大学物理(1)

云南大学

第 4 章

功和能

任课教师：张艳

功和能的含义

(1) 作功会使物体具有的能量发生改变，功是**过程量**。

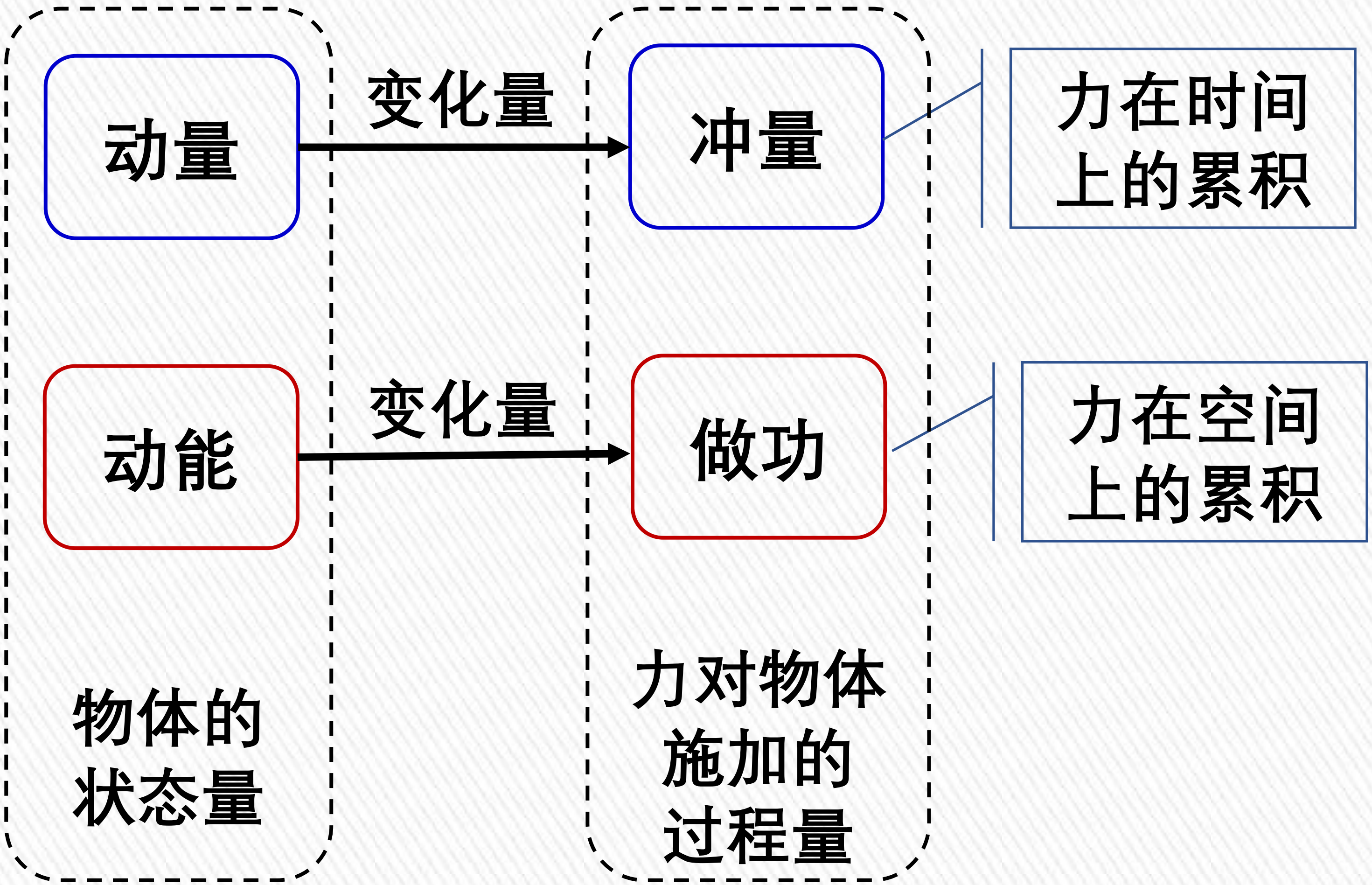
(2) 能是由物体的运动状态决定的物理量，能是**状态量**。

功

投标枪的运动员，人消耗化学能对标枪做功，使标枪获得动能。

能

一块静止的铀235，宏观上似乎不具备能量，但微观上蕴含着巨大的能量

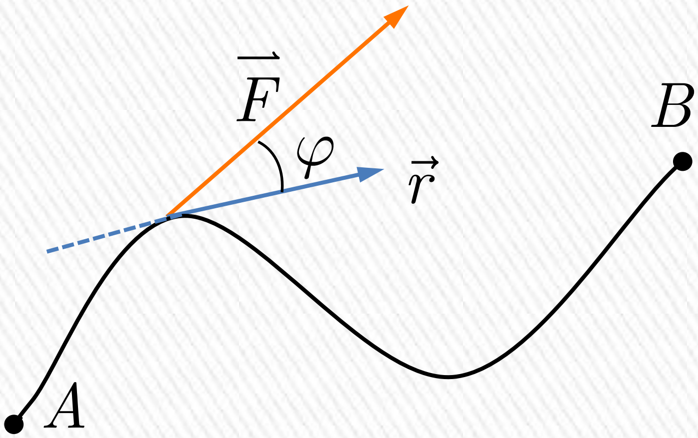

动量
变化量
冲量
力在时间上的累积
动能
变化量
做功
力在空间上的累积
物体的状态量
力对物体施加的过程量

4.1 功

» 功的定义：力和位移的标量积

微分形式：

$$\mathrm{d}A = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = F \cdot \mathrm{d}r \cdot \cos\varphi$$



积分形式：

