{ij}\widetilde{S}_{ij}} \tag{13}$$

où C_s est une constante déterminée dans le cadre de la turbulence homogèe et isotrope, et $\widetilde{S}_{ij}$ sont les coefficients du tenseur des déformations :

$$\widetilde{S}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\tilde{u}_j}{\partial x_i}\right). \tag{14}$$

De nombreuses autres fermetures sont possibles, parmi lesquelles le modèle W.A.L.E. (*Wall-Adapting Local Eddy-Viscosity*, voir Nicoud et Ducros [14]) que nous utiliserons dans les simulations numériques :

$$\begin{cases} \nu_t & = (C_w\Delta)^2 \dfrac{\left(\widetilde{S}^d_{ij}\right)^3}{\left(\widetilde{S}^d_{ij}\right)^5 + \left(\widetilde{S}^d_{ij}\right)^{5/2} + 10^{-6}}, \\ \widetilde{S}^d_{ij} & = \dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i}\right)^2\right] - \dfrac{1}{3}\delta_{ij}\left(\dfrac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k}\right)^2. \end{cases} \tag{15}$$

Pour simplifier les écritures, on omettra les tildes dans toute la suite : on notera donc u pour $\tilde{u}$, p pour $\widetilde{P}$, et T pour $\widetilde{T}$. Ainsi, les équations de la L.E.S. sont

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\vec{u}\otimes\vec{u}) = -\dfrac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \vec{\nabla}\cdot\left[(\nu+\nu_t)\vec{\nabla}\vec{u}\right], & \text{(16a)} \\ \dfrac{\partial T}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\vec{u}T) = \vec{\nabla}\cdot\left[(\alpha+\alpha_t)\vec{\nabla}T\right]. & \text{(16b)} \end{cases}$$

2.3 Adimensionnement des variables

Les champs de vitesse et de température sont adimensionnées en introduisant une vitesse de frottement et une température de frottement pariétales, respectivement définies comme [2]

$$u_\tau = \sqrt{-\frac{\tau_p}{\rho}} = \sqrt{-(\nu+\nu_t)\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_p} \tag{17}$$

et

$$T_\tau = \frac{\phi_p}{\rho C_p u_\tau} = \frac{(\alpha+\alpha_t)}{u_\tau}\left.\frac{\partial T}{\partial n}\right|_p. \tag{18}$$

Ainsi, les variables adimensionnées sont [3]

$$\begin{cases} u^+ = \dfrac{u}{u_\tau}, \\ T^+ = \dfrac{T_p - T}{T_\tau}. \end{cases} \tag{19}$$

La distance y à la paroi est adimensionnée par l'unité de paroi ν/u_τ :

$$y^+ = \frac{y u_\tau}{\nu}. \tag{20}$$

On adimensionne également les tenseurs de sous-maille :

2. On définit la notation $\dfrac{\partial}{\partial n} = \vec{\nabla}\cdot\vec{n}$, où $\vec{n}$ est la normale sortante à la paroi.
3. On remarquera que ϕ_p, T_τ et $T_p - T$ sont du même signe (qui peut être positif ou négatif), donc T^+ est toujours positive.

$$\left\{\begin{aligned} \overline{\overline{\mathcal{T}}}^{+} &= \frac{\overline{\overline{\mathcal{T}}}}{\rho u_\tau^2}, \\ \overline{\overline{Q}}^{+} &= \frac{\overline{\overline{Q}}}{\rho C_p u_\tau T_\tau} = \frac{\overline{\overline{Q}}}{\phi_p}. \end{aligned}\right. \tag{21}$$

3 Éléments théoriques sur la prise en compte des lois de paroi

3.1 Caractéristiques de l'ancienne approche

Dans les simulations d'écoulements turbulents (hors D.N.S.), la finesse du maillage près des parois est primordiale pour obtenir une bonne représentation de la turbulence dans le domaine. Une finesse suffisante n'étant pas toujours possible ni assurée, on fait appel à des lois de paroi qui sont des expressions analytiques donnant la vitesse et la température en proche paroi. Ces lois de parois sont le plus souvent utilisées dans les simulations de type k-epsilon, mais on étend leur utilisation aux L.E.S. mal résolues en proche paroi.
Dans la couche logarithmique, la loi de paroi hydraulique et la loi de paroi thermique s'écrivent respectivement

$$\frac{u}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{y u_\tau}{\nu}\right) + B \tag{22}$$

et

$$\frac{T_p - T}{T_\tau} = \frac{\mathrm{Pr}_t}{\kappa} \ln\left(\frac{y u_\tau}{\nu}\right) + \beta(\mathrm{Pr}), \tag{23}$$

où κ, B et β sont des constantes. Dans Trio_U, ces lois ne servent pas à calculer u et T, mais u_τ et T_τ à chaque temps n à partir des valeurs de vitesse et de température calculées par le code au temps précédent. D'un point de vue discret, ces lois sont évaluées dans chaque maille de bord au point situé à une distance y_1 de la paroi, où y_1 est l'altitude par rapport à la paroi du centre de gravité des faces (**FIG. 1**). Ainsi, à chaque temps $t = n\Delta t$, le code résout les équations

$$\left\{\begin{aligned} \frac{u_1^{(n-1)}}{u_\tau^{(n)}} &= \frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{y_1 u_\tau^{(n)}}{\nu}\right) + B, \\ \frac{T_p - T_1^{(n-1)}}{T_\tau^{(n)}} &= \frac{\mathrm{Pr}_t}{\kappa} \ln\left(\frac{y_1 u_\tau^{(n)}}{\nu}\right) + \beta(\mathrm{Pr}), \end{aligned}\right. \tag{24}$$

d'inconnues $u_\tau^{(n)}$ et $T_\tau^{(n)}$.
Dans le code Trio_U sont implémentées des lois plus générales que (24) (voir l'annexe A), que l'on écrit sous les formes simplifiées

$$\left\{\begin{aligned} u_\tau^{(n)} &= \mathrm{LP}_h\left(u_1^{(n-1)}\right), \\ T_\tau^{(n)} &= \mathrm{LP}_t\left(u_\tau^{(n)}, T_1^{(n-1)}\right). \end{aligned}\right. \tag{25}$$

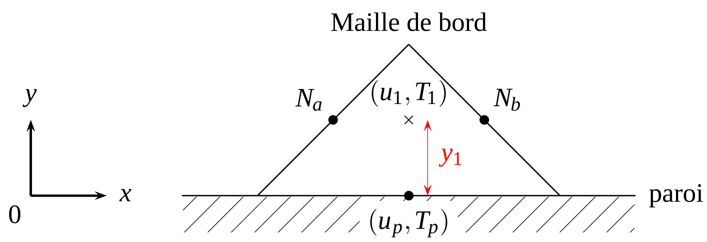


FIG. 1 – Localisation des inconnues de vitesse et de température en VEF 2D (les nœuds de calcul N_a et N_b sont les centres de gravité des faces, ici réduites à des arêtes), et définition de la distance y_1 à la paroi correspondant à l'altitude du point où est appliquée la loi de paroi. Les variables u_1 et T_1 sont les moyennes des inconnues aux nœuds N_a et N_b.

Les équations discrètes (25) sont résolues dans Trio_U par une méthode de point fixe (annexe B). En utilisant ensuite les définitions (17) et (18), on en déduit alors les gradients de vitesse et de température à la paroi au temps courant, ou de façon équivalente le frottement hydraulique total à la paroi et le flux thermique total à la paroi :

$$\left\{ \begin{aligned} \tau_p^{(n)} &= -\rho \left[u_\tau^{(n)} \right]^2 , \\ \phi_p^{(n)} &= \rho C_p u_\tau^{(n)} T_\tau^{(n)} . \end{aligned} \right. \tag{26}$$

Comme dans Trio_U, envisageons maintenant le problème sous l'angle des volumes finis. L'intégration des équations (16a) et (16b) sur le volume de contrôle[4] associé au point de calcul à la paroi (**FIG. 2**), conduit aux équations

$$\left\{ \begin{aligned} &\int_{V_{\mathrm{ABG}}} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \, dV + \int_{V_{\mathrm{ABG}}} \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \otimes \vec{u}) \, dV = - \int_{V_{\mathrm{ABG}}} \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p \, dV + \underbrace{\int_{V_{\mathrm{ABG}}} (\nu + \nu_t) \Delta \vec{u} \, dV}_{= \vec{F}_{\mathrm{ABG}}} , \\ &\int_{V_{\mathrm{ABG}}} \frac{\partial T}{\partial t} \, dV + \int_{V_{\mathrm{ABG}}} \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} T) \, dV = \underbrace{\int_{V_{\mathrm{ABG}}} (\alpha + \alpha_t) \Delta T \, dV}_{= F'_{\mathrm{ABG}}} . \end{aligned} \right. \tag{27}$$

Le laplacien vectoriel étant un vecteur défini comme

$$\Delta \vec{u} = \Delta u_i \vec{e}_i = \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} u_i \right) \vec{e}_i \quad \text{(sommation sur } i\text{)}, \tag{28}$$

les flux diffusifs $\vec{F}_{\mathrm{ABG}}$ et F'_{ABG} ont pour expressions

$$\left\{ \begin{aligned} \vec{F}_{\mathrm{ABG}} &= \oint_{\partial V_{\mathrm{ABG}}} (\nu + \nu_t) \left(\vec{\nabla} u_i \cdot \vec{n} \right) \vec{e}_i \, dS , \\ F'_{\mathrm{ABG}} &= \oint_{\partial V_{\mathrm{ABG}}} (\alpha + \alpha_t) \left(\vec{\nabla} T \cdot \vec{n} \right) \, dS \end{aligned} \right. \tag{29}$$

4. Pour simplifier, on se place ici en deux dimensions.

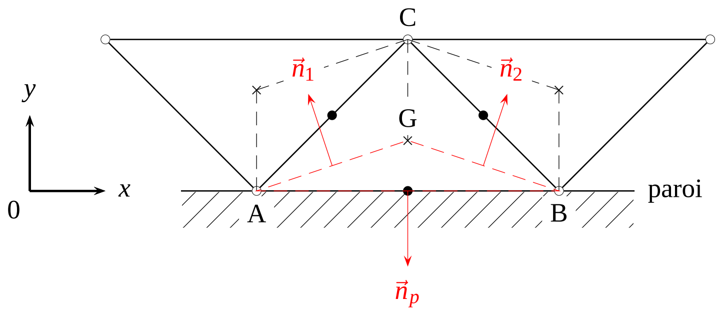


FIG. 2 – Schéma d'une maille de bord en VEF 2D (élément ABC), avec les points de calcul (représentés par des points noirs) et les volumes de contrôle (représentés par des lignes pointillées) associés. Les vecteurs $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ et $\vec{n}_p$ sont les normales aux faces du volume de contrôle pariétal ABG associé au point de calcul situé au centre de la face de paroi. Les gradients de vitesse et de température sont évalués au centre de gravité G, donc u_τ et T_τ également.

avec $\partial V_{\mathrm{ABG}} = S_{\mathrm{AB}} \cup S_{\mathrm{BG}} \cup S_{\mathrm{GA}}$. On s'intéresse à la contribution sur la face de bord AB, soit

$$\begin{aligned}\vec{F}_{\mathrm{AB}} &= \int_{S_{\mathrm{AB}}} (\nu+\nu_t) \left.\frac{\partial u_i}{\partial n}\right|_{\mathrm{p}} \vec{e}_i \, dS_{\mathrm{AB}} \\ &= \underbrace{\left[\int_{S_{\mathrm{AB}}} (\nu+\nu_t) \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\mathrm{p}} dS_{\mathrm{AB}}\right]}_{=F_{\mathrm{AB,x}}} \vec{e}_x + \underbrace{\left[\int_{S_{\mathrm{AB}}} (\nu+\nu_t) \left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_{\mathrm{p}} dS_{\mathrm{AB}}\right]}_{=F_{\mathrm{AB,y}}} \vec{e}_y\end{aligned} \tag{30}$$

et

$$F'_{\mathrm{AB}} = \int_{S_{\mathrm{AB}}} (\alpha+\alpha_t) \left.\frac{\partial T}{\partial n}\right|_{\mathrm{p}} dS_{\mathrm{AB}}. \tag{31}$$

En discrétisant temporellement, on a ainsi

$$\begin{cases} F_{\mathrm{AB,x}}^{(n)} = -\displaystyle\int_{S_{\mathrm{AB}}} \left[u_\tau^{(n)}\right]^2 dS_{\mathrm{AB}}, \\ F_{\mathrm{AB}}^{\prime(n)} = \displaystyle\int_{S_{\mathrm{AB}}} u_\tau^{(n)} T_\tau^{(n)} \, dS_{\mathrm{AB}}. \end{cases} \tag{32}$$

En l'absence de loi de paroi, les termes $F_{\mathrm{AB,x}}^{(n)}$ et $F_{\mathrm{AB}}^{\prime(n)}$ calculés par Trio_U sont entachés d'une erreur importante car la résolution du maillage est *a priori* trop faible, conduisant à des gradients de vitesse et de température incorrects. La stratégie adoptée historiquement dans Trio_U consistait alors à **remplacer**, dans les équations de bilan par maille, les flux incorrects $\left.F_{\mathrm{AB,x}}^{(n)}\right|_{\mathrm{calc}}$ et $\left.F_{\mathrm{AB}}^{\prime(n)}\right|_{\mathrm{calc}}$ par les flux corrects $\left.F_{\mathrm{AB,x}}^{(n)}\right|_{\mathrm{LP}}$ et $\left.F_{\mathrm{AB}}^{\prime(n)}\right|_{\mathrm{LP}}$ calculés à partir des lois de paroi. Cette stratégie n'est cependant pas très satisfaisante du point de vue de la rigueur, et n'est pas conforme à la plupart des codes de calcul.
De plus, elle introduit une convection parasite à la paroi. En effet, dans le cas 2D, le terme de convection est

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{33}$$

Comme en VEF les directions sont couplées puisqu'il n'y a pas d'orthogonalité des mailles (contrairement au VDF), la composante v à la paroi n'est pas rigoureusement nulle (bien que négligeable par rapport à u). En raison de cette vitesse normale parasite, le terme $v\frac{\partial u}{\partial y}$ est susceptible d'être important. Cette convection artificielle vient dégrader la qualité des résultats des simulations. Comme nous le verrons, on fait disparaître cette convection parasite dans la nouvelle approche proposée.

3.2 Nouvelle stratégie envisagée

3.2.1 Idées générales

On transforme la condition de paroi fixe adhérente ($\vec{u}=\vec{0}$, soit $u_i=0$), en condition de symétrie, ce qui impose la nullité de la vitesse normale à la paroi, du gradient de vitesse tangentielle à la paroi, et du gradient de température à la paroi [5]. Dans le cas 2D, cette condition s'exprime donc comme

$$\begin{cases} v_{\mathrm{p}}=0, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\mathrm{p}}=0, \\ \left.\dfrac{\partial T}{\partial n}\right|_{\mathrm{p}}=0. \end{cases} \tag{34}$$

Ainsi, la composante u n'est pas nécessairement nulle, contrairement à une paroi fixe adhérente. En conséquence, les termes $\left.F^{(n)}_{\mathrm{AB},x}\right|_{\mathrm{calc}}$ et $\left.F'^{(n)}_{\mathrm{AB}}\right|_{\mathrm{calc}}$ exprimés en (32) ne sont en réalité pas calculés : ils sont exactement nuls puisqu'imposés comme tels. Il suffit alors d'**ajouter** aux équations de bilan (27) les flux $\left.F^{(n)}_{\mathrm{AB},x}\right|_{\mathrm{LP}}$ et $\left.F'^{(n)}_{\mathrm{AB}}\right|_{\mathrm{LP}}$ déterminés par résolution des lois de paroi (méthode de point fixe). De cette façon, on n'écrase pas les flux incorrects, mais on leur impose une valeur nulle *via* les conditions aux limites et on leur ajoute leurs valeurs théoriques sous forme de termes sources. On appelle ces derniers des sources de Robin car les lois de paroi conduisent à des relations du type

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial n}(y_1)=F\left[u(y_1)\right], \\ \dfrac{\partial T}{\partial n}(y_1)=G\left[T(y_1)\right], \end{cases} \tag{35}$$

qui constituent des conditions aux limites de Robin « généralisées ». On notera néanmoins que les écritures (35) sont formelles car on ne peut pas exprimer explicitement les relations liant les variables à leurs dérivées ; les fonctionnelles F et G sont donc implicites. De plus, le choix d'implémenter les conditions de Robin au moyen de termes sources relève d'une astuce dans Trio_U. Enfin, comme v est nulle à la paroi, on ne créé pas de convection parasite.

5. La paroi est donc adiabatique.

Tentons de donner une interprétation physique à la paroi désormais définie en tant que symétrie : comme u et T ne valent plus respectivement $u_p = 0$ et T_p mais varient « librement » sur cette paroi, tout se passe comme si cette dernière était décalée par rapport à la paroi fixe réelle définie dans l'ancienne approche. On choisit alors d'appliquer les conditions (35) (donc, en pratique, les termes sources associés) aux points de calcul situés sur la paroi symétrique, et non plus aux centres de gravité des mailles de paroi. Autrement dit, la distance y_1 de l'ancienne méthode devient l'altitude de la paroi symétrique dans la nouvelle méthode. On s'autorisera de plus à généraliser ce décalage à une distance δ au lieu de y_1. Si l'on note u_δ et T_δ les inconnues sur la paroi symétrique, le raccord de $(u_\delta,\ T_\delta)$ à (u_p,T_p) se fait dans la couche $0 \le y \le \delta$, même si celle-ci n'est pas simulée dans les calculs utilisant la nouvelle méthode. Cependant en pratique, on ne décalera pas la paroi (en acceptant de créer ainsi des erreurs) car cela serait contraignant, en particulier pour des gros calculs industriels. On se contentera de donner la valeur de δ au code, avec par exemple $\delta = y_1$ par défaut (**FIG. 4**).
Dans les deux prochaines sections, on détaille l'expression des termes sources de Robin ainsi que les étapes du calcul Trio_U pour l'hydraulique et la thermique.

3.2.2 Terme source de Robin pour l'hydraulique et étapes du calcul

Par définition, le terme source de Robin hydraulique que l'on souhaite appliquer sur chaque face de bord AB est la composante tangentielle à la paroi du flux diffusif $\vec{F}_{\mathrm{AB}}$ défini par (30), soit

$$\begin{aligned} \vec{R}_{\mathrm{hyd}} &= F_{\mathrm{AB},x}\ \vec{e}_x \\ &= -\int_{S_{\mathrm{AB}}} u_\tau^2\ dS_{\mathrm{AB}}\ \vec{e}_x. \end{aligned} \tag{36}$$

On en déduit qu'en chaque point de calcul situé sur la paroi symétrique,

$$\vec{R}_{\mathrm{hyd}} = -u_\tau^2 S_{\mathrm{AB}} \vec{e}_x. \tag{37}$$

Pour la partie hydraulique, les étapes de calcul au temps n dans chaque maille touchant une paroi sont les suivantes :

(i) calcul de $u_\tau^{(n)} = \mathrm{LP}_h\left(u_\delta^{(n-1)}\right)$;

(ii) calcul de $\vec{R}_{\mathrm{hyd}}^{(n)}$ par la relation (37) et ajout à l'équation de bilan hydraulique ;

(iii) calcul de $u_\delta^{(n)}$ par résolution de l'équation de bilan hydraulique.

