

TIMUR KARAÇAY, HAYDAR EŞ,

ORHAN ÖZER, SERKAN ALI DÜZCE

# KALKULÜS

NOBEL



# Contents

## I Ön Bilgiler 13

### 1 Ön Bilgiler (Pre Kalkülüs) 3

1.1 Ön Kalkülüs . . . . .	15
---------------------------	----

### 2 Analiz Öğretimi 3

2.1 İki Milenyum Süren Sorunlar . . . . .	17
2.2 Mantık ve Matematik . . . . .	21
2.2.1 Tümdengelim . . . . .	22
2.2.2 Tümevarım . . . . .	23
2.3 Matematik Dili . . . . .	26

### 3 Önermeler Cebiri 3

3.1 İki-değerli Mantık . . . . .	27
3.2 Matematiksel Mantık . . . . .	27
3.3 Boole Cebiri . . . . .	28
3.4 Önermeler . . . . .	28
3.4.1 Yalın Önermeler . . . . .	29
3.4.2 Bileşik Önermeler . . . . .	30
3.4.3 Denk Önermeler . . . . .	30
3.5 Önermeler Cebiri . . . . .	31
3.6 Operatörler . . . . .	31
3.6.1 $\wedge$ Operatörü . . . . .	31
3.6.2 $\vee$ Operatörü . . . . .	32
3.7 Değilleme . . . . .	32
3.7.1 Bir Önermenin Değili . . . . .	32
3.7.2 İse Bağlacı . . . . .	33
3.7.3 Koşullu Önerme Sonuçları . . . . .	34
3.8 $\vee$ Operatörünün Özellikleri . . . . .	35
3.8.1 $\vee$ 'nin Esgüçlülüğü . . . . .	35
3.8.2 $\vee$ 'nin Yer Değişim Özeliği . . . . .	35
3.8.3 $\vee$ 'nin Birleşimi . . . . .	35
3.9 Dağılma . . . . .	36
3.10 Bileşik Önermelerin Değillenmesi . . . . .	36
3.10.1 De Morgan Kuralları . . . . .	36
3.11 $\Leftrightarrow$ : Ancak ve Ancak Operatörü . . . . .	37

3.12	Hepdoğru ve Hepyanlış . . . . .	38
3.12.1	Karşıt Ters . . . . .	41
3.12.2	Alıştırmalar . . . . .	41
3.12.3	Alıştırmalar . . . . .	46

## 4 *Kümeler Cebiri* 4

4.1	Kümeler Cebiri . . . . .	47
4.1.1	Kapsama . . . . .	47
4.1.2	Evrensel Küme . . . . .	48
4.2	Venn Çizenekleri . . . . .	48
4.2.1	Tümleyen Küme . . . . .	48
4.2.2	Boş Küme . . . . .	48
4.2.3	Tek ögeli küme . . . . .	48
4.2.4	Eşit Kümeler . . . . .	49
4.2.5	Has Alt Küme . . . . .	49
4.2.6	Kuvvet Kümesi . . . . .	49
4.2.7	Simetrik Fark . . . . .	49
4.3	Bağıntılar . . . . .	49
4.3.1	Kartezyen Çarpım . . . . .	50
4.3.2	Grafik . . . . .	50
4.3.3	Kartezyen Çarpımın Özellikleri . . . . .	51
4.4	Analitik Düzlem . . . . .	51
4.5	Bağıntılar . . . . .	51
4.5.1	Bağıntıların Gösterimi . . . . .	51
4.5.2	Grafik . . . . .	52
4.6	Bağıntı Türleri . . . . .	52
4.7	Denklik Bağıntıları . . . . .	52
4.7.1	Eşitlik . . . . .	52
4.8	Denklik Bağıntısı Nedir? . . . . .	53
4.8.1	Denk Ögeler . . . . .	53
4.9	Denklik Sınıfları . . . . .	53
4.10	Ters Bağıntı . . . . .	54
4.11	Simetrik Bağıntı . . . . .	54

## 5 *Sayılar* 4

5.1	Sayıların Kuruluşu . . . . .	57
5.2	Sayıların Sıralanması . . . . .	58
5.3	Doğal Sayılar . . . . .	59
5.4	Doğal Sayıların Kuruluşu . . . . .	59
5.5	Peano Belitleri . . . . .	59
5.6	Sonlu Tüme Varım İlkesi . . . . .	59
5.7	Nicelik Sayıları . . . . .	59
5.8	Eşgüçlülük . . . . .	60
5.9	Sayılabilirlik . . . . .	61
5.10	Sayılamayan Sonsuz Kümeler . . . . .	61
5.11	Gerçek Sayıların Tamlığı . . . . .	62
5.12	Alıştırmalar . . . . .	62

## 6 Rasyonel Üslü İfadeler 4

6.1	Tamsayı Üsler . . . . .	63
6.1.1	Üslü İfadelerin Özellikleri: . . . . .	63
6.1.2	Negatif Üsler . . . . .	64
6.1.3	Benzer Üslü İfadeler . . . . .	64
6.2	Rasyonel Kuvvetler . . . . .	64
6.3	Üslü Denklemler . . . . .	66
6.4	Alıştırmalar . . . . .	66
6.5	Üslü Denklemler . . . . .	67
6.6	Alıştırmalar . . . . .	67
6.7	Köklü İfadeler . . . . .	67
6.8	Alıştırmalar . . . . .	70
6.9	e Sayısı . . . . .	70
6.10	Analitik Geometri . . . . .	72
6.11	n-sıralılar . . . . .	72
6.12	Kartezyen Çarpım . . . . .	73
6.12.1	İkili ve Çoklu sıralılar . . . . .	73
6.12.2	n-sıralılar . . . . .	74
6.13	Analitik Geometri . . . . .	74
6.14	Kartezyen Çarpımın Genelleşmesi . . . . .	75
6.15	ALİŞTIRMALAR . . . . .	75

## 7 Denklemler 5

7.1	Doğru denklemleri . . . . .	79
7.1.1	İki noktası bilinen doğru Denklemi: . . . . .	79
7.1.2	Bir noktası ve eğimi bilinen doğru Denklemi: . . . . .	80
7.2	Doğrunun Genel Denklemi . . . . .	80
7.2.1	İkinci Dereceden Denklemler . . . . .	80
7.2.2	$ax^2 = 0$ Biçimindeki Denklemlerin Çözümü . . . . .	81
7.3	$ax^2 + bx = 0$ Biçimindeki Denklemlerin Çözümü . . . . .	81
7.3.1	$ax^2 + c = 0$ Biçimindeki Denklemlerin Çözümü . . . . .	81
7.3.2	$ax^2 + bx + c = 0$ Biçimindeki Denklemlerin Çözümü . . . . .	82
7.4	Değişken değiştirme . . . . .	84
7.5	Köklü denklemler . . . . .	84
7.6	Mutlak Değer . . . . .	85
7.7	Alıştırmalar . . . . .	86
7.8	Köklerle Katsayılar Arasındaki Bağlılıklar . . . . .	86
7.8.1	Köklerin Toplamı: . . . . .	87
7.8.2	Köklerin Çarpımı: . . . . .	87
7.8.3	Köklerin Farkının Mutlak Değeri: . . . . .	87
7.9	Alıştırmalar . . . . .	87
7.10	İkinci Dereceden Denklemlerin İncelenmesi . . . . .	88
7.11	Denklemler Sistemleri . . . . .	89
7.12	Eşitsizlikler . . . . .	89
7.13	Eşitsizlik Sistemleri . . . . .	92
7.14	Alıştırmalar . . . . .	92
7.15	İkinci Dereceden Fonksiyonlar . . . . .	93
7.16	Parabol Çizimi . . . . .	95

7.17	Alıştırmalar . . . . .	97
7.18	Eşitsizlik Sistemlerinin Grafikle Çözümü . . . . .	97
7.19	Örnekler: . . . . .	97
7.20	Doğrusal denklem sistemleri . . . . .	99

## 8 Parametrik denklemler 6

8.1	Eğrinin yönü . . . . .	101
8.2	kapalı Eğri . . . . .	101
8.3	Çember'in Parametrik Denklemleri . . . . .	101
8.4	Elips'in Parametrik Denklemleri . . . . .	102
8.5	Cycloid . . . . .	103

## 9 Matrisler ve Determinantlar 6

9.1	Matrisler . . . . .	105
9.1.1	Satır ve Kolon . . . . .	105
9.2	Matrisin Bileşenleri . . . . .	106
9.3	Matris İşlemleri . . . . .	106
9.3.1	Matrislerin Toplamı . . . . .	106
9.3.2	Matrislerde Çıkarma . . . . .	107
9.3.3	Matrisin Sayı ile Çarpımı . . . . .	107
9.3.4	Matrislerin Çarpımı . . . . .	108
9.3.5	Çarpımın Sırası Değişemez . . . . .	109
9.3.6	İkiden çok matrisin Çarpımı . . . . .	109
9.3.7	Matrisin Devriğı (transpose) . . . . .	109
9.4	Matrislerin Çarpımının Devriğı . . . . .	110
9.4.1	Matrislerde Bölme . . . . .	110
9.5	Matris Türleri . . . . .	111
9.5.1	Kare Matris . . . . .	111
9.5.2	Sıfır Matris . . . . .	111
9.5.3	Kare Matrisin Köşegenleri . . . . .	111
9.5.4	Kare Matrisin Kuvveti . . . . .	111
9.5.5	Birim Matris . . . . .	111
9.5.6	Simetrik Matris . . . . .	112
9.5.7	Anti Simetrik Matris . . . . .	112
9.5.8	Ters Matris . . . . .	113
9.5.9	Üçgensel Matris . . . . .	113
9.5.10	Matrisin İzi (trace) . . . . .	113
9.6	Örnekler . . . . .	114
9.7	Matrisin Uzunluğu (size) . . . . .	114
9.8	Determinantlar . . . . .	115
9.9	Determinant Nedir? . . . . .	115
9.9.1	$1 \times 1$ Matrislerin determinanı . . . . .	115
9.9.2	$2 \times 2$ Matrislerinin determinanı . . . . .	115
9.9.3	$3 \times 3$ Matrislerinin determinanı . . . . .	116
9.9.4	Sarrus Yöntemi . . . . .	116
9.10	Başka Yöntemler . . . . .	117
9.10.1	Yüksek Boyutlu Matrislerin Determinantları . . . . .	117
9.11	Laplace Yöntemi . . . . .	117

9.11.1	Minör	117
9.12	Eşçarpan (cofactor)	118
9.13	Determinant için Laplace Açılımı	119
9.14	Determinantların Özellikleri	120
9.14.1	Sarrus Yöntemiyle Hesap:	122
9.14.2	Laplace Yöntemiyle Hesap:	122
9.14.3	Gauss Eleme Yöntemi	122
9.15	Ters Matris	123
9.16	Matrisler Üzerinde İlkel Satır işlemleri	123
9.17	Gauss Eleme Yöntemi ile Ters Matrisi Bulma	124
9.18	Ekli Matris	125
9.19	Eşçarpan İle Matrisin tersini Bulma	126
9.20	Doğrual Denklem Sistemleri	129
9.21	Eşçarpan ve Determinant Kullanılarak Ters Matrisin Bulunuşu	130
9.22	Ters Matris Kullanılarak Denklem Sisteminin Çözümü	132
9.23	Doğrusal Denklem Sisteminin Cramer Yöntemiyle Çözümü	133
9.24	Doğrual Denklem Sistemleri	134
9.25	Eşçarpan ve Determinant Kullanılarak Ters Matrisin Bulunuşu	136
9.26	Ters Matris Kullanılarak Denklem Sisteminin Çözümü	138
9.27	Doğrusal Denklem Sisteminin Cramer Yöntemiyle Çözümü	139

## 10 *Polinomlar* 7

10.1	Bir Belirsizli Polinomlar	141
10.2	Çok Belirsizli Polinomlar	143
10.3	Terimleri Kuvvetlerine Göre Sıralama	144
10.4	İki Polinomun Eşitliği	144
10.5	Uygulamalar	145
10.6	Polinomlar Kümesi Üzerinde İşlemler	146
10.7	Toplama	146
10.8	Uygulamalar	148
10.9	Çıkarma	149
10.10	Uygulamalar	150
10.11	Çarpma	150
10.12	Sayı (skalerle) Çarpma	153
10.13	Uygulamalar	154
10.14	Başlıca Özdeşlikler	154
10.14.1	İki Terim Toplamının Karesi	154
10.14.2	İki Terimin Farkının Karesi	155
10.14.3	İki Terimin Toplamı İle Farkının Çarpımı	155
10.14.4	Üç Terim Toplamının Karesi	156
10.14.5	İki Terim Toplamının Küpü	157
10.14.6	İki Terim Farkının Küpü	158
10.14.7	İki Küp Toplamı	158
10.15	İki Terimin Kuvvetleri	160
10.16	Alıştırmalar	163
10.17	Polinomlarda Bölme	164
10.18	Uygulamalar	169
10.19	Bölme Algoritması	170

