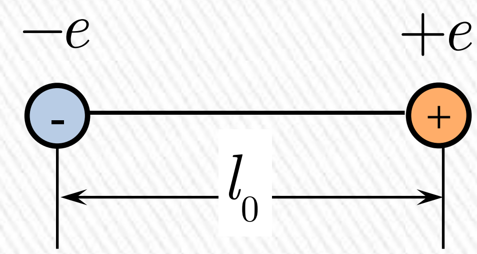
第10章 静电场中的电介质

习题解答

习题 10.1：在氯化氢分子中，氯核和氢核的距离为 0.128 nm，假设氢原子的电子完全转移到氯原子上，并与其他电子构成一球对称的负电荷，其中心就在氯核上。(1) 此模型的电矩有多大？
(2) 实测的氯化氢分子的电矩为 3.4×10^{-30} C·m，则该分子中负电荷的质心应该在何处？

(1)解：若氢原子的电子完全转移到氯原子上，并与其他电子构成一球对称的负电荷，其中心就在氯核上，则氯核对外表现出 1e 的负电荷。

同时氢核对外表现出 1e 的正电荷，则该系统可看做分别带电 $\pm e$ 的电偶极子，其电矩为：

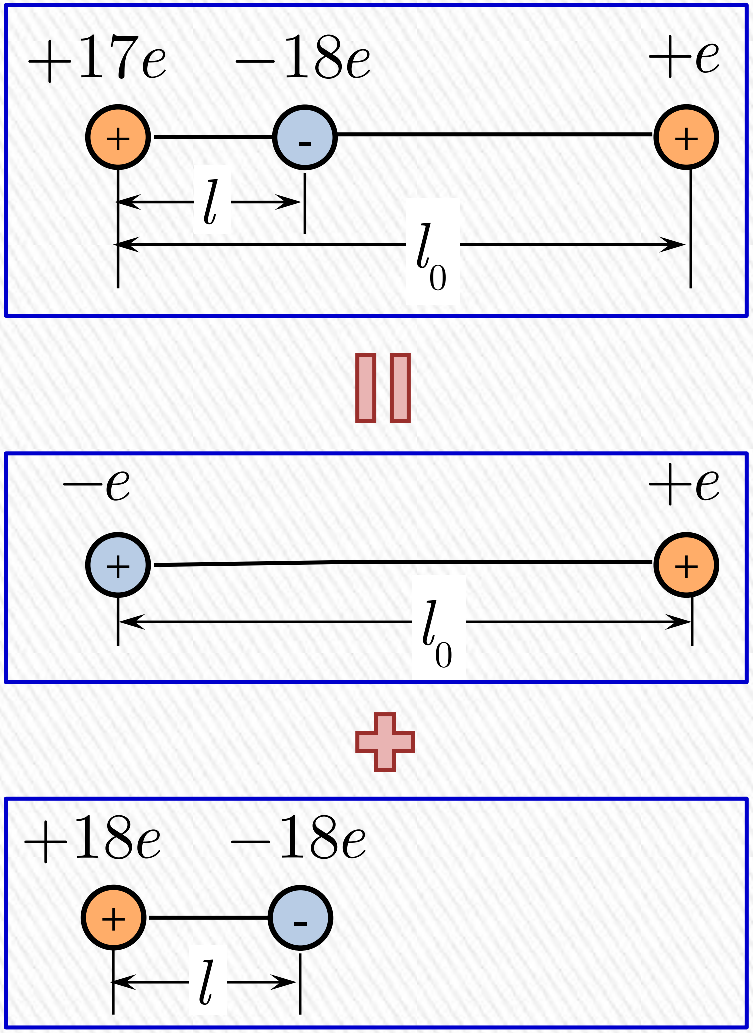


$$p = el = (1.6\times10^{-19})\cdot(0.128\times10^{-9})$$
$$= 2.0\times10^{-29}\quad \mathrm{C\cdot m}$$

计算数据比实测数据大，说明假设不准确，氢原子的电子并未完全转移到氯原子上，而是跟氯原子之间仍有一些距离。

习题 10.1：在氯化氢分子中，氯核和氢核的距离为 0.128 nm，假设氢原子的电子完全转移到氯原子上，并与其他电子构成一球对称的负电荷，其中心就在氯核上。(2) 实测的氯化氢分子的电矩为 3.4×10^{-30} C·m，则该分子中负电荷的质心应该在何处？

