大学物理(1)

云南大学

第 3 章

动量与角动量

任课教师：张艳

3.1 冲量与动量定理

- **动量**：物体的质量和速度的乘积，**矢量**，**状态量**；
- **冲量**：物体所受到外力在时间上的累积效果，矢量，过程量；
- 动量定理：在某一时间段内，物体所受合外力的冲量等于这段时间内物体动量的增量。

动量定理的微分形式： $\vec{F}\mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{p}$

动量定理的积分形式： $\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\mathrm{d}t = \int_{\vec{p}_1}^{\vec{p}_2} \mathrm{d}\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \vec{I}$

3.1 冲量与动量定理

» **平均冲力**：

动量定理的精确表达为： $\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\mathrm{d}t = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$

但在一些不能精确表示力随时间变化曲线的场合，例如撞击过程，可以采用近似表达，即**平均冲力**乘以时间长度等于动量变化量：

$$\bar{\vec{F}}(t_2 - t_1) = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 \Rightarrow \bar{\vec{F}} = \frac{\vec{p}_2 - \vec{p}_1}{t_2 - t_1}$$

3.2 动量守恒定律

» [物体，质点]系统的**动量定理**：

[在惯性系中]，一段时间内，系统的总动量的增量等于系统合外力的冲量。

$$\left(\sum_i \vec{F}_i\right)\mathrm{d}t = \mathrm{d}\left(\sum_i \vec{p}_i\right)$$

