MATEMATİK II

Hafta 9

Prof. Dr. Refik KESKİN,
Prof. Dr. Halim ÖZDEMİR,
Doç. Dr. Şevket GÜR,
Yrd. Doç. Dr. Murat SARDUVAN

MAT112 MATEMATİK II 9. HAFTA

İÇİNDEKİLER

HEDEFLER

Bu haftanın notunu çalıştıktan sonra;

- ✓ Yoğunluğu sabit olarak verilmiş bir bölgenin ağırlık merkezini bulabileceksiniz.
- ✓ Tüm soru tiplerini bir arada görüp eksik kaldığınız kısımlar varsa farkına varabileceksiniz.

ÖNERİLER

Bu üniteyi daha iyi kavrayabilmek için;

- Bu bölümde bulunan ağırlık merkezi konusunu çalıştıktan sonra genel çözümlü örneklere hemen geçmeyiniz.
- Önce, önceki haftalardaki ders notlarını şöyle bir gözden geçiriniz.
- Sonrasında, genel çözümlü örnekler başlığında önce çözüme bakmaksızın soruyu kendiniz çözmeye çalışınız. Sonra çözüme bakıp doğru çözüm yapıp yapamadığınızı irdeleyiniz.

3.6. Ağırlık Merkezi

Bir R bölgesinin ağırlık merkezi bulunurken simetriden faydalanılır. Bir R bölgesi bir L doğrusuna göre simetrik ise ve yoğunluk sabit ise ağırlık merkezinin koordinatları bu doğru üzerinde bulunur. Böyle bir durumda $\mathbb{R}^2$ de bir R bölgesinin ağırlık merkezi $(\overline{x},\overline{y})$ noktası ile gösterilirse bu noktaların koordinatları

$$\overline{x}=\frac{M_y}{A}\ ,\ \overline{y}=\frac{M_x}{A}$$

ile verilir. Burada A ile R bölgesinin alanı iken

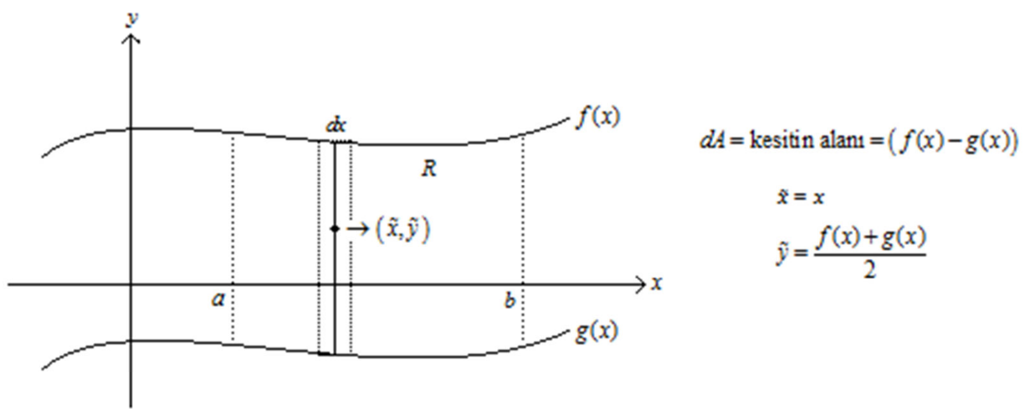
$$M_x=\int_a^b\frac{1}{2}\left(f(x)^2-g(x)^2\right)dx=\int_a^b\frac{1}{2}\left(f(x)+g(x)\right)\left(f(x)-g(x)\right)dx$$

$$M_y=\int_a^b x\left(f(x)-g(x)\right)dx$$

şeklindedir. Yani

$$\overline{y}=\frac{1}{A}\int_a^b\frac{1}{2}\left(f(x)^2-g(x)^2\right)dx$$

$$\overline{x}=\frac{1}{A}\int_a^b x\left(f(x)-g(x)\right)dx$$



olmak üzere $M_x=\int\tilde{y}dA$, $M_y=\int\tilde{x}dA$ olarak ortaya çıkar. Burada $(\tilde{x},\tilde{y})$ alınan kesitin ağırlık merkezidir.