(2)解：氢原子的电子并未完全转移到氯原子上，导致氯化氢分子的负电荷的质心跟氯核之间存在一个距离 l，如图所示：



该结构可以分解为两个方向相反的电矩，其总电矩为：

$$p = el_0 - 18el$$

$$\Rightarrow l = \frac{el_0 - p}{18e}$$

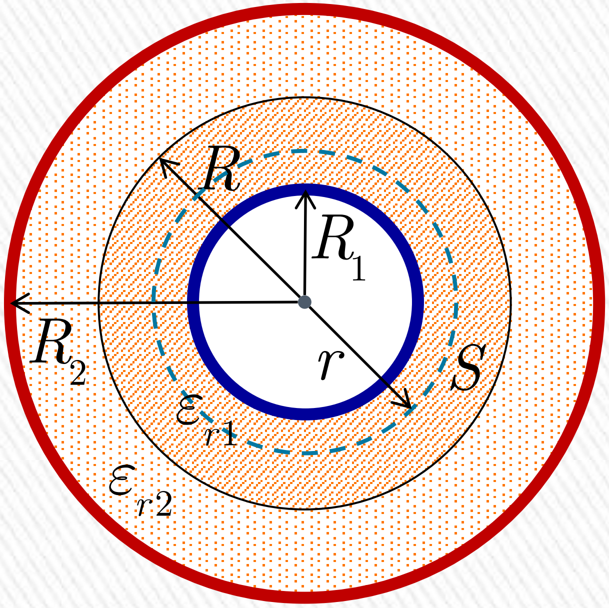
代入数据

$$= \quad 5.9\times10^{-12}\ \mathrm{m}$$

习题 10.2：两个同心的薄金属壳，内外壳的半径分别为 $R_1 = 0.02\ \text{m}$ 和 $R_2 = 0.06\ \text{m}$ 。球壳之间充满两层均匀电介质，其相对电容率分别为 $\varepsilon_{r1} = 6$ 和 $\varepsilon_{r2} = 3$，两层电介质的分界面半径为 $R = 0.04\ \text{m}$。设内球壳带电量为 $Q = -6\times10^{-8}\ \text{C}$，求 **(1) D 和 E 的分布，并画出曲线**；

(1)解：作半径为 r 的球型高斯面，由 D 的高斯定理得：

$$D = \begin{cases} 0 & , \quad r < R_1 \\ \dfrac{Q}{4\pi r^2} & , \quad r \ge R_1 \end{cases}$$



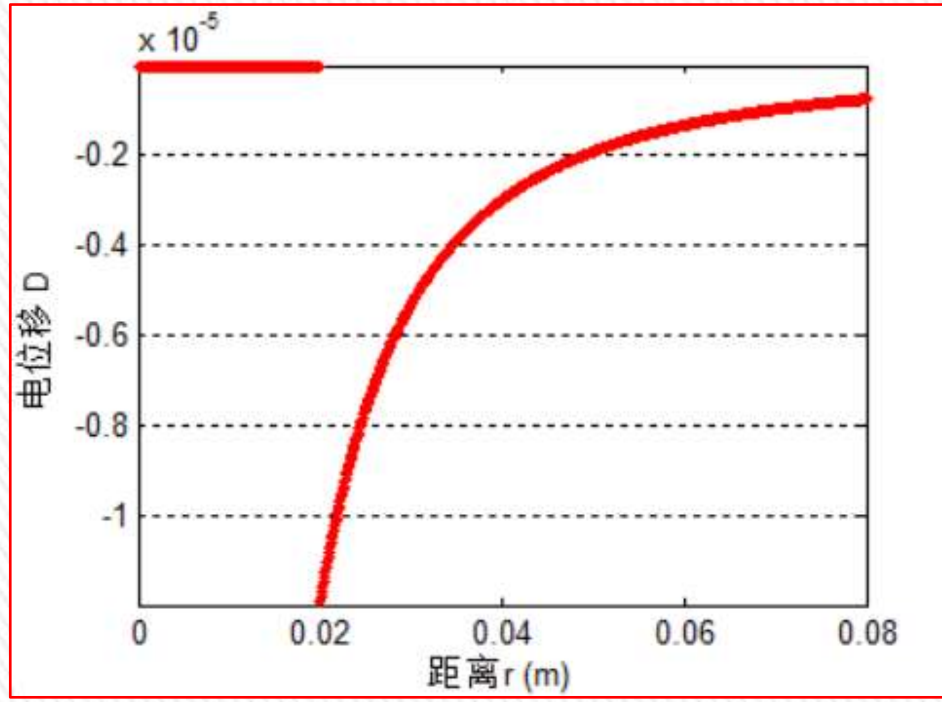
则 $$E = \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \begin{cases} 0 & , \quad r < R_1 \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1} r^2} & , \quad R_1 < r \le R \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2} r^2} & , \quad R < r \le R_2 \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & , \quad r \ge R_2 \end{cases}$$