» 系统的**动量守恒定律**：

在一段时间内，如果系统所受合外力为零，则系统的总动量保持不变。

$$\sum_i \vec{p}_i = \sum_i m\vec{v}_i = \vec{C}$$

3.2 动量守恒定律

» 使用动量守恒定律时，应注意以下三点：

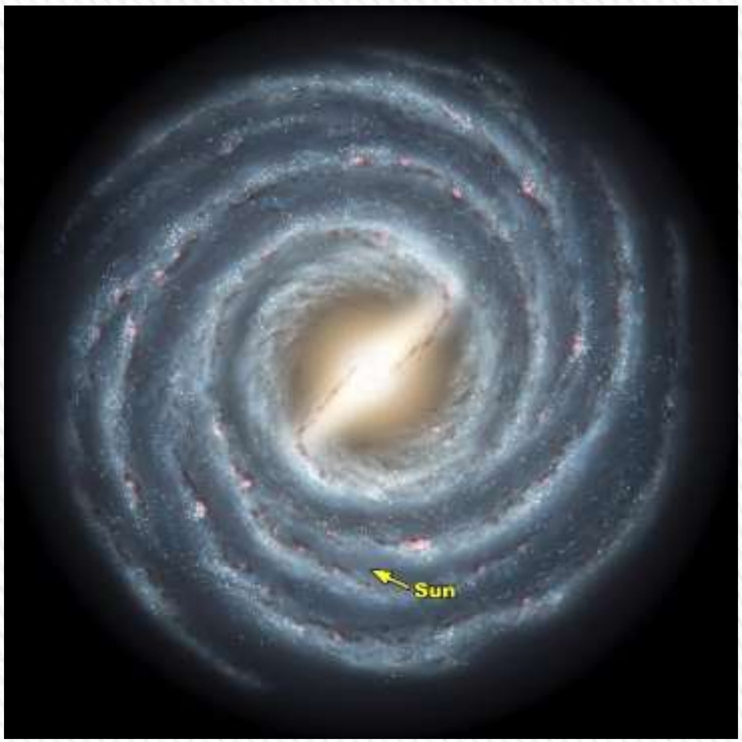
1. 外力比内力小得多时，可使用动量守恒定律。（例：爆炸）

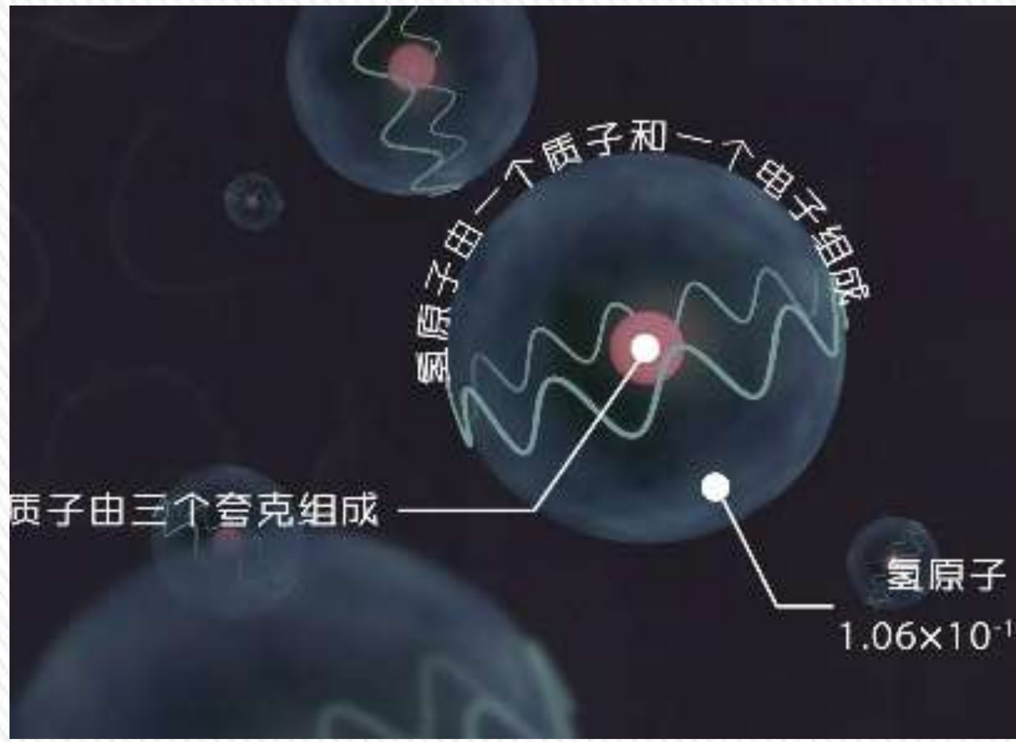
2. 在某方向所受合外力为零时，该方向的动量分量守恒。

3.2 动量守恒定律

» 使用动量守恒定律时，应注意以下三点：

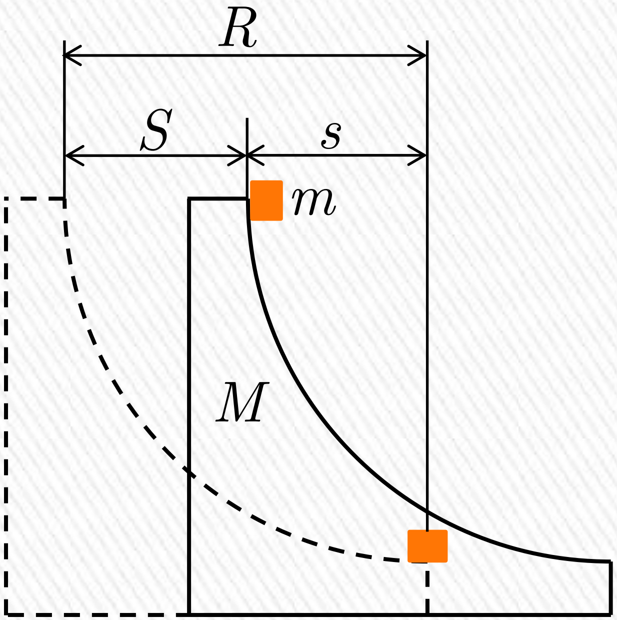
3. 动量守恒律是目前已知的在各个尺度上均精确成立的基本守恒定律。





3.2 动量守恒定律

P89 例3.5：一个有 ¼ 圆弧的大物体的质量为 M，停在光滑的水平面上，另一个质量为 m 的小物体自圆弧顶端由静止下滑。求当 m 滑到底时，M 在水平面上移动的距离。



解：分别以 S 和 s 表示大小物体在水平方向的位移， V 和 v 表示它们的速率，根据动量守恒定律，由 M 和 m 所组成的系统在**水平方向**的动量守恒：

$$mv_x - MV = 0$$

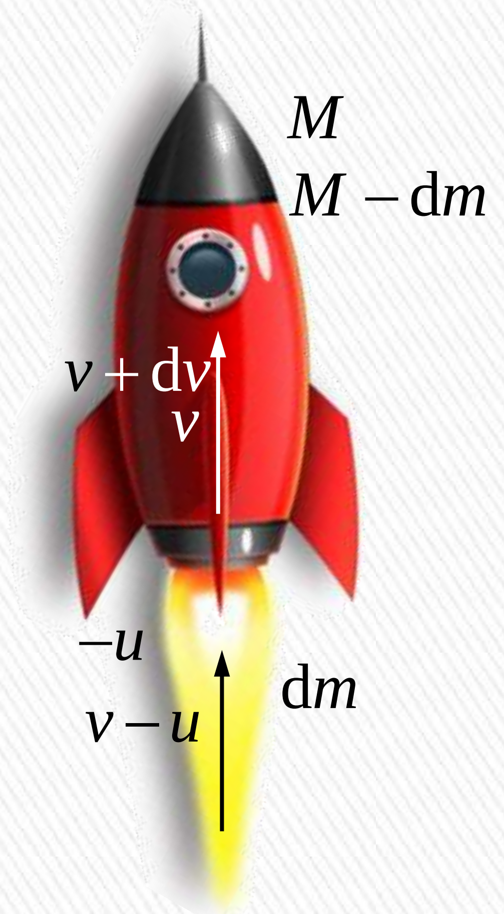
乘以时间微元：$mv_x \mathrm{d}t = MV\mathrm{d}t$

积分得：$\int_0^t mv_x \mathrm{d}t = \int_0^t MV\mathrm{d}t \Rightarrow ms = MS$

由几何关系得：$S + s = R$ 因此：$S = \dfrac{m}{m+M}R$

3.3 火箭飞行原理 (1)

不考虑重力影响



设火箭点火时初始质量为 M_i，初始速率为 v_i；火箭喷射的气体相对于火箭的速率为 u；在 t 时刻的质量为 M，速率为 v。

在 t 时刻，火箭的动量为 Mv； 在 $t+\mathrm{d}t$ 时刻，火箭喷出质量为 $\mathrm{d}m$ 的气体，自身质量减少为 $M-\mathrm{d}m$，自身速率上升为 $v+\mathrm{d}v$；喷出去的气体质量为 $\mathrm{d}m$， 速率为 $v-u$。由动量守恒定律得：

$$Mv=(M-\mathrm{d}m)(v+\mathrm{d}v)+\mathrm{d}m\cdot(v-u)$$

同时，火箭质量的增量为 $\mathrm{d}M=-\mathrm{d}m$，代入上式得：

$$Mv=(M+\mathrm{d}M)(v+\mathrm{d}v)-\mathrm{d}M\cdot(v-u)$$

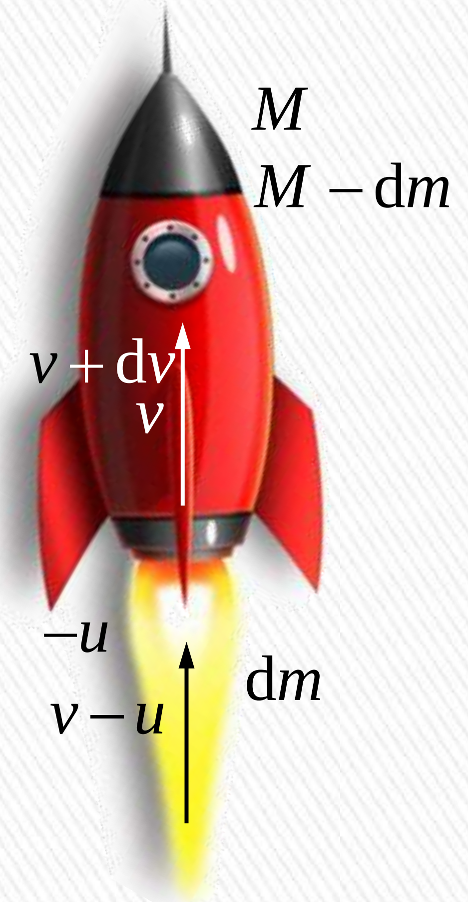
展开并略去二阶无穷小 $\mathrm{d}M\cdot\mathrm{d}v$，得： $u\mathrm{d}M+M\mathrm{d}v=0$

3.3 火箭飞行原理 (2)

不考虑重力影响

设火箭点火时初始质量为 M_i，初始速 率为 v_i；火箭喷射的气体相对于火箭的速率为 u；在 t 时刻的质量为 M，速率为 v。

$$u\mathrm{d}M + M\mathrm{d}v = 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{d}v = -u\frac{\mathrm{d}M}{M}$$



在时间段 [0 , t] 上积分得：

$$\int_{v_i}^{v}\mathrm{d}v = -u\int_{M_i}^{M}\frac{\mathrm{d}M}{M} \;\Rightarrow\; v - v_i = u\ln\frac{M_i}{M}$$

