SAYISAL ANALİZ

Dr. Öğr ÜYESİ Abdullah SEVİN

SAYISAL ANALİZ

EĞRİ UYDURMA

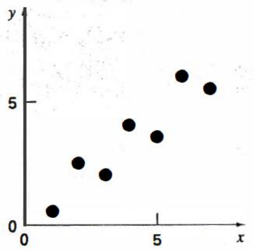
(Curve Fitting)

İÇİNDEKİLER

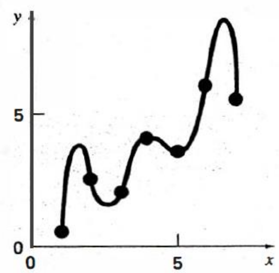
Eğri Uydurma (Curve Fitting)

- Çoğu mühendislik probleminin çözümünde
  - Bağımsız değişkenlerden oluşan fonksiyonlara ya da
  - x_i, y_i noktalarına verilmiş veri (değer) gruplarına ihtiyaç duyulur.
- Eldeki verilerin hatalı olduğu durumlarda, ara değer tahmininde (interpolasyon), polinom interpolasyonu iyi sonuçlar vermez.
- Sayısal değerler ile ortaya konan bir fonksiyona ait en doğru eğrinin elde edilebilmesi o fonksiyona ait en uygun fonksiyon ifadesinin tanımlanmasına bağlıdır.
- İhtiyaç duyulan bu verileri sağlayacak polinomların katsayılarını bulmak için çeşitli yöntemler geliştirilmiştir.
  - En sık kullanılan yöntem eğri uydurmadır.
  - Fonksiyonlar polinomlara eğri uydurma için kullanılır.

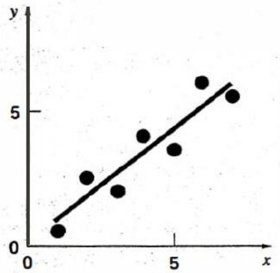
$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$



