SAYISAL ANALİZ

Dr. Öğr. ÜYESİ Abdullah SEVİN

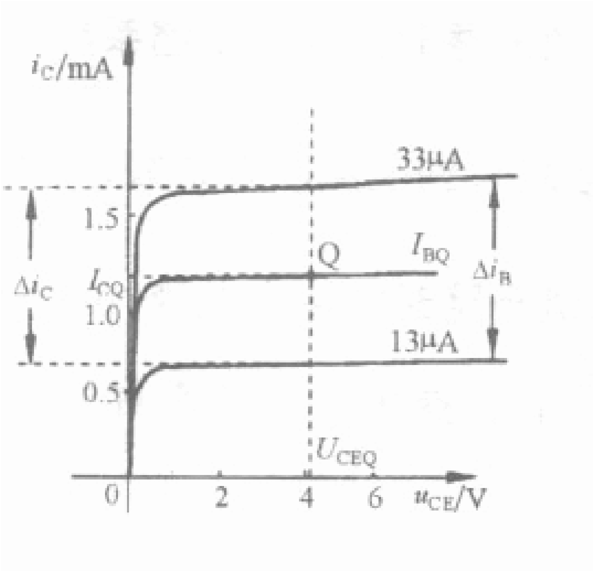
SAYISAL ANALİZ

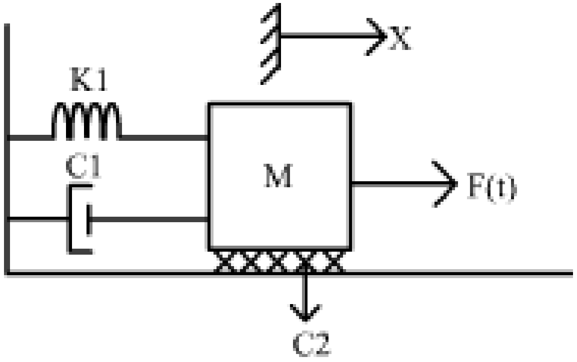
DOĞRUSAL OLMAYAN DENKLEM SİSTEMLERİ

(Systems of Non-Lineer Equations)

Doğrusal Olmayan Denklem Sistemleri

- **Fiziksel sistemlerin büyük bir çoğunluğunda, sisteme ait değişken veya değişkenler belirli bir çalışma bölgesi civarında/belirli bir noktada doğrusal davranış gösterir.**
- **Ancak değişkenlerin değeri bu bölgenin dışına çıktığında doğrusal olmayan davranış kendini göstermeye başlar.**

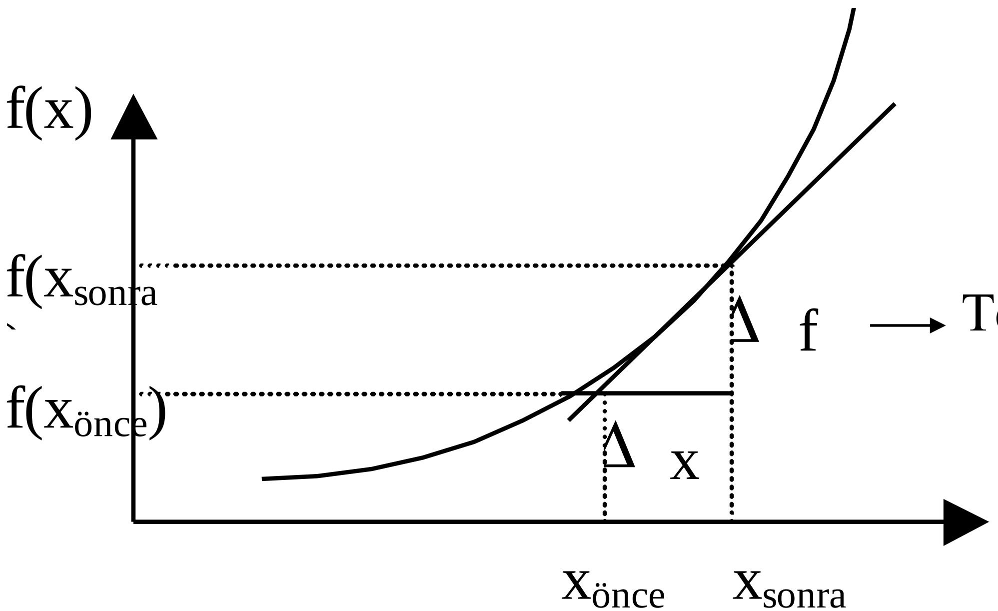




Hatırlatma: Noktasal Türev

Noktasal Türev: $f'(x) = \dfrac{\partial f(x)}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}$

Teğetin eğimi= $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{f(x_{sonra}) - f(x_{önce})}{x_{sonra} - x_{önce}}$



Grafikten

$x_{sonra} = x_{önce} + \Delta x$

ve $f(x_{sonra}) = f(x_{önce}) + \Delta f$

$\Delta f \longrightarrow$ Teğetin eğimi* Δx

$$\Delta f = \frac{\partial f(x_{önce})}{\partial x} \Delta x$$

$$f(x_{sonra}) = f(x_{önce}) + \frac{\partial f(x_{önce})}{\partial x} \Delta x$$

