SAKARYA ÜNİVERSİTESİ

MATEMATİK II

Hafta 8

Prof. Dr. Refik KESKİN,
Prof. Dr. Halim ÖZDEMİR,
Doç. Dr. Şevket GÜR,
Yrd. Doç. Dr. Murat SARDUVAN

MAT112 MATEMATİK II   8. HAFTA

İÇİNDEKİLER

HEDEFLER

Bu haftanın notunu çalıştıktan sonra;

- ✓ Dönel cisim kavramını anlayabilmek
- ✓ Dönel cisimlerin hacimlerini hesaplayabilmek.
- ✓ Dönel cisimlerin hacimlerini hesaplamada silindirik tabakalar yöntemini kullanabilmek.
- ✓ Yüzey kavramını anlayabilmek.
- ✓ Yüzey alanını hesaplayabilmek.

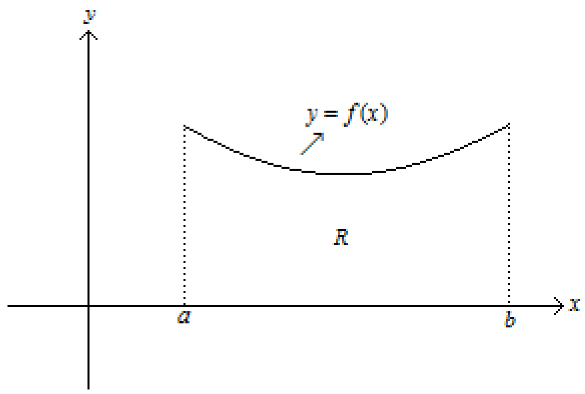
ÖNERİLER

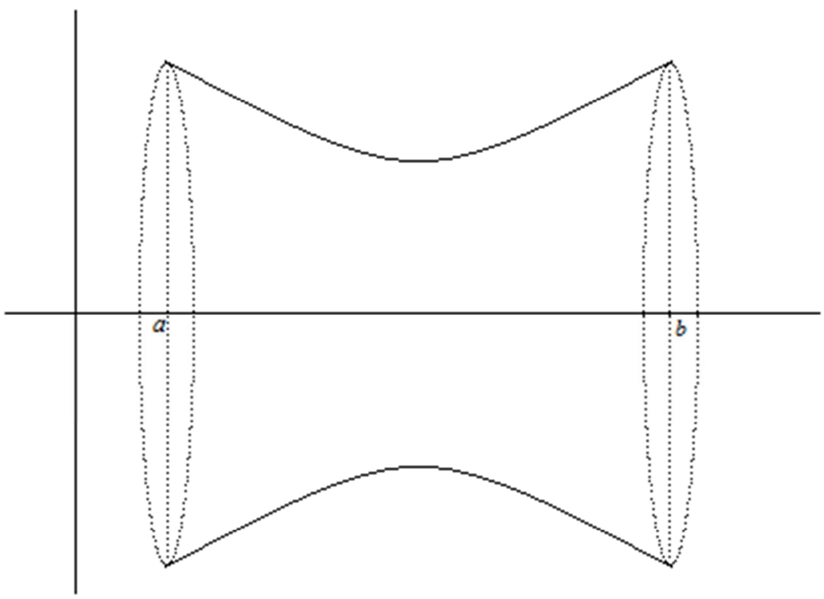
Bu üniteyi daha iyi kavrayabilmek için;

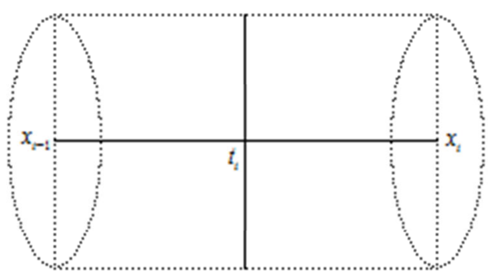
- Önce önceki haftalardaki ders notlarını iyice pekiştiriniz.

3.4. Dönel Cisimlerin Hacmi

a) $y = f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ de sürekli ve R bölgesi aşağıdaki gibi olsun.