10.20	Çarpan Teoremi	171
10.21	Uygulamalar	173
10.22	Uygulamalar	174
10.23	Horner Yöntemi ile Bölme	175
10.24	Bir Polinomun $(x-a)(x-b)$ İle Bölünmesinden Elde Edilen Kalan	176
10.25	Uygulamalar	179
10.26	Alıştırmalar	181
10.27	Polinomların Çarpanlara Ayrılması	183
10.28	Karmaşıkları Basite İndirmek	183
10.29	ebob, ekok	184
10.30	Cebirsel İfadeleri Çarpanlara	186
10.30.1	Ortak Çarpan Parantezine Alma	187
10.31	Uygulamalar	187
10.32	Uygulamalar	189
10.33	Özdeşlikler	189
10.34	Uygulamalar	190
10.35	Uygulamalar	192
10.36	Özdeşlikleri Kullanma	192
10.37	Uygulamalar	193
10.38	Uygulamalar	195
10.39	Uygulamalar	197
10.40	Alıştırmalar	200
10.41	Başlıca Özdeşlikler	201

## 11 Fonksiyonlar 8

11.1	Fonksiyonun Grafiği	204
11.2	Tek Değerli Fonksiyonlar	205
11.3	Alıştırmalar	205
11.4	Fonksiyon Türleri	207
11.4.1	Eşit Fonksiyonlar	207
11.4.2	İçine Fonksiyon	207
11.4.3	Örten Fonksiyon	207
11.4.4	Bire Bir Fonksiyon	208
11.4.5	Bire Bir İçine Fonksiyon	208
11.4.6	Bire Bir Örten Fonksiyon	208
11.4.7	Sabit Fonksiyon	208
11.4.8	Sıfır Fonksiyon	208
11.4.9	Özdeşlik Fonksiyonu	208
11.5	Kapalı Fonksiyon	209
11.6	Örnekler	209
11.7	Alıştırmalar	210
11.8	Fonksiyonların Bileşkesi	211
11.9	Bileşke İşleminin Özellikleri	213
11.9.1	Yer Değişim Özeliği Yoktur	213
11.9.2	Birleşme Özeliği	214
11.10	Ters Fonksiyon	214
11.11	Ters Fonksiyonun Grafiği	215



## 12 Rasyonel İfadeler 8

12.1	Alıştırmalar	217
12.2	Rasyonel İfadelerin Toplamı	217
12.3	Rasyonel İfadelerin Çarpımı	218
12.4	Rasyonel İfadelerde Bölme	219
12.5	Polinom Denklemler	219
12.6	Birinci Dereceden Polinom Denklemlerin Çözümü	219
12.7	Kombinasyon Ve Permütasyon	220
12.7.1	Kombinasyon (Combination)	220
12.7.2	Permütasyon (permutation)	220
12.7.3	Permütasyon Türleri	220
12.8	Kombinasyon Ve Permütasyon	220
12.8.1	Kombinasyon (Combination)	221
12.8.2	Permütasyon (permutation)	221
12.8.3	Permütasyon Türleri	221
12.9	İstatistik	221

## 13 Transandant Fonksiyonlar 9

## 14 Ön Trigonometri 9

14.1	Yönlü Açılar	225
14.2	Yönlü yaylar	225
14.3	Birim Çember	226
14.4	Açı Ölçü Birimleri	226
14.4.1	Derece	226
14.4.2	Grad	227
14.4.3	Radyan	227
14.5	Ters Trigonometrik Fonksiyonlar	227
14.5.1	Arcsinus Fonksiyonu	227
14.5.2	ArcCosinus Fonksiyonu	228
14.5.3	Arctanjant Fonksiyonu	228
14.5.4	Arccotanjant Fonksiyonu	229
14.6	Örnekler	230
14.7	Trigonometrik Fonksiyonlar	230
14.7.1	Simetrik Açılar	233
14.7.2	Simetriler	234
14.8	Trigonometrik Fonksiyonların Özellikleri	234
14.9	Özel Açılar	235
14.10	Trigonometrik Fonksiyonları Grafikleri	235
14.10.1	Cosinus Grafiği	235
14.10.2	Sinus grafiği	236
14.10.3	Tanjant Grafiği	237
14.11	Periyodik Fonksiyonlar	238
14.12	Alıştırmalar	238
14.13	Trigonometrik Fonksiyonların Limiti	239
14.14	Limitler	239
14.15	Trigonometrik Fonksiyonların Türevleri	239

14.16	Alıştırmalar	244
14.17	Trigonometrik İntegraller	246
14.18	Trigonometrik Değişken Değiştirimi	246
14.19	$\sin, \cos$ çarpımlarının integrali	248
14.20	$\sin$ ve $\cos$ Fonksiyonlarının Kuvvetleri	250
14.21	$\tan^p x \cdot \sec^q x dx$ Türlerinin İntegrali	251
14.22	$\cot x$ ve $\csc$ Fonksiyonlarının Kuvvetleri	253
14.23	Alıştırmalar	259
14.24	$\int R(\sin x, \cos x)$ biçimindeki İntegraller	261
14.25	Ters Trigonometrik Fonksiyonların Türevleri	268

## 15 Logaritma Fonksiyonu 10

15.1	Logaritma Fonksiyonu	272
15.2	Logaritma Fonksiyonunun Grafiği	273
15.3	Doğal Logaritma Fonksiyonu	273
15.4	Taban Değiştirme Kuralı	276
15.5	Logaritma Fonksiyonunun Değişimi	276
15.6	Logaritma Fonksiyonunun Grafiği	277
15.7	Logaritma Fonksiyonunun Türevi	278
15.7.1	$y = \ln x$	278
15.8	$y = a^x$	279
15.9	$y = \log_a x$	280
15.10	Alıştırmalar	280
15.11	Logaritmik integraller	281
15.12	$a > 0$ Tabanına Göre $\exp$ ve $\log$	282
15.13	Alıştırmalar	283

## 16 Rasyonel sl İfadeler 10

16.1	Tamsayı sler	285
16.1.1	sl İfadelerin zelikleri:	285
16.1.2	Negatif sler	286
16.1.3	Benzer sl İfadeler	286
16.2	Rasyonel Kuvvetler	286
16.3	sl Denklemler	288
16.4	Alıştırmalar	288
16.5	$e$ Sayısı	289
16.6	stel Fonksiyonun Türevi	290

## 17 Hyperbolik Fonksiyonlar 10

17.0.1	teki Hyperbolic Fonksiyonlar	294
17.1	Karmaşık Sayılar İçin Hiperbolik Fonksiyonlar	294
17.2	Hiperbolik zdeřlikler	295
17.3	Aıların Toplamı ve Farkı	296
17.4	Ters Hiperbolik Fonksiyonlar	297
17.5	Ters Hiperbolik Fonksiyonların Logaritmik İfadesi	299
17.6	Hiperbolik Fonksiyonların Türevleri	303
17.7	Ters Hiperbolik Fonksiyonların Türevleri	304

17.8	Hiperboplik İntegraller	306
------	-------------------------	-----

## 18 Türev Uygulamaları 11

18.1	Teğet	309
18.2	Doğru deklemleri	310
18.2.1	Doğrunun Genel Denklemleri	311
18.2.2	Teğetin Denklemleri	311
18.3	Problemler	312
18.4	Normal	313
18.5	Teğet Boyunca Yaklaşımındaki Hata	314
18.6	Doğrusal Yaklaşım	315
18.7	Maksimum ve Minimum değerler	316
18.7.1	Mutlak Minimum ve Mutlak maksimum	316
18.7.2	Yerel Ekstremum Değerleri	317
18.8	Kritik noktalar	318
18.9	Özet	320
18.10	Alıştırmalar	322

## 19 Rolle teoremi 11

19.1	Ortalama Değer Teoremi	325
19.1.1	Geometrik Yorum	327
19.2	Alıştırmalar	329
19.3	Türev Testleri ve Büyüklük	329
19.4	Büyüklük	332
19.5	Alıştırmalar	334
19.6	Eğri Çizimleri	335
19.7	Asimptotlar	335
19.7.1	Dikey Asimptotlar	336
19.7.2	Yatay Asimptotlar	337
19.7.3	Eğik Asimptotlar	338
19.7.4	Eğrisel Asimptotlar	339
19.8	GrafikÇizimleri	340
19.9	Alıştırmalar	344
19.10	Optimizasyon Problemleri	344
19.11	İş ve Ekonomide Marjinal Analiz	347
19.12	Alıştırmalar	348
19.13	Bağılantılı Oranlar	349
19.14	Minimum ve Maksimum	350
19.15	Alıştırmalar	352
19.15.1	Çözülmüş Örnekler	352
19.16	Alıştırmalar	355
19.17	L'Hospital Kuralı	357
19.18	Limit Problemlerini Kolaylaştırma	359
19.19	$1^\infty$ , $0^\infty$ , $(\infty)^0$ Belirsizlikleri	362
19.20	Çözülmüş Örnekler	363
19.21	Alıştırmalar	364

## 20 Belirli İntegral 11

20.1	Bölüntü . . . . .	365
20.2	Belirli İntegral Kuralları . . . . .	366
20.3	Calculus'un Temel Teoremleri . . . . .	370
20.3.1	Calculus'un 1.Temel Teoremi . . . . .	370
20.3.2	Calculus'un İkinci Temel Teoremi . . . . .	371
20.4	Belirli İntegral Kuralları . . . . .	375
20.5	Düzensiz İntegraller . . . . .	379
20.5.1	Aralığın sonsuz olması durumu: . . . . .	380
20.5.2	Aralığın içinde fonksiyonun sınırsız olması durumu: . . . . .	380
20.6	Belirsiz İntegral . . . . .	383
20.6.1	Belirsiz İntegral Formülleri . . . . .	383
20.7	Değişken Değiştirme . . . . .	383
20.8	Trigonometrik İntegraller . . . . .	385
20.9	Ters Trigonometrik Konumlar . . . . .	387
20.10	Çözümlü Problemler . . . . .	388
20.11	Rasyonel Fonksiyonların İntegralleri . . . . .	394
20.11.1	Payda'nın Türevi Pay'a Eşitse . . . . .	394
20.11.2	Basit Kesirlere ayırma . . . . .	395
20.11.3	Payda'da Gerçek Kökü Olmayan Çarpan Varsa . . . . .	398
20.12	Alıştırmalar . . . . .	401

## 21 Belirsiz İntegral 12

21.0.1	Belirsiz İntegral Formülleri . . . . .	407
21.1	Değişken Değiştirme . . . . .	407
21.2	Trigonometrik İntegraller . . . . .	409
21.3	Ters Trigonometrik Konumlar . . . . .	411
21.4	Çözümlü Problemler . . . . .	412
21.5	Rasyonel Fonksiyonların İntegralleri . . . . .	418
21.5.1	Payda'nın Türevi Pay'a Eşitse . . . . .	418
21.5.2	Basit Kesirlere ayırma . . . . .	419
21.5.3	Payda'da Gerçek Kökü Olmayan Çarpan Varsa . . . . .	422
21.6	Karma problemler . . . . .	425
21.7	Alıştırmalar . . . . .	433
21.8	Riemann İntegrali . . . . .	433
21.8.1	Belirli İntegral . . . . .	433
21.9	İntegral İçin Ortalama Değer . . . . .	435
21.10	Alıştırmalar . . . . .	438
21.11	Trigonometrik İntegraller . . . . .	438
21.12	Trigonometrik Değişken Değiştirimi . . . . .	438
21.13	$\sin, \cos$ çarpımlarının integrali . . . . .	440
21.14	$\sin$ ve $\cos$ Fonksiyonlarının Kuvvetleri . . . . .	442
21.15	$\tan^p x \cdot \sec^q x$ Türlerinin İntegrali . . . . .	443
21.16	$\cot x$ ve $\csc$ Fonksiyonlarının Kuvvetleri . . . . .	445
21.17	Alıştırmalar . . . . .	451
21.18	$\int R(\sin x, \cos x)$ biçimindeki İntegraller . . . . .	453
21.19	Logaritmik integraller . . . . .	460
21.20	Alan hesapları . . . . .	461

21.21	Düzlemsel Eğrilerin Uzunluğu . . . . .	462
21.22	Belirli İntegral Kuralları . . . . .	464
21.23	Dönel Cisimleri Hacimleri . . . . .	468
21.24	Silindirik Kabuklar Yöntemi . . . . .	469
21.25	Dilimleme Yöntemiyle Hacim Bulma . . . . .	471
21.26	Örnek Hacim Hesapları . . . . .	472

## 22 Doğal Logaritma Fonksiyonu 13

22.1	Doğal Logaritma Fonksiyonunun Tanımı . . . . .	476
22.2	Tanım bölgesini Genişletme . . . . .	476
22.3	Doğal Logaritma Fonksiyonunun Özellikleri . . . . .	477
22.4	Doğal Logaritma Fonksiyonunun Grafiği . . . . .	478
22.5	Logaritmik Türev . . . . .	478
22.6	Logaritmik Türevin İntegrali . . . . .	478
22.7	Üstel Fonksiyon . . . . .	479
22.8	$a$ tabanlı Üstel Fonksiyon . . . . .	479
22.9	$a$ Tabanlı Üstel Fonksiyonun Davranışı . . . . .	480
22.10	$a$ Tabanlı Üstel Fonksiyonun Türevi . . . . .	481
22.11	$a$ Tabanlı Üstel Fonksiyonun İntegrali . . . . .	481
22.12	$a$ Tabanına Göre Logaritma . . . . .	481
22.13	$\log_a x$ fonksiyonunun özellikleri . . . . .	481
22.14	$\log_a x$ fonksiyonunun Türevi . . . . .	481
22.15	Çözümlü Problemler . . . . .	482





## 23 İntegral Alma Yöntemleri

### 23.1 Belirsiz İntegral

$f(x)$  fonksiyonunun belirsiz integrali türevleri  $f(x)$  olan bütün fonksiyonlardır. Belirsiz integral

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad (Csabit) \quad (23.1)$$

simgesiyle gösterilir. Belirsiz denmesinin nedeni,  $F(x)$  fonksiyonunu türev kabul eden fonksiyonların sonsuz çoklukta oluşu ve hangisinden söz edildiğinin belli olmayışdır. Sonsuz çoklukta olan belirsiz integraller birer sabit farkıyla birbirlerine eşittirler. Bu demektir ki,  $F(x)$  ile  $G(x)$  fonksiyonları  $f(x)$  fonksiyonunun belirsiz integrali iseler

$$F(x) - G(x) = K \quad (Ksabit) \quad (23.2)$$

olur.