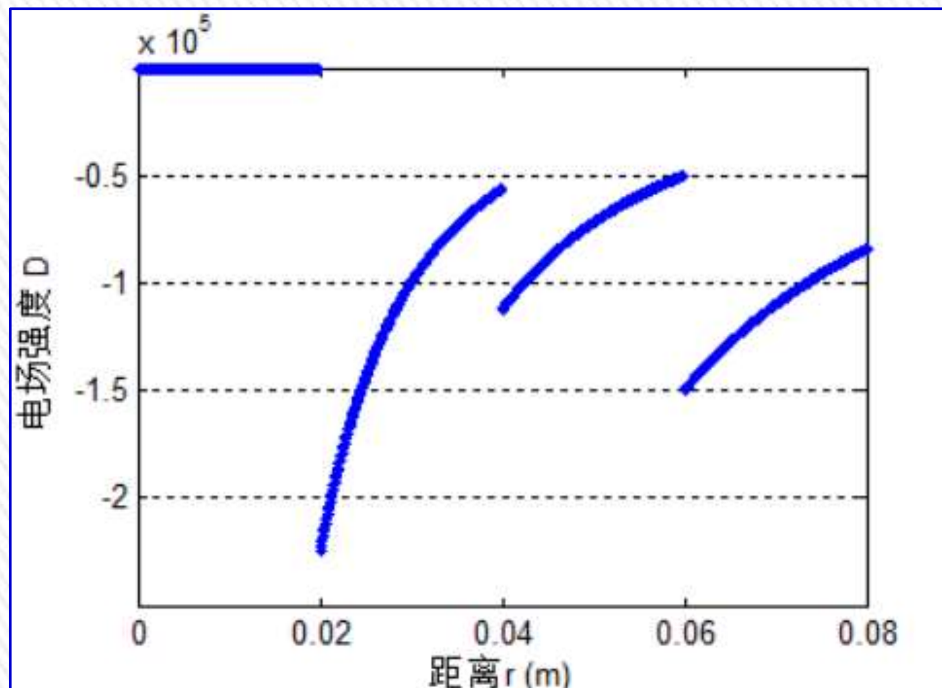
习题 10.2：

(1) D 和 E 的分布，并画出曲线；

$$D=\begin{cases}0 & , \quad r<R_1 \\ \dfrac{Q}{4\pi r^2} & , \quad r\geq R_1\end{cases}$$

$$E=\begin{cases}0 & , \quad r<R_1 \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}r^2} & , \quad R_1<r\leq R \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2}r^2} & , \quad R<r\leq R_2 \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & , \quad r\geq R_2\end{cases}$$





习题 10.2：两个同心的薄金属壳，内外壳的半径分别为 $R_1 = 0.02$ m 和 $R_2 = 0.06$ m 。球壳之间充满两层均匀电介质，其相对电容率分别为 $\varepsilon_{r1} = 6$ 和 $\varepsilon_{r2} = 3$，两层电介质的分界面半径为 $R = 0.04$ m。设内球壳带电量为 $Q = -6 \times 10^{-8}$ C，求 **(2) 两球壳之间的电势差**；

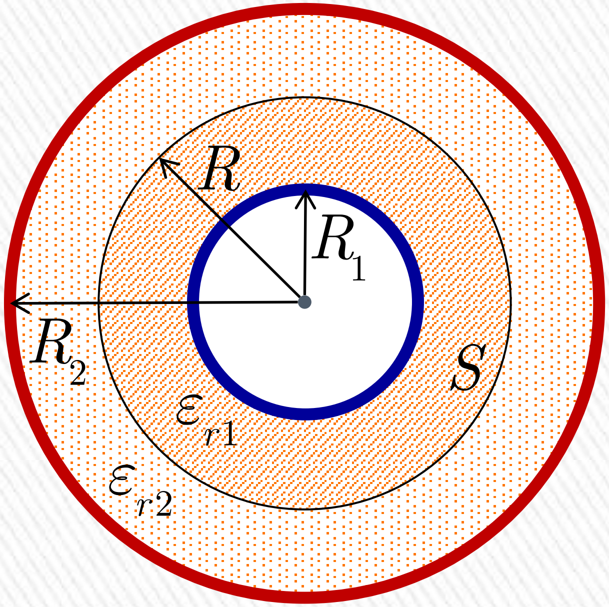
(2)解：电势差是电场强度在空间上的积分，所以

$$U = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{R_1}^{R} E \cdot \mathrm{d}r + \int_{R}^{R_2} E \cdot \mathrm{d}r$$

$$= \int_{R_1}^{R} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}r^2} \cdot \mathrm{d}r + \int_{R}^{R_2} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2}r^2} \cdot \mathrm{d}r$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\varepsilon_{r1}R_1} - \frac{1}{\varepsilon_{r1}R} + \frac{1}{\varepsilon_{r2}R} - \frac{1}{\varepsilon_{r2}R_2}\right)$$

$$= -3.8 \times 10^3 \ \mathrm{V}$$



习题 10.2：两个同心的薄金属壳，内外壳的半径分别为 $R_1 = 0.02$ m 和 $R_2 = 0.06$ m 。球壳之间充满两层均匀电介质，其相对电容率分别为 $\varepsilon_{r1} = 6$ 和 $\varepsilon_{r2} = 3$，两层电介质的分界面半径为 $R = 0.04$ m。设内球壳带电量为 $Q = -6 \times 10^{-8}$ C，求 (3) 贴近内金属壳的电介质表面上的面束缚电荷密度。