上式说明火箭在点火一段时间后，其当前速率 v 由初始质量 M_i、初始速率 v_i、当前质量 M、喷射气体相对速率 u 共同决定。

火箭当前质量 M 由火箭燃料燃烧速率 $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t$ 决定。

3.3 火箭飞行原理 (3)

不考虑重力影响

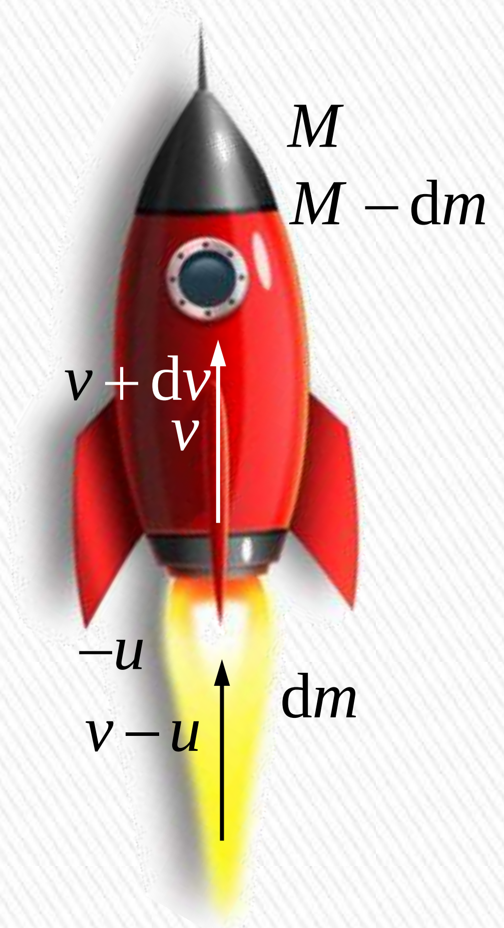
若已知火箭燃料的燃烧速率 d*m*/d*t*， 可求出火箭所受到的推力 *F* 。

研究 [t , t + dt] 时间间隔，由动量定理得：

$$F \cdot \mathrm{d}t = (M - \mathrm{d}m)\left[(v + \mathrm{d}v) - v\right] = M\mathrm{d}v$$

由前述分析可知，$M\mathrm{d}v = -u\mathrm{d}M = u\mathrm{d}m$，代入得：

$$F\mathrm{d}t = u\mathrm{d}m \;\Rightarrow\; F = u\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$$



即，火箭所受推力等于燃料燃烧速率 d*m*/d*t* 和喷射气体相对速率 *u* 的乘积。

3.4 质心

» 为了使问题简化，我们有时会把多个质点组成的系统，或者将本来有形状、体积的物体简化成一个质点。

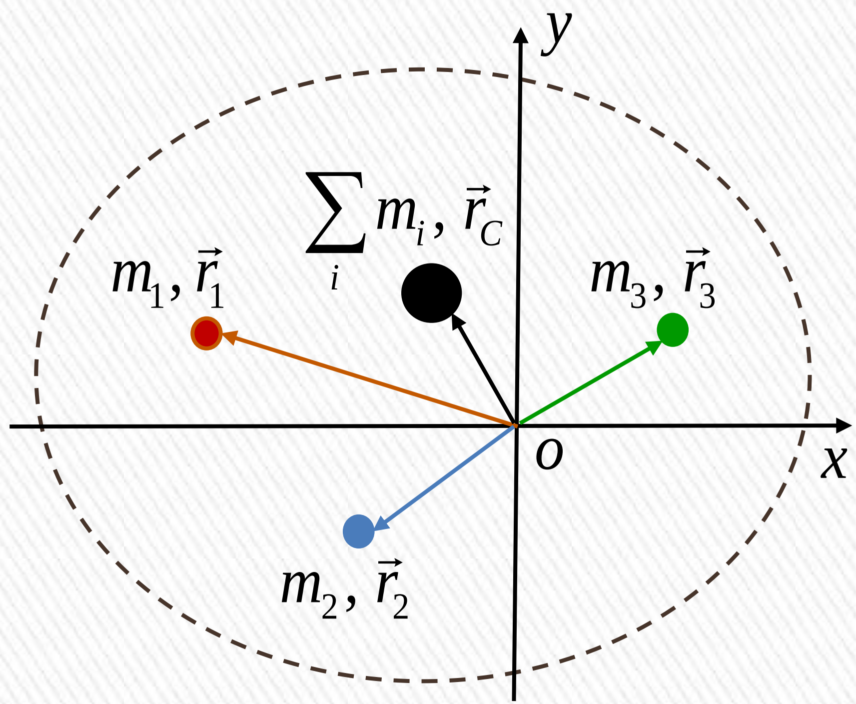
» 为此，需要把这个系统的质量集中到某个点上，这个点就是**质心**。

» **质量分布均匀**并**满足对称性**的物体，其质心即它的几何中心，例如均匀细棒、均匀圆环、均匀圆盘、均匀球体。

3.4 质心

» 对于由 n 个离散质点组成的系统，其质心的位矢为：

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i},$$



其中 $\vec{r}_i$ 为质点 m_i 的位矢。

» 其分量形式为：

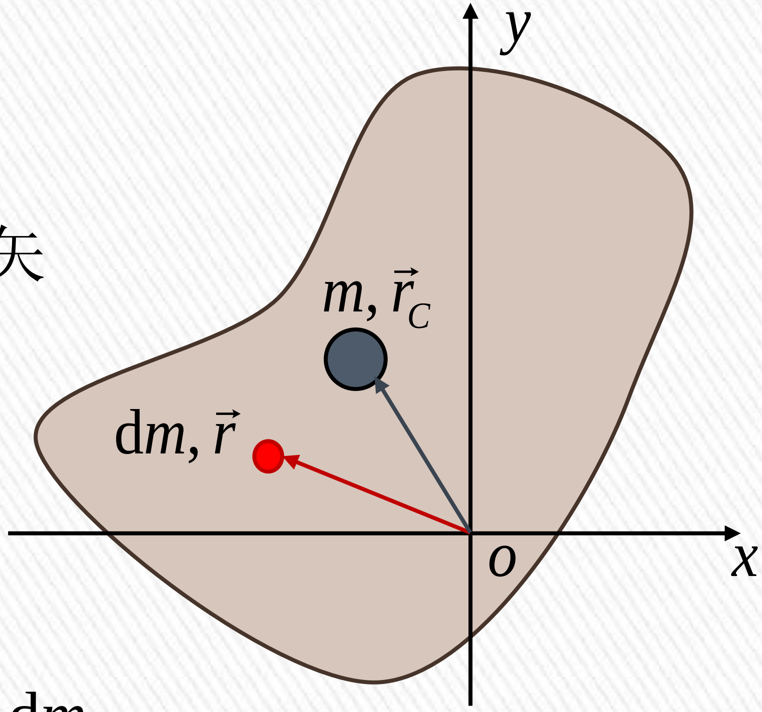
$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