$f(x)$  fonksiyonunun belirsiz integraline *ilkel* (primitive), *ters türev* gibi adlar da verilir. Yalınlığı nedeniyle *ilkel* terimini tercih ediyouz. Ama öteki terimleri de, konuya açıklık getirmek gerektiğinde, eş anlamlı olarak kullanacağız.

(??) ifadesinde  $C$  sabiti sayısal her değeri alabilir. Dolayısıyla  $F(x)$  fonksiyonunun sonsuz çoklukta belirsiz integrali vardır. Gerçek fonksiyonların (??) belirsiz integralleri bütün düzlemi doldurur. Yani düzlemin her noktasından geçen bir ve yalnızca bir tane belirsiz integral vardır. Aynı fonksiyonun belirsiz integralleri kesişmezler.

### 23.2 İlkel Fonksiyon Biliniyorsa

Bir fonksiyonun integralini almak demek, o fonksiyonu türev kabul eden fonksiyonları bulmak demektir. Öyleyse, işin esası  $(f, f')$  (fonksiyon-türevi) eşleşmesidir. Bir fonksiyonun sonsuz çoklukta belirsiz integralleri (ilkelleri) birer sabit farkıyla birbirlerine eşit olduğuna göre, sabiti ihmal ederek  $(f, f')$  eşleşmesini bire bir imiş gibi görebiliriz. Bunun tam matematiksel yöntemi, türevi aynı olan fonksiyonları bir denklik sınıfı içine almaktır. Ancak, sözkonusu basit kavramı açıklmak için o kadar derine gitmeye gerek yoktur.

Kalkulus'ta türev alma kuralları integral alma kurallarından daha yeteneklidir. Türevi olan her fonksiyonun türevini bulmamızı sağlar. Ama bu kesimde göreceğimiz gibi, integral alma kurallarımız çok yetenekli değildir. Bir fonksiyonun integralinin varlığını biliyor olsak bile, bazen o integrali bulamayabiliriz. Bunun tipik örneği  $\int e^{x^2} dx$  integralidir.



İntegrand (ntegrali alınacak fonksiyon) sürekli olduğu için, integralin varlığını biliyoruz, ama  $e^{x^2}$  fonksiyonunu türev olarak kabul eden fonksiyonu bilmiyoruz.

İntegral alma eyleminde genel sayılacak tek kural, integrandı türev kabul eden fonksiyonun bulunması eylemidir. Bu eylem sonuç olarak  $(f, f')$  eşleşmesine indirgenir. Bütün integral alma yöntemleri sonunda  $(f, f')$  eşleşmesini kullanır. O nedenle ne kadar çok fonksiyonun türevini biliyorsak, ters işlemi, yani türevden ilkel fonksiyonu bulma eylemini de o kadar biliyor oluruz. Bunun için türev alma kuralları bize çok bilgi veriyor. Sabitler, polinomlar, rasyonel fonksiyonlar, trigonometrik fonksiyonlar, ters fonksiyonlar gibi bir sınıflandırmayla pratikte çok kullanılan fonksiyonların türevlerini listeleyebiliyoruz. Oradan ters dönüşüm yaparak  $(f, f')$  eşleşmesine dönebiliriz.

Genel geçerliği olan yöntem olmadığı için, fonksiyonları alt sınıflara ayırıp, her sınıf için geçerli olan integral alma yöntemlerini ortaya koyacağız. Yukarıda da söylediğimiz gibi, alt sınıflara bölme sorunu tam çözümüyor. Ama oldukça iyi sonuçlar veriyor. Bilmemiz gereken şey, hangi alt sınıfta hangi yöntemi kullanıyorsak kullanalım, sonuçta  $(f, f')$  eşleşmesini kurabilirsek integrali çözmüş oluyoruz.

Doğal olarak, alt sınıflarda integral alırken bazı kurallar ortaya çıkıyor. Onları birer alet (fomül) olarak kullanıyoruz. Aletler çok işimize yarar.

Alt sınıflara bölme eylemi için de genel geçerliği olan yöntemden söz edilemez. Ama tarih boyunca sınama-yanılma yöntemiyle ortaya çıkarılan bazı sınıflar oldukça standart sayılır. Bu kesimde onları ele alacağız. Yine de ele aldığımız alt sınıfların tam bir liste oluşturmadığını bilmeliyiz.

### 23.3 Sürekli Fonksiyonların İntegrali

Sürekli fonksiyonların ilkelleri vardır. Bunu bir teoremle ifade edebiliriz:

**Teorem 23.1.** *I aralığında  $f(x)$  sürekli ve her  $a \in I$  noktasında, değişken  $x$  değeri için*

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (23.3)$$

*ise  $F(x)$  fonksiyonu I aralığında  $f(x)$  fonksiyonunun ilkelidir. Başka bir deyişle, her  $x \in I$  noktasında  $F'(x) = f(x)$  olur.*

*İspat:*

$x$  ile  $x + \Delta x$  noktaları I aralığında iseler;

$$\begin{aligned} F(x + \Delta x) &= \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt \\ &= \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$F(x + \Delta x) - F(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt$$

yazılabilir. Sağ yandaki ifdeye integralin ortalama değer teoremini uygularsak,

$$F(x + \Delta x) - F(x) = (x + \Delta x - x)f(c) = f(c)\Delta x$$

bağıntısını sağlayan ve  $\Delta x$  sayısının pozitif ya da negatif oluşuna bağlı olarak değişmek üzere

$(x \leq c \leq x + \Delta x)$ ,  $(x + \Delta x \leq c \leq x)$  aralıklarının birinde olan bir  $c$  noktasının varlığını söyleyebiliriz.  $c$  noktası  $\Delta x$  değerine bağlıdır:  $\Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow c \rightarrow x$  olur.  $f$  sürekli olduğundan  $\Delta x \rightarrow 0$  iken  $f(c) \rightarrow f(x)$  olacaktır. Buradan türev tanımına geçerse,

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c) \cdot \Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(c) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

olur ki bu istenen sonuçtur.

## 23.4 Değişken Değiştirme

Belirsiz integral alırken, genellikle ilkel fonksiyonu hemen göremeyiz. O durumlarda, uygun bir değişken değiştirme (yerine koyma) ile integrali bilinen bir biçime sokarız. Bunu yaptıran kural şudur.

**Teorem 23.2.**  $f(u)$  sürekli ve  $u(x)$  sürekli türevi var olan bir fonksiyon ise

$$\int f(u(x))u'(x) dx = \int f(u) du \Big|_{u=u(x)} \quad (23.4)$$

Sağ yandaki terimin anlamı açıktır.  $\int f(u) du$  integrali bulunduktan sonra  $u = u(x)$  konularak asıl  $x$  değişkenine dönülür.

*Kanıt:*

$F(x)$  fonksiyonu  $f(x)$  fonksiyonunun ilkel olsun.  $F$  nin varlığı  $f$  nin sürekliliği ile garanti edilir. Zincir kuralı gereğince,

$$\frac{d}{dx} F(u(x)) = F'(u(x))u'(x)$$

yazabiliriz. Öyleyse,

$$\begin{aligned} \int f(u(x))u'(x) dx &= \int F'(u(x))u'(x) dx \\ &= F(u(x)) + C \quad (C \text{ sabit}) \end{aligned}$$

Son iki ifadeden, aranan (??) eşitliği çıkar.

Değişken değiştirmede, integrand'daki asıl değişkenin yerine hangi değişkenin konulacağını söyleyen genel bir yöntem yoktur. Bu eylem integrali alanın deneyimine bağlı bir tür sınama-yanılma sürecidir. İntegral kavramı ortaya çıktığından beri çok sayıda sınama-yanılma yapılmış ve başarılı olanlar öne çıkmıştır. Aslında bütün integral alma eylemleri öyledir. Genel yöntem ortaya konamayınca, problem alt sınıflara bölünür ve her bir alt sınıfta geçerli olan çözüm yolları ortaya konulur.

**Örnek 23.3.**  $\int \sin^3 x \cdot \cos x \, dx$ 

integralini hesaplayınız.

*Çözüm:*

$u = \sin x \longrightarrow du = \cos x \, dx$  konumuyla,

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x \cdot \cos x \, dx &= \int u^3 \, du \\ &= \frac{1}{4} u^4 + C \\ &= \frac{1}{4} \sin^4 x + C \end{aligned}$$

bulunur.

**Örnek 23.4.**  $\int \sin^3 x \, dx$ 

integralini hesaplayınız.

*Çözüm:* Burada ilk örnekteki değişken değiştirme, integrandın ilkelini bulmaya yarayacak iyi bir sonuç vermez. Trigonometrik formülleri kullanarak biraz işlem yaparsak,  $u = \cos x \rightarrow du = -\sin x$  konumunun daha iyi sonuç vereceği görülebilir:

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x \, dx &= \int (\sin^2 x) \sin x \, dx \\ &= \int (1 - \cos^2 x) \sin x \, dx \\ &= \int \sin x \, dx - \int \cos^2 x \sin x \, dx \\ &= -\cos x + \int u^2 \, du \\ &= -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + C \\ &= \frac{1}{12} (\cos 3x - 9 \cos x) + C \end{aligned}$$

bulunur.

**Örnek 23.5.**  $I = \int (1 - 2x)^9 \, dx$ 

integralini hesaplayınız.

*Çözüm:*

Bu integrali hesaplamak için akla ilk gelen yol, integrandı binom formülüne göre açmak, sonra çıkan polinomu terim terime integre etmektir. O yöntem doğru ama uzun bir yöntemdir. Onun yerine  $u = 1 - 2x$ ,  $du = -2 \, dx$  konumu işlemleri çok kısaltacaktır:

$$\begin{aligned} \int (1 - 2x)^9 \, dx &= -\frac{1}{2} \int (1 - 2x)^9 (-2 \, dx) \\ &= -\frac{1}{2} \int u^9 \, du \\ &= -\frac{1}{20} u^{10} + C \\ &= -\frac{1}{20} (1 - 2x)^{10} + C \end{aligned}$$

çıkar.

**Örnek 23.6.**

$$I = \int_3^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 9}}$$

integralini hesaplayınız.

*Çözüm:*

İntegrali alınacak ifadeyi karekökten kurtarmak için

$$x = \frac{3}{\cos t}, dx = 3 \frac{\sin t}{\cos^2 t} dt \text{ ve sınırlar için } 2\sqrt{3} = \frac{3}{\cos t} \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}; +3 = \frac{3}{\cos t} \Rightarrow T = 0$$

konumu yapılırsa,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\sqrt{\frac{9}{\cos^2 t} - 9}} \cdot \frac{3 \sin t}{\cos^2 t} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos t}{3 \sin t} \cdot \frac{3 \sin t}{\cos^2 t} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dt}{\cos t} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sec t dt \\ &= \ln |\sec t + \tan t|_0^{\frac{\pi}{6}} \\ &= \ln \left| \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right| - \ln |1 + 0| \\ &= \ln \sqrt{3} \end{aligned}$$

**Örnek 23.7.**  $I = \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}-1} dx$ 

integralini hesaplayınız.

*Çözüm:*

Karekök ile küp kökü yoketmek için 2 ile 3 sayılarının ek küçük ortak katını (ekok) alalım.  $x = t^6$ ,  $\sqrt{x} = t^3$ ,  $\sqrt[3]{x} = t^2$ ,  $dx = 6t^5 dt$  konumuyla

$$\begin{aligned} I &= 6 \int \frac{t^8}{t^2 - 1} dt \\ \frac{t^8}{t^2 - 1} &= t^6 + t^4 + t^2 + 1 + \frac{1}{t^2 - 1} \\ I &= 6 \int \left( t^6 + t^4 + t^2 + 1 + \frac{1}{t^2 - 1} \right) dt \\ &= 6 \left( \frac{t^7}{7} + \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} + t + \frac{1}{2} \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \right) + C \\ &= 6 \left( \frac{x^{7/6}}{7} + \frac{x^{5/6}}{5} + \frac{\sqrt{x}}{3} + x^{1/6} + \frac{1}{2} \left| \frac{x^{1/6} - 1}{x^{1/6} + 1} \right| \right) + C \end{aligned}$$

**Örnek 23.8.**  $I = \int \frac{x^4}{x^2+1} dx$ 

integralini hesaplayınız.