Doğrusal Olmayan Denklem Sistemleri

- İki bilinmeyenli bir doğrusal olmayan denklem sistemi,

$$f(x_1, x_2) = 0$$
$$g(x_1, x_2) = 0$$

- Fonksiyonlar, x_1, x_2 civarında 1. kuvvetine kadar Taylor serisine açılırsa,

$$f(x_{1sonra}, x_{2sonra}) = f(x_{1önce}, x_{2önce}) + \frac{\partial f(x_{1önce}, x_{2önce})}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f(x_{1önce}, x_{2önce})}{\partial x_2}\Delta x_2 = 0$$
$$g(x_{1sonra}, x_{2sonra}) = g(x_{1önce}, x_{2önce}) + \frac{\partial g(x_{1önce}, x_{2önce})}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial g(x_{1önce}, x_{2önce})}{\partial x_2}\Delta x_2 = 0$$

- Doğrusal olmayan denklem lineerleştirilir

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f(x_{1önce}, x_{2önce})}{\partial x_1} & \frac{\partial f(x_{1önce}, x_{2önce})}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g(x_{1önce}, x_{2önce})}{\partial x_1} & \frac{\partial g(x_{1önce}, x_{2önce})}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} f(x_{1önce}, x_{2önce}) \\ g(x_{1önce}, x_{2önce}) \end{bmatrix}$$

Taylor serisi

- Taylor serisi matematikte, bir fonksiyonun, o fonksiyonun terimlerinin tek bir noktadaki türev değerlerinden hesaplanan sonsuz toplamı şeklinde yazılması şeklindeki gösterimi/açılımıdır.

- Adını İngiliz matematikçi Brook Taylor'dan almıştır.

- Bir serinin terimlerinden sonlu bir sayı kadarını kullanmak, bu seriyi bir fonksiyona yakınsamak için genel bir yöntemdir.

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots$$

- Örnek:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

Maclaurin serisi

- Eğer seri sıfır merkezli ise {a=0} Taylor serisi daha basit bir biçime girer ve bu özel seriye İskoç matematikçi Colin Maclaurin'e istinaden Maclaurin serisi denir.

- Bir serinin terimlerinden sonlu bir sayı kadarını kullanmak, bu seriyi bir fonksiyona yakınsamak için genel bir yöntemdir.

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots$$

Doğrusal Olmayan Denklem Sistemleri

- **Örnek:** Aşağıda verilen nonlineer denklem sistemini, $x_0 = 0.6$ ve $y_0 = 1.5$ başlangıç değerlerinden başlayarak yaklaşık mutlak hata $\varepsilon_s \leq 0.09$ sınırlamasını sağlayıncaya kadar çözünüz.

$$f(x,y) = x^2 + y - 3 = 0$$

$$g(x,y) = x + y^2 - 5 = 0$$

- Denklem sistemi lineerleştirilir

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} & \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x} & \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 1$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 1 \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = 2y$$

Doğrusal Olmayan Denklem Sistemleri

$$\begin{bmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 2y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} x^2 + y - 3 \\ x + y^2 - 5 \end{bmatrix}$$

- **1. iterasyon: $x_0 = 0.6$ ve $y_0 = 1.5$**

$$\begin{bmatrix} 1{,}2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -1{,}14 \\ -2{,}15 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \Delta x = 0.4885 \\ \Delta y = 0.5538 \end{matrix}$$

$$x_1 = x_0 + \Delta x = 0.6 + 0.4885 = 1.0885$$

$$y_1 = y_0 + \Delta y = 1.5 + 0.5538 = 2.0538$$

$$\in_x = \left| \frac{1.0885 - 0.6}{1.0885} \right| = 0.448$$

$$|\in_x|, |\in_y| > \in_s$$

$$\in_y = \left| \frac{2.0538 - 1.5}{2.0538} \right| = 0.2697$$

Doğrusal Olmayan Denklem Sistemleri

$$\begin{bmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 2y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} x^2 + y - 3 \\ x + y^2 - 5 \end{bmatrix}$$

- 2. iterasyon: $x_1 = 1.0885$ ve $y_1 = 2.0538$

$$\begin{bmatrix} 2{,}177 & 1 \\ 1 & 4{,}1076 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0{,}2386 \\ 0{,}3065 \end{bmatrix} \Rightarrow \Delta x = \text{-}0.0848 \text{ ve } \Delta y = \text{-}0.0540$$