3.4 质心

» 对于形状连续的物体，其质心的位矢为：

$$\vec{r}_C = \frac{\int \vec{r}\,\mathrm{d}m}{m},$$

其中 $\vec{r}$ 为质量微元 $\mathrm{d}m$ 的质心的位矢



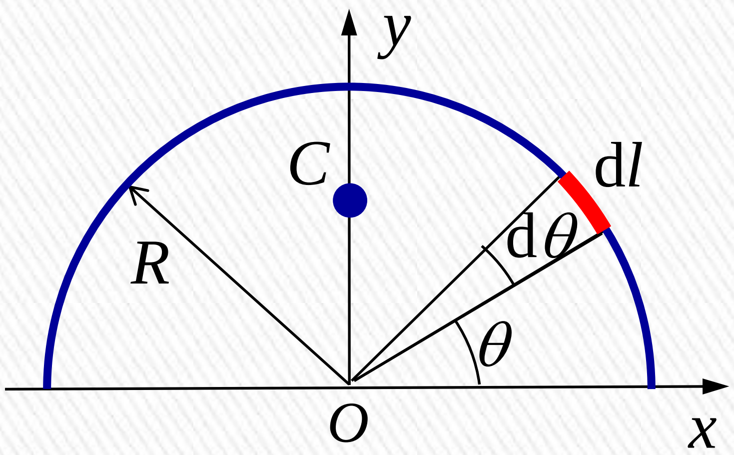
» 其分量形式为：

$$x_C = \frac{\int x\,\mathrm{d}m}{m}, \quad y_C = \frac{\int y\,\mathrm{d}m}{m}, \quad z_C = \frac{\int z\,\mathrm{d}m}{m}$$

3.4 质心

P93 例3.9：一段均匀铁丝弯成半圆形，半径为 R， 求其质心。

解：建立如图坐标系，原点选用半圆的圆心。



由对称性得，质心在 y 轴上，即 $x_C = 0$，只需求 y_C 即可。

设铁丝的质量线密度为 ρ，则它的质量为 $m = \rho\pi R$ 。

选取微元 dl ，则微元的质量为 $\mathrm{d}m = \rho \mathrm{d}l$ 。

质心在 y 轴上的坐标为：

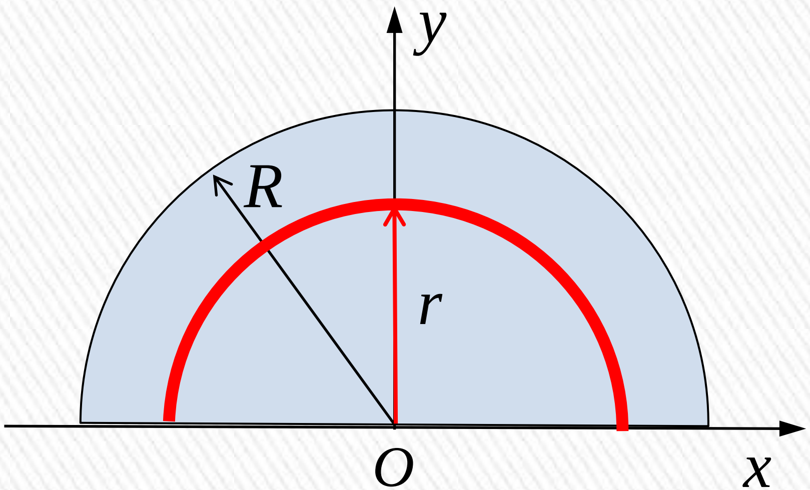
$$y_C = \frac{\int y\mathrm{d}m}{m} = \frac{\int_0^{\pi} R\sin\theta \cdot \rho \cdot R\mathrm{d}\theta}{\rho\pi R} = \frac{2R}{\pi}$$

$$\boxed{\begin{cases} y = R\sin\theta \\ \mathrm{d}m = \rho\mathrm{d}l \\ \mathrm{d}l = R\mathrm{d}\theta \end{cases}}$$

3.4 质心

P107 习题3.17：求半圆形均匀薄板的质心。

解：建立如图坐标系，原点选用半圆的圆心，半径设为 R。



由对称性得，质心在 y 轴上，即 $x_C = 0$，只需求 y_C 即可。

设半圆盘的质量面密度为 ρ，则它的质量为 $m = \rho\pi R^2/2$ 。

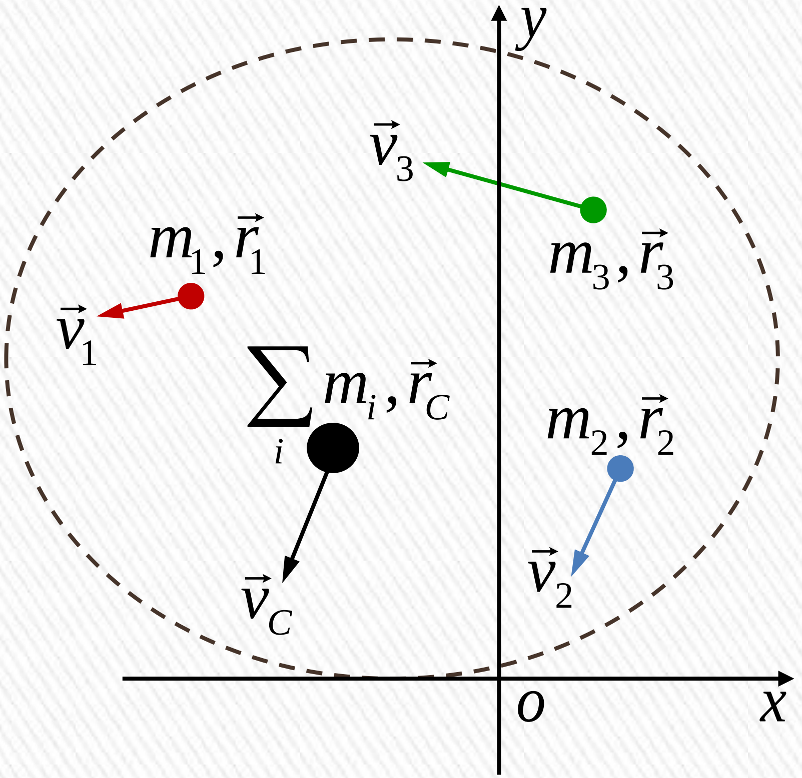
取半径为 r 的环状微元，则该微元的质量为 $\mathrm{d}m = \rho\pi r\mathrm{d}r$，质心在 y 轴上距离圆心 $2r/\pi$ 的位置。

