DETERMİNANT

Analitik Geometri ve Çözümlü Problemler

4.Baskı

M.Özdemir, Altın Nokta Yayınevi, 2020

Tanım

A kümesi $n > 1$ elemanlı sonlu bir küme olsun. $\sigma : A \to A$ fonksiyonu 1-1 ve örten ise, σ fonksiyonuna bir **permütasyon** denir. A kümesinden, kendisine $n!$ tane permütasyon tanımlanabilir. Bir permütasyonu,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

şeklinde veya kısaca

$$\sigma(1)\sigma(2)\sigma(3)\dots\sigma(n)$$

şeklinde gösteririz. Ayrıca, $\{1, 2, ..., n\}$ kümesinde tanımlanan tüm permütasyonların kümesi

$$S_n$$

ile gösterilir.

Örnek

$A = \{1, 2, 3\}$ kümesini gözönüne alalım. Bu kümede 3! permütasyon tanımlanabilir. Bunlar :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 123, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = 132,$$
$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 213, \quad \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 231,$$
$$\sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 312, \quad \sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 321$$

şeklindedir. Bu permütasyonlara göre, örneğin σ_2 permütasyon fonksiyonu için, $\sigma_2(1) = 1, \sigma_2(2) = 3$, $\sigma_2(3) = 2$ olur. Bir permütasyon fonksiyonunu, gösterim kolaylığı açısından $\sigma(1)\sigma(2)\sigma(3)...\sigma(n)$ şeklinde sadece sıralı elemanların görüntüsünü yazarak göstereceğiz.

Örneğin, $\sigma_2 = \binom{1\ 2\ 3}{1\ 3\ 2}$ yerine sadece $\sigma_2 = 132$, $\sigma = \binom{1\ 2\ 3\ 4\ 5}{1\ 3\ 4\ 5\ 2}$ yerine sadece $\sigma =$13452 yazacağız. Kısaca, üstteki sıralı sayıları her defasında yazmayacağız.

Tek veya Çift Permütasyon

Tanım

Herhangi bir $\{1, 2, ..., n\}$ kümesindeki birim permütasyon olarak isimlendirilen $123...n$ permütasyonuna çift permütasyon diyeceğiz. Bu permütasyonda elemanların yerlerini değiştirerek yeni permütasyonlar elde edebiliriz. $123...n$ permütasyonunda k defa iki elemanın yeri değiştirilmiş olsun, k tek ise elde edilen yeni permütasyona **tek**, k çift ise elde edilen yeni permütasyona **çift permütasyon** diyeceğiz.

Bir permütasyonun çift veya tek olduğunu anlamak için, permütasyonda her defasında iki elemanın yeri değiştirilerek birim permütasyon elde edilmeye çalışılır. Tek sayıda adımda bunu yapabilirsek permütasyon tek, aksi halde çifttir. $\varepsilon(\sigma)$ ile σ permütasyonunun işaretini göstereceğiz. σ bir çift permütasyon ise $\varepsilon(\sigma) = +1$, aksi halde yani σ bir tek permütasyonsa $\varepsilon(\sigma) = -1$ şeklinde ifade edeceğiz.
Örneğin, $\sigma = 23514$ permütasyonuna bakalım.

$$23514 \rightarrow 13524 \rightarrow 12534 \rightarrow 12354 \rightarrow 12345$$

Görüldüğü gibi, 4 adımda (ok) birim permütasyona ulaştık. O halde, bu permütasyon çifttir.

Örnek

S_7 kümesinde verilen $\sigma = 6271543$ permütasyonunun işaretini bulunuz.

Çözüm

Her defasında iki elemanın yerini değiştirerek birim permütasyonu elde edelim.

$$\sigma = \mathbf{6}27\mathbf{1}543 \longrightarrow 12\mathbf{7}654\mathbf{3} \longrightarrow 123\mathbf{6}54\mathbf{7} \longrightarrow 1234567$$

olduğundan, 3 adımda birim permütasyonu elde ettik. Buna göre σ bir tek permütasyondur ve $\varepsilon(\sigma) = -1$'dir.

Problem

Aşağıdaki permütasyonların işaretini bulunuz.
a) $\sigma_1 = 32451 \in S_5$ *b)* $\sigma_2 = 324165 \in S_6$ *c)* $\sigma_3 = 3426517 \in S_7$

Determinant

Tanım

$A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisinin **determinantı**, $\det A$ veya $|A|$ ile gösterilir. $\sigma \in S_n$ bir permütasyon ve $\varepsilon(\sigma)$, σ permütasyonunun işaretini göstermek üzere,

$$\det A = \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

şeklinde tanımlanır.

Bir kare matriste, her defasında her satır ve sütundan sadece 1 eleman almak koşuluyla, bu elemanlar ile, elemanların yerlerini ifade eden permütasyonun işareti çarpılarak elde edilecek tüm değerlerin toplamı, bu matrisin determinantını verir.

$$\boxed{\det A = \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)}}$$

Örnek

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} \\ \mathbf{a}_{22} & \mathbf{a}_{22} \end{bmatrix}$ **matrisinin determinantını tanımından yararlanarak bulunuz.**

Çözüm

$\{1, 2\}$ *kümesinde tanımlanan permütasyonlar kümesi*

$$S_2 = \{\sigma_1 = 12, \sigma_2 = 21\}$$

şeklindedir. Permütasyonların işareti de sırasıyla $\varepsilon(12) = 1$ *ve* $\varepsilon(21) = -1$*'dir. Buna göre,*

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \\ &= \varepsilon(12)\, a_{11} a_{22} + \varepsilon(21)\, a_{12} a_{21} \\ &= a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ **matrisinin determinantını tanımından yararlanarak bulunuz.**

Çözüm

Bu kez 6 permütasyon var. Bunlar ve işaretleri

$$\varepsilon(123) = \varepsilon(231) = \varepsilon(312) = 1 \quad ve \quad \varepsilon(132) = \varepsilon(213) = \varepsilon(321) = -1$$

şeklindedir. Buna göre

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} \\ &= \varepsilon(123)\, a_{11}a_{22}a_{33} + \varepsilon(231)\, a_{12}a_{23}a_{31} + \varepsilon(312)\, a_{13}a_{21}a_{32} \\ &+ \varepsilon(132)\, a_{11}a_{23}a_{32} + \varepsilon(213)\, a_{12}a_{21}a_{33} + \varepsilon(321)\, a_{13}a_{22}a_{31} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Örnek

A= $\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{a} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ **matrisinin determinantını tanımı kullanarak bulunuz.**

Çözüm

Determinant tanımına göre,

$$\det A = \varepsilon\,(231)\, a_{12} a_{23} a_{31}$$

değerine eşittir. Determinant toplamındaki diğer tüm terimler sıfırdır. Determinant tanımına göre, her satır ve sütundan sadece 1 eleman alıp, bunların çarpımlarının, bu elemanların bulundukları sütunların oluşturduğu permütasyonun işaretiyle çarpıldığına dikkat ediniz. Buna göre,

