Lineer Diferensiyel Denklemleri

$f(x)y' + g(x)y = h(x)$ şek dif denke lineer denir.

$f(x)$ ile bölersek

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

denklemini elde ederiz ki bu da lineer diferensiyel denklemlerin genel formudur.

** a) $y = u.v$ dönüşümünü yaparsak

$$y' = u'v + uv'$$

$$u'v + v'u + P(x)uv - Q(x) = 0$$

$$(u' + P(x)u)v + v'u - Q(x) = 0$$

u yu $u' + P(x)u = 0$ ol. bir seçelim.

$u = e^{-\int P dx}$ elde edilir.

$$v\overbrace{(u' + Pu)}^{0} + uv' - Q = 0 \Rightarrow v' = Qe^{\int P dx}$$

$\Rightarrow v = \int [Qe^{\int P dx}] dx + c$ elde edilir

Buradan $\boxed{y = e^{-\int P dx} \left[\int Qe^{\int P dx} dx + c \right]}$

elde edilir.

b) $\lambda = \lambda(x)$ şeklinde x'e bağlı bir integrasyon çarpanı araştıralım

$$y' + P(x)y - Q(x) = 0$$

$$dy + [P(x)y - Q(x)]dx = 0$$

$$\frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)} = \frac{0 - P(x)}{-1} = P(x)$$

$$\ln \lambda(x) = \int P(x)\,dx \Rightarrow \lambda(x) = e^{\int P(x)dx}$$

Denklemi λ ile çarpalım.

$$e^{\int P dx} dy + (Py - Q)e^{\int P dx} = 0$$

Buradan Tam diferensiyel denklemin çözümü

$$\boxed{y e^{\int P dx} - \int Q e^{\int P dx} dx = c}$$

olarak bulunur.

c) $Y' + PY = Q$ denkleminin çözümünü sağ tarafsız olarak bulalım.

$$Y' + PY = 0 \Rightarrow \frac{dY}{Y} + P\,dx = 0 \Rightarrow \ln Y + \int P\,dx = \ln c$$

$$\Rightarrow y = c e^{-\int P dx}$$

c yerine $c(x)$ alalım

$$Y = c(x) e^{-\int P dx}$$

Bunu denklemde yerine yazalım

$$c'(x) = Qe^{\int P\,dx} \Rightarrow c(x) = \int (Qe^{\int P\,dx})\,dx + c$$

elde edilir. Buradan

$$\boxed{y = \left[\int Qe^{\int P\,dx}\,dx + c\right] e^{-\int P\,dx}}$$

çözümü bulunur.

Lineer Denklemlerin Genel özellikleri:

1) Lin. dif denk.in genel çözümü iki terimden oluşur.
2) Lin denk genel çözümü çeşitli aşamalarda iki kez integral almayla bulunur.
3) Lin dif. denk.in bir özel çözümü bilinirse genel çözüm bir integral ile bulunur.

Örn: $y' + Py = Q$ $\quad y_1$: özel çözüm

$$y' - y_1' + P(y - y_1) = 0$$

$$y - y_1 = u \Rightarrow u' + Pu = 0$$

$$\frac{du}{u} = -P\,dx \Rightarrow u = ce^{-\int P\,dx}$$

$$\boxed{y = y_1 + ce^{-\int P\,dx}}$$

4) İki özel çözümü bilinen lin. dif. denklemin genel çözümü doğrudan alınabilir.

$$y - y_1 = c e^{-\int P dx} \qquad y_2 : 2. \text{ özel çözüm}$$

$$y_2 - y_1 = c_1 e^{-\int P dx}$$

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{c}{c_1} = k = \text{sabit}$$

Sorular: Aşağıdaki diferensiyel denklemleri çözünüz

1) $y' + \frac{1}{x-2} y = x^2$

2) $(x^4 + 2y)\,dx - x\,dy = 0$

3) $(1+x^2)\,dy + (2xy - \tan x)\,dx = 0$

4) $(1 + 2x\cot y)\,dy = dx$ (ödev)