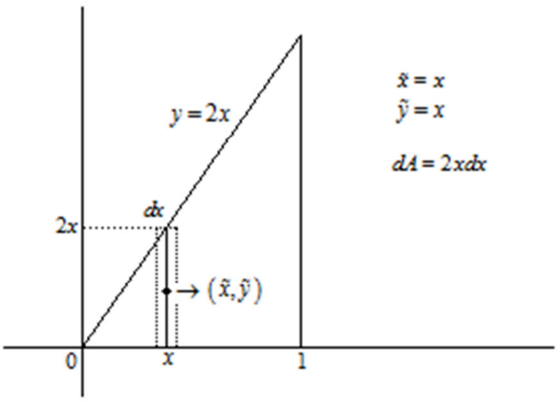
Örnek $y = 2x$ doğrusu $y = 0$, $x = 1$ doğruları ile sınırlı bölgenin ağırlık merkezini bulunuz.

Çözüm.

$$M_y = \int \tilde{x} dA = \int_0^1 x2xdx = \int_0^1 2x^2 dx = \frac{2}{3}x^3\Big]_0^1 = \frac{2}{3}$$

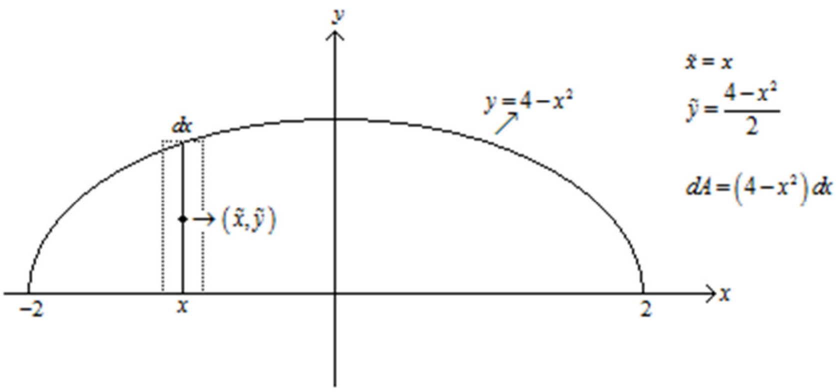
$$M_x = \int \tilde{y} dA = \int_0^1 x2xdx = \int_0^1 2x^2 dx = \frac{2}{3}$$

$A = 1 \rightarrow \overline{x} = \overline{y} = \dfrac{2}{3}$ olur.



Örnek. $y = 4 - x^2$ parabolü ve x-ekseniyle sınırlı bölgenin ağırlık merkezini bulunuz.

Çözüm.



$$A = \int_{-2}^{2} \left(4 - x^2\right) dx = \frac{32}{3}$$

$$M_x = \int \tilde{y} dA = \int_{-2}^{2} \left(\frac{4 - x^2}{2}\right)\left(4 - x^2\right) dx = \int_0^2 \left(4 - x^2\right)^2 dx = \int_0^2 \left(16 - 8x^2 + x^4\right) dx$$

$$= 16x - \frac{8x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\Big]_0^2 = \frac{256}{15}$$

$$M_y = \int \tilde{x} dA = \int_0^2 x\left(4-x^2\right)dx = 0$$

$$\overline{x} = \frac{M_y}{A} = 0,\ \overline{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{8}{5} \text{ olur.}$$

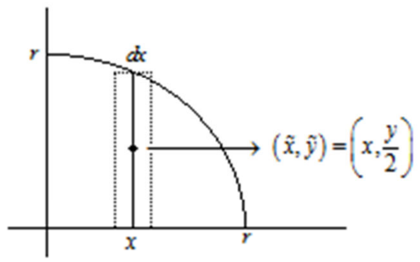
Örnek. $x^2 + y^2 \le r^2$ dairesinin $0 \le x \le r$ arasındaki parçasının ağırlık merkezini bulunuz.

