

# Quelques éléments sur la méthode Front-Tracking avec changement de phase

Benoît Mathieu et Didier Jamet

13 mars 2008

## 1 Convection de l'interface

Dans le cas d'un écoulement diphasique avec changement de phase, l'idée développée pour déterminer la vitesse de déplacement de l'interface consiste à construire sur le maillage eulérien un champ de vitesse discontinu  $\delta u$  tel que, additionné au champ de vitesse du fluide  $u$  (lui-même discontinu), on obtient un champ *continu* égal à la vitesse de déplacement de l'interface  $u^i$ . Ainsi, la vitesse de déplacement de l'interface est obtenue par interpolation du champ eulérien *continu* sur le maillage lagrangien, ce qui améliore *a priori* la précision de l'interpolation.

Dans ce qui suit, on détaille la manière de déterminer le champ de vitesse  $\delta u$ .

### 1.1 Idée principale : cas d'une interface plane

Pour simplifier, considérons tout d'abord le cas d'une interface plane. Soit  $x$  la coordonnée normale à l'interface orientée (arbitrairement) de la phase liquide vers la phase vapeur (cf. Fig. 1). Pour fixer les idées (sans perte de généralité), on considère le cas où le liquide s'évapore. Le champ de vitesse  $u$  normal à l'interface est alors celui représenté sur la Fig. 1.

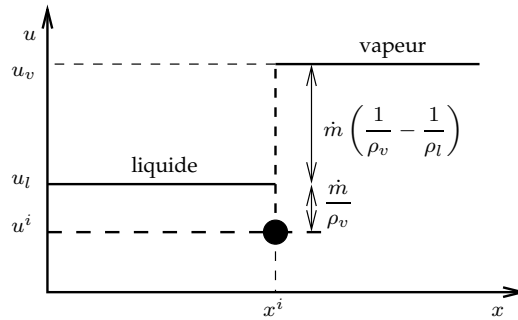


FIG. 1 – Profil du champ de vitesse normal à l'interface lors du changement de phase à une interface plane.

On note  $\dot{m}$  le taux de transfert de masse à l'interface. Le bilan de masse à l'interface indique que l'on a

$$\dot{m} = \rho_v (u_v - u^i) = \rho_l (u_l - u^i) \quad (1)$$

où  $u^i$  est la vitesse de déplacement de l'interface. Le saut de vitesse à l'interface est donc

$$u_v - u_l = \dot{m} \left( \frac{1}{\rho_v} - \frac{1}{\rho_l} \right)$$

Le champ de vitesse discontinu  $\delta u$  que l'on cherche à construire doit avoir les caractéristiques suivantes :

$$\delta u = \begin{cases} \frac{\dot{m}}{\rho_l} & \text{dans le liquide} \\ \frac{\dot{m}}{\rho_v} & \text{dans la vapeur} \end{cases} \quad (2)$$

Ainsi, le champ de vitesse  $(u - \delta u)$  est continu à l'interface et égal à la vitesse de déplacement de l'interface  $u^i$  dans tout le domaine. En effet, d'après le bilan de masse à l'interface (1) :

$$u - \delta u = \begin{cases} u_l - \frac{\dot{m}}{\rho_l} = u^i & \text{dans le liquide} \\ u_v - \frac{\dot{m}}{\rho_v} = u^i & \text{dans la vapeur} \end{cases} \quad (3)$$

La définition (2) du champ de vitesse  $\delta u$  et telle que  $\delta u$  dépend uniquement de  $\dot{m}$  et de la position de l'interface. En outre, ce champ de vitesse tend vers 0 lorsque le changement de phase tend vers 0. Cette propriété garantit que le schéma avec changement de phase dégénère bien vers le schéma sans changement de phase pour lequel la vitesse de déplacement de l'interface est déterminée à partir du seul champ de vitesse fluide  $u$ .

