Diferansiyel Denklemler

PROF.DR. METİN YAMAN

BÖLÜM 5

KUVVET SERİSİ YÖNTEMİ

BÖLÜM 5.1.2

FROBENİUS YÖNTEMİ

Frobenius Yöntemi

x_0 noktası, $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ denkleminin bir düzgün tekil nokta ise denklemin çözümleri

$$y = (x - x_0)^k \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \qquad (5.3)$$

şeklinde aranır. Eğer $x_0 = 0$ ise çözümler

$$y = x^k \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 x^k + a_1 x^{k+1} + a_2 x^{k+2} + \cdots \qquad (5.4)$$

şeklinde aranır.

Tanım 5.2.1 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ denkleminin $x_0 = 0$ düzgün tekil noktası olmak üzere $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+k}$ çözümünü denklemde yerine yazmak suretiyle buradan elde edilen en küçük üslü terimin katsayısı sıfıra eşitlenerek elde edilen denkleme indisyel denklem denir.

Teorem 5.2.1 İndisyel denklemin kökleri k_1, k_2 olmak üzere

i) $k_1 > k_2$ ve $k_1 - k_2 \notin \mathbb{Z}$ ise;

$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+k_1}$ ve $y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+k_2}$ şeklinde lineer bağımsız iki çözüm bulunarak genel çözüm

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

yazılır.

ii) k_1=k_2 ise;

$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+k_1}$ ve $y_2 = \frac{\partial}{\partial k} y(x,k)_{k=k_1}$ şeklinde lineer bağımsız iki çözüm bulunarak genel çözüm

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

yazılır.

iii) $k_1 > k_2$ ve k_1-$k_2 \in \mathbb{Z}$ ise;

$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+k_1}$ ve $y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+k_2} + c y_1(x) lnx$ şeklinde lineer bağımsız iki çözüm bulunarak genel çözüm

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

şeklinde yazılır.

Örnek 5.2.1 $3x^2y'' - 2xy' - (2 + x^2)y = 0$ denklemini $x_0 = 0$ noktası civarında kuvvet serisi yöntemiyle çözünüz.

Çözüm.

1.adım $x_0 = 0$ noktası denklemin düzgün tekil noktasıdır. Çünkü denklem

$$y'' - \frac{2x}{3x^2}y' - \frac{(2+x^2)}{3x^2}y = 0$$

şeklinde yazılırsa $P(x) = \frac{-2x}{3x^2} = \frac{-2}{3x}$ ve $Q(x) = -\frac{(2+x^2)}{3x^2}$ fonksiyonları $x_0 = 0$ noktasında analitik değildirler fakat $xP(x) = \frac{-2x}{3}$ ve $x^2Q(x) = -\frac{(2+x^2)}{3}$ fonksiyonları $x_0 = 0$ noktasında analitiktirler. Yani Taylor serisine açılabilirler.

Dolayısıyla çözümleri $y = x^k \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{k+n}$ şeklinde aramalıyız. Bu şekilde çözüm arama yöntemine Frobenius yöntemi denmektedir.

2.adım. Türevler alınarak denklemde yerine yazılır ve *x* in kuvvetlerine göre sıralama yapılır.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{k+n} = a_0x^k + a_1x^{k+1} + a_2x^{k+2} + \cdots$$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty}(k+n)a_n\, x^{k+n-1} = ka_0x^{k-1} + (k+1)a_1x^k + (k+2)a_2x^{k+1} + ..$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty}(k+n)(k+n-1)a_n\, x^{k+n-2} = k(k-1)a_0x^{k-2} + k(k+1)a_1x^{k-1} + (k+2)(k+1)a_2x^k + \ldots$$

Uyarı. Türevlerde *n* hep sıfırdan başlıyor. (Dikkat!...)

