BAŞLIK 16.

LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ

$F(t)$ fonksiyonu $0 \le t < \infty$ aralığında tanımlı bir fonksiyon, s ise keyfi bir reel parametre olsun. $F(t)$ fonksiyonunun **Laplace dönüşümü** $\mathcal{L}\{F(t)\}$ veya $f(s)$ ile gösterilir ve

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t)\, dt \tag{1}$$

ile tanımlanır. (1) integralinin s parametresinin herhangi bir değeri için yakınsak olması durumunda $F(t)$ nin Laplace dönüşümünün mevcut olduğu söylenir.

Her fonksiyonun Laplace dönüşümünün olmayacağı bellidir. Bir fonksiyonun Laplace dönüşümünün mevcut olması için gerçeklenmesi gereken koşullar hemen aşağıda ele alınıp incelenecektir.

Eksponansiyel Mertebeden Fonksiyon :

M ve c sabit büyüklükler olmak üzere t nin t_0 gibi sabit bir değerinden daha büyük olan t ler için

$$|F(t)| < Me^{ct} \quad , \quad t > t_0$$

ilişkisini gerçekleyen bir $F(t)$ fonksiyonunun **eksponansiyel mertebeden** olduğu ve mertebesinin de c olduğu söylenir.

$F(t) = t^2$ fonksiyonu, $t > 1$ için

$$|t^2| = t^2 < e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots$$

ilişkisini gerçekler; dolayısıyla eksponansiyel mertebesi 1 olan bir fonksiyondur.

$F(t) = e^{3t}$ fonksiyonu, $t > 0$ için

$$|e^{3t}| = e^{3t} < e^{4t}$$

ilişkisini gerçekler; dolayısıyla eksponansiyel mertebesi 4 olan bir fonksiyondur.

$$|e^{3t}| = e^{3t} < e^{4t} < e^{5t} < e^{6t} < \cdots$$

oluşumu dikkate alınarak e^{3t} nin eksponansiyel bir fonksiyon ve mertebesinin de 4 veya 5 veya 6 veya $\cdots$ olduğunu söyleyebiliriz ve diyebiliriz ki : eksponansiyel mertebeden olan bir fonksiyonun eksponansiyel mertebesi tek türlü olarak belirlenemeyebilir. Ve yine diyebiliriz ki : bizim için gerekli olan fonksiyonun eksponansiyel mertebeden olması ise ve belirlediğimiz eksponansiyel mertebesi bizim işimizi görmek için yeterli ise ötesi ile ilgilenmemiz gerekmez.

$F(t) = e^{t^2}$ olsun.

$$|e^{t^2}| = e^{t^2} < e^{ct} \quad \Rightarrow \quad e^{t(t-c)} < 1$$

ilişkisi, eşitsizliğin sol yanında yer alan $e^{t(t-c)}$ yi t yi yeterince büyük kılarak istediğimiz kadar büyük kılmanın olası olması, dolayısıyla 1 den küçük kalmasının olanaklı olmaması nedeniyle eksponansiyel mertebeden değildir.

Teorem : $t_0 > 0$ bir sabit ve $F(t)$ eksponansiyel mertebeden bir fonksiyon olmak üzere $\int_0^{t_0} e^{-st}F(t)\,dt$ integrali mevcut ise $F(t)$ nin laplace dönüşümü vardır.

İspat : $F(t)$ eksponansiyel mertebeden bir fonksiyon olsun. Yani, $t > t_0$ için $|F(t)| < Me^{ct}$ ilişkisini gerçekleyen M ve c sabitleri bulunsun.

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = \int_0^{t_0} e^{-st}F(t)\,dt + \int_{t_0}^{\infty} e^{-st}F(t)\,dt$$

yazalım. Sağ taraftaki integrallerden ilki mevcuttur. ikincisinin de var olduğunu gösterelim :

$$\int_{t_0}^{\infty} |e^{-st}F(t)|\,dt < M\int_{t_0}^{\infty} e^{-st}e^{ct}\,dt = \frac{M}{s-c}e^{-t_0(s-c)}$$

yazabiliriz. Bunun anlamı : $\int_{t_0}^{\infty} |e^{-st}F(t)|\,dt$ nin mevcut olması demektir.

$\int_{t_0}^{\infty} |e^{-st}F(t)|\,dt$ nin mevcut olması demek $\int_{t_0}^{\infty} e^{-st}F(t)\,dt$ nin mevcut olması demektir.

$\int_{t_0}^{\infty} e^{-st}F(t)\,dt$ nin mevcut olması demek ise $\int_0^{\infty} e^{-st}F(t)\,dt$ nin mevcut olması, yani $\mathcal{L}\{F(t)\}$ nin mevcut olması demektir.

ÖRNEK 1. Sıkca kullandığımız bazı fonksiyonların Laplace dönüşümünü bulalım.

1. $\mathcal{L}\{1\} = \int_0^{\infty} e^{-st}\cdot(1)\,dt = \int_0^{\infty} e^{-st}\,dt = \frac{1}{s}e^{-st}\Big|_{t=0}^{\infty} = \frac{1}{s}.$

2. $\mathcal{L}\{t\} = \int_0^{\infty} e^{-st}\cdot(t)\,dt = \int_0^{\infty} te^{-st}\,dt \left[\begin{array}{ccc} u = t & , & du = dt \\ dv = e^{-st} & , & v = -\frac{1}{s}e^{-st} \end{array}\right]$

$$= \frac{1}{s}te^{-st}\Big|_{\infty}^{0} + \frac{1}{s}\int_0^{\infty} e^{-st}\,dt = 0 + \frac{1}{s}\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}.$$

sonucu,

$$te^{-st}\Big|_{\infty}^{0} = 0\cdot e^{-s\cdot 0} - \lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^{st}} = 0 - \lim_{t\to\infty}\frac{1}{se^{st}} = 0,$$

$$\int_0^{\infty} e^{-st}\,dt = \mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$$

olduğu dikkate alınarak kolayca bulunur.

3. $\mathcal{L}\{t^2\} = \int_0^\infty e^{-st}\cdot(t^2)\,dt = \int_0^\infty t^2 e^{-st}\,dt \left[\begin{matrix} u = t^2 & , & du = 2t\,dt \\ dv = e^{-st} & , & v = -\frac{1}{s}e^{-st}\end{matrix}\right]$

$$= \frac{1}{s}t^2 e^{-st}\Big|_\infty^0 + \frac{2}{s}\int_0^\infty te^{-st}\,dt = 0 + \frac{2}{s}\mathcal{L}\{t\} = \frac{2}{s}\cdot\frac{1}{s^2} = \frac{2}{s^3}\,.$$

4. $\mathcal{L}\{t^3\} = \int_0^\infty e^{-st}\cdot(t^3)\,dt = \int_0^\infty t^2 e^{-st}\,dt \left[\begin{matrix} u = t^3 & , & du = 3t^2\,dt \\ dv = e^{-st} & , & v = -\frac{1}{s}e^{-st}\end{matrix}\right]$

$$= \frac{1}{s}t^3 e^{-st}\Big|_\infty^0 + \frac{3}{s}\int_0^\infty t^2e^{-st}\,dt = 0 + \frac{3}{s}\mathcal{L}\{t^2\} = \frac{3}{s}\cdot\frac{2}{s^3} = \frac{3!}{s^4}\,.$$

5. $\mathcal{L}\{t^{n-1}\} = \dfrac{(n-1)!}{s^n}$ olduğunu kabul edelim ve $\mathcal{L}\{t^n\} = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$ olduğunu gösterelim.