## 1.2 Cas d'une interface quelconque

Dans le cas d'une interface de géométrie quelconque, la détermination du champ de vitesse *vectoriel*  $\delta u$  est plus complexe. La raison principale tient au fait que le champ de vitesse de chaque phase n'est plus uniforme dans chaque phase et qu'il est à divergence nul (cf. Fig. 2). Cette dernière propriété implique une variation du champ de vitesse des phases dans la direction normale à l'interface. Pour assurer que le champ de vitesse  $(u - \delta u)$  est bien uniforme dans chaque phase, il faut donc que le champ  $\delta u$  soit également à divergence nulle dans chaque phase, de sorte que ses variations dans la direction normale à l'interface compensent celles du champ de vitesse fluide  $u$ .

En outre, le saut de vitesse existant uniquement dans la direction *normale* à l'interface, on cherche à ce que  $\delta u$  soit normal à l'interface.

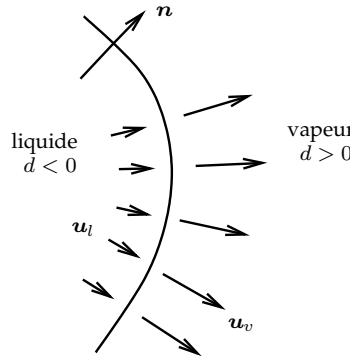


FIG. 2 – Champ de vitesse lors du changement de phase à une interface courbe.

### 1.2.1 Détermination d'un champ de vitesse à divergence nul dans chaque phase et normal à l'interface

Dans cette section, on cherche un champ qui soit normal à l'interface et à divergence nul dans un voisinage à l'interface. Considérons pour commencer un champ de vitesse  $u_n$  normal

à l'interface et dont la norme est égale à 1 à l'interface. Un tel champ de vitesse peut être défini par :

$$\mathbf{u}_n = \nabla d$$

où  $d$  est la *distance signée à l'interface* telle que

$$\mathbf{n} = \nabla d \quad (4)$$

Il est facile de montrer que le champ  $\mathbf{u}_n$  ainsi défini n'est pas à divergence nulle :

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_n = \nabla \cdot (\nabla d) = \nabla \cdot \mathbf{n} = \kappa$$

où  $\kappa$  est la courbure moyenne de l'interface.

Pour retirer cette contribution, on peut chercher un champ  $\mathbf{u}_n$  sous la forme  $\mathbf{u}_n = \nabla f(d)$ . Si on suppose que la courbure  $\kappa$  de l'interface est constante, on montre facilement que si l'on prend<sup>1</sup>

$$f(d) = -\frac{1}{\kappa} e^{-\kappa d} \quad (5)$$

alors  $\nabla \cdot \mathbf{u}_n = 0$ . Remarquons que la fonction  $f(d)$  est définie à une constante près car seul son gradient est utile pour déterminer  $\mathbf{u}_n$ .

L'inconvénient de cette solution provient essentiellement de la division par  $\kappa$  qui pose problème lorsque l'interface est plane ( $\kappa \rightarrow 0$ ). C'est pourquoi on préfère utiliser un développement limité au voisinage de  $d = 0$  de la formule précédente :

$$f(d) = -\frac{1}{\kappa} + d - \kappa \frac{d^2}{2} + \kappa^2 \frac{d^3}{6} + \mathcal{O}(d^4)$$

Dans la pratique, on utilise uniquement le développement limité à l'ordre 2, de sorte que l'on définit le champ de vitesse  $\mathbf{u}_n$  par

$$\mathbf{u}_n = \nabla \left[ d \left( 1 - \frac{\kappa d}{2} \right) \right] = (1 - \kappa d) \mathbf{n} \quad (6)$$

On montre alors facilement que la divergence de ce champ de vitesse décroît linéairement avec la distance à l'interface :

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_n = -\kappa^2 d$$

### 1.2.2 Détermination du champ de vitesse à l'interface

Ayant déterminé un champ de vitesse normal à l'interface dont la divergence décroît linéairement avec la distance à l'interface, il suffit d'appliquer ce champ dans chaque phase et d'imposer la discontinuité à l'interface due au changement de phase.