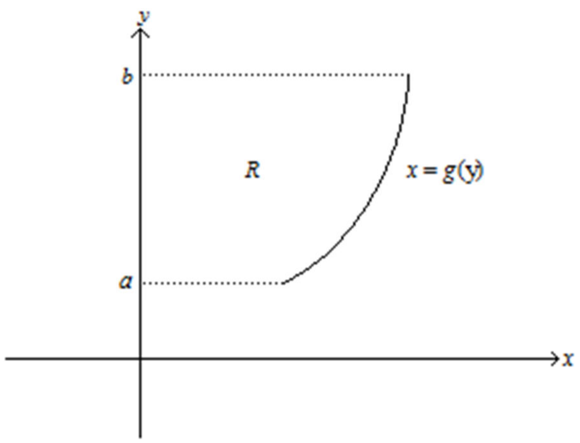


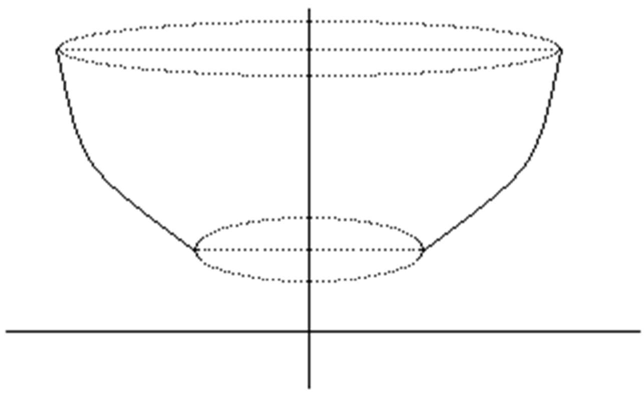


R bölgesinin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini hesaplayalım. Öncelikle taban alanı ve yüksekliği belli olan bir silindirin hacminin taban alanıyla yüksekliğinin çarpımına eşit olduğunu biliyoruz. $[a,b]$ nin bir $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ parçalanışını ele alalım.

$|P|=\max\{\Delta x_i : 1\le i\le n\}$ olsun. Oluşan S cisminin $[x_{i-1},x_i]$ aralığında kalan kısmının hacmi V_i olsun. Dolayısıyla S nin hacmi $\sum_{k=1}^{n} V_k$ dır. $t_i\in[x_{i-1},x_i]$ olmak üzere yüksekliği $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ve taban yarıçapı $f(t_i)$ olan silindirin alanı $\pi\left(f(t_i)\right)^2\Delta x_i$ dir. Dolayısıyla S nin hacmi $\sum_{k=1}^{n} V_k=\sum_{k=1}^{n}\pi\left(f(t_i)\right)^2\Delta x_i$ olur. Buradan S nin hacmi $\lim_{|P|\to 0}\sum_{k=1}^{n}\pi\left(f(t_i)\right)^2\Delta x_i=\int_a^b \pi\left(f(x)\right)^2 dx$ bulunur.

b) $x=g(y)$ denklemiyle verilen $a\le y\le b$ aralığında sürekli $g(y)$ fonksiyonunun $y=a$ ve $y=b$ doğrularıyla oluşturduğu R bölgesinin y-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi $V=\int_a^b \pi x^2 dy=\int_a^b \pi\left(g(y)\right)^2 dy$ dir.





$$V=\pi\int_a^b x^2 dy=\pi\int_a^b \left(g(y)\right)^2 dy$$

c) $y=f(x)$ eğrisi $x=a$, $x=b$ ve $y=k$ tarafından sınırlı bölge R olsun. R bölgesinin $y=k$ doğrusunun bir tarafında kaldığını kabul edelim. R bölgesinin $y=k$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin V hacmi $y = f(x) - k$ nın oluşturduğu şeklin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmine eşit olup $V = \int_a^b \pi\left(f(x) - k\right)^2 dx$ dir.

d) Her $x \in [a,b]$ için $0 \le g(x) \le f(x)$ olmak üzere sürekli $y = f(x)$ ve $y = g(x)$ eğrileri ile $x = a$ ve $x = b$ doğruları tarafından sınırlı bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi $V = \int_a^b \pi\left(f(x)^2 - g(x)^2\right)dx$ dir.

e) R bölgesi $x = f(y)$, $x = g(y)$, her $y \in [a,b]$ için $f(y) \ge g(y) \ge 0$ olan sürekli f ve g fonksiyonlarının oluşturduğu eğrilerle $y = a$ ve $y = t$ doğrularının sınırladığı bölge olsun. Bu R bölgesinin y-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi $V = \int_a^b \pi\left(f(y)^2 - g(y)^2\right)dy$ dir.