Çözüm. $A = \dfrac{\pi r^2}{4}$

$$M_y = \int \tilde{x} dA = \int_0^r xydx = \int_0^r x\sqrt{r^2 - x^2}\,dx = -\frac{1}{3}\left(r^2 - x^2\right)\Big]_0^r = \frac{r^3}{3}$$

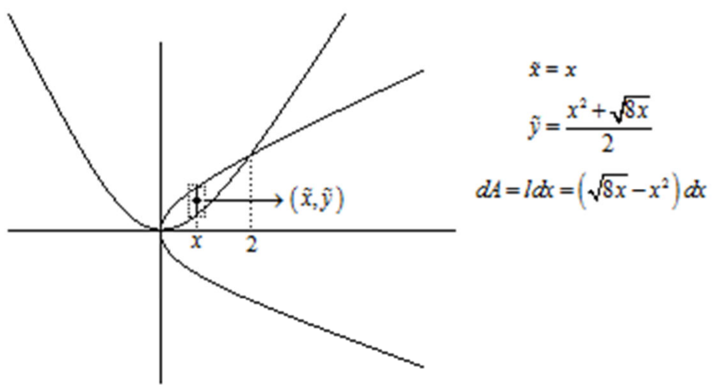
$$M_x = \int \tilde{y} dA = \int_0^r \frac{y}{2} ydx = \int_0^r \frac{1}{2} y^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^r \left(r^2 - x^2\right)dx = \frac{1}{2}\left(r^2 x - \frac{x^3}{3}\Big]_0^r\right) = \frac{r^3}{3}$$

$$\overline{x} = \frac{r^3}{3}\Big/\frac{\pi r^2}{4} = \frac{4r}{3\pi},\ \overline{y} = \frac{4r}{3\pi} \text{ olur.}$$



Örnek. $y = x^2$ eğrisi ve $y^2 = 8x$ eğrisi arasında kalan bölgenin ağırlık merkezini bulunuz.

Çözüm.



$$M_y = \int \tilde{x}\,dA = \int_0^2 x\left(\sqrt{8x} - x^2\right)dx$$

$$M_x = \int \tilde{y}\,dA = \int_0^2 \frac{1}{2}\left(x^2 + \sqrt{8x}\right)\left(\sqrt{8x} - x^2\right)dx$$

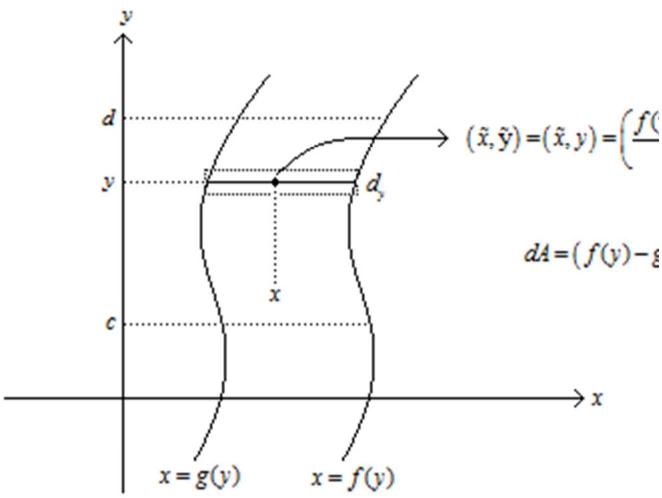
$\overline{x} = \dfrac{9}{10}$, $\overline{y} = \dfrac{9}{5}$ bulunur. Alan $= \int_0^2 \left(\sqrt{8x} - x^2\right)dx = \dfrac{8}{3}$ olur.