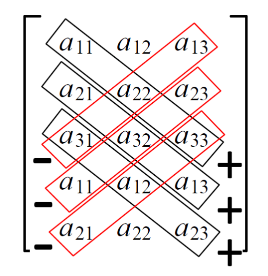
$$\varepsilon\,(231) = -\varepsilon\,(132) = \varepsilon\,(123) = +1$$

olduğundan, $\det A = abc$ *elde edilir.*

Sarrus Kuralı (Dikkat Sadece 3x3 Matrisler İçin Geçerlidir)

NOT

3×3 *türündeki matrislerin determinantını hatırlamak ve hesaplamayı kolaylaştırmak için* **Sarrus Kuralı** *olarak bilinen aşağıdaki kural uygulanabilir. Matrisin ilk iki satırı matrisin altına tekrar yazılarak, asal köşegene paralel olan üçlülerin çarpımı pozitif, diğer köşegene paralel olan üçlülerin çarpımı da negatif alınarak, tüm değerler toplanır ve determinant bulunur.*



Örnek

$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ **matrisinin determinantını bulunuz.**

Çözüm

Sarrus kuralı uygulanırsa,

$$\begin{array}{rcccccl} & & \multicolumn{3}{c}{\left[\begin{array}{ccc} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{array}\right]} & & \\ 0 = -2\cdot 0\cdot 3 & & & & & & +0\cdot 0\cdot 2 = 0 \\ 0 = -0\cdot 3\cdot 1 & & 0 & 2 & 3 & & +4\cdot 3\cdot 3 = 36 \\ -16 = -4\cdot 2\cdot 2 & & 4 & 0 & 1 & & +2\cdot 2\cdot 1 = 4 \end{array}$$

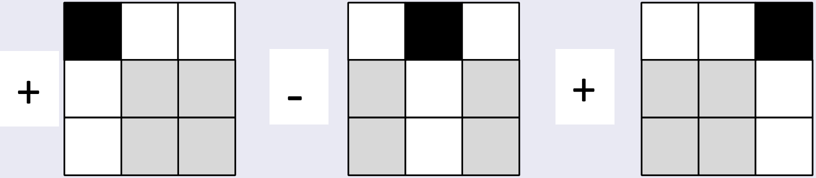
olduğundan, $\det A = (36+4)-(16) = 24$ *bulunur.*

Problem

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$ *matrisinin determinantını hesaplayınız.*

NOT

3×3 *bir matrisin determinantını hesaplamanın bir diğer pratik yolu da, daha sonra göreceğimiz Kofaktör yöntemidir. Aşağıdaki görsel olarak belirtildiği gibi, birinci satırdaki her koyu kare içindeki eleman, diğer taralı karelerle oluşan* 2×2 *türündeki matrisin determinantıyla çarpılır. Daha sonra, bulunan determinantların birincisi ve sonuncusu toplanıp, ikincisi çıkarılır.*



Problem

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$ *matrisinin determinantını hesaplayınız.*

Örnek

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ **matrisinin determinantını bulunuz.**

Çözüm

Yukarıdaki yöntemle,

$$\det A = +0 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 24$$

elde edilebilir.

Problem

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$ *matrisinin determinantını hesaplayınız.*

Problem

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$ *matrisinin determinantını hesaplayınız.*

Dikkat !!!

NOT

Sarrus kuralının sadece 3×3 *matrislerde geçerli olduğunu, başka hiçbir kare matriste bu kuralın uygulanamayacağını asla unutmayınız. Örneğin* 4×4 *bir matriste bu kural uygulanamaz.* 4×4 *bir matrisin determinantını farklı yöntemlerle bulabiliriz. Aşağıda, basit* 4×4 *matrislerin determinantının, determinant tanımı kullanılarak nasıl bulunduğunu inceleyiniz.*

UNUTMA !

SARRUS KURALI SADECE 3x3 MATRİSLER İÇİN GEÇERLİ!

Örnek

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$ **matrisinin determinantını, determinant tanımını kullanarak bulunuz.**

Çözüm

Matrisin tüm elemanları sıfırdan farklı olsaydı $4! = 24$ *farklı durum için hesaplama yapmamız gerekirdi. Determinant tanımı bize her satır ve sütundan bir eleman alacağımızı ifade eder. İkinci satırdan sadece 4'ü alabiliriz. Çünkü diğer elemanlar sıfırdır. Dolayısıyla bu elemanın bulunduğu birinci sutundan başka eleman alamayız. Benzer şekilde, dördüncü sütundan 5', birinci sütundan alabileceğimiz bir tek eleman 4 olduğundan, üçüncü satırdan sadece 3'ü alabiliriz. Geriye birinci satırdan alabileceğimiz tek eleman 3 kalır. Yani, determinantın değeri :*

$$\det A = \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} a_{4\sigma(4)} = \varepsilon(3124)\, a_{13} a_{21} a_{32} a_{44}$$

değerine eşittir. $\varepsilon(3124) = -\varepsilon(1324) = \varepsilon(1234) = 1$ *olduğundan,*
$\det A = 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 = 180$ *bulunur.*

Örnek

Permütasyonlu determinant tanımını kullanarak, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

matrisinin determinantını bulunuz.

Çözüm

İlk satırdan ya a_{11} *ya da* a_{15} *elemanı alınabilir.*

$$\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{11} & a_{15} \\ a_{23} & a_{25} & a_{23} \\ a_{35} & a_{33} & 0 \\ a_{44} & a_{44} & \\ a_{52} & a_{52} & \\ \hline \sigma_1 = 13542 & \sigma_2 = 15342 & \end{array}$$

Çözüm

Buna göre,

$$\varepsilon(13542) = -\varepsilon\,(12543) = \varepsilon\,(12345) = 1 \quad ve \quad \varepsilon\,(15342) = -\varepsilon\,(12345) = -1$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}
\det A &= \sum_{\sigma\in S_5} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} a_{4\sigma(4)} a_{5\sigma(5)} \\
&= \varepsilon(13542) a_{11} a_{23} a_{35} a_{44} a_{52} + \varepsilon(15342) a_{11} a_{25} a_{33} a_{44} a_{52} \\
&= (1)\,(-1)\,(4)\,(1)\,(2) - (1)\,(-2)(-3)\,(1)\,(2) \\
&= -20
\end{aligned}$$

elde edilir.

Problem

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$ *matrisinin determinantını bulunuz.*

Problem

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$ *matrisinin determinantını bulunuz.*

Teorem

A, $n \times n$ türünden bir kare matris olsun. A matrisinin herhangi iki satırı (sütunu) yer değiştirildiğinde elde edilen matris B ise

$$det(B) = -det(A)$$

dır.

Kanıt.

A matrisinin r-inci satırı ile s-inci satırının yerini değiştirelim. Bu matris B olsun. r ve s numaralı satırlar yer değiştirdiğinden, permütasyonların işaretinde $\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_r \ldots i_s \ldots i_n}$ ifadesindeki, i_r ve i_s yer değiştireceğinden,

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_r \ldots i_s \ldots i_n} = -\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_s \ldots i_r \ldots i_n}$$

olacaktır. Her terimdeki, i_r ve i_s yer değişeceğinden, $\det A = -\det B$ elde edilir. □

Teorem

A, $n \times n$ türünden bir kare matris olsun. A matrisinin herhangi bir satırındaki tüm elemanlar bir λ sayısıyla çarpıldığında elde edilen matris B ise
$\det B = \lambda \det A$ *olur.*

Kanıt.