Çözümlü Örnekler.

1) $y = 4$ doğrusunun $1 \le x \le 3$ aralığında kalan kısmının x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini bulunuz.

1. Yol: Meydana gelen silindirin yüksekliği 2 ve taban alanı $\pi 4^2 = 16\pi$ olup silindirin hacmi $2.16\pi = 32\pi$ olur.

2. Yol: $V = \int_1^3 \pi y^2 dx = \pi\int_1^3 4^2 dx = \pi\int_1^3 16dx = \pi\left(16x\Big]_1^3\right) = 32\pi$ olur.

2) Yarıçapı r olan bir çemberin x-ekseninin üst kısmında kalan parçasının x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cisim bir küredir. Bu kürenin hacmini bulunuz.

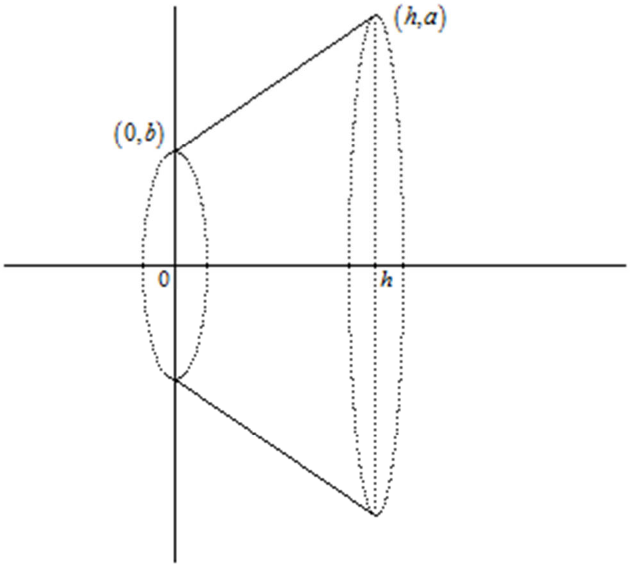
Çemberin denklemi: $x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow y = \sqrt{r^2 - x^2}$

$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$

$$V = \int_{-r}^{r} \pi\left(f(x)\right)^2 dx = \pi\int_{-r}^{r}\left(r^2 - x^2\right)dx = 2\pi\int_0^r\left(r^2 - x^2\right)dx = 2\pi\left(r^2 x - \frac{x^3}{3}\Big]_0^r\right)$$

$$= 2\pi\left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right) = \frac{4\pi r^3}{3} \text{ olur.}$$

3) Aşağıdaki kesik koninin hacmini bulunuz.



Önce doğrunun denklemini yazalım.

$$y-y_0=m\left(x-x_0\right)=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}\left(x-x_0\right)$$

$$\left(x_0,y_0\right)=\left(0,b\right)$$

$$\left(x_1,y_1\right)=\left(h,a\right)$$

$$y-b=\frac{a-b}{h}\left(x-a\right)\Rightarrow y=b+\frac{a-b}{h}x$$

$$V=\int_0^h \pi y^2 dx=\int_0^h \pi\left(b+\frac{a-b}{h}x\right)^2 dx=\frac{\pi h}{3\left(a-b\right)}\left(b+\frac{a-b}{h}x\right)^3\Bigg]_0^h$$

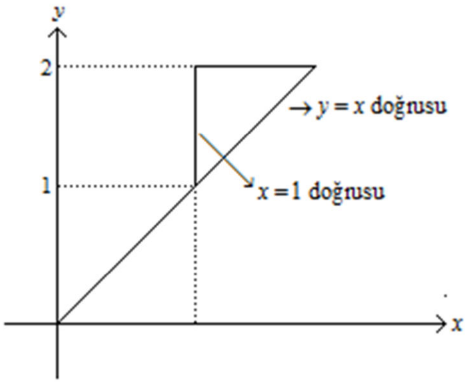
$$=\frac{\pi h}{3\left(a-b\right)}\left[\left(b+a-b\right)^3-b^3\right]=\frac{\left(a^3-b^3\right)\pi h}{3\left(a-b\right)}$$

Eğer $b=0$ ise cisim bilinen koni olur ve hacmi $\frac{\pi a^2 h}{3}$ bulunur.