Not: R bölgesi aşağıdaki gibi ise x-eksenine paralel kesit alınır.

$$M_x = \int \tilde{y}\,dA \qquad \overline{x} = \frac{M_y}{A}$$

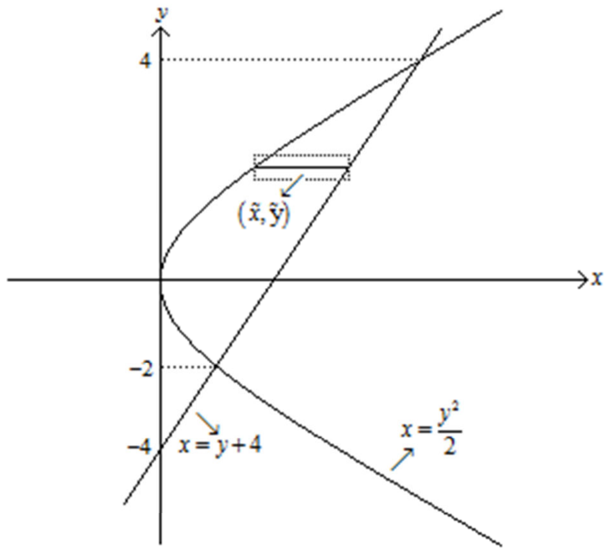
$$M_y = \int \tilde{x}\,dA \qquad \overline{y} = \frac{M_x}{A}$$

$A =$ bölgenin alanı



Örnek. $y^2 = 2x$ parabolü ve $y = x - 4$ doğrusuyla sınırlı bölgenin ağırlık merkezini bulunuz.

Çözüm. Yandaki şekli de inceleyerek $(\overline{x}, \overline{y}) = \left(\dfrac{16}{5}, 1\right)$ olduğunu görünüz.



Problemler.

1) $f(x) = 2 - x^2$ eğrisiyle $g(x) = |x|$ doğrusu arasında kalan bölgenin ağırlık merkezini bulunuz.

(cevap: $\left(0, \dfrac{38}{5}\right)$)

2) $x^2+y^2=4$ çemberi ile $(x-1)^2+y^2=1$ çemberi arasında kalan bölgenin ağırlık merkezini bulunuz. (cevap: $\left(-\frac{1}{3},0\right)$)

3) $y=x^2$ parabolü ile $x=y^2$ parabolü arasında kalan bölgenin ağırlık merkezini bulunuz. (cevap: $\left(\frac{9}{20},\frac{9}{20}\right)$)

4) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ elipsinin 1. bölgede kalan kısmının ağırlık merkezini bulunuz. (cevap: $\left(\frac{4a}{3\pi},\frac{4b}{3\pi}\right)$)

5) $y=\frac{x^2}{2}$ ve $y=x+4$ eğrileri arasındaki bölgenin ağırlık merkezini bulunuz.

Genel Çözümlü Örnekler

1) $\int x\sqrt{x-5}\,dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm. $\begin{cases} u=x-5 \\ du=dx \end{cases}$ değişken dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x-5}\,dx &= \int (u+5)\sqrt{u}\,du \\ &= \int \left(u^{3/2}+5u^{1/2}\right)du \\ &= \frac{2u^{5/3}}{5}+\frac{10u^{3/2}}{3}+c \\ &= \frac{2(x-5)^{5/2}}{5}+\frac{10(x-5)^{3/2}}{3}+c\end{aligned}$$

bulunur.

2) $\int \frac{(2x-1)\,dx}{(x^2-4)(x-3)}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm. Verilen sorunun çözümü için, rasyonel fonksiyonları integrali başlığı altında olduğu gibi $\frac{\mathrm{A}}{x-2}+\frac{\mathrm{B}}{x+2}+\frac{C}{x-3}=\frac{2x-1}{(x^2-4)(x+3)}$ diyelim. Buradan

- $x=2$ için $-4\mathrm{A}=3 \Rightarrow \mathrm{A}=\dfrac{-3}{4}$
- $x=-2$ için $20\mathrm{B}=5 \Rightarrow \mathrm{B}=\dfrac{-1}{4}$
- $x=3$ için $5C=5 \Rightarrow C=1$

$$\int \frac{(2x-1)dx}{(x^2-4)(x-3)} = \frac{-3}{4}\int \frac{dx}{x-2} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+2} + \int \frac{dx}{x-3}$$
$$= \frac{-3}{4}\ln|x-2| - \frac{1}{4}\ln|x+2| + \ln|x-3| + c$$

elde edilir.