3.2.3 Terme source de Robin pour la thermique et étapes du calcul

La démarche de calcul est similaire à la partie hydraulique, mais avec des étapes supplémentaires. Le terme source de Robin thermique à appliquer sur les faces de paroi est le flux diffusif pariétal F'_{AB} défini par (31) :

$$\begin{aligned} R_{\mathrm{th}} &= F'_{\mathrm{AB}} \\ &= \int_{S_{\mathrm{AB}}} u_\tau T_\tau\ dS_{\mathrm{AB}} \\ &= u_\tau T_\tau S_{\mathrm{AB}}. \end{aligned} \tag{38}$$

Par rapport au terme source de Robin hydraulique, on a le calcul supplémentaire de T_τ à effectuer. Pour cela, on passe par un intermédiaire en évaluant une distance d_{equiv} positive telle que

$$\phi_{\text{p}} = (\lambda + \lambda_t)\frac{T_p - T}{d_{\text{equiv}}}. \tag{39}$$

En combinant les relations (18) et (39), on obtient

$$\begin{cases} d_{\text{equiv}} = (\alpha + \alpha_t)\dfrac{T^+}{u_\tau}, & \text{(40a)} \\ T_\tau = (\alpha + \alpha_t)\dfrac{T_p - T}{u_\tau d_{\text{equiv}}}, & \text{(40b)} \\ R_{\text{th}} = (\alpha + \alpha_t)\dfrac{T_p - T}{d_{\text{equiv}}} S_{\text{AB}}. & \text{(40c)} \end{cases}$$

Pour la partie thermique, les étapes de calcul au temps n dans chaque maille touchant une paroi sont les suivantes :

(i) calcul de $u_\tau^{(n)} = \text{LP}_h\left(u_\delta^{(n-1)}\right)$;

(ii) calcul de $T_\delta^{+(n)} = \text{LP}_t\left(u_\tau^{(n-1)}\right)$;

(iii) calcul de $d_{\text{equiv}}^{(n)}$ par la relation (40a) ;

(iv) calcul de $T_\tau^{(n)}$ par la relation (40b), en utilisant l'inconnue au temps précédent $T_\delta^{(n-1)}$;

(v) calcul de $R_{\text{th}}^{(n)}$ par la relation (40c) et ajout à l'équation de bilan thermique ;

(vi) calcul de $T_\delta^{(n)}$ par résolution de l'équation de bilan thermique.

3.2.4 À propos des discrétisations VDF

On souhaite spécifiquement appliquer cette nouvelle démarche aux discrétisations VEF, dans la mesure où elle est déjà implicitement prise en compte en VDF. En effet, il n'existe pas en VDF de point de calcul sur la paroi (**FIG. 3**), si bien que la condition de vitesse nulle à la paroi ($u_p = 0$) n'est imposée que faiblement, sous la forme suivante[6] (en 1D) :

$$\frac{u_0 - u_p}{\Delta x} = F_1. \tag{41}$$

L'élément F_1 est dérivé de la loi de paroi ; on a donc implicitement une condition de Robin que l'on peut écrire formellement comme

$$\frac{u_0 - u_p}{\Delta x} = \text{LP}_h(u_0). \tag{42}$$

Le codage des lois de paroi en VEF a été initialement réalisé par mimétisme avec le VDF, sans tenir compte de cette différence notable de localisation des inconnues dans ces deux discrétisations. Cela justifie aujourd'hui la remise en question de la méthode de prise en compte des lois de paroi en VEF.

6. On prend ici l'exemple du champ de vitesse, mais le principe est le même pour le champ de température.

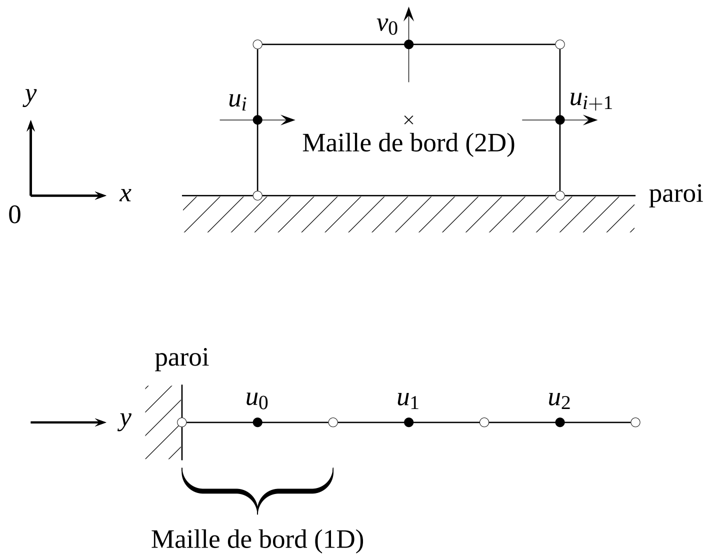
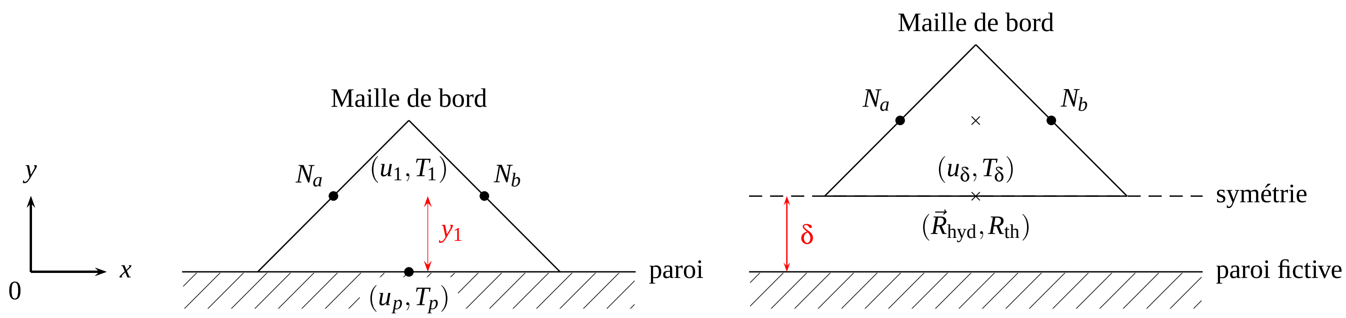


FIG. 3 – Discrétisation VDF en 2D (en haut) et en 1D (en bas). Les inconnues (composante de vitesse normale à la face et température) sont localisées aux points noirs, leurs gradients au centre des mailles.

3.3 Bilan

Les différences entre les deux approches exposées dans ce chapitre sont récapitulées sur la **FIG. 4** et dans le **TAB. 1**.



(a) Ancienne approche (a) Nouvelle approche

FIG. 4 – Différences entre ancienne et nouvelle approche : la paroi est décalée fictivement d'une distance δ et est transformée en symétrie. La loi de paroi est maintenant appliquée sur la paroi symétrique, qui se trouve à l'altitude δ par rapport à la paroi fictive. En ce même point sont appliqués les termes de Robin $\vec{R}_{\mathrm{hyd}}$ et R_{th}, définis par les relations (37) et (40c).

Dans le prochain chapitre, des détails sont donnés concernant l'implémentation de cette nouvelle méthode de prise en compte des flux pariétaux dans le code Trio_U.

Ancienne approche	**Nouvelle approche**
Paroi fixe : $\vec{u} = \vec{0}$, $T = T_p$ Jeu de données : `paroi_fixe`	Symétrie : $\vec{u}_p \cdot \vec{n} = 0$, $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right\|_{\mathrm{p}} = 0$, $\left.\frac{\partial T}{\partial n}\right\|_{\mathrm{p}} = 0$ Jeu de données : `Paroi_decalee_Robin`
Flux diffusifs $F_{\mathrm{AB,x}}\|_{\mathrm{calc}}$ et $F'_{\mathrm{AB}}\|_{\mathrm{calc}}$ incorrects	Flux diffusifs $F_{\mathrm{AB,x}}\|_{\mathrm{calc}}$ et $F'_{\mathrm{AB}}\|_{\mathrm{calc}}$ nuls
Flux théoriques $F_{\mathrm{AB,x}}\|_{\mathrm{LP}}$ et $F'_{\mathrm{AB}}\|_{\mathrm{LP}}$ donnés par résolution des lois de paroi (point fixe)	
$F_{\mathrm{AB,x}}\|_{\mathrm{calc}}$, $F'_{\mathrm{AB}}\|_{\mathrm{calc}}$ remplacés par $F_{\mathrm{AB,x}}\|_{\mathrm{LP}}$, $F'_{\mathrm{AB}}\|_{\mathrm{LP}}$	Ajout des sources $\vec{R}_{\mathrm{hyd}} = F_{\mathrm{AB,x}}\|_{\mathrm{LP}}\vec{e}_x$, $R_{\mathrm{th}} = F'_{\mathrm{AB}}\|_{\mathrm{LP}}$ Jeu de données : `source_Robin` (`_scalaire`)

TAB. 1 – Récapitulatif des deux stratégies de prise en compte des lois de paroi.

4 IMPLÉMENTATION DE LA NOUVELLE APPROCHE DANS TRIO_U

4.1 Choix effectués pour la définition dans le jeu de données

Un nouveau type de condition aux limites est créé, dans lequel l'utilisateur spécifie la valeur souhaitée de δ. On choisit d'appeler cette condition `Paroi_decalee_Robin`, en référence avec l'interprétation de la nouvelle stratégie donnée précédemment. Pour chaque paroi, la syntaxe de la condition aux limites dans le jeu de données est la suivante :

`Paroi_decalee_Robin { delta` δ `}`

Implémenter une condition de Robin sous la forme d'un terme source plutôt que d'une nouvelle condition aux limites permet par ailleurs d'éviter d'avoir à modifier les (nombreux) opérateurs de diffusion, ce qui serait long, fastidieux, et source d'erreurs. Les conditions de Robin (35) sont donc implémentées par le biais de termes sources dont la syntaxe dans le jeu de données est

`Sources { source_Robin N paroi1 ... paroiN dt_post }` (43)

pour l'hydraulique et

`Sources { source_Robin_scalaire N paroi1 ... paroiN dt_post }` (44)

pour la thermique. Le paramètre N est le nombre de parois sur lesquelles s'applique la nouvelle condition aux limites, suivi du nom de ces N parois et du pas de temps `dt_post` d'écriture des fichiers de post-traitement liés à ce terme source.

4.2 Développements

Dans un premier temps, on crée une nouvelle classe de condition aux limites, qui par commodité dérive de la classe `Symetrie` (**FIG. 5**). Elle n'est compatible qu'avec les équations `Navier_Stokes_turbulent` et Convection_Diffusion_Temperature_Turbulent. Dans cette classe est déclaré le paramètre δ.

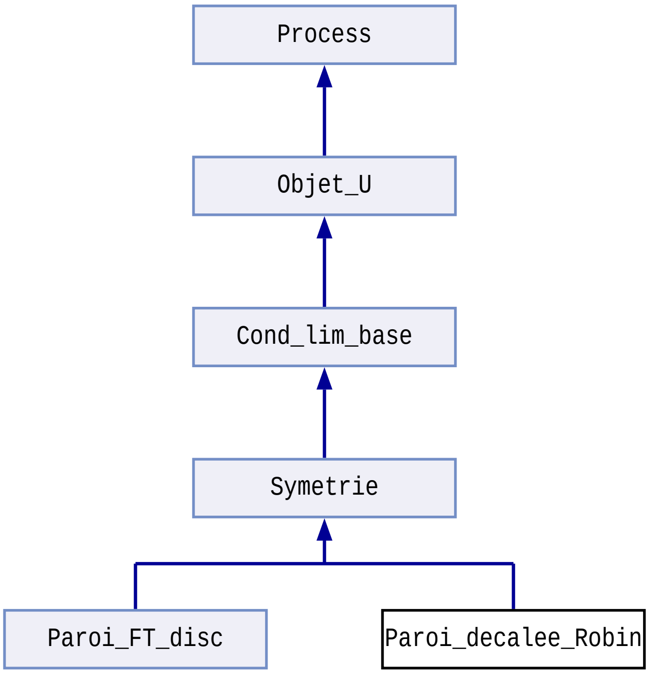


FIG. 5 – Diagramme d'héritage de la nouvelle classe Paroi_decalee_Robin.

Ensuite, la condition de Robin est implémentée dans les nouvelles classes Source_Robin (pour l'hydraulique) et Source_Robin_Scalaire (pour la thermique) qui dérivent de la classe Source_base : on y implémente le calcul de $\vec{R}_{\mathrm{hyd}}$ et de R_{th} donnés par les expressions (37) et (40c).
Le calcul de u_τ par point fixe à chaque pas de temps est effectué dans le fichier ParoiVEFhyd.cpp définissant la classe Paroi_std_hyd_VEF. Ceci présente l'avantage de conserver des formats identiques pour les fichiers de sortie à ceux d'un calcul « standard » (assurant de ce fait une certaine transparence pour l'utilisateur), sans que ce développement soit trop invasif puisqu'il suffit d'appliquer à la nouvelle condition aux limites les calculs déjà existant dans le fichier ParoiVEFhyd.cpp [7]. Dans ce fichier, on ajoute le post-traitement du seuil atteint et du nombre d'itérations effectuées dans la résolution par point fixe de u_τ (méthode imprimer_ustar). Pour la thermique, le calcul de T_τ est réalisé dans la classe Paroi_scal_hyd_base_VEF (fichier ParoiVEFscHy.cpp).
Enfin, concernant le post-traitement en thermique, on modifie également la méthode imprimer_nusselt (codée dans le fichier ParoiVEFscbase.cpp), de façon à étendre le post-traitement aux parois de type symétrie/Robin.
L'ensemble des modifications associées à notre nouvelle stratégie étant implémenté dans Trio_U, il nous reste à valider l'approche par l'intermédiaire de simulations numériques. C'est l'objet du prochain chapitre.

7. Ajout d'une boucle conditionnelle consistant à tester si la paroi est de type Paroi_decalee_Robin.

4.3 Synthèse

L'ensemble des modifications et créations de fichiers dans Trio_U occasionnées par le développement de la nouvelle stratégie de prise en compte des lois de paroi est synthétisé dans le tableau **TAB. 2**.

Fichiers	Statut	Description
`Paroi_decalee_Robin.h` `Paroi_decalee_Robin.cpp`	Créés	Implémentation de la condition aux limites de type symétrie/Robin
`SouRobin.h` `SouRobin.cpp`	Créés	Implémentation du terme source de Robin hydraulique
`SouRobinScal.h` `SouRobinScal.cpp`	Créés	Implémentation du terme source de Robin thermique
`ParoiVEFhyd.h` `ParoiVEFhyd.cpp`	Modifiés	Calcul de u_τ par point fixe et extension du post-traitement en hydraulique pour les parois de type symétrie/Robin
`ParoiVEFscHy.cpp` `ParoiVEFscHy.h`	Modifiés	Calcul de la température de frottement pariétale T_τ
`ParoiVEFscbase.cpp`	Modifié	Extension du post-traitement en thermique pour les parois de type symétrie/Robin
`Trait_part_NS_canal.cpp`	Modifié	Désactivation de certains post-traitements pour les `Paroi_decalee_Robin`

TAB. 2 – Synthèse des développements effectués dans le code.

4.4 Améliorations prochaines

Pour rendre encore plus simple et transparente l'utilisation de la nouvelle méthode symétrie/Robin, on envisage les améliorations suivantes :

- définir une valeur par défaut pour δ, qui serait la distance à la paroi du premier point de calcul, calculée par le code : $\delta = y_1$. Dans ce cas, l'utilisateur ne serait pas contraint de renseigner la valeur de δ dans le jeu de données ;
- déclencher automatiquement le terme source de Robin, sans avoir à écrire les lignes (43) et (44) dans le jeu de données, dès qu'une frontière de type `Paroi_decalee_Robin` est déclarée.

5 VALIDATION PAR LES CALCULS NUMÉRIQUES

5.1 Description des simulations numériques

5.1.1 Domaine de calcul et maillages

Notre configuration de référence sera un écoulement entre plaques planes parallèles. Le domaine est un parallélépipède de dimensions $L_x \times L_y \times L_z$ (on notera $h = L_y/2$ la demi-hauteur du canal). L'écoulement est supposé L_x-, L_y- et L_z-périodique. Deux types courants de conditions aux limites thermiques sont envisagés (**FIG. 6**) :

(i) une température uniforme et identique appliquée sur les deux parois, avec un dégagement de puissance thermique au sein de l'espace interplaques ;

(ii) des températures uniformes et différentes appliquées sur les deux parois, sans dégagement de puissance au sein de l'espace interplaques.

On ne s'intéressera dans cette note qu'au premier type de conditions. Les équations résolues dans Trio_U sont donc les équations (16a) et (16b), auxquelles on ajoute respectivement un terme source pour forcer l'écoulement, et un terme source de création de puissance thermique. Ces termes sont nécessaires du fait des conditions périodiques qui annulent les termes de convection ; ils sont tels que les champs de vitesse et de température ne tendent pas vers des solutions uniformes. Le débit de l'écoulement est uniforme, et la puissance reçue par l'écoulement par le biais du terme source est dissipée par les parois. Une telle condition en thermique est équivalente à imposer uniquement un flux uniforme négatif aux parois, à la différence qu'elle assure la convergence du profil de température (mais le profil adimensionné serait identique dans les deux configurations).

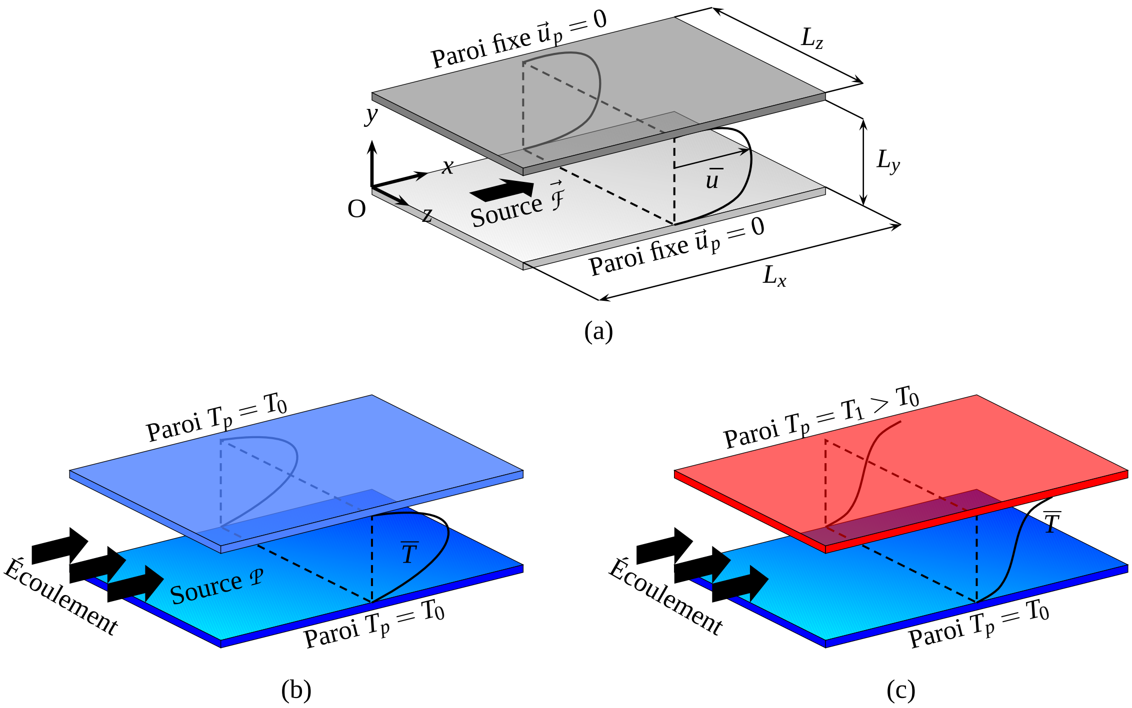


FIG. 6 – Écoulement dans un canal plan et conditions hydrauliques et thermiques. (a) Ajout d'un terme $\vec{\mathcal{F}}$ pour forcer l'écoulement, (b) imposition d'une température uniforme et identique sur les deux parois, ainsi que d'une source de puissance thermique $\mathcal{P}$, (c) imposition de températures uniformes et différentes pour chaque plaque.