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \int_0^\infty e^{-st}\cdot(t^n)\,dt = \int_0^\infty t^n e^{-st}\,dt \left[\begin{matrix} u = t^n & , & du = nt^{n-1}\,dt \\ dv = e^{-st} & , & v = -\frac{1}{s}e^{-st}\end{matrix}\right]$$

$$= \frac{1}{s}t^n e^{-st}\Big|_\infty^0 + \frac{n}{s}\int_0^\infty t^{n-1}e^{-st}\,dt = 0 + \frac{n}{s}\mathcal{L}\{t^{n-1}\} = \frac{n}{s}\cdot\frac{(n-1)!}{s^n} = \frac{n!}{s^n}\,.$$

6. $\mathcal{L}\{\sin at\} = \int_0^\infty e^{-st}\sin at\,dt \left[\begin{matrix} u = e^{-st} & , & du = -se^{-st}\,dt \\ dv = \sin t\,dt & , & v = -\frac{1}{a}\cos at\end{matrix}\right]$

$$= \frac{1}{a}e^{-st}\cos at\Big|_\infty^0 - \frac{s}{a}\int_0^\infty e^{-st}\cos at\,dt \left[\begin{matrix} u = e^{-st}, \\ dv = \cos t\,dt\end{matrix}\right]$$

$$= \frac{1}{a} - 0 - \frac{s}{a}\left[\frac{1}{a}e^{-st}\sin at\Big|_0^\infty + \frac{s}{a}\int_0^\infty e^{-st}\sin at\,dt\right]$$

$$= \frac{1}{a} - \frac{s}{a}\left[(0-0) + \frac{s}{a}\mathcal{L}\{\sin at\}\right] = \frac{1}{a} - \frac{s^2}{a^2}\mathcal{L}\{\sin at\}$$

ve buradan

$$\left(1 + \frac{s^2}{a^2}\right)\mathcal{L}\{\sin at\} = \frac{1}{a} \;\Rightarrow\; \mathcal{L}\{\sin at\} = \frac{a}{s^2+a^2}$$

bulunur.

7. $\mathcal{L}\{\cos at\} = \int_0^\infty e^{-st}\cos at\,dt \left[\begin{matrix} u = e^{-st} & , & du = -se^{-st}\,dt \\ dv = \cos t\,dt & , & v = \frac{1}{a}\sin at\end{matrix}\right]$

$$= \frac{1}{a}e^{-st}\sin at\Big|_0^\infty + \frac{s}{a}\int_0^\infty e^{-st}\sin at\,dt$$

$$= (0-0) + \frac{s}{a}\mathcal{L}\{\sin at\} = \frac{s}{a}\,\frac{a}{s^2+a^2} = \frac{s}{s^2+a^2}\,.$$

8. $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}\,dt = \int_0^\infty e^{-t(s-a)}\,dt$

$$= \frac{1}{s-a}e^{-t(s-a)}\Big|_\infty^0 = \frac{1}{s-a}\,[1-0\,] = \frac{1}{s-a}\,.$$

Laplace Dönüşümünün Lineerlik Özelliği : c_1 ve c_2 sabit büyüklükler ve $F(t)$ ve $G(t)$ ise Laplace dönüşümleri, sırasıyla, $f(s)$ ve $g(s)$ olan iki fonksiyon olsun.

$$\mathcal{L}\{c_1F(t)+c_2G(t)\} = c_1\mathcal{L}\{F(t)\} + \mathcal{L}\{G(t)\} = c_1f(s)+c_2g(s)$$

dir. Gösterelim :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{c_1F(t)+c_2G(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}\,[\,c_1F(t)+c_2G(t)\,]\,dt\\ &= c_1\int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt + c_2\int_0^\infty e^{-st}G(t)\,dt\\ &= c_1f(s)+c_2g(s)\end{aligned}$$

ÖRNEK 2. $\mathcal{L}\{\sinh at\} = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}\right\} = \frac{1}{2}\,[\mathcal{L}\{e^{at}\} - \mathcal{L}\{e^{-at}\}]$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s-(-a)}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a}-\frac{1}{s+a}\right) = \frac{a}{s^2-a^2}\,.$$

ÖRNEK 3. $\mathcal{L}\{\cosh at\} = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{at}+e^{-at}}{2}\right\} = \frac{1}{2}\,[\mathcal{L}\{e^{at}\} + \mathcal{L}\{e^{-at}\}]$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-(-a)}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s+a}\right) = \frac{s}{s^2-a^2}\,.$$

Birinci Kaydırma Özelliği : $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ ise

$$\mathcal{L}\{e^{at}F(t)\} = f(s-a)$$

dır. Gösterelim.

$$\mathcal{L}\{e^{at}F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\,(\,e^{at}F(t)\,)\,dt = \int_0^\infty e^{-t(s-a)}F(t)\,dt = f(s-a)$$

dır.

ÖRNEK 4. *a)* $\mathcal{L}\{t^3e^{4t}\}$, *b)* $\mathcal{L}\{e^{-2t}\sin 3t\}$, *c)* $\mathcal{L}\{e^{3t}\cosh 4t\}$, *d)* $\mathcal{L}\{e^{-t}\sin^2 t\}$ yi bulalım.

a) $\mathcal{L}\{t^3\} = \frac{3!}{s^4} \;\Rightarrow\; \mathcal{L}\{e^{4t}t^3\} = \frac{3!}{(s-4)^4}\,,$

b) $\mathcal{L}\{\sin 3t\} = \dfrac{3}{s^2+9} \;\Rightarrow\; \mathcal{L}\{e^{-2t}\sin 3t\} = \dfrac{3}{(s+2)^2+9}$,

c) $\mathcal{L}\{\cosh 4t\} = \dfrac{s}{s^2-16} \;\Rightarrow\; \mathcal{L}\{e^{3t}\cosh 4t\} = \dfrac{s-3}{(s-3)^2-16}$,

d) $\mathcal{L}\{e^{-t}\sin^2 t\} = \mathcal{L}\left\{e^{-t}\dfrac{1-\cos 2t}{2}\right\}$

$$= \frac{1}{2}\left[\mathcal{L}\{e^{-t}\} - \mathcal{L}\{e^{-t}\cos 2t\}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s+1} - \frac{s+1}{(s+1)^2+4}\right].$$