3) $\mathrm{I}=\displaystyle\int \frac{3x^2-x+2}{(x-1)(x^2+1)}dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm. Bir önceki örnekte olduğu gibi $\dfrac{\mathrm{A}}{x-1}+\dfrac{\mathrm{B}x+C}{x^2+1}=\dfrac{3x^2-x+2}{(x-1)(x^2+1)}$ denirse, payların karşılıklı eşitliğinden $\mathrm{A}(x^2+1)+(\mathrm{B}x+C)(x-1)=3x^2-x+2$ bulunur. Buradan

- $x=1$ için $2\mathrm{A}=2$
- x^2 li terimlerin katsayılarından $\mathrm{A}+\mathrm{B}=3 \Rightarrow \mathrm{B}=1$
- x li terimlerin katsayılarından $\mathrm{A}-C=2 \Rightarrow C=0$

olur. Böylece,

$$\mathrm{I}=2\int \frac{dx}{(x-1)} + \int \frac{x\,dx}{x^2+1} = 2\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + c$$

elde edilir.

4) $\displaystyle\int \frac{x+1}{(x-3)(x^2+1)}dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm. $\dfrac{\mathrm{A}}{x-3}+\dfrac{\mathrm{B}x+C}{x^2+1}=\dfrac{x+1}{(x-3)(x^2+1)}$ olsun. Buradan $\mathrm{A}(x^2+1)+(\mathrm{B}x+C)(x-3)=x+1$ yani

$(\mathrm{A}+\mathrm{B})x^2+(-3\mathrm{B}+C)x+\mathrm{A}-3C=x+1$ elde edilir. O halde,

- $x=3$ için $10\mathrm{A}=4 \Rightarrow \mathrm{A}=\dfrac{2}{5}$

- x^2 li $\mathrm{A}+\mathrm{B}=0 \Rightarrow \mathrm{B}=\frac{-2}{5}$
- x li $\frac{2}{5}-3C=1 \Rightarrow C=\frac{-1}{5}$

bulunur. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+1}{(x-3)(x^2+1)}dx &= \frac{2}{5}\int \frac{dx}{x-3}-\frac{1}{5}\int \frac{2x+1}{x^2+1}dx \\
&= \frac{2}{5}\ln|x-3|-\frac{2}{5}\int \frac{x\,dx}{x^2+1}-\frac{1}{5}\int \frac{dx}{x^2+1} \\
&= \frac{2}{5}\ln|x-3|-\frac{1}{5}\ln|x^2+1|-\frac{1}{5}\arctan x+c
\end{aligned}$$

olur.

5) $\mathrm{I}=\int \sin x \sin 2x \sin 3x\,dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm. Bu integral için $\begin{cases} \sin a \sin b = \frac{1}{2}\{\cos(a-b)-\cos(a+b)\} \\ \sin a \cos b = \frac{1}{2}\{\sin(a-b)+\sin(a+b)\} \end{cases}$ özdeşlikleri kullanılabilir.

Böylece,

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}=\int \sin x \sin 2x \sin 3x\,dx &= \int \frac{1}{2}(\cos x-\cos 3x)\sin 3x\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int (\sin 3x \cos x-\sin 3x \cos 3x)\,dx \\
&= \frac{1}{4}\int \{\sin(3x-x)+\sin(3x+x)-(\sin(3x-3x)+\sin(3x+3x))\}\,dx \\
&= \frac{1}{4}\int (\sin 2x+\sin 4x-\sin 6x)\,dx \\
&= \frac{-1}{8}\cos 2x-\frac{1}{16}\cos 4+\frac{1}{24}\cos 6x+c
\end{aligned}$$

olur.

6) $\int \sin^5 x \cos^3 x\,dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm. $\begin{cases} u=\sin x \\ du=\cos x dx \end{cases}$ değişken dönüşümü ile

$$\int \sin^5 x \cos^3 x \, dx = \int u^5 \left(1-u^2\right) du$$
$$= \frac{-u^8}{8} + \frac{u^6}{6} + c$$
$$= \frac{-\sin^8 x}{8} + \frac{\sin^6 x}{6} + c$$

elde edilir.

7) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+2\sin x - \cos x}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm. $\tan\frac{x}{2} = u$ değişken dönüşümü yapılırsa $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$, $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ ve $dx = \frac{2du}{1+u^2}$ olacağını daha önce görmüştük. Buradan

$$\mathrm{I} = \int \frac{dx}{1+2\sin x - \cos x} = \int \frac{\frac{2u}{1+u^2}}{1+2\frac{2u}{1+u^2} - \frac{1-u^2}{1+u^2}} = \int \frac{2}{1+u^2} \frac{1+u^2}{1+u^2+4u-1+u^2} du$$
$$= \int \frac{du}{u^2+2u} = \int \left(\frac{\mathrm{A}}{u} + \frac{\mathrm{B}}{u+2} \right) du$$

olacak şekilde A ve B ; $\mathrm{A}\left(u+2\right) + \mathrm{B}u = 1$ denkleminden $\mathrm{A} = \frac{1}{2}$, $\mathrm{B} = \frac{-1}{2}$ şeklinde elde edilir. Böylece,

$$\mathrm{I} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} - \frac{1}{2}\int \frac{du}{u+2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\tan x/2}{\tan x/2 + 2}\right| + c$$

olur.

8) $\mathrm{I}_3 = \displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{7-5x^2}}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm. Burada $\begin{cases} \sqrt{5}x = \sqrt{7}\sin\vartheta \\ \sqrt{5}dx = \sqrt{7}\cos\vartheta \, d\vartheta \end{cases}$ değişken dönüşümü kullanılırsa

$$\mathrm{I}_3=\int \frac{\frac{7}{\sqrt{5}}\cos\vartheta\, d\vartheta}{\frac{7}{5}\sin^2\vartheta \underbrace{\sqrt{7-7\sin^2\vartheta}}_{\sqrt{7}\cos\vartheta}}=\frac{\sqrt{5}}{7}\int \operatorname{cosec}^2\vartheta\, d\vartheta=-\frac{\sqrt{5}}{7}\cot\vartheta+c$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{7}\frac{\sqrt{7-5x^2}}{\sqrt{5}x}+c$$

$$=\frac{\sqrt{7-5x^2}}{7}+c$$

elde edilir. $\cot\vartheta$ nın nasıl $\dfrac{\sqrt{7-5x^2}}{\sqrt{5}x}$ halini aldığını anlamak için yukarıdaki değişken dönüşümünü kullanarak dik üçgenden faydalanınız.

9) $\int x\arctan x\, dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm. Kısmi integrasyon metodu ile çözüme gidelim. $\begin{cases} u=\arctan x & dv=xdx \\ du=\dfrac{1}{1+x^2}dx & v=\dfrac{x^2}{2} \end{cases}$ dönüşümü ile

$$\int x\arctan x\, dx=\frac{x^2\arctan x}{2}-\int\frac{x^2}{1+x^2}$$

$$=\frac{x^2\arctan x}{2}-\left\{\int dx-\int\frac{dx}{1+x^2}\right\}$$

$$=\frac{x^2\arctan x}{2}-\frac{x}{2}+\frac{\arctan x}{2}+c$$

elde edilir.

10) $\mathrm{I}=\int\dfrac{\cos^2 x}{e^x}dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm. Bu integrali çözmek için kısmi integrasyon yöntemi kullanılır. Eğer, I için $\left\{\begin{array}{l|l} u=\cos^2 x & dv=e^{-x}dx \\ du=-2\cos x\sin x\, dx & v=-e^{-x} \end{array}\right.$ dönüşümü yapılırsa

$$\mathrm{I}=-\frac{\cos^2 x}{e^x}-\int 2\cos x\sin x\, e^{-x}dx=-\frac{\cos^2 x}{e^x}-\int\frac{\sin 2x}{e^x}dx$$

elde edilir. Sağ yandaki son integral $I_1=\int\frac{\sin 2x}{e^x}dx$ olsun. O halde I_1 için