$$A_{AB} = \int_{L\,(A)}^{(B)} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{L\,(A)}^{(B)} F\cos\varphi \mathrm{d}r$$

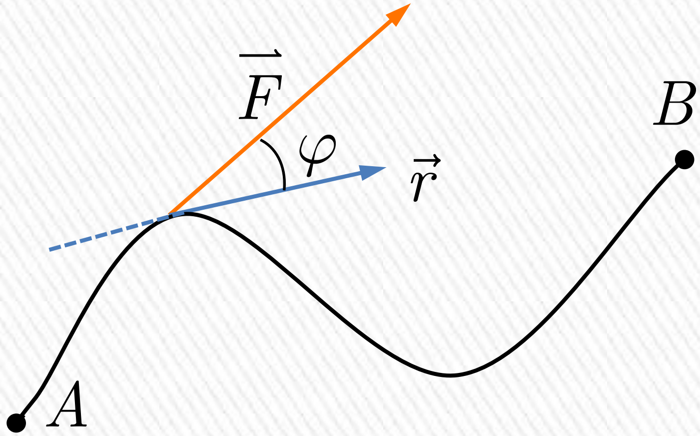
功在 SI 单位制中的单位为：焦耳(J = N·m)。

4.1 功

» 功的定义：力和位移的标量积

$$A_{AB} = \int_{L\,(A)}^{(B)} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$= \int_{L\,(A)}^{(B)} F\cos\varphi \mathrm{d}r$$

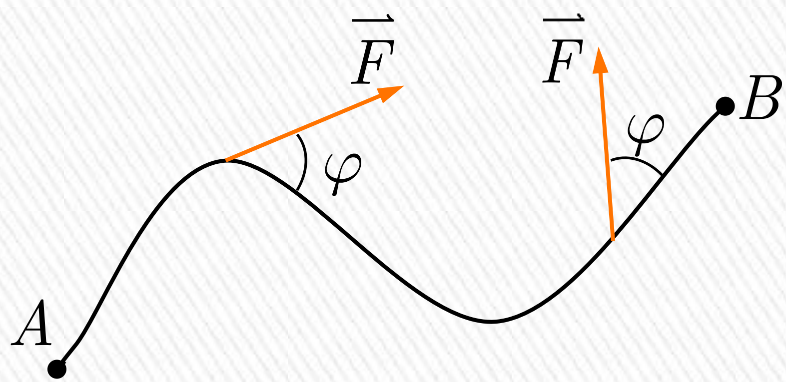


» **特例**(**恒力做功**)：当物体运动过程中，做功的力恒定，力与运动方向的夹角始终保持不变时，不管运动轨道是直线还是曲线，上面这个积分都可简化为力和路程的乘积：(**P111 例4.1** 和 **例4.2**)