İkinci Kaydırma Özelliği : $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ ve $G(t) = \begin{cases} F(t-a) & , \; t > a \\ 0 & , \; t < a \end{cases}$ ise

$$\mathcal{L}\{G(t)\} = e^{-as}f(s)$$

dir. Gösterelim.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{G(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}G(t)\,dt = \int_0^a e^{-st}G(t)\,dt + \int_a^\infty e^{-st}G(t)\,dt \\
&= \int_0^a e^{-st}\cdot 0\,dt + \int_a^\infty e^{-st}G(t)\,dt \\
&= \int_a^\infty e^{-st}G(t)\,dt = \int_a^\infty e^{-st}F(t-a)\,dt \; \begin{bmatrix} t-a=u \\ dt=du \end{bmatrix} \\
&= \int_0^\infty e^{-s(a+u)}F(u)\,du = e^{-as}\int_0^\infty e^{-su}F(u)\,du \\
&= e^{-as}f(s)
\end{aligned}$$

ÖRNEK 5. *a)* $F(t) = \begin{cases} \sin(t-\pi) & , t > \pi \\ 0 & , t < \pi \end{cases}$, *b)* $F(t) = \begin{cases} (t-5)^2 & , t > 5 \\ 0 & , t < 5 \end{cases}$ ise $\mathcal{L}\{F(t)\}$ yi bulalım.

a) $\mathcal{L}\{\sin t\} = \dfrac{1}{s^2+1} \;\Rightarrow\; \mathcal{L}\{F(t)\} = \dfrac{e^{-\pi s}}{s^2+1}$.

b) $\mathcal{L}\{t^2\} = \dfrac{2!}{s^3} \;\Rightarrow\; \mathcal{L}\{F(t)\} = \dfrac{2!\,e^{-5s}}{s^3}$.

Skala Değiştirme Özelliği : $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ ise $\mathcal{L}\{F(at)\} = \dfrac{1}{a}f\left(\dfrac{s}{a}\right)$ dir. Gösterelim.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{F(at)\} &= \int_0^\infty e^{-st}\{F(at)\}\,dt = \int_0^\infty e^{-st}F(at)\,dt \; \begin{bmatrix} at=u \\ dt=\dfrac{du}{a} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-\frac{s}{a}u}F(u)\,du = \frac{1}{a}f\left(\frac{s}{a}\right).
\end{aligned}$$

ÖRNEK 6. *a)* $\mathcal{L}\{(6t)^2\}$, *b)* $\mathcal{L}\{e^{5t}\}$, *c)* $\mathcal{L}\{\sin(5t)\}$ yi bulalım.

a) $\mathcal{L}\{t^2\} = \dfrac{2!}{s^3} \;\Rightarrow\; \mathcal{L}\{(6t)^2\} = \dfrac{1}{6}\dfrac{2!}{(s/6)^3} = 36\,\dfrac{2!}{s^3}$,

b) $\mathcal{L}\{e^t\} = \dfrac{1}{s-1} \;\Rightarrow\; \mathcal{L}\{e^{5t}\} = \dfrac{1}{5}\dfrac{1}{(s/5)-1} = \dfrac{1}{s-5}$,

c) $\mathcal{L}\{\sin t\} = \dfrac{1}{s^2+1} \;\Rightarrow\; \mathcal{L}\{\sin(5t)\} = \dfrac{1}{5}\dfrac{1}{(s/5)^2+1} = \dfrac{5}{s^2+25}$.

Türetilmiş Fonksiyonların Laplace Dönüşümü : $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ ise

a) $\mathcal{L}\{F'(t)\} = sf(s) - F(0)$,

b) $\mathcal{L}\{F''(t)\} = s^2 f(s) - sF(0) - F'(0)$

dir. Gösterelim.

$$a)\ \mathcal{L}\{F'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}F'(t)\,dt \begin{bmatrix} u = e^{-st} & , & du = -se^{-st}\,dt \\ dv = F'(t)\,dt & , & v = F(t) \end{bmatrix}$$

$$= e^{-st}F(t)\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt$$

$$= 0 - e^{-s\cdot 0}F(0) + sf(s) = sf(s) - F(0)\ .$$

$$b)\ \mathcal{L}\{F''(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}F''(t)\,dt \begin{bmatrix} u = e^{-st} & , & du = -se^{-st}\,dt \\ dv = F''(t)\,dt & , & v = F'(t) \end{bmatrix}$$

$$= e^{-st}F'(t)\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}F'(t)\,dt$$

$$= 0 - e^{-s\cdot 0}F'(0) + s\mathcal{L}\{F'(t)\}$$

$$= s[sf(s) - F(0)] - F'(0) = s^2 f(s) - sF(0) - F'(0)\ .$$

Burada bulduğumuz sonuçlar daha yüksek mertebeden türevlere kolayca genelleştirilebilir.

$$\mathcal{L}\{F^{(n)}(t)\} = s^n f(s) - s^{n-1}F(0) - s^{n-2}F'(0) - \cdots - sF^{(n-2)}(0) - F^{(n-1)}(0)$$

olduğu gösterilebilir.

ÖRNEK 7. $F(t) = \sin t$ olsun.

$\mathcal{L}\{\sin t\} = \dfrac{1}{s^2+1}$ ve $(\sin t)' = \cos t$ ve $F(0) = \sin 0 = 0$ olup

$\mathcal{L}\{(\sin t)'\} = \mathcal{L}\{\cos t\} = s\,\dfrac{1}{s^2+1} - \sin 0 = \dfrac{s}{s^2+1}$ dir.

ÖRNEK 8. $F(t) = e^{at}$ olsun.

$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \dfrac{1}{s-a}$ ve $(e^{at})' = ae^{at}$ ve $F(0) = e^{a\cdot 0} = 1$ olup

$\mathcal{L}\{(e^{at})'\} = \mathcal{L}\{ae^{at}\} = s\dfrac{1}{s-a} - e^{a\cdot 0} = \dfrac{s-s+a}{s-a} = \dfrac{a}{s-a}$ dir.

ÖRNEK 9. $F(t) = \cos t$ olsun.

$\mathcal{L}\{\cos t\} = \dfrac{s}{s^2+1}$ ve $(\cos t)'' = -\cos t$ olup

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{(\cos t)''\} = \mathcal{L}\{-\cos t\} = -\frac{s}{s^2+1} s^2\frac{s}{s^2+1} - s\cos 0 - \sin 0 \\ = \frac{s^3 - s^3 - s}{s^2+1} = -\frac{s}{s^2+1}\end{aligned}$$

dir.

ÖRNEK 10. $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ ise $\mathcal{L}\{\int_0^t F(u)\,du\} = \dfrac{f(s)}{s}$ dir. Gösterelim.

$G(t) = \int_0^t F(u)\,du$ olsun.

$G'(t) = F(t)$ ve $G(0) = 0$ dır. Her iki yanın Laplace dönüşümünü alalım :

$$\mathcal{L}\{G'(t)\} = \mathcal{L}\{F(t)\} \;\Rightarrow\; sg(s) - G(0) = f(s) \;\Rightarrow\; g(s) = \frac{f(s)}{s}$$

bulunur.

$F(t) = \sin t$ olsun. $f(s) = \dfrac{1}{s^2+1}$ ve

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\int_0^t \sin u\,du\right\} = \mathcal{L}\{1 - \cos t\} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1} = \frac{1}{s(s^2+1)} \\ = \frac{\frac{1}{s^2+1}}{s} = \frac{\mathcal{L}\{\sin t\}}{s}\end{aligned}$$

olur.

