Sabit Katsayılı Homojen Normal Sistemler

Özdeğer ve özvektör yöntemi

$$Y'(x) = AY(x) \qquad (1)$$

homojen vektörel dif denk.ni ele alalım. Burada $A = (a_{ij})$ $n \times n$ tipinde bir reel sabit matris, Y ise bir sütun vektördür. (1) denkleminin genel çözümünü elde etmek için $\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}$ temel çözümler cümlesi bulmak yeterlidir.

Sabit katsayılı homojen lineer dif denklemler için e^{rx} şeklinde çözümler elde edilmişti. Herhangi bir lineer dif denklem, birinci mertebeden bir normal sisteme indirgenebildiğinden (1) denklemi için de

$$Y(x) = e^{rx} U \qquad (2)$$

şeklinde çözüm araştırılabilir. Burada r bir sabit ve U sabit vektördür. (1) de $Y(x)$ yerine $e^{rx}U$ yazılırsa

$$re^{rx}U = Ae^{rx}U$$

veya $$(A - rI)U = 0 \qquad (3)$$

Böylece $Y(x) = e^{rx} U$ fonksiyonunun (1) denkleminin çözümü olması için gerek ve yeter koşul r ve U nun (3) cebirsel denklem sistemini sağlamasıdır.

$U = 0$ her r için (3) ü sağlar. Dolayısıyla $Y(x) = 0$ (1) denkleminin aşikar çözümüdür. Bu nedenle $U \neq 0$ alınması aşikar olmayan çözüm için önemlidir.

<u>Tanım</u> $A = [a_{ij}]$, $n \times n$ tipinde bir reel sabit matris olsun. (3) cebirsel denklem sisteminin aşikar olmayan bir çözüme sahip olduğu reel veya kompleks r sayısına A matrisinin <u>özdeğeri</u>; r ye karşılık gelen U çözümüne A matrisinin <u>özvektörü</u> denir.

(3) den görülmektedir ki bir A matrisinin özvektörü, $X \longrightarrow AX$ lineer dönüşümü altında kendisinin r katına dönüşen bir vektördür. Bu vektör, n bilinmeyenli n denklemden oluşan (3) cebirsel denklem sisteminin bir çözümüdür.

Homojen cebirsel denklem sisteminin aşikar olmayan bir çözüme sahip olması için gerek ve yeter koşul katsayılar determinantının sıfır olmasıdır. Böylece (3) ün aşikar olmayan çözüme sahip olması için gerek ve yeter koşul,

$$|A - rI| = 0 \qquad (4)$$

veya

$$\begin{vmatrix} a_{11}-r & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-r & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-r \end{vmatrix} = 0 \qquad (4a)$$

olmasıdır. (4a) daki determinant açılırsa başkatsayısı $(-1)^n r^n$ olan n-yinci dereceden bir polinom elde edilir. $P(r) = |A - rI|$ polinomuna A nın karakteristik polinomu, (4) denklemine de A nın karakteristik denklemi denir. Buna göre A nın öz değerlerini bulmak $P(r)$ nın sıfırlarını (köklerini) bulmaktır.

Cebirin esas teoremine göre, karakteristik denklem bazıları çakışık olabilen n tane reel ya da kompleks köke sahiptir.

A nın r ye karşılık gelen U özvektörü (3) sisteminin çözülmesi ile elde edilir.

$$A(cU) = c(AU) = c(rU) = r(cU)$$

den dolayı U özvektör ise, cU da özvektördür.

Ör $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ matrisinin özdeğer ve özvektörlerini bulunuz.

A nın karakteristik denklemi

$$P(r) = |A - rI| = \begin{vmatrix} 1-r & -1 \\ 2 & 4-r \end{vmatrix} = (1-r)(4-r)+2$$

$$= r^2 - 5r + 6 = 0 \Rightarrow r_1 = 2 \quad r_2 = 3$$

A nın özdeğerleridir.

$r_1 = 2$ ye karşılık gelen özvektörü araştıralım

Bunun için $(A - rI)U = 0$ yani

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sistemini çözelim.

Bu sistem $u_1 + u_2 = 0$ skaler denklemine denktir. k keyfi bir sabit olmak üzere $u_1 = k$ $u_2 = -k$ olup $U_1 = k\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ özvektörü elde edilir.

$r_2 = 3$ için ise benzer şekilde

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ dan

$u_1 = k$ $u_2 = -2k$ (k, keyfi sabit) olup

$U_2 = k\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ elde edilir.