On définit donc le champ de vitesse  $\delta \mathbf{u}$  comme suit :

$$\delta \mathbf{u} = \begin{cases} \frac{\dot{m}}{\rho_l} \nabla \left[ d \left( 1 - \frac{\kappa d}{2} \right) \right] & \text{pour } d < 0 \\ \frac{\dot{m}}{\rho_v} \nabla \left[ d \left( 1 - \frac{\kappa d}{2} \right) \right] & \text{pour } d > 0 \end{cases} \quad (7)$$

On rappelle que pour obtenir à un champ à divergence nulle dans chaque phase, il suffit de remplacer le terme  $(d(1 - \kappa d/2))$  dans la formule précédente par  $(-e^{-\kappa d}/\kappa)$ .

Le champ  $\delta \mathbf{u}$  ainsi déterminé est tel que (i) sa divergence est nulle à l'interface (et décroît linéairement avec la distance à l'interface) et (ii) la composante normale à l'interface du champ

<sup>1</sup>La fonction  $f(d)$  est solution de l'équation différentielle  $f'' + \kappa f' = 0$  qui exprime la nullité de la divergence de  $\mathbf{u}_n = \nabla f(d)$ .

$(\mathbf{u} - \delta\mathbf{u})$  est égal à la vitesse de déplacement de l'interface.

Si l'on suppose que le taux de transfert de masse  $\dot{m}$  est constant, on peut alors déterminer le champ  $\delta\mathbf{u}$  par :

$$\delta\mathbf{u} = \begin{cases} \nabla \left[ \frac{\dot{m}}{\rho_l} d \left( 1 - \frac{\kappa d}{2} \right) \right] & \text{pour } d < 0 \\ \nabla \left[ \frac{\dot{m}}{\rho_v} d \left( 1 - \frac{\kappa d}{2} \right) \right] & \text{pour } d > 0 \end{cases} \quad (8)$$

Cette formule présente l'avantage d'être un peu plus simple à programmer car, comme on le verra dans la section 4, le taux de transfert de masse est calculé numériquement au centre des mailles eulériennes.

## 2 Solveur en pression

La résolution en pression doit tenir compte du taux de transfert de masse à l'interface. En effet, du fait de la variation de volume engendrée par le transfert de masse à l'interface,  $\nabla \cdot \mathbf{u} \neq 0$  à l'interface. Par construction de  $\delta\mathbf{u}$ , on a

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot \delta\mathbf{u}$$

On cherche à ce que la discontinuité du champ de vitesse  $\mathbf{u}$  à l'issue de l'étape de projection prenne soit exactement celle du champ  $\delta\mathbf{u}$ . C'est pourquoi, dans l'équation en pression, le terme en  $\nabla \cdot \mathbf{u}$  est remplacé par  $\nabla \cdot \delta\mathbf{u}$ , où le champ de vitesse  $\delta\mathbf{u}$  est déterminé comme présenté dans la section précédente.

## 3 Convection de la température

Dans cette section, on s'intéresse à la discrétisation du terme de convection de l'équation d'évolution de la température, c'est-à-dire au terme  $\mathbf{u} \cdot \nabla T$ . Dans la formulation monofluide utilisée avec la méthode Front-Tracking, la vitesse  $\mathbf{u}$  est la vitesse du fluide. Cette vitesse est donc à divergence nulle dans les phases mais présente une discontinuité à l'interface. Si l'on discrétise ce terme en utilisant un schéma classique de type différences finies, on commet une erreur de discrétisation importante en utilisant ce champ de vitesse discontinu. En outre, dans Trio\_U, le terme de convection est écrit sous la forme  $\nabla \cdot (\mathbf{u} T)$  car si le champ  $\mathbf{u}$  est à divergence nulle, alors on a bien  $\nabla \cdot (\mathbf{u} T) = \mathbf{u} \cdot \nabla T$ . Mais, dans le cas d'un écoulement avec changement de phase, le champ  $\mathbf{u}$  n'est pas à divergence nulle dans les mailles eulériennes voisines de l'interface et l'erreur de discrétisation induite est alors importante. C'est pourquoi on a développé un schéma de discrétisation inspiré de la méthode "Ghost Fluid".