$t^n F(t)$ nin Laplace Dönüşümünün Bulunması : $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ ise

$$\mathcal{L}\{t^n F(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} f(s)$$

dir. Gösterelim.

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\,dt \tag{1}$$

dir. (1) in her iki yanını s ye göre türetelim :

$$f'(s) = \int_0^\infty -te^{-st}F(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-st}[-tF(t)]\,dt = \mathcal{L}\{-tF(t)\} \qquad (2)$$

dir. (2) in her iki yanını s ye göre türetelim :

$$f''(s) = \int_0^\infty -te^{-st}[-tF(t)]\,dt = \int_0^\infty e^{-st}[(-1)^2t^2F(t)]\,dt = \mathcal{L}\{(-1)^2t^2F(t)]$$

s ye göre türev alma işlemi sürdürülürse

$$f^{(n)}(s) = \mathcal{L}\{(-1)^n t^n F(t)\}\,dt$$

ve ve her iki yan $(-1)^n$ ile çarpılırsa

$$\mathcal{L}\{t^n F(t)\} = (-1)^n f^{(n)}(s)$$

bulunur.

ÖRNEK 11. *a)* $\mathcal{L}\{t\sin t\}$, *b)* $\mathcal{L}\{t^3e^{5t}\}$ yi bulalım.

a) $F(t) = \sin t$ olsun. $\mathcal{L}\{\sin t\} = \dfrac{1}{s^2+1}$ olup

$$\mathcal{L}\{t\sin t\} = (-1)^1\frac{d}{ds}\frac{1}{s^2+1} = \frac{2s}{(s^2+1)^2} \text{ dir.}$$

b) $F(t) = e^{5t}$ olsun. $\mathcal{L}\{e^{5t}\} = \dfrac{1}{s-5}$ olup

$$\mathcal{L}\{t^3e^{5t}\} = (-1)^3\frac{d^3}{ds^3}\frac{1}{s-5} = \frac{3!}{(s-5)^4} \text{ dür.}$$

ÖRNEK 12. $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ ve $r > 0$ olsun. $\mathcal{L}\{r^tF(t)\} = f(s-\ln r)$ olduğunu gösterelim :

$$\mathcal{L}\{r^tF(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}[r^tF(t)]\,dt = \int_0^\infty e^{-st}r^tF(t)\,dt$$
$$= \int_0^\infty e^{-st}e^{t\ln r}F(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-t(s-\ln r)}F(t)\,dt = f(s-\ln r)$$

bulunur.

Periyodik Fonksiyonların Laplace Dönüşümü : $F(t)$ fonksiyonu periyodik ve periyodu T olsun: $F(t)$ nin tanımlı olduğu aralık üzerinde yer alan her t için

$$F(t+T) = F(t) \quad , \quad T > 0$$

ilişkisi gerçeklensin.

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = \frac{\int_0^T e^{-st}F(t)\,dt}{1-e^{-sT}}$$

dir. Gösterelim.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{F(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt \\ &= \int_0^T e^{-st}F(t)\,dt + \int_T^{2T} e^{-st}F(t)\,dt + \int_{2T}^{3T} e^{-st}F(t)\,dt + \cdots\end{aligned}$$

yazalım ve son satırda yer alan integrallerden

ikincisinde $t = T + u$,

üçüncüsünde $t = 2T + u$,

....

değişken dönüşümünü yapalım ve sonrasında

$$F(u+T) = F(u)\,,\quad F(u+2T) = F(u)\,,\ \cdots$$

ilişkilerini dikkate alalım :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{F(t)\} &= \int_0^T e^{-st}F(t)\,dt + \int_0^T e^{-s(u+T)}F(u+T)\,du \\ &\qquad + \int_0^T e^{-s(u+2T)}F(u+2T)\,du + \cdots \\ &= \int_0^T e^{-st}F(t)\,dt + e^{-sT}\int_0^T e^{-su}F(u)\,du \\ &\qquad + e^{-2sT}\int_0^T e^{-su}F(u)\,du + \cdots \\ &= \int_0^T e^{-st}F(t)\,dt\,[1 + e^{-sT} + e^{-2sT}\ldots \\ &= \frac{\int_0^T e^{-st}F(t)\,dt}{1-e^{-sT}}\end{aligned}$$

bulunur.

ÖRNEK 13. $F(t) = \begin{cases} \sin t & , \quad 0 < t < \pi \\ 0 & , \quad \pi < t < 2\pi \end{cases}$ ve $F(t) = F(t+2\pi)$ dir. $\mathcal{L}\{F(t)\}$ yi bulalım.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{F(t)\} &= \frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\int_0^{2\pi} e^{-st}F(t)\,dt = \frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\int_0^{2\pi} e^{-st}\sin t\,dt \\ &= \frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\left[\frac{e^{-st}(-s\sin t - \cos t)}{s^2+1}\right]\Big|_0^\pi \\ &= \frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\left[\frac{1+e^{-\pi s}}{s^2+1}\right] = \frac{1}{(1-e^{-\pi s})(s^2+1)}\end{aligned}$$

Başlangıç Değer Teoremi . Limitlerin mevcut olması durumunda

$$\lim_{t\to 0} F(t) = \lim_{s\to\infty} sf(s)$$

dir. Gösterelim.

$$\mathcal{L}\{F'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}F'(t)\,dt = sf(s) - F(0) \tag{1}$$

dir. (1) de $s \to \infty$ için limit alalım. $F'(t)$ nin eksponansiyel mertebeden olması durumunda $\lim_{s\to\infty} e^{-st}F'(t) = 0$ dır, dolayısıyla $F(t)$ nin sürekli olması durumunda

$$\lim_{s\to\infty} sf(s) - F(0) = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{s\to\infty} sf(s) = F(0) = \lim_{t\to 0} F(t)$$

olacaktır.

ÖRNEK 14. $f(t) = \cos t$ olsun. $f(s) = \dfrac{s}{s^2+1}$ olup

$$\lim_{t\to 0}\cos t = \lim_{s\to\infty} s\,\frac{s}{s^2+1} = 1$$

dir.

ÖRNEK 15. $f(t) = \sin t$ olsun. $f(s) = \dfrac{1}{s^2+1}$ olup

$$\lim_{t\to 0}\sin t = \lim_{s\to\infty} s\,\frac{1}{s^2+1} = 0$$

dır.

Son Değer Teoremi . Limitlerin mevcut olması durumunda

$$\lim_{t\to\infty} F(t) = \lim_{s\to 0} sf(s)$$

dir. Gösterelim.

$$\mathcal{L}\{F'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}F'(t)\,dt = sf(s) - F(0)$$

dır. Her iki yanın $s \to 0$ için limitini alalım :

$$\lim_{s\to 0}\int_0^\infty e^{-st}F'(t)\,dt = \lim_{s\to 0}[sf(s) - F(0)]\,,$$

$$\int_0^\infty \lim_{s\to 0} e^{-st}F'(t)\,dt = \lim_{s\to 0}[sf(s) - F(0)]\,,$$

$$\int_0^\infty F'(t)\,dt = \lim_{s\to 0}[sf(s) - F(0)]\,,$$

$$\lim_{t\to\infty} F(t) - F(0) = \lim_{s\to 0}[sf(s) - F(0)]\,,$$

$$\lim_{t\to\infty} F(t) = \lim_{s\to 0} sf(s)$$

bulunur.