Ör: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ matrisinin özdeğer ve özvektörlerini bulunuz.

Karakteristik denklem

$$|A - rI| = \begin{vmatrix} 1-r & 1 & 4 \\ 2 & 0-r & -4 \\ -1 & 1 & 5-r \end{vmatrix} = (1-r)(2-r)(3-r) = 0$$

olup $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, $r_3 = 3$ özdeğerlerdir.

$r_1 = 1$ için $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

olup
$$u_2 + 4u_3 = 0$$
$$2u_1 - u_2 - 4u_3 = 0$$
$$-u_1 + u_2 + 4u_3 = 0$$
elde edilir. k, keyfi bir sabit olmak üzere

$u_1 = 0 \quad u_2 = 4k \quad u_3 = -k$ elde edilir. Böylece

$$U_1 = k \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$ özvektörü elde edilmiş olur.

Benzer şekilde $r_2 = 2$ için $U_2 = k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ve

$r_3 = 3$ için $U_3 = k \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ özvektörleri elde edilmiş olur.

Özdeğerlerin elde edilmesi ile ilgili üç durum söz konusudur.

i) Tüm özdeğerler birbirinden farklı ve reel olabilir.

A matrisinin $r_1, r_2, \ldots, r_n$ özdeğerlerine karşılık gelen özvektörler sırasıyla $U_1, U_2, \ldots, U_n$ olsun. Lineer cebirden biliyoruz ki bu özvektörler lineer bağımsızdır.

Böylece $Y_i(x) = e^{r_i x} U_i \quad (i = 1, \ldots, n)$

fonksiyonları (1) denkleminin çözümüdür.

Böylece $Y = c_1 e^{r_1 x} U_1 + c_2 e^{r_2 x} U_2 + \dots + c_n e^{r_n x} U_n$

(1) denkleminin genel çözümü olur.

Örnek: $Y' = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} Y$

denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ matrisinin öz değerleri $r_1 = 2$, $r_2 = 3$

özvektörleri ise $U_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ $U_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ idi.

Böylece genel çözüm

$$Y = c_1 e^{2x} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 e^{3x} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

ya da

$$y_1 = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$$

$$y_2 = -c_1 e^{2x} - 2c_2 e^{3x}$$

şeklinde elde edilmiş olur.

ii) Bazı özdeğerler kompleks olabilir.

$r_1 = \alpha + i\beta$ A nın özdeğeri olsun. Bu durumda

$r_2 = \bar{r}_1 = \alpha - i\beta$ da A nın özdeğeridir. Eğer

z_1 ve z_2 reel sabit vektörler olmak üzere $U_1 = z_1 + i z_2$

$r_1 = \alpha + i\beta$ ya karşı gelen özvektör ise $U_2 = \bar{U}_1 = z_1 - i z_2$

de $r_2 = \alpha - i\beta$ ya karşı gelen özvektördür.

Uygulamalarda reel çözümler daha kullanışlı old. dan sabit katsayılı homojen denklemlerde olduğu gibi kompleks çözümlerin reel ve sanal kısımlarını almak yeterlidir.

Böylece,

$$W_1(x) = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)(z_1 + i z_2)$$

$$\boxed{W_2(x) = e^{\alpha x}(\cos\beta x \cancel{+} - i\sin\beta x)(z_1 - i z_2)}$$

kompleks çözümünden (W_1 den)

$$Y_1(x) = \mathrm{Re}\, W_1(x) = (e^{\alpha x}\cos\beta x) z_1 - (e^{\alpha x}\sin\beta x) z_2$$

$$Y_2(x) = \mathrm{Im}\, W_1(x) = (e^{\alpha x}\cos\beta x) z_1 + (e^{\alpha x}\sin\beta x) z_2$$

lin bğz. reel değerli çözümler elde edilir..

(W_2 den elde edilen çözümler lin bağlıdır)

Ör $y' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} y$ denk genel çöz. bulunuz

$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ matrisinin karakteristik denklemi

$$|A - rI| = \begin{vmatrix} -1-r & 1 \\ -5 & 3-r \end{vmatrix} = r^2 - 2r + 2 = 0$$

$r_1 = 1+i$, $r_2 = 1-i$ dır.

$r_1 = 1+i$ için $(A - r_1 I)u = 0$ denkleminden

$$\begin{pmatrix} -2-i & 1 \\ -5 & 2-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$(-2-i)u_1 + u_2 = 0$ $\quad$ $u_1 = k$ olup

$-5u_1 + (2-i)u_2 = 0$ $\quad$ $u_2 = (2+i)k$

$k=1$ seçilerek $r_1 = 1+i$ özdeğerine karşılık

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

özvektörü elde edilir.

