Diferansiyel Denklemler

PROF.DR. METİN YAMAN

BÖLÜM 4.2

DEĞİŞKEN KATSAYILI LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Tanım 4.2.1

$$a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\dots\dots+a_1(x)y' + a_0(x)y = Q(x)$$

denklemine *n*. mertebeden değişken katsayılı lineer denklem denir.

Bu bölümde mertebe düşürme yönteminden ve bir özel denklem olan Euler denkleminden bahsedeceğiz.

$x^2y'' - 2xy' + 2y = e^x$ Euler tipi lineer denklemdir.

$y'' - 5xy' + 2y = e^x$ değişken katsayılı lineer denklemdir.

Mertebe Düşürme Yöntemi

n. mertebeden lineer denklemin bir özel çözümü verildiğinde uygun dönüşüm ile denklemin (n-1). mertebeye düşürülmesi esasına dayanan bir yöntemdir.

Teorem 4.2.1

$$a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\ldots\ldots+a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \qquad (4.2.1)$$

homojen lineer denkleminin bir özel çözümü $y_1 = y_1(x)$ verildiğinde

$$y = uy_1$$

dönüşümü yapılırsa (4.2.1)denklemi (n-1). mertebeden bir denkleme dönüşür.

İspat. Kolaylık olsun diye 2.mertebe denklem üzerinde ispatı yapalım.

$$a_2(x)y''+a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \qquad (4.2.2)$$

homojen denklemin bir özel çözümü $y_1 = y_1(x)$ verilsin. Yani

$$a_2(x)y_1''+a_1(x)y_1' + a_0(x)y_1 = 0$$

sağlanır. $y = uy_1$, $y' = u'y_1 + uy_1'$, $y'' = u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1''$ türevleri (4.2.2) denkleminde yazılırsa

$$a_2(x)[u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'']+a_1(x)[u'y_1 + uy_1'] + a_0(x)uy_1 = 0$$

veya

$$[a_2 y_1'' + a_1 y_1' + a_0 y_1]u + [2a_2 y_1' + a_1 y_1]u' + a_2 y_1 u'' = 0$$

bulunur. Soldaki ilk terim sıfır olacağından

$$a_2 y_1 u'' + (2a_2 y_1' + a_1 y_1)\, u' = 0$$

elde edilir. Üsteki denklemde $u' = v$, $u'' = v'$ dönüşümleri yapılırsa

$$a_2 y_1 v' + (2a_2 y_1' + a_1 y_1)\, v = 0$$

1. mertebeden lineer denklem bulunur.

Örnek 4.2.1 $(1+x^2)y''-2xy'+2y=0$ denkleminin bir özel çözümü $y_1=x$ ise genel çözümü mertebe düşürerek bulunuz.

Çözüm. $y=ux, y'=u'x+u\ , y''=u''x+2u'$ türevleri denklemde yerine yazılırsa

$$(1+x^2)[u''x+2u']-2x\,[u'x+u]+2ux=0$$

veya

$$x(1+x^2)u''+2u'=0$$

elde edilir. $u'=v, u''=v'$ dönüşümü ile $x(1+x^2)v'+2v=0$ lineer denklemi veya

$$\frac{dv}{v} = -\frac{2dx}{x(1+x^2)}$$

değişkenlerine ayrılabilir denklem elde edilir. İntegral alınarak

$$\ln v = -\int \left(\frac{2}{x} - \frac{2x}{(1+x^2)}\right) dx = -2lnx + ln(1 + x^2) + lnc_1$$

veya

$$v = \frac{c_1(1+x^2)}{x^2} = c_1\left(\frac{1}{x^2} + 1\right)$$

elde edilir.

$$v = c_1\left(\frac{1}{x^2}+1\right) = u' \text{ eşitliğinden}$$

$$u = c_1\int\left(\frac{1}{x^2}+1\right)dx = c_1\left(\frac{-1}{x}+x\right)+c_2$$

bulunur.

Genel çözüm $y = ux$ şeklinde olmalı. Yani

$$y = ux = \left(c_1\left(\frac{-1+x^2}{x}\right)+c_2\right)x \text{ veya}$$

$$y = c_1(x^2-1)+c_2x$$

bulunur.

Örnek 4.2.2 $xy'' - (x^2+1)y' = x^3$ denkleminin genel çözümünü mertebe düşürerek bulunuz.