Plusieurs nombres de Reynolds et de Prandtl sont testés (Re_τ = 180, 395, 590, 640, et Pr = 0,025 et 0,71) ; les simulations numériques sont réalisées en utilisant trois types de maillages (**FIG. 7**), dont les caractéristiques dépendent du régime hydraulique (**TAB. 3**) :

- un maillage VDF créé avec le mailleur interne de Trio_U ;
- un maillage VEF créé avec le mailleur interne de Trio_U ;
- dans le cas à $\mathrm{Re}_\tau = 395$ uniquement, un maillage VEF créé avec le mailleur ICEM, qui comporte 67362 éléments et tel que $y^+_{\mathrm{moy}} = 13$. L'intérêt de ce troisième maillage est qu'il présente moins de régularité que le maillage VEF créé avec Trio_U, ce qui peut être un facteur d'amélioration des résultats en L.E.S..

	VDF				VEF			
	Δx^+	y_1^+	Δz^+	Nb. élém.	Δx^+	y_1^+	Δz^+	Nb. élém.
$\mathrm{Re}_\tau = 180$	72	15	57,6	1920	76,8	15	64	2880
$\mathrm{Re}_\tau = 395$	70,22	17,17	57,45	18216	76,61	18,81	70,22	22176
$\mathrm{Re}_\tau = 590$	69,93	16,86	57,21	62370	78,67	19,67	78,67	61440
$\mathrm{Re}_\tau = 640$	70,62	17,30	58,51	75110	80,31	21,33	75,81	73440

TAB. 3 – Caractéristiques des maillages utilisés pour chaque régime d'écoulement.

Les fiches de validation incluent un calcul supplémentaire où le canal est tronqué en haut et en bas de la longueur δ (l'écartement entre les plaques est donc de $L_y - 2\delta$), visant à constater l'effet d'un décalage réel du maillage ([1], [2], [3], [4], [5] et [6]).

5.1.2 Propriétés physiques et schémas numériques

On impose initialement une température uniforme et nulle et un profil de vitesse parabolique de maximum U_c. Afin de transitionner vers la turbulence, un bruit numérique est ajouté à ce profil laminaire. Le choix d'un profil parabolique et non d'un profil plat, provient de l'observation selon laquelle la transition a lieu sensiblement plus tôt dans le premier cas que dans le second, d'où un gain en temps de calcul. La vitesse débitante dans le canal est $U_m = \dfrac{2}{3} U_c$ et le nombre de Reynolds correspondant est

$$\mathrm{Re}_m = \frac{U_m h}{\nu}. \tag{45}$$

Le nombre de Reynolds de frottement est évalué en utilisant la loi de Dean [8], valable pour les écoulements en canaux plans :

$$\mathrm{Re}_\tau = 0{,}175\ \mathrm{Re}_m^{7/8}. \tag{46}$$

Enfin, le frottement pariétal turbulent est calculé comme

$$u_\tau = \frac{\nu \mathrm{Re}_\tau}{h}. \tag{47}$$

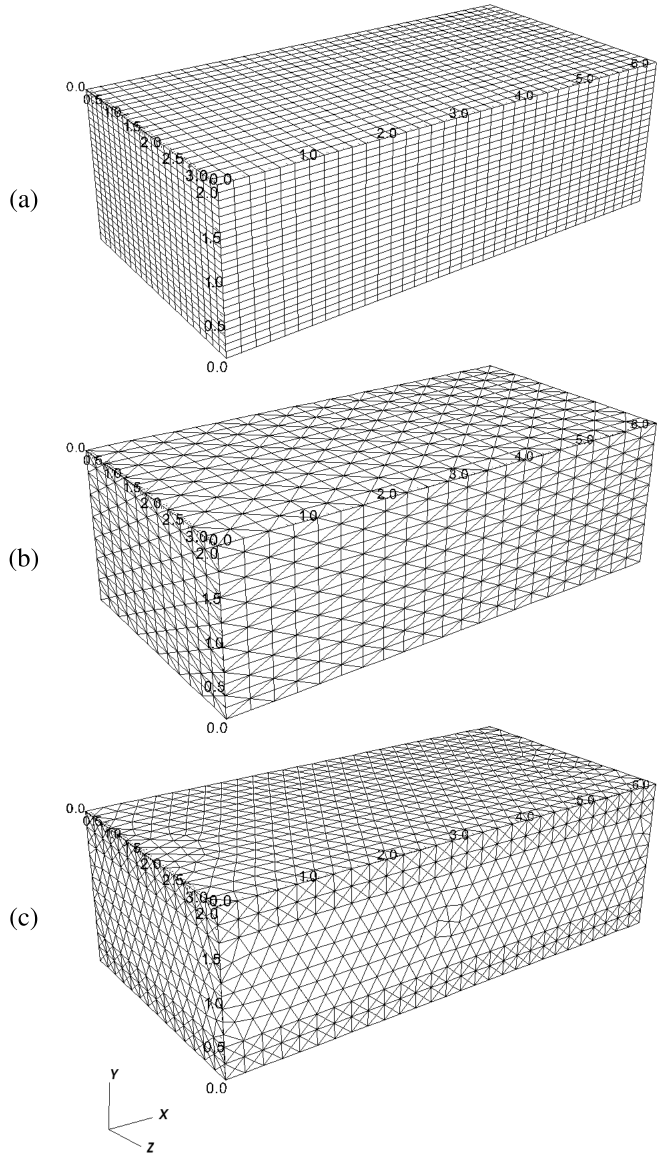


FIG. 7 – Maillages utilisés pour les calculs dans le cas à $Re_\tau = 395$: (a) maillage VDF, (b) maillage VEF créé avec le mailleur interne de Trio_U, (c) maillage VEF créé avec ICEM.

La fermeture des équations de la L.E.S. est réalisée à l'aide du modèle WALE, défini par les équations (15), et qui présente certains avantages détaillés dans [14].
Pour le détail des dimensions géométriques, des propriétés physiques, des nombres caractéristiques de l'écoulement, des différents schémas numériques et conditions appliqués dans chaque simulation, on se reportera aux fiches [1] – [6]. Les conditions thermiques sont telles que les températures sont abstraites : notre objectif n'est pas une simulation réaliste mais ne concerne que la validation de la méthodologie symétrie/Robin pour les lois de paroi.

5.2 Résultats des calculs

Les résultats de ces simulations numériques sont confrontés ensemble avec des résultats de D.N.S. qui sont donnés sur les sites web [11] et [13]. Pour cela, on fait la moyenne dans chaque plan xz d'altitude y_i, où les y_i sont les altitudes des **centres de gravité des faces** du maillage (donc les véritables points de calcul de la vitesse et de la température), de différents champs : vitesse, température, écart-type de température (voir ci-dessous), ainsi que les composantes des tenseurs de sous-maille modélisés. Les quantités adimensionnelles correspondantes sont également moyennées de cette façon. Enfin, tous ces profils sont moyennées en temps et tracés dans la demi-hauteur du canal, donc pour $y_i < h$, les champs étant soit symétriques soit antisymétriques. De plus, en introduisant les fluctuations spatio-temporelles de température,

$$\widetilde{T}(t,x,y,z) = T(t,x,y,z) - \langle \overline{T} \rangle (t,y), \tag{48}$$

on définit l'écart-type de la température comme la moyenne quadratique de ses fluctuations spatio-temporelles :

$$T_{\text{rms}}(t,y) = \sqrt{\langle \widetilde{T}^2 \rangle}. \tag{49}$$

Les profils de toutes ces quantités sont tracés dans les fiches de validation [1] – [6] (la fiche [3] est reproduite en annexe C). On se contente ici d'une synthèse des principaux résultats obtenus. Le premier critère de validation concerne la valeur de la vitesse de frottement calculée (**TAB. 4**). Les valeurs reportées dans ce tableau sont susceptibles de différer légèrement en fonction du nombre de Prandtl du fluide.

		t_0 (s)	t_{fin} (s)	u_τ $\left(\text{m}\cdot\text{s}^{-1}\right)$	Erreur relative (%)
$\text{Re}_\tau = 180$	Théorique	–	–	0,42857	–
	VDF	600	1000	0,41941	2,14
	VEF (Trio_U)	600	1000	0,41512	3,14
	VEF symétrie/Robin (Trio_U)	600	1000	0,40793	4,82
$\text{Re}_\tau = 395$	Théorique	–	–	0,94048	–
	VDF	100	150	0,92315	1,84
	VEF (Trio_U)	100	150	0,87076	7,41
	VEF symétrie/Robin (Trio_U)	100	150	0,85305	9,30
	VEF (ICEM)	100	150	0,93762	0,30
	VEF symétrie/Robin (ICEM)	100	150	0,86778	7,73
$\text{Re}_\tau = 590$	Théorique	–	–	1,40476	–
	VDF	20	50	1,39799	0,48
	VEF (Trio_U)	20	50	1,27989	8,89
	VEF symétrie/Robin (Trio_U)	20	50	1,24240	11,56
$\text{Re}_\tau = 640$	Théorique	–	–	1,52381	–
	VDF	50	100	1,51268	0,73
	VEF (Trio_U)	50	100	1,39061	8,74
	VEF symétrie/Robin (Trio_U)	50	100	1,35857	10,84

TAB. 4 – Comparaison des valeurs calculées du frottement turbulent pariétal avec sa valeur théorique. L'intervalle temporel pour le calcul des moyennes est $[t_0; t_{\text{fin}}]$.

On note que le comportement est similaire dans chaque régime hydraulique :

- les calculs VDF fournissent une excellente précision sur la vitesse u_τ ;
- les calculs VEF conduisent à une erreur avoisinant 10% sur la vitesse u_τ ;
- cette erreur est légèrement augmentée avec le passage à la nouvelle stratégie, mais dans une mesure qui semble acceptable ;
- dans le régime $\mathrm{Re}_\tau = 395$, le maillage ICEM conduit à une meilleure précision sur u_τ, ceci étant particulièrement notable avec l'ancienne approche.

De plus, les fiches de validation font apparaître que les calculs à maillage décalé améliorent notablement la précision de la vitesse de frottement calculée, ce qui était un comportement prévu dans la mesure où l'on est conscient, dans la nouvelle stratégie, d'introduire une légère erreur en ne décalant pas le maillage.

Dans la suite, on s'intéresse au cas $\mathrm{Re}_\tau = 395$ et $\mathrm{Pr} = 0{,}71$ car il est assez représentatif des autres régimes. Le nombre de Reynolds instantané (**FIG. 8**) fait apparaître dans chaque calcul l'écart avec la valeur théorique à atteindre. Le graphique indique que dans ce régime et pour ces conditions initiales, la transition vers la turbulence a lieu un peu avant $t = 10$ s.

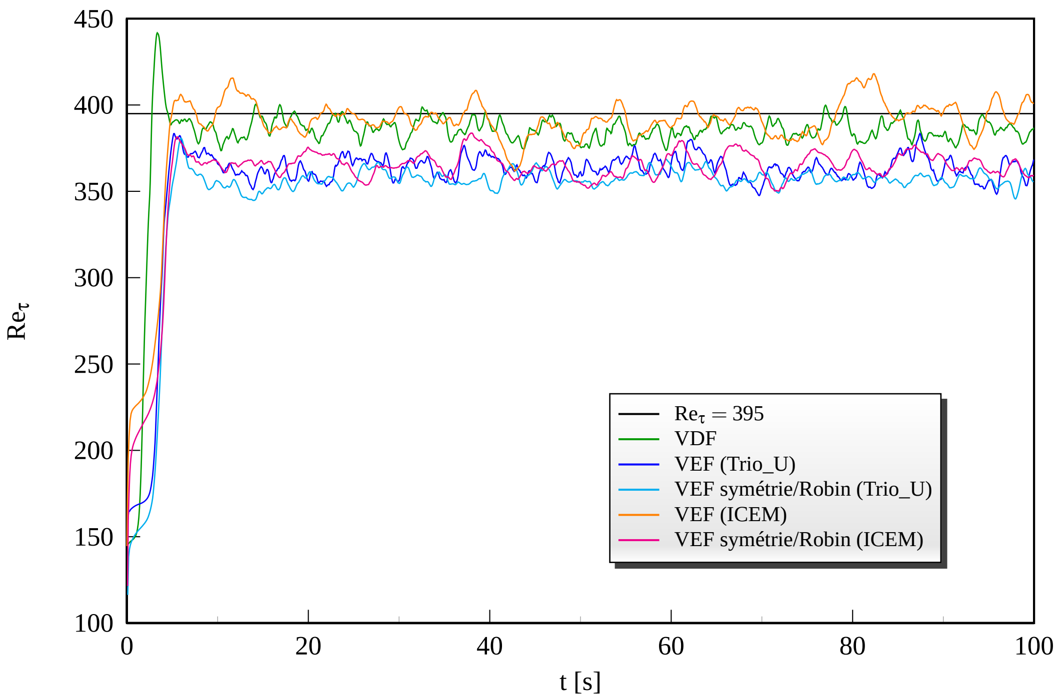


FIG. 8 – Évolution de Re_τ au cours du calcul pour chacune des simulations. La valeur théorique à obtenir est $\mathrm{Re}_\tau = 395$.

On trace enfin les profils dimensionnels et adimensionnels de vitesse, de température, et d'écart-type de température dans la demi-hauteur du canal (**FIG. 9**, **10**, **11**, **12**, **13** et **14**).

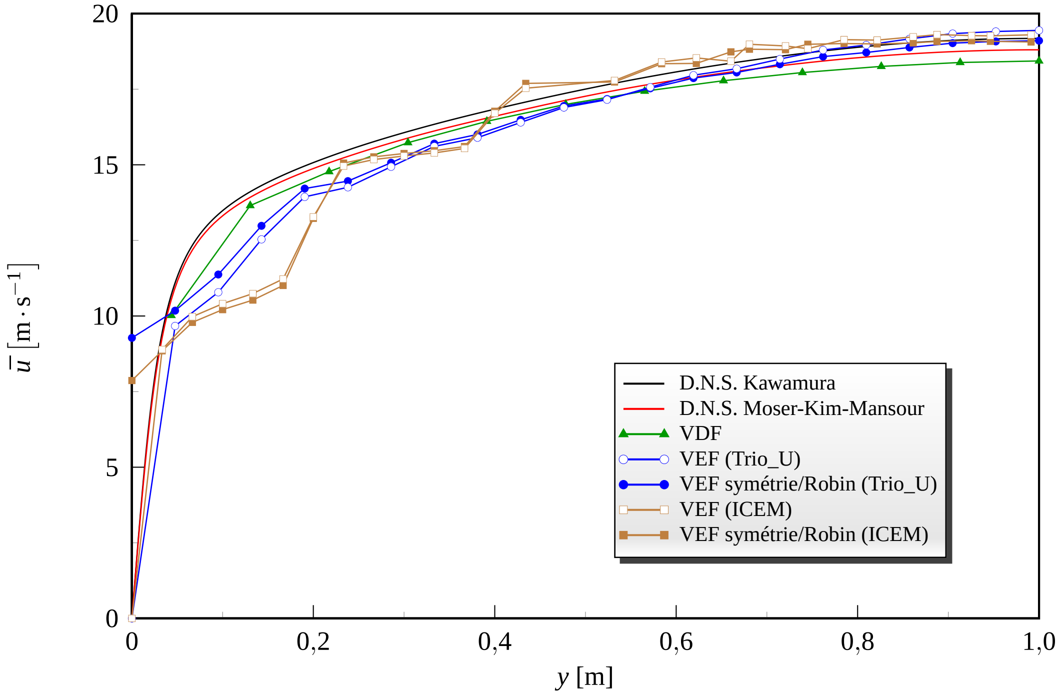


FIG. 9 – Composante selon la direction x du vecteur vitesse moyenné dans chaque plan xz d'altitude y_i, comparée aux D.N.S. [11] et [13].

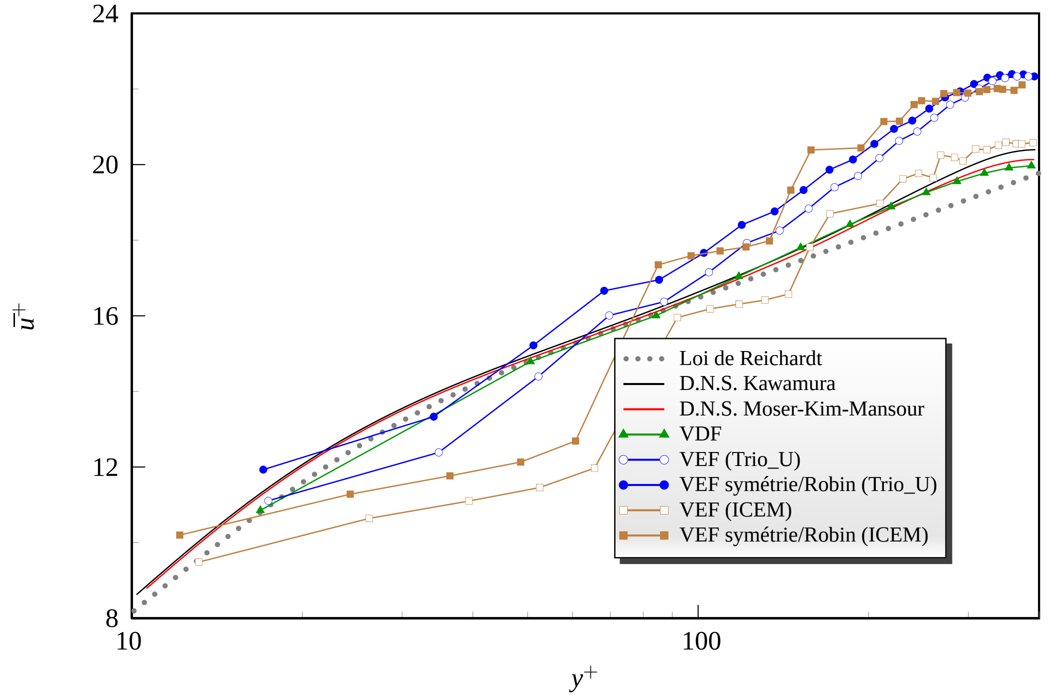


FIG. 10 – Composante selon la direction x du vecteur vitesse moyenné dans chaque plan xz d'altitude y_i et adimensionné, comparée aux D.N.S. [11] et [13] et à la loi de Reichardt (58).

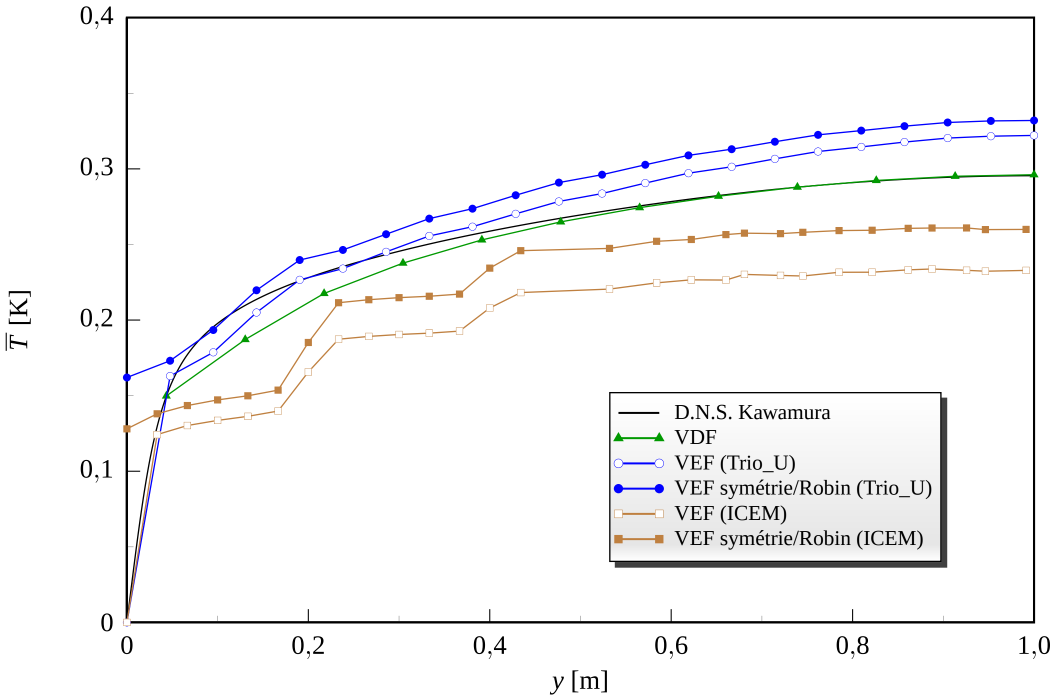


FIG. 11 – Température moyennée dans chaque plan xz d'altitude y_i, comparée aux résultats de la D.N.S. [11].