$$A_{AB} = \int_{L\,(A)}^{(B)} F\cos\varphi \mathrm{d}r$$

$$= F\cos\varphi \int_{L\,(A)}^{(B)} \mathrm{d}r$$

$$= F\cos\varphi S_{AB}$$



4.1 功

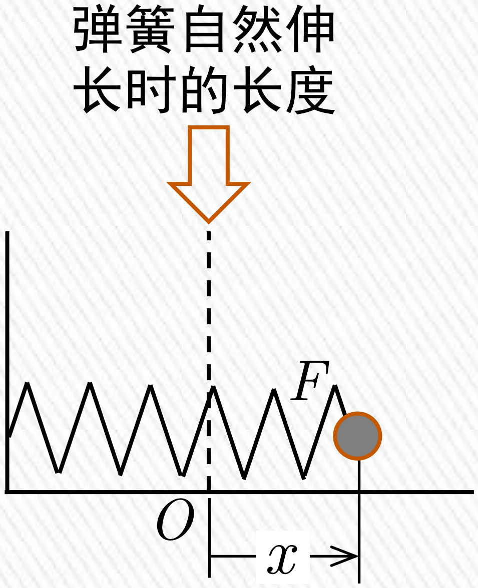
P112 例4.4：弹簧的弹力做功：有一水平放置的弹簧，一端固定，另一端系一个小球，求弹簧的伸长量从 x_A 变化到 x_B 的过程中，弹力对小球做的功。弹簧的劲度系数为 k 。

解：小球在任一位置 x 时，弹力为：$f=-kx$

小球从 A 移动到 B 的过程中，弹力做功为：

$$A=\int_{(A)}^{(B)}\vec{f}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_{x_A}^{x_B}(-kx)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}kx_A^2-\frac{1}{2}kx_B^2$$



如果 x_A 就是平衡位置，则：

$$A=-\frac{1}{2}kx^2$$

4.1 功

- 有一些力，它们**所做的功只取决于力对物体（质点）做功初始和结束的位置，与运动轨道无关**，这样的力称为**保守力**。
- 比如重力、库仑力、弹簧的弹力等。
- 如果这种力的作用范围分布在一个空间区域，则把这个空间称为保守力场。比如重力场、静电场等。

$$A_{\text{conservative}} = \oint_L \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$$

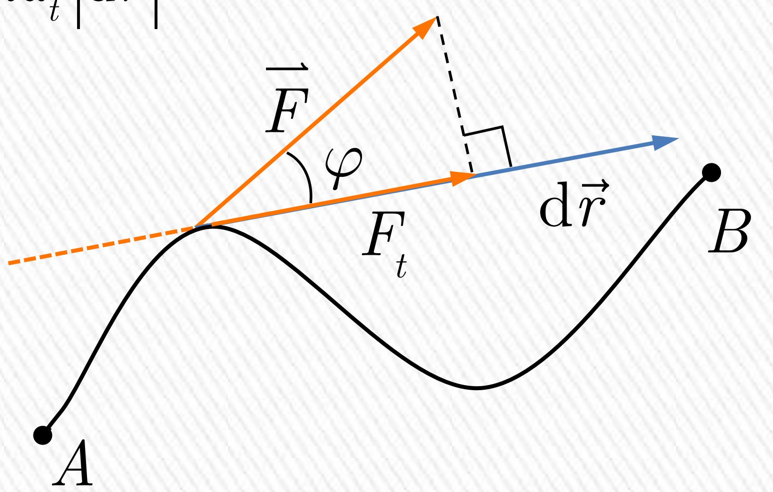
- 另一些力，它们**所做的功与路径有关**，这样的力称为**非保守力**。
- 比如摩擦力、非弹性碰撞中的冲力、爆炸的冲力等。

$$A_{\text{nonconservative}} = \oint_L \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \neq 0$$