L'idée principale consiste à *prolonger le champ de vitesse d'une des phases dans l'autre phase*. Pour résoudre le problème de discrétisation exposé ci-dessus, il est nécessaire que le champ de vitesse prolongé soit à divergence nulle (au moins au voisinage de l'interface). Ce problème est exactement celui que l'on s'est posé dans le cas de la détermination du champ de vitesse  $\delta\mathbf{u}$  à la section 1. Une différence importante existe néanmoins entre les deux cas. Pour déterminer le champ de vitesse de déplacement de l'interface, on a construit un champ de vitesse discontinu  $\delta\mathbf{u}$  devant vérifier les contraintes (2) dans le cas d'une interface plane pour que le champ  $(\mathbf{u} - \delta\mathbf{u})$  soit égal au champ de vitesse de déplacement de l'interface (cf. Eq. 3 dans le cas d'une interface plane). Mais cette contrainte diffère dans le cas présent.

Considérons par exemple le cas de la phase liquide, la phase vapeur se traitant de manière similaire. Le but est que, pour une interface plane, pour le terme de convection de la température liquide, le champ  $(\mathbf{u} - \delta\mathbf{u}_l)$  soit égal au champ  $\mathbf{u}_l$  dans la phase liquide et dans la phase vapeur.

Le champ  $\delta \mathbf{u}_l$  doit donc être tel que

$$\delta \mathbf{u}_l \cdot \mathbf{n} = \begin{cases} 0 & \text{dans la phase liquide} \\ \dot{m} \left( \frac{1}{\rho_v} - \frac{1}{\rho_l} \right) & \text{dans la phase vapeur} \end{cases}$$

de sorte que, d'après le bilan de masse à l'interface (1), on a

$$(\mathbf{u} - \delta \mathbf{u}_l) \cdot \mathbf{n} = \begin{cases} \mathbf{u}_l \cdot \mathbf{n} & \text{dans la phase liquide} \\ \mathbf{u}_v \cdot \mathbf{n} - \dot{m} \left( \frac{1}{\rho_v} - \frac{1}{\rho_l} \right) = \mathbf{u}_l \cdot \mathbf{n} & \text{dans la phase vapeur} \end{cases}$$

Le champ ainsi construit est donc bien continu à la traversée de l'interface et égal au champ de vitesse liquide. Comme dans le cas de la vitesse de déplacement de l'interface, quand l'interface est courbe, le champ ainsi construit n'est pas à divergence nulle. On utilise donc la même méthode et on définit donc le champ

$$\delta \mathbf{u}_l = \begin{cases} 0 & \text{pour } d < 0 \\ \nabla \left[ \dot{m} \left( \frac{1}{\rho_l} - \frac{1}{\rho_v} \right) d \left( 1 - \frac{\kappa d}{2} \right) \right] & \text{pour } d > 0 \end{cases} \quad (9)$$

Le champ  $(\mathbf{u} - \delta \mathbf{u}_l)$  est alors utilisé pour convecter la température de la phase liquide.

De même, pour la convection de la température vapeur, on utilise le champ  $(\mathbf{u} - \delta \mathbf{u}_v)$ , où  $\delta \mathbf{u}_v$  est défini par

$$\delta \mathbf{u}_v = \begin{cases} \nabla \left[ \dot{m} \left( \frac{1}{\rho_l} - \frac{1}{\rho_v} \right) d \left( 1 - \frac{\kappa d}{2} \right) \right] & \text{pour } d < 0 \\ 0 & \text{pour } d > 0 \end{cases} \quad (10)$$

En utilisant le bilan de masse à l'interface (1), on vérifie alors facilement que la composante normale à l'interface du champ  $(\mathbf{u} - \delta \mathbf{u}_v)$  est continue à la traversée de l'interface et égale à la vitesse de la phase vapeur.

## 4 Gradient de température à l'interface et taux de transfert de masse

Le bilan d'énergie à l'interface fait intervenir la différence des flux conductifs des phases à l'interface. Il est donc important de bien évaluer ces flux conductifs et donc le gradient de température à l'interface (la conductivité thermique des phases étant supposée uniforme). La méthode utilisée se base encore sur la méthode "Ghost Fluid" : on calcule un champ de gradient de température issu d'un prolongement d'un champ calculé aux centres des éléments eulériens dans la phase liquide.