$\det A = \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{r\sigma(r)} \dots a_{n\sigma(n)}$ olsun. A matrisinin $r-inci$ satırındaki, tüm elemanları λ ile çarpılarak elde edilen matris B olsun.

$$\begin{aligned}\det B &= \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots \left(\lambda a_{r\sigma(r)}\right) \dots a_{n\sigma(n)} = \lambda \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots \left(a_{r\sigma(r)}\right) \dots a_{n\sigma(n)} \\ &= \lambda \det A\end{aligned}$$

elde edilir. □

Sonuç

Bu özelliğin bir sonucu olarak, $A = (a_{ij})_{n \times n}$ olmak üzere, $det(\lambda A) = \lambda^n det(A)$ olur..

Örnek

$A = [a_{ij}]_{5\times 5}$ matrisinin determinantı 2'dir. A matrisinin 2'inci satırı 3 ile çarpılarak bir B matrisi elde ediliyor. B matrisinin determinantı ne olur?

Çözüm

Sadece bir satır 3 ile çarpıldığından, yeni elde edilen B matrisinin determinantı,
$\det B = 3\det A = 3 \cdot 2 = 6$ *olur.*

Örnek

$A = [a_{ij}]_{5\times 5}$ matrisinin determinantı 3 ise $\det(2A) = ?$

Çözüm

A matrisinin 2 ile çarpılması demek, bütün satırların 2 ile çarpılması demektir. 5 satır olduğundan, $\det(2A) = 2^5 \det A = 32 \cdot 3 = 96$ *olur.*

Problem

$\det A = 5$ *olan* $A = [a_{ij}]_{4\times 4}$ *matrisi önce 2 ile çarpılıyor, sonra da üçüncü satırı 4'e bölünüyor. Elde edilen son matrisin determinantı kaçtır?*

Teorem

Bir kare matrisin herhangi iki satırı (veya sütunu) aynı ya da orantılı ise determinantı sıfırdır.

Kanıt.

Bir A matrisinin iki satırının aynı olduğunu kabul edelim. A matrisinin herhangi iki satırının yeri değiştiğinde, determinantın işaret değiştirdiğini ilk teoremde görmüştük. Diğer taraftan, aynı olan iki satırın yerini değiştirdiğimizde matris, dolayısıyla da determinant değişmez. O halde,

$$\det A = -\det A \Rightarrow 2\det A = 0 \Rightarrow \det A = 0$$

elde edilir. Şimdi de, iki satırın orantılı olduğunu kabul edelim. Matrisin, $s - inci$ satırı, $r - inci$ satırın λ katı olsun. Buna göre, Teorem 2.2'den, λ determinantın dışına çıkarılabilir. Böylelikle, matrisin determinantı, iki satırı aynı olan bir matrisin determinantının λ katı olur. İki satır aynı ise determinant sıfır olacağından, matrisin determinantı $\lambda \cdot 0 = 0$ elde edilir. $\square$

Örnek

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \\ 4 & 6 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$ **matrisinin determinantı kaçtır?**

Çözüm

Üçüncü satır, ikinci satırın katı olduğundan, yani matrisin iki satırı orantılı olduğundan determinant sıfırdır.

Problem

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 7 & 3 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & 6 & 3 \\ 2 & 7 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$ *matrisinin determinantı kaçtır?*

Teorem

Bir kare matrisin herhangi bir satırının (veya sütununun) tüm elemanları sıfır ise determinantı sıfırdır.

Kanıt.

Bir A kare matrisinin $r-inci$ satırındaki tüm elemanlar 0 olsun.

$$\det A = \sum_{\sigma} \varepsilon\left(\sigma\right) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)}$$

tanımına göre, $\det A$ daki her terim $r-inci$ satırdan bir elemanı çarpan olarak içermektedir. Bu elemanlar 0 olduğundan, $\det A = 0$ elde edilir. □

Teorem

Bir A matrisinin r-inci satırındaki her eleman, k tane terimin toplamı şeklindeyse, $\det A$, *k tane determinantın toplamına eşittir.*

Kanıt.

$\det A = \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{r\sigma(r)} \ldots a_{n\sigma(n)}$ ve $a_{r\sigma(r)} = \mathbf{a}^1_{r\sigma(r)} + \mathbf{a}^2_{r\sigma(r)} + \ldots + \mathbf{a}^k_{r\sigma(r)}$ olmak üzere,

$$\sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots \mathbf{a}^j_{r\sigma(r)} \ldots a_{n\sigma(n)} = \det A_j$$

ile gösterelim. r'inci satırdaki her eleman k tane elemanın toplamıdır. Buna göre, $\det A$

$$\begin{aligned}
\sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \ldots a_{r\sigma(r)} \ldots a_{n\sigma(n)} &= \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \ldots \left(\mathbf{a}^1_{r\sigma(r)} + \mathbf{a}^2_{r\sigma(r)} + \ldots + \mathbf{a}^k_{r\sigma(r)}\right) \ldots a_{n\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots \left(\mathbf{a}^1_{r\sigma(r)}\right) \ldots a_{n\sigma(n)} + \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots \left(\mathbf{a}^2_{r\sigma(r)}\right) \ldots a_{n\sigma(n)} \\
&+ \ldots + \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots \left(\mathbf{a}^k_{r\sigma(r)}\right) .. a_{n\sigma(n)} = \det A_1 + \det A_2 + \cdots + \det A_k
\end{aligned}$$

olduğu görülür. □

Örnek

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 101 & 102 & 103 & 104 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$ **determinantının 100'e bölünebildiğini gösteriniz.**

Çözüm

Üçüncü satırı, toplananlardan biri 100 olacak şekilde, iki sayının toplamı olarak yazalım. Daha sonra üstteki teoremleri kullanacağız.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 101 & 102 & 103 & 104 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 100 & 100 & 100 & 100 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. İlk determinant, 1'inci ve 3'üncü satırlar eşit olduğundan 0'dır. İkinci determinantta ise, üçüncü satırdan 100 determinantın çarpanı olarak dışarı çıkabilir. O halde, verilen matrisin determinantı 100'e bölünür.

Teorem

Bir A kare matrisinin herhangi bir satırı (sütunu) λ gibi bir sayıyla çarpılıp, başka bir satırına (sütununa) eklendiğinde elde edilen matris B ise

$$det(B) = det(A)$$

dır.

Kanıt.