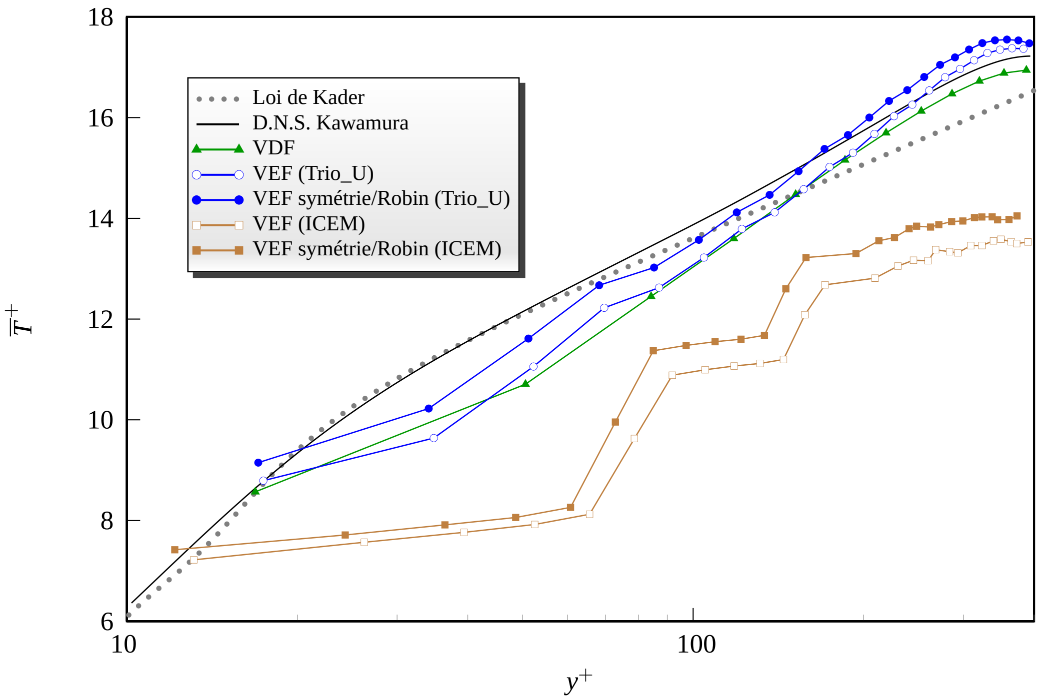


FIG. 12 – Température moyennée dans chaque plan xz d'altitude y_i et adimensionnée, comparée aux résultats de la D.N.S. [11].

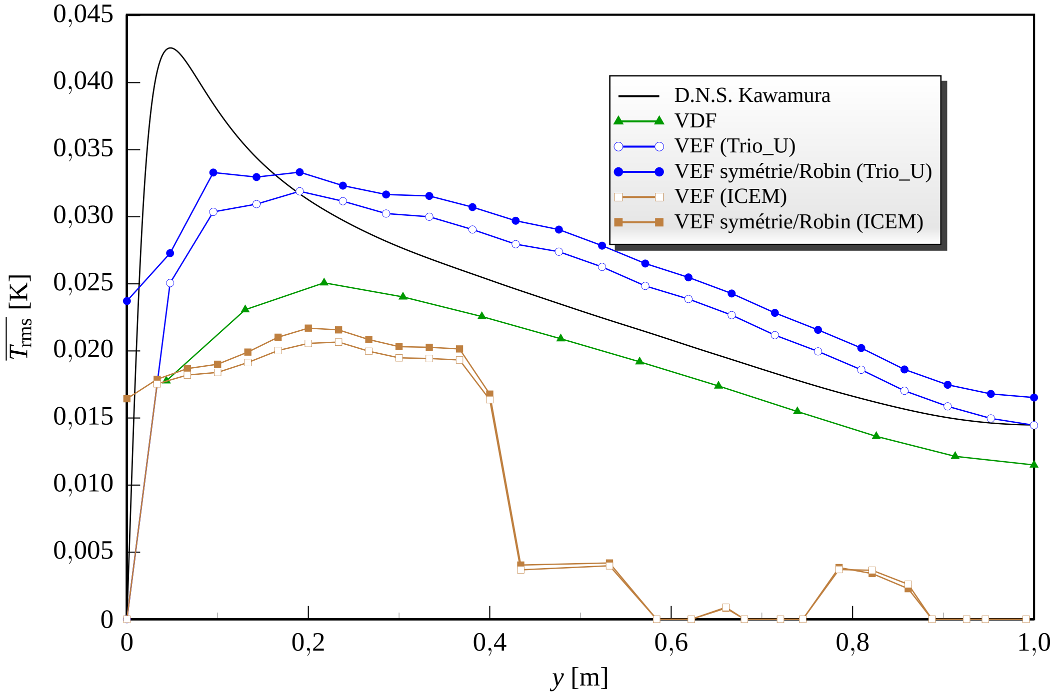


FIG. 13 – Écart-type moyenné dans chaque plan xz d'altitude y_i du champ de température, comparé aux résultats de la D.N.S. [11].

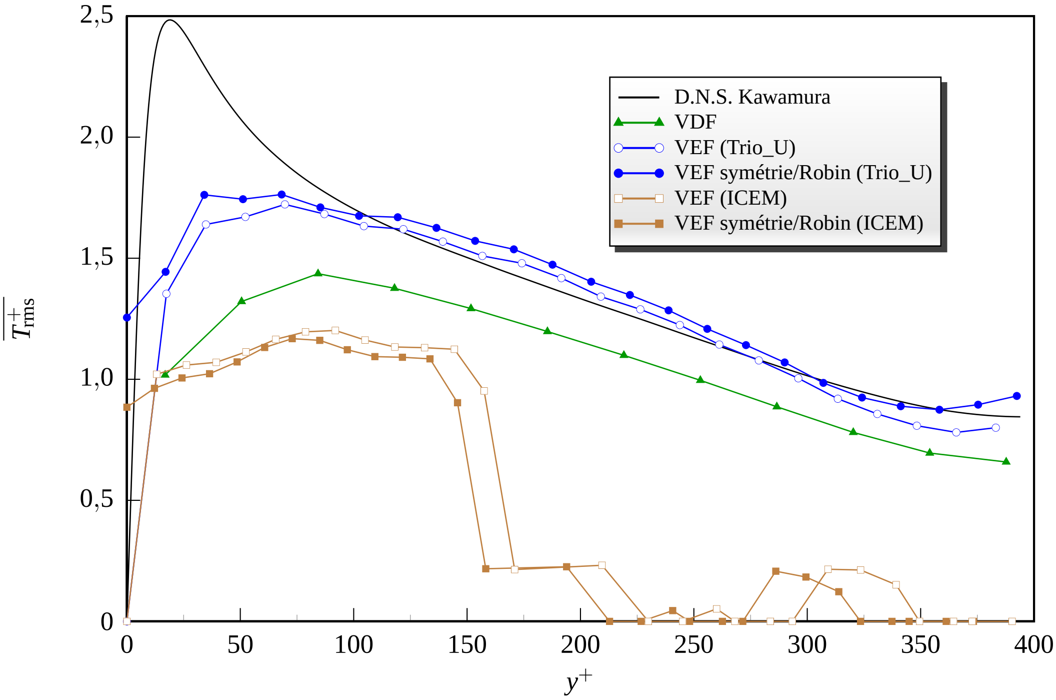


FIG. 14 – Écart-type moyenné dans chaque plan xz d'altitude y_i et adimensionné du champ de température, comparé aux résultats de la D.N.S. [11].

L'analyse de ces courbes amène aux commentaires suivants :

- le calcul ICEM, même s'il donne une meilleure vitesse de frottement, donne des profils assez médiocres en particulier en ce qui concerne les variables thermiques ;
- les calculs VEF avec maillage Trio_U donnent les meilleurs profils d'écart-type de température (en comparaison avec les données de D.N.S.), alors que pour les autres profils tracés, le calcul VDF est meilleur ;
- le calcul VEF avec maillage Trio_U utilisant la nouvelle stratégie améliore légèrement les profils par rapport la stratégie standard, en comparaison avec la D.N.S. de référence ;
- sur les **FIG. 9**, **11** et **13**, le premier point du calcul VEF utilisant la nouvelle stratégie (maillage Trio_U) n'est pas situé en zéro car il s'agit du point situé sur la frontière symétrique, dont la valeur varie librement (c'est une des caractéristiques de la nouvelle stratégie). On ne peut pas donner beaucoup de sens à sa valeur ;
- sur les **FIG. 10** et **12**, le premier point représenté de la simulation VEF utilisant la nouvelle stratégie (maillage Trio_U) est en réalité le second point calculé : il est donc normal qu'il ne soit pas situé sur la loi de Reichardt ni la loi de Kader [8].

Concernant la durée des simulations, elle augmente drastiquement avec le nombre de Reynolds de l'écoulement. Elle dépend également du nombre de Prandtl du fluide, et évidemment du temps final des calculs, choisi à partir de tests préalables sur la convergence temporelle (**TAB. 5**). Ainsi, réaliser des validations à des régimes hydrauliques supérieurs requiert beaucoup de temps.

Référence	Re_τ	Pr	Durée totale des calculs
[1]	180	0,025	13 heures 31 minutes
[2]	180	0,71	8 heures 15 minutes
[3]	395	0,71	2 jours 11 heures 59 minutes
[4]	590	–	3 jours 19 heures 31 minutes
[5]	640	0,71	17 jours 22 heures 7 minutes
[6]	640	0,025	12 jours 19 heures 50 minutes

TAB. 5 – Synthèse des temps de calcul de chaque fiche de validation.

6 CONCLUSION

Cette note a présenté une nouvelle stratégie d'utilisation des lois de parois dans les calculs turbulents avec Trio_U, et synthétisé différents cas de validation dans une configuration de canal plan simulé à l'aide d'une modélisation L.E.S.. Cette stratégie s'appuie sur deux points essentiels :

(i) la transformation des frontières de type paroi fixe en frontières de type symétrie ;

8. Le véritable premier point est localisé sur ces lois mais ne peut pas être repésenté sur ces graphiques en échelle logarithmique car situé en $y = 0$.

(ii) l'ajout dans les relations de bilan de quantité de mouvement et de bilan d'énergie des flux diffusifs « exacts » calculés à partir des lois de paroi.

Il ressort des tests de validation que cette nouvelle stratégie produit des résultats de qualité similaire à celle de l'approche utilisée jusqu'à présent, quoique légèrement dégradée, mais dans une proportion qui paraît acceptable. Néanmoins, il conviendrait de comprendre d'où provient cette légère altération. Or pour l'instant, nous ne sommes pas en mesure de donner une interprétation définitive de ce constat. Malgré tout, il est clair que l'absence de décalage du maillage introduit une légère erreur, comme le confirment les fiches de validation, dans lesquelles les calculs à maillage décalé fournissent des résultats analogues voire un peu meilleurs que les calculs utilisant l'ancienne approche (au moins en ce qui concerne la valeur de la vitesse de frottement calculée). Dans l'ensemble, la légitimité de la nouvelle stratégie semble cependant confirmée pour les simulations L.E.S. et dans une gamme de régimes assez larges, avec les légères réserves que nous venons de mentionner.

Les voies d'améliorations de ce travail concernent d'abord l'implémentation de la méthode :

- automatiser le terme source de Robin dès lors qu'une frontière de type `Paroi_decalee_Robin` est définie ;
- appliquer par défaut de $\delta = y_1$, ce qui évite notamment à l'utilisateur d'avoir à faire ce calcul ;
- compléter le post-traitement en thermique avec l'écriture dans le fichier `Nusselt.face` de la distance d_{equiv} et de la température T_τ.

Pour la validation, on peut envisager les points suivants :

- considérer d'autres régimes d'écoulement (Reynolds et Prandtl) ;
- considérer le cas de températures différentes imposées sur chaque plaque du canal (on se heurte cependant à l'absence de données de D.N.S. pour une telle configuration) ;
- investiguer l'existence d'un δ « optimal », c'est-à-dire pour lequel les résultats des calculs de validation seraient meilleurs qu'en prenant $\delta = y_1$. Cette recherche, qui devrait s'appuyer également sur des considérations analytiques, représente vraisemblablement un travail conséquent. Des premiers calculs réalisés dans ce sens semblent indiquer que la valeur de la vitesse de frottement calculée est beaucoup plus conforme à sa valeur théorique en prenant non pas $\delta = y_1$, mais $\delta = 3y_1/4$ (sans qu'on puisse pour l'instant apporter une justification à ce constat). Autrement dit, pour un tétraèdre ABCD dont ABC est une face de paroi (par exemple avec $y_A = y_B = y_C = 0$), prendre $\delta = y_D/4$ au lieu de $\delta = y_1 = y_D/3$ conduit à une meilleure précision de u_τ.

ANNEXE A : OBTENTION ANALYTIQUE DES LOIS DE PAROI

Les lois de paroi sont établies dans le cadre de la modélisation statistique, pour un écoulement au-dessus d'une paroi et un espace « infini » au-dessus de cette paroi. Les équations de Reynolds fermées avec un modèle de viscosité et de diffusivité turbulentes s'écrivent

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\langle\vec{u}\rangle}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\langle\vec{u}\rangle\otimes\langle\vec{u}\rangle) = -\dfrac{1}{\rho}\vec{\nabla}\langle p\rangle + \vec{\nabla}\cdot\left[(\nu+\nu_t)\vec{\nabla}\langle\vec{u}\rangle\right], & (50a)\\ \dfrac{\partial\langle T\rangle}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\langle\vec{u}\rangle\langle T\rangle) = \vec{\nabla}\cdot\left[(\alpha+\alpha_t)\vec{\nabla}\langle T\rangle\right]. & (50b)\end{cases}$$

On fait les hypothèses suivantes :

(i) le régime est « lisse » (pas d'influence des rugosités de la paroi) ;

(ii) l'écoulement moyen est 2D ;

(iii) le régime est stationnaire ;

(iv) la vitesse moyenne est dans la direction x :

$$\langle v\rangle = 0\,; \tag{51}$$

(v) les variations selon la direction x sont négligeables devant celles dans la direction y :

$$\frac{\partial}{\partial x} \ll \frac{\partial}{\partial y}\,; \tag{52}$$

(vi) l'écoulement est périodique selon x, ce qui se traduit par la nullité des termes convectifs.

Les équations de Reynolds deviennent donc :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dy}\left[(\nu+\nu_t)\dfrac{d\langle u\rangle}{dy}\right] = 0, & (53a)\\ \dfrac{d}{dy}\left[(\alpha+\alpha_t)\dfrac{d\langle T\rangle}{dy}\right] = 0. & (53b)\end{cases}$$

On a alors

$$\begin{cases} (\nu+\nu_t)\dfrac{d\langle u\rangle}{dy} = C_1, & (54a)\\ (\alpha+\alpha_t)\dfrac{d\langle T\rangle}{dy} = C_2. & (54b)\end{cases}$$

La viscosité et la diffusivité turbulentes dépendent de la distance y à la paroi. Pour poursuivre la résolution, il faut distinguer deux cas limites :

- En proche paroi, dans la sous-couche laminaire, la viscosité et la diffusion turbulentes sont négligeables devant respectivement la viscosité et la diffusion moléculaires, donc $\nu_t \ll \nu$ et $\alpha_t \ll \alpha = \frac{\nu}{\mathrm{Pr}}$. On évalue les relations (54a) et (54b) à la paroi :

$$\begin{cases} C_1 = \nu \left.\dfrac{d\langle u\rangle}{dy}\right|_{\mathrm{p}} = u_\tau^2, \\[2ex] C_2 = \alpha \left.\dfrac{d\langle T\rangle}{dy}\right|_{\mathrm{p}} = -\dfrac{\phi_p}{\rho C_p} = -u_\tau T_\tau. \end{cases} \tag{55}$$

  En adimensionnant et en utilisant $\langle u\rangle_p^+ = 0$ et $\langle T\rangle_p^+ = 0$, on aboutit à

$$\begin{cases} \langle u\rangle^+ = y^+, \\[1ex] \langle T\rangle^+ = \mathrm{Pr}\, y^+. \end{cases} \tag{56}$$

- Loin de la paroi, la viscosité et la diffusion turbulentes sont prépondérantes devant respectivement la viscosité et la diffusion moléculaires, donc $\nu \ll \nu_t \approx \kappa y u_\tau$ et $\alpha \ll \alpha_t = \frac{\nu_t}{\mathrm{Pr}_t} \approx \frac{\kappa y u_\tau}{\mathrm{Pr}_t}$. Après adimensionnement, on aboutit aux lois logarithmiques :

$$\begin{cases} \langle u\rangle^+ = \dfrac{1}{\kappa}\ln y^+ + B, \\[2ex] \langle T\rangle^+ = \dfrac{\mathrm{Pr}_t}{\kappa}\ln y^+ + \beta(\mathrm{Pr}), \end{cases} \tag{57}$$

  où la constante d'intégration pour la température est déterminée expérimentalement en fonction du nombre de Prandtl.

Dans la zone tampon coexistent le frottement visqueux et le frottement turbulent, ce qui oblige à modéliser ν_t par des lois plus complexes et rend délicate la résolution analytique. On utilise donc des lois semi-analytiques pour raccorder ces deux zones :

(i) la loi de Reichardt [9] pour l'hydraulique (**FIG. 15**) :

$$\langle u\rangle^+ = \frac{1}{\kappa}\ln(1+\kappa y^+) + A\left(1 - \mathrm{e}^{-y^+/11} - \frac{y^+}{11}\mathrm{e}^{-y^+/3}\right). \tag{58}$$

Les valeurs des constantes qui sont utilisées dans Trio_U sont classiquement les valeurs expérimentales $\kappa = 0{,}415$ et $A = B - \frac{1}{\kappa}\ln\kappa = 7{,}44$ mais on peut trouver des valeurs légèrement différentes dans la littérature ;

(ii) la loi de Kader [10] pour la thermique (**FIG. 15**) :

$$\langle T\rangle^+ = \mathrm{Pr}\, y^+ \mathrm{e}^{-\Gamma} + \left[2{,}12\ln(1+y^+) + \beta\right]\mathrm{e}^{-1/\Gamma}, \tag{59}$$

où

$$\left\{\begin{array}{lcl}\beta & = & \left(3{,}85\mathrm{Pr}^{1/3}-1{,}3\right)^2+2{,}12\ln(\mathrm{Pr}),\\ \Gamma & = & \dfrac{0{,}01(y^+\mathrm{Pr})^4}{1+5y^+\mathrm{Pr}^3}.\end{array}\right. \tag{60}$$

On remarquera que selon la loi de Kader, on a $\mathrm{Pr}_t \approx 0{,}88$.