4) $y=x^2$ eğrisi ve $y=4$ doğrusu ile sınırlı bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini bulunuz.

$$V=\int_{-1}^{2}\pi\left(4^2-\left(x^2\right)^2\right)dx=\int_{-2}^{2}\pi\left(16-x^4\right)dx=2\pi\int_0^2\pi\left(16-x^4\right)dx=2\pi\left(16x-\frac{x^5}{5}\Bigg]_0^2\right)=\frac{256\pi}{5} \text{ olur.}$$

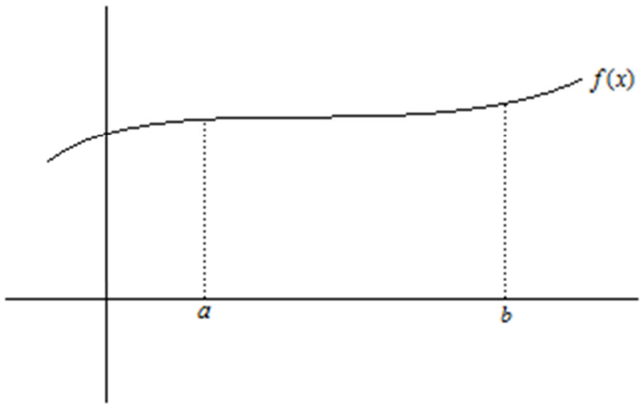
5) Kenarları $\left(1,1\right)$, $\left(1,2\right)$ ve $\left(2,2\right)$ olan üçgenin y-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini bulunuz.



$$V=\pi\int_1^2\left(x^2-1^2\right)dy=\pi\int_1^2\left(y^2-1\right)dy=\pi\left(\frac{y^3}{3}-y\Bigg]_1^2\right)=\frac{4\pi}{3}$$

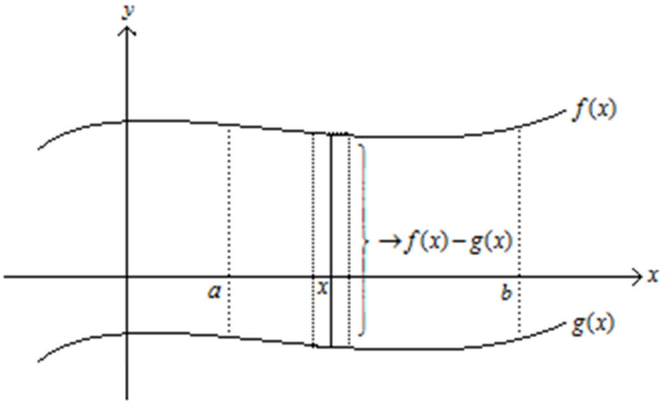
3.3.1. Silindirik Tabakalar Yöntemi

Teorem. 1) $x=a$, $x=b$ doğruları ve $y=f(x)$ sürekli eğrisi ile sınırlı R bölgesinin y-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi $V_y=\int_a^b 2\pi x f(x)dx$ dir.



2) R bölgesi her $x\in(a,b)$ için $f(x)>g(x)$ olmak üzere $y=f(x)$ ve $y=g(x)$ sürekli doğrularıyla sınırlı bölge ise R nin y-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi $V_y=\int_a^b 2\pi x\big(f(x)-g(x)\big)dx$ dir.

Yöntem:



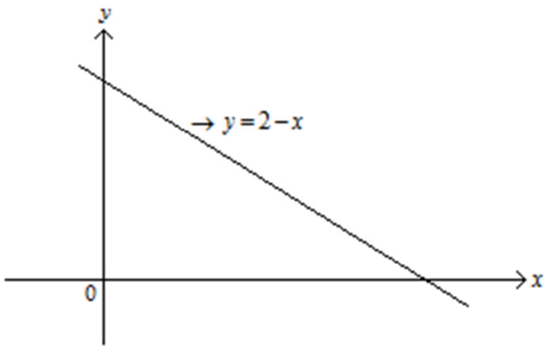
$$V_y = \int_a^b 2\pi x\big(f(x) - g(x)\big)\,dx$$