$A = [a_{ij}]_{n\times n}$ olsun. A matrisinin $r - inci$ satırını λ ile çarpıp, $s - inci$ satırına ekleyelim. Bu matris $B = [b_{ij}]_{n\times n}$ olsun. Burada, $i = s$ için, $b_{sj} = a_{sj} + \lambda a_{rj}$ ve $i \neq s$ için, $b_{ij} = a_{ij}$'dir. Buna göre, Teorem 2.5 kullanılırsa, determinantın s'inci satırındaki her bir eleman 2 elemanın toplamı olduğundan, det B 'yi iki determinantın toplamı olarak

$$\det B = \det[b_{ij}] = \det[a_{ij}] + \det C$$

şeklinde yazabiliriz. Diğer yandan, buradaki C matrisinin s'inci satırı, r'inci satırının λ katıdır ve $\det C = 0$ olur. Böylece, $\det B = \det A$ olur. □

Örnek

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$ **matrisinin determinantı kaçtır?**

Çözüm

$S_2 \to S_2 + S_1$ ve $S_4 \to S_4 + S_3$ elemanter operasyonu yaparsak, determinant değişmez.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[]{\substack{S_2 \to S_2 + S_1 \\ S_4 \to S_4 + S_3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Yeni elde edilen matriste, ikinci ve dördüncü satır orantılı olduğundan, ($S_2 = -S_4$), determinant sıfırdır.

Problem

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$ *matrisinin determinantı kaçtır?*

Problem

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 16 & 15 & 14 & 13 \end{bmatrix}$$ *matrisinin determinantı kaçtır?*

Teorem

Bir matrisin herhangi bir satırı diğer satırlar cinsinden yazılabiliyorsa, yani bir satır diğer satırlara bağımlı ise, bu matrisin determinantı sıfırdır.

SONUÇLAR

Sonuç

Bir kare matrise yapılan elemanter operasyonlar determinantı aşağıdaki gibi etkiler.

1. *İki satırın yer değiştirilmesi determinantı etkiler ve determinant işaret değiştirir.*

2. *Bir satırın bir λ reel sayısı ile çarpılması determinantı etkiler ve yeni matrisin determinantı eski matrisin determinantının λ katı olur.*

3. *Bir satırın bir λ katının başka bir satıra ilave edilmesi, determinantı değiştirmez.*

Örnek

4×4 türünde verilen bir A matrisinin determinantı 3'tür. A matrisi 2 ile çarpılarak B matrisi elde ediliyor. B matrisine sırasıyla aşağıdaki elemanter satır operasyonları uygulanarak C, D ve E matrisleri elde ediliyor.

$$\boxed{B} \xrightarrow{S_1 \to S_2 - 3S_1} \boxed{C} \xrightarrow{S_2 \longleftrightarrow S_3} \boxed{D} \xrightarrow{S_1 \to 3S_2 + 2S_3} \boxed{E}$$

Bu matrislerin determinantlarını bulunuz.

Çözüm

A matrisi 4×4 türünden bir matristir. 2 ile çarpıldığı zaman elde edilen B matrisinin determinantı :

$$\det B = 2^4 \det A = 16 \cdot 3 = 48$$

olur. Diğer determinantlar da,

$$\det C = (-3) \det B = -3 \cdot 48 = -144, \qquad \det D = (-1) \det C = 144$$

ve $\det E = 0$*'dır.*

Problem

$A = [a_{ij}]_{5\times 5}$ ve $\det A = 6$ *olmak üzere,* A *matrisi* $1/2$ *ile çarpılarak* B *matrisi elde ediliyor.* B *matrisine sırasıyla aşağıdaki elemanter satır operasyonları uygulanarak* C, D *ve* E *matrisleri elde ediliyor.*

$$\boxed{B} \xrightarrow{S_1 \to S_2 + 4S_1} \boxed{C} \xrightarrow{S_2 \to 2S_2 + S_3} \boxed{D} \xrightarrow{S_3 \longleftrightarrow S_4} \boxed{E}$$

Bu matrislerin determinantlarını bulunuz.

Problem

$A = [a_{ij}]_{5\times 5}$ *ve* $\det A = 2$ *olmak üzere, A matrisinin devriği alınarak B matrisi elde ediliyor. B matrisine sırasıyla aşağıdaki elemanter satır operasyonları uygulanarak C, D ve E matrisleri elde ediliyor.*

$$\boxed{B} \xrightarrow{S_1 \to 2S_2 + S_1} \boxed{C} \xrightarrow{S_3 \longleftrightarrow S_4} \boxed{D} \xrightarrow{S_2 \to 2S_4 + S_3} \boxed{E}$$

Bu matrislerin determinantlarını bulunuz.

Örnek

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{8} & \mathbf{7} & \mathbf{6} & \mathbf{5} \\ \mathbf{9} & \mathbf{10} & \mathbf{11} & \mathbf{12} \\ \mathbf{16} & \mathbf{15} & \mathbf{14} & \mathbf{13} \end{bmatrix}$$ **matrisinin determinantı kaçtır?**

Çözüm

Determinantı değiştirmeyecek elemanter satır operasyonlarını çok farklı şekilde kullanabiliriz. 2 şekilde çözelim.

1. Yol : *İşlemleri satırlarda yapabiliriz.*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 16 & 15 & 14 & 13 \end{bmatrix} \xrightarrow[\;]{\substack{S_1 \to S_1 + S_2 \\ S_3 \to S_3 + S_4}} \begin{bmatrix} 9 & 9 & 9 & 9 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 25 & 25 & 25 & 25 \\ 16 & 15 & 14 & 13 \end{bmatrix}$$

matrisinde, birinci ve üçüncü satırlar orantılı olduğundan, determinant sıfırdır.

Çözüm

2. Yol : *İşlemleri kolonlarda yapabiliriz.*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 16 & 15 & 14 & 13 \end{bmatrix} \xrightarrow[K_3 \to K_3 - K_4]{K_1 \to K_1 - K_2} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 7 & 1 & 5 \\ -1 & 10 & -1 & 12 \\ 1 & 15 & 1 & 13 \end{bmatrix}$$

matrisinde, birinci ve üçüncü kolonlar eşit olduğundan, determinant sıfırdır.

Örnek

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{7} & \mathbf{6} & \mathbf{8} \\ \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{13} & \mathbf{12} \\ \mathbf{4} & \mathbf{8} & \mathbf{12} & \mathbf{19} \end{bmatrix}$ **simetrik matrisinin determinantı kaçtır?**

Çözüm

Determinantı değiştirmeyecek şekilde elemanter satır operasyonlarını uygulayalım.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 13 & 12 \\ 4 & 8 & 12 & 19 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{S_2 \to S_2 - 2S_1 \\ S_3 \to S_3 - 3S_1 \\ S_4 \to S_4 - 4S_1}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

şeklinde yapılan elemanter satır operasyonlarının hiçbiri determinantı değiştirmez. Diğer yandan, determinant tanımına göre, elde edilen son matriste, son satırdan sadece a_{44}, üçüncü satırdan a_{33}, ikinci satırdan a_{22} ve birinci satırdan da a_{11} alınabilir. O halde, permütasyonumuz, $\sigma = 1234$ olur ve $\det A = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} = 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 = 36$ elde edilir.

Örnek

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 11 & 11 \\ 1 & 2 & 5 & 11 & 15 \end{bmatrix}$$ **matrisinin determinantı kaçtır?**

Çözüm

Önce, ilk satırı diğer tüm satırlardan çıkaralım. Bu determinantı değiştirmez.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 11 & 11 \\ 1 & 2 & 5 & 11 & 15 \end{bmatrix} \xrightarrow[]{\substack{S_2 \to S_2 - S_1 \\ S_3 \to S_3 - S_1 \\ S_4 \to S_4 - S_1 \\ S_5 \to S_5 - S_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 10 & 10 \\ 0 & 1 & 4 & 10 & 14 \end{bmatrix}$$

Şimdi ise, ikinci satırı, 3'üncü, 4'üncü ve 5'inci satırlardan çıkaralım.