Le calcul se déroule en trois étapes principales :

1. calcul du gradient de température normal à l'interface aux centres des éléments eulériens
2. calcul du champ de température aux centres des éléments eulériens
3. détermination du champ de taux de transfert de masse aux centres des éléments eulériens

**1. Détermination du gradient de température normal à l'interface** On suppose que le champ de température le long de l'interface est connu. Pour simplifier le propos, on suppose qu'il est constant et uniforme égal à la température de saturation  $T^{sat}$  (la pression thermodynamique étant supposée être constante). On calcule le gradient de température normal à l'interface sur les mailles eulériennes par la formule suivante :

$$(\mathbf{n} \cdot \nabla T)_i = \frac{T_i - T^{sat}}{d_i}$$

où  $i$  est l'indice de la maille eulérienne considérée et  $d_i$  la distance signée à l'interface. Ce gradient ainsi calculé par différence finie centrée représente en fait le gradient normal à l'interface à une distance  $d_i/2$  de l'interface et non pas à l'interface, lieu où le bilan d'énergie s'applique et où  $(\mathbf{n} \cdot \nabla T)$  doit donc être évalué. Pour tenir compte de cette différence, on suppose que, localement, le gradient du champ de température est normal à l'interface et de divergence nulle. Cette hypothèse revient à supposer que le champ de température est quasi-statique au voisinage de l'interface. On utilise alors la même méthode que celle utilisée pour déterminer le champ de vitesse normal à l'interface :

$$(\mathbf{n} \cdot \nabla T)_i = \frac{T_i - T^{sat}}{d_i} e^{\kappa d_i/2} \simeq \frac{T_i - T^{sat}}{d_i} \left( 1 + \kappa (d_i/2) + \frac{\kappa (d_i/2)^2}{2} + \mathcal{O}(d_i^3) \right)$$

Il est important de remarquer que le signe  $+$  de la formule ci-dessus est bien cohérent avec le signe de la formule (5). En effet, dans la détermination de la formule (5), le but est de déterminer le champ à une distance  $d_i$  alors que l'on connaît le champ à l'interface. Ici, le but est inverse : on cherche la valeur à l'interface en connaissant la valeur à une distance  $d_i/2$  de l'interface. Il se trouve que cette valeur à l'interface est en fait stockée au centre des mailles eulériennes.

Il est important de noter que le calcul précédent n'est pas fait pour toutes les mailles eulériennes voisines de l'interface. En effet, le but est de déterminer le flux conductif à l'interface dans l'une des phases, par exemple dans le liquide. Par conséquent, le calcul précédent est effectué uniquement pour les mailles eulériennes liquide et non pas pour les mailles diphasiques ou vapeur. Il faut cependant remarquer que le flux normal ainsi calculé dans les mailles eulériennes liquide est bien représentatif du flux normal à l'interface. On cherche cependant à ce que ce flux soit régulier sur toutes les mailles, y compris les mailles diphasiques et vapeur pour que le champ de taux de transfert de masse à l'interface le soit également : il sert à déterminer la vitesse de déplacement de l'interface. Il est donc nécessaire de *prolonger* le flux normal calculé dans les mailles liquide sur les mailles diphasiques et vapeur. Plusieurs solutions sont possibles pour effectuer ce prolongement. Pour l'instant, on a choisi d'utiliser une méthode très simple de prise de moyenne : pour les mailles diphasiques et vapeur proches de l'interface,  $(\mathbf{n} \cdot \nabla T)_i$  est calculé comme la moyenne des valeurs des mailles eulériennes voisines, cette moyenne étant calculée plusieurs fois de sorte à diffuser l'information. Cette procédure revient à résoudre une équation de type diffusion.<sup>2</sup>

**2. Détermination du champ de température** Dans cette étape, on cherche à déterminer le champ de température dans les mailles eulériennes voisines de l'interface et dans l'autre phase que celle considérée (par exemple le champ de température liquide dans la phase vapeur au voisinage de l'interface). Pour cela, on suppose que le gradient du champ à l'interface est connu (et déterminé à l'étape précédente). Ce champ est supposé être à divergence nul : on suppose que le problème de conduction thermique est quasi-statique au voisinage de l'interface. Le champ de température à une distance  $d$  de l'interface est donné par :

$$T(d) = T^{sat} + (\mathbf{n} \cdot \nabla T)^s \frac{1}{\kappa} (1 - e^{-\kappa d}) \simeq T^{sat} + (\mathbf{n} \cdot \nabla T)^s d \left( 1 - \frac{\kappa d}{2} + \frac{\kappa^2 d^2}{6} \right)$$