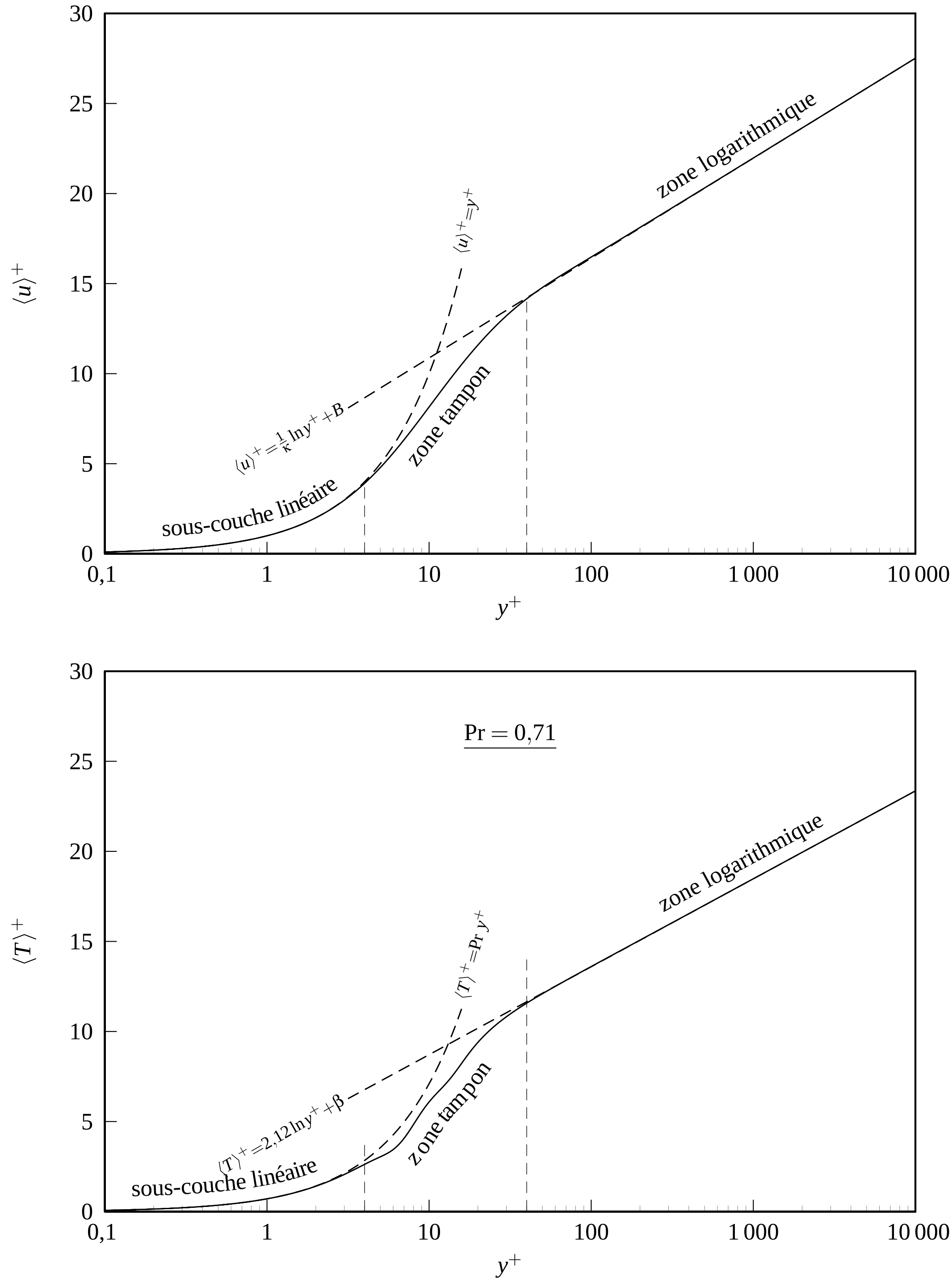


FIG. 15 – Tracés de la loi de Reichardt (58) (en haut) et de la loi de Kader (59) (en bas), qui permet de raccorder continûment la zone linéaire et la zone logarithmique. La zone tampon se situe approximativement dans l'intervalle $4 \lesssim y^+ \lesssim 40$.

ANNEXE B : RÉSOLUTION NUMÉRIQUE PAR POINT FIXE

Cette méthode de résolution n'est pas propre à la nouvelle stratégie de prise en compte des lois de paroi, mais nous la présentons dans cette annexe dans un souci d'exhaustivité. Prenons l'exemple de la loi de paroi logarithmique (bien qu'en réalité c'est la loi plus générale de Reichardt (58) qui est résolue par point fixe). Pour chaque maille de bord, on souhaite donc résoudre numériquement l'équation

$$\frac{u^{(n-1)}}{u_\tau^{(n)}} = \frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{y_1 u_\tau^{(n)}}{\nu}\right) + B, \tag{61}$$

d'inconnue $u_\tau^{(n)}$, où n est l'indice du temps courant. La vitesse au temps précédent $u^{(n-1)}$ est une donnée calculée par Trio_U. La résolution est effectuée par un processus itératif dont les étapes sont les suivantes :

(i) On choisit une valeur initiale $u_\tau^{(n,0)}$ de l'inconnue ;

(ii) Pour $k \geq 1$, on évalue l'inconnue comme

$$u_\tau^{(n,k)} = \frac{u^{(n-1)}}{\frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{y_1 u_\tau^{n,k-1}}{\nu}\right) + B}\ ; \tag{62}$$

On affecte alors à l'inconnue $u_\tau^{(n,k)}$ la valeur $\dfrac{u_\tau^{(n,k)} + u_\tau^{(n,k-1)}}{2}$;

(iii) On évalue l'écart relatif entre l'inconnue à l'itération courante et l'inconnue à l'itération précédente :

$$r^{(n,k)} = \left|\frac{u_\tau^{(n,k)} - u_\tau^{(n,k-1)}}{u_\tau^{(n,k)}}\right|. \tag{63}$$

En pratique, on stoppe le processus itératif dès que

$$\left\{\begin{array}{lcl} r^{(n,k)} & \leq & \varepsilon \\ k & \geq & N_{\max} \end{array}\right. \tag{64}$$

où ε et $N_{\max}$ sont des valeurs de consigne pour le seuil et le nombre d'itérations maximal autorisées [9], spécifiées en dur dans le code. Le nombre d'itérations effectuées est alors noté k_s. Ce processus est codée par la méthode `calculer_u_plus` du fichier `ParoiVEFhyd.cpp`. La convergence de la résolution par point fixe n'est pas assurée généralement : un message d'erreur s'affiche si le nombre d'itérations atteint $N_{\max}$ et le calcul s'arrête. En cas de non-convergence, on pourra s'interroger sur la grossièreté du maillage et éventuellement le raffiner. À titre illustratif, on trace les valeurs obtenues au cours du calcul [10] pour le seuil et le nombre d'itérations sur la **FIG. 16**.

9. En fait, la simulation numérique est stoppée et renvoie un message de non-convergence si le nombre d'itérations maximal est atteint.
10. Le calcul considéré est celui avec le maillage Trio_U et avec la nouvelle stratégie.

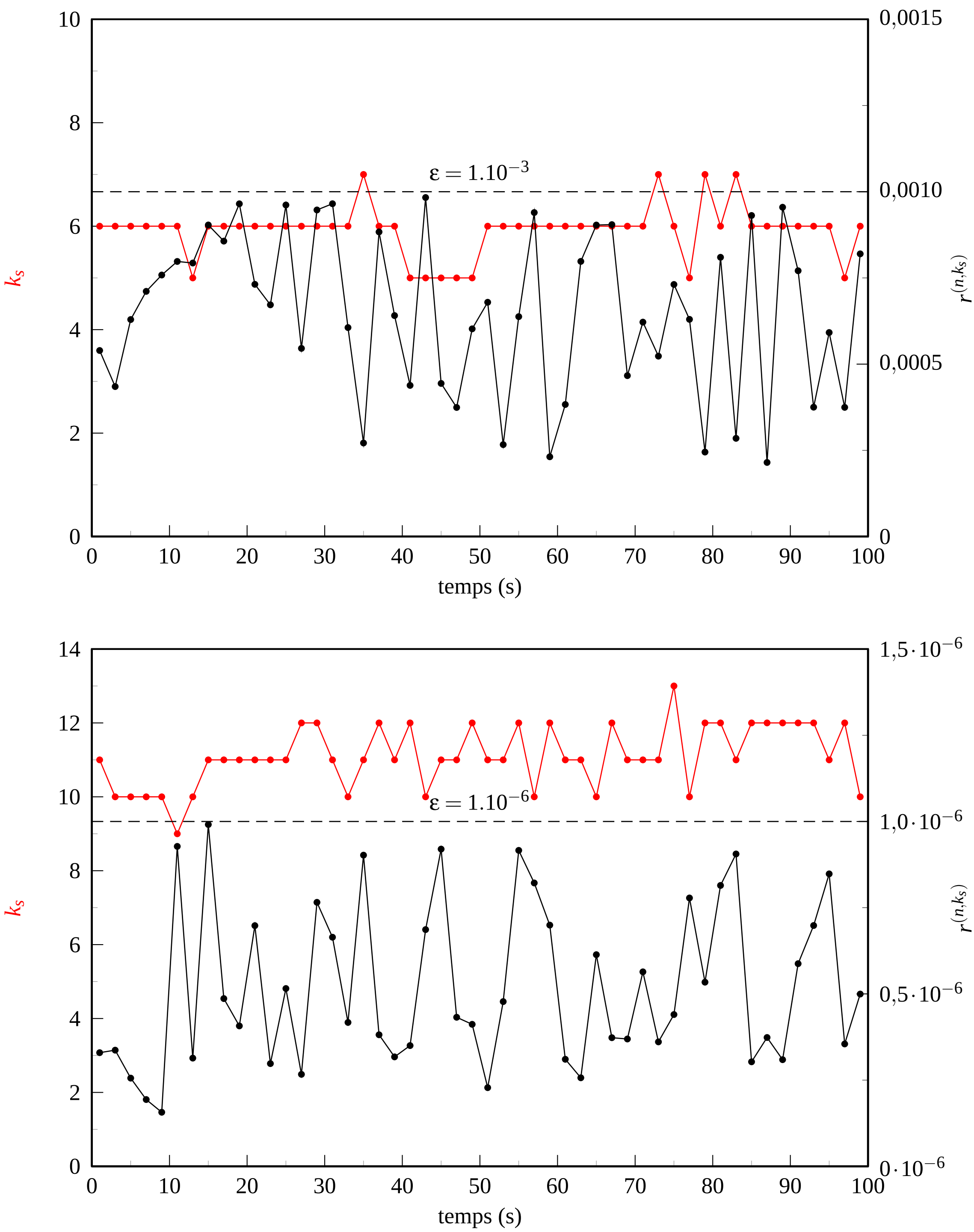


FIG. 16 – Évolution au cours du calcul, pour deux valeurs de seuil ($\varepsilon = 10^{-3}$ en haut et $\varepsilon = 10^{-6}$ en bas), du seuil atteint au terme du processus itératif et du nombre d'itérations effectuées pour l'atteindre (affichage de ces valeurs toutes les deux secondes simulées). Le nombre d'itérations nécessaire reste stable en moyenne au cours des cent premières secondes de la simulation.

ANNEXE C : FICHE DE VALIDATION

Dans cette annexe, on reproduit la fiche de validation [3] dans laquelle se trouvent les résultats complets des simulations à $Re_\tau = 395$ et $Pr = 0{,}71$. Cette fiche ne contient pas le calcul avec le maillage ICEM, mais un calcul avec un domaine tronqué d'une longueur δ en haut et en bas.

New wall law treatment for the Large Eddy Simulation of turbulent heat transfer in a periodic channel ($\mathrm{Re}_\tau = 395$ and $\mathrm{Pr} = 0.71$, T0Q case)

1 Introduction

Validation made by : Pierre-Emmanuel Angeli.
Report generated 23/10/2013.

1.1 Description

• Turbulent channel flow with T0Q type conditions.
• Validated model: Robin boundary condition at walls for L.E.S. with wall function in VEF discretization.
• Validation with analytical laws (Reichardt [1]: $U^+ = R(y^+)$, and Kader [2]: $T^+ = K(y^+)$), DNS Moser-Kim-Mansour [3] and DNS Kawamura [4].

1.2 Parameters Trio_U

- Version Trio_U : 1.6.7 ;
- Version Trio_U from out: /work/trioform/PEA/Baltik_Pironneau/basic_opt (1.6.7)
- Type of problem: thermal hydraulics ;
- Discretizations: `VDF` and `VEFPreP1B` ;
- Equations: `Navier_Stokes_turbulent` and `convection_diffusion_temperature_turbulent` ;
- Turbulence model: Large Eddy Simulation ;
- Modeling of sub-filter scales: `sous_maille_WALE` (Wall-Adapting Local Eddy-viscosity [5]) ;
- Wall functions: `loi_standard_hydr` (velocity) and `loi_standard_hydr_scalaire` (temperature) ;
- Type of boundary conditions: periodicity in x and z directions, wall for top/low boundaries ;
- Time schemes: `Runge_Kutta_ordre_3` with `facsec` = 1 ;
- Convection schemes: `centre` (velocity) and `QUICK` (temperature) for VDF simulations ; `EF_stab` for VEF simulations.

1.3 Test cases

- T0Q_VDF/Cas.data :
- T0Q_VEF/Cas.data : */*jdd en annexe*/*
- T0Q_VEF_Pironneau/Cas.data : */*jdd en annexe*/*
- T0Q_VEF_Pironneau_maillage_decale/Cas.data :

1.4 References :

- [1] J. O. Hinze, *Turbulence*, McGraw-Hill, New York, 1959.
- [2] B. A. Kader, *Temperature and concentration profiles in fully turbulent boundary layers*, International Journal of Heat and Mass Transfer, 24(9):1541-1544, 1981.
- [3] R. D. Moser, J. Kim and N. N. Mansour, `http://turbulence.ices.utexas.edu/data/MKM/chan395`.
- [4] H. Kawamura, `http://murasun.me.noda.tus.ac.jp/turbulence`.
- [5] F. Nicoud and F. Ducros, *Subgrid-scale stress modelling based on the square of the velocity gradient tensor*, Flow, Turbulence and Combustion, 62:183-200,1999.
- [6] B. Mohammadi, O. Pironneau, P. G. Ciarlet and J.-L. Lions, *Analysis of the K-Epsilon turbulence model*, John Wiley & Sons - Masson, 1994.
- [7] R. B. Dean, *Reynolds Number Dependence of Skin Friction and Other Bulk Flow Variables in Two-Dimensional Rectangular Duct Flow*, Journal of Fluids Engineering, 100:215-223, 1978.
- [8] P.-E. Angeli, *Simulation numérique de la turbulence dans Trio_U : nouvelle méthode de prise en compte des lois de paroi via une condition aux limites de symétrie et un terme source de type Robin*, CEA Technical note, DEN_DANS_DM2S_STMF_LMSF_NT_13-011A, 2013.

2 Theoretical features

See the technical note [8] for detailed explanations.

• *Standard wall treatment approach in Trio_U*:

The wall laws for velocity and temperature used in the code can be written as $u_\tau = f(u_\tau)$ and $T_\tau = f(T_\tau)$. At each time step, a fixed point resolution of these equations gives respectively the values of u_τ and T_τ. Hence the velocity gradient and the temperature gradient at the wall are deduced. These gradients are used respectively in the momentum and energy balances for wall elements, were they replace the calculated gradients which are wrong due to the low resolution of the grid.

• *New approach validated here*:

The methodology is briefly described in [6] and is here referred to as the *Pironneau* approach. The idea is that the fixed walls are replaced by symetries, so that the velocity and temperature gradients appearing in the momentum and energy balances are zero. Formally, the gradients calculated from the wall laws are added then to these balances, instead of replacing wrong values like in the standard approach. Let y_1 be the distance from the wall of the first calculation point. The wall law results actually in a Robin boundary condition under the form $\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_w = f[u(y_1)]$, which is implemented by a source term in the code. The same methodology is applied for temperature. More generally, the Robin condition can be evaluated at a distance δ from the wall: $\frac{\partial u}{\partial n}(\delta) = f[u(\delta)]$. Thus the user has to choose the value of δ, such that δ is located in the logarithmic layer. Here we choose $\delta = y_1$.

3 Tests description

The present calculations are L.E.S. of turbulence and heat transport in a 3D biperiodic channel flow with $Re_\tau = 395$ and $\mathrm{Pr} = 0.71$. Temperature is treated like a passive scalar. Uniformly zero temperature at both walls and uniform volumetric heat source Q = 1 W $\cdot$ m^{-3} on the whole channel are applied. The dimensions of the channel are: L$_x$ = 6.4 m , L$_y$ = 2h = 2 m, L$_z$ = 3.2 m.

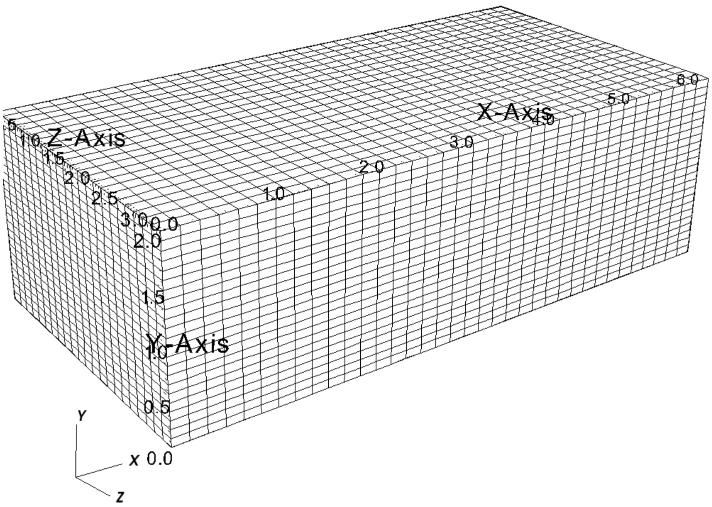
Two simulations using the standard methodology are first carried out (one using a VDF discretization and the other using a VEF discretization). Then two others simulations (in VEF) using the new approach are done. In the second one, the upper and lower walls of the channel are displaced from the distance δ toward the centerline of the channel, and a new mesh similar to the previous one is built.

3.1 VDF mesh

Number of nodes in each direction: N$_x$ = 37, N$_y$ = 24, N$_z$ = 23.

Total number of elements: (N$_x$-1)(N$_y$-1)(N$_z$-1) = 18216.

$$dx^+ = \frac{L_x}{N_x-1}\frac{\mathrm{Re}_\tau}{h} = 70 \; ; \; y^+ = \frac{L_y}{2(N_y-1)}\frac{\mathrm{Re}_\tau}{h} = 17 \; ; \; dz^+ = \frac{L_z}{N_z-1}\frac{\mathrm{Re}_\tau}{h} = 57.$$

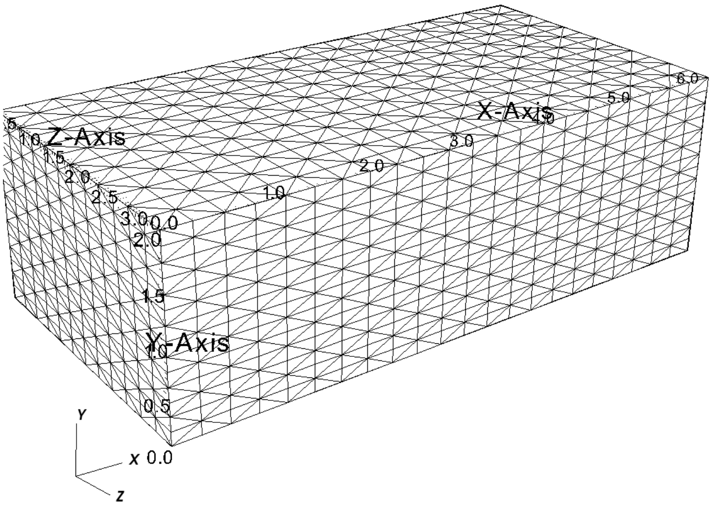


3.2 VEF mesh (entire channel)

Number of nodes in each direction: N$_x$ = 12, N$_y$ = 8, N$_z$ = 7.