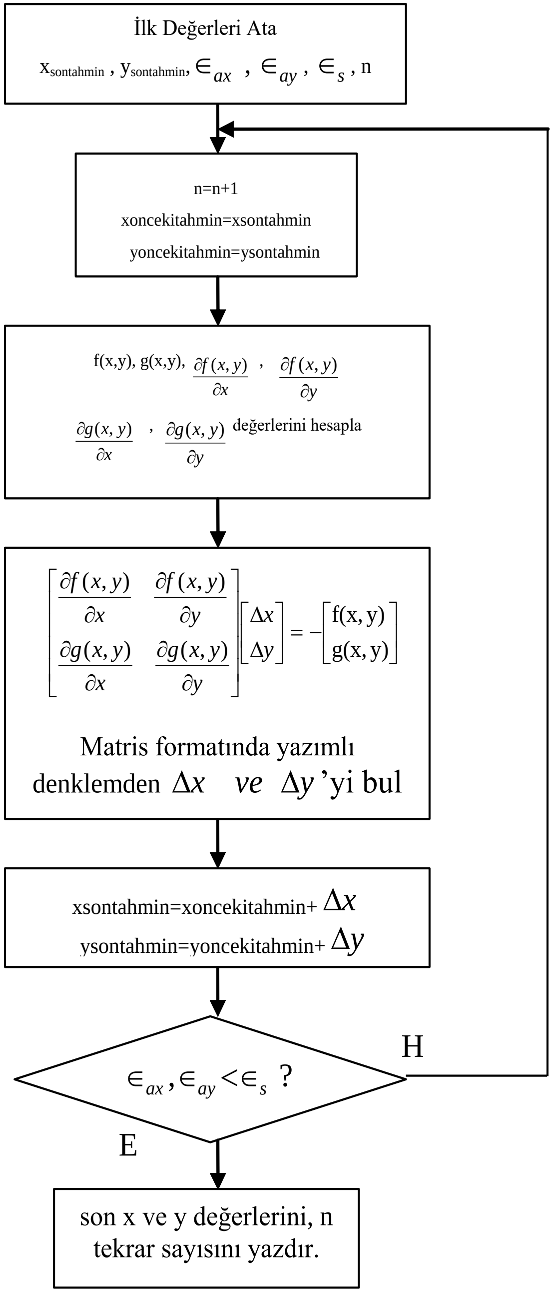
$$x_2 = x_1 + \Delta x = 1.0885 + (-0.0848) = 1.0037$$

$$y_2 = y_1 + \Delta y = 2.0538 + (-0.0540) = 1.9998$$

$$\in_x = \left| \frac{1.0037 - 1.0885}{1.0037} \right| = 0.0845$$

$$\in_y = \left| \frac{1.9998 - 2.0538}{1.9998} \right| = 0.0270$$

$$|\in_x|, |\in_y| < \in_s$$



Algoritması ve Matlab Kodu

```
% f(x,y) = x^3+y^4-2
% g(x,y) = x^2+y^3+4
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

xo=-2;yo=2;e=0.00001;n=0;Nmax=100;
while n<Nmax
   fxy=xo^3+yo^4-2;
   gxy=xo^2+yo^3+4;
   fxyx=3*xo^2;fxyy=4*yo^3;
   gxyx=2*xo;gxyy=3*yo^2;
   d_xy=inv([fxyx fxyy;gxyx gxyy])*[-fxy;-gxy];
   xs=xo+d_xy(1);
   ys=yo+d_xy(2);
   ex=(xs-xo)/xs;
   ey=(ys-yo)/ys;
   if max(abs([ex ey]))<e
      x=xs
      y=ys
      es=max(abs([ex ey]))
      n
      n=Nmax;
   else
      xo=xs;
      yo=ys;
      n=n+1;
   end
end
```

Serhat Yılmaz'ın Sunusundan Alınmıştır.

Doğrusal Olmayan Denklem Sistemleri

- **Örnek:** $f(x,y) = x^2 + 4y^2 - 9 = 0$ ve $g(x,y) = 18y - 14x^2 + 45 = 0$ doğrusal olmayan denklem sisteminin köklerine $(x_0\ ,\ y_0) = (1,\ -1)$ değerlerinden başlayarak **2 iterasyon** yaklaşınız.

ÖDEV

Ödevler dersin Araştırma Görevlisine, takiben eden hafta teslim edilecektir.

Not: Vaktinde teslim edilmeyen ödevler alınmayacaktır.

- $f(x,y) = x^2 + y^2 = 9$ ve $g(x,y) = e^x + 5x - y = 0$ doğrusal olmayan denklem sisteminin köklerine $(x_0, y_0) = (0.5, 3)$ değerlerinden başlayarak 2 iterasyon yaklaşınız.

Ödev Hakkında Bilgilendirme:

- Ödev çıktı olarak teslim edilecektir.
- Ödev hem program dosyasını (MATLAB) hem de el ile çözümünü içerecektir.

KAYNAKLAR

- **Serhat YILMAZ, "*Bilgisayar İle Sayısal Çözümleme*", Kocaeli Üniv. Yayınları, No:168, Kocaeli, 2005.**
- **Steven C. Chapra, Raymond P. Canale (Çev. H. Heperkan ve U. Kesgin), "*Yazılım ve Programlama Uygulamalarıyla Mühendisler İçin Sayısal Yöntemler*", Literatür Yayıncılık.**
- **İlyas ÇANKAYA, Devrim AKGÜN, Sezgin KAÇAR "*Mühendislik Uygulamaları İçin MATLAB*", Seçkin Yayıncılık**