4.2 动能定理

» **单个质点**的动能定理，从牛顿第二定律出发：

$$\mathrm{d}A = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = F\cos\varphi\left|\mathrm{d}\vec{r}\right| = F_t\left|\mathrm{d}\vec{r}\right| = ma_t\left|\mathrm{d}\vec{r}\right|$$



$$\because\ \begin{cases} a_t = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \\ \left|\mathrm{d}\vec{r}\right| = v\mathrm{d}t \end{cases} \Rightarrow\ a_t\left|\mathrm{d}\vec{r}\right| = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}v\mathrm{d}t$$

$$\therefore\ \mathrm{d}A = mv\mathrm{d}v = \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \mathrm{d}E_k$$

积分得：$\displaystyle\int_{(A)}^{(B)}\mathrm{d}A = \int_{v_A}^{v_B}\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \int_{E_{K_A}}^{E_{K_B}}\mathrm{d}E_k$

即：$\displaystyle A_{AB} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = E_{kB} - E_{kA}$

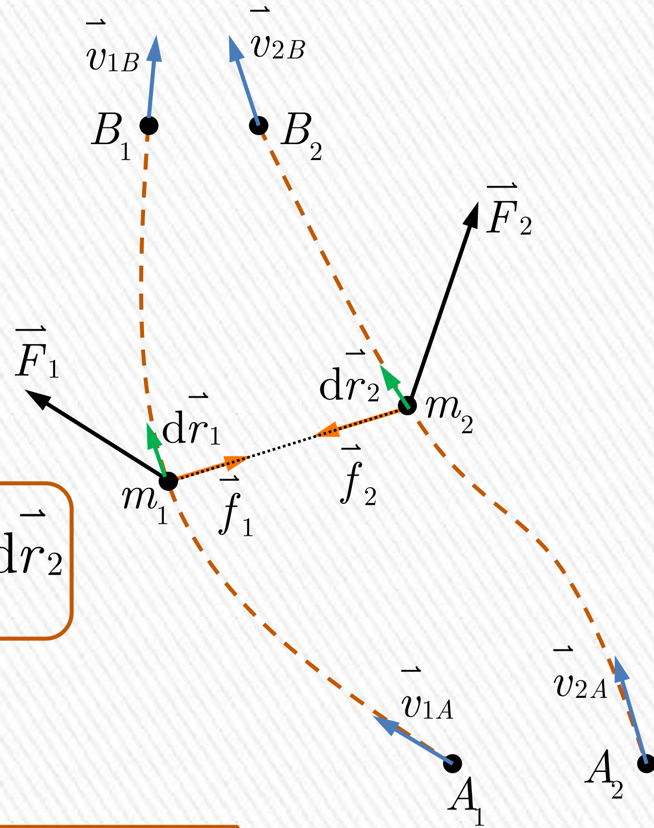
合外力对物体做功会改变物体的动能，所做功的大小等于物体动能的变化量。

4.2 动能定理

» 对于由**多个质点组成的质点系**，我们首先选取其中的两个质点来研究，其结论可以直接推广到多个质点组成的质点系。

» 根据质点的动能定理，合外力对两个质点做的功分别为：

$$\begin{cases}\int_{A_1}^{B_1} \vec{F}_1+\vec{f}_1 \cdot d\vec{r}_1=\frac{1}{2}m_1v_{1B}^2-\frac{1}{2}m_1v_{1A}^2\\ \int_{A_2}^{B_2} \vec{F}_2+\vec{f}_2 \cdot d\vec{r}_2=\frac{1}{2}m_2v_{2B}^2-\frac{1}{2}m_2v_{2A}^2\end{cases}$$



» 两式相加：

$$\boxed{\int_{A_1}^{B_1}\vec{F}_1\cdot d\vec{r}_1+\int_{A_2}^{B_2}\vec{F}_2\cdot d\vec{r}_2}+\boxed{\int_{A_1}^{B_1}\vec{f}_1\cdot d\vec{r}_1+\int_{A_2}^{B_2}\vec{f}_2\cdot d\vec{r}_2}$$

$$=\frac{1}{2}m_1v_{1B}^2+\frac{1}{2}m_2v_{2B}^2-\left(\frac{1}{2}m_1v_{1A}^2+\frac{1}{2}m_2v_{2A}^2\right)$$