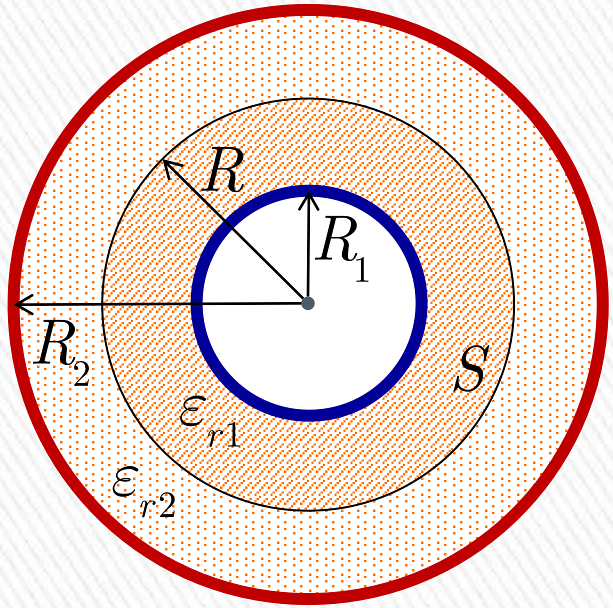
(3)解：在贴近内金属壳的电介质表面上，极化强度的方向和面的方向是相反的，因此

$$\sigma' = \vec{P} \cdot \vec{e}_n = -P = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)E$$

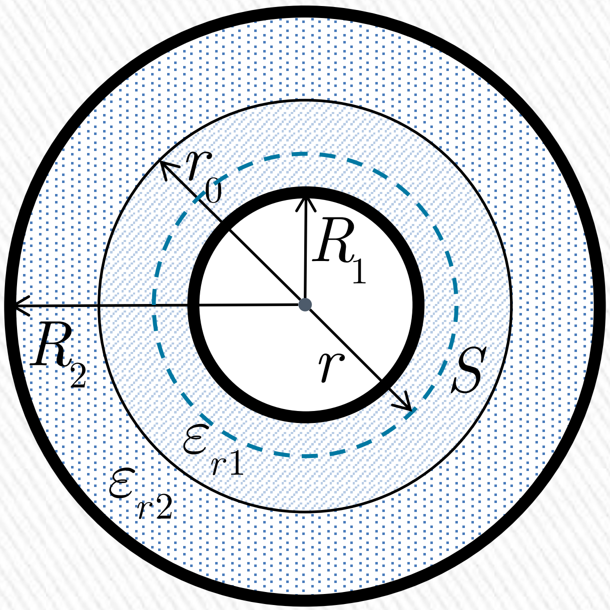
$$= -\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}r^2}$$

代入数据

$$= \quad 9.9 \times 10^{-6}\ \mathrm{C/m^2}$$



习题 10.3：两共轴的导体圆筒的内外筒半径分别为 R_1 、R_2，$R_2 < 2R_1$ 。其间有两层均匀电介质，分界面半径为 r_0，相对电容率分别为 ε_{r1} 和 ε_{r2}，且 $\varepsilon_{r1}=2\varepsilon_{r2}$ 。两层介质的击穿场强都是 E_{max}，当电压升高时，哪层介质先击穿？两筒间能加的最高电压为多大？



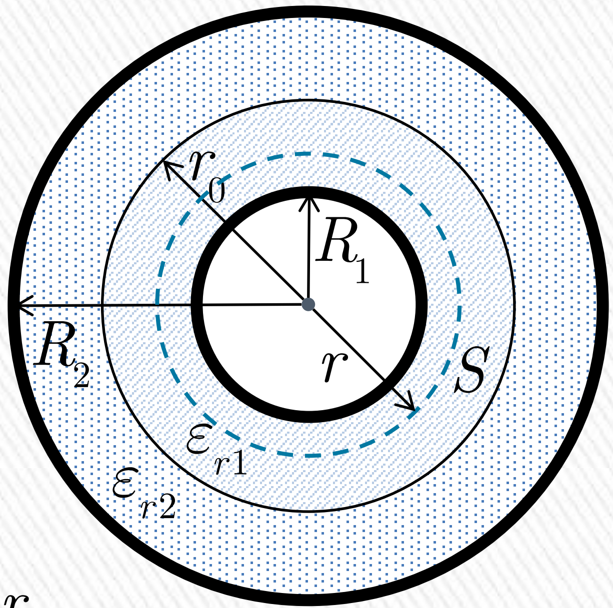
解：导体筒的截面如图所示。设内筒的电荷线密度为 λ，由 D 的高斯定理求解内外筒之间的电位移和场强：

$$D=\frac{\lambda}{2\pi r}\Rightarrow E=\begin{cases}\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}r}, & R_1\le r\le r_0\\[2ex] \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2}r}, & r_0\le r\le R_2\end{cases}$$

可知，内外层介质的最大场强分别为 $E_1=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}R_1}$ 和 $E_2=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2}r_0}$

代入 $\varepsilon_{r1}=2\varepsilon_{r2}$，二者最大场强之比为 $\dfrac{E_1}{E_2}=\dfrac{r_0}{2R_1}$，外层介质先击穿。