*Çözüm:* payın derecesi paydanın derecesinden küçük olmadığı için, önce payı paydaya bölmeliyiz.

$$\begin{aligned} I &= \int \left( 1 - x^2 + \frac{1}{x^2+1} \right) dx \\ &= \int dx - \int x^2 dx + \int \frac{1}{1+x^2} \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \tan^{-1} x + C \end{aligned}$$

**Örnek 23.9.**  $I = \int \frac{dx}{x^2+1} dx$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:  $x = \tan t$ ,  $dx = \sec^2 t dt$  konumuyla,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sec^2 t}{(\tan^2 t + 1)} \\ &= \int \frac{\cos^2 t}{\cos^2 t} dt \\ &= \int dt \\ &= t + C \\ &= \tan^{-1} x + C \end{aligned}$$

### 23.5 $\tan \frac{\theta}{2}$ Konumu

Bazı integrallerde değişken değiştirimi işi kolaylaştırır. Bu durumda,

$$\begin{aligned} x &= \tan \frac{\theta}{2} \\ \cos \theta &= \frac{1-x^2}{1+x^2} \\ \sin \theta &= \frac{2x}{1+x^2} \\ d\theta &= \frac{2dx}{1+x^2} \\ \theta &= 2 \arctan x \\ x &= a \sin \theta \Leftrightarrow \theta = \arcsin \frac{x}{a} \\ x &= a \tan \theta \Leftrightarrow \theta = \arctan \frac{x}{a} \\ x &= a \sec \theta \Leftrightarrow \theta = \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} = \arccos \frac{x}{a} \end{aligned}$$

değişken değiştirimleri kullanılabilir.

**Örnek 23.10.**

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1 + \cos \theta + \sin \theta}$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$x = \tan \frac{\theta}{2}, \cos \theta = \frac{1-x^2}{1+x^2}, \sin \theta = \frac{2x}{1+x^2}, d\theta = \frac{2dx}{1+x^2}$$

konumuyla,

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{1 + \frac{1-x^2}{1+x^2} + \frac{2x}{1+x^2}} \\
 &= \int \frac{2dx}{2x+2} \\
 &= \int \frac{dx}{x+1} \\
 &= \ln|x+1| \\
 &= \ln \left| \tan \frac{\theta}{2} + 1 \right|_0^{\pi/2} \\
 &= \ln 2 - \ln 1 \\
 &= \ln 2
 \end{aligned}$$

bulunur.

### Örnek 23.11.

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} dx$$

integralini hesaplayınız.

*Çözüm:*

$$x = \frac{1}{2} \sin t, dx = \frac{1}{2} \cos t dt, 1-4x^2 = 1-4\left(\frac{1}{4}\sin^2 t\right) = 1-\sin^2 t = \cos^2 t, 2x = \sin t, t = \arcsin(2x)$$

konumu yapılırsa,

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{\cos t} \cos t dt \\
 &= \frac{1}{2} \int dt \\
 &= \frac{1}{2} t + C \\
 &= \frac{1}{2} \sin^{-1}(2x) + C
 \end{aligned}$$

bulunur.

### Örnek 23.12.

$$I = \int \frac{x^2}{\sqrt{1-4x^2}} dx$$

integralini hesaplayınız.

*Çözüm:*

$$2x = \sin t, dx = \frac{1}{2} \cos t dt$$

konumuyla,

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{x^2}{\sqrt{1-4x^2}} dx \\
 &= \int \frac{9\sin^2 t}{3\cos t} 3\cos t dt \\
 &= 9 \int \frac{1-\cos 2t}{2} dt \\
 &= \frac{9}{2} \left( t - \frac{\sin 2t}{2} \right) + C \\
 &= \frac{9}{2} (t - \sin t \cos t) + C \\
 &= \frac{1}{16} \left( \sin^{-1}(2x) - 2x\sqrt{1-4x^2} \right) + C
 \end{aligned}$$

bulunur.

**Örnek 23.13.**

$$I = \int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} dx$$

integralini hesaplayınız.

*Çözüm:*

$$x = 3 \sin t, dx = 3 \cos t dt, 9 - x^2 = 9 \cos^2 t$$

konumuyla,

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} dx \\
 &= \int \frac{9\cos^2 t}{3\cos t} 3\cos t dt \\
 &= 9 \int \frac{1-\cos(2t)}{2} dt \\
 &= \frac{9}{2} \left( t - \frac{\sin(2t)}{2} \right) + C \\
 &= \frac{9}{2} (t - \sin t \cos t) + C \\
 &= \frac{1}{2} \left( 9 \sin^{-1} \frac{x}{3} - x\sqrt{9-x^2} \right) + C
 \end{aligned}$$

bulunur.

**Örnek 23.14.**

$$I = \int \frac{1}{x\sqrt{1-4x^2}} dx$$

integralini hesaplayınız.

*Çözüm:*

$$x = \frac{1}{2} \sin t, dx = \frac{1}{2} \cos t dt, 1 - 4x^2 = \cos^2 t$$

konumuyla,

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{1}{x\sqrt{1-4x^2}} dx \\
 &= \int \frac{\frac{1}{2}\cos t}{\frac{1}{2}\sin t \cdot \cos t} dt \\
 &= \int \frac{dt}{\sin t} \\
 &= \int \csc t dt \\
 &= \ln|\csc t + \cot t| + C
 \end{aligned}$$

$$x = \frac{1}{2} \sin t \Rightarrow 2x = \sin t \Rightarrow \csc t = \frac{1}{2x}, \quad \cot t = \frac{\sqrt{1-4x^2}}{2x}$$

konumuyla,

$$I = \ln \left| \frac{1}{2x} + \frac{\sqrt{1-4x^2}}{2x} \right| + C$$

bulunur.

**Örnek 23.15.**

$$I = \int \frac{\sin^5 x}{\sqrt{\cos x}} dx$$

integralini hesaplayınız.

*Çözüm:*

$$u = \cos x, \quad du = -\sin x dx$$

konumuyla,

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{\sin^5 x}{\sqrt{\cos x}} dx \\
 &= \int \frac{\sin^4 x \cdot \sin x}{\sqrt{\cos x}} dx \\
 &= \int \frac{(1-u^2)^2}{\sqrt{u}} du \\
 &= \frac{2}{45} \sqrt{u} (5u^4 - 18u^2 + 45) + C = \frac{2}{45} \sqrt{\cos x} (5\cos^4 x - 18\cos^2 x + 45) + C
 \end{aligned}$$

## 23.6

## Kısmi

İntegrali alınacak fonksiyonun ilkeli hemen görülemiyor, değişken değiştirimi için uygun bir değişken bulunamıyor ise kısmi integrasyon denilen yöntem bazen çözüm için uygun yol olabilir. Bu yöntem aslında iki fonksiyonun çarpımının türevine dayalıdır:

$$\int u dv \quad (23.5)$$

integralini arıyor olalım.  $uv$  çarpımının diferensiyeli olan

$$d(uv) = u dv + v du$$

eşitiğinin iki yanının integralleri de eşit olmalıdır:

$$uv = \int u dv + \int v du$$



Buradan

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (23.6)$$

bağıntısı çıkar. Bu aradığımız **(??)** integralidir. Bundan böyle **(??)** eşitliğini bir formül olarak kullanacağız. Bu yöntem öncelikle integrali alınacak fonksiyonun  $u dv$  biçiminde yazılabilmesini ve bir ya da ardışık kısmi integrasyon uygulamalarından  $u$  çarpanının yok olmasını gerektirir. Aşağıdaki örnekler, kısmi integrasyon yönteminin nasıl çalıştığını gösterecektir.

**Örnek 23.16.**

$$\int x e^x dx \quad (23.7)$$

integralini hesaplayınız.

*Çözüm:*

İntegrandı iki **fonksiyonun** çarpımı **biçine** getirelim:  $u = x$ ,  $dv = e^x dx$  konumuyla,

$$\begin{aligned} \int x e^x dx &= x e^x - \int e^x dx \\ &= x e^x - e^x + C \end{aligned}$$

*Uyarı:* Yukarıdaki **değişken** değiştirme eyleminde  $u = e^x$ ,  $dv = x dx$  alınmış olsaydı

$$\int x e^x dx = \frac{1}{2} x^2 e^x - \frac{1}{2} \int x^2 e^x dx$$


gibi çözümü aslından daha zor olan bir integral ortaya çıkardı. O nedenle, kısmi integrasyon kullanılırken, işlem sonunda çarpanlardan birisinin yok olması önem kazanır.

**Örnek 23.17.**

$$\int e^{-x} \cos x dx \quad (23.8)$$

integralini hesaplayınız.

*Çözüm:*

Türev ve integral işlemlerinde  $e^{-x}$  yok olmayacağına göre **co.**  fonksiyonu yok olması gereken fonksiyon olarak karşımıza çıkar. Tabii, bu fonksiyon da bir kez türev ya da integral olarak yok edilemez. Ama iki defa türev alınca, kendisine eşit olacağından, bir aritmetik işlemle istenen integrali elde edebiliriz:

$$\int e^{-x} \cos x dx = e^{-x} \sin x + \int e^{-x} \sin x dx$$

Sondaki integrale tekrar kısmi integral uygularsak,

$$\int \sin x e^{-x} dx = -e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \cos x dx$$

çıkar. Son iki ifadeyi bir araya getirirsek,

$$\int \cos x e^{-x} dx = \sin x e^{-x} - \cos x e^{-x} - \int \cos x e^{-x} dx \quad (23.9)$$

Dikkat edersek, son ifadedeki iki integral aynıdır. **Dolayısıyla**, eşitliği

$$\int \cos x e^{-x} dx = \frac{1}{2} e^{-x} (\sin x - \cos x) + C \quad (23.10)$$

biçiminde yazabiliriz.

**Örnek 23.18.**

$$\int (3x+5) \cos \frac{x}{4} dx \quad (23.11)$$

integralini hesaplayınız.

**Çözüm:**

Kısmi integrasyon uygularken polinom biçimindeki **fonksiyonların** ilk adımında ya da ardışık adımlarda yok olacağını düşünerek,

$$u = 3x+5, dv = \cos \frac{x}{4}, du = 3dx, v = 4 \sin \frac{x}{4}$$

konumlarını yapabiliriz. Buradan,

$$\begin{aligned} \int (3x+5) \cos \frac{x}{4} dx &= 4(3x+5) \sin \frac{x}{4} - 12 \int \sin \frac{x}{4} dx \\ &= 4(3x+5) \sin \frac{x}{4} + 48 \cos \frac{x}{4} + C \end{aligned}$$

olur.

**Örnek 23.19.**

$$\int x^2 \sin(10x) dx \quad (23.12)$$

integralini hesaplayınız.

**Çözüm:**

$$u = x^2, dv = \sin(10x) dx, du = 2x dx, v = -\frac{1}{10} \cos(10x)$$

konumu yapılırsa, kısmi integrasyon formülünden

$$\int x^2 \sin(10x) dx = -\frac{x^2}{10} \cos(10x) + \frac{1}{5} \int x \cos(10x) dx$$

yazılabilir. Sağdaki integral için bir kez daha kısmi integrasyon uygulanabilir:

$$u = x, dv = \cos(10x), du = dx, v = \frac{1}{10} \sin(10x)$$

konumuyla,

$$\begin{aligned} \int x^2 \sin(10x) dx &= -\frac{x^2}{10} \cos(10x) + \frac{1}{5} \left( \frac{x}{10} \sin(10x) - \frac{1}{10} \int \sin(10x) dx \right) \\ &= -\frac{x^2}{10} \cos(10x) + \frac{1}{5} \left( \frac{x}{10} \sin(10x) + \frac{1}{100} \cos(10x) \right) + C \\ &= -\frac{x^2}{10} \cos(10x) + \frac{x}{50} \sin(10x) + \frac{1}{500} \cos(10x) + C \end{aligned}$$

bulunur.

**Örnek 23.20.**

$$I = \int_0^1 \arctan x dx, \quad (23.13)$$

**integralini** bulunuz.

**Çözüm:** Kısmi integrasyon formülünden,

$$\begin{aligned} I &= \int \arctan x dx \\ &= x \arctan x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx \\ &= \arctan 1 - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) \Big|_0^1 \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2 \end{aligned}$$

**Örnek 23.21.**

$$I = \int e^{ax} \cos bx \, dx, \quad (ab \neq 0) \quad (23.14)$$

integralini bulunuz.

Çözüm:

$$u = e^{ax}, \quad du = ae^{ax} \, dx, \quad dv = \cos bx \, dx, \quad v = \frac{1}{b} \sin bx$$

konumuyla kısmi integrasyon formülünden,

$$\begin{aligned} I &= \int e^{ax} \cos bx \, dx \\ &= \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bx \, dx \\ &= \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx - \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos bx - \frac{a^2}{b^2} I + C \end{aligned}$$

Buradan

$$I = \frac{1}{a^2 + b^2} e^{ax} (a \cos bx + b \sin bx) + C$$

bulunur.