5) $2y(e^{y^2} + x)\,dy - dx = 0$

6) $y' + tgx \cdot y = -\cot g^2 x$

7) $y' + 2xy = -e^{-x^2}$

8) $\frac{dy}{dx} + y\cot x = 5e^{\cos x}$ $\quad x = \frac{\pi}{2}$, $y = -4$ için özel çözüm bulunuz

9) $y \ln y\,dx + (x - \ln y)\,dy = 0$

10) $\frac{dy}{dx} + \left(\frac{2x+1}{x}\right) y = e^{-2x}$

11) $(x^2+1)\frac{dy}{dx} + 4xy = x$; $y(2) = 1$

12) $y^2\,dx + (3xy - 1)\,dy = 0$

Çözümleri

1) $y' + \frac{1}{x-2} y = x^2$ $\quad P(x) = \frac{1}{x-2} \quad Q(x) = x^2$

$\lambda = e^{\int P dx}$ integral çarpanıdır

$\lambda = e^{\int \frac{1}{x-2} dx} = e^{\ln(x-2)} = x-2$

$\boxed{\lambda y = \int \lambda Q dx + c}$

$(x-2) y = \int (x-2) x^2 dx + c$

$(x-2) y = \frac{1}{4} x^4 - \frac{2}{3} x^3 + c$

$\Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{4} \frac{x^4}{(x-2)} - \frac{2}{3} \frac{x^3}{x-2} + \frac{c}{x-2}}$

2) $(x^4 + 2y) dx - x dy = 0$

$\frac{dy}{dx} - \frac{x^4 + 2y}{x} = 0$

$\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x} = x^3$ $\quad P(x) = -\frac{2}{x} \quad Q(x) = x^3$

Burada $\lambda = e^{\int -\frac{2}{x} dx} = e^{-2\ln x} = e^{\ln x^{-2}} = \frac{1}{x^2}$

Genel çözüm $\lambda y = \int \lambda Q dx + c$

$\frac{1}{x^2} y = \int \frac{1}{x^2} x^3 dx + c$

$$\Rightarrow \frac{y}{x^2} = \int x\,dx + c \Rightarrow \frac{y}{x^2} = \frac{x^2}{2} + c$$

olup genel çözüm

$$\boxed{y = \frac{x^4}{2} + cx^2}$$ dir.

---

3) $(1+x^2)\,dy + (2xy - \tan x)\,dx = 0$

$$(1+x^2)\frac{dy}{dx} + (2xy - \tan x) = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2xy - \tan x}{1+x^2} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{\tan x}{1+x^2} \qquad P(x) = \frac{2x}{1+x^2} \quad Q(x) = \frac{\tan x}{1+x^2}$$

$$\lambda = e^{\int P\,dx} = e^{\int \frac{2x}{1+x^2}dx} = e^{\ln(1+x^2)} = 1+x^2$$

$$\lambda y = \int \lambda Q\,dx + c$$

$$\Rightarrow (1+x^2)y = \int (1+x^2)\frac{\tan x}{1+x^2}\,dx + c$$

$$\Rightarrow \boxed{y = -\frac{\ln\cos x}{1+x^2} + \frac{c}{1+x^2}}$$

+ 5) $2y(e^{y^2}+x)\,dy - dx = 0$

$$2y(e^{y^2}+x)\frac{dy}{dx} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} - \frac{1}{2y(e^{y^2}+x)} = 0$$

$$\boxed{\frac{dx}{dy} + P(y)x = Q(y)}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} - 2yx = 2ye^{y^2}$$

$$\lambda = e^{\int -2y\,dy} = e^{-y^2}$$

$$e^{-y^2}x = \int e^{-y^2}\,2ye^{y^2}\,dy + c$$

$$\Rightarrow \boxed{x = y^2e^{y^2} + ce^{y^2}}$$

4) $(1+2x\cot y)\,dy = dx$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+2x\cot y} \Rightarrow \frac{dx}{dy} - (1+2x\cot y) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} - 2\cot y\,(x) = 1$$