则半圆盘的质心在 y 轴上的位置：

$$y_C = \frac{\int y\mathrm{d}m}{m} = \frac{\int_0^R \frac{2r}{\pi}\cdot\rho\pi r\mathrm{d}r}{\rho\pi R^2/2} = \frac{4R}{3\pi}$$

3.5 质心运动定理

» 把质点系简化到其质心以后，前述关于质点的运动定理、冲量定理等即可应用于经过简化的质心，即把所有质点的质量集中到质心，质心的位置按上一节的方法计算。



» 质心的位矢： $\vec{r}_C = \dfrac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$

» 质心的速度： $\vec{v}_C = \dfrac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i}$

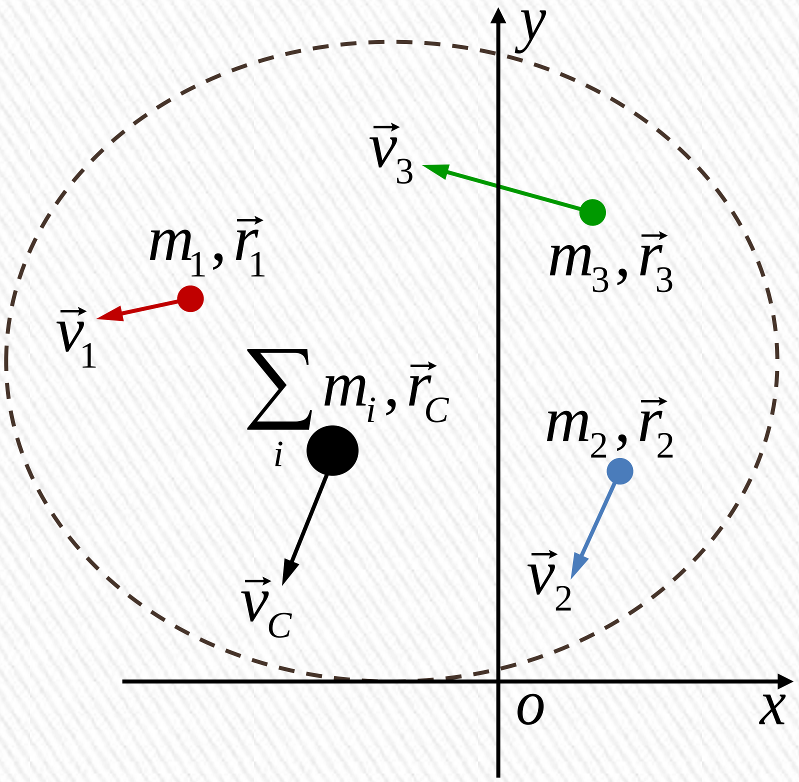
» 质心的加速度： $\vec{a}_C = \dfrac{\sum_i m_i \vec{a}_i}{\sum_i m_i}$

3.5 质心运动定理

» 质心的动量：

$$\vec{p}_C=\sum_i \vec{p}_i=\sum_i m_i\vec{v}_i$$

$$=\left(\sum_i m_i\right)\cdot\vec{v}_C$$



» 牛顿第二定律在质心系中的形式为：

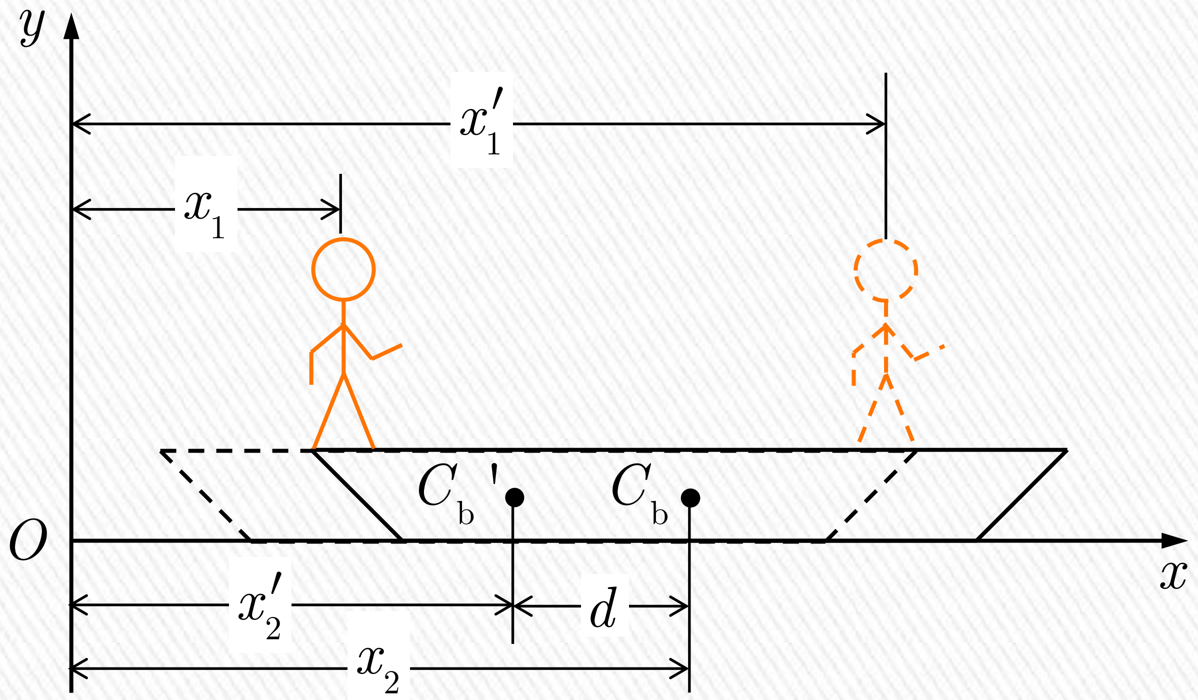
$$\vec{F}=\frac{\mathrm{d}\vec{p}_C}{\mathrm{d}t}=\left(\sum_i m_i\right)\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{v}_C}{\mathrm{d}t}=\left(\sum_i m_i\right)\cdot\vec{a}_C$$