Çözüm. $y' = u$ dersek $y'' = u'$ olur. Buna göre üsteki denklem

$$xu' - (x^2+1)u = x^3$$

veya

$$u' - \left(\frac{x^2+1}{x}\right)u = x^2$$

şeklide yazılır. Bu 1.mertebeden lineer denklemdir.

$$\alpha(x) = e^{-\int\left(x+\frac{1}{x}\right)dx} = \frac{1}{xe^{\frac{x^2}{2}}}$$

bu denklemin integral çarpanı olmak üzere lineer denklemin çözümü

$$u(x) = xe^{\frac{x^2}{2}}\left(\int\left(\frac{e^{\frac{-x^2}{2}}}{x}\right)x^2dx + c_1\right) = xe^{\frac{x^2}{2}}\left(\int xe^{\frac{-x^2}{2}}dx + c_1\right)$$

veya

$$u(x) = -x + c_1xe^{\frac{x^2}{2}}$$

şeklinde bulunur.

Genel çözüm;

$$u = y' = -x + c_1 x e^{\frac{x^2}{2}}$$

eşitliğinden

$$y = \int \left(-x + c_1 x e^{\frac{x^2}{2}}\right) dx = -\frac{x^2}{2} + c_1 e^{\frac{x^2}{2}} + c_2$$

veya

$$y = c_1 e^{\frac{x^2}{2}} + c_2 - \frac{x^2}{2}$$

şeklinde bulunur.

PROBLEMLER

1. $xy''+2y'=2x$ denkleminin homojen kısmının bir özel çözümü $y=x^{-1}$ ise genel çözümü bulunuz.

C: $y=c_1+c_2x^{-1}+\frac{1}{3}x^2$

2. $xy'''-y''=x^2$ denkleminin $y''=u$ dönüşümü ile mertebesini düşürerek genel çözümünü bulunuz

C: $y=c_1+c_2x+c_3\frac{x^3}{6}+\frac{1}{12}x^4$

3. $(x-1)y''-xy'+y=0$ denkleminin bir özel çözümü $y=e^x$ ise genel çözümü bulunuz.

C: $y=c_1e^x+c_2x$

Euler Diferansiyel Denklemi

Euler denklemi değişken katsayılı lineer denklem olup Euler dönüşümü adını vereceğimiz bir dönüşüm ile sabit katsayılı lineer denkleme dönüşeceğini göreceğiz.

Tanım 4.2.2

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots.. + a_1 x y' + a_0 y = Q(x) \qquad (4.2.3)$$

şeklinde yazılabilen lineer denkleme Euler diferansiyel denklemi denir.

Örnek 4.2.3

$$x^2y'' + 2xy' + 2y = lnx$$

$$xy'' - \frac{1}{x}y = lnx$$

$$x^3y''' - 4xy' + 2y = 0$$

denklemleri Euler diferansiyel denklemidir.

(4.2.3) denkleminin çözümü için $x = e^t$ dönüşümü kullanılır. Bu dönüşüme Euler dönüşümü denir.

Uyarı: Bu dönüşüm öncekilerden farklıdır. Çünkü burada bağımsız değişken üzerinde dönüşüm yapılmaktadır. Öncekilerde bağımlı değişken üzerinde dönüşüm yapılıyordu.

Teorem 4.2.2

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots.. + a_1 x y' + a_0 y = Q(x) \qquad (4.2.4)$$

denklemi $x = e^t$ Euler dönüşümü kullanılarak

$$b_n y^{(n)} + b_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots.. + b_1 y' + b_0 y = \bar{Q}(t) \qquad (4.2.5)$$

sabit katsayılı lineer denkleme dönüşür.

İspat. $x = e^t$ veya $t = lnx$ dönüşümü altında

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt} \Rightarrow \quad x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \ ,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right) = \frac{-1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)$$

$$= \frac{-1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)\frac{dt}{dx} = \frac{-1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$$

$$= \frac{1}{x^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt} - 1\right)y$$

yazılır. Buradan $x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt} - 1\right)y$

elde edilir. Yani $x^2y''(x) = y''(t) - y'(t)$ yazılır.