» 即： $A_{\text{ex}}+A_{\text{in}}=E_{kB}-E_{kA}$

内力、外力都会改变质点系的总动能。

4.3 势能

- **保守力**对物体的做功多少只取决于运动始末位置。
- 因此，可以引入一个只与位置相关的量来描述物体在两个位置之间运动时，**保守力**做功引起的动能改变。
- 例如，在地球表面不太高的范围内，物体受到地球的引力作用近似在各个高度都相等，即 mg。因此，我们定义重力势能：

$$E_p \equiv \int_0^h mg\,\mathrm{d}s = mgh$$

- 物体在重力场中从一个高度 h_A 运动到另一个高度 h_B，重力所做的功：

$$A_g = -\Delta E_p = mgh_A - mgh_B$$

重要：只有保守力场才有势能的概念！

4.3 势能

» 此外，在使用重力势能概念时还应该注意以下四点：

» 1. 重力势能必然是相对于某一个参考高度而言的，参考高度的选取可以是任意的，在参考高度上，物体的重力势能为零。

» 2. 高度从参考高度算起，向上为正，向下为负。

» 3. 重力势能属于地球和物体组成的系统，但通常的物体相对地球来说质量很小，因此可以忽略物体对地球的影响而只考虑地球对物体的影响。

» 4. 重力势能中的高度是相对参考高度而言的，因此，重力势能的数值与参考系无关。

4.3 势能

» 弹簧的弹力也是保守力，因此，也可以在处理弹簧及类似问题时引入弹性势能的概念。

» 定义弹性势能：

$$E_p \equiv \int_0^x kx\mathrm{d}x = \frac{1}{2}kx^2$$

» 当弹簧推动质量为m的物体从x_A运动到x_B位置时，弹力做的功为：

$$A_{ela} = -\Delta E_p = \frac{1}{2}k \;\; x_A^2 - x_B^2$$

- 弹簧的势能“零点”对应弹簧自然伸长时的位置，即弹簧未经压缩和拉伸时的长度。
- 不管拉伸和压缩弹簧都会使系统的势能增加。
- 由于弹簧的势能只取决于运动始末相对位置，因此，它的数值也与参照系无关。

4.3 势能

» 势能的一般性质：

> 1. 势能具有能量的量纲和单位。
> 2. 只有保守力才存在势能的概念，保守力对外做功会造成势能减少，即：

$$A_{\text{con.}} = -\Delta E_p = E_{pA} - E_{pB}$$

> 3. 计算势能的具体数值时，必须选取零势能参考点。
> **4. 势能只有放在两个或两个以上有保守力相互作用的物体（质点）构成的体系中时才有意义，即势能属于系统整体，而不是单独的某个物体（质点）**。
> 5. 系统的势能与所选取的参照系无关。

4.4 引力势能

» 如果将重力势能推广到其它存在万有引力相互作用的系统中，就是**引力势能**。

» 两个质量分别为 m_1 和 m_2 的物体之间的引力为：

$$f = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$$

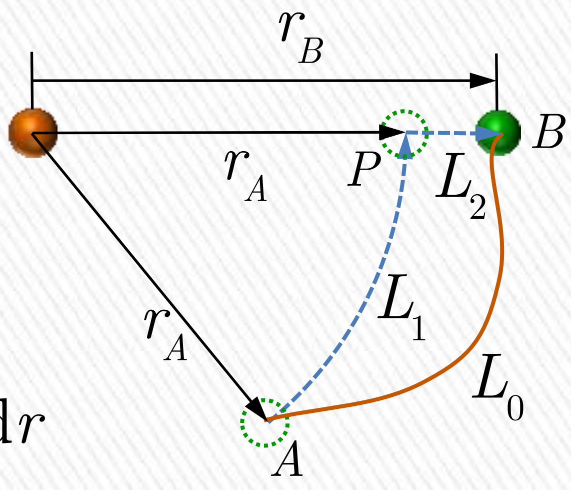
» 万有引力是保守力，因此，物体(质点)在引力场中运动时，引力所做的功与物体(质点)的运动路径无关，只与运动始末位置有关。