ÖRNEK 16. $f(t) = \cos t$ olsun. $f(s) = \dfrac{s}{s^2+1}$ dir. Fakat $\lim\limits_{t\to\infty} F(t) = \lim\limits_{t\to\infty} \cos t$ mevcut olmayıp son değer teoremi uygulanamaz.

ÖRNEK 17. $f(t) = e^{-t}$ olsun. $f(s) = \dfrac{1}{s+1}$ olup

$$\lim_{t\to\infty} e^{-t} = \lim_{s\to 0} s\,\frac{1}{s+1} = 0$$

dır.

TERS LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ .

$F(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü $f(s)$ olsun. Bir başka deyişle $F(t)$ ve $f(s)$ fonksiyonları arasında $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ ilişkisi mevcut olsun. $F(t)$ ye $f(s)$ in **ters Laplace dönüşümü** denir ve bu olgu

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$$

ile ifade edilir. Sıfır fonksiyonlara izin verilmezse bir fonksiyonun ters Laplace dönüşümü tek türlü olarak bellidir.

Learch teoremi : Her sonlu $0 \le t \le N$ aralığında parça parça sürekli ve $t > N$ için eksponansiyel mertebeden olan $F(t)$ fonksiyonları için $f(s)$ in ters Laplace dönüşümü tek türlü olarak belirlidir. Bir başka deyişle : $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ tektir.

Ters Laplace Dönüşümünün Lineerlik Özelliği : c_1 ve c_2 sabit büyüklükler ve $f(s)$ ve $g(s)$ ise ters Laplace dönüşümleri, sırasıyla, $F(t)$ ve $G(t)$ olan iki fonksiyon olsun.

$$\mathcal{L}^{-1}\{c_1 f(s) + c_2 g(s)\} = c_1 \mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} + \mathcal{L}^{-1}\{g(s)\} = c_1 F(t) + c_2 G(t)$$

dir.

ÖRNEK 18. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3}{s-2} + \dfrac{2s}{s^2+16} - \dfrac{3}{s^2+9}\right\}$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s-2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s}{s^2+16}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+9}\right\}$$

$$= 3e^{2t} + 2\cos 4t - \sin 3t\ .$$

Birinci Kaydırma Özelliği : $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ ise

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(s-a)\} = e^{at} F(t)$$

dir.

ÖRNEK 19. *a)* $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\} = \sin 2t$ olup

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2-4s+8}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-2)^2+2^2}\right\} = e^{2t}\sin 2t$$

dir.

b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\} = \cos 3t$ olup

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-2s+10}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-1)^2+3^2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2+3^2}\right\}$$
$$= e^t\cos 3t + \frac{1}{3}e^t \sin 3t$$

dir.

İkinci Kaydırma Özelliği : $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ ise

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}f(s)\} = \begin{cases} F(t-a) & , \ t > a \\ 0 & , \ t < a \end{cases}$$

dir.

ÖRNEK 20. *a)* $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s^2+16}\right\} = \sin 4t$ olup

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4e^{-5s}}{s^2+16}\right\} = \begin{cases} \sin 4(t-5) & , \ t > 5 \\ 0 & , \ t < 5 \end{cases} \quad \text{dir.}$$

b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s}s}{s^2+1}\right\} \begin{cases} \cos(t-\pi) & , \ t > \pi \\ 0 & , \ t < \pi \end{cases}$ dir.

Teorem : $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ ise

$$\mathcal{L}^{-1}\{f^{(n)}(s)\} = (-1)^n t^n F(t)$$

dir.

ÖRNEK 21. *a)* $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} = e^t$ olup

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d}{ds}\frac{1}{s-1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1}{(s-1)^2}\right\} = -\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2}\right\} = -(-1)^1 te^t = te^t$$

dir.

$b)$ $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \sin t$ olup

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d}{ds}\frac{1}{s^2+1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-2s}{(s^2+1)^2}\right\} = (-1)^1 t \sin t \quad \Rightarrow$$

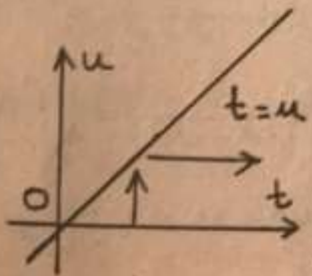
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\} = \frac{1}{2} t \sin 2t$$

dir.

KONVOLÜSYON TEOREMİ

$\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$, $\mathcal{L}\{G(t)\} = g(s)$ ise

$$\mathcal{L}\{\int_0^t F(u)\, G(t-u)\, du\} = f(s)\, g(s)$$



dir. Gösterelim :

$$\mathcal{L}\{\int_0^t F(u)\, G(t-u)\, du\} = \int_0^\infty e^{-st}\{\int_0^t F(u)\, G(t-u)\, du\}\, dt$$

$$= \int_{u=0}^\infty F(u)\, \{\int_{t=u}^\infty e^{-st}\, G(t-u)\, dt\}\, du$$

[İçdeki integralde $t - u = v$ değişken dönüşümünü yapalım.]

$$= \int_{u=0}^\infty F(u)\{\int_{v=0}^\infty e^{-s(u+v)}\, G(v)\, dv\}\, du$$

$$= \int_{u=0}^\infty e^{-su}\, F(u)\, du \int_{v=0}^\infty e^{-sv}\, G(v)\, dv = f(s)\, g(s) .$$

ÖRNEK 22. $a)$ $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+4)}\right\}$, $b)$ $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2}\right\}$ yi bulalım.

$a)$ $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+4)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\frac{1}{s^2+4}\right\}$ yazalım.

$$f(s) = \frac{1}{s} \quad \Rightarrow \quad F(t) = 1 \ ; \ g(s)\frac{1}{s^2+4} \quad \Rightarrow \quad G(t) = \frac{1}{2}\sin 2t \ ,$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\frac{1}{s^2+4}\right\} = \int_0^t 1 \cdot \frac{1}{2}\sin 2u\, du = \frac{1}{4}(1 - \cos 2t) \ .$$

$b)$ $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\frac{1}{s-1}\right\}$ yazalım.

$$f(s)=\frac{1}{s-1} \Rightarrow F(t)=e^t \ ; \ g(s)\frac{1}{s-1} \Rightarrow G(t)=e^t \ ,$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\frac{1}{s-1}\right\}=\int_0^t e^u e^{t-u}\,du=te^t \ .$$

ÖRNEK 23. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right\}$ yi bulalım.