质心运动定理，
与质点的运动定理类似

重要推论：当系统所受合外力为零时，系统质心的速度保持不变。

3.5 质心运动定理

P95 例3.10：一质量 $m_1 = 50$ kg 的人站在一条质量 $m_2 = 200$ kg，长 $l =$ 4 m 的船头上。开始时船静止，试求当人走到船尾时，船移动的距离。(水的阻力不计)



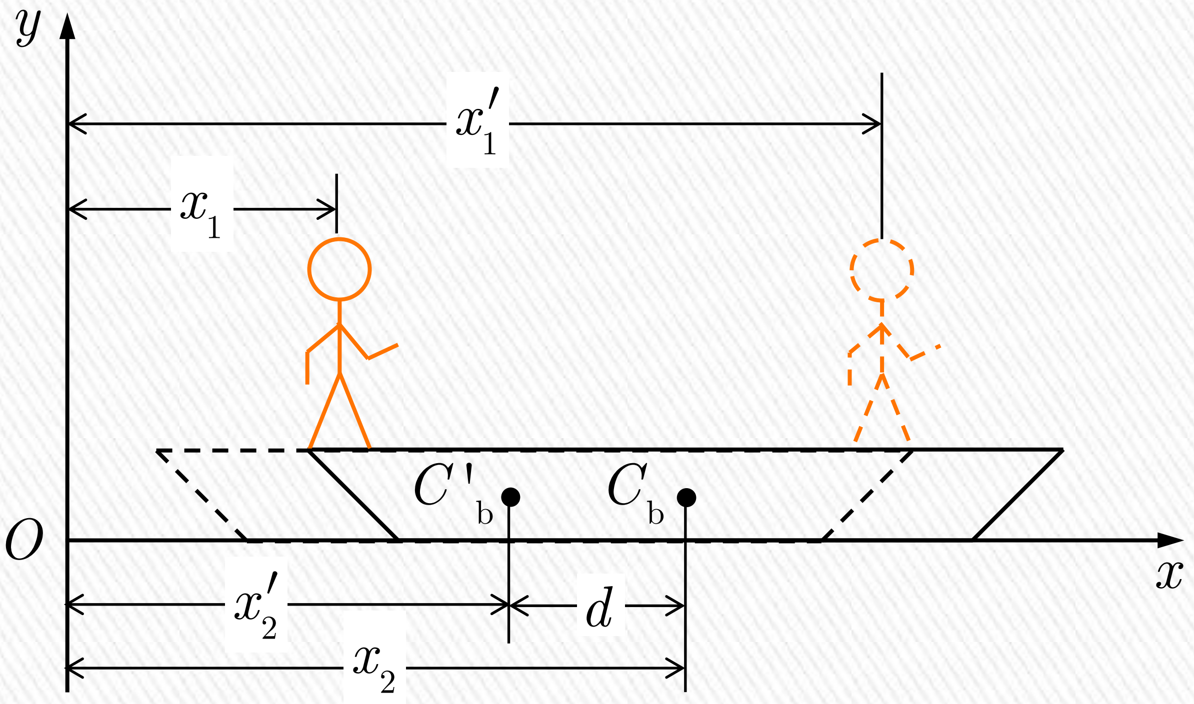
解：人-船系统在水平方向上不受外力，因此质心保持静止状态。以 C_b 和 C_b' 表示船移动前后的质心，可知，船的质心即它的中点。用 d 来表示船移动的距离。

当人在船的左侧时，人-船系统的质心为：
$$x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

3.5 质心运动定理

P95 例3.10：一质量 $m_1 = 50$ kg 的人站在一条质量 $m_2 = 200$ kg，长 $l = 4$ m 的船头上。开始时船静止，试求当人走到船尾时，船移动的距离。(水的阻力不计)

解(续)：当人走到船的右边时，人-船系统的质心为：



$$x'_C = \frac{m_1 x'_1 + m_2 x'_2}{m_1 + m_2}$$

由 $x_C = x'_C$ 得知：

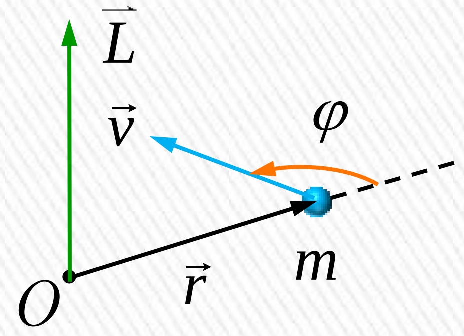
$$m_1 x_1 + m_2 x_2 = m_1 x'_1 + m_2 x'_2 \ \Rightarrow\ m_2(x_2 - x'_2) = m_1(x'_1 - x_1)$$

即：$$m_2 d = m_1(l - d) \ \Rightarrow\ d = \frac{m_1}{m_1 + m_2} l$$

3.6 质点的角动量和角动量定理

» 当质点绕某个原点转动时，定义其角动量：

$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times m\vec{v}=m\left(\vec{r}\times\vec{v}\right)$$



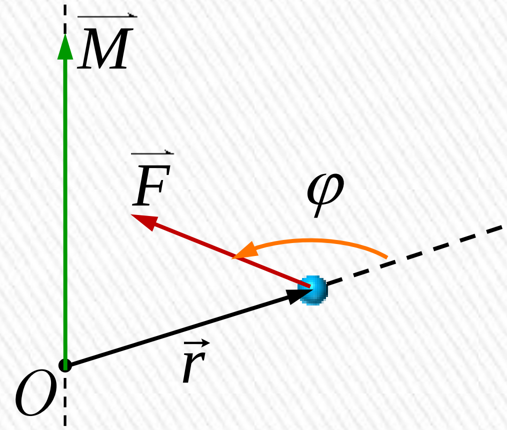
» 其大小为：

$$L=rp\sin\varphi=mrv\sin\varphi$$

» 其方向符合右手螺旋法则：

3.6 质点的角动量和角动量定理

» 力矩：与质点的动量对应，当质点的角动量发生变化时，必然伴随外界对它的作用，这一使质点角动量改变的量称为力矩。



» 定义：

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (\text{SI单位：牛}\cdot\text{米，N}\cdot\text{m})$$