$$P(y) = -2\cot y \qquad Q(y) = 1$$

$$\lambda = e^{-2\int \cot y\,dy} = e^{-2\ln(\sin y)} = \sin^{-2} y = \frac{1}{\sin^2 y}$$

$$\frac{1}{\sin^2 y} x = \int \frac{1}{\sin^2 y} \cdot 1\, dy + c = -\cot y + c$$

$$\Rightarrow \quad x = -\sin^2 y \cot y + c \sin^2 y$$

$$\boxed{x = -\sin y \cos y + c \sin^2 y}$$

---

6) $y' + \tan x . y = -\cot^2 x$

$y = uv$ diyelim $y' = u'v + uv'$

$u'v + uv' + \tan x . (u.v) + \cot^2 x = 0$

$(u' + u \tan x) v + v'u + \cot^2 x = 0$

$u' + u \tan x = 0$ ol. bir u'yu seçelim

$\frac{du}{u} + \tan x\, dx = 0 \Rightarrow u = \cos x$

Bu değeri yerine koyalım

$v' \cos x + \cot^2 x = 0$

$v' + \frac{\cos x}{\sin^2 x} = 0 \Rightarrow dv + \cot g x . \operatorname{cosec} x\, dx = 0$

İntegral alırsak

$v - \operatorname{cosec} x = c \Rightarrow v = c + \operatorname{cosec} x$

bulunur.

8) $\frac{dy}{dx} + y\cot x = 5e^{\cos x}$; $x = \frac{\pi}{2}$, $y = -4$

$P(x) = \cot x$
$Q(x) = 5e^{\cos x}$

Denklemin integral çarpanı

$$\lambda = e^{\int \cot x \, dx} = e^{\ln \sin x} = \sin x$$

$\lambda y = \int \lambda Q(x)\,dx + c$ den

$$y\sin x = 5\int e^{\cos x}\sin x\,dx = -5e^{\cos x} + c$$

Buradan $y\sin x = -5e^{\cos x} + c$

Şimdi verilen değerleri yerlerine yazıp özel çözümü bulalım.

$x = \frac{\pi}{2}$, $y = -4$ iken $(-4)\sin\frac{\pi}{2} = -5e^{\cos\frac{\pi}{2}} + c$

$\Rightarrow$ $c = 1$ dir

Buradan

$\boxed{y\sin x + 5e^{\cos x} = 1}$ elde edilir

11) $(x^2+1)\frac{dy}{dx}+4xy=x$; $y(2)=1$

$$\frac{dy}{dx}+\frac{4x}{x^2+1}y=\frac{x}{x^2+1} \qquad P(x)=\frac{4x}{x^2+1}$$

$$Q(x)=\frac{x}{x^2+1}$$

$$\lambda=e^{\int \frac{4x}{x^2+1}dx}=e^{2\ln(x^2+1)}=e^{\ln(x^2+1)^2}=(x^2+1)^2$$

Buradan $\lambda y=\int \lambda Q(x)\,dx+c$ de gerekli işlemleri yaparsak

$$(x^2+1)^2y=\int (x^2+1)^2\cdot\frac{x}{x^2+1}\,dx+c$$

$$=\int x(x^2+1)\,dx+c$$

$$(x^2+1)^2y=\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+c$$

$y(2)=1$ için
$x=2 \quad y=1$

$$(4+1)^2\cdot 1=\frac{16}{4}+\frac{4}{2}+c \Rightarrow c=25-6=19$$

olup

$$\boxed{(x^2+1)^2y=\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+19}$$

olarak genel çözüm bulunur.

Bazı uygun dönüşümler yardımıyla lineer denklemlere İndirgenebilen Dif. Denklemleri

$f'(y)y' + f(y)P(x) = Q(x)$ şeklindeki bir denklemin

Çözümü

$u = f(y)$, $u' = f'(y)y'$ dönüşümü ile

$u' + uP(x) = Q(x)$ denklemine indirgenir.