Hatalı veriler

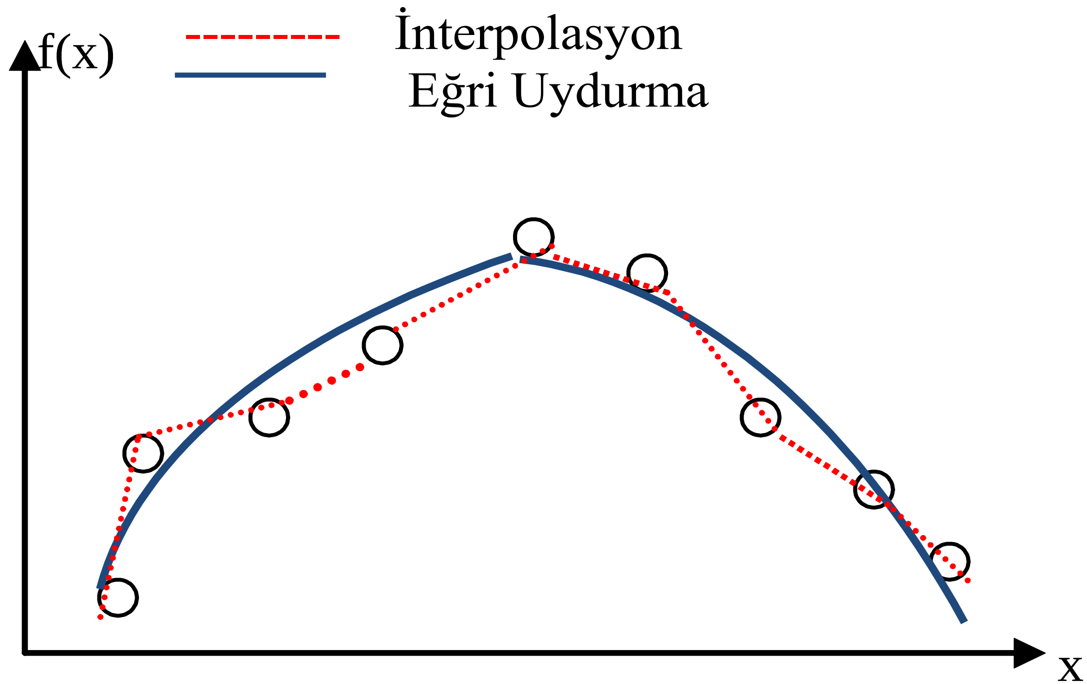


Veri aralığı dışında salınan polinom

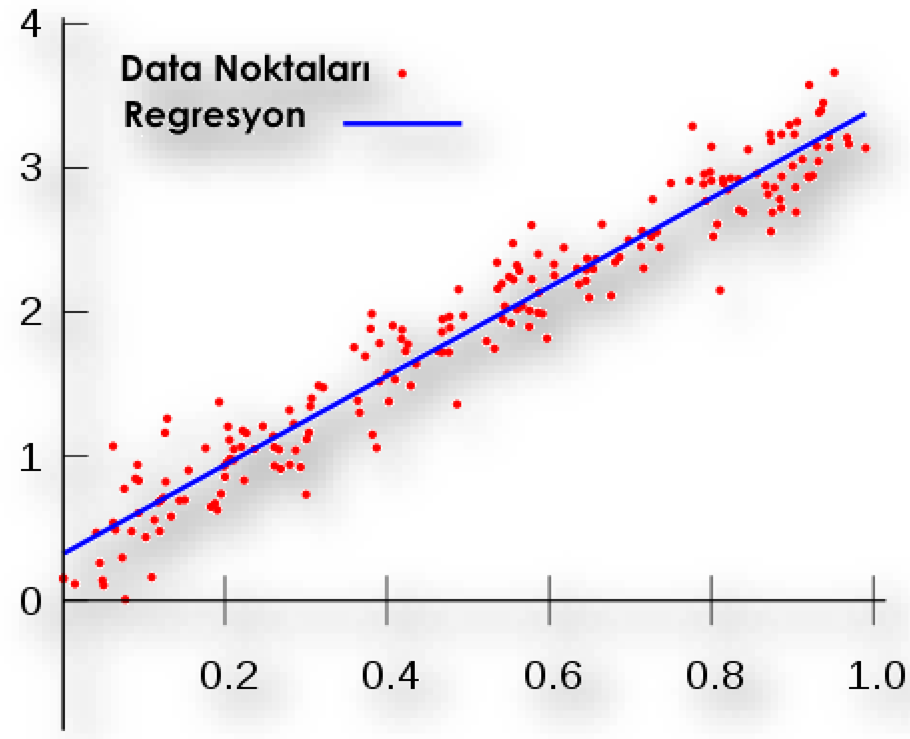


Eğri Uydurma

Eğri Uydurma ile Ara Değer Bulma Arasındaki İlişki



Eğri Uydurma



Eğri Uydurma (Curve Fitting)

- **En Küçük Kareler Yöntemi**
  - **Yaklaşık olarak elde edilen (uydurulan) fonksiyon değerleri ile ölçülerek elde edilen gerçek fonksiyon değerleri arasındaki farkların kareleri toplamı minimum yapılmaya çalışılır.**
  - **Hedef, bilinen ölçüm sonuçlarına ait değerlere mesafe olarak en az hatalı eğriyi veren fonksiyon ifadesini elde etmektir.**

- **Örnek:**
  - **$y_i \Rightarrow$ bilinen sonuçlar**
  - **$f(x_i) \Rightarrow$ işlem sonucunda elde edilecek fonksiyon**
  - **Bilinen n nokta için;**

$$\sum_{i=1}^{n}\left[f(x_i)-y_i\right]^2$$

formülünün minimum yapılmasını sağlayan $f(x_i)$ fonksiyon katsayılarını elde etme işlemidir.