» 大小：

$$M = rF\sin\varphi$$

» 方向：符合右手螺旋法则。

角动量、力矩必然是相对于某一固定点而言的。

3.6 质点的角动量和角动量定理

» 推导：

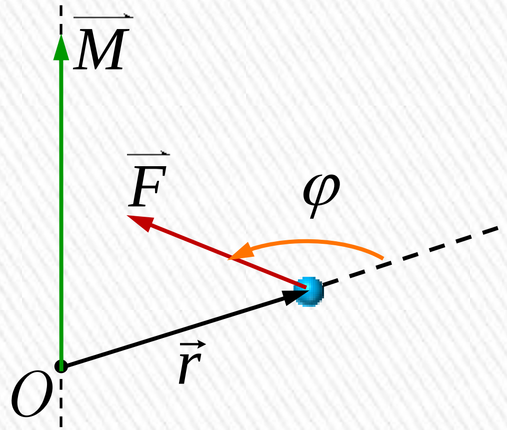
$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(\vec{r}\times\vec{p})}{\mathrm{d}t}$$

$$=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\times\vec{p}+\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$

$$=\vec{v}\times\vec{p}+\vec{r}\times\vec{F}$$

$$=\vec{r}\times\vec{F}$$

$$=\vec{M}$$



质点的合外力矩等于质点角动量随时间的变化率。

$$\vec{M}=\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$$

类比

$$\vec{F}=\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$

质点的合外力等于质点动量随时间的变化率。

3.7 角动量守恒定律

» 角动量守恒定律：

　　如果相对于某一固定点，质点所受的合外力矩为零，则此质点对该固定点的角动量保持不变，即角动量的大小、方向均不变。

$$\overrightarrow{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \vec{r} \times \vec{P} = \vec{C}$$

» 与动量守恒定律相似，角动量守恒定律也是自然界的一条基本定律。虽然我们在牛顿力学部分学习它们，但是它们的成立条件并不依赖牛顿力学。

» 即使在目前已知的所有极端条件下，它们依然是成立的。

3.7 角动量守恒定律

» 从力矩的定义可以看出，角动量守恒的情景有三种：

1. 质点相对于某固定点受多个力矩作用，但各个力矩的矢量和为零： $\sum_i \overrightarrow{M_i} = 0$

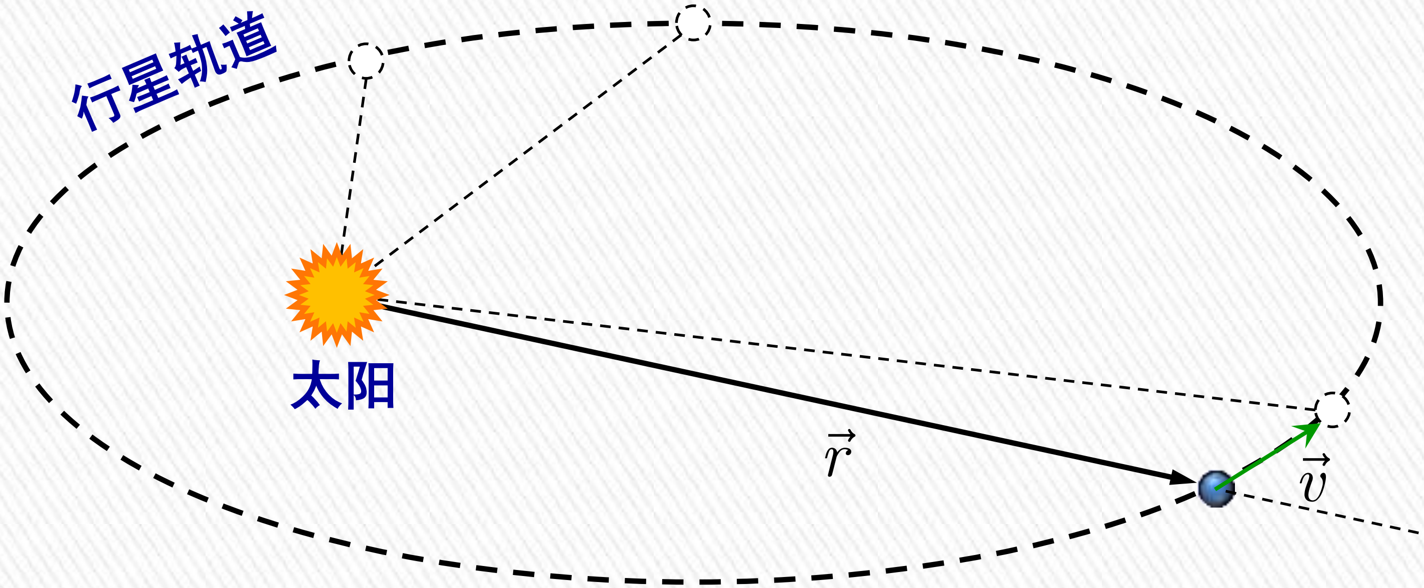
2. 力的作用方向通过了所选取的固定点，即 $\vec{r} = 0$

3. 外力作用于同一点，且合外力为零，即 $\overrightarrow{F} = 0$

3.7 角动量守恒定律

P100 例3.18：证明开普勒第二定律：行星对太阳的径矢在相等的时间内扫过的面积相等。

证明：对行星进行受力分析，它受到的太阳引力始终和其径矢 $\vec{r}$ 方向反平行，也就是，太阳引力对行星的力矩为零，即，行星在运行过程中，对太阳的角动量始终保持不变。



