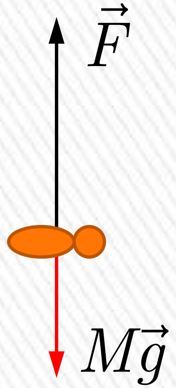
第3章 动量与角动量

习题解答

习题 3.3：美国丹佛市每年举办一次“肚皮砸水比赛”，2007年的冠军，质量为150 kg，跳起后离水面最高距离 5.0 m，碰到水面 0.3 s 后缓慢下沉。求他水的力有多大？

解：此人先经历了一个高度为 h 的自由落体运动，获得竖直向下的速度 v：

$$v = \sqrt{2gh}$$



砸水过程中，此人受力如右图所示。

对砸水过程应用动量定理得：

$$(mg - F)\Delta t = 0 - mv$$

$$\Rightarrow \quad F = mg + \frac{mv}{\Delta t} \overset{\text{代入数据}}{=} 6.42 \times 10^3 \quad \text{N}$$

习题 3.4：自动步枪连发时每分钟射出 120 发子弹，每发子弹的质量为 $m = 7.9$ g，出口速率为 $v = 735$ m/s。求射击时(以分钟计)枪托对肩膀的平均压力。

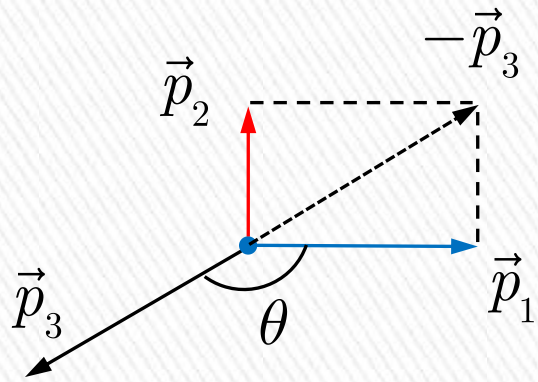
解：以分钟计，对 $N = 120$ 发子弹进行动量定理分析，子弹受到的平均推力为：

$$F = \frac{N \cdot (mv - 0)}{\Delta t} \overset{\text{代入数据}}{=} 11.6 \ \ \mathrm{N}$$

根据牛顿第三定律，子弹受到的平均推力即肩膀受到的平均压力。

习题 3.9：一个原来静止的原子核，放射性蜕变出一个动量为 $p_1 = 9.22\times10^{-21}$ kg·m/s 的电子，同时还在垂直于此电子运动的方向放出一个动量为 $p_2 = 5.33\times10^{-21}$ kg·m/s 的中微子。求蜕变后的原子核的动量的大小和方向。

解：蜕变后三者的动量的矢量关系如图。



根据动量守恒定律，

$$\vec{p}_1+\vec{p}_2+\vec{p}_3=0 \;\Rightarrow\; \vec{p}_3=-\vec{p}_1-\vec{p}_2$$

根据三者的几何关系得：

$$p_3=\sqrt{p_1^2+p_2^3}\overset{\text{代入数据}}{=}1.07\times10^{-20}\ \mathrm{N}$$

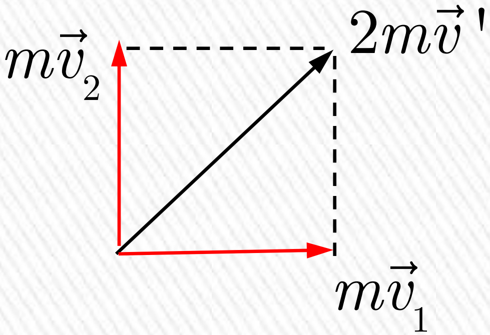
$$\theta=90°+\arctan\frac{p_1}{p_2}=149°58'$$

习题 3.11：两辆质量相同的汽车在十字路口垂直相撞，撞击后扣在一起又沿直线滑行了 $s = 25\ \mathrm{m}$ 才停下来。设地面和车轮之间的滑动摩擦系数为 $u_k = 0.80$ 。事后两个司机都声明自己没有超速(14 m/s)，请问他们的话可信么？