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right\}=\frac{1}{a}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+a^2}\frac{a}{(s^2+a^2)}\right\}$ yazalım.

$$f(s)=\frac{s}{s^2+a^2} \Rightarrow F(t)=\cos at \ , \ g(s)=\frac{a}{s^2+a^2} \Rightarrow G(t)=\sin at \ ,$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right\}=\frac{1}{a}\int_0^t \cos au \sin a(t-u)\,du=\frac{t\sin at}{2a} \ .$$

ÖRNEK 24. *a)* $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s^2}\right\}=\int_0^t\int_0^v F(u)\,du\,dv$ bağıntısını gerçekleyelim.

b) $\int_0^t\int_0^v F(u)\,du\,dv=\int_0^t (t-u)\,F(u)\,du$ olduğunu gösterelim.

a) $G(t) = \int_0^t\int_0^v F(u)\,du\,dv = \int_0^t\{\int_0^v F(u)\,du\}\,dv$ olsun. Her iki yanın türevini alalım :

$$G'(t)=\int_0^t F(u)\,du \ , \ G''(t)F(t)$$

bulunur.

$G(0)=G'(0)=0$ olduğunu da dikkate alarak her iki yanın Laplace dönüşümünü alalım :

$$\mathcal{L}\{G''(t)\}=\mathcal{L}\{F(t)\} \Rightarrow s^2g(s)-sG(0)-G'(0)=f(s) \Rightarrow s^2g(s)=f(s) \Rightarrow$$

$$g(s)=\frac{f(s)}{s^2} \Rightarrow G(t)=\mathcal{L}^{-1}\{g(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s^2}\right\}=\int_0^t\int_0^v F(u)\,du\,dv$$

bulunur.

Genelleştirerek

$$\int_0^t\int_0^t\cdots\int_0^t F(t)\,dt\cdots dt\,dt=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s^n}\right\}$$

olduğu gösterilebilir.

b) Önce konvolüsyon teoremini, sonra hemen yukarıda elde ettiğimiz bağıntıyı kullanarak

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t (t-u)\,F(u)\,du\right\} = \mathcal{L}\{t\}\,\mathcal{L}\{F(t)\} = \frac{f(s)}{s^2}$$

$$\int_0^t (t-u)\,F(u)\,du = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s^2}\right\} = \int_0^t \int_0^v F(u)\,du\,dv$$

bulunur. Genelleştirerek

$$\int_0^t \int_0^t \cdots \int_0^t F(t)\,dt \cdots dt\,dt = \int_0^t \frac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!}\,F(u)\,du$$

yazılabilir.

LAPLACE DÖNÜŞÜMÜNÜN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜNDE KULLANILMASI

ÖRNEK 25. $X(0)=1$, $X'(0)=2$ başlangıç koşulları altında

$$\frac{d^2X(t)}{dt^2} + 3\frac{dX}{dt} + 2X = 0 \qquad (1)$$

diferansiyel denkleminin bir özel çözümünü bulalım.

Başlangıç koşullarını da dikkate alarak (1) in Laplace dönüşümünü alalım.

$$s^2x(s) - sX(0) - X'(0) + 3[sx(s) - X(0)] + 2x(s) = 0 \;\Rightarrow$$

$$s^2x(s) - s - 3 + 3[sx(s) - 1] + 2x(s) = 0 \;\Rightarrow$$

$$x(s)[s^2+3s+2] = s+5 \;\Rightarrow\; x(s) = \frac{s+5}{s^2+3s+2} = \frac{4}{s+1} - \frac{3}{s+2}$$

Ve ters laplace dönüşümünü alarak sonuç bulunur : $X(t) = 4e^{-t} - 3e^{-2t}$.

ÖRNEK 26. $X(0) = X'(0) = X''(0) = X''' = 0$ başlangıç koşulları altında

$$X^{(4)}(t) - 2X''(t) + X(t) = \sin t \qquad (1)$$

diferansiyel denkleminin bir özel çözümünü bulalım.

Başlangıç koşullarını da dikkate alarak (1) in Laplace dönüşümünü alalım.

$$s^4x(s) - 2s^2x(s) + x(s) = \frac{1}{s^2+1} \;\Rightarrow$$

$$\begin{aligned} x(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s^2-1)^2} &= \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{C}{s-1} + \frac{D}{(s-1)^2} + \frac{E}{s+1} + \frac{F}{(s+1)^2} \\ &= \frac{1}{4}\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{4}\frac{1}{s-1} + \frac{1}{8}\frac{1}{(s-1)^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{8}\frac{1}{(s+1)^2} \end{aligned} \qquad (2)$$

(2) nin ters Laplace dönüşümünü ve

$$\mathcal{L}\{t^n F(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} f(s) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}^{-1}\{(-1)^n \frac{d^n}{ds^n} f(s)\} = t^n F(t)$$

bağıntısını uygulayarak bulacağımız

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{(-1)\frac{d}{ds}\frac{1}{s-1}\right\} = te^t$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{(-1)\frac{d}{ds}\frac{1}{s+1}\right\} = te^{-t}$$

sonuçlarını dikkate alırsak

$$X(t) = \frac{1}{8}[\,e^t(t-2) + e^{-t}(t+2) + 2\sin t\,]$$

elde edilir.

ÖRNEK 27. $X(0) = 1$, $X'(0) = 2$ başlangıç koşulları altında

$$X''(t) + 2X'(t) + 5X(t) = \sin t \tag{1}$$

diferansiyel denkleminin bir özel çözümünü bulalım.

Başlangıç koşullarını da dikkate alarak (1) in her iki yanının Laplace dönüşümünü alalım :

$$s^2x(s) - sX(0) - X'(0) + 2[\,sx(s) - X(0)\,] + 5x(s) = \frac{1}{s^2+1} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} x(s) &= \frac{s^3+4s^2+s+5}{(s^2+2s+5)(s^2+1)} = \frac{As+B}{s^2+2s+5} + \frac{Cs+D}{s^2+1} \\ &= \frac{\frac{11}{10}s+4}{s^2+2s+5} + \frac{-\frac{1}{10}s+\frac{1}{5}}{s^2+1} \\ &= \frac{11}{10}\frac{s+1}{(s+1)^2+2^2} + \frac{29}{10\cdot 2}\frac{2}{(s+1)^2+2^2} - \frac{1}{10}\frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{5}\frac{1}{s^2+1} \end{aligned} \tag{2}$$

Şimdi de (2) nin ters Laplace dönüşümünü alır ve

$$\mathcal{L}\{e^{at}F(t)\} = f(s-a) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}^{-1}\{f(s-a)\} = e^{at}F(t)$$

ilişkisini uygulayarak bulacağımız

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2+2^2}\right\} = e^{-t}\cos 2t\ ,$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+1)^2+2^2}\right\} = e^{-t}\sin 2t\ ,$$

Laplace Tablosu

$F(t)\left(=L^{-1}\{f(s)\}\right)$	$f(s)\left(=L\{F(t)\}\right)$
1	$\frac{1}{s}, s>0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}, s>a$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}, s>0$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}, s>0$
$t^n, n\in \mathbf{Z}^+$	$\frac{n!}{s^{n+1}}, s>0$
$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}, s>\|a\|$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}, s>\|a\|$
$\delta_c(t)$	$\frac{e^{-cs}}{s}, s>0$

4.4 Laplace Dönüşümünün Diferansiyel Denklemlerin Çözümünde Kullanımı

Laplace dönüşümünü bildiğimiz fonksiyonları içeren diferansiyel denklemlere Laplace dönüşümü ve özelliklerini uygulayarak diferansiyel denklemi s değişkenine bağlı bir bilinmeyen fonksiyon içeren bir cebirsel denkleme dönüştürebiliriz. Buradan, cebirsel işlemlerle bilinmeyen fonksiyonu s değişkenine bağlı olarak çözeriz. Sonunda ise ters Laplace dönüşümü uygulayarak aradığımız çözümü buluruz. Şimdi bu metodu örneklere uygulayalım:

Örnek 4.4.1 $y''+y'=e^{3t}$ diferansiyel denkleminin y(0)=0, $y'(0)=$ başlangıç koşulları altındaki çözümünü bulunuz.