---

<sup>2</sup>Cette même procédure de prise de moyenne locale successive est utilisée pour déterminer la courbure de l'interface dans les mailles eulériennes monophasiques voisines des mailles diphasiques. D'autres méthodes peut-être plus précises telles que celles mises en oeuvre dans les méthodes Level Set peuvent être envisagées.

où l'exposant  $s$  est relatif à la surface. D'un point de vue discret, on utilise la valeur du gradient de température à l'interface déterminée à l'étape précédente et on obtient :

$$T_i = T^{sat} + (\mathbf{n} \cdot \nabla T)_i \frac{1}{\kappa} (1 - e^{-\kappa d_i}) \simeq T^{sat} + (\mathbf{n} \cdot \nabla T)_i d_i \left(1 - \frac{\kappa d_i}{2} + \frac{\kappa^2 d_i^2}{6}\right)$$

**3. Détermination du taux de transfert de masse** Indiquons en préambule que l'on cherche à déterminer la valeur du taux de transfert de masse sur les mailles eulériennes et non pas sur les mailles lagrangiennes comme on pourrait le penser au premier abord. En effet, comme on l'a vu dans la section 1, la détermination du champ de vitesse de déplacement de l'interface s'effectue en supposant que l'on connaît le champ de taux de transfert de masse sur les mailles eulériennes.

Connaissant le gradient de température à l'interface calculé comme décrit ci-dessus, on détermine simplement le taux de transfert de masse à l'interface  $\dot{m}$  aux centres des mailles eulériennes par :

$$\dot{m}_i = \frac{k (\mathbf{n} \cdot \nabla T)_i}{\mathcal{L}}$$

où  $k$  est la conductivité thermique de la phase considérée et  $\mathcal{L}$  la chaleur latente.

Il faut remarquer que la formule précédente suppose que le gradient de température à l'interface de la deuxième phase en présence est nul. Pour prendre en compte les deux phases, il suffit de sommer la formule précédente sur les deux phases.

## 5 Bilans globaux

Le but de cette section est de définir des critères d'évaluation de la précision de la méthode numérique présentée dans les sections précédentes. Cette méthode numérique a pour but principal de prendre en compte le taux de transfert de masse à l'interface : le calculer et déplacer l'interface en conséquence. Le calcul du taux de transfert de masse est basé sur le bilan d'énergie à l'interface et donc sur le bilan d'énergie. Pour valider la méthode numérique, on utilise un bilan d'énergie global présenté dans la section 5.1 et un bilan de masse global présenté dans la section 5.2.

### 5.1 Bilan d'énergie

Au sein de chaque phase  $k = \{1; 2\}$ , le bilan d'énergie se met sous la forme suivante :

$$\frac{\partial(\rho_k h_k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k h_k \mathbf{v}_k) = \nabla \cdot (k \nabla T_k)$$

où l'enthalpie  $h_k$  est supposée être une fonction uniquement de la température et pas de la pression :

$$h_k = h_k^{sat} + C p_k (T_k - T^{sat}) \quad (11)$$

où l'exposant  $sat$  est relatif aux conditions de saturation (la pression thermodynamique étant supposée constante et uniforme). On définit la chaleur latente  $\mathcal{L}$  par :

$$\mathcal{L} = h_2^{sat} - h_1^{sat} \quad (12)$$

En multipliant cette équation par la fonction indicatrice de la phase  $k$ , notée  $\chi_k$ , et en utilisant le bilan d'énergie à l'interface, on montre facilement la relation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_{k=1}^2 \chi_k \rho_k h_k \right) + \nabla \cdot \left( \sum_{k=1}^2 \chi_k \rho_k h_k \mathbf{v}_k \right) = \nabla \cdot \left( \sum_{k=1}^2 \chi_k k \nabla T_k \right)$$