4.4 引力势能

» 万有引力是保守力，因此，物体(质点)在引力场中运动时，引力所做的功与物体(质点)的运动路径无关，只与运动始末位置有关。

» 因此，在处理这类问题时，我们就可以选择容易处理的路径来计算力所做的功。

$$A_{AB}=\int_{L_0 A}^{B}\vec{f}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_{L_1 A}^{P}\vec{f}\cdot\mathrm{d}\vec{r}+\int_{L_2 P}^{B}\vec{f}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$



在L_1段，L_1处处垂直于$\mathrm{d}\vec{r}$，

所以在L_1段$\vec{f}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=0$。

$$A_{AB}=\int_{L_2 P}^{B}\vec{f}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_{r_A}^{r_B}-\frac{Gm_1m_2}{r^2}\vec{e}_r\cdot\vec{e}_r\mathrm{d}r$$

$$=\frac{Gm_1m_2}{r_B}-\frac{Gm_1m_2}{r_A}$$

4.4 引力势能

$$A_{AB}=\frac{Gm_1m_2}{r_B}-\frac{Gm_1m_2}{r_A}=-\Delta E_p=E_{pA}-E_{pB}$$

» 从势能的定义出发，通过比较上面的结果和势能的定义可以发现，引力势能的定义应为：

$$E_p=-\frac{Gm_1m_2}{r}$$

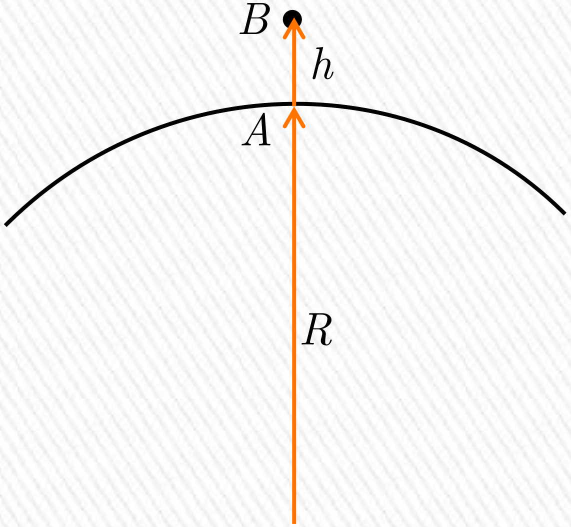
» 零势点为无穷远处。

4.4 引力势能

» 现在考察地球表面距离地表 h 的一个质点的重力势能。

» 按定义，质点的势能应等于把物体从地表移动到 h 高度重力所做的功的负值。

$$\Delta E_p = E_{pB} - E_{pA} = -A_{AB} = \frac{GMm}{r_A} - \frac{GMm}{r_B}$$



» 选取地表作为零势点，即 $E_{pA} = 0$：

$$E_{pB} = \frac{GMm}{R} - \frac{GMm}{R+h} = GMm\frac{h}{R\ \ R+h}$$

$$\xrightarrow{R\gg h} \approx m\frac{GM}{R^2}h = mgh$$

4.5 由势能求保守力

» 我们前面的分析是由保守力推导出势能表达式，但有的时候，力不容易直接测量得到，但保守力的势场却较容易通过实验观测而获得。

» 因此，我们需要了解从势场求解保守力的方法。

» **重要**：**保守力等于势场的梯度的负值**：

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{k}\right) = -\nabla E_p$$

4.6 机械能守恒定律

» 从质点系的动能定理 $A_{\text{ex}}+A_{\text{in}}=E_{\text{k}B}-E_{\text{k}A}$ 可知，所有外力和内力对质点系做功的总和等于**系统动能**的增量。

而$A_{\text{in}}=A_{\text{in,cons.}}+A_{\text{in,n-cons.}}$

$$\therefore A_{\text{ex}}+A_{\text{in,cons.}}+A_{\text{in,n-cons.}}=E_{\text{k}B}-E_{\text{k}A}$$