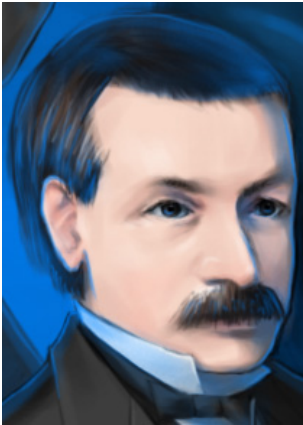
Benzer olarak

$$I = \int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{1}{a^2 + b^2} e^{ax} (a \sin bx - b \cos bx) + C$$

eşitliği elde edilebilir.



Şekil 23.1: Hermann Schubert (1848-1911)



Şekil 23.2: Leopold Kronecker (1823-1891)

### 23.7 Polinomların Çarpanlara Ayrılması

Polinomların kökleri uygulamada önemli rol oynar. O nedenle polinomlar işlenirken bu konuya ağırlık verilir. Benzetmek gerekirse, bir polinomun çarpanlarına ayrılması bir sayının asal çarpanlarına ayrılması gibidir. Tabii, sayılarda var olan bütün özellikler polinomlarda olmaz.

Polinomları çarpanlarına ayırma konusu ilk kez 1793 yılında Hermann Schubert tarafından ortaya konulmuş 1882 yılında Leopold Kronecker bulduğu bir algoritma ile konuyu genelleştirmiştir. Bu gün polinomu çarpanlara ayırma işlemi bilgisayar cebirinin temel taşlarından birisidir.

Bu kitapta polinomu çarpanlarına ayırma işlemi rasyonel fonksiyonların integralini bulmak için kullanılacaktır. O nedenle, bu kesimde bir  $q(x)$  polinomunun çarpanlarına ayrılışını bize gerektiği kadarıyla ele alacağız. Önce iyi bilinen temel bilgileri anımsayalım:

Gerçek katsayılı her  $Q(x)$  polinomu doğrusal ve **quadratic** çarpanlarının çarpımı **olarak** yazılabilir.

**Tanım 23.22.** Katsayıları gerçek olan bir

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n \quad (23.15)$$

polinomu için

$$(x - c)^k S(x) \quad (23.16)$$

eşiliğini sağlayan bir  $S(x)$  polinomu varsa  $c$  sayısı  $q(x)$  polinomunun  $k$ -katlı bir köküdür.

$k = 1$  ise  $c$  sayısı tek katlı kök olur.  $n$ -inci dereceden bir polinomun  $n$  tane kökü vardır. Burada  $c$  sayısı  $q(x)$  polinomunun  $k$ -katlı kökü ise geri kalan köklerin sayısı  $n - k$  tanedir ve onlar  $S(x)$  polinomunun kökleri olur. Kökler gerçel ya da karmaşık sayı olabilirler.

**Teorem 23.23.** Özdeş iki polinomun aynı dereceli terimlerinin katsayıları birbirlerine eşittir.

*Kanıt:*

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n \\ q(x) &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots + b_{n-1}x^{n-1} + b_nx^n \end{aligned}$$

polinomları özdeş olsunlar. O zaman farkları 0'a özdeş olmalıdır:

$$n > m \text{ ise}$$

$$0 \equiv p(x) - q(x)$$

$$0 \equiv (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + \dots + (a_m - b_m)x^m + a_{m+1}x^{m+1} + \dots + a_nx^n$$

olmalıdır. Bunun olabilmesi için

$$a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots, a_m = b_m, a_{m+1} = 0, \dots, a_n = 0$$

olmalıdır.  $n < m$  ise benzer düşünce geçerlidir.

**Teorem 23.24.**  $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots + b_{n-1}x^{n-1} + b_nx^n$  polinomunun  $(x - c)q_1(x)$  biçiminde çarpanlara ayrılması için gerekli ve yeterli koşul  $c$  nin bir kök olması; yani  $q(c) = 0$  olmasıdır.

*Kanıt:*

$q(x)$  polinomu  $x - c$  ile tam bölünebiliyorsa  $q(c) = 0$  olacağından,

$$\begin{aligned} q(x) &= q(x) - q(c) \\ &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots + b_{n-1}x^{n-1} + b_nx^n - (b_0 + b_1c + b_2c^2 + b_3c^3 + \dots + b_{n-1}c^{n-1} + b_nc^n) \\ &= b_1(x - c) + b_2(x^2 - c^2) + b_3(x^3 - c^3) + \dots + b_n(x^n - c^n) \end{aligned} \quad (23.17)$$

yazılabilir. Öte yandan

$$x^n - c^n = (x - c)(x^{n-1} + x^{n-2}c + \dots + xc^{n-2} + c^{n-1}), \quad (n = 1, 2, \dots, m) \quad (23.18)$$

dir. (19.1) ve (20.53) bağıntılarından istenen çıkar.

Polinomun bazı kökleri tamsayı olabilir.

**Örnek 23.25.**

$$q(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2 \quad (23.19)$$

polinomunu çarpanlarına ayırınız.

baş katsayısı 1 olan bir polinomun tam sayı kökü varsa sabit teriminin bir çarpanıdır. Burada sabit terim 2'dir. 2'nin çarpanları  $\pm 1, \pm 2$  olmak üzere dört tanedir. Bunlar arasında  $c_1 = 2$  sayısı  $q(c_1) = 0$  eşitliğini sağlar. O halde,

$$q(x) = (x - 2)q_1(x) = (x - 2)(x^2 - 1) \quad (23.20)$$

yazılabilir. Tekrar  $q_1(x)$  polinomunun köklerini bulmamız gerekiyor. Bu polinom ikinci dereceden olduğu için köklerini formülden bulabiliriz:  $c_2 = -1$   $c_3 = +1$  olur.  $q(x)$  polinomunun üç kökünü de bulduğumuza göre onu

$$q(x) = (x-2)(x+1)(x-1) \quad (23.21)$$

biçiminde çarpanlarına ayırabiliriz.

**Polinomum** bazı kökleri irrasyonel sayı olabilir.

#### Örnek 23.26.

$$q(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 6 \quad (23.22)$$

polinomunu çarpanlarına ayırınız.

Bilindiği gibi başkatsayısı 1 olan polinomun tamsayı kökleri sabit teriminin çarpanıdır. 4 sayısını çarpanları  $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$  sayılarıdır. Bunlar arasında  $p(c) = 0$  yapan tek sayı  $c_1 = 3$  sayısıdır. O halde

$$q(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 6 = (x-3)q_1(x)(x-3)(x^2-2) \quad (23.23)$$

olur. Geriye kalan  $q_1(x) = (x^2-2)$  polinomu ikinci dereceden bir polinomdur. Kökleri  $\pm\sqrt{2}$  dir. O halde,

$$q(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 6 = (x-3)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) \quad (23.24)$$

biçiminde çarpanlarına ayrılabilir.

#### Örnek 23.27.

$$q(x) = x^4 - 4x^3 + 8x \quad (23.25)$$

polinomunu çarpanlarına ayırınız.

Bu polinomunda  $x$  değişkeninin her terimde olduğu apaçık görünüyor. Öyleyse,

$$q(x) = x(x^3 - 4x^2 + 8) = xq_1(x)$$

yazabiliriz. Parantez içindeki polinomun tamsayı kökleri varsa 8 sabitinin çarpanları olacağından,  $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$  sayılarının kök olup olmadıklarını denemeliyiz.  $c = 2$  sayısı için  $q_1(2) = 0$  olduğu; yani  $c_2 = 2$  sayısının bir kök olduğu görülür. Buradan

$$q(x) = x^4 - 4x^3 + 8x = x(x-2)q_2(x) = x(x-2)(x^2-2x-4) \quad (23.26)$$

yazılabilir. Burada geriye kalan  $q_2(x) = x^2 - 2x - 4$  ikinci dereceden bir polinomdur. Bildiğimiz yöntemle bunun köklerini bulabiliriz. O halde,  $q(x)$  polinomu

$$q(x) = x(x-2)(x+1)(x-\sqrt{5})(x-1-\sqrt{5}) \quad (23.27)$$

biçiminde çarpanlarına ayrılabilir.

Polinomum bazı kökleri karmaşık sayı olabilir.

#### Örnek 23.28.

$$q(x) = x^5 + x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 4 \quad (23.28)$$

polinomunu çarpanlarına ayırınız.

**Çözüm:** Beşinci dereceden olduğu için bu polinomum beş tane kökü olduğu biliniyor. Ancak üçüncü dereceden büyükler için kökü bulmamızı sağlayan bir formül yoktur. Sabit terimin  $\pm 1, \pm 2, \pm 4$  sayılarından  $+1$  sayısının kök olduğu denenerek görülebilir.  $q(x) = (x+1)q_1(x)$  yazarsak  $q_1(x) = (x^2 + 2)^2$  olduğu ve  $q_1(x)$  polinomunun gerçel kökünün olmadığı görülür. Geri kalan dört kökün dördü de karmaşık sayıdır.

$$q(x) = (x+1)(x^2+2)^2. \quad (23.29)$$

### Örnek 23.29.

$$q(x) = 8x^4 - 4x^3 + 10x^2 \quad (23.30)$$

polinomunu çarpanlarına ayırınız.

**Çözüm:** Dördüncü dereceden olan bu polinomun 4 tane kökü vardır.  $2x^2$  çarpanı ortak olduğu için polinomu,

$$q(x) = x^2(8x^2 - 4x + 10) \quad (23.31)$$

biçiminde çarpanlara ayırsak  $(4x^2 - 2x + 5)$  çarpanının ikinci dereceden ve gerçel kökü olmadığı görülür. Öyleyse,

$$q(x) = \frac{1}{4}x^2 \left( (-4ix + \sqrt{19}) \cdot (4ix + \sqrt{19}) \right) \quad (23.32)$$

olur.

## 23.8 Basit Kesirlere Ayırma

İki polinomun oranı biçiminde yazılan fonksiyonlara rasyonel fonksiyon denilir.  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  ifadesinde  $P(x)$  polinomunun derecesi  $Q(x)$  polinomunun derecesinden daha küçükse, rasyonel fonksiyona basit, değilse bileşik kesir denilir.

$Q(x)$  paydasının  $(x - a_k)^m$  bir çarpan ve  $(x^2 + px + q)^r$  bir **kuadratik çarpan** ise rasyonel fonksiyon

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = E(x) + \sum_{k=1}^m \frac{A_k}{(x - a_k)^k} + \sum_{r=1}^R \frac{b_mx + C_m}{(x^2 + px + q)^r}$$

biçiminde basit kesirlere ayrılır. Sonra her basit kesir için kendi sınıfına ait integral yöntemi uygulanır.

## 23.9 Rasyonel Fonksiyonların İntegrallenmesi

Şimdi en basit halden başlayarak rasyonel fonksiyonların integrallenmesini inceleyeceğiz.



$$I = \int \frac{1}{1-x^2} dx \quad (23.33)$$

integralini bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{1-x^2} &= \frac{1}{(1-x)(1+x)} \\
 &= \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} \\
 \Rightarrow \frac{1}{1-x^2} &= \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} \\
 \Rightarrow \frac{1}{1-x^2} &= \frac{A(1+x) + B(1-x)}{1-x^2} \\
 \Rightarrow \frac{1}{1-x^2} &= \frac{(A+B)x + (A-B)x}{1-x^2} \\
 \Rightarrow (A+B) &= 0, (A-B) = 0 \Rightarrow A = -\frac{1}{2}, B = \frac{1}{2} \\
 \Rightarrow \frac{1}{1-x^2} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{(1+x)} - \frac{1}{(1-x)} \right)
 \end{aligned}$$

Artık sağ taraftaki basit kesirlerin integralleri alınabilir:

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{1}{1-x^2} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{(1+x)} - \frac{1}{(1-x)} \right) dx \\
 &= \frac{1}{2} \left( \ln(1+x) - \ln(1-x) \right) + \ln C \\
 &= \frac{1}{2} \ln \left| C \frac{(1+x)}{(1-x)} \right|
 \end{aligned}$$



$$I = \int \frac{x^5 + 2}{x^2 - 1} dx \quad (23.34)$$

integralini bulunuz.