Par intégration sur un volume fixe  $V$ , on obtient :

$$\frac{d}{dt} \int_V \sum_k \chi_k \rho_k h_k dV + \int_{\partial V} \sum_k \chi_k \rho_k h_k \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\partial V} \sum_k \chi_k k_k \nabla T_k \cdot \mathbf{n} dS \quad (13)$$

En utilisant les relations (11) et (12), on montre facilement les relations suivantes :

$$\sum_k \chi_k \rho_k h_k = \chi_2 \rho_2 \mathcal{L} + h_1^{sat} \sum_k \chi_k \rho_k + \sum_k \chi_k \rho_k C p_k (T_k - T^{sat}) \quad (14)$$

$$\sum_k \chi_k \rho_k h_k \mathbf{v}_k = \chi_2 \rho_2 \mathcal{L} \mathbf{v}_2 + h_1^{sat} \sum_k \chi_k \rho_k \mathbf{v}_k + \sum_k \chi_k \rho_k C p_k (T_k - T^{sat}) \mathbf{v}_k \quad (15)$$

Par ailleurs, le bilan de masse intégré sur le volume  $V$  donne :

$$\frac{d}{dt} \int_V \sum_k \chi_k \rho_k dV + \int_{\partial V} \sum_k \chi_k \rho_k \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

En utilisant les relations (14) et (15) pour transformer la relation (13), les termes en  $h_1^{sat}$  s'éliminent et on obtient le bilan d'énergie suivant :

$$\begin{aligned} & \rho_2 \mathcal{L} \frac{d}{dt} \int_V \chi_2 dV + \rho_2 \mathcal{L} \int_{\partial V} \chi_2 \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n} dS \\ & + \frac{d}{dt} \int_V \sum_k \chi_k \rho_k C p_k (T_k - T^{sat}) dV + \int_{\partial V} \sum_k \chi_k \rho_k C p_k (T_k - T^{sat}) \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{n} dS \\ & = \int_{\partial V} \sum_k \chi_k k_k \nabla T_k \cdot \mathbf{n} dS \end{aligned} \quad (16)$$

Cette dernière équation est le bilan d'énergie sur le volume  $V$  dont chaque terme peut être facilement évalué numériquement. En écrivant le bilan ci-dessus sous la forme suivante

$$\sum = 0$$

où  $\sum$  représente la somme des différents termes du bilan d'énergie (16), la vérification de ce bilan d'énergie se fait par l'intermédiaire du paramètre

$$\epsilon_E = \frac{\sum}{P}$$

où  $P$  est le terme source d'énergie qui est à la source du changement de phase. Par exemple, dans le cas où le changement de phase est induit par un flux d'énergie imposé sur la paroi du système,  $P$  est donné par

$$P = \int_{\partial V} \sum_k \chi_k k_k \nabla T_k \cdot \mathbf{n} dS$$

## 5.2 Bilan de masse

Pour évaluer le bilan de masse dans le cas d'un écoulement diphasique avec changement de phase, on considère comme acquis le bilan de masse au sein de chaque phase. En effet, ce bilan de masse est directement lié à la condition d'incompressibilité de l'écoulement au sein de chaque phase, condition qui est supposée être vérifiée. En revanche, on cherche à vérifier le bilan de masse lié au transfert de masse à l'interface. Pour cela, on détermine la variation de la masse d'une des phases de deux manières différentes. Si  $\dot{m}$  est le taux de transfert de masse par évaporation, la variation temporelle de masse de la phase vapeur est donnée par

$$\frac{dM_v}{dt} = \int_S \dot{m} dS$$



où  $S$  est l'interface liquide-vapeur.

La variation temporelle de la masse de la phase vapeur peut être déterminée de manière indépendante :

$$\frac{dM_v}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho_v \chi_v dV$$

Le critère que l'on choisit est la variation de masse relative :

$$\epsilon_V = \frac{\frac{d}{dt} \int_V \rho_v \chi_v dV - \int_S \dot{m} dS}{\frac{d}{dt} \int_V \rho_v \chi_v dV} \quad (17)$$

## 6 Quelques résultats