系统内保守力做功$A_{\text{in,cons.}}=-\Delta E_{\text{p}}=E_{\text{p}A}-E_{\text{p}B}$

$$\therefore A_{\text{ex}}+E_{\text{p}A}-E_{\text{p}B}+A_{\text{in,n-cons.}}=E_{\text{k}B}-E_{\text{k}A}$$

$$\Rightarrow A_{\text{ex}}+A_{\text{in,n-cons.}}=E_{\text{k}B}+E_{\text{p}B}-\ E_{\text{k}A}+E_{\text{p}A}$$

系统机械能为动能和势能的和，即：

$$E\equiv E_{\text{k}}+E_{\text{p}}$$

$$\Rightarrow A_{\text{ex}}+A_{\text{in,n-cons.}}=E_{B}-E_{A}$$

系统的机械能的增量等于外力与系统内非保守力做功的总和。

推论：保守内力做功不改变系统的机械能。

4.6 机械能守恒定律

» 对于没有非保守力的系统，非保守力做功自然为零，则机械能守恒定律简化为：

$$A_{\mathrm{ex}} = E_B - E_A$$

保守系统的机械能守恒定律：

在保守系统中，所有外力做的功等于系统的机械能的增量。

» 如果一个保守系统不受外力作用，也不和外界交换物质，则机械能守恒定律进一步简化为：

$$E_A = E_B$$

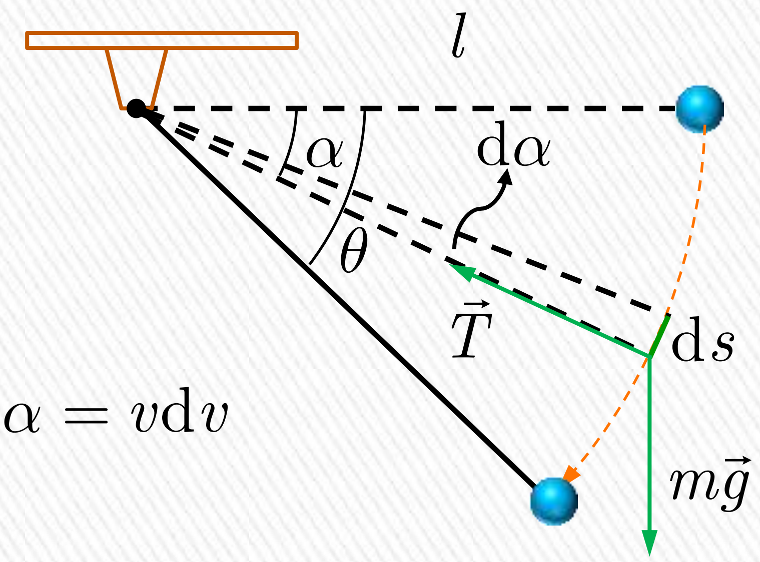
封闭保守系统的机械能守恒定律：

在封闭保守系统中，系统的机械能保持不变。

4.6 机械能守恒定律

P54例2.3，P114例4.5，P133 例4.9：质量为 m 的珠子系在细线的一端，线的另一端固定，线长 l。先拉动珠子使细线水平静止，然后松手使珠子下落。求细线下摆至 θ 角时，珠子的速率和细线的张力。

解法一(动力学方法)：



对珠子进行切向受力分析：

$$mg\cos\alpha = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \Rightarrow g\cos\alpha = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$\Rightarrow g\cos\alpha\cdot\mathrm{d}s = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}s \Rightarrow gl\cos\alpha\cdot\mathrm{d}\alpha = v\mathrm{d}v$$

$$\Rightarrow \int_0^\theta gl\cos\alpha\mathrm{d}\alpha = \int_0^{v_\theta} v\mathrm{d}v$$

$$\Rightarrow gl\sin\theta = \frac{1}{2}v_\theta^2 \Rightarrow v_\theta = \sqrt{2gl\sin\theta}$$