Çözüm:

İntegrali alınacak fonksiyonun payının derecesi paydanın derecesinden büyük olduğu için önce payı paydaya bölelim:

$$\frac{x^5 + 1}{x^2 - 1} = x^3 + x + \frac{x+2}{x^2 - 1} \quad (23.35)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{x+2}{x^2-1} &= \frac{x+2}{(x-1)(x+1)} \Rightarrow \\
 \frac{x+2}{(x-1)(x+1)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} \Rightarrow \\
 &= \frac{A(x+1)}{(x-1)(x+1)} + \frac{B(x-1)}{(x-1)(x+1)} \Rightarrow \\
 &= \frac{(A+B)x + (A-B)}{x^2-1} \\
 \Rightarrow A &= 3/2, B = -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Bulduğumuz bu deperleri (??) eşitliğinde kullanırsak,

$$\frac{x^5 + 2}{x^2 - 1} = x^3 + x - \frac{1}{2} \frac{1}{x+1} + \frac{3}{2} \frac{1}{x-1} \quad (23.36)$$

olur. Sağ yandaki terimler integrallenebilir olduğundan

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{x^5 + 2}{x^2 - 1} dx \\
 &= \int x^3 dx + \int x dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} dx + \frac{3}{2} \int \frac{1}{x-1} dx \\
 &= \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} \ln|x+1| + \frac{3}{2} \ln|x-1| + C
 \end{aligned}$$



**Örnek 23.30.**

$$I = \int \frac{3x^2 + x + 4}{x(x^2 + 2)^2} dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm: Kısmi **kesirlerine ayırıp integrale geçilirse,**

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x^2 + 2} + \int \frac{xdx}{(x^2 + 2)^2} + \int \frac{dx}{(x^2 + 2)^2} dx \\ &= \ln|x| - \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2)}{(x^2 + 2)} + \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2)}{(x^2 + 2)^2} + \int \frac{dx}{(x^2 + 2)^2} \\ &= \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2) - \frac{1}{2} \frac{1}{(x^2 + 2)} + \frac{1}{4} \frac{x}{x^2 + 2} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} + C \end{aligned}$$

**Örnek 23.31.**

$$I = \int \frac{6x^3 + 5x^2 + 21x + 12}{x(x+1)(x^2+4)} dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \frac{6x^3 + 5x^2 + 21x + 12}{x(x+1)(x^2+4)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+4} \\ 6x^3 + 5x^2 + 21x + 12 &\equiv A(x+1)(x^2+4) + Bx(x^2+4) + (Cx+D)x(x+1) \\ &\equiv (A+B+C)x^3 + (A+D+C)x^2 + (4A+4B+D)x + 4A \\ \Rightarrow A+B+C &= 6 \\ A+C+D &= 5 \\ 4A+4B+D &= 21 \\ 4A &= 12 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A=3, B=2, C=1, D=1$$

Bunları yerlerine koyarsak, integral,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{3}{x} dx + \int \frac{2}{x+1} dx + \int \frac{x+1}{x^2+4} dx \\ &= 3 \ln|x| + 2 \ln|x+1| + \frac{1}{2} \ln|x^2+4| + \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} + C \\ &= \ln|x^3(x+1)^2 \sqrt{x^2+4}| + \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} + C \end{aligned}$$

**Örnek 23.32.**

$$I = \int \frac{x^5 - x^4 - 3x + 5}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1} dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \frac{x^5 - x^4 - 3x + 5}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1} &= (x+1) + \frac{-2x+4}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1} \\ &= (x+1) + \frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2} \\ &= (x+1) + \frac{2x+1}{x^2+1} - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= \int \left( (x+1) + \frac{2x+1}{x^2+1} - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 + x + \ln(x^2+1) + \tan^{-1} x - 2 \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C \end{aligned}$$



**Örnek 23.33.**

$$I = \int \frac{(x+1)}{\sqrt{2x^2-6x+4}} dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 6x + 4 &= 2(x^2 - 3x) + 4 \\ &= 2\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4} + 4 - \frac{9}{2}\right) \\ &= 2(u^2 - a^2) \quad \Rightarrow u = x - \frac{3}{2}, \quad a = \frac{1}{2}, \quad du = dx \\ x + 1 &= u + \frac{5}{2} \end{aligned}$$

konumu yapılırsa,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{u + \frac{5}{2}}{\sqrt{2(u^2 - a^2)}} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{u du}{\sqrt{u^2 - a^2}} + \frac{5}{2\sqrt{2}} \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{u du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{dz}{\sqrt{z}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int 2\sqrt{z} dz + C_1 \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{z} + C_1 \\ &= \sqrt{\frac{u^2 - a^2}{2}} + C_1 \end{aligned}$$



$$I_2 = \frac{5}{2\sqrt{2}} \ln|u + \sqrt{u^2 - a^2}| + C_2$$

O halde,

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 &= \sqrt{\frac{u^2 - a^2}{2}} + \frac{5}{2\sqrt{2}} \ln|u + \sqrt{u^2 - a^2}| + C \\ &= \sqrt{\frac{x^2 - 3x + 2}{2}} + \frac{5}{2\sqrt{2}} \ln\left|\left(x - \frac{3}{2}\right) + \sqrt{x^2 - 3x + 2}\right| + C \end{aligned}$$

çıkar.

**Örnek 23.34.**

$$I = \int \frac{1}{4x^2 + 4x + 2} dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{dx}{4(x^2 + x) + 2} \\
 &= \int \frac{dx}{4(x^2 + x + \frac{1}{4}) + (2 - \frac{4}{4})} \\
 &= \int \frac{du}{4(u^2 + 1)}, \quad (u = x + \frac{1}{2}) \\
 &= \frac{1}{4} \int \frac{du}{u^2 + (\frac{1}{2})^2} \\
 &= \frac{1}{4} \left( \frac{1}{1/2} \arctan \frac{u}{1/2} \right) + C \\
 &= \frac{1}{2} \arctan(2x + 1) + C
 \end{aligned}$$

### 23.10 Rasyonel Fonksiyonların Kesirlere Ayrılması

Rasyonel fonksiyon iki polinomun bölümü biçiminde olan fonksiyonlardır:

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots + b_mx^m} \quad (23.37)$$

bu ifadede  $n \geq m$  ise rasyonel fonksiyona bileşik kesir,  $m < n$  ise basit kesir denilir. Başka bir deyişle, paydanın derecesi payın derecesinden küçükse rasyonel fonksiyona bileşik kesir, değilse basit kesir denilir. Bu sınıflandırma sayılardaki bileşik ve basit kesir tanımı gibidir.

Bileşik kesir halinde olan rasyonel fonksiyonlar basit kesirlerine ayrılabilir. Bunun için paydaki polinomun paydadaki polinoma bölünmesi yeterlidir. Bu bölme işlemi sonunda,

$$r(x) = p_1(x) + r_1(x) \quad (23.38)$$

gibi bir ifade çıkar. Burada,  $\{der\{p_2\} < der\{q\}\}$  der polinomun derecesini göstermek üzere,  $p_1(x)$  bir polinomdur ve derecesi  $n - m$  dir.  $r_1(x)$ ; yani

$$r_1(x) = \frac{p_2(x)}{q(x)} \quad (der\{p_2\} < der\{q\}) \quad (23.39)$$

biçiminde rasyonel bir fonksiyondur ve payın derecesi paydanın derecesinden kesinlikle küçüktür.

Bu türlerin integrali için parçalı kesirlere ayırma (partial fraction) yöntemi kullanılır. İntegrallenen rasyonel fonksiyon parçalı kesirlerine ayrılınca her terim bilinen yöntemlerle integrallenebilir hale gelir.

(??) biçiminde bir fonksiyonun integrali isteniyorsa, sırasıyla şu eylemler yapılır:

1.  $p(x)$  polinomunun derecesi  $q(x)$  polinomunun derecesinden daha büyükse, önce

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = p_1(x) + r_1(x) \quad (23.40)$$

bölme işlemi yapılır.

2. Bölme işleminin verdiği  $p_1(x)$  polinomu terim terime integral-  
lenebilir.
3. Rasyonel  $r_1(x)$  fonksiyonunun  $q(x)$  paydası çarpanlarına ayrılır.
4. Her çarpana karşılık gelen basit kesirler bulunur.
5. Bulunan kesirlerin tek tek integralleri alınır.

Rasyonel fonksiyonun parçalı kesirlere ayrılması eylemi polinom-  
ların bir konusudur. Ama rasyonel fonksiyonların integralinde sık sık  
karşılaşacağımız basit kesirlere ayırma eyleminin esaslarını anlatmalıyız.

$n$ -inci dereceden bir polinomun  $n$  tane kökü olduğunu biliyoruz.  
Önceki kesimde her köke karşılık polinomun bir çarpanı olduğunu  
söylemiştik.

**Teorem 23.35.**  $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots + b_{n-1}x^{n-1} + b_nx^n$   
polinomunun  $(x - c)q_1(x)$  biçiminde çarpanlara ayrılması için gerekli ve  
yeterli koşul  $c$  nin bir kök olması; yani  $q(c) = 0$  olmasıdır.

Rasyonel fonksiyonların **basit** kesirlere ayrılışını gösteren aşağıdaki  
teoremin **Kanıtı**, bu kitapta olmayan bazı teknik bilgilere dayanır. O  
nedenle teoremi **Kanıtsız** olarak ifade edeceğiz:

**Teorem 23.36.** Basit kesir biçimindeki rasyonel  $q(x)$  fonksiyonun paydası

$$q(x) = a(x - c_1)^{r_1} \dots (x - c_k)^{r_k} \left( (x^2 + b_1x + d_1)^{s_1} \dots (x^2 + b_mx + d_m)^{s_m} \right) \quad (23.41)$$

biçiminde ve bu gösterimdeki iki doğrusal ya da quadratik çarpan aynı  
değil ve indirgenemez ise  $q(x)$  rasyonel fonksiyonu,

$$q(x) = B_{lin} + B_{quad} \quad (23.42)$$

biçiminde iki **blokun** toplamına eşittir. Bu bloklar için aşağıdaki kurallar  
geçerlidir: Her farklı  $(x - c_i)$  doğrusal çarpanı için,  $c_i$   $k$  katlı kök ise,

$$B_{lin} = \frac{A_1}{(x - c_i)} + \frac{A_2}{(x - c_i)^2} + \dots + \frac{A_{r_i}}{(x - c_i)^{r_i}} \quad (23.43)$$

biçimindeki  $k$  terimli bir blok oluşur.

$(x^2 + b_i x + d_i)$  quadratik çarpanı  $m$ -katlı bir çarpan ise

$$B_{quad} = \frac{B_1x + C_1}{(x^2 + b_i x + d_i)} + \frac{B_2x + C_2}{(x^2 + b_i x + d_i)^2} + \dots + \frac{B_{s_i}x + C_{s_i}}{(x^2 + b_i x + d_i)^{s_i}} \quad (23.44)$$

biçimindeki  $m$  ögeli bir blok oluşur.

Bloklardaki  $A_h, B_s, C_t$  sabit katsayıları  $q(x)$  polinomuna bağlı olarak  
tek olarak belirlenebilirler.

**(??)** ve **(??)** ifadelerinde terim sayıları ilgili kökün kaçınıcı dereceden  
katlı kök olduğuna bağlıdır. Örneğin,  $r_k = 1$  ise  $c_1$  tek katlı kök olur.

Dolayısıyla,  $B_{lin}$  **blokunun** tek ögesi var olur.  $\frac{A_1}{(x - c_1)}$  terimi **(??) blokunun**  
biricik terimi olur. Benzer şekilde,  $s_m = 1$  ise **(??) blokunun** biricik terimi  
 $\frac{B_1x + C_1}{(x^2 + b_1x + d_1)}$  olur.

**Kanıt:**

$q(x)$  polinomu  $x - c$  ile tam bölünebiliyorsa  $q(c) = 0$  olacağından,

$$\begin{aligned} q(x) &= q(x) - q(c) \\ &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots + b_{n-1}x^{n-1} + b_nx^n - ( \\ &\quad b_0 + b_1c + b_2c^2 + b_3c^3 + \dots + b_{n-1}c^{n-1} + b_nc^n) \\ &= b_1(x - c) + b_2(x^2 - c^2) + b_3(x^3 - c^3) + \dots + b_m(x^m - c^m) \end{aligned} \quad (23.45)$$

yazılabilir. Öte yandan

$$x^n - c^n = (x - c)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + c^{n-1}), \quad (n = 1, 2, \dots, m) \quad (23.46)$$

dir. (19.1) ve (20.53) bağıntılarından istenen çıkar.

**Örnek 23.37.**

$$q(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 6 \quad (23.47)$$

polinomunu çarpanlarına ayırınız.

Bilindiği gibi başkatsayısı 1 olan polinomun tamsayı kökleri sabit teriminin çarpanıdır. 4 sayısını çarpanları  $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$  sayılarıdır.

Bunlar arasında  $p(c) = 0$  yapan tek sayı  $c_1 = 3$  sayıdır. O halde

$$q(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 6 = (x - 3)q_1(x)(x - 3)(x^2 - 2) \quad (23.48)$$

olur. Geriye kalan  $q_1(x) = (x^2 - 2)$  polinomu ikinci dereceden bir polinomdur. Kökleri  $\pm\sqrt{2}$  dir. O halde,

$$q(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 6 = (x - 3)(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}) \quad (23.49)$$

biçiminde çarpanlarına ayrılabilir.

**Örnek 23.38.**

$$q(x) = x^4 - 4x^3 + 8x \quad (23.50)$$

polinomunu çarpanlarına ayırınız.

Bu polinomunda  $x$  değişkeninin her terimde olduğu apaçık görünür. Öyleyse,

$$q(x) = x(x^3 - 4x^2 + 8) = xq_1(x)$$

yazabiliriz. Parantez içindeki polinomun tamsayı kökleri varsa 8 sabitinin çarpanları olacağından,  $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$  sayılarının kök olup olmadıklarını denemeliyiz.  $c = 2$  sayısı için  $q_1(2) = 0$  olduğu; yani  $c_2 = 2$  sayısının bir kök olduğu görülür. Buradan

$$q(x) = x^4 - 4x^3 + 8x = x(x - 2)q_2(x) = x(x - 2)(x^2 - 2x - 4) \quad (23.51)$$

yazılabilir. Burada geriye kalan  $q_2(x) = x^2 - 2x - 4$  ikinci dereceden bir polinomdur. Bildiğimiz yöntemle bunun köklerini bulabiliriz. O halde,  $q(x)$  polinomu

$$q(x) = x(x - 2)(x + 1 + \sqrt{5})(x - 1 - \sqrt{5}) \quad (23.52)$$

biçiminde çarpanlarına ayrılabilir.