  - **İşlem sonucunda elde edilecek olan katsayıların dizilişi fonksiyona ait polinom formun derecesini belirler.**

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

Eğri Uydurma (Curve Fitting)

- **<u>En Küçük Kareler Yöntemi</u>**
- **Örnek: Bir doğru denklemi (birinci dereceden polinom form)**

  $f(x) = a_0 + a_1 x$

  - **Burada amaç, en küçük kareler yöntemi ile a_0 ve a_1 katsayılarını bulmaktır.**

  - **Katsayıların adedi (örnekte 2) en küçük kareler yönteminde kullanılacak matrislerin satır sayısını belirler.**

$$\sum_{i=1}^{n}\left[f(x_i)-y_i\right]^2=\sum_{i=1}^{n}\left[a_0+a_1x_i-y_i\right]^2$$

  - **Burada elde edilecek olan farkların karelerinin toplamının a_0 ve a_1 katsayılarına göre minimum olmalıdır.**

  - **Bunun için yukarıda eşitliğin a_0 ve a_1 katsayılarına göre türevleri alınarak sıfıra eşitlenir.**

Eğri Uydurma (Curve Fitting)

- **Eşitliğin a_0 ve a_1 katsayılarına göre türevleri alınarak sıfıra eşitlenir.**

$$\frac{d\sum_{i=1}^{n}\left[a_0 + a_1 x_i - y_i\right]^2}{a_0} = 2\sum_{i=1}^{n}\left[a_0 + a_1 x_i - y_i\right] = 0$$

$$\frac{d\sum_{i=1}^{n}\left[a_0 + a_1 x_i - y_i\right]^2}{a_1} = 2\sum_{i=1}^{n}\left[a_0 + a_1 x_i - y_i\right]x_i = 0$$

- **İşlemler düzenlenirse,**

$$a_0 n + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{bmatrix}$$

Eğri Uydurma (Curve Fitting)

- **Örnek:** Aşağıdaki tablo da verilen sayısal değerleri kullanarak en küçük kareler metodu ile $f(x) = a_0 + a_1x$ fonksiyonunu elde ediniz?

Tablo: x ve y'ye ait sayısal değerler

x	-2	0	1	2	4
y	-3	1	3	5	9

- **Çözüm:**

1. Üretilmesi istenen polinomun derecesi 1
2. Bulunacak katsayılar a_0 ve a_1 olduğundan en küçük kareler yöntemindeki eşitliklerde kullanılacak matrislerin satır sayısı 2 olacak.

Tablo: x ve y değerlerine göre gerekli hesaplama sonuçları

	x	y	x_i^2	$x_i y_i$
	-2	-3	4	6
	0	1	0	0
	1	3	1	3
	2	5	4	10
	4	9	16	36
Toplam	5	15	25	55

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{bmatrix}^{-1} x \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 25 \end{bmatrix}^{-1} x \begin{bmatrix} 15 \\ 55 \end{bmatrix}$$

Eğri Uydurma (Curve Fitting)

- **Örnek (Devam):**

$$A=\begin{bmatrix}5 & 5\\ 5 & 25\end{bmatrix} \Rightarrow ek(A)=\begin{bmatrix}25 & -5\\ -5 & 5\end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{100}\begin{bmatrix}25 & -5\\ -5 & 5\end{bmatrix}$$

$$|A|=\begin{bmatrix}5 & 5\\ 5 & 25\end{bmatrix}=100$$

$$\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\end{bmatrix}=\frac{1}{100}\begin{bmatrix}25 & -5\\ -5 & 5\end{bmatrix}x\begin{bmatrix}15\\ 55\end{bmatrix}=\frac{1}{100}\begin{bmatrix}100\\ 200\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$$

$$f(x)=a_0+a_1x=1+2x$$

Örnek : (0 , 6.4), (1 , 2.6), (2 , 0.5), (3 , 0.6) ve (4 , 0.3) veri noktalarına en iyi uyan doğrunun denklemini bulunuz.

Çözüm: Aranılan doğrunun denklemi **y = mx + b** olmak üzere veri noktalarına karşılık gelen aşağıdaki tabloyu oluşturalım:

x_i	0	1	2	3	4
y_i	6.4	2.6	0.5	0.6	0.3

m ve **b** yi formüllerden elde edebilmek için bu formüldeki her bir terimin değerini buluruz.