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)\right)$$

$$= \frac{-2}{x^3}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) + \frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$$

$$= \frac{-2}{x^3}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) + \frac{1}{x^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)\frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{-2}{x^3}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) + \frac{1}{x^3}\left(\frac{d^3y}{dt^3} - \frac{d^2y}{dt^2}\right)$$

$$= \frac{1}{x^3}\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1}{x^3}\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right)$$

$$= \frac{1}{x^3}\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt} - 1\right)\left(\frac{d}{dt} - 2\right)y$$ yazılır. Buradan

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt} - 1\right)\left(\frac{d}{dt} - 2\right)y$$

elde edilir. Yani $x^3y''(x) = y'''(t) - 3y''(t) + 2y'(t)$ yazılır.
Benzer şekilde

$$x^n\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt} - 1\right)\left(\frac{dy}{dt} - 2\right)\dots\left(\frac{dy}{dt} - (n-1)\right)y$$

eşitlikleri bulunur.

Bulunan türevler (4.2.4) denkleminde yazılırsa (4.2.5) sabit katsayılı denklem elde edilir.

Örnek 4.2.4 $x^2y'' + 4xy' + 2y = lnx$ Euler diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulalım.

Çözüm. $x = e^t$ Euler dönüşümü kullanacağız.

$xy'(x) = y'(t)$ ve $x^2y''(x) = y''(t) - y'(t)$ ifadelerini denklemde yerine yazarsak

$$y''(t) - y'(t) + 4y'(t) + 2y(t) = \ln(e^t) \text{ veya}$$

$$y'' + 3y' + 2y = t$$

sabit katsayılı lineer denklem bulunur.

Şimdi bu denklemi çözelim.

$$y'' + 3y' + 2y = t$$

denkleminin genel çözümü $y_g(t) = y_h(t) + y_ö(t)$ şeklinde olup homojen çözüm;
(karakteristik denklem ; $k^2 + 3k + 2 = 0$, kökler; $k = -1, k = -2$)

$$y_h(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}$$

şeklindedir. Sağ taraf için özel çözüm $y_ö(t) = At + B$ şeklinde aranır.
$A = 1/2$, $B = -3/4$ bulunur.

Genel çözüm; $y_g(t) = y_h(t) + y_ö(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{2t} + \frac{1}{2} t - \frac{3}{4}$ veya

$y_g(x) = c_1 x + c_2 x^2 + \frac{1}{2} lnx - \frac{3}{4}$ şeklinde yazılır.

Örnek 4.2.5 $xy'' + 3y' + \frac{1}{x}y = lnx$ denkleminin genel çözümünü bulalım.

Çözüm. Denklemi *x* ile çarparsak Euler denklemi formunda yazmış oluruz. Yani; $x^2y'' + 3xy' + y = xlnx$.

$xy'(x) = y'(t)$ ve $x^2y''(x) = y''(t) - y'(t)$

ifadelerini denklemde yerine yazarsak

$$y''(t) - y'(t) + 3y'(t) + y(t) = te^t \text{ veya}$$

$$y'' + 2y' + y = te^t$$

sabit katsayılı lineer denklem bulunur.

denkleminin genel çözümü $y_g(t) = y_h(t) + y_ö(t)$ şeklinde olup homojen çözüm

(karakteristik denklem ; $k^2 + 2k + 1 = 0$, kökler; $k = -1, k = -1$)

$$y_h(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-t}$$

şeklindedir. Sağ taraf için özel çözüm $y_ö(t) = (At + B)e^t$ şeklinde aranır. $A = 1/4$, $B = -1/4$ bulunur.

Genel çözüm; $y_g(t) = y_h(t) + y_ö(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-t} + \frac{1}{4}t - \frac{1}{4}$ veya

$$y_g(x) = c_1 x^{-1} + c_2 x^{-1} lnx + \frac{1}{4} lnx - \frac{1}{4}$$ şeklinde yazılır.

Uyarı 4.2.1

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots . + a_1 x y' + a_0 y = 0 \qquad (4.2.6)$$

homojen Euler denklemi $y = x^k$ (k sabit) dönüşümü kullanılarak da çözülebilir.