习题 10.3：两共轴的导体圆筒的内外筒半径分别为 R_1 、R_2，$R_2 < 2R_1$ 。其间有两层均匀电介质，分界面半径为 r_0，相对电容率分别为 ε_{r1} 和 ε_{r2}，且 $\varepsilon_{r1}=2\varepsilon_{r2}$ 。两层介质的击穿场强都是 E_{max}，当电压升高时，哪层介质先击穿？两筒间能加的最高电压为多大？



解(续)：外层介质先击穿，因此令

$$E_{\max} = E_2 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2}r_0}$$

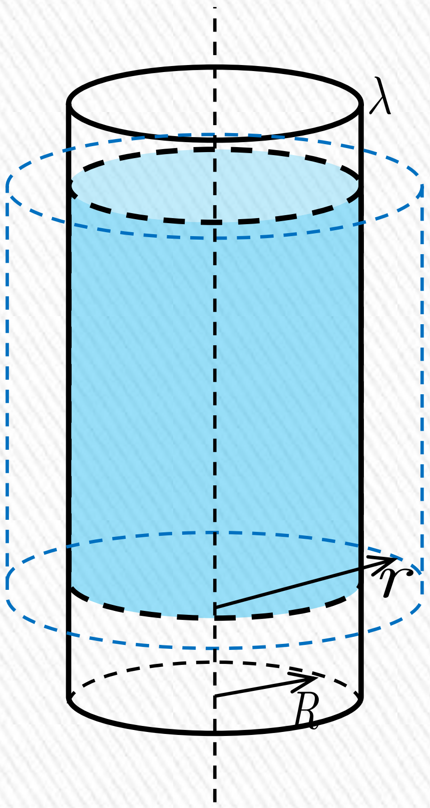
$$\Rightarrow \quad \lambda_{\max} = E_{\max} \cdot 2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2}r_0$$

代入 E 的表达式可得：$E = \begin{cases} \dfrac{E_{\max}r_0}{2r}, & R_1 \le r \le r_0 \\ \dfrac{E_{\max}r_0}{r}, & r_0 \le r \le R_2 \end{cases}$

则最高电压为：$U_{\max} = \int_{R_1}^{r_0} \frac{E_{\max}r_0}{2r}\,\mathrm{d}r + \int_{r_0}^{R_2} \frac{E_{\max}r_0}{r}\,\mathrm{d}r = \frac{E_{\max}r_0}{2}\ln\frac{R_2^2}{R_1 r_0}$

习题 10.5：空气的介电强度为 3 KV/mm，试求空气中半径分别为 1.0 cm、1.0 mm、0.1 mm 的长直导线上单位长度最多能带多少电荷？

解：无限长直导线的电荷均分布在其表面上，可以看做一个无限长带电圆柱面。



设其电荷线密度为 λ，由高斯定理得，半径为 R 的无限长带电圆柱面之外的电场强度为：

$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\,,\quad r\geq R$$

可知其最大场强和最大电荷线密度为

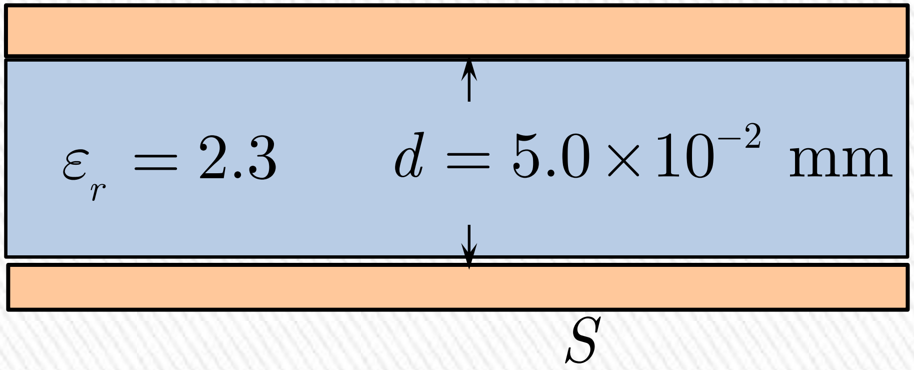
$$E_{\max}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}\ \Rightarrow\ \lambda_{\max}=2\pi\varepsilon_0 R E_{\max}$$

令 $E_{\max}=3$ KV/mm，分别代入导线半径 $R_1=1.0$ cm，$R_2=1.0$ mm，$R_3=0.1$ mm，即可求得最大电荷线密度 $\lambda_{\max,1}$， $\lambda_{\max,2}$， $\lambda_{\max,3}$。

习题 10.9：将 $\varepsilon_r = 2.3$，厚 5×10^{-2} mm 的聚乙烯膜两面加上铝箔，做成电容器，如果电容为 3.0 μF，则膜的面积应该为多大？