解：首先研究相撞后二车扣在一起的直线运动， 设它们相撞后的速率为 v，根据动能定理，

$$\mu_k \cdot 2mg \cdot s = \frac{1}{2} \cdot 2m \cdot v^2 \Rightarrow v = \sqrt{2\mu_k g s} \overset{\text{代入数据}}{=} 19.8\ \mathrm{m/s}$$

相撞过程动量守恒，设二车均以速率 14 m/s 行驶，相撞后速率变为 v'，如图，则：



$$(mv_1)^2 + (mv_2)^2 = (2mv')^2$$

$$\Rightarrow v' = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 14 = 9.9\ \mathrm{m/s} < 19.8\ \mathrm{m/s}$$

可知，两个司机至少有一个人撒了谎。

习题 3.13：在太空中静止的一级火箭，点火后，其质量的减少与初始质量之比为多大时，它喷出的废气将是静止的？

解：当火箭的当前速率 v 与喷出气体的相对速率 u 相等时，其喷出的废气是静止的。

火箭速度公式： $$v - v_i = u\ln\frac{M_i}{M}$$

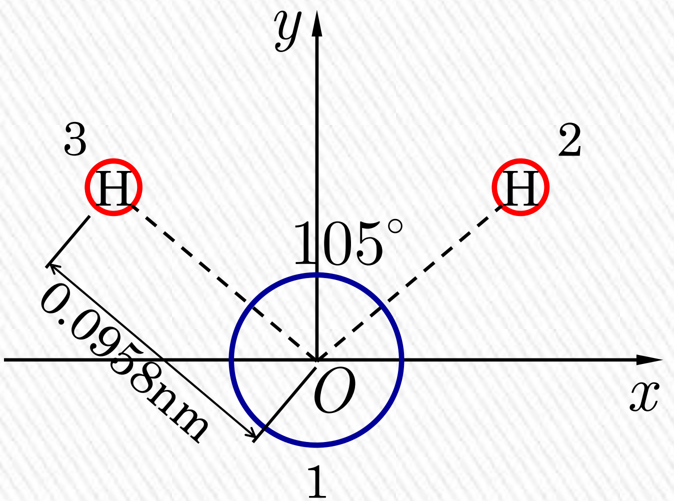
代入 $v_{\mathrm{i}} = 0$ ， $v = u$ 得：

$$u = u\ln\frac{M_i}{M} \Rightarrow \frac{M_i}{M} = e$$

则火箭质量的减少与初始质量之比为：

$$\frac{M_i - M}{M_i} = 1 - \frac{1}{e} = 0.632$$

习题 3.16：水分子的结构如图，两个氢原子与氧原子的中心距离都是 0.0958 nm，它们与氧原子中心的连线的夹角为 105° 。求水分子的质心。



解：建立如图坐标系。由于对称性，质心在 y 轴上，即 $x_C=0$，只需求 y_C 即可。

氧原子的质心在 y 轴上的坐标为 $y_1=0$，两个氢原子的质心在 y 轴上的坐标为

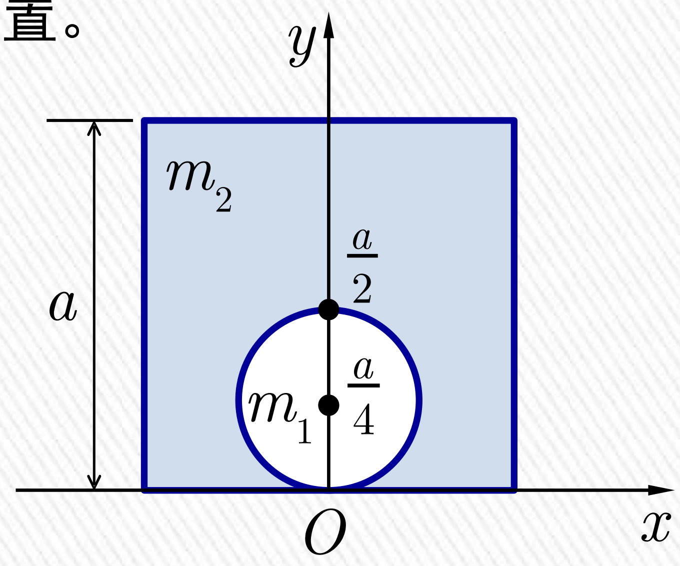
$$y_2=y_3=0.0958\cos\frac{105^\circ}{2}$$