Öncelikle, **n = 5** olduğuna dikkat ederek

x_i	0	1	2	3	4
y_i	6.4	2.6	0.5	0.6	0.3

$$\sum_{k=1}^{5} x_k = 0+1+2+3+4=10$$

$$\sum_{k=1}^{5} y_k = 6.4+2.6+0.5+0.6+0.3=10.4$$

$$\sum_{k=1}^{5} x_k y_k = 0\cdot(6.4)+1\cdot(2.6)+2\cdot(0.5)+3\cdot(0.6)+4\cdot(0.3)=2.6+1+1.8+1.2=6.6$$

$$\sum_{k=1}^{5} x_k^{\,2} = 0+1+4+9+16=30$$

$$\left(\sum_{k=1}^{5} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{5} y_k\right)=10\cdot(10.4)=104$$

$$m=\frac{n(\sum_{k=1}^{n}x_k y_k)-(\sum_{k=1}^{n}x_k)(\sum_{k=1}^{n}y_k)}{n(\sum_{k=1}^{n}x_k^2)-(\sum_{k=1}^{n}x_k)^2}=\frac{5\cdot(6.6)-104}{5\cdot 30-100}=\frac{33-104}{50}=\frac{-71}{50}=-1.42,$$

$$b=\frac{\sum_{k=1}^{n}y_k-m(\sum_{k=1}^{n}x_k)}{n}=\frac{10.4-(-1.42)\cdot 10}{5}=\frac{10.4+14.2}{5}=\frac{24.6}{5}=4.92.$$

O halde istenilen doğrunun denklemi

y=-1.42x+4.92

dir.

Eğri Uydurma (Curve Fitting)

- **Örnek:** Aşağıda verilen tablodaki sayısal değerleri kullanarak **en küçük kareler metodu** ile $f(x) = a_0 + a_1x$ fonksiyonunu elde ediniz.

x	-1	1	2	3
y	-2	0	2	5

Eğri Uydurma (Curve Fitting)

- **En Küçük Kareler Yöntemi**
- **Eğer elde edilmesi gereken fonksiyonun karşılığı birinci dereceden değil de ikinci dereceden olsaydı bu durumda fonksiyon;**

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

- **Burada amaç, en küçük kareler yöntemi ile a_0 , a_1 ve a_2 katsayılarını bulmaktır.**
- **Katsayıların adedi (örnekte 3) en küçük kareler yönteminde kullanılacak matrislerin satır sayısını belirler.**

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \sum_{i=1}^{n} x_i^4 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i \end{bmatrix}$$

Örnek: Aşağıdaki tablo da verilen sayısal değerleri kullanarak en küçük kareler metodu ile $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ fonksiyonunu elde ediniz?

x	-2	0	1	2	4
y	-3	1	3	5	9

Tablo: x ve y'ye ait sayısal değerler

Çözüm:

➊ Üretilmesi istenen polinomun derecesi 2

x	y	x_i^2	$x_i y_i$	X_i^3	x_i^4	$x_i^2 y_i$
-2	-3	4	6	-8	16	-12
0	1	0	0	0	0	0
1	3	1	3	1	1	3
2	5	4	10	8	16	20
4	9	16	36	64	256	144
5	15	25	55	65	289	155

MATLAB İle Eğri Uydurma

- **polyfit** (x, y, n)
  - n: üretilecek olan polinom formun derecesini tanımlar
  - y: bilinen Y değerlerinden oluşan **sütun vektörü**
  - x: bilinen X değerlerinden oluşan **sütun vektörü**

- **Örnek:** Önceki sorudaki işlemi MATLAB'ta polyfit komutu ile çözünüz?

```
>> X = [-2 0 1 2 4];

>> Y = [-3 1 3 5 9];

>> p=polyfit(X,Y,1)

p =

     2.0000    1.0000
```

Eğri Uydurma (Curve Fitting)

- **En Küçük Kareler Yöntemi**
  - Regresyon Katsayısı
    - Eğri uydurma da kullanılacak olan polinom forma sahip fonksiyonun doğruluğu r ile tanımlanan regresyon katsayısı ile belirlenir.
    - Regresyon katsayısının 0< r ≤ 1 aralığında değer alması istenir.
      - r ≈ 0 ⇒ uydurulan fonksiyon iyi değildir.
      - r ≈ 1 ⇒ uydurulan fonksiyon iyidir.

  - Regresyon katsayısının hesabı için ilk olarak ölçüm sonucu elde edilen sayısal değerlerin aritmetik ortalaması bulunur.