$\begin{cases} u=\sin 2x \\ du=2\cos 2x\,dx \end{cases}\left| \begin{array}{l} dv=e^{x}dx \\ v=-e^{-x} \end{array}\right.$ dönüşümü yapılırsa

$$I_1=-\frac{\sin 2x}{e^x}+2\int\frac{\cos 2x}{e^x}dx$$

olur. Burada da sağ yandaki son integrale bu kez $I_2=\int\frac{\cos 2x}{e^x}dx$ denir ve I_2 için

$\begin{cases} u=\cos 2x \\ du=-2\sin 2x\,dx \end{cases}\left| \begin{array}{l} dv=e^{-x}dx \\ v=-e^{-x} \end{array}\right.$ dönüşümü yapılırsa $I_2=-\frac{\cos 2x}{e^x}-\int\frac{\sin 2x}{e^x}dx$ dolayısıyla,

$$I_1=\frac{-\sin 2x}{e^x}+2\left[-\frac{\cos 2x}{e^x}-2\underbrace{\int\frac{\sin 2x}{e^x}dx}_{I_1}\right]=\frac{-\sin 2x}{e^x}-\frac{2\cos 2x}{e^x}-4\underbrace{\int\frac{\sin 2x}{e^x}dx}_{I_1}$$

$$I_1=\frac{-1}{5e^x}\left(\sin 2x+2\cos 2x\right)$$

bulunur. Böylece aranan integral

$$I=\frac{1}{e^x}\left(-\cos^2 x+\frac{\sin 2x+2\cos 2x}{5}\right)+c$$

olarak elde edilir.

11) $I=\int\frac{dx}{(x+3)\sqrt{x^2+6x+8}}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm. $I=\int\frac{dx}{(x+3)\sqrt{(x+3)^2-1}}\underset{dx=\sec\vartheta\tan\vartheta d\vartheta}{\overset{x+3=\sec\vartheta}{=}}\int\frac{\sec\vartheta\tan\vartheta d\vartheta}{\sec\vartheta\sqrt{\sec^2\vartheta-1}}=\int d\vartheta=\vartheta+c=\arccos\left(\frac{+1}{x+3}\right)+c$

12) $I=\int\frac{\left(1+\sqrt[4]{x+1}\right)dx}{\sqrt{x+1}\,(x+1)}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm. $\begin{cases} x+1=t^4 \\ dx=4t^3dt \end{cases}$ dönüşümü yapılırsa

$$\text{I}=\int\frac{(1+t)4t^3dt}{t^2t^4}=4\int\frac{1+t}{t^3}dt=4\int\frac{dt}{t^3}+4\int\frac{dt}{t^2}=-\frac{2}{t^2}-\frac{4}{t}+c$$
$$=\frac{-2}{\sqrt{x+1}}-\frac{4}{\sqrt[4]{x+1}}+c$$

bulunur.

13) $\int_0^3\left|(x-1)(x-2)\right|dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm.

$$\int_0^3\left|(x-1)(x-2)\right|dx=\int_0^1\left(x^2-3x+2\right)dx-\int_1^2\left(x^2-3x+2\right)dx+\int_2^3\left(x^2-3x+2\right)dx$$
$$=\left[\frac{x^2}{3}-\frac{3x^2}{2}+2x\right]_0^1-\left[\frac{x^2}{3}-\frac{3x^2}{2}+2x\right]_1^2+\left[\frac{x^2}{3}-\frac{3x^2}{2}+2x\right]_2^3$$
$$=2\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+2\right)-2\left(\frac{8}{3}-6+4\right)+\left(9-\frac{27}{2}+6\right)$$
$$=\frac{5}{3}-\frac{4}{3}+\frac{3}{2}=\frac{11}{6}$$

14) $\int_0^{\ln 5}\frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm. $\sqrt{e^x-1}=u$ dersek $\begin{cases} e^x-1=u^2 \\ e^xdx=2udu \\ e^x+3=u^2+4 \end{cases}$ bulunur. Sınırlara bakacak olursak $\begin{cases} x=0\Rightarrow u=0 \\ x=\ln 5\Rightarrow u=2 \end{cases}$