$x \rightarrow$ kesitin dönme eksenine uzaklığı

$\big(f(x) - g(x)\big) \rightarrow$ kesitin boyu

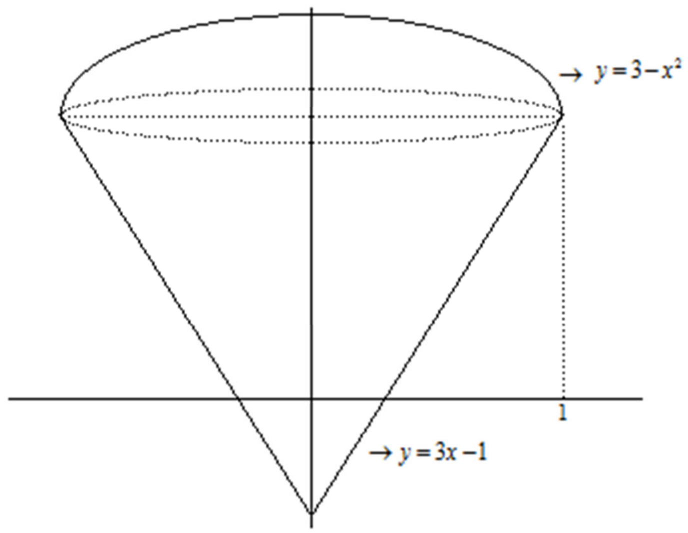
Çözümlü Örnekler.

1) $y + x = 2$ doğrusu, $x = 0$ ve $y = 0$ doğrularıyla sınırlı R bölgesinin y -ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini bulunuz.



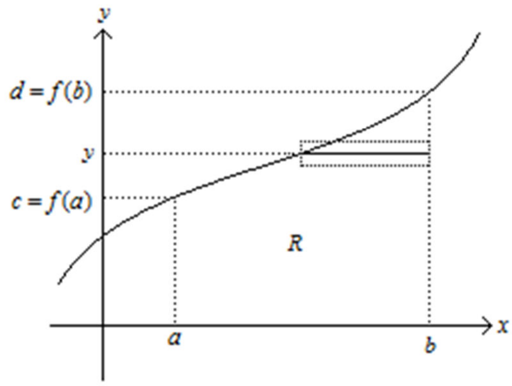
$$V_y = \int_0^2 2\pi x(2 - x)\,dx$$

2) $f(x) = 3 - x^2$ ve $g(x) = 3x - 1$ eğrilerinin $[0,1]$ aralığındaki parçalarının oluşturduğu bölgenin y -ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini bulunuz.



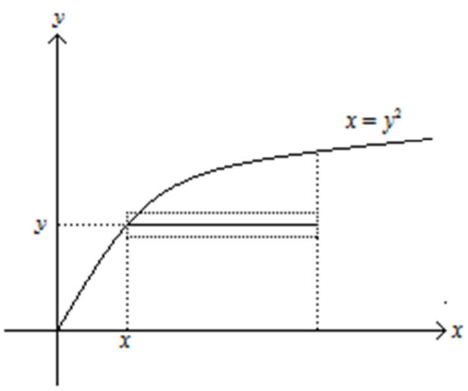
$$V_y=\int_0^1 2\pi x\left(3-x^2-(3x-1)\right)dx=2\pi x\int_0^1\left(-x^3-3x^2+4x\right)dx=\frac{3\pi}{2}$$

Özellik:



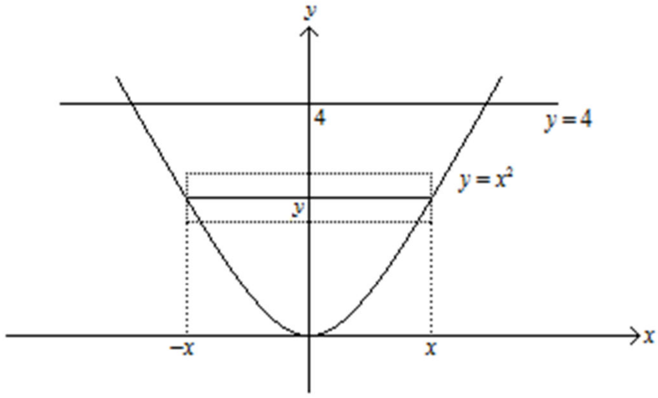
R bölgesinin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi $V_x=\int_c^d 2\pi y g(y)dy$ dir. Burada kesitin x-eksenine olan uzaklığı y, kesitin boyu $g(y)$ olarak düşünülür.