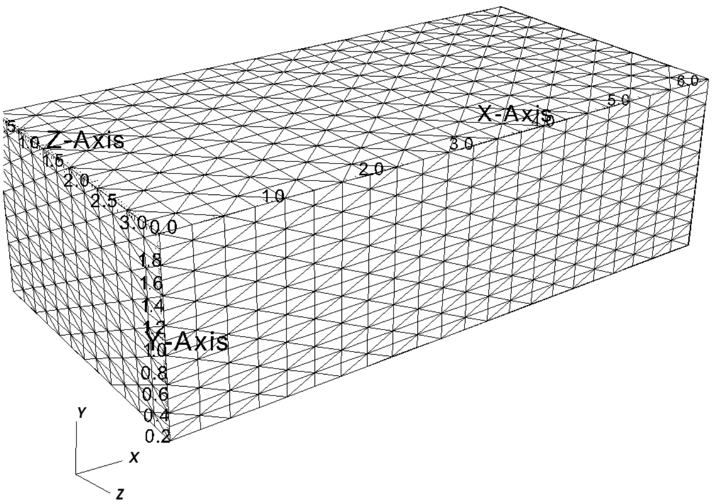
Total number of elements with `tetraedriser_homogene_fin`: 48(N$_x$-1)(N$_y$-1)(N$_z$-1) = 22176.

$$dx^+ = \frac{L_x}{3(N_x-1)}\frac{\mathrm{Re}_\tau}{h} = 77 \; ; \; y^+ = \frac{L_y}{6(N_y-1)}\frac{\mathrm{Re}_\tau}{h} = 19 \; ; \; dz^+ = \frac{L_z}{3(N_z-1)}\frac{\mathrm{Re}_\tau}{h} = 70.$$



3.3 VEF mesh (truncated channel)

Number of nodes in each direction: $N_x = 12$, $N_y = 8$, $N_z = 7$.
Total number of elements with `tetraedriser_homogene_fin`: $48(N_x\text{-}1)(N_y\text{-}1)(N_z\text{-}1) = 22176$.



3.4 Physical properties and dimensionless numbers

Physical properties:

- $\rho = 0.011928$ kg · m^{-3}
- $\mu = 2.84\text{e-}5$ kg · m^{-1} · s^{-1}
- $\lambda = 0.20772$ W · m^{-1} · K^{-1}
- $C_p = 5193$ J · kg^{-1} · K^{-1}

Dimensionless numbers:

- $\text{Re}_b = \dfrac{\rho U_b h}{\mu} = 6802$, where $U_b = \dfrac{2}{3}U_c$ and $U_c = 24.293$ m · s^{-1} (*cf.* initial condition)
- $\text{Pr} = \dfrac{\mu C_p}{\lambda} = 0.71$
- $\text{Pe} = \text{Re}_b \times \text{Pr} = 4829$
- $\text{Re}_\tau = 0.175\text{Re}_b^{7/8} = 395$ (Dean's correlation [7])

3.5 Initial and boundary conditions

Initial conditions:

- Velocity: parabolic mean profile for x-component
  `Champ_init_canal_sinal 3 { Ucent 24.293 h 1 ampli_sin 0 omega 1 ampli_bruit 0.5 }`
- Temperature: $T = 0$

Hydraulic boundary conditions:

- Inlet/outlet (x-direction): periodicity
- Front/back boundaries (z-direction): periodicity
- Top/low boundaries:
  - `paroi_fixe` for the Trio_U "standard" approach
  - `paroi_decalee_Robin { _delta_value_ }` for the "Pironneau" approach(*)

Fluid thermal boundary conditions:

- Inlet/outlet (x-direction): periodicity
- Front/back boundaries (z-direction): periodicity
- Top/low boundaries:
  - uniform temperature $T_0 = 0$ for the Trio_U "standard" approach
  - `paroi_decalee_Robin { _delta_value_ }` for the "Pironneau" approach(*)

Source terms in the "Pironneau" approach:

- Navier-Stokes:
  `source_Robin 2 Haut Bas`
- Convection diffusion:
  `source_Robin_scalaire 2 Haut 0 Bas 0`

(*) where `_delta_value_` is set according the recommandation of section 2 ($\delta = y_1$).

3.6 Numerical schemes

VDF discretization:

- Time scheme: third order Runge-Kutta method with `facsec`=1
- Convection: centered scheme for velocity and `QUICK` scheme for temperature

VEF discretization:

- Time scheme: third order Runge-Kutta method with `facsec`=1
- Convection schemes: `EF_stab` ($\alpha = 0.2$ for velocity and $\alpha = 1$ for temperature)

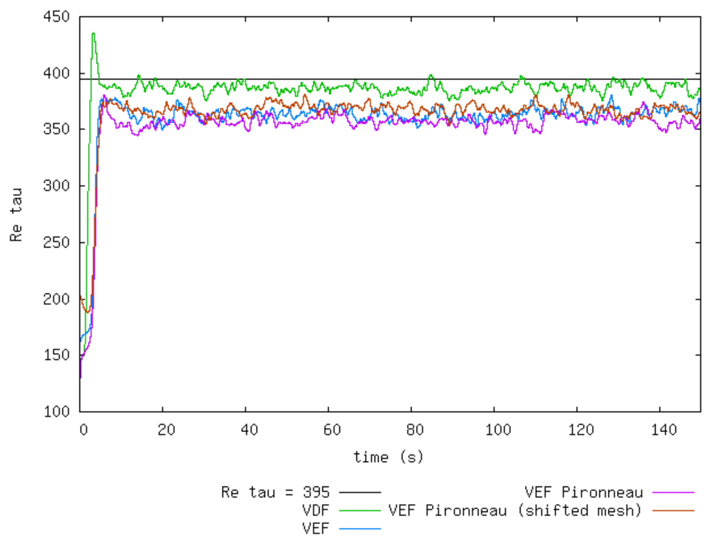
4 Friction velocity and friction Reynolds number calculated

4.1 Friction velocity u_τ

	time (s)	u_τ ($\mathrm{m \cdot s^{-1}}$)	Relative error (%)
Theoretical $^{(*)}$	-	0.94048	-
VDF	150	0.92315	1.84
VEF	150	0.87076	7.41
VEF Pironneau	150	0.85305	9.3
VEF Pironneau (shifted mesh)	150	0.87426	7.04

$^{(*)}$ according to Dean's correlation [7]: $\mathrm{Re}_\tau = 0.175\mathrm{Re}_b^{7/8}$, and using $\mathrm{Re}_\tau = \dfrac{\rho u_\tau h}{\mu}$.

4.2 Friction Reynolds Re_τ



5 Detailed results

In the next two sections, different time- and space-averaged profiles are plotted across the channel half-height: the components of velocity (u and w), the temperature (T), the components of the subscale stress tensors (T_{ij} and Q_i), the root mean square of temperature (T_{rms}), as well as the adimensional equivalent quantities.

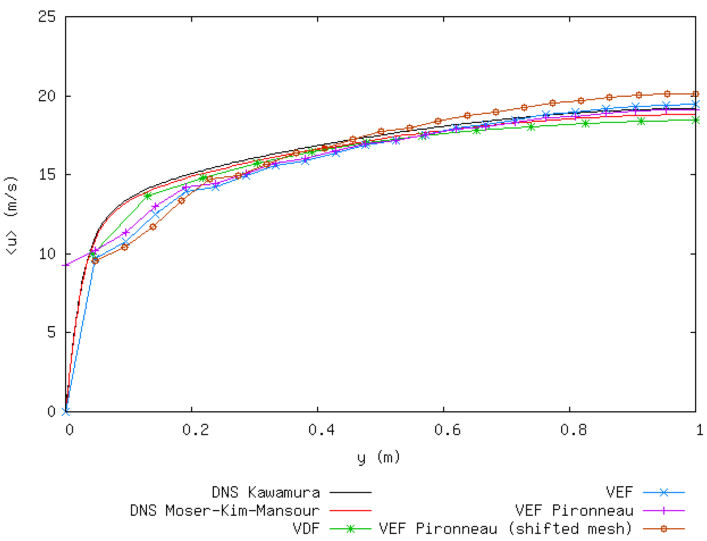
We compare the non-dimensional mean velocity profiles with the Reichardt's law [1]:

$U^+ = \frac{1}{\kappa}\ln(1+\kappa y^+) + A\left(1 - e^{-y^+/11} - \frac{y^+}{11}e^{-y^+/3}\right)$, were $\kappa = 0.415$ and $\mathrm{A} = 7.44$.

We compare the non-dimensional mean temperature profiles with the Kader's law [2]:

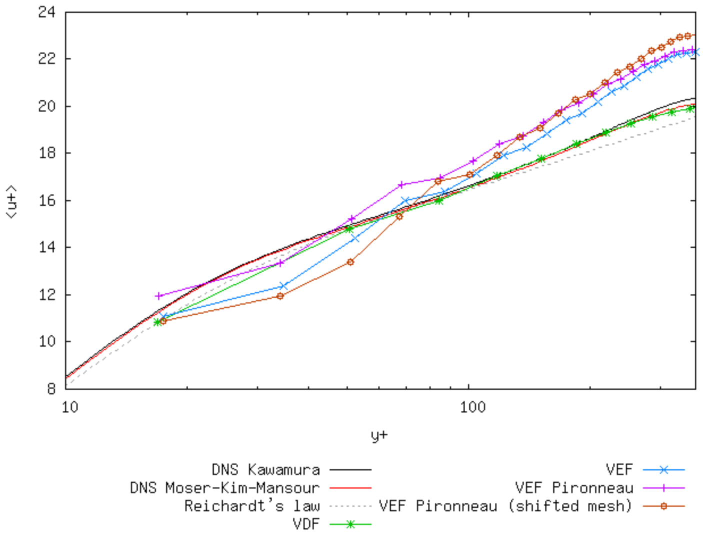
$T^+ = \mathrm{Pr}y^+e^{-\Gamma} + \left[2.12\,\ln(1+y^+) + \beta\right]e^{-1/\Gamma}$, were $\beta = \left(3.85\ \mathrm{Pr}^{1/3} - 1.3\right)^2 + 2.12\ln(\mathrm{Pr})$ and $\Gamma = \frac{0.01(y^+\mathrm{Pr})^4}{1+5y^+\mathrm{Pr}^3}$.

5.1 Mean x-velocity profile $< u >$

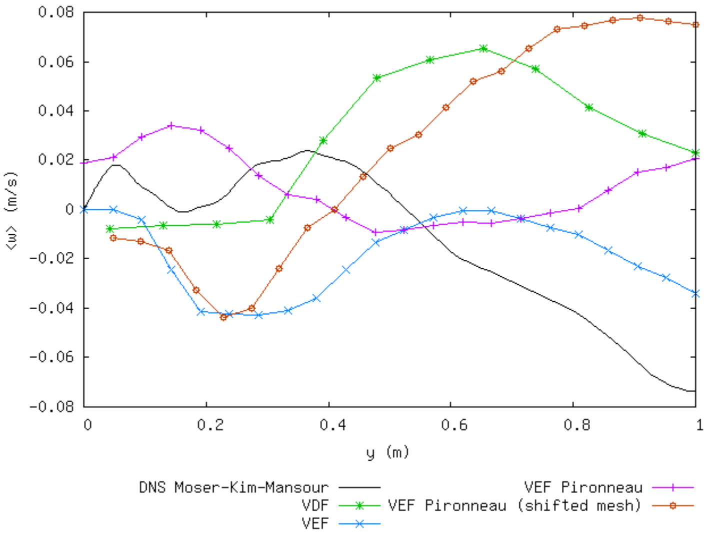


New wall law treatment for the Large Eddy Simulation of turbulent heat transfer in a periodic channel7 ($\mathrm{Re}_\tau = 395$ *and* $\mathrm{Pr} = 0.71$*, T0Q case)*

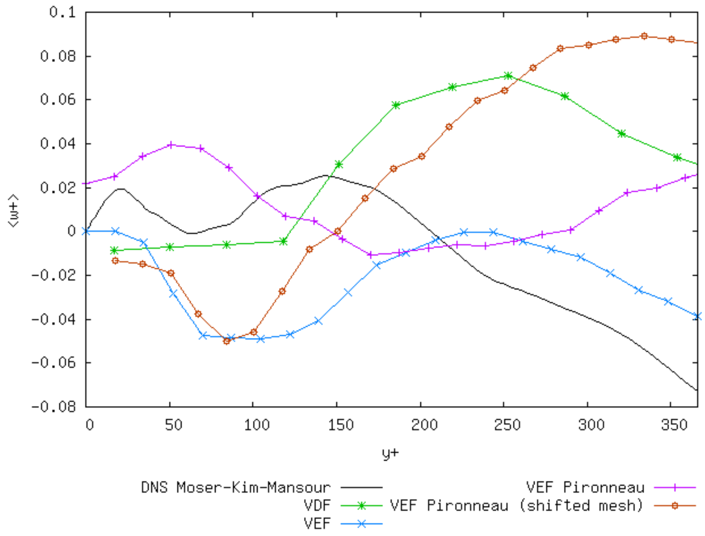
5.2 Non-dimensional mean x-velocity profile $< u^+ >$



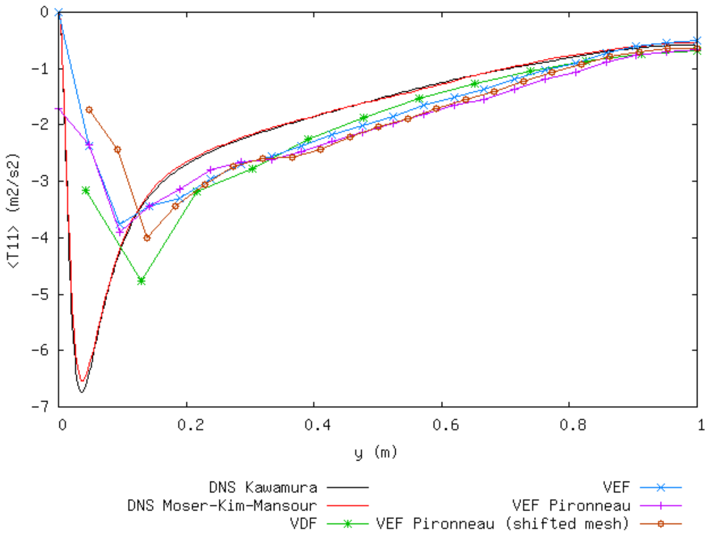
5.3 Mean z-velocity profile $< w >$



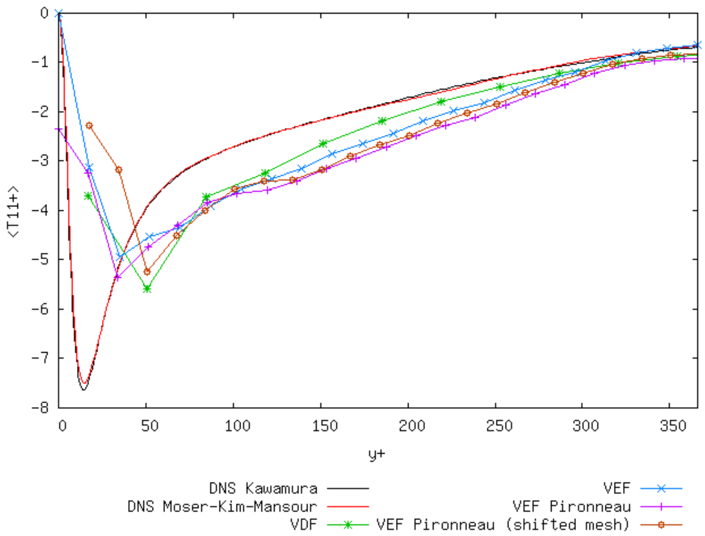
5.4 Non-dimensional mean z-velocity profile $< w^+ >$



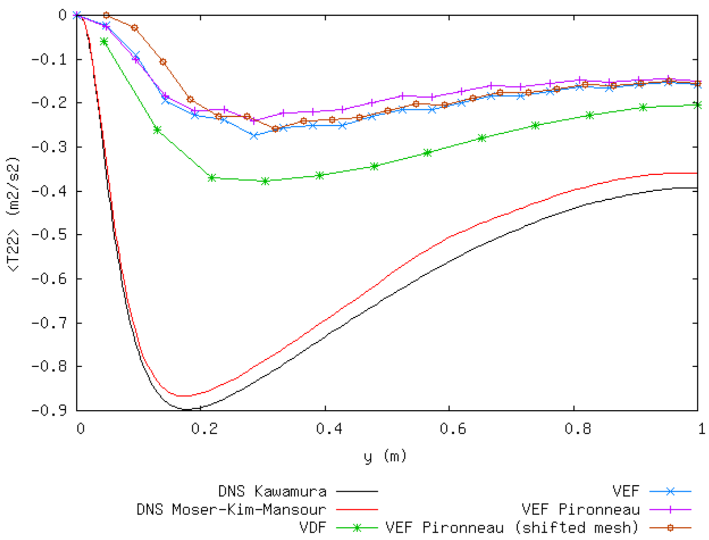
5.5 Mean xx-component of subgrid scale tensor $< T_{11} >$



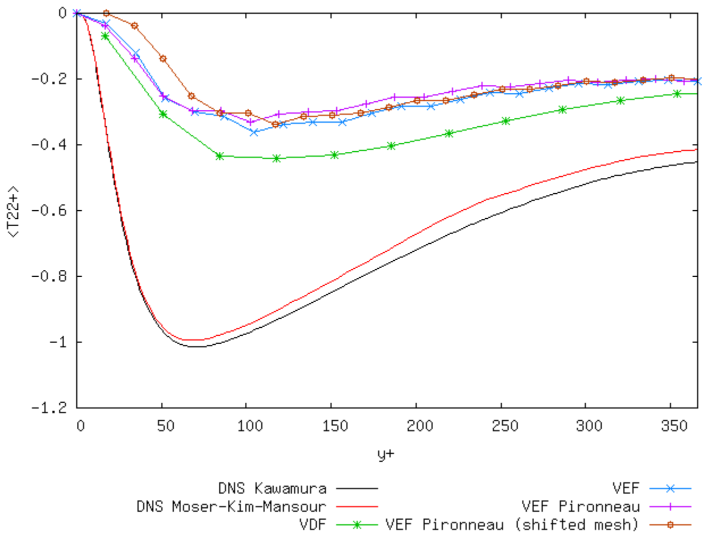
5.6 Non-dimensional mean xx-component of subgrid scale tensor $< T_{11}^{+} >$



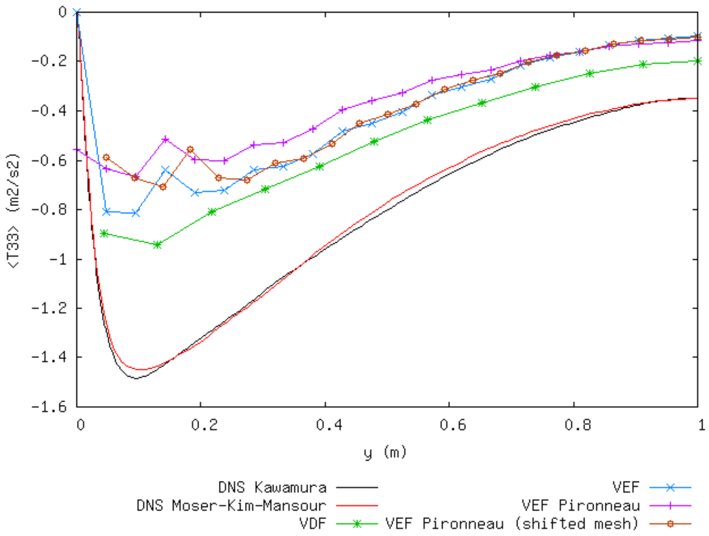
5.7 Mean yy-component of subgrid scale tensor $< T_{22} >$



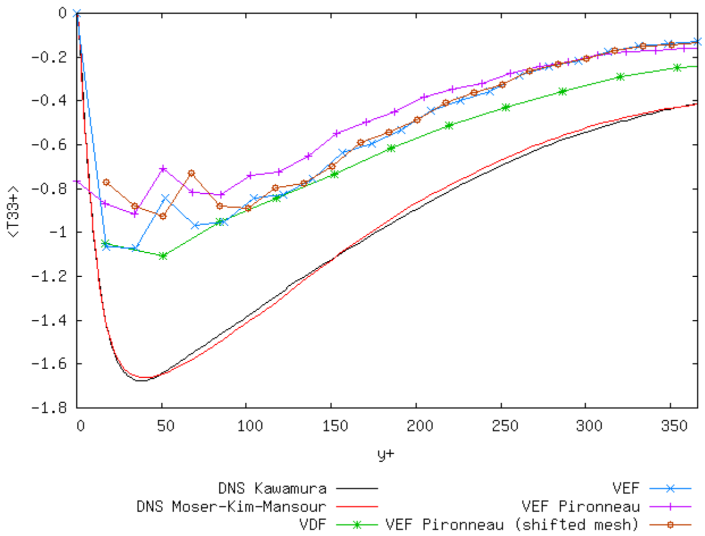
5.8 Non-dimensional mean yy-component of subgrid scale tensor $< T_{22}^{+} >$