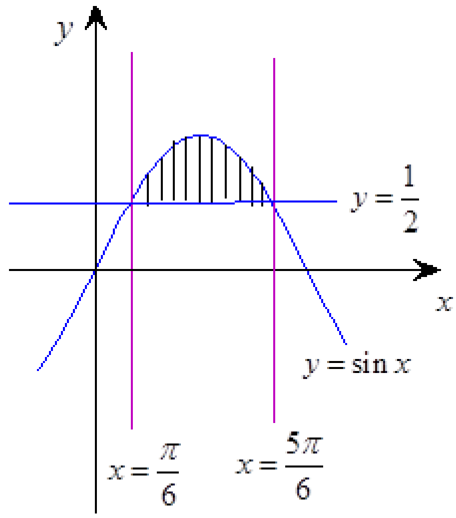
dır. O halde

$$\text{I}=\int_0^{\ln 5}\frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx=\int_0^2\frac{u.2u\,du}{u^2+4}=\int_0^2\frac{2u^2du}{u^2+4}\int_0^2\left(2-\frac{8}{u^2+4}\right)du=\left[+2u-\frac{8}{2}\arctan\frac{u}{2}\right]_0^2=4-4\arctan 1-0+0$$
$$=4-4.\frac{\pi}{4}=4-\pi$$

olur.

15) $y=\sin x$ eğrisi $y=\frac{1}{2}$, $x=\frac{\pi}{6}$ ve $x=\frac{5\pi}{6}$ doğruları arasında kalan bölgeyi koordinat düzleminde gösterip integral vasıtasıyla alanını bulunuz.

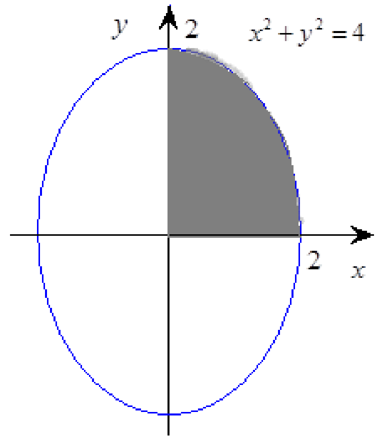
Çözüm.



$$
\begin{aligned}
Alan &= \int_{\pi/6}^{5\pi/6}\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)dx=\left[-\cos x-\frac{x}{2}\right]_{\pi/6}^{5\pi/6} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{5\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{12} \\
&= \sqrt{3}-\frac{\pi}{3} \\
&= \frac{3\sqrt{3}-\pi}{3}
\end{aligned}
$$

16) $x^2+y^2=4$ eğrisi ile sınırlı bölgenin alanını integral yardımıyla bulunuz.

Çözüm. Şekilde de gösterildiği gibi alanın $1/4$ ünü integral yardımı ile bulup bulunan alanı 4 ile çarpalım.



$$
Alan = 4\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx \underset{\substack{x=0\Rightarrow t=0 \\ x=2\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}}}{\overset{\substack{x=2\sin t \\ dx=2\cos t\,dt}}{=}} 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4-4\sin^2 t}\,2\cos t\,dt
$$

$$
\begin{aligned}
&= 16\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos 2t+1\right)dt \\
&= 8\left[\frac{\sin 2t}{2}+t\right]_0^{\pi/2} = 8.\frac{\pi}{2}=4\pi
\end{aligned}
$$

17) $y=9-x^2$ parabolü ve $y=x+3$ doğrusu ile sınırlı bölgenin alanını integral yardımı ile hesaplayınız.

Çözüm. Bu iki eğrinin kesişim noktalarını bulalım.

$$
y=9-x^2 \cap y=x+3 \Rightarrow 9-x^2=x+3 \Rightarrow x^2+x-6=0 \Rightarrow x=2, x=-3
$$

olur. Buradan

$$\text{Alan} = \int_{-3}^{2} \left(9 - x^2 - x - 3\right) dx$$

$$= \left[\frac{-x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 6x\right]_{-3}^{2}$$

$$= \frac{-8}{3} - 2 + 12 - 9 + \frac{9}{2} + 18$$

$$= 19 + \frac{-16+27}{6}$$

$$= \frac{125}{6}$$