3) $y=\sqrt{x}$ eğrisiyle $x=4$ doğrusu arasındaki bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini bulunuz.



$$V_x = \int_0^2 2\pi y\left(\text{kesitinboyu}\right)dy = \int_0^2 2\pi y\left(4-y\right)dy = \int_0^2 2\pi y\left(4-y^2\right)dy = \int_0^2 2\pi\left(4y-y^3\right)dy = 8\pi$$

4) $y = x^2$ ve $y = 4$ doğrularıyla sınırlı bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini bulunuz.



$$V_x = \int_0^4 2\pi y\left(\text{kesitinboyu}\right)dy = \int_0^4 2\pi y\left(2\text{x}\right)dy = \int_0^4 2\pi y\left(2\sqrt{y}\right)dy = 4\pi\int_0^4 y^{\frac{3}{2}}dy = \frac{256}{5}\pi$$

Problemler.

1) $y = x^2+1$ eğrisi ve $y = x+3$ doğrusu arasındaki bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini bulunuz. (cevap: $\frac{117\pi}{5}$)

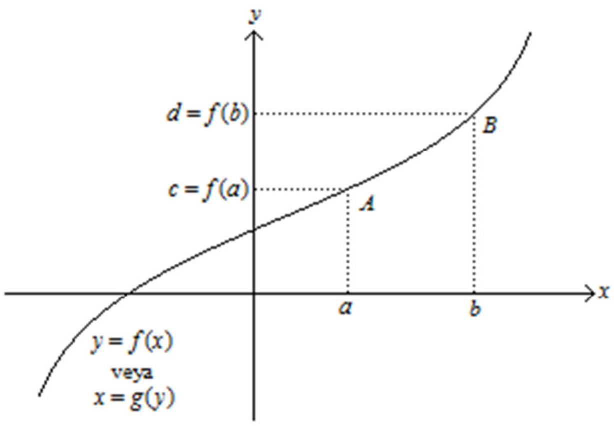
2) $y = 3+x^2$ eğrisi ve $y = 4$ doğrusu arasında kalan bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini bulunuz.

3) $y = 4-x^2$ eğrisi ve $y = 2-x$ doğrusu arasında kalan bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini bulunuz.

3.4. Yüzey Alanı

a) f' $\left[a,b\right]$ de sürekli ve her $x\in\left[a,b\right]$ için $f(x)\geq 0$ olan bir fonksiyon olsun. f nin $\left[a,b\right]$ aralığına ait grafiğinin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin yüzey alanı S ise $S = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$ dir.

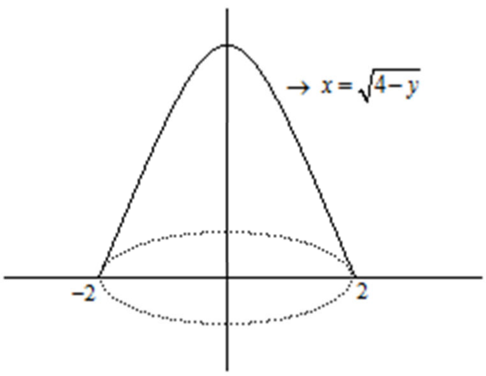
b)



$\overset{\frown}{AB}$ yayının y -ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin yüzey alanı S ise

$$S = \int_c^d 2\pi g(y)\sqrt{1+\left(g'(y)\right)^2}\,dy = \int_c^d 2\pi x\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$$ dir.

Örnek: $y = 4 - x^2$ parabolünün x-ekseniyle sınırladığı bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin yüzey alanını bulunuz.



$$S = 2\pi\int_0^4 x\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy = 2\pi\int_0^4 \sqrt{4-y}\sqrt{1+\left(\frac{1}{4(4-y)}\right)^2}\,dy = 2\pi\int_0^4 \sqrt{\frac{17}{4}-y}\,dy$$

$$= 2\pi\left(-\frac{2}{3}\left(\frac{17}{4}-y\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg]_0^4\right) = \frac{\pi}{6}\left(\sqrt{17^3}-1\right)$$

c) Bir eğri $x = f(t)$ ve $y = g(t)$, $a \le t \le b$ parametrik denklemiyle verilmiş ve $f'(t)$, $g'(t)$ sürekli ve $g(t) \ge 0$ ise yüzey alanı $S = \int_a^b 2\pi g(t)\sqrt{\left(f'(t)\right)^2 + \left(g'(t)\right)^2}\,dt$ dir.