## 23.11 Rasyonelleştirme

İntegrali alınacak fonksiyon köklü ifadeler içeriyor, ya da integrali bilinen bir tipten değilse, uygun bir değişken değiştirimi ile rasyonel fonksiyon haline getirilir ve ona rasyonel fonksiyon için bilinen integral alma yöntemleri uygulanır.

**Örnek 23.39.**

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt[3]{x}} \quad (23.53)$$

integralini hesaplayınız.

**Çözüm:** İntegrali alınacak fonksiyon bir kare kök, bir de küp kök içeriyor. her iki köklü ifadeden kurtulmak için  $u = \sqrt[3]{x}$ ,  $x = u^6$ ,  $6u^5 du = dx$  konumuyla,

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt[3]{x}} dx &= \int \frac{u^3}{1 + u^2} 6u^5 du \\ &= 6 \int \frac{u^8}{1 + u^2} du \\ &= \int (6u^6 - 6u^4 + 6u^2 - 6 + \frac{1}{1 + u^2}) du \quad (\text{payı paydaya böl}) \\ &= \frac{6}{7} u^7 - \frac{6}{5} u^5 + 2u^3 - 6u + \tan^{-1} u + C \\ &= \frac{6}{7} x^{\frac{7}{6}} - \frac{6}{5} x^{\frac{5}{6}} + 2x^{\frac{1}{2}} - 6x^{\frac{1}{6}} + \tan^{-1} x^{\frac{1}{6}} + C\end{aligned}$$

bulunur.

**Örnek 23.40.**

$$\int \frac{1}{1 + e^x} dx \quad (23.54)$$

integralini hesaplayınız.

**Çözüm:**

$u = 1 + e^x$ ,  $\ln(u - 1) = x$ ,  $\frac{1}{u-1} du = dx$  konumuyla,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1 + e^x} dx &= \int \left( \frac{1}{u} \frac{1}{u-1} \right) du \\ &= \int \left( \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u} \right) du \\ &= \ln|u-1| - \ln|u| + \ln C \\ &= \ln \left| \frac{u-1}{u} \right| + C \\ &= \ln \left| \frac{e^x}{1 + e^x} \right| + C \\ &= \ln \left( \frac{e^x}{1 + e^x} \right) + C\end{aligned}$$

### 23.12 Köklü İfadelerin İntegrali

Köklü ifadelerin integrali için kullanılan geçerli yöntem, **integradi** kökten kurtaracak uygun bir **değişken** değiştirimi yapmaktır. Dolayısıyla bu kesimi **(0)** kesimi içinde görmek daha doğrudur. **Bir kaç** örnek söylediğimiz kanıtlayacaktır.

**Örnek 23.41.**

$$\int \frac{1}{\sqrt{\pi + 2x}} dx \quad (23.55)$$

integralini hesaplayınız.

**Çözüm:**

Burada zorluğu yaratan terim kareköklü terimdir. **Karkökten** kurtulmak için uygun bir değişken değiştirimi bulmalıyız. Deneyerek

$u = \pi + 2x$ ,  $2udu = 2dx \Rightarrow dx = udu$  konumunun işe yaradığını görebiliriz:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{\pi+2x}} dx &= \int \frac{udu}{\sqrt{u^2}} \\ &= \int \frac{udu}{u} \\ &= \int du \\ &= u + C \\ &= \sqrt{\pi+2x} + C\end{aligned}$$

**Örnek 23.42.**

$$\int \frac{x}{\sqrt{3x-1}} dx$$

(23.56)

integralini hesaplayınız.

*Çözüm:*

Karekökten kurtulmak için,  $u^2 = 3x - 1$ ,  $x = \frac{1}{3}(u^2 + 1)$ ,  $2udu = 3dx$ ,  $dx = \frac{2}{3}udu$  konumuyla,

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{3x-1}} dx &= \frac{2}{9} \int \frac{(u^2+1)}{u^2} udu \\ &= \frac{2}{9} \int udu + \frac{2}{9} \int \frac{du}{u} \\ &= \frac{1}{9} u^2 + \frac{2}{9} \ln|u| + C \\ &= \frac{1}{9} (3x-1) + \frac{2}{9} \ln|\sqrt{3x-1}| + C\end{aligned}$$

**Örnek 23.43.**

$$\int (x^2 - 4x + 4)^{-\frac{5}{3}} dx$$

(23.57)

integralini hesaplayınız.

*Çözüm:*

Uygun bir **değişken** değiştirimi ile küp kökten kurtulmalıyız. **Bunun için küp köklü ifadenin içinin**  $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$  olduğunu biliyoruz.

Sonra

$u^3 = (x-2)$ ,  $3u^2 du = dx$ ,  $(x^2 - 4x + 4)^{-\frac{5}{3}} = (x-2)^{-\frac{10}{3}}$  konumuyla,

$$\begin{aligned}\int (x^2 - 4x + 4)^{-\frac{5}{3}} dx &= \int \frac{1}{(\sqrt[3]{x^2 - 4x + 4})^5} dx \\ &= \int \frac{3u^2}{u^{10}} du \\ &= 3 \int u^{-8} du \\ &= -\frac{3}{7} u^{-7} + C \\ &= -\frac{3}{7} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^7}} + C\end{aligned}$$

**Örnek 23.44.**

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx$$

(23.58)

integralini hesaplayınız.

*Çözüm:*

$u^2 = x$ ,  $2u du = dx$  konumuyla,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx &= \int \frac{2u}{u\sqrt{1-u^2}} du \\ &= 2 \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du \\ &= 2\text{Arcsin}u + C \\ &= 2\text{Arcsin}\sqrt{x} + C\end{aligned}$$

olur.

**Örnek 23.45.**

$$I = \int \frac{(x+1)}{\sqrt{2x^2-6x+4}} dx$$



integralini hesaplayınız.

*Çözüm:*

$$\begin{aligned}2x^2 - 6x + 4 &= 2(x^2 - 3x) + 4 = 2\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) + 4 - \frac{9}{2} \\ &= 2(u^2 - a^2)\end{aligned}$$

$$u = x - \frac{3}{2}$$

$$a = \frac{1}{2}$$



$$du = dx$$

$$x + 1 = u + \frac{5}{2}$$

$$\begin{aligned}I &= \int \frac{(u + \frac{5}{2})du}{\sqrt{2(u^2 - a^2)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{udu}{\sqrt{u^2 - a^2}} + \frac{5}{2\sqrt{2}} \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_1 \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{dz}{\sqrt{z}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \int z^{-1/2} dz &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{2} z^{1/2} + C_1 \\ &= \sqrt{\frac{u^2 - a^2}{2}} + C_1\end{aligned}$$

$$I_2 = \frac{5}{2\sqrt{2}} \ln \left| u + \sqrt{u^2 - a^2} \right| + C_2$$

$$I = I_1 + I_2$$

$$= \sqrt{\frac{x^2 - 3x + 2}{2}} + \frac{5}{2\sqrt{2}} \ln \left| x - \frac{3}{2} + \sqrt{x^2 - 3x + 2} \right| + C$$

**Örnek 23.46.**

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$x = a \cos^2 u + b \sin^2 u$$

$$dx = (-2a \cos u \cdot \sin u + 2b \sin u \cos u) du$$

$$2 \sin u \cos u (b - a) du$$

$$= (b - a) \sin 2u du, \quad (x - a) = a(\cos^2 u - 1) + b \sin^2 u = (b - a) \sin^2 u$$

$$(b - x) = b(1 - \sin^2 u) - a \cos^2 u = (b - a) \cos^2 u$$

$$\sqrt{(x - a)(b - x)} = (b - a) \sin u \cos u$$

konumuyla,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{\sqrt{(x - a)(b - x)}} dx \\ &= \int \frac{(b - a) \sin 2u}{(b - a) \sin u \cos u} du \\ &= 2 \int du \\ &= 2u + C \end{aligned}$$

olur. Öte yandan

$$\frac{x - a}{b - x} = \frac{b - a}{b - a} \tan^2 u \Rightarrow u = \arctan \sqrt{\frac{x - a}{b - x}}$$

değeri kullanılarak

$$I = 2 \arctan \sqrt{\frac{x - a}{b - x}} + C$$

bulunur.

**Örnek 23.47.**

$$I = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$x = 2 \tan t, \quad dx = 2(\sec^2 t) dt$$

konumuyla,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{(\pi/2)} \frac{1}{\sqrt{4(1 + \tan^2 t)}} (1 + \tan^2 t) 2 dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}}} \frac{2}{\cos^2 t} dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \sec t dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sec t (\sec t + \tan t)}{(\sec t + \tan t)} dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sec t \tan t + \sec^2 t}{\sec t + \tan t} dt \\ &= \ln |\sec t + \tan t|_0^{\pi/2} + C \\ &= \ln(\sqrt{2} + 1) \end{aligned}$$

**Örnek 23.48.**

$$I = \int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 + 3}} dx$$



integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$x = \sqrt{3} \tan t, dx = \sqrt{3} \sec^2 t dt$$

konumuyla,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 + 3}} dx \\ &= \int \frac{\sqrt{3} \sec^2 t}{3 \tan^2 t \sqrt{3} \sec t} dt \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{\cos t}{\sin^2 t} dt \\ &= \frac{1}{3} \int (\sin^2 t) \frac{d(\sin t)}{\sin^2 t} \\ &= -\frac{1}{3} \frac{1}{\sin t} + C \\ &= -\frac{\sqrt{x^2 + 3}}{3x} + C \end{aligned}$$

**Örnek 23.49.**

$$I = \int \frac{1}{x \sqrt{x^2 - 4}} dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$x = \frac{2}{\cos t}$$

konumuyla,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{x \sqrt{x^2 - 4}} dx \\ &= \int \frac{\frac{2 \sin t}{\cos^2 t}}{\frac{2}{\cos t} \cdot \frac{2 \sin t}{\cos t}} dt \\ &= \frac{1}{2} \int dt \\ &= \frac{1}{2} t + C \\ &= \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{2}{x}\right) + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{\sqrt{\pi + 2x}} dx \\ &= \int \frac{udu}{\sqrt{u^2}} \\ &= \int \frac{udu}{u} \quad (u^2 = \pi + 2x, 2udu = 2dx, dx = udu) \\ &= u + C \\ &= \sqrt{\pi + 2x} + C \end{aligned}$$

$$\int (1 - 2x)^9 dx = -\frac{1}{2} \int (1 - 2x)^9 (-2dx) = -\frac{1}{20} (1 - 2x)^{10} + C$$



$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{x}{\sqrt{3x-1}} dx \\
 &= \frac{2}{9} \int \frac{(u^2+1)}{u^2} du \quad (u^2 = 3x-1) \\
 &= \frac{2}{3} \int u du + \frac{2}{9} \int \frac{du}{u} \\
 &= \frac{1}{3} (3x-1) + \ln \sqrt{3x-1} + C
 \end{aligned}$$

**Örnek 23.50.**



$$I = \int (x^2 - 4x + 4)^{-\frac{5}{3}} dx$$

integralini hesaplayınız.

*Çözüm:*

$$(x^2 - 4x + 4) = (x-2)^2, u^3 = x-2, 3u^2 du = dx, (x^2 - 4x + 4)^{-\frac{5}{3}} = (x-2)^{-\frac{10}{3}}$$

konumuyla,

$$\begin{aligned}
 I &= \int (x^2 - 4x + 4)^{-\frac{5}{3}} dx \\
 &= \int \frac{3u^2}{u^{10}} du \\
 &= -\frac{3}{7} u^{-7} \\
 &= -\frac{3}{7} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^7}} + C
 \end{aligned}$$

**Örnek 23.51.**



$$I = \int \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} dx$$

integralini hesaplayınız.

*Çözüm:*  $u^2 = x$  konumuyla,,

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} dx \\
 &= \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \\
 &= \int \arcsin u + C \\
 &= 2 \arcsin \sqrt{x} + C
 \end{aligned}$$

### 23.13 Alıştırmalar

Aşağıdaki integral eşitliklerini sağlayınız.