Çözüm

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 10 & 10 \\ 0 & 1 & 4 & 10 & 14 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{S_3 \to S_3 - S_2 \\ S_4 \to S_4 - S_2 \\ S_5 \to S_5 - S_2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 9 & 13 \end{bmatrix}$$

Benzer düşünceyle, üçüncü satırı 4'üncü ve 5'inci satırlardan çıkaralım.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 9 & 13 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{S_4 \to S_4 - S_3 \\ S_5 \to S_5 - S_3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 10 \end{bmatrix}$$

Çözüm

Bundan sonra geriye, 4'üncü satırı 5'inci satırdan çıkarmak kalır. Böylelikle matrisi eşelon forma getirmiş oluruz.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 10 \end{bmatrix} S_5 \rightarrow S_5 - S_4 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Bu üst üçgensel matrisin determinantı ise asal köşegen üzerindeki elemanların çarpımına eşittir. Buna göre,

$$\det A = 3 \cdot 6 \cdot 4 = 72$$

elde edilir.

Problem

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 6 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 10 & 10 \\ 2 & 4 & 6 & 10 & 13 \end{bmatrix}$$ **matrisinin determinantı kaçtır?**

Örnek

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$ **matrisinin determinantını bulunuz.**

Çözüm

En alt satırdan başlayarak, her satırdan bir üstündeki satırı çıkarırsak,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Çözüm

Şimdi, beşinci kolonu diğer tüm kolanlara ilave edersek.

$$\begin{bmatrix} 6 & 7 & 8 & 9 & 5 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

bulunur. Buradan, matrisin determinantı $6 \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-1) = 48$ *elde edilir.*

Problem

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 & 8 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 6 & 4 & 2 & 0 & 2 \\ 8 & 6 & 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$ **matrisinin determinantı kaçtır?**

Kofaktör ve Minör

Tanım

$A = [a_{ij}]_{n\times n}$ matrisinin a_{rs} elemanının bulunduğu satır ve sütunun silinmesiyle elde edilen $(n-1)\times(n-1)$ türünden matrisin determinantına a_{rs} elemanının **minörü** denir ve M_{rs} ile gösterilir.

$$A_{rs} = (-1)^{r+s} M_{rs}$$

ile tanımlanan A_{rs} ifadesine de, a_{rs} **elemanının kofaktörü** denir.

Örnek

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ -2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$ **matrisinin $\mathbf{A_{23}}$, $\mathbf{A_{31}}$, $\mathbf{A_{33}}$ kofaktörlerini bulunuz.**

Çözüm

İstenen kofaktörler,

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = -5, \quad A_{31} = (-1)^{3+1} \det \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = -18,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = 8$$

elde edilir.

Problem

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ *matrisinin kofaktörlerini bulunuz.*

Teorem

A_{rs} , $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ *kare matrisinin* a_{rs} *elemanının kofaktörü olsun. Buna göre,*

$$\det A = \sum_{s=1}^{n} a_{rs}A_{rs} = a_{r1}A_{r1} + a_{r2}A_{r2} + \ldots + a_{rn}A_{rn} \text{ (r-inci satır açılımı)}$$

veya

$$\det A = \sum_{r=1}^{n} a_{rs}A_{rs} = a_{1s}A_{1s} + a_{2s}A_{2s} + \ldots + a_{ns}A_{ns} \text{ (s-inci sütun açılımı)}$$

şeklindedir.

Kanıt : Bunun kanıtını Lineer Cebir dersine bırakıyoruz.

Örnek

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{5} \end{bmatrix}$$ **matrisinin determinantını bulunuz.**

Çözüm

En çok sıfır olan üçüncü satıra göre kofaktör açılımıyla determinantı hesaplayabiliriz.

$$\begin{aligned} \det A &= 3 \cdot (-1)^{3+2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \\ &= -3\left[(20+15)-(16+30)\right] \\ &= -3\,(-11) \\ &= 33. \end{aligned}$$

Problem

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$ *matrisinin determinantını bulunuz.*

Örnek

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & x & 2 \end{bmatrix}$$ **matrisinin determinantı 30 ise x =?**

Çözüm

İkinci sütuna göre kofaktör açılımı yapalım.

$$\det A = 2\cdot(-1)^{1+2}\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & x & 2 \end{bmatrix}$$

Şimdi $S_1 \to S_1 + S_2$, $S_4 \to S_4 + S_2$ *işlemi yapalım*

$$= (-2)\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x & 6 \end{bmatrix}$$

İlk satıra göre açalım.

$$= (-2)(5)(-1)^{1+4}\begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & x \end{bmatrix}$$

İlk satıra göre açalım.

$$= 10(-3)(-1)^{1+2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & x \end{bmatrix}$$

$$= 30(x-1) = 30 \Rightarrow x = 2$$

Örnek

A$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ **matrisinin determinantını hesaplayınız.**

Çözüm

Çözüm : *Çok farklı şekilde çözmek mümkündür. İki yöntemle çözelim.*
1. Yöntem : *En fazla sıfır bulunan üçüncü satıra göre, doğrudan determinant açılımı yapabiliriz. Buna göre,*

$$\det A = 2\,(-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} + 5\,(-1)^7 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-2)\,(-7) + (-5)\,(2) = 4$$

elde edilir.

Çözüm

2. Yöntem : *Üçüncü kolondaki sıfır sayısını, bir elemanter işlemle arttırabiliriz.*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{5} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} \end{bmatrix}$$

Buna göre, $S_1 \rightarrow S_1 + S_4$ *işlemi yapılıp, üçüncü kolona göre determinant açılımı yapılırsa,*

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1\left(-1\right)^7 \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 4$$

elde edilir.

Problem

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$ *matrisinin determinantını bulunuz.*

Problem

$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ *matrisinin determinantını bulunuz.*

Problem

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$ *matrisinin determinantını bulunuz.*

Örnek

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{a} \\ \mathbf{a} & \mathbf{n} & \mathbf{n} & \mathbf{e} \\ \mathbf{d} & \mathbf{e} & \mathbf{d} & \mathbf{e} \\ \mathbf{n} & \mathbf{n} & \mathbf{n} & \mathbf{n} \end{bmatrix}$$ **matrisinin determinantı kaçtır?**

Teorem

Alt üçgensel ya da üst üçgensel bir matrisin determinantı köşegen üzerindeki elemanların çarpımına eşittir.

Kanıt.

A matrisi bir üst üçgensel matris olsun. Buna göre,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Determinant tanımına göre, birinci kolondan sadece a_{11}, ikinci kolondan sadece a_{22}, ve bu şekilde devam ederek n'inci kolondan sadece a_{nn} değerlerini alıp çarpabiliriz. Burada, permütasyonumuz ise $\sigma = 123...n$ birim permütasyonu olduğundan işareti $+1$'dir. O halde, $\det A = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ olur. □

Kanıt.