水分子的质心在 y 轴上的坐标为

氧原子的质量是氢原子的 16 倍。

$$y_c=\frac{\sum_i y_i m_i}{\sum_i m_i}=\frac{y_1m_1+y_2m_2+y_3m_3}{m_1+m_2+m_3}\overset{\text{代入数据}}{=}0.0648\ \text{nm}$$

习题 3.18：有一立方体铜块，边长为 a。今在其下半部中央挖去一截面半径为 $a/4$ 的圆柱形洞。求剩余铜块的质心位置。



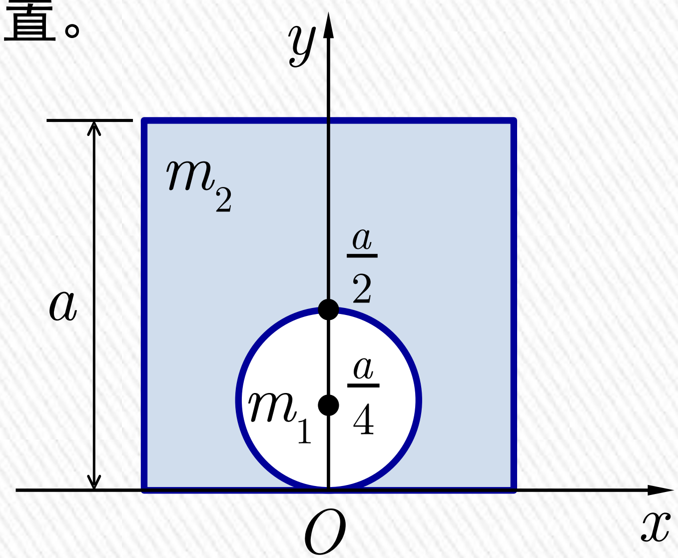
解：建立如图坐标系。由于对称性，质心在 y 轴上。

本题采用**反推法**，即已知铜块整体和圆柱部分的质心，求挖去圆柱后的剩余部分的质心。

以 m_1 表示挖走部分，m_2 表示剩余部分，ρ 表示铜的密度，则：

$$m_1 = a^3 \frac{\pi}{16}\rho \quad , \quad m_2 = a^3\left(1 - \frac{\pi}{16}\right)\rho$$

习题 3.18：有一立方体铜块，边长为 a。今在其下半部中央挖去一截面半径为 $a/4$ 的圆柱形洞。求剩余铜块的质心位置。



解(续)：

$$m_1 = a^3 \frac{\pi}{16} \rho \, , \; m_2 = a^3 \left(1 - \frac{\pi}{16}\right) \rho$$

分别以 y_C, y_{C1}, y_{C2} 表示原铜块、圆柱部分和剩余部分的质心，则：

$$\begin{cases} y_C = \dfrac{m_1 y_{C1} + m_2 y_{C2}}{m_1 + m_2} \\ y_C = \dfrac{a}{2} \\ y_{C1} = \dfrac{a}{4} \end{cases}$$

解得：$y_{C2} = \dfrac{32 - \pi}{64 - 4\pi} a$

习题 3.19：在楼顶释放一质量为 $m_1 = 20\text{ g}$ 的石子后，1 s 后又在同一点释放另一质量为 $m_2 = 50\text{ g}$ 的石子。求前者释放 t 秒后(t >1)，这两个石子的质心的速度和加速度。