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

  - Sonra ölçüm değerleri ve uydurulan fonksiyona ait hata hesabı için şu işlemler yapılır.

$$\delta_y = \sum_{i=1}^{n}\left[y_i - \bar{y}\right]^2 \quad \text{ve} \quad \delta_f = \sum_{i=1}^{n}\left[f(x_i) - \bar{y}\right]^2$$

$$r = \sqrt{\frac{\delta_f}{\delta_y}}$$

ÖDEV

- **Tablo da verilen sayısal değerleri kullanarak en küçük kareler metodu aşağıda istenenleri bulunuz.**

Tablo: x ve y'ye ait sayısal değerler

x	0	2	5	7	9
y	2	6	8	11	15

❶ $f(x) = a_0 + a_1 x$ **fonksiyonunu elde ediniz. Regresyon katsayısını hesaplayınız.**

❷ $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ **fonksiyonunu elde ediniz. Regresyon katsayısını hesaplayınız.**

Not: Ödevi hem el ile hem de matlab ile çözünüz. Matlab çözümünde polyfit komutunun kullanımının yanısıra grafik çizimi de gerçekleştiriniz. (Kaynakçadaki İlyas Beyin kitabından yararlanabilirsiniz)

Eğri Uydurma (Curve Fitting)

Örnek 6.1: Aşağıdaki belli x değerlerine karşılık y ölçüm değerleri verildiğine göre bir regresyon doğrusunu bulunuz. Korelasyon katsayısını hesaplayarak sonucu yorumlayınız.

x	1	2	3	4	5	6	7
y	0.5	2.5	2.0	4.0	3.5	6.0	5.5

Çözüm: Katsayıların hesabı için gerekli sayısal değerler tablo halinde aşağıda verilmiştir

Eğri Uydurma (Curve Fitting)

i	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2
1	1	0.5	0.5	1
2	2	2.5	5.0	4
3	3	2.0	6.0	9
4	4	4.0	16.0	16
5	5	3.5	17.5	25
6	6	6.0	36.0	36
7	7	5.5	38.5	49
$\sum$ $n(7)$	**28**	**24**	**119.5**	**140**

Eğri Uydurma (Curve Fitting)

Bu tabloya göre ortalama değerler

$$\bar{x} = \frac{28}{7} = 4, \qquad \bar{y} = \frac{24}{7} = 3.428$$

ve katsayılar

$$a_1 = \frac{7(119.5) - 28(24)}{7(140) - 28^2} = 0.8393, \qquad ve \;\; a_0 = 3.428 - 0.8393x4 = 0.0714$$

şeklinde hesaplanır. Buna göre regresyon doğrusu

$$y_r = 0.0714 + 0.8393x$$

elde edilir. Korelasyon katsayısı için

$$S = \sum (y_i - \bar{y})^2 = 22.7143$$

Eğri Uydurma (Curve Fitting)

$$S_r = \sum e_i^2 = 2.991 \qquad \boldsymbol{e_i = y_{ri} - y_i}$$

$$r^2 = \frac{S - S_r}{S} = \frac{22.714 - 2.991}{22.714} = 0.868$$

$$r = 0.93$$

değerleri bulunur. Korelasyon katsayısı yüksek olduğundan bulunan doğru ile iyi bir temsil söz konusu olduğu söylenebilir.

1.Korelasyon katsayısı, iki değişken arasındaki doğrusal ilişkiyi temsil etmek için kullanılır.
2.Regresyon katsayısı ise bir değişkeni başka bir değişken temelinde tahmin etmek için kullanılır.

KAYNAKLAR

- **İlyas ÇANKAYA, Devrim AKGÜN, Sezgin KAÇAR "*Mühendislik Uygulamaları İçin MATLAB*", Seçkin Yayıncılık**
- **Steven C. Chapra, Raymond P. Canale (Çev. H. Heperkan ve U. Kesgin), "*Yazılım ve Programlama Uygulamalarıyla Mühendisler İçin Sayısal Yöntemler*", Literatür Yayıncılık.**
- **Serhat YILMAZ, "*Bilgisayar İle Sayısal Çözümleme*", Kocaeli Üniv. Yayınları, No:168, Kocaeli, 2005.**
- **Yüksel YURTAY, Sayısal Analiz Ders Notları, Sakarya Üniversitesi**