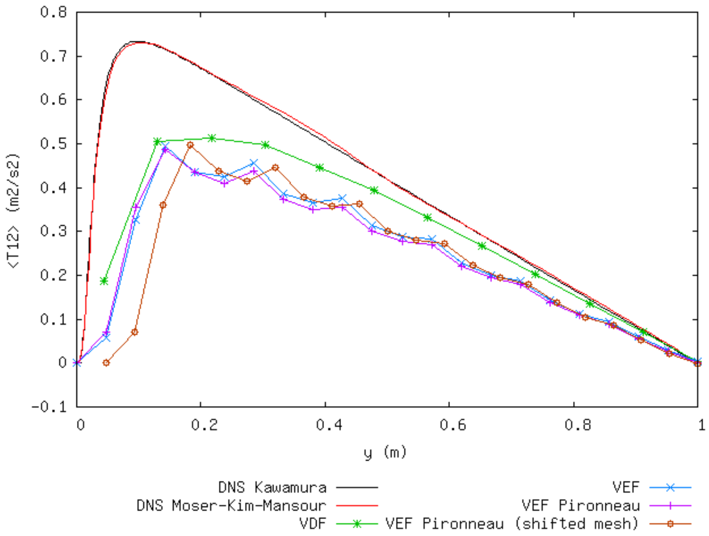
5.9 Mean zz-component of subgrid scale tensor $< T_{33} >$



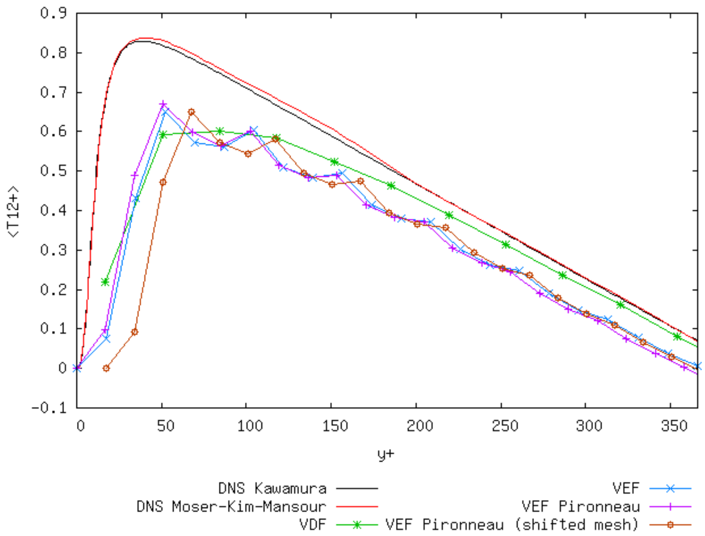
5.10 Non-dimensional mean zz-component of subgrid scale tensor $< T_{33}^{+} >$



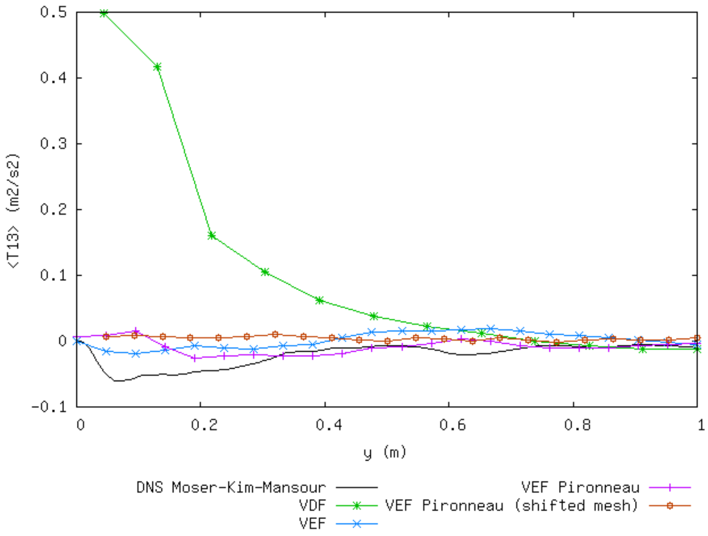
5.11 Mean xy-component of subgrid scale tensor $< T_{12} >$



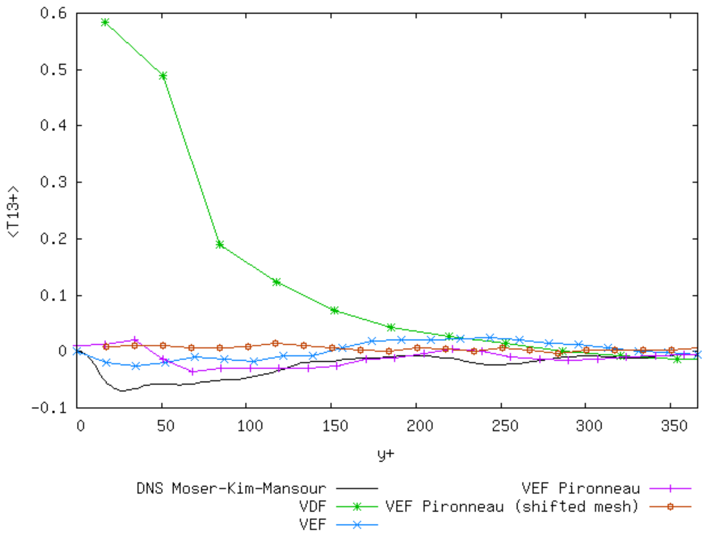
5.12 Non-dimensional mean xy-component of subgrid scale tensor $< T_{12}^{+} >$



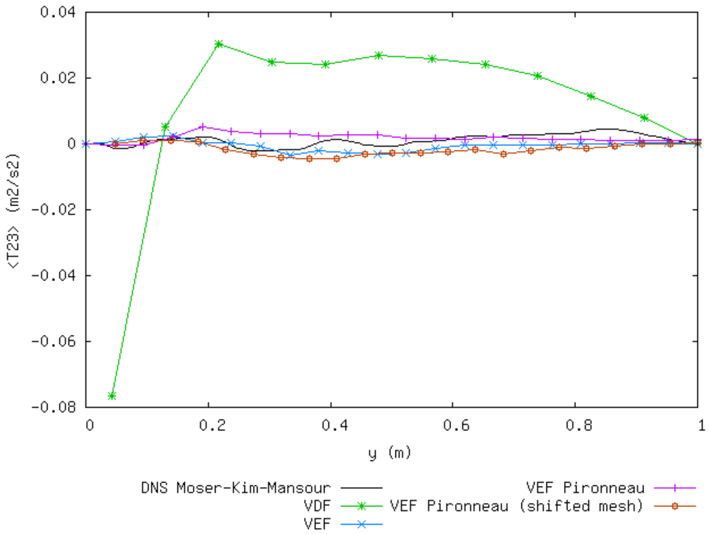
5.13 Mean xz-component of subgrid scale tensor $< T_{13} >$



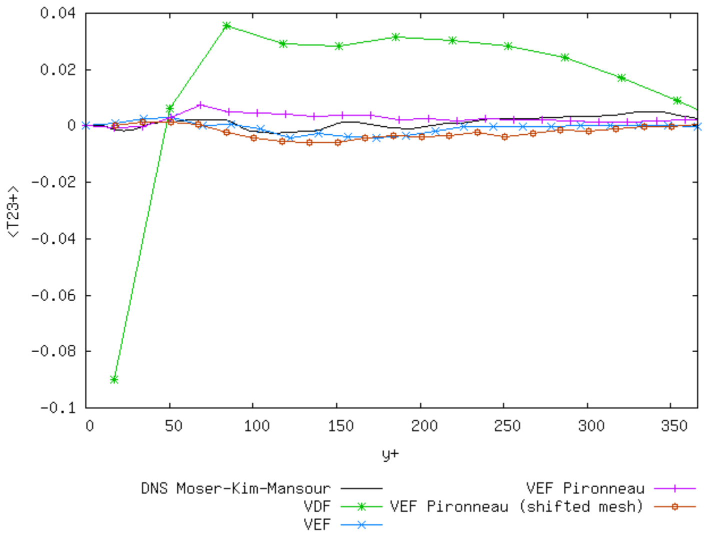
5.14 Non-dimensional mean xz-component of subgrid scale tensor $< T_{13}^{+} >$



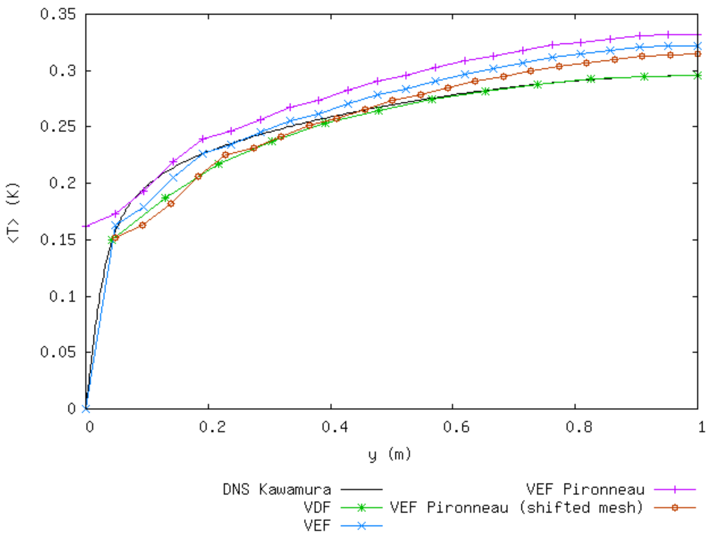
5.15 Mean yz-component of subgrid scale tensor $< T_{23} >$



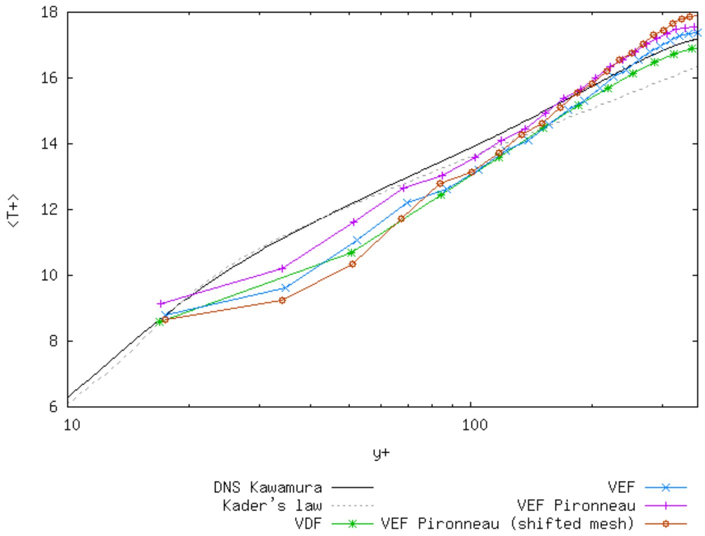
5.16 Non-dimensional mean yz-component of subgrid scale tensor $< T_{23}^{+} >$



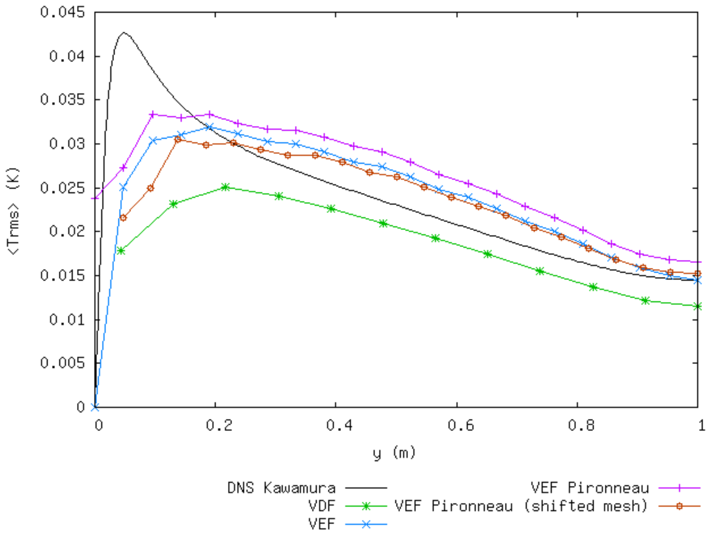
5.17 Mean temperature profile $< T >$



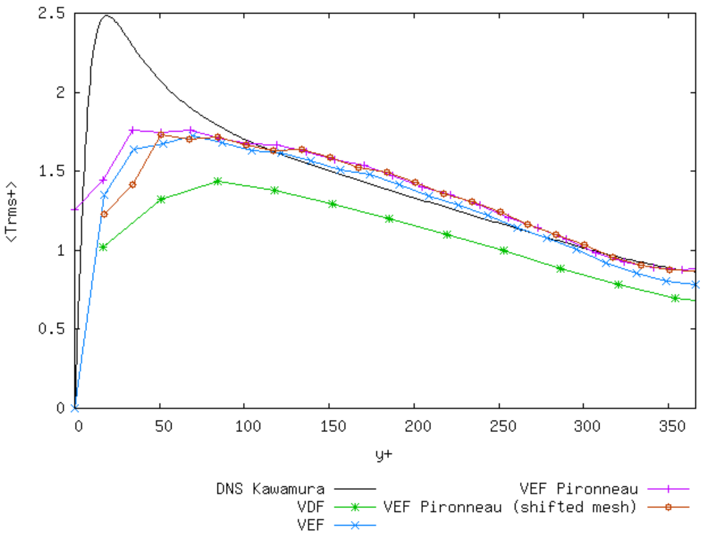
5.18 Non-dimensional mean temperature profile $< T^+ >$



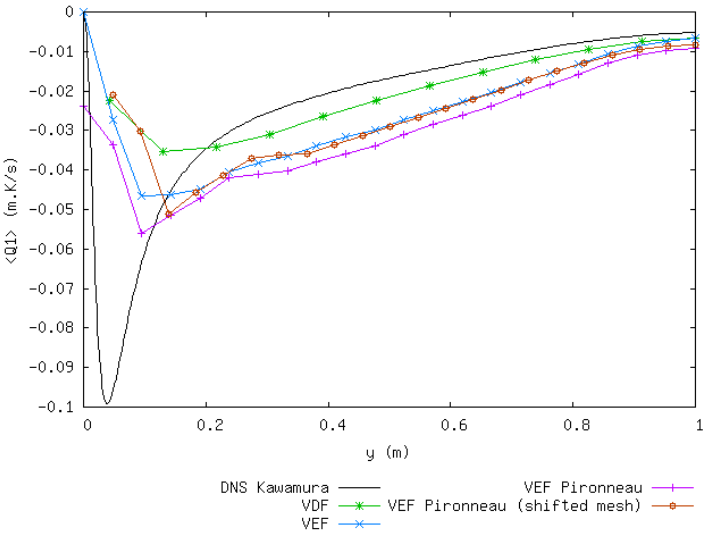
5.19 Quadratic mean of temperature $< T_{rms} >$



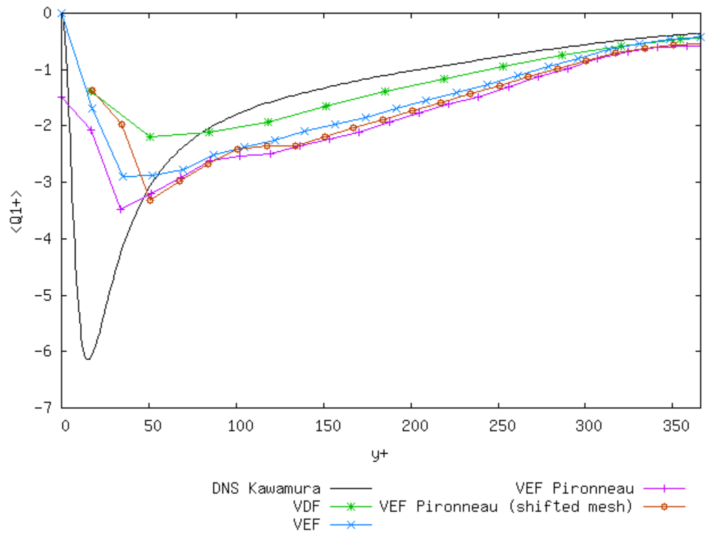
5.20 Non-dimensional quadratic mean of temperature $< T^{+}_{rms} >$



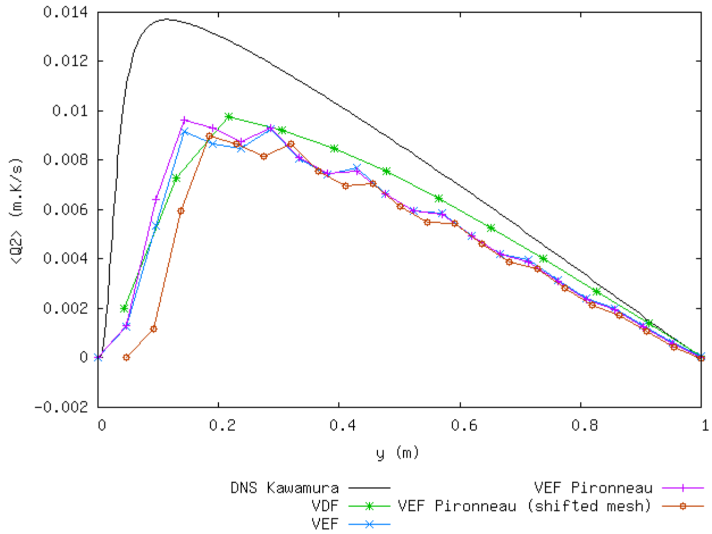
5.21 Streamwise turbulent heat flux $< Q_1 >$



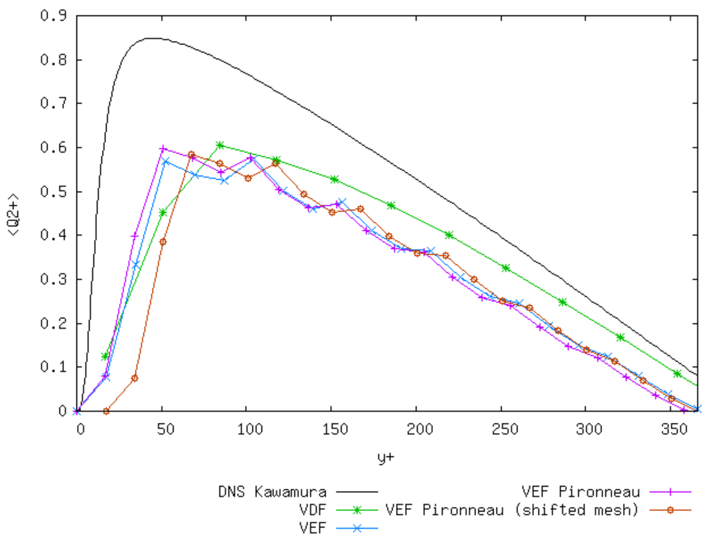
5.22 Non-dimensional streamwise turbulent heat flux $< Q_1^+ >$



5.23 Wall-normal turbulent heat flux $< Q_2 >$



5.24 Non-dimensional wall-normal turbulent heat flux $< Q_2^+ >$



6 Analysis of the results

- On the whole, the VDF simulation seems to give better results than the VEF simulations. The VEF simulations (standard and new approachs) are relatively similar.

- Friction velocity: the best friction velocity in the comparison with the theoretical value is obtained with the VDF simulation. The Pironneau simulations give similar relative errors than the standard approach, but the truncated channel is slightly better whereas the whole channel is not as good than the non-Pironneau simulation.

- Velocity: for the non-dimensional mean x-velocity profile $< u >$, the first calculation points for all simulations are located on the Reichardt's law as expected, except for the VEF Pironneau. In this case, the real first point is not represented on the logarithmic graph because it corresponds to $y = 0$. Thus the first represented point of the VEF Pironneau profile (in fact the second calculated point) has no reason to satisfy the Reichardt's law.