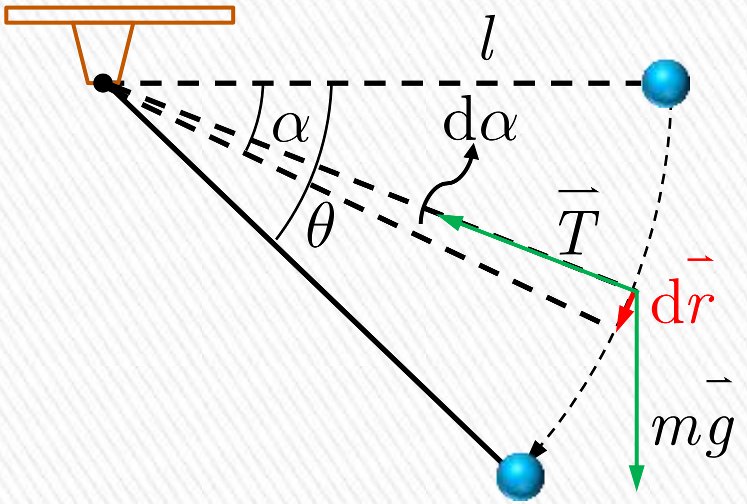
法向受力分析：

$$T - mg\sin\theta = m\frac{v_\theta^2}{l}$$

4.6 机械能守恒定律

P54例2.3，P114例4.5，P133 例4.9：质量为 m 的珠子系在细线的一端，线的另一端固定，线长 l。先拉动珠子使细线水平静止，然后松手使珠子下落。求细线下摆至 θ 角时，珠子的速率和细线的张力。

解法二(动能定理)：



珠子下摆过程中，只有重力做功：

$$A_\theta = \int_0^{s_\theta} m\vec{g}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \int_0^{s_\theta} mg\cos\alpha\,\mathrm{d}r$$

$$= \int_0^{\theta} mgl\cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha = mgl\sin\theta$$

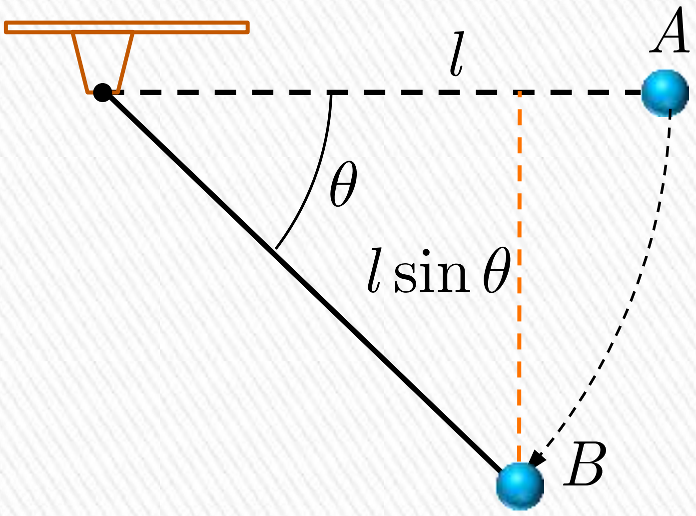
由动能定理得：

$$A_\theta = mgl\sin\theta = \frac{1}{2}mv_\theta^2 \Rightarrow v_\theta = \sqrt{2gl\sin\theta}$$

对珠子进行法向受力分析得：$T - mg\sin\theta = m\dfrac{v_\theta^2}{l}$

4.6 机械能守恒定律

P54例2.3，P114例4.5，P133 例4.9：质量为 m 的珠子系在细线的一端，线的另一端固定，线长 l。先拉动珠子使细线水平静止，然后松手使珠子下落。求细线下摆至 θ 角时，珠子的速率和细线的张力。



解法三(机械能守恒定律)：在珠子下摆过程中，只有保守内力——重力做功，因此机械能守恒。

以位置 A 所在的平面为零势面，则珠子下摆前后的机械能均为 0：

$$0 = \frac{1}{2}mv_\theta^2 - mgl\sin\theta \Rightarrow v_\theta = \sqrt{2gl\sin\theta}$$

对珠子进行法向受力分析得：$T - mg\sin\theta = m\dfrac{v_\theta^2}{l}$

4.8 碰撞

» 碰撞中的守恒律

弹性碰撞
- 必然 → 机械能守恒
- 合外力为零 → 动量守恒
- 合外力矩为零 → 角动量守恒

完全非弹性碰撞
- 合外力为零 → 动量守恒
- 合外力矩为零 → 角动量守恒