$$3x^2y'' = 3k(k-1)a_0x^k + 3\,k(k+1)a_1x^{k+1} + 3(k+2)(k+1)a_2x^{k+2} + \cdots$$

$$-2xy' = -2ka_0x^k - 2(k+1)a_1x^{k+1} - 2(k+2)a_2x^{k+2} + \ldots$$

$$-2y = -2a_0x^k - 2a_1x^{k+1} - 2a_2x^{k+2} \ldots$$

$$-x^2y = -a_0x^{k+2} - a_1x^{k+3} - a_2x^{k+4} \ldots$$

ifadelerini alt alta toplayalım

$$0 = [(3k(k-1) - 2k - 2)a_0]x^k + [(3k(k+1) - 2(k+1) - 2)a_1]x^{k+1} +$$

$$+[\{3(k+1)(k+2) - 2(k+2) - 2\}a_2 - a_0]x^{k+2} + \ldots$$

veya

$$0 = [(3k+1)(k-2)a_0]x^k + [(3(k+1)+1)((k+1)-2)a_1]x^{k+1} +$$

$$+[\{3(k+2)+1\}\{(k+2)-2\}a_2 - a_0]x^{k+2} + \cdots +$$

$$+[\{3(k+n)+1\}\{(k+n)-2\}a_n - a_{n-2}]x^{k+n} + \cdots$$

yazılır.

3.adım. Son eşitlikte en küçük dereceli x in katsayısı ($a_0 \neq 0$) kabulü altında sıfıra eşitleyerek indis denklemi bulunur.

$(3k+1)(k-2)a_0 = 0$ eşitliğinden $k = 2$, $k = -1/3$ indis denkleminin köklerini elde ederiz.

Diğer terimler sıfıra eşitlenerek

$$(3(k+1)+1)\big((k+1)-2\big)a_1 = 0 \Longrightarrow a_1 = 0$$

$$\{3(k+2)+1\}\{(k+2)-2\}a_2 - a_0 = 0 \ \Longrightarrow \ a_2 = \frac{a_0}{[3(k+2)+1][(k+2)-2]}$$

ve rekurans bağıntısı

$$\{3(k+n)+1\}\{(k+n)-2\}a_n - a_{n-2} = 0 \ \Longrightarrow \ a_n = \frac{a_{n-2}}{[3(k+n)+1][(k+n)-2]}\,,\ n=2,3,\ldots$$

olarak bulunur.

4.adım. k_1-$k_2 = 2-(-1/3) = 7/3 \notin \mathbb{Z}$. (Teorem 5.2.1 (i) şıkkı)

$k = k_1 = 2$ için $a_n = \frac{a_{n-2}}{[3(2+n)+1][(2+n)-2]} = \frac{a_{n-2}}{n(3n+7)}$, n=2,3,… bağıntısından

$a_2 = \frac{a_0}{2.13} = \frac{a_0}{26}$, $a_4 = \frac{a_2}{4.19} = \frac{a_0}{1976}$, … ve

$$y_1 = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = a_0 x^2 \left(1 + \frac{1}{26} x^2 + \frac{1}{1976} x^4 + \cdots\right)$$ özel çözümü bulunur.

Benzer şekilde

$k = k_1 = -1/3$ için $a_n = \dfrac{a_{n-2}}{[3(n-1/3)+1][(n-1/3)-2]} = \dfrac{a_{n-2}}{n(3n-7)}$, n=2,3,… bağıntısından

$a_2 = \dfrac{-a_0}{2} = \dfrac{a_0}{26}$, $a_4 = \dfrac{a_2}{4.5} = \dfrac{-a_0}{40}$, $a_6 = \dfrac{a_4}{6.11} = \dfrac{-a_0}{2640}$, … ve

$$y_2 = x^{-1/3} \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = a_0 x^{-\frac{1}{3}} \left(1 - \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{40} x^4 - \frac{1}{2640} x^6 - \cdots\right)$$ özel çözümü bulunur.

Genel çözüm $y_g = c_1 y_1 + c_2 y_2$ şeklinde yazılır.