1.  $\int \frac{dx}{x(\ln x)^2} = -\frac{1}{\ln x} + C$
2.  $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx = u^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}(1+\ln x)^{\frac{3}{2}} + C$
3.  $\int \frac{e^{3x}}{e^{-3x}-1} dx = \frac{1}{3} \ln |e^{3x}-1| + C$
4.  $\int \frac{e^{3x}}{\sqrt{x}(1+e^{-\sqrt{x}})} dx = 2 \int \frac{du}{1+e^{-u}} = 2 \int \frac{e^u du}{1+e^u} = \ln(e^u+1) + C$
5.  $\int \frac{2^x}{4^x+1} dx = \int \frac{1}{\ln 2} \int \frac{u}{\sqrt{u^2+1}} du = \frac{\sinh^{-1}(2^x)}{\ln 2} = \frac{\ln(2^x + \sqrt{4^x+1})}{\ln 2} + C$
6.  $\int \frac{\sinh \sqrt{x} \cdot \cosh \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \sinh^2 \sqrt{x} + C$

### 23.14 İndirgenme Yöntemleri

**İntegral** eylemindeki **indigeme** formülleri yinelge (recurrence) formüllerinin özel halidir. Yinelge, bir eylemin art arda tekrarlanarak en yalın (çözülebilir) biçimine dönüştürülmesidir. Bunu integral için bir örnekle açıklayabiliriz. Örneğin,

**Örnek 23.52.**

$$\int \cos^n x dx \quad (23.59)$$

integralini düşünelim. Bu integrali doğrudan hesaplayamıyoruz. O durumda kuvveti düşürmek için art arda kısmi integrasyonu uyguluyoruz.

$$\begin{aligned} I_n &= \int (\cos x)^n dx \\ &= \int (\cos x)^{n-1} \cdot \cos x dx \\ &= \int (\cos x)^{n-1} \cdot d(\sin x) \end{aligned}$$

Kısmi integrasyon işlemleriyle,

$$\begin{aligned} \int \cos^n x dx &= (\cos x)^{n-1} \cdot \sin x - \int \sin x \cdot d((\cos x)^{n-1}) \\ &= (\cos x)^{n-1} \cdot \sin x - (n-1) \int \sin x \cdot (\cos x)^{n-2} \sin x dx \\ &= (\cos x)^{n-1} \cdot \sin x - (n-1) \int (\cos x)^{n-2} (\sin x)^2 dx \\ &= (\cos x)^{n-1} \cdot \sin x - (n-1) \int (\cos x)^{n-2} (1 - (\cos x)^2) dx \\ &= (\cos x)^{n-1} \cdot \sin x - (n-1) \int (\cos x)^{n-2} dx - (n-1) \int (\cos x)^n dx \\ &= (\cos x)^{n-1} \cdot \sin x - (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n \end{aligned}$$

çıkar. Buradan  $I_n$  çözülürse

$$\begin{aligned} I_n + (n-1) I_n &= (\cos x)^{n-1} \cdot \sin x + (n-1) I_{n-2} \\ n I_n &= (\cos x)^{n-1} \cdot \sin x + (n-1) I_{n-2} \\ I_n &= \frac{1}{n} (\cos x)^{n-1} \cdot \sin x + \frac{n-1}{n} I_{n-2} \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\int (\cos x)^n dx = \frac{1}{n} (\cos x)^{n-1} \cdot \sin x + \frac{n-1}{n} \int (\cos x)^{n-2} dx \quad (23.60)$$

indirgeme formülü bulunur. Benzer şekilde,

$$\int (\sin x)^n dx = -\frac{1}{n} (\sin x)^{n-1} \cdot \cos x + \frac{n-1}{n} \int (\sin x)^{n-2} dx \quad (23.61)$$

**Örnek 23.53.**

$$\int \cos^5 x dx$$

integralini bulmak isteyelim.  $n = 5$  olduğundan

$$n = 5 \Rightarrow I_5 = \int (\cos x)^5 dx = \frac{1}{5} \cos^4 x \sin x + \frac{4}{5} I_3$$

$$n = 3 \Rightarrow I_3 = \frac{1}{3} (\cos x)^2 \cdot \sin x + \frac{2}{3} I_1$$

$$n = 1 \Rightarrow I_1 = \int \cos x dx = \sin x + C_1$$

Şimdi yürünülen yola geri dönülürse,

$$I_1 = \int \cos x dx = \sin x + C_1$$

$$I_3 = \frac{1}{3} (\cos x)^2 \cdot \sin x + \frac{2}{3} \sin x + C_2 \quad (C_2 = \frac{2}{3} C_1)$$

$$I_5 = \frac{1}{5} (\cos x)^4 \cdot \sin x + \frac{4}{5} \left( \frac{1}{3} (\cos x)^2 \cdot \sin x + \frac{2}{3} \sin x \right) + C$$

**Örnek 23.54.**

$$I_n = \int x^n e^{\alpha x} dx \quad (23.62)$$

integralini düşünelim. Bu integrali doğrudan hesaplayamıyoruz.  $x^n$  çarpanının kuvvetini düşürmek için art arda kısmi integrasyonu uyguluyoruz.

$$\begin{aligned} I_n &= \int x^n e^{\alpha x} dx \\ &= \frac{1}{n+1} \int e^{\alpha x} d(x^{n+1}), \quad \left( x^n dx = \frac{d(x^{n+1})}{n+1} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int e^{\alpha x} d(x^{n+1}) &= x^{n+1} e^{\alpha x} - \int x^{n+1} d(e^{\alpha x}) \\ &= x^{n+1} e^{\alpha x} - \alpha \int x^{n+1} e^{\alpha x} dx \end{aligned}$$

$$(n+1)I_n = x^{n+1} e^{\alpha x} - \alpha I_{n+1}$$

$$I_n = \frac{1}{\alpha} (x^n e^{\alpha x} - n I_{n-1})$$

çıkar. Buradan

$$\int x^n e^{\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} \left( x^n e^{\alpha x} - n \int x^{n-1} e^{\alpha x} dx \right) \quad (23.63)$$

indirgeme formülü bulunur.

### 23.15 Bazı İndirgeme Formülleri

$$\begin{aligned}
I_n &= \int \frac{x^n}{\sqrt{ax+b}} dx \\
\Rightarrow I_n &= \frac{2x^n \sqrt{ax+b}}{a(2n+1)} - \frac{2nb}{a(2n+1)} I_{n-1} \\
I_n &= \int \frac{1}{x^n \sqrt{(ax+b)}} dx \\
\Rightarrow I_n &= -\frac{\sqrt{(n-1)bx^{n-1}}}{(n-1)bx^{n-1}} - \frac{a(2n-3)}{2b(n-1)} I_{n-1} \\
I_{n,m} &= \int \frac{dx}{x^m (a^2 - x^2)^n} \\
\Rightarrow a^2 I_{n,m} &= a^2 I_{m,n+1} + I_{m-2,n} \\
I_n &= \int x^n \sin(ax) dx \\
\Rightarrow a^2 I_n &= -ax^n \cos(ax) + nx^{n-1} \sin(ax) - n(n-1) I_{n-2} \\
J_n &= \int x^n \cos(ax) dx \\
\Rightarrow a^2 J_n &= ax^n \sin(ax) + nx^{n-1} \cos(ax) - n(n-1) J_{n-2} \\
I_n &= \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n+1}} \\
\Rightarrow I_n &= \frac{1}{2na^2} \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2} \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}
\end{aligned}$$

**Örnek 23.55.**  $a \neq -1$  ve  $n > 0$  olduğunda

$$I_n = \int x^a (\ln x)^n dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} (\ln x)^n - \frac{n}{a+1} \int x^a (\ln x)^{n-1} dx \quad (23.64)$$

indirgeme formülünü ispatlayınız.

$$u = (\ln x)^n, du = n(\ln x)^{n-1} \frac{1}{x} dx, dv = x^a dx, v = \frac{1}{a+1} x^{a+1}$$

konumuyla,

$$I_n = \frac{1}{a+1} x^{a+1} (\ln x)^n - \frac{n}{a+1} \int x^{a+1} (\ln x)^{n-1} dx \quad \square$$

**Örnek 23.56.**  $a \neq -1$  ve  $n > 0$  olduğunda

$$I_n = \int x^{-1} (\ln x)^n dx = \int (\ln x)^n d(\ln x) = \frac{1}{n+1} (\ln x)^{n+1} + C \quad (23.65)$$

dir.

$$I_n = \int \sin^n(ax) \cos(ax) dx = \frac{\sin^{n+1}(ax)}{(n+1)a} + C \quad (23.66)$$

dir.

$$I_n = \int \cot(ax) dx = \ln |\sin(ax)| + C \quad (23.67)$$

dir.

$$\begin{aligned}
I &= \int \tan^n x dx = \int \tan^{n-2} x (\sec^2 x - 1) dx \\
&= \int \tan^{n-2} x \sec^2 x dx - \int \tan^{n-2} x dx \\
&= \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - \int \tan^{n-2} x dx
\end{aligned}$$

dir.

$$\begin{aligned}
I &= \int \tan(x) dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos x} dx \\
&= - \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} \\
&= -\ln |\cos x| + C
\end{aligned}$$

dir.

$$I = \int \sec(x) dx = \ln |\sec(x) + \tan x| + C$$

dir.

$$I = \int \cos(ax) dx = \frac{1}{a} \int \cos(ax) d(ax) = \frac{1}{a} \sin(ax) + C$$

dir.

### 23.16 Bağlantılı Oranlar

1. Bir parçacık  $2 = x + 2y$  doğrusu boyunca pozitif yönde gidiyor.

- (a)  $x$  koordinatının değişimi saniyede 4 birim ise  $y$  koordinatının değişimi nedir?
- (b)  $y$  koordinatının değişimi saniyede -2 birim ise  $x$  koordinatının değişimi nedir?

Çözüm:

(a):

$$x + 2y = 2 \Rightarrow x' + 2y' = 0 \Rightarrow 4 + 2y' = 0 \Rightarrow y' = -2 \text{ br/sn}$$

olur. (b):

$$x + 2y = 2 \Rightarrow x' + 2(-2) = 0 \Rightarrow x' - 4 = 0 \Rightarrow x' = 4 \text{ br/sn}$$

olur.

2. Bir parçacık  $x^2 + y^2 = 25$  eğrisi boyunca hareket ediyor.  $(3, 4)$  noktasından geçerken  $y$  koordinatı saniyede 2 birim azalıyor.  $x$  koordinatının değişimi nedir?

Çözüm:  $x = 3$  iken  $y = 4$  dür.

$$2xx' + 2yy' = 0 \Rightarrow 3x' + 4(-2) = 0 \Rightarrow x' = \frac{8}{3}$$

olur. Demek ki  $x$  koordinatının değişimi  $\frac{8}{3}$  br/sn dir.

3. Bir kamera bir eşkenar üçgenin oranlarını koruyarak küçültüyor. Belirli bir anda bir kenarın küçülmesi  $k$  cm/sn dir. Üçgenin alanının değişim oranı nedir?

*Çözüm:*

Alan formülünü yazalım. Eşkenar üçgenin bir kenarının uzunluğu  $x$  ise yüksekliği  $h = \sqrt{x^2 - \frac{x^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}x$  olacaktır. Öyleyse alan

$$A = \frac{1}{2}hx = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$$

$$A' = \frac{\sqrt{3}}{4}2xx' = \frac{\sqrt{3}}{2}xk \text{ cm}^2/\text{dk}$$

olur.

4. Özel Görelilik kuramına dingin haldeyken kütlesi  $m$  olan bir cismin hızı  $v$  ise, ışık hızı  $c$  olmak üzere, cismin uzaydaki hızı

$$m \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)$$

dir. Cismin hızı ışık hızının yarısına eşit olduğunda, hızının değişimi saniyede  $0.01c$  ise kütesinin değişimi nedir? [Görelilik kuramına göre cismin kütlesi hızına bağlı olarak değişir.]

*Çözüm:* Cismin hareket halindeki kütesine  $M$  diyelim.

$$M = m \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$M' = m \frac{vv'}{c^2} \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{3}{2}}$$

olur.

5. Kenar uzunlukları  $x$  ve  $y$  olan dikdörtgenin kenarları, sırasıyla,  $u$  ve  $v$  oranında değişiyor. Dikdörtgenin alanının değişim oranını bulunuz.

*Çözüm:*

Dikdörtgenin alanı  $A = xy$  dir.  $t$  anındaki değişim

$$\frac{dA}{dt} = x'y + xy' = uy + vx$$

olur.

6. İki bisiklet yarışçısından birisi (G) güneyden kuzeye doğru bitim noktasına (finish F), ötekisi (D) doğudan batıya doğru aynı bitim noktasına (F) doğru yol alıyorlar. G yarışçısının hızı 13 km/saat'dir. İki yarışçının bitim noktasına uzaklıkları eşit olduğu anda, aralarındaki uzaklık 16 km.dir. Aralarındaki uzaklık 17km/saat hızla azalıyor. Yarışı hangisi kazanacaktır?

*Çözüm:* G yarışçısının bitim noktasına uzaklığı  $x$ , D yarışçısının  $y$  olsun. Aralarındaki uzaklık bir dik üçgenin hipotenüsüdür ve  $d^2 = x^2 + y^2$  dir. Uzaklığın türevini alırsak,  $dd' = xx' + yy'$  dür.  $x = y$  olduğunda  $d = 16$  veriliyor. O anda uzaklık formülünden  $x = y = \frac{16}{\sqrt{2}}$  ve türev formülünden  $y' = 13 - 17\sqrt{2} \approx -11 \text{ km/saat}$  bulunur.  $y' < x'$  olur. O halde G yarışçısı daha hızlıdır ve yarışı kazanacaktır.

# *Index*

$e^x$ , [479](#)

üstel fonksiyon, [479](#)

a tabanlı logaritma, [481](#)