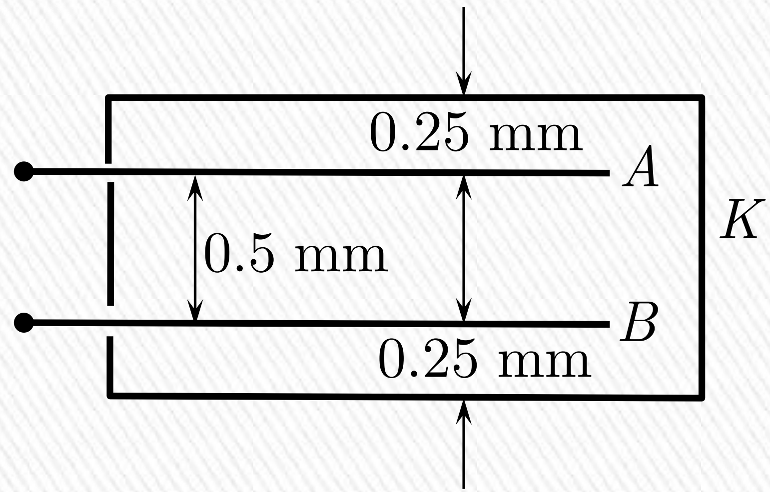
解：平行板电容器的电容为

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d}$$



因此 $S = \dfrac{Cd}{\varepsilon_0\varepsilon_r} \overset{\text{代入数据}}{=} 7.4\ \text{m}^2$

习题 10.14：一个平行板电容器的每个板的面积为 0.02 m^2，板间距 0.5 mm，放在一个金属盒子中。电容器两板到盒子上下底面的距离各为 0.25 mm，忽略边缘效应，(1) 求此电容器的电容。



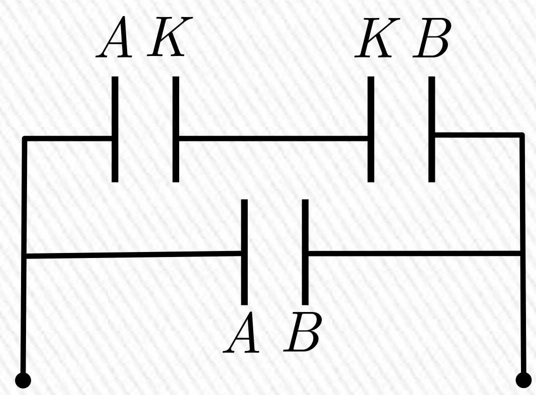
解：该电容相当于如右下图所示的组合电容：

$$C = C_{AB} + C_{AK}\text{串联}C_{BK}$$

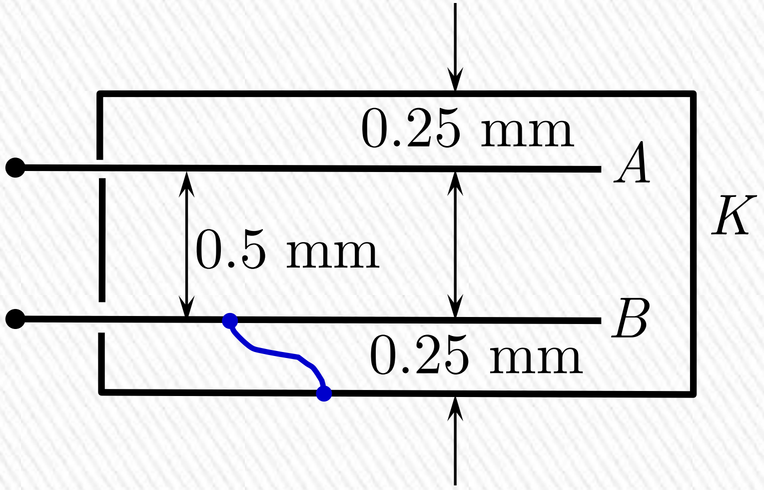
$$\text{其中 } C_{AB} = \frac{\varepsilon_0 S}{d_{AB}} \overset{\text{代入数据}}{=} 354\ \text{pF}$$

$$C_{AK} = C_{BK} = \frac{\varepsilon_0 S}{d_{AK}} \overset{\text{代入数据}}{=} 708\ \text{pF}$$

$$\text{则 } C = 354 + \frac{708}{2} = 708\ \text{pF}$$



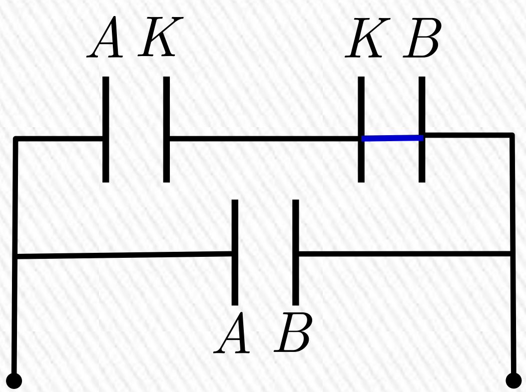
习题 10.14：一个平行板电容器的每个板的面积为 0.02 m^2，板间距 0.5 mm，放在一个金属盒子中。电容器两板到盒子上下底面的距离各为 0.25 mm 。(2) 如果将一个板子和盒子连接起来，电容又是多大？