Çözüm: $L\{y(t)\}=f(s)$ olsun. Denklemin her iki tarafına Laplace dönüşümü uygulanırsa;

$$L\{y''+y'\}=L\{e^{3t}\}$$

$$L\{y''\}+L\{y'\}=\frac{1}{s-3}$$

$$s^2f(s)-sy(0)-sy'(0)+sf(s)-y(0)=\frac{1}{s-3}$$

y(0)=0, $y'(0)$=0 başlangıç koşullarını kullanırsak:

$$s^2f(s)+sf(s)=\frac{1}{s-3}\Rightarrow f(s)(s^2+s)=\frac{1}{s-3}$$

$$f(s)=\frac{1}{(s^2+s)(s-3)}=\frac{1}{s(s+1)(s-3)}.$$

$$y(t)=L^{-1}\{f(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)(s-3)}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{A}{s}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{B}{s+1}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{C}{s-3}\right\}$$

A, B ve C katsayılarını hesaplayalım. Çok kullanışlı olan kısa bir metotla buradaki A,B ve C katsayılarını hesaplayabiliriz:

$$\frac{1}{s(s+1)(s-3)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+1}+\frac{C}{s-3}\quad\text{.......(*)}$$

A bilinmeyenini bulmak için önce (*) eşitliğinin her iki yanını s ile çarpalım:

$$\frac{1}{(s+1)(s-3)}=A+\frac{Bs}{s+1}+\frac{Cs}{s-3}\;.....(**)$$

Şimdi ise (**)'da $s=0$ yazarsak $A=\frac{1}{(0+1)(0-3)}=-\frac{1}{3}$ olarak buluruz. Yukarıdaki işlemlere dikkatlice bakarsak, A sayısını bulmak için $\frac{1}{s(s+1)(s-3)}$ ifadesinden A'nın paydasını sileriz, kalan $\frac{1}{(s+1)(s-3)}$ ifadesinde $s=0$ yazarız. Benzer şekilde,

$B=\left.\frac{1}{s(s-3)}\right|_{s=-1}=\frac{1}{4}$ ve $C=\left.\frac{1}{s(s+1)}\right|_{s=3}=\frac{1}{12}$ bulunur. Dolayısıyla,

$$y(t)=L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)(s-3)}\right\}=-\frac{1}{3}L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}+\frac{1}{4}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}+\frac{1}{12}L^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\}$$

$y(t)=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{1}{12}e^{3t}$ özel çözümü bulunur.

Örnek 4.4.2 $\frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}-3y=6e^t$ denkleminin $y(0)=1$ ve $y'(0)=3$ şartlarını sağlayan çözümünü bulunuz.

Çözüm: Laplace uygulayalım: $L\{y(t)\}=f(s)$ olsun.

$$y''-2y'-3y=6e^t \Rightarrow L\{y''-2y'-3y\}=L\{6e^t\}\Rightarrow$$

$$=L\{y''\}-2L\{y'\}-3L\{y\}=L\{6e^t\}$$

$$s^2f(s)-sy(0)-y'(0)-2(sf(s)-y(0))-3f(s)=\frac{6}{s-1}$$

$$f(s)(s^2-2s-3)-(s+1)=\frac{6}{s-1}\Rightarrow y(s)=\frac{6}{(s-3)(s+1)(s-1)}+\frac{1}{s-3}$$

$$\frac{A}{(s-3)}+\frac{B}{(s+1)}+\frac{C}{(s-1)}=\frac{6}{(s-3)(s+1)(s-1)}$$

$\Rightarrow A=\frac{3}{4},B=\frac{3}{4},C=-\frac{3}{2}$ bulunur.

$y(t) = \frac{3}{4}e^{3t} + \frac{3}{4}e^{-t} - \frac{3}{2}e^{t} + e^{3t} = \frac{7}{4}e^{3t} + \frac{3}{4}e^{-t} - \frac{3}{2}e^{t}$ özel çözümü bulu...

Örnek 4.4.3 $y'' - 3y' + 2y = 4t - 6$ diferansiyel denk...
$y(0) = 1, y'(0) = 3$ başlangıç değerleri altında çözünüz.

Çözüm:
Laplace uygulayalım: $L\{y(t)\} = f(s)$ olsun.

$$s^2 f(s) - sy(0) - y'(0) - 3\{sf(s) - y(0)\} + 2f(s) = 4\frac{1}{s^2} - 6\frac{1}{s}$$

$$s^2 f(s) - s - 3 - 3\{sf(s) - 1\} + 2f(s) = \frac{4}{s^2} - \frac{6}{s}$$

$$f(s)\{s^2 - 3s + 2\} = \frac{4}{s^2} - \frac{6}{s} + s = \frac{4 - 6s + s^2}{s^2}$$

$$f(s) = \frac{4 - 6s + s^2}{s^2(s^2 - 3s + 2)} = \frac{4 - 6s + s^3}{s^2(s-1)(s-2)} = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s-1} + \frac{D}{s-2}$$

$4 - 6s + s^3 = A(s-1)(s-2) + Bs(s-1)(s-2) + Cs^2(s-2) + Ds^2(s\text{-}$...

s=0 için; 4=2A A=2
s=1 için; - 1=-C C=1
s=2 için; 0=D4 D=0
s=-1 için; 9=12-6B-3 B=0

$$f(s) = 2\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s-1}$$

Ters Laplace uygulanırsa;

$$y(t) = L^{-1}\{f(s)\} = 2L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} = 2t + e^t.$$ bulunur.

Örnek 4.4.4 $y'' + y = h(t)$; $h(t) = \begin{cases} t, 0 < t < \pi \\ 0, t > \pi \end{cases}$ ve
$y(0) = y'(0) = 0$ başlangıç koşulu altındaki çözümünü bulunuz.