解：以竖直向下为正方向，两个石子的速度大小分别为：

$$v_1 = gt\ ,\ \ v_2 = g(t-1)$$

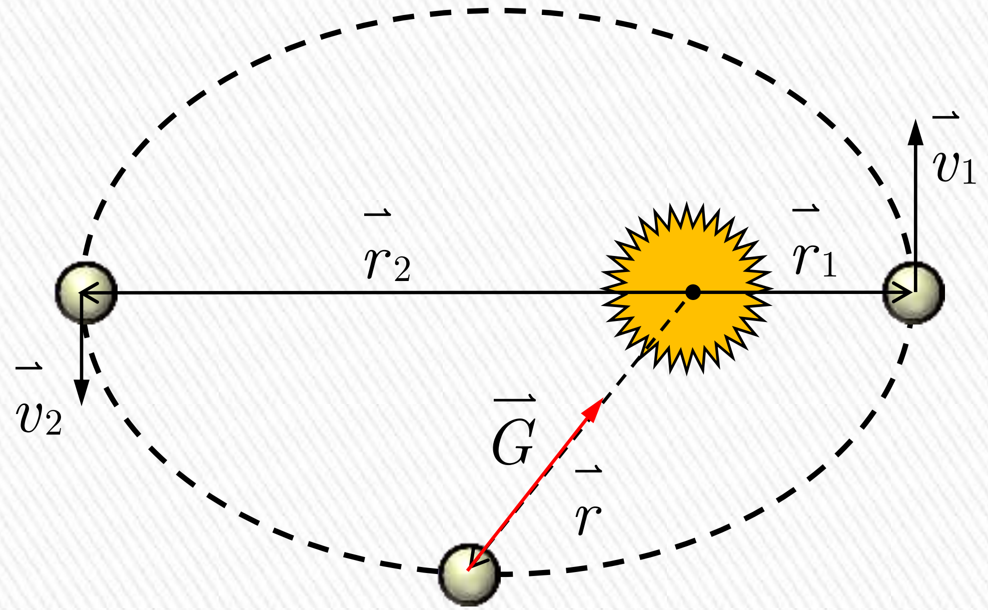
质心速度为：$$v_C = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \overset{\text{代入数据}}{=} (t - \tfrac{5}{7})g$$

两个石子的加速度均为 g，则质心加速度为：

$$a_C = \frac{m_1 a_1 + m_2 a_2}{m_1 + m_2} = g$$

习题 3.20：哈雷彗星绕太阳运动的轨道是一个椭圆。它离太阳最近的距离为 $r_1 = 8.75\times10^{10}$ m，此时速率为 $v_1 = 5.46\times10^{4}$ m/s。它离太阳最远时的速率为 $v_2 = 9.08\times10^{2}$ m/s，此时它离太阳的距离 r_2 是多少？

解：太阳对彗星的引力始终指向太阳，该引力对彗星的力矩为 0，因而彗星绕太阳转动时角动量守恒：

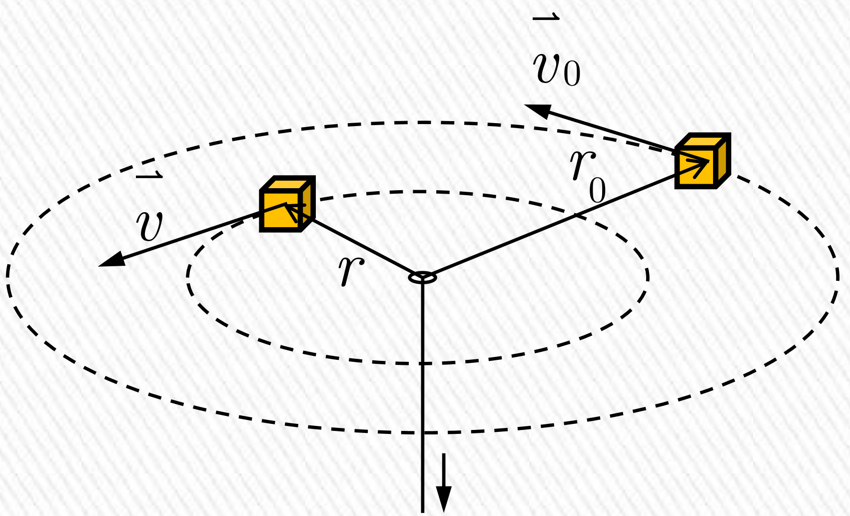


$$mr_1v_1 = mr_2v_2$$

$$\Rightarrow r_2 = \frac{r_1v_1}{v_2} \overset{\text{代入数据}}{=} 5.26\times10^{12}\ \text{m}$$

习题 3.23：用绳子系一小方块，使其在光滑水平面上做圆周运动，圆半径为 r_0，速率为 v_0。今缓慢拉下绳的另一端，使圆半径逐渐减小，求圆半径缩短至 r 时，小方块的速率 v 是多大。

解：绳子缩短时，方块受的拉力指向圆心，此力对圆心的力矩为零，因而方块运动的角动量守恒：



$$mr_0v_0 = mrv \;\Rightarrow\; v = v_0\frac{r_0}{r}$$