$r_2 = 1-i$ ye karşılık ise $U_2 = \bar{U}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

elde edilir.

Böylece

$$W(x) = e^{(1+i)x}\left[\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + i\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right]$$

$$= e^{x}(\cos x + i\sin x)\left[\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + i\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right]$$

kompleks çözümünün reel ve sanal kısımları

$$Y_1 = \mathrm{Re}[W(x)] = e^{x}\cos x\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - e^{x}\sin x\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$Y_2 = \mathrm{Im}[W(x)] = e^{x}\cos x\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - e^{x}\sin x\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

reel çözümlerini verir. Bu çözümler lineer bağımsız olup

$$Y = c_1\left[e^{x}\cos x\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - e^{x}\sin x\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right] + c_2\left[e^{x}\cos x\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - e^{x}\sin x\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right]$$

$$= c_1 e^{x}\begin{pmatrix}\cos x\\2\cos x - \sin x\end{pmatrix} + c_2 e^{x}\begin{pmatrix}\sin x\\\cos x + 2\sin x\end{pmatrix}$$

genel çözümü elde edilmiş olur.

iii) Bazı özdeğerlerin katlı (çakışık) olması hali:

İlk iki kısım sabit katsayılı lin denklemler için elde edilen sonuçlar ile aynıydı. Ancak bu kısımda durum biraz farklıdır.

Kabul edelim ki r_1, A matrisinin iki katlı bir reel özdeğeridir. Bu durum $(r-r_1)^2$ nin $P(r)=|A-rI|$ karakteristik polinomunun bir çarpanı olduğunu ifade eder. Böyle bir durumda ya iki katlı r_1 özdeğeri için lin bğz iki özvektör vardır ve bunlar yardımıyla lin. bğz $Y_1(x)=e^{r_1x}U_1$, $Y_2(x)=e^{r_1x}U_2$ çözümleri yazılabilir. Ya da r_1 için bir tane U_1 özvektörü bulunabilir. Bu durumda sistem aşikar olmayan $Y_1(x)=e^{r_1x}U_1$ çözümüne sahiptir. Genel çözüm için $Y_1(x)$ den bağımsız ikinci bir çözüme ihtiyaç vardır. Burada sabit katsayılı denklemlerden farklı olarak ikinci çözüm $Y_1(x)=xe^{r_1x}U_1$ şeklinde DEĞİL,

$$Y_2(x)=xe^{r_1x}B+e^{r_1x}C$$

şeklindedir. Burada B ve C belirtilecek sütun vektörleridir.

Ör $Y' = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} Y$ denk. genel çöz bulunuz

$A = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ matrisinin karakteristik polinomu

$P(r) = \begin{vmatrix} -2-r & -3 \\ 3 & 4-r \end{vmatrix} = (r-1)^2$ olup

A nın özdeğerleri $r_1 = r_2 = 1$ dir.

$r_1 = 1$ için $\begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

dan $\begin{aligned} -3u_1 - 3u_2 &= 0 \\ 3u_1 + 3u_2 &= 0 \end{aligned}$ $u_1 = k$ $u_2 = -k$ olup

$U_1 = k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^x$ dir.

Genel çözüm için Y_1 den bağımsız ikinci bir çözüm bulmalıyız. $Y_2(x) = x e^x B + e^x C$ ol. şek B ve C yi bulalım Y_2, denklemde yerine konur ve benzer terimler bir araya getirilirse

$(AB - B) * e^x + (AC - C - B) e^x = 0$

veya

$(A - I) B * e^x + [(A-I) C - B] e^x = 0$

elde edilir. Buradan

$(A-I)B = 0$

$(A-I)C = B$ elde edilir. İlk denkleminden

B nin öz vektör olduğu açıktır. Bu nedenle $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

olarak alınabilir.

$(A-I)C = B$ den ise

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$ olup

$$-3c_1 - 3c_2 = 3$$
$$3c_1 + 3c_2 = -3$$

$c_1 = k-1$, $c_2 = -k$ bulunur

dir. Böylece

$k=1$ için $C = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$Y_2(x) = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} x e^x + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^x$$ elde edilir

Genel çözüm ise

$$Y(x) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^x + c_2 \left[\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} x e^x + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^x \right]$$

olarak yazılabilir.