解：假设将 B 与 K 连接起来，则此时该电容如右下图所示：

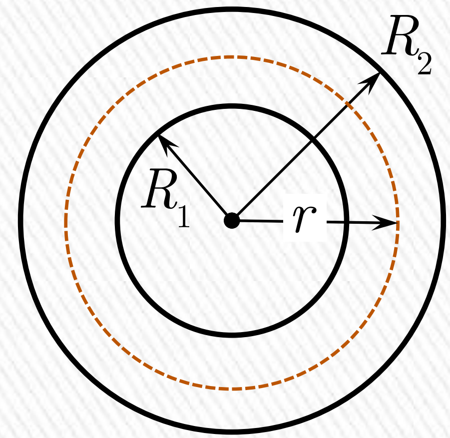
此时总电容相当于电容 AB 和电容 AK 并联，即：

$$C' = C_{AB} + C_{AK} = 1060\ \text{pF}$$



习题 10.17：两个同心导体球壳，内外球壳半径分别为 R_1 和 R_2，求两者组成的电容器电容。把 $\Delta R = (R_2 - R_1) << R_1$ 的极限情况与平行板电容器作比较。

解：分别对内外球壳充以电荷 $\pm Q$，在两球壳之间作一个半径为 r 的高斯面，根据高斯定理求得：



$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \quad R_1 \le r \le R_2$$

两球壳之间的电压为：

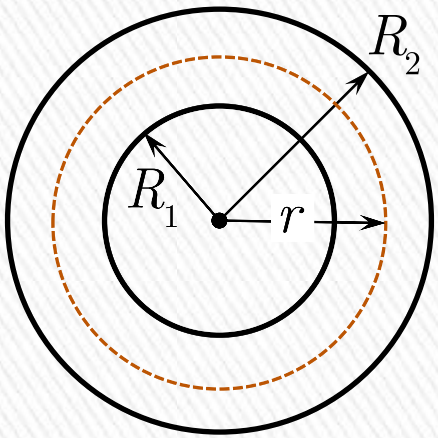
$$U = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot \mathrm{d}r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

该电容器的电容为：

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

习题 10.17：两个同心导体球壳，内外球壳半径分别为 R_1 和 R_2，求两者组成的电容器电容。把 $\Delta R=(R_2-R_1)<<R_1$ 的极限情况与平行板电容器作比较。

解(续)：当 $\Delta R=(R_2-R_1)<<R_1$ 时，$R_1R_2\approx R_1^2$，则



$$C=\frac{4\pi\varepsilon_0R_1R_2}{R_2-R_1}\approx\frac{4\pi\varepsilon_0R_1^2}{\Delta R}$$

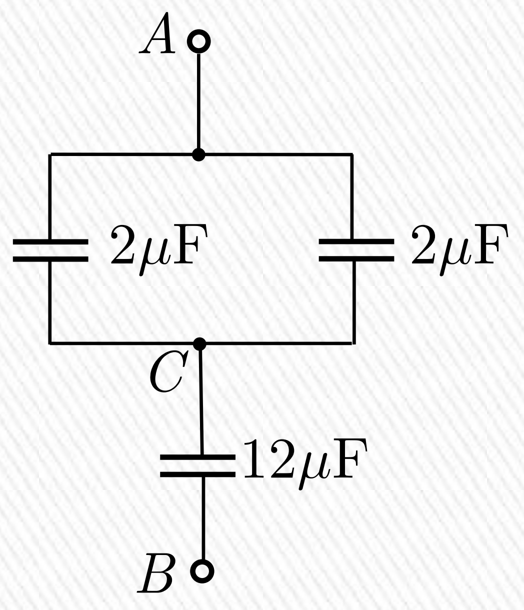
将 $4\pi R_1^2=S$ 视为电容器的面积，$\Delta R=d$ 视为两板之间的距离，则

$$C=\frac{\varepsilon_0S}{d}$$

跟平行板电容器一样。

习题 10.18：将一个 12 μF 和两个 2 μF 的电容连接起来组成电容为 3 μF 的电容器组，如果每个电容器的击穿电压均为 200 V，则此电容器组所能承受的最大电压为多大？

解：这三个电容器只可能以如图方式组成一个 3 μF 的电容器组。



易知：$C_{AC} = 4\ \mu\text{F}$。

当 AB 两端加电压 U 时，

$$U_{AC} = \frac{12\mu\text{F}}{4\mu\text{F} + 12\mu\text{F}} = \frac{3}{4}U$$

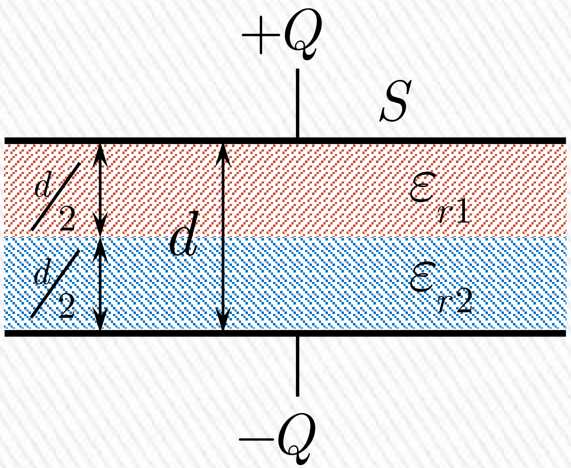
$$U_{BC} = \frac{4\mu\text{F}}{4\mu\text{F} + 12\mu\text{F}} = \frac{1}{4}U$$