Sorular 4 1) $e^y y' + e^y = 4e^{-x}\sin x$ denk. çöz. bulunuz

Çözüm: $u = e^y$ dönüşümünü yapalım.

$u' = e^y y'$

Buradan $u' + u = 4e^{-x}\sin x$ lineer denklemini

elde ederiz.

$u' + u = 0 \Rightarrow \ln u + x = \ln c \Rightarrow u = ce^{-x}$

$u = c(x)e^{-x}$ yazılırsa $u' = c'(x)e^{-x} - c(x)e^{-x}$

bunu denklemde yazalım

$c'(x)e^{-x} - c(x)e^{-x} + c(x)e^{-x} = 4e^{-x}\sin x$

$\Rightarrow c'(x) = 4\sin x$ bulunur

Buradan $\Rightarrow c(x) = -4\cos x + c_1$ elde edilir.

Genel çözüm ise

$u = (-4\cos x + c_1)e^{-x} = -4e^{-x}\cos x + c_1 e^{-x}$ ve $u = e^y$

yazılırsa $\boxed{e^y = -4e^{-x}\cos x + c_1 e^{-x}}$ elde edilir

2) $(1+e^y)y' + y + e^y = e^{-x}$ denk çöz. bulunuz.

<u>Çözüm:</u> $u = y + e^y \Rightarrow u' = (1+e^y)y'$

$u' + u = e^{-x}$ (*) lin. denklemine indirgenir

$\frac{du}{u} + dx = 0$ için $u = ce^{-x}$

$u = c(x)e^{-x}$ için $u' = c'(x)e^{-x} - c(x)e^{-x}$

değerini (*) da yerine yazalım

Buradan $c'(x)e^{-x} - c(x)e^{-x} + c(x)e^{-x} = e^{-x}$

$c'(x) = 1$

için $c(x) = x + c_1$ ve

$u = (x+c_1)e^{-x}$ ve $u = y + e^y$ için

$\boxed{y + e^y = (x+c_1)e^{-x}}$ genel çözümü bulunur.

+ 3) $2ye^{y^2}y' - 2e^{y^2} = e^x$ denk çözümünü bulunuz.

<u>Çözüm:</u> $u = e^{y^2} \Rightarrow u' = 2ye^{y^2}y'$

Buradan $u' - 2u = e^x$ (*) lineer denk indirgenilir

$\frac{du}{u} - 2x\, dx = 0$ için $u = ce^{+2x}$

$u = c(x)e^{+2x}$ için $u' = c'(x)e^{+2x} + 2c(x)e^{+2x}$ değerini

(*) da yerine yazalım.

$c'(x)\, e^{+2x} + 2c(x)\, e^{+2x} - 2c(x)\, e^{+2x} = e^{x}$

$\Rightarrow c'(x) = e^{-x} \Rightarrow c(x) = -e^{-x} + c_1$

Buradan $u = (-e^{-x} + c_1)\, e^{2x}$

$u = -e^{x} + c_1 e^{2x}$

elde edilir. Genel çözüm ise

$u = e^{y^2}$ den $\boxed{-e^{x} + c_1 e^{2x} = e^{y^2}}$

olarak bulunur.

Soru: $\frac{1}{y} y' - a \ln y = \cos x$ dif. denklemini uygun dönüşüm yardımıyla çözünüz

---

$u = \ln y \qquad u' = \frac{1}{y} y'$

$u' - au = \cos x$

$u' - au = 0 \Rightarrow u = c e^{ax} \qquad c = c(x)$

$u = c(x)\, e^{ax} \qquad u' = c'(x) e^{ax} + a e^{ax} c(x)$

$c'(x) e^{ax} + \cancel{a e^{ax} c(x)} - \cancel{a\, c(x)\, e^{ax}} = \cos x$

$e^{ax} c'(x) = \cos x$

$c'(x) = e^{-ax} \cos x$

$c(x) = \int e^{-ax} \cos x \, dx$