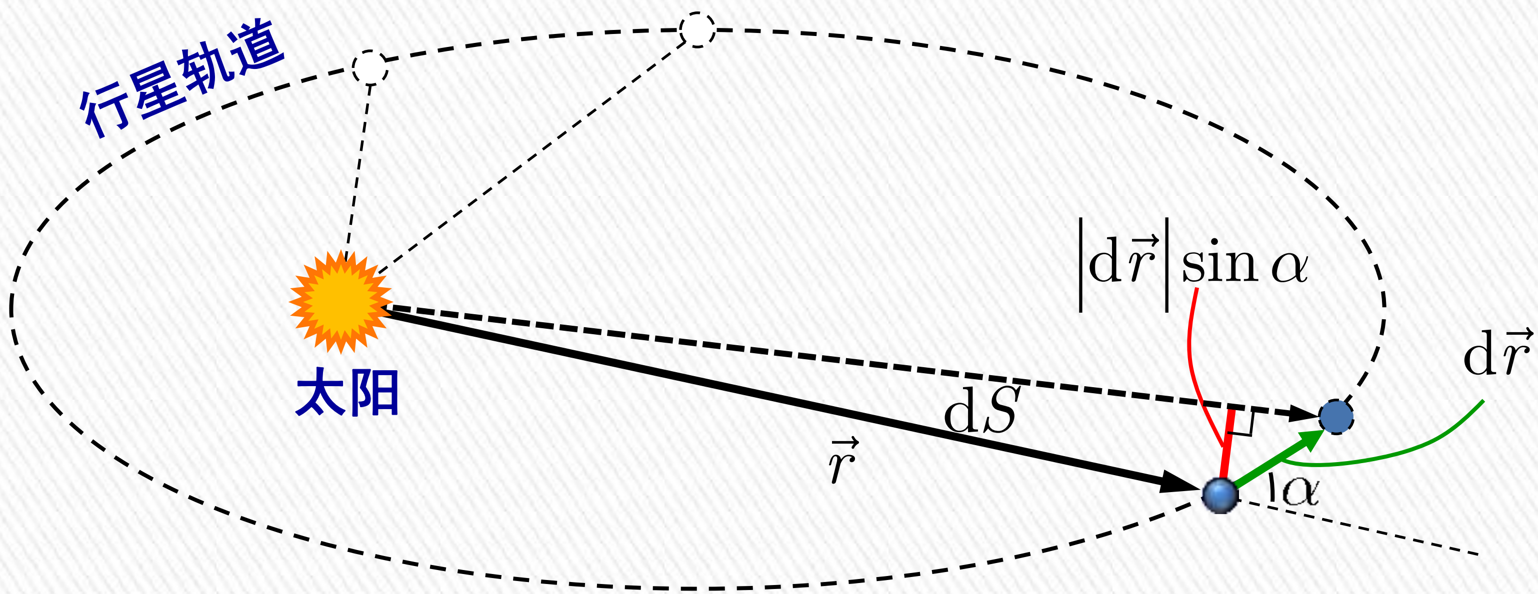
3.7 角动量守恒定律

P100 例3.18：证明开普勒第二定律：行星对太阳的径矢在相等的时间内扫过的面积相等。

证明(续)：行星对太阳的角动量大小为

$$L = m \cdot v \cdot r \cdot \sin\alpha = m \cdot \left|\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right| \cdot r \cdot \sin\alpha = m\frac{\left|\mathrm{d}\vec{r}\right|\sin\alpha \ \cdot r}{\mathrm{d}t} = m\frac{2\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$$

角动量不变，则 d*S*/d*t* 不变，即单位时间内扫过的面积相等。



3.8 质点系的角动量定理

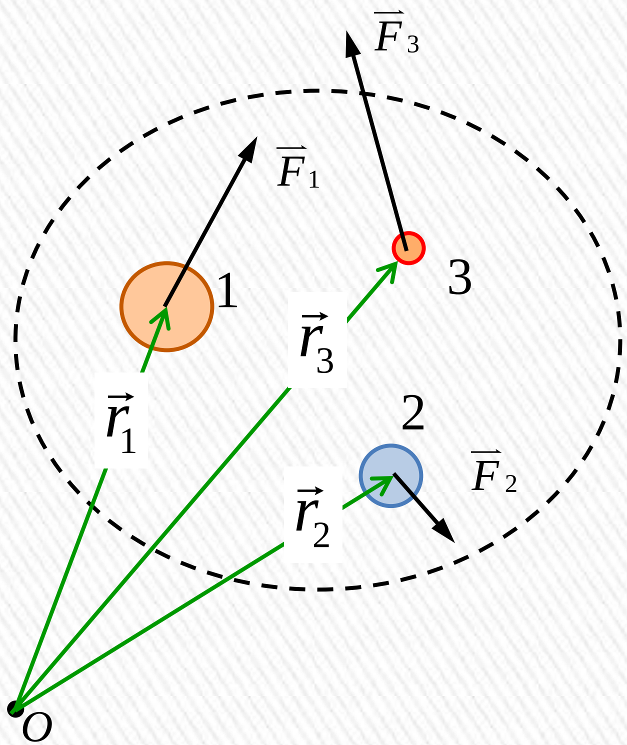
» 上面我们探讨了单个质点的角动量与合外力矩之间的关系，在多个质点组成的质点系中，情况如何呢？

» **质点系的总角动量等于各质点的角动量的矢量和：**

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

» **质点系的总角动量对时间的变化率等于该质点系所受的合外力矩：**

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \vec{M}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$



3.8 质点系的角动量定理

» 从上面的推导我们得到几个重要结论：

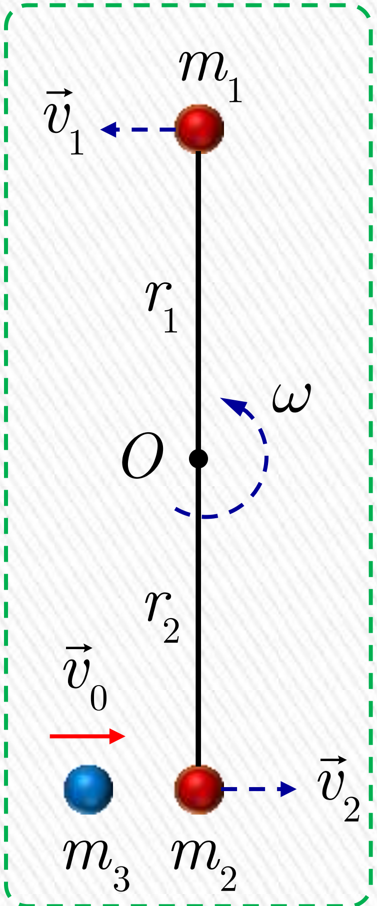
（1）在质点系内部，作用于某一质点的内力会影响该质点的力矩，但对整一个质点系的合力矩、总角动量无影响：

（2）当质点系相对于某一固定点所受的合外力矩为零时，该质点系相对于该定点的总角动量不随时间变化，即：

$$\sum_i \overrightarrow{M}_i = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \vec{C}$$

3.8 质点系的角动量定理

P102 例3.20：如图所示，质量分别为 m_1 和 m_2 的两个小钢球固定在一个长为 a 的轻质硬杆的两段，杆的中点有一轴，可以使得杆在水平面内自由转动，杆原来静止。另一泥球质量为 m_3，以水平速度 v_0 垂直于杆的方向与 m_2 发生碰撞，碰后二者粘在一起。设 $m_1 = m_2 = m_3$，求碰撞后杆转动的角速度。



解：碰撞时，质点系不受外力矩作用，角动量守恒：

$$m_3\vec{r}_2 \times \vec{v}_0 = \ m_2 + m_3\ \ \vec{r}_2 \times \vec{v}_2 + m_1\vec{r}_1 \times \vec{v}_1$$

$$\begin{cases} m_3 r_2 v_0 = \ m_2 + m_3\ \ r_2 v_2 + m_1 r_1 v_1 \\ m_1 = m_2 = m_3 = m \\ r_1 = r_2 = a/2 \\ \omega = v_1/r_1 = v_2/r_2 \end{cases}$$

解得：$\omega = \dfrac{2v_0}{3a}$