因此 C_{AC} 是承压短板，系统最大承压为：

$$U_{AC} = \frac{3}{4}U \leq 200\ \text{V} \quad \Rightarrow U \leq 266.7\ \text{V}$$

习题 10.19：一平行板电容器的面积为 S，板间距离为 d，板间充满两层厚度相同、相对电容率分别为 ε_{r1} 和 ε_{r2} 的电介质，求它的电容。

解：给两板分别充电 $\pm Q$，则板间的电位移为：



$$D = \sigma = \frac{Q}{S}$$

两种介质中的场强分别为：

$$E_1 = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1} S}, \quad E_2 = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r2} S}$$

板间电压为：

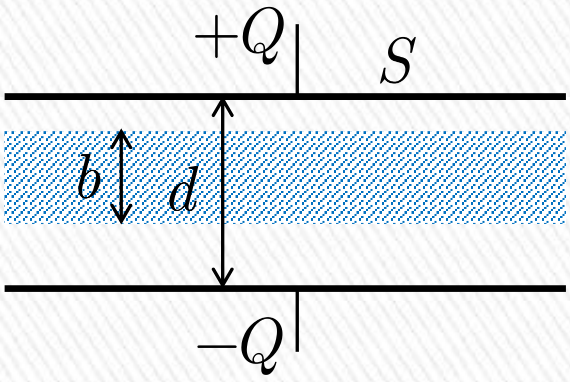
$$U = E_1 \cdot \frac{d}{2} + E_2 \cdot \frac{d}{2} = \frac{Qd}{2\varepsilon_0 \varepsilon_{r1} S} + \frac{Qd}{2\varepsilon_0 \varepsilon_{r2} S}$$

电容器的电容为：$C = \dfrac{Q}{U} = \dfrac{2\varepsilon_0 \varepsilon_{r1} \varepsilon_{r2} S}{d(\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2})}$

习题 10.24：一个平行板电容器，板面积为 S，板间距为 d。

(1) 充电后保持其电量 Q 不变，将一块厚为 b 的金属板平行插入。与插入前相比，电容器储能增加多少？

(2) 导体板进入时，外力做功多少？导体板是被吸入的还是需要推入？



(1) 解：电容器的初始电容为 $C_0 = \varepsilon_0 S/d$，插入导体板相当于板间距离缩小，**电容变大**为

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d-b}$$

则电量 Q 不变时，电容的储能增量为：

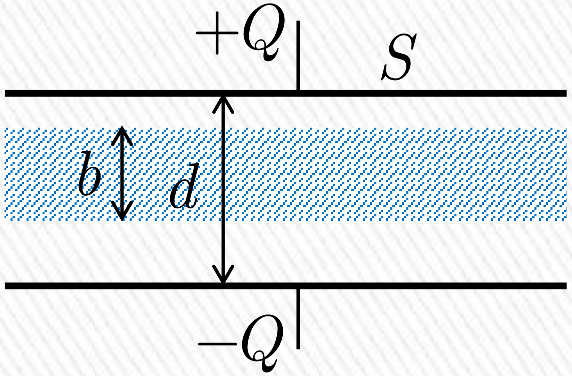
$$\Delta W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} - \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_0} = \frac{Q^2}{2}\left(\frac{d-b}{\varepsilon_0 S} - \frac{d}{\varepsilon_0 S}\right) = -\frac{Q^2 b}{2\varepsilon_0 S}$$

(2) 解：电量 Q 不变，意味着外接电源没有输送能量给电容，根据能量守恒定律，外力做功即电容的储能增量，为负功。导体板是被吸入的。

习题 10.24：一个平行板电容器，板面积为 S，板间距为 d。

(3) 如果充电后保持其电压 U 不变，情况如何？

(3) 解：电压不变，电容变大，意味着板上的电量增多，即外接电源给电容供能了。增加电量为：



$$\Delta Q = (C - C_0)U$$

外接电源供能为：

$$W_s = \Delta Q \cdot U = (C - C_0)U^2$$

电容储能增量为： $\Delta W = \dfrac{1}{2}(C - C_0)U^2$

根据能量守恒定律，外力做功等于电容储能增量减去外接电源供能：

$$A = \Delta W - W_s = -\frac{1}{2}(C - C_0)U^2 = -\frac{\varepsilon_0 SbU^2}{2d(d-b)}$$

外力做功为负，金属板仍然是被吸入的。