Diferensiyel Denklem Sistemleri

Bir bağımsız değişken ve en az iki bağımlı değişken ile bağımlı değişkenlerin bağımsız değişkene göre türevlerini içeren denklemlere dif. denklem sistemi denir.

$$x'' - t^2 y'' + t x' = 1$$
$$y'' - (x')^2 = t$$

sistemi t nin bağımsız değişken, ~~x~~ x ve y nin bağımlı değişkenler olduğu bir sistemdir.

$$x' = y$$
$$y' = z$$
$$z' = -x + 4y - 3z + e^t$$

bir başka örnektir.

Tanım: Her bir denkleminde, bilinmeyenlerden sadece birinin birinci mertebeden türevi bulunan sistemlere normal sistemler denir.

Ör $y' = 5x - y$

$z' = -2x + 3y$ sistemi normal sistem

Normal formda olmayan bir sistem belir işlemler yardımıyla normal forma indirgenebilir.

Ör $y' + 4y - z' = 7x$ sistemi normal formda

$y' + z' - 2y = 3x$

değildir. Ancak;

$y' + 4y - z' = 7x$ $\qquad$ $y' + z' - 2y = 3x$

$y' = -4y + z' + 7x \Rightarrow$ $\qquad$ $z' = 3x + 2y - y'$

$\Rightarrow y' = -4y + 7x + 3x + 2y - y'$

$2y' = 10x - 2y \Rightarrow \boxed{y' = 5x - y}$

$z' = 3x + 2y - (5x - y)$

$\Rightarrow \boxed{z' = 3y - 2x}$

$$\boxed{\begin{aligned} y' &= 5x - y \\ z' &= -2x + 3y \end{aligned}}$$

Normal form elde edilmiş olur.

Sabit Katsayılı Normal Sistemler

Yok Etme Yöntemi :

$D = \frac{d}{dt}$ olmak üzere

$$L_{11}(D)x_1 + L_{12}(D)x_2 + \dots + L_{1n}(D)x_n = f_1(t)$$

$$- - - - - - - - - - - - - - -$$

$$L_{n1}(D)x_1 + L_{n2}(D)x_2 + \dots + L_{nn}(D)x_n = f_n(t)$$

sistemini ele alalım. Bu yöntem ile verilen sistem yerine, sisteme denk olan ancak çözümü daha kolay olan daha basit bir sistem elde edilmeye çalışılır. Bunun için,

i) Sistemdeki herhangi iki denklemin yeri değişebilir,
ii) Sistemdeki bir denklem bir sabitle çarpılabilir,
ii) Sistemdeki bir denklem bir $P(D)$ polinomu ile çarpıla-
iii) Sistemdeki bir denklem başka bir denkleme eklenebilir.
bilir ve başka bir denkleme

işlemlerinden yararlanılabilir. Şimdi yöntemi örnekler üzerinde açıklayalım.

Ör $x' = 3x - 4y + 1$
$y' = 4x - 7y + 10t$ sisteminin çözümünü bulunuz.

$D = \frac{d}{dt}$ olmak üzere denklem sistemi

$(D-3)x + 4y = 1$
$-4x + (D+7)y = 10t$ şeklinde yazılabilir.

Yok etme yöntemi gereğince x i yok etmeye çalışalım.

$$4 \,/\, (D-3)x + 4y = 1$$
$$(D-3) \,/\, -4x + (D+7)y = 10t$$
$$+$$
$$[(D-3)(D+7) + 16]y = (D-3)(10t) + 4$$
$$(D^2 + 4D - 5)y = 14 - 30t$$

Bu denklem çözüldüğünde

$$\boxed{y(t) = c_1 e^{-5t} + c_2 e^{t} + 6t + 2}$$ elde edilir.

$x(t)$ yi bulmak için iki yol izlenebilir. Birincisi $y(t)$ nin bulunmasına benzer işlemlerd[e] Yani $y(t)$ yi yok edip $x(t)$ ye bağlı bir denk[-]lem elde edilebilir. Diğeri ise sistem üzerinden $x(t)$ nin y ve y' cinsinden elde edilip buradan da $y(t)$ nin yerine yazılmasıdır. Sistemin ikinci denkleminden

$$x(t) = \frac{1}{4}y'(t) + \frac{7}{2}y(t) - \frac{5}{2}t$$

$$x(t) = \frac{1}{4}\left(-5c_1e^{-5t} + c_2e^{t} + 6\right) + \frac{7}{2}\left(c_1e^{-5t} + c_2e^{t} + 6t + 2\right) - \frac{5}{2}t$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = \frac{1}{2}c_1e^{-5t} + 2c_2e^{t} + 8t + 5}$$

olarak elde edilir.

Ör

$$x' = 4x + 6y$$
$$y' = -3x - 5y$$

sisteminin çözümünü elde ediniz.

$$-3 \,/\quad (D-4)x - 6y = 0$$
$$D-4 \,/\quad +3x + (D+5)y = 0$$

$+$

$$\left[(D-4)(D+5) + 18\right] y = 0$$

$$(D^2 + D - 2)y = 0 \Rightarrow \boxed{y(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{-2t}}$$

İkinci denklemden $x = -\frac{y'}{3} - \frac{5}{3}y$

$$x(t) = -\frac{1}{3}\left[c_1 e^{t} - 2c_2 e^{-2t}\right] - \frac{5}{3}\left[c_1 e^{t} + c_2 e^{-2t}\right]$$

$$\boxed{x(t) = -2c_1 e^{t} - c_2 e^{-2t}}$$

olup sistemin

genel çözümü

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= -2c_1 e^{t} - c_2 e^{-2t} \\ y(t) &= c_1 e^{t} + c_2 e^{-2t} \end{aligned}}$$

olarak elde edilir.

Ör

$$x' + y' - x - 3y = e^{t}$$
$$x' + y' + x = e^{3t}$$

sist çöz bulunuz

Ör

$$x' + y' = -2y$$
$$x - 2y = y'$$

sist çöz. bulunuz.