İspat.

$$y' = kx^{k-1},\ y'' = k(k-1)x^{k-2},\ \ldots,$$
$$y^{(n)} = k(k-1)\ldots(k-(n-1))x^{k-n}$$

türevleri (4.2.5) denkleminde yerine yazılırsa

$$\{a_n[k(k-1)\ldots(k-(n-1)] + \ldots . + a_1 k + a_0\}x^k = 0$$

eşitliği elde edilir. $x \neq 0$ şartı altında

$$a_n[k(k-1)\dots(k-(n-1)]+\dots\dots+a_1k+a_0=0 \quad (4.2.7)$$

denklemi bulunur. Bu (4.2.7) denklemi n. dereceden cebirsel bir denklem olup (4.2.6) denkleminin karakteristik denklemi adını alır.

(4.2.7) denkleminin reel ve farklı kökleri $k_1, k_2, \dots, k_n$ ise her köke karşılık $y_i = x^{k_i}$, $(i = 1,2,\dots,n)$ lineer bağımsız özel çözümleri bulunur. Genel çözüm

$$y_g = c_1x^{k_1} + c_2x^{k_n} + \dots + c_nx^{k_n}$$

şeklinde yazılır.

Köklerden *m* (*m*<*n*) adedi katlı kök ise lineer bağımsız çözüm kümesi

$\{x^{k_m}, x^{k_m} lnx, x^{k_m}(lnx)^2 \ldots, x^{k_m}(lnx)^{m-1}\}$ olup genel çözüm

$y_g = (c_1 + c_2 lnx + \cdots + c_m (lnx)^{m-1})x^{k_m} + c_{m+1}x^{k_{m+1}} + \cdots + c_n x^{k_n}$

şeklinde yazılır.

Örnek 4.2.6 $x^2y'' + 4xy' + 2y = 0$ Euler diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulalım.

Çözüm. $y = x^k, xy' = kx^k, x^2y'' = k(k-1)x^k$ ifadelerini denklemde yerine yazarsak
$(k(k-1) + 4k + 2)x^k = 0$ denklemi bulunur.

Karakteristik denklem $k^2 + 3k + 2 = 0$, kökler $k_1 = -1, k_2 = -2$ dir.

Genel çözüm

$$y_g = c_1x^{-1} + c_2x^{-2}$$

şeklinde yazılır.

Örnek 4.2.7 $x^3y''' - x^2y'' + xy' = 0$ Euler diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulalım.

Çözüm. $y = x^k$, $xy' = kx^k$, $x^2y'' = k(k-1)x^k$,
$x^3y''' = k(k-1)(k-2)x^k$ ifadelerini denklemde yerine yazarsak
$(k(k-1)(k-2) - k(k-1) + k)x^k = 0$ denklemi bulunur.

Karakteristik denklem $k^3 - 4k^2 + 4k = 0$ şeklinde olup kökler
$k_1 = 0, k_2 = 2, k_3 = 2$ bulunur.

Genel çözüm $y_g = c_1x^0 + c_1x^2 + c_2x^2lnx$ veya

$y_g = c_1 + c_2x^2 + c_3x^2lnx$ şeklinde yazılır.

PROBLEMLER

1. $xy''+2y'=2x$ denkleminin genel çözümü bulunuz.

   C: $y = c_1 + c_2x^{-1} + \frac{1}{3}x^2$

2. $x^2y'' - xy' + 5y = x^2$ denkleminin genel çözümünü bulunuz

   C: $y = x(c_1\cos(lnx) + c_2\sin(lnx)) + \frac{x^2}{5}$

3. $x^3y''' - x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$ denkleminin genel çözümü bulunuz.

   C: $y = x(c_1 + c_2 lnx) + c_3x^2$

4. $x^2y'' - xy' + 4y = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz

   C: $y = x\left(c_1\cos(\sqrt{3}lnx) + c_2\sin(\sqrt{3}lnx)\right)$

Aşağıda verilen başlangıç değer problemlerini çözünüz.

5. $xy''+2y'=x^3\ ,\ y(1)=\frac{1}{20},\ y'(1)=\frac{2}{3}$

C: $y=\frac{1}{20}x^4-\frac{1}{5}x^{-1}+\frac{1}{5}$

6. $x^2y''-4xy'+6y=0\ ,\ y(2)=0,\ y'(2)=4$

C: $y=-2x^2+x^3$

7. $x^2y''-3xy'+3y=x^3\ ,\ y(1)=0,\ y'(1)=1$

C: $y=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{4}x^3 ln|x|$