Çözüm: Diferansiyel denkleminin sağ tarafını ikinci kaydırma özelliğini uygulayabilecek forma getirelim:

$$h(t)=\begin{cases} t, & 0<t<\pi \\ 0, & t>\pi \end{cases} = \begin{cases} 0, & 0<t<\pi \\ -t, & t>\pi \end{cases} + t = \begin{cases} -t, & t>\pi \\ 0, & 0<t<\pi \end{cases} + t$$

$$= \begin{cases} -(t-\pi)-\pi, & t>\pi \\ 0, & 0<t<\pi \end{cases} + t$$

$$L\{h(t)\}=e^{-\pi s}\left(-\frac{1}{s^2}-\frac{\pi}{s}\right)+\frac{1}{s^2}.$$

Diferansiyel denkleme Laplace dönüşümü uygulayalım ve

$L\{y(t)\}=f(s)$ olsun.

$$s^2f(s)-sy(0)-y'(0)+sf(s)-y(0)=e^{-\pi s}\left(-\frac{1}{s^2}-\frac{\pi}{s}\right)+\frac{1}{s^2}$$

$$\underset{y'(0)=y(0)=0}{\Rightarrow} s^2f(s)+sf(s)=e^{-\pi s}\left(-\frac{1}{s^2}-\frac{\pi}{s}\right)+\frac{1}{s^2}$$

$$f(s)\left(s^2+s\right)=e^{-\pi s}\left(\frac{-1-\pi s}{s^2}\right)+\frac{1}{s^2}\Rightarrow f(s)=e^{-\pi s}\left(\frac{-1-\pi s}{s^2\left(s^2+s\right)}\right)+\frac{1}{s^2\left(s^2+s\right)}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{-1-\pi s}{s^2\left(s^2+s\right)}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{-1-\pi s}{s^3(s+1)}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{A}{s^3}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s}+\frac{D}{s+1}\right\}$$

$A=-1$ ve $D=1-\pi$ olduğu kolayca görülür. Diğer bilinmeyenler için ortak paydaya alırsak:

$-1-\pi s=-(s+1)+Bs(s+1)+Cs^2(s+1)+(1-\pi)s^3$

s^3'ün katsayıları: $0=C+1-\pi\Rightarrow C=\pi-1$

s^2'nin katsayıları: $0=B+C \quad \Rightarrow B=1-\pi$

$$L^{-1}\left\{\frac{-1-\pi s}{s^2\left(s^2+s\right)}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{-1}{s^3}+\frac{1-\pi}{s^2}+\frac{\pi-1}{s}+\frac{1-\pi}{s+1}\right\}$$

$$=-\frac{1}{2}t^2+(1-\pi)t+\pi-1+(1-\pi)e^{-t}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2\left(s^2+s\right)}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3(s+1)}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{A_1}{s^3}+\frac{B_1}{s^2}+\frac{C_1}{s}+\frac{D_1}{s+1}\right\}.$$

Benzer şekilde,

$A_1 = 1$ ve $D_1 = -1$ olduğu kolayca görülür. Diğer bilinmeyenler için or...

paydaya alırsak:

$1 = (s+1) + B_1 s(s+1) + C_1 s^2(s+1) + s^3$

s^3'ün katsayıları: $0 = C_1 + 1 \Rightarrow C_1 = -1$

s^2'nin katsayıları: $0 = B_1 + C_1 \Rightarrow B_1 = 1$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2\left(s^2+s\right)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3} + \frac{1}{s^2} + \frac{-1}{s} + \frac{-1}{s+1}\right\} = \frac{1}{2}t^2 + t + -1 - e^{-t}$$

Ters Laplace dönüşümü ile birlikte ikinci kaydırma özelliğini kullanırsak:

$$y(t) = \frac{1}{2}t^2 + t + -1 - e^{-t} +$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}(t-\pi)^2 + (1-\pi)(t-\pi) + \pi - 1 + (1-\pi)e^{-(t-\pi)}, & t > \pi \\ 0 \quad , & t < \pi \end{cases}$$

Elde edilir.

Örnek 4.4.5 $2y'' - 3y' = \begin{cases} 2t-1, & t > 3 \\ t+4 & t < 3 \end{cases}$ diferansiyel denkleminin $y''(0) = y'(0) = 0$ başlangıç değerleri altındaki özel çözümünü bulunuz.

Çözüm: Önce $G(t) = \begin{cases} 2t-1, & t > 3 \\ t+4 & t < 3 \end{cases}$ fonksiyonun Laplace dönüşümünü hesaplayalım. Cebirsel işlemlerle uygun forma getirelim:

$$G(t) = \begin{cases} 2t-1, & t > 3 \\ t+4, & t < 3 \end{cases} = t + 4 + \begin{cases} t-5, & t > 3 \\ 0, & t < 3 \end{cases} = t + 4 + \begin{cases} t-3-2, & t > 3 \\ 0, & t < 3 \end{cases}$$

$L\{G(t)\} = \frac{1}{s^2} + \frac{4}{s} + \left(\frac{1}{s^2} - \frac{2}{s}\right)e^{-3s}$. Şimdi ise asıl denkleme Laplace dönüşümünü uygulayalım.

$L\{y(t)\} = f(s)$ olsun. Bu durumda;

$$2(s^2 f(s) - sy(0) - y'(0)) - 3(sf(s) - y(0)) = \frac{1}{s^2} + \frac{4}{s} + \left(\frac{1}{s^2} - \frac{2}{s}\right)e^{-3s}$$

$$f(s)=\frac{1}{s(2s-3)}\left\{\frac{1}{s^2}+\frac{4}{s}+\left(\frac{1}{s^2}-\frac{2}{s}\right)e^{-3s}\right\}=\frac{s+4}{s^3(2s-3)}+\frac{s-2}{s^3(2s-3)}e^{-3s}.$$

Basit kesirlere ayırdığımızda:

$$f(s)=-\frac{4}{3s^3}-\frac{11}{9s^2}-\frac{22}{27s}+\frac{44}{27(2s-3)}+\left(\frac{2}{3s^3}+\frac{1}{9s^2}+\frac{2}{27s}-\frac{4}{27(2s-3)}\right)e^{-3s}.$$

Ters Laplace dönüşümünü uygulayalım:

$$y(t)=-\frac{2}{3}t^2-\frac{11}{9}t-\frac{22}{27}+\frac{22}{27}e^{3/2t}+$$

$$\begin{cases}\frac{1}{3}(t-3)^2+\frac{1}{9}(t-3)+\frac{2}{27}-\frac{2}{27}e^{3/2(t-3)}, & t>3\\ 0 & t<3\end{cases}$$

özel çözümü elde edilir.

Örnek 4.4.6 Bir elektrik devresinde direnç $R=2\Omega$, kondansatör $C=1F$, bobin $L=1H$ ve güç kaynağı $E(t)=te^t$ (Volt) olarak seri bağlanmıştır. $Q(0)=Q'(0)=0$ olduğuna göre ; devrede t anındaki $Q(t)$ yükünü bulunuz.

Çözüm : $L\frac{d^2Q}{dt^2}+R\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{C}=E(t)$ ise

$\frac{d^2Q}{dt^2}+2\frac{dQ}{dt}+Q=E(t)\Rightarrow Q''+2Q'+Q=te^t$ olur.

Her iki tarafın da Laplace'ı alınırsa ;

$$s^2q(s)-sq(0)-q'(0)+2\left(sq(s)-q(0)\right)+q(s)=\frac{1}{s-1}$$

$$q(s)\left(s^2+2s+1\right)=\frac{1}{s-1}\Rightarrow q(s)=\frac{1}{(s+1)^2(s-1)}$$

$$q(s)=\frac{1}{(s-1)(s+1)^2}=\frac{A}{s-1}+\frac{B}{s+1}+\frac{C}{(s+1)^2}$$

$$1=A(s+1)^2+B(s-1)(s+1)+C(s-1)$$