- Temperature: the analysis is the same as for velocity.

- Subscale stress tensor components $< T_{ij} >$: the tendancies are in correct agreement with the DNS results of Kawamura and Moser-Kim-Mansour, except the VDF simulation which gives bad results on particular components.

- Subscale stress tensor components $< Q_i >$: all the simulations are in relatively good agreement with the DNS results of Kawamura.

7 Computer performance

	host	system	Total CPU Time	CPU time/step	number of cell
T0Q_VDF/Cas	vonnes	Linux	3619.63	0.138008	18216
T0Q_VEF/Cas	vonnes	Linux	77931.3	0.729248	22176
T0Q_VEF_Pironneau/Cas	vonnes	Linux	70839.5	0.685203	22176
T0Q_VEF_Pironneau_maillage_decale/Cas	vonnes	Linux	63576	0.575202	22176
Total			215966		

8 Data Files

8.1 Cas

```
Dimension 3
Pb_Thermohydraulique_Turbulent pb
Domaine dom
Mailler dom
{
  Pave Cavite
  {
    Origine 0 0 0
    Nombre_de_Noeuds 12 8 7
    Longueurs 6.4 2 3.2
    Facteurs 1 1 1
  }
  {
    Bord PerioX X = 0    0 <= Y <= 2 0 <= Z <= 3.2
    Bord PerioX X = 6.4    0 <= Y <= 2 0 <= Z <= 3.2
    Bord PerioZ Z = 0    0 <= X <= 6.4      0 <= Y <= 2
    Bord PerioZ Z = 3.2    0 <= X <= 6.4      0 <= Y <= 2
    Bord Bas  Y = 0 0 <= X <= 6.4      0 <= Z <= 3.2
    Bord Haut Y = 2 0 <= X <= 6.4      0 <= Z <= 3.2
  }
}
Tetraedriser_homogene_fin dom
Reordonner_faces_periodiques dom PerioX
Reordonner_faces_periodiques dom PerioZ
VEFPreP1b dis
Runge_Kutta_ordre_3 sch_RK3
Lire sch_RK3
{
  tinit 0
  tmax 150
  dt_start dt_calc
  dt_min 1e-7
  dt_max 1
  dt_impr 1
  dt_sauv 100
  seuil_statio 1e-15
  facsec 1
  no_check_disk_space
  periode_sauvegarde_securite_en_heures 11
}
Fluide_incompressible air
Lire air
{
  mu  champ_uniforme 1 2.84e-5
  rho champ_uniforme 1 0.011928
  lambda  champ_uniforme 1 0.20772
  Cp  champ_uniforme 1 5193
  beta_th champ_uniforme 1 1.9954e-3
}
Champ_uniforme gravite
```

8 DATA FILES
8.1 Cas

```
Lire gravite 3 0 0 0
Associer air gravite
Associer pb dom
Associer pb sch_RK3
Associer pb air
Discretiser pb dis
Lire pb
{
  Navier_Stokes_turbulent
  {
    Solveur_pression  petsc Cholesky { }
    Convection    { EF_stab { volumes_etendus alpha 0.2 } }
    Diffusion   { }
    Conditions_initiales  { vitesse champ_init_canal_sinal 3 { Ucent 24.293 h 1 ampli_sin 0 ome
    Conditions_limites  {
          PerioX  periodique
          PerioZ  periodique
          Haut  paroi_fixe
          Bas paroi_fixe
          }
    Modele_turbulence sous_maille_WALE
          {
          turbulence_paroi loi_standard_hydr
          dt_impr_ustar 5
          }
    Traitement_particulier  {
          canal {
            dt_impr_moy_spat 50
            dt_impr_moy_temp 50
            debut_stat 100
            }
          }
    Sources     { canal_perio { direction_ecoulement 0 } }
  }
  Convection_diffusion_temperature_turbulent
  {
    Convection    { EF_stab { volumes_etendus alpha 1 } }
    Diffusion   { }
    Conditions_initiales  { temperature champ_fonc_xyz dom 1 0 }
    Conditions_limites  {
          PerioX  periodique
          PerioZ  periodique
          Haut  paroi_temperature_imposee champ_front_uniforme 1 0
          Bas paroi_temperature_imposee champ_front_uniforme 1 0
          }
    Modele_turbulence Prandtl
          {
          turbulence_paroi loi_standard_hydr_scalaire
          dt_impr_nusselt 5
          }
    Sources     { puissance_thermique champ_uniforme 1 1 }
  }
  Postraitement
  {
```

```
  Definition_champs    {
          moyenne_vitesse    Moyenne { t_deb 100 t_fin 150 source refChamp { Pb_champ pb vitesse
          moyenne_temperature Moyenne { t_deb 100 t_fin 150 source refChamp { Pb_champ pb temp
          ecart_type_vitesse  Ecart_type { t_deb 100 t_fin 150 source refChamp { Pb_champ pb vi
          ecart_type_temperature  Ecart_type { t_deb 100 t_fin 150 source refChamp { Pb_champ p
          min_temperature   Reduction_0D { methode min source refChamp { Pb_champ pb temperatur
          max_temperature   Reduction_0D { methode max source refChamp { Pb_champ pb temperatur
          }
    Sondes       {
          sonde_vitesse      nodes vitesse      periode 0.1 points 1 3.2 1 1.6
          sonde_temperature    nodes temperature    periode 0.1 points 1 3.2 1 1.6
          sonde_moyenne_vitesse    nodes moyenne_vitesse    periode 0.1 points 1 3.2 1 1.6
          sonde_moyenne_temperature nodes moyenne_temperature periode 0.1 points 1 3.2 1 1.6
          sonde_ecart_type_vitesse  nodes ecart_type_vitesse  periode 0.1 points 1 3.2 1 1.6
          sonde_ecart_type_temperature  nodes ecart_type_temperature  periode 0.1 points 1 3.2
          coupe_vitesse      nodes vitesse      periode 1 segment 15 0.096970 0 0.088889  0.09697
          coupe_temperature    nodes temperature    periode 1 segment 15 0.096970 0 0.088889  0.0
          coupe_moyenne_vitesse    nodes moyenne_vitesse    periode 1 segment 15 0.096970 0 0.088
          coupe_moyenne_temperature nodes moyenne_temperature periode 1 segment 15 0.096970 0 0
          coupe_ecart_type_vitesse  nodes ecart_type_vitesse  periode 1 segment 15 0.096970 0 0
          coupe_ecart_type_temperature  nodes ecart_type_temperature  periode 1 segment 15 0.09
          }
    Format lata_v2
    Champs dt_post 50 {
          vitesse som
          temperature som
          min_temperature som
          max_temperature som
          }
    Statistiques dt_post 50
          {
          t_deb 100 t_fin 150
          moyenne vitesse
          moyenne temperature
          ecart_type vitesse
          ecart_type temperature
          }
  }
  sauvegarde formatte pb.sauv
}
Resoudre pb
Fin
```

8.2 Cas

```
Dimension 3
Pb_Thermohydraulique_Turbulent pb
Domaine dom
Mailler dom
{
  Pave Cavite
  {
    Origine 0 0 0
    Nombre_de_Noeuds 12 8 7
```

```
    Longueurs 6.4 2 3.2
    Facteurs 1 1 1
  }
  {
    Bord PerioX X = 0    0 <= Y <= 2 0 <= Z <= 3.2
    Bord PerioX X = 6.4    0 <= Y <= 2 0 <= Z <= 3.2
    Bord PerioZ Z = 0    0 <= X <= 6.4      0 <= Y <= 2
    Bord PerioZ Z = 3.2    0 <= X <= 6.4      0 <= Y <= 2
    Bord Bas  Y = 0 0 <= X <= 6.4      0 <= Z <= 3.2
    Bord Haut Y = 2 0 <= X <= 6.4      0 <= Z <= 3.2
  }
}
Tetraedriser_homogene_fin dom
Reordonner_faces_periodiques dom PerioX
Reordonner_faces_periodiques dom PerioZ
VEFPreP1b dis
Runge_Kutta_ordre_3 sch_RK3
Lire sch_RK3
{
  tinit 0
  tmax 150
  dt_start dt_calc
  dt_min 1e-7
  dt_max 1
  dt_impr 1
  dt_sauv 100
  seuil_statio 1e-15
  facsec 1
  no_check_disk_space
  periode_sauvegarde_securite_en_heures 11
}
Fluide_incompressible air
Lire air
{
  mu  champ_uniforme 1 2.84e-5
  rho champ_uniforme 1 0.011928
  lambda  champ_uniforme 1 0.20772
  Cp  champ_uniforme 1 5193
  beta_th champ_uniforme 1 1.9954e-3
}
Champ_uniforme gravite
Lire gravite 3 0 0 0
Associer air gravite
Associer pb dom
Associer pb sch_RK3
Associer pb air
Discretiser pb dis
Lire pb
{
  Navier_Stokes_turbulent
  {
    Solveur_pression  petsc Cholesky { }
    Convection   { EF_stab { volumes_etendus alpha 0.2 } }
    Diffusion   { }
```

```
    Conditions_initiales  { vitesse champ_init_canal_sinal 3 { Ucent 24.293 h 1 ampli_sin 0 ome
    Conditions_limites  {
          PerioX  periodique
          PerioZ  periodique
          Haut  paroi_decalee_Robin { delta 0.047619 }
          Bas paroi_decalee_Robin { delta 0.047619 }
          }
    Modele_turbulence sous_maille_WALE
          {
          turbulence_paroi loi_standard_hydr
          dt_impr_ustar 5
          }
    Traitement_particulier  {
          canal {
            dt_impr_moy_spat 50
            dt_impr_moy_temp 50
            debut_stat 100
            }
          }
    Sources     { canal_perio { direction_ecoulement 0 } }
    Sources     { source_Robin 2 Haut Bas 0.001 }
  }
  Convection_diffusion_temperature_turbulent
  {
    Convection     { EF_stab { volumes_etendus alpha 1 } }
    Diffusion    { }
    Conditions_initiales  { temperature champ_fonc_xyz dom 1 0 }
    Conditions_limites  {
          PerioX  periodique
          PerioZ  periodique
          Haut  paroi_decalee_Robin { delta 0.047619 }
          Bas paroi_decalee_Robin { delta 0.047619 }
          }
    Modele_turbulence Prandtl
          {
          turbulence_paroi loi_standard_hydr_scalaire
          dt_impr_nusselt 5
          }
    Sources     { puissance_thermique champ_uniforme 1 1 }
    Sources     { source_Robin_scalaire 2 Haut 0 Bas 0 0.001 }
  }
  Postraitement
  {
  Definition_champs   {
          moyenne_vitesse   Moyenne { t_deb 100 t_fin 150 source refChamp { Pb_champ pb vitesse
          moyenne_temperature Moyenne { t_deb 100 t_fin 150 source refChamp { Pb_champ pb temp
          ecart_type_vitesse  Ecart_type { t_deb 100 t_fin 150 source refChamp { Pb_champ pb vi
          ecart_type_temperature  Ecart_type { t_deb 100 t_fin 150 source refChamp { Pb_champ p
          min_temperature   Reduction_0D { methode min source refChamp { Pb_champ pb temperatu
          max_temperature   Reduction_0D { methode max source refChamp { Pb_champ pb temperatu
          }
    Sondes      {
          sonde_vitesse      nodes vitesse      periode 0.1 points 1 3.2 1 1.6
          sonde_temperature    nodes temperature    periode 0.1 points 1 3.2 1 1.6
```

```
                sonde_moyenne_vitesse    nodes moyenne_vitesse    periode 0.1 points 1 3.2 1 1.6
                sonde_moyenne_temperature nodes moyenne_temperature periode 0.1 points 1 3.2 1 1.6
                sonde_ecart_type_vitesse  nodes ecart_type_vitesse  periode 0.1 points 1 3.2 1 1.6
                sonde_ecart_type_temperature  nodes ecart_type_temperature  periode 0.1 points 1 3.2
                coupe_vitesse      nodes vitesse      periode 1 segment 15 0.096970 0 0.088889  0.09697
                coupe_temperature   nodes temperature    periode 1 segment 15 0.096970 0 0.088889  0.0
                coupe_moyenne_vitesse    nodes moyenne_vitesse    periode 1 segment 15 0.096970 0 0.088
                coupe_moyenne_temperature nodes moyenne_temperature periode 1 segment 15 0.096970 0 0
                coupe_ecart_type_vitesse  nodes ecart_type_vitesse  periode 1 segment 15 0.096970 0 0
                coupe_ecart_type_temperature  nodes ecart_type_temperature  periode 1 segment 15 0.09
                }
      Format lata_v2
      Champs dt_post 50 {
                vitesse som
                temperature som
                min_temperature som
                max_temperature som
                }
      Statistiques dt_post 50
                {
                t_deb 100 t_fin 150
                moyenne vitesse
                moyenne temperature
                ecart_type vitesse
                ecart_type temperature
                }
   }
   sauvegarde formatte pb.sauv
}
Resoudre pb
Fin
```

RÉFÉRENCES

[1] P.-E. ANGELI : New wall law treatment for the large eddy simulation of turbulent heat transfer in a periodic channel ($Re_\tau = 180$ and $Pr = 0.025$, T0Q case), 2013. Fiche de validation Trio_U.

[2] P.-E. ANGELI : New wall law treatment for the large eddy simulation of turbulent heat transfer in a periodic channel ($Re_\tau = 180$ and $Pr = 0.71$, T0Q case), 2013. Fiche de validation Trio_U.

[3] P.-E. ANGELI : New wall law treatment for the large eddy simulation of turbulent heat transfer in a periodic channel ($Re_\tau = 395$ and $Pr = 0.71$, T0Q case), 2013. Fiche de validation Trio_U.

[4] P.-E. ANGELI : New wall law treatment for the large eddy simulation of turbulent heat transfer in a periodic channel ($Re_\tau = 590$), 2013. Fiche de validation Trio_U.

[5] P.-E. ANGELI : New wall law treatment for the large eddy simulation of turbulent heat transfer in a periodic channel ($Re_\tau = 640$ and $Pr = 0.025$, T0Q case), 2013. Fiche de validation Trio_U.

[6] P.-E. ANGELI : New wall law treatment for the large eddy simulation of turbulent heat transfer in a periodic channel ($Re_\tau = 640$ and $Pr = 0.71$, T0Q case), 2013. Fiche de validation Trio_U.

[7] C. BAILLY et G. COMTE-BELLOT : *Turbulence*. CNRS Éditions, 2003.

[8] R. B. DEAN : Reynolds number dependence of skin friction and other bulk flow variables in two-dimensional rectangular duct flow. *J. Fluids Eng.*, 100:215–223, 1978.

[9] J. O. HINZE : *Turbulence*. MacGraw-Hill, 1959.

[10] B. A. KADER : Temperature and concentration profiles in fully turbulent boundary layers. *Int. J. Heat Mass Transf.*, 24:1541–1544, 1981.

[11] H. KAWAMURA : `http://murasun.me.noda.tus.ac.jp/turbulence`, 2008.

[12] B. MOHAMMADI, O. PIRONNEAU, P. G. CIARLET et J.-L. LIONS : *Analysis of the K-Epsilon turbulence model*. John Wiley & Sons - Masson, 1994.

[13] R. D. MOSER, J. KIM et N. N. MANSOUR : `http://turbulence.ices.utexas.edu/data/MKM`, 2001.

[14] F. NICOUD et F. DUCROS : Subgrid-scale stress modelling based on the square of the velocity gradient tensor. *Flow Turbul. Combust.*, 62:183–200, 1999.

[15] J. SMAGORINSKY : General circulation experiments with the primitive equations. *Mon. Weather Rev.*, 91:99–164, 1963.

LISTE DES FIGURES

1 Localisation des inconnues de vitesse et de température en VEF 2D (les nœuds de calcul N_a et N_b sont les centres de gravité des faces, ici réduites à des arêtes), et définition de la distance y_1 à la paroi correspondant à l'altitude du point où est appliquée la loi de paroi. Les variables u_1 et T_1 sont les moyennes des inconnues aux nœuds N_a et N_b. 13

2 Schéma d'une maille de bord en VEF 2D (élément ABC), avec les points de calcul (représentés par des points noirs) et les volumes de contrôle (représentés par des lignes pointillées) associés. Les vecteurs $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ et $\vec{n}_p$ sont les normales aux faces du volume de contrôle pariétal ABG associé au point de calcul situé au centre de la face de paroi. Les gradients de vitesse et de température sont évalués au centre de gravité G, donc u_τ et T_τ également. 14

3 Discrétisation VDF en 2D (en haut) et en 1D (en bas). Les inconnues (composante de vitesse normale à la face et température) sont localisées aux points noirs, leurs gradients au centre des mailles. 18

4 Différences entre ancienne et nouvelle approche : la paroi est décalée fictivement d'une distance δ et est transformée en symétrie. La loi de paroi est maintenant appliquée sur la paroi symétrique, qui se trouve à l'altitude δ par rapport à la paroi fictive. En ce même point sont appliqués les termes de Robin $\vec{R}_{\text{hyd}}$ et R_{th}, définis par les relations (37) et (40c). 18

5 Diagramme d'héritage de la nouvelle classe `Paroi_decalee_Robin`. 20

6 Écoulement dans un canal plan et conditions hydrauliques et thermiques. (a) Ajout d'un terme $\vec{\mathcal{F}}$ pour forcer l'écoulement, (b) imposition d'une température uniforme et identique sur les deux parois, ainsi que d'une source de puissance thermique $\mathcal{P}$, (c) imposition de températures uniformes et différentes pour chaque plaque. 22

7 Maillages utilisés pour les calculs dans le cas à $\text{Re}_\tau = 395$: (a) maillage VDF, (b) maillage VEF créé avec le mailleur interne de Trio_U, (c) maillage VEF créé avec ICEM. 24

8 Évolution de Re_τ au cours du calcul pour chacune des simulations. La valeur théorique à obtenir est $\text{Re}_\tau = 395$. 26

9 Composante selon la direction x du vecteur vitesse moyenné dans chaque plan xz d'altitude y_i, comparée aux D.N.S. [11] et [13]. 27

10 Composante selon la direction x du vecteur vitesse moyenné dans chaque plan xz d'altitude y_i et adimensionné, comparée aux D.N.S. [11] et [13] et à la loi de Reichardt (58). . 27

11 Température moyennée dans chaque plan xz d'altitude y_i, comparée aux résultats de la D.N.S. [11]. 28

12 Température moyennée dans chaque plan xz d'altitude y_i et adimensionnée, comparée aux résultats de la D.N.S. [11]. 28

13 Écart-type moyenné dans chaque plan xz d'altitude y_i du champ de température, comparé aux résultats de la D.N.S. [11]. 29

14 Écart-type moyenné dans chaque plan xz d'altitude y_i et adimensionné du champ de température, comparé aux résultats de la D.N.S. [11]. 29

15 Tracés de la loi de Reichardt (58) (en haut) et de la loi de Kader (59) (en bas), qui permet de raccorder continûment la zone linéaire et la zone logarithmique. La zone tampon se situe approximativement dans l'intervalle $4 \lesssim y^+ \lesssim 40$. 35

16 Évolution au cours du calcul, pour deux valeurs de seuil ($\varepsilon = 10^{-3}$ en haut et $\varepsilon = 10^{-6}$ en bas), du seuil atteint au terme du processus itératif et du nombre d'itérations effectuées pour l'atteindre (affichage de ces valeurs toutes les deux secondes simulées). Le nombre d'itérations nécessaire reste stable en moyenne au cours des cent premières secondes de la simulation. 37

LISTE DES TABLEAUX

1 Récapitulatif des deux stratégies de prise en compte des lois de paroi. 19

2 Synthèse des développements effectués dans le code. 21

3 Caractéristiques des maillages utilisés pour chaque régime d'écoulement. 23

4 Comparaison des valeurs calculées du frottement turbulent pariétal avec sa valeur théorique. L'intervalle temporel pour le calcul des moyennes est $[t_0;t_{\text{fin}}]$. 25

5 Synthèse des temps de calcul de chaque fiche de validation. 30