2. Kanıt. Bu kez determinant açılımını kullanabiliriz. Determinantı sürekli ilk sütuna göre açarak, determinantın derecesini küçültebiliriz. Buna göre,

$$
\begin{aligned}
\det A &= a_{11}\,(-1)^2 \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{n-2} \begin{vmatrix} a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ 0 & a_{nn} \end{vmatrix}_{2\times 2} \\
&= a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Alt üçgensel matrisler için de benzer şekilde yapılabilir. □

Teorem

Bir A kare matrisinin transpozesi'nin determinantı, A matrisinin determinantına eşittir. Yani

$$\det(A) = \det(A^T)$$

dir.

SORU

Determinant açılımını kolona veya satıra göre yapabiliriz. Determinant değişmez. Buna göre, A matrisinde k'ıncı satıra göre yapılan bir determinat hesabı, A^T matrisinde k'ıncı kolona göre yapılan bir determinant hesabıdır. O halde, $\det(A) = \det(A^T)$ olur.

Örnek

A, $n \times n$ türünden bir ters simetrik matris olsun. n tek sayı ise det A=0 olacağını gösteriniz.

Çözüm

A ters simetrik ise, $A = -A^T$ *olduğundan,*

$$\det A = \det\left(-A^T\right) = (-1)^n \det A^T = (-1)^n \det A$$

olur. Buradan, n tek sayı ise, $2\det A = 0$ *eşitliğinden* $\det A = 0$ *bulunur. n çift olursa, determinantın değeri için birşey söylenemez.*

Teorem

A ve B, $n \times n$ türünden iki kare matris ise

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

eşitliği sağlanır.

Örnek

$\det \mathbf{A} \neq 0$ olmak üzere, $\det \mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{\det \mathbf{A}}$ olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm

$AA^{-1} = I$ eşitliğinde her iki tarafın determinantı alınırsa,

$$\det\left(AA^{-1}\right) = \det I \Rightarrow \det(A)\det\left(A^{-1}\right) = 1 \Rightarrow \det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det A}$$

elde edilir.

Örnek

$\det A \neq 0$ olmak üzere, $\det\left(A^n\right)=\left(\det A\right)^n$ olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm

$\det\left(A^n\right) = \det\left(A \cdot A \cdots A\right) = \det A \det A \cdots \det A = \left(\det A\right)^n$ *olur.*

Örnek

**A, B ve C matrisleri, 5×5 türünde matrisler olmak üzere,
$\det A = 5,\quad \det B = -12 \quad$ ve $\det C = 3$ olduğuna göre, $2AB^{-2}C^3$ matrisinin determinantı kaçtır?**

Çözüm

Matris çarpımlarının determinantlarının özellikleri kullanılırsa,

$$\det\left(2AB^{-2}C^3\right) = \det\left(2A\right) \cdot \det\left(B^{-2}\right) \cdot \det\left(C^3\right) = 2^5 \cdot \det A \cdot \frac{1}{\left(\det B\right)^2} \cdot \left(\det C\right)^3$$

$$= 2^5 5 \cdot \frac{1}{144} \cdot 3^3 = 30$$

Örnek

Ortogonal bir matrisin determinantının 1 veya -1 olduğunu, fakat determinantı ±1 olan bir matrisin, ortogonal matris olmayabileceğini gösteriniz.

Çözüm

A bir ortogonal matris ise, $AA^T = I$ eşitliği sağlanır. Determinant alınırsa,

$$\det\left(AA^T\right) = \det I \Rightarrow \det A \det A^T = 1 \Rightarrow (\det A)^2 = 1$$

elde edilir. O halde, A ortogonal ise, $\det A = \pm1$ olabilir. Fakat, determinantı ±1 olan bir matris ortogonal olmak zorunda değildir. Örneğin,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

matrisinin determinantı 1'dir. Ama bu matris ortogonal matris değildir.

Problem

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$ *matrisinin tersinin determinantı kaçtır?*

Problem

A, B, C *matrisleri* 4×4 *türünden üç matristir.* $\det A = 3$, $\det B = 4$ *ve* $\det C = 1/2$ *olduğun göre,* $\det\left(2A^3 B^{-3} C^{-2}\right)$ *matrisinin determinantı kaçtır?*

Problem

A ve B, 3×3 türünden matrislerdir. $\det A = 4$ *ve,* $\det(2AB) = 96$ *olduğuna göre* $\det B = ?$

Problem

A, 3×3 türünden ortogonal bir matristir. Buna göre,

$$S = \det A^T + \det A^{-1} + \det(-A) + \det A + \det A^2 + \det 2A$$

ifadesinin değeri kaç olabilir.

Örnek

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & 99 & 100 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & \cdots & 98 & 99 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & \cdots & 97 & 98 \\ -3 & -2 & -1 & 0 & \cdots & 96 & 97 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -99 & -98 & -97 & -96 & \cdots & 0 & 1 \\ -100 & -99 & -98 & -97 & \cdots & -1 & 0 \end{vmatrix}_{101\times 101} = ?$$

Çözüm

A tek sayıda satıra ve sütuna sahip olan bir ters simetrik matristir. A ters simetrik ise, $A = -A^T$ *olduğunu biliyoruz. Buna göre, determinant alınırsa,*

$$\det A = \det(-A^T) = (-1)^{101}\det(A^T) = -\det A$$

eşitliğinden $\det A = 0$ *elde edilir.*

Örnek

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} & \mathbf{d} \\ \mathbf{a^2} & \mathbf{b^2} & \mathbf{c^2} & \mathbf{d^2} \\ \mathbf{a^3} & \mathbf{b^3} & \mathbf{c^3} & \mathbf{d^3} \end{bmatrix}$$ **matrisinin determinantını bulunuz. (Vandermonde Det.)**

Çözüm

Birinci kolonu diğer kolonlardan çıkarırsak determinant değişmez. Yani, A matrisine,
$K_2 \longrightarrow K_2 - K_1, \quad K_3 \longrightarrow K_3 - K_1, \quad K_4 \longrightarrow K_4 - K_1$ *uygulanırsa*

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a & d-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ a^3 & b^3-a^3 & c^3-a^3 & d^3-a^3 \end{vmatrix} = 1\,(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} b-a & c-a & d-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ b^3-a^3 & c^3-a^3 & d^3-a^3 \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)\,(c-a)\,(d-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+a & c+a & d+a \\ b^2+ab+a^2 & c^2+ac+a^2 & d^2+ad+a^2 \end{vmatrix}$$

elde edilir.

Çözüm

$$(b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+a & c+a & d+a \\ b^2+ab+a^2 & c^2+ac+a^2 & d^2+ad+a^2 \end{vmatrix}$$

matrisine de, $K_2 \longrightarrow K_2 - K_1$, $K_3 \longrightarrow K_3 - K_1$ *elemanter sütun işlemlerini yaparsak,*

$$= (b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+a & c-b & d-b \\ b^2+ab+a^2 & c^2-b^2+ac-ab & d^2-b^2+ad-ab \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} c-b & d-b \\ c^2-b^2+ac-ab & d^2-b^2+ad-ab \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c+b+a & d+b+a \end{vmatrix}$$

eşitliğinden $(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$ *elde edilir.*

Örnek

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{a} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{a} & \mathbf{a} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{a} & \mathbf{a} & \mathbf{a} & \mathbf{1} \end{vmatrix} = (\mathbf{1}-\mathbf{a})^{\mathbf{3}}$$ **olduğunu kanıtlayınız.**

Çözüm

Dördüncü kolonu tüm kolonlardan çıkarırsak determinant değişmez.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ a & a & 1 & 1 \\ a & a & a & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ a-1 & 0 & 0 & 1 \\ a-1 & a-1 & 0 & 1 \\ a-1 & a-1 & a-1 & 1 \end{vmatrix}$$

Önce üçüncü kolona göre, sonra da ikinci kolona göre iki kez determinant açılımı yaparsak,

$$(a-1)(-1)^7 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a-1 & 0 & 1 \\ a-1 & a-1 & 1 \end{vmatrix} = (a-1)(-1)^7(a-1)(-1)^5 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ a-1 & 1 \end{vmatrix} = (1-a)^3$$

ÖDEVLER

Problem

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (c-a)(b-a)(c-b)$ *olduğunu gösteriniz. (3'üncü mertebeden Vandermonde determinantı)*

Problem

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 & x_5^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 & x_5^3 \\ x_1^4 & x_2^4 & x_3^4 & x_4^4 & x_5^4 \end{vmatrix} = \prod_{1=i<j\leq 5} (x_j - x_i)$ *olduğunu gösteriniz. (5'inci mertebeden Vandermonde determinant)*

ÖDEVLER

Problem

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & a+c & a+b \\ b^2+c^2 & a^2+c^2 & a^2+b^2 \end{vmatrix}$$ *determinantını çarpanlara ayırınız.*

Problem

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \\ b^2+c^2 & c^2+a^2 & a^2+b^2 \end{vmatrix}$$ *determinantını çarpanlara ayırınız.*

Problem

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ bc & ac & ab \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$ *determinantını çarpanlara ayırınız.*

Problem

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ bc & ac & ab \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$ *determinantını çarpanlara ayırınız.*

Teorem

A_{rs} , $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ kare matrisinin a_{rs} elemanının kofaktörü olsun.

$$\sum_{s=1}^{n} a_{rs}A_{ms} = a_{r1}A_{m1} + a_{r2}A_{m2} + \ldots + a_{rn}A_{mn} = 0$$

$$\sum_{r=1}^{n} a_{rs}A_{rm} = a_{1s}A_{1m} + a_{2s}A_{2m} + \ldots + a_{ns}A_{nm} = 0$$

şeklindedir. (Kısaca bir satırın elemanları, farklı bir satırın kofaktörleriyle çarpılıp toplanırsa sıfır bulunur.)

Örnek

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ **için, $\mathbf{a_{21}A_{31} + a_{22}A_{32} + a_{23}A_{33} + a_{24}A_{34}} = 0$ olduğunu görünüz.**

Çözüm : A_{31}, A_{32}, A_{33} ve A_{34} kofaktörleri hesaplanırsa, $A_{31} = -21$, $A_{32} = 10$, $A_{33} = 16$ ve $A_{34} = -9$ bulunabilir. Buna göre,

Ek Matris

Tanım

$A = [a_{ij}]_{n\times n}$ kare matrisi verilsin. A_{ij}, a_{ij} elemanının kofaktörü olmak üzere

$$[A_{ij}]^T$$

matrisine, yani kofaktörlerin oluşturduğu matrisin transpozesine, A **matrisinin eki, ek matris veya adjoint matris** denir. A^*, EkA veya $AdjA$ ile gösterilir. Biz bu kitapta A^* gösterimini kullanacağız.

Teorem

$\det A \neq 0$ *ise,* A^{-1} *vardır ve* $A^{-1} = \dfrac{A^*}{\det A}$ *ile bulunur.*

Kanıt.

$$a_{r1}A_{r1} + a_{r2}A_{r2} + ... + a_{rn}A_{rn} = \det A \text{ ve } a_{r1}A_{s1} + a_{r2}A_{s2} + ... + a_{rn}A_{sn} = 0 \ (r \neq s)$$

olduğundan

$$AA^* = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n} & A_{2n} & \cdots & A_{n^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \det A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det A & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det A \end{bmatrix}$$

yani, $AA^* = (\det A)\, I_n$ elde edilir. □

Örnek

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{bmatrix}$ **matrisinin tersini, ekini hesaplayarak bulunuz.**

Çözüm

$A_{11} = d$, $A_{12} = -c$, $A_{21} = -b$, $A_{22} = a$ *ve* $\det A = ad - bc$ *olduğundan,*

$$A^{-1} = \frac{A^*}{\det A} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -d \\ -c & a \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Örnek

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$ **matrisinin tersini, ekini hesaplayarak bulunuz.**

Çözüm

Kofaktörleri hesaplayalım.

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=6,\quad A_{12}=-\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=-2,\quad A_{13}=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}=-4$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=-4,\quad A_{22}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=1,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}=2$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}=6,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=-1,\quad A_{33}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=-4$$

Çözüm

A matrisinin determinantını bulalım.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

olduğu kolayca bulunabilir.

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -4 & 6 \\ -2 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & -4 \end{bmatrix} \text{ ise}$$

$$A^{-1} = \frac{A^*}{\det A} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 6 & -4 & 6 \\ -2 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -3 \\ 1 & -1/2 & 1/2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

bulunur.

Problem

$$\begin{bmatrix} 6 & -4 & 6 \\ -2 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$ *matrisinin ek matrisini ve tersini bulunuz.*

Problem

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$ *matrisinin ek matrisini ve tersini bulunuz.*

Teorem

A^* ile A matrisinin ek matrisi gösterilmek üzere, tersinir A ve B kare matrisleri için, $(AB)^* = B^*A^*$ eşitliği sağlanır.

Kanıt.

$(AB)(AB)^* = (\det AB)\, I$ olduğunu kullanalım. Buradan,

$$\begin{aligned}(AB)^* &= (\det A)(\det B)(AB)^{-1} = (\det A)(\det B)\, B^{-1}A^{-1} \\ &= (\det B)\, B^{-1} (\det A)\, A^{-1} \\ &= B^*A^*\end{aligned}$$

elde edilir. □

Örnek

Bir matrisin transpozesinin ek matrisi, ek matrisinin transpozesine eşittir. Gösteriniz.

Çözüm

$A^* = (\det A)\, A^{-1}$ *olduğundan,*

$$\left(A^*\right)^T = (\det A)\left(A^{-1}\right)^T$$

elde edilir. Diğer yandan, $\det A^T = \det A$ *ve* $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$ *olduğu kullanılırsa,*

$$\left(A^T\right)^* = \left(\det A^T\right)\left(A^T\right)^{-1} = (\det A)\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^*\right)^T$$

olduğu görülür.

SORU

S_5 de tanımlanan aşağıdaki permütasyonların hangisinin işareti pozitiftir?

A) 12354 **B)** 21345 **C)** 21453 **D)** 31452 **E)** 24135

SORU

Determinant tanımına göre

$$\begin{vmatrix} 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

determinantının hesaplanmasında işareti gerekli olan tek permütasyon hangisidir?

A) 2341 **B)** 4123 **C)** 1342 **D)** 1243 **E)** 3412

SORU

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = ?$$

A) 43 **B)** 24 **C)** 12 **D)** 13 **E)** 32

SORU

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = ?$$

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

SORU

$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & a & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ matrisinin tersi yoksa a kaçtır?

A) -1 **B)** 1 **C)** 2 **D)** $1/2$ **E)** $-1/2$

SORU

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$ matrisinin tersi yoksa $a \in \mathbb{R}^+$ kaçtır?

A) $\sqrt{3}$ **B)** $\sqrt{2}$ **C)** 2 **D)** 1 **E)** 3

SORU

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$ matrisinin determinantı sıfır ise $a =$?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

SORU

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{bmatrix}$$ matrisinin determinantı sıfır ise $a =?$

A) -1 **B)** 2 **C)** 1 **D)** 3 **E)** $1/2$

SORU

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 10 & 30 & 40 & 50 \\ 11 & 33 & 55 & 55 \\ 5 & 15 & 25 & 30 \end{bmatrix}$$ matrisinin determinantı kaçtır?

A) 110 **B)** 1100 **C)** 550 **D)** 1650 **E)** 0

SORU

A ve B, $n \times n$ türünden iki matris olmak üzere, aşağıdakilerden kaç tanesi yanlıştır?

I. $\det(A+B) = \det A + \det B$

II. $\det(AB) = \det A \det B$

III. $\det(2A) = 2\det A$

IV. $\det A^{-1} = -\det A$

V. $\det A^{T} = \det A$

A) 3 **B)** 4 **C)** 1 **D)** 0 **E)** 2

SORU

A bir ortogonal matris olmak üzere, $\det A + \det A^T + \det A^{-1} + \det A^2 = x$ ise x'in olabileceği değerlerin toplamını bulunuz.

A) 6 **B)** 4 **C)** 1 **D)** 0 **E)** 2

SORU

Aşağıdakilerden hangisi daima doğrudur?

A) Ters simetrik matrislerin determinantı sıfırdır.

B) Ters simetrik matrislerin tersi yoktur.

C) Simetrik matrislerin tersi yoktur.

D) Ortogonal Matrisin determinantı 1 veya -1 olabilir.

E) Ortogonal matrislerin tersi yoktur.

SORU

$A = [a_{ij}]_{4\times 4}$, $B = [b_{ij}]_{4\times 4}$ olmak üzere, $\det A = 3$ ve $\det B = 2$ ise aşağıdakilerden kaç tanesi yanlıştır?

I. $\det(AB) = 6$
II. $\det\left(A^{-1}B^2\right) = 4/3$
III. $\det(A+B) = 5$
IV. $\det\left(A^{-1}B^T\right) = 1/6$
V. $\det(2AB) = 12$

A) 0 **B)** 4 **C)** 1 **D)** 3 **E)** 2

SORU

$\det A = 12$ olan $A = [a_{ij}]_{4\times 4}$ matrisinin önce tersi alınıyor, sonra tersi 2 ile çarpılıyor ve devriği alınıyor ve elde edilen son matrisin üçüncü satırı 6 ile çarpılarak bir B matrisi elde ediliyor. B matrisinin determinantı kaçtır?

A) 8 **B)** 4 **C)** 6 **D)** 3 **E)** 1

SORU

Bir A matrisine aşağıdaki elemanter satır operasyonları yapılıyor. Bunlardan hangisi determinantı değiştirmez?

A) Bir satırı 2 ile çarpmak.

B) İki satırın yerini değiştirmek

C) Herhangi bir satırın 2 katını başka bir satıra eklemek.

D) Matrisi 2 ile çarpmak

E) Herhangi bir satırın yerine başka bir satırı yazmak.

SORU

Aşağıdaki matrislerin kaç tanesinin determinantı sıfırdır?

I. Herhangi bir satırının tamamı 0 olan A matrisi.

II. Herhangi iki satırı orantılı olan B matrisi.

III. Herhangi bir satırı farklı iki satırının toplamı olan C matrisi.

IV. Tek sayıda satıra sahip D ters simetrik matrisi.

V. Ortogonal E matrisi.

A) 5 **B)** 4 **C)** 1 **D)** 0 **E)** 2

SORU

$$\begin{vmatrix} 13 & 39 & 65 \\ 11 & 33 & 33 \\ 14 & 49 & 7 \end{vmatrix} = ?$$

A) 2002 **B)** 3003 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 0

SORU

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olmak üzere, $\det\left(I + A + A^2 + A^3 + \cdots + A^{100}\right)$ determinantı kaçtır?

A) 100 **B)** 0 **C)** 101 **D)** 1 **E)** 99

SORU

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = ?$$

A) $5!$ **B)** $-5!$ **C)** 0 **D)** 1 **E)** 30

SORU

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 5 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} = ?$$

A) 16 **B)** -16 **C)** 12 **D)** -12 **E)** 0

SORU

$$\begin{vmatrix} a & b & a & b & a \\ b & a & b & a & b \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 7 & 8 & 8 \\ 5 & 4 & 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = ?$$

A) 24 **B)** $a+b$ **C)** $ab+2$ **D)** $a+b+ab$ **E)** 0

SORU

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = ?$$

A) 56 **B)** 48 **C)** 72 **D)** -80 **E)** -72

SORU

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 7 & 7 & 7 \\ 1 & 4 & 7 & 9 & 9 \\ 1 & 4 & 7 & 9 & 10 \end{vmatrix} = ?$$

A) 0 **B)** 18 **C)** -12 **D)** 20 **E)** 12

SORU

4×4 türünde verilen bir A matrisinin determinantı 5'tir. A matrisinin dördüncü satırının yerine ikinci satırının 2 katı ile üçüncü satırının 3 katının toplamı yazılırsa, determinantı ne olur?

A) 10 **B)** 5 **C)** 30 **D)** 0 **E)** 15

SORU

A, B, C matrisleri 4×4 türünden matrislerdir. $\det A = 48$, $\det B = 12$, $\det C = -3$ ise, $\det\left(3AB^{-2}C^{-3}\right)$ determinantının değeri kaçtır?

A) 1 **B)** -1 **C)** $1/27$ **D)** $-1/27$ **E)** -2

SORU

Aşağıdakilerden hangisi $\begin{vmatrix} x^3 & x & y \\ y^3 & y & x \\ 1 & 1 & xy \end{vmatrix}$ determinantının çarpanlarından biri değildir?

A) $x+y$ **B)** $x-y$ **C)** $x+1$ **D)** $y-1$ **E)** $x+y+1$

SORU

$A = [a_{ij}]_{4\times 10}$, $a_{ij} = \dfrac{j}{j+i}$ ve $B = [b_{ij}]_{10\times 3}$, $b_{ij} = \dfrac{j}{i^2+i}$ olarak tanımlanıyor. Buna göre, $AB = C = [c_{ij}]$ çarpımında c_{21} elemanı kaçtır?

A) 3/7 **B)** 5/12 **C)** 1/4 **D)** 7/12 **E)** 11/12

KAYNAK

Mustafa Özdemir, Analitik Geometri ve Çözümlü Problemler, Altın Nokta Yayınları, 4. Baskı, İzmir, 2019.