大学物理(1)

云南大学

第 8 章 电势

一个质点在运动过程中如果只受保守力作用，则保守力做功多少与运动路径无关，只与运动起始和结束的位置有关；

因此，可以引入“势”的概念来描述质点运动前后保守力做功的多少。

任课教师：张艳

8.1 静电场的保守性

静电场的保守性：

对于**所有的静电场**，电场强度的曲线积分 $\int_{(P_1)}^{(P_2)} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$ 都只取决于运动的始末位置，与运动路径无关。

具有这种性质的力场，称为**保守场**。

8.1 静电场的保守性

» 对于保守力场，质点在其中沿任一闭合回路运动，保守力做功为零，即：

$$A_{\text{conservative}} = \oint_L \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$$

» 因此容易得知，对于任一静电场，场强沿闭合回路的曲线积分为零，即：

$$\oint_L \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$$

静电场的环路定理：

在所有静电场中，电场强度沿任一闭合回路的积分为零。

8.2 电势差和电势

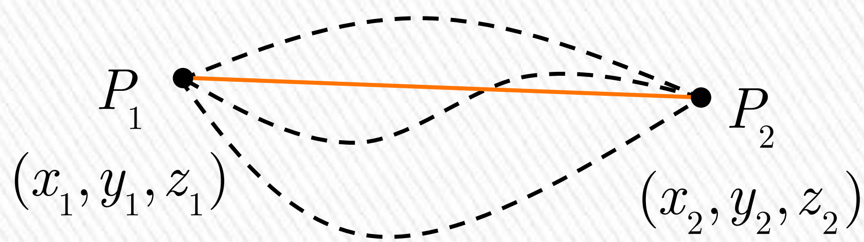
» 问题的出发点：寻求一种更简单的方法来描述静电场。(场强是矢量，用起来不方便)

» 由于保守力做功多少只与质点的始末位置相关，与路径无关，而且保守力做了多少功，体系的势能就减少多少。

» 因此，在电场中将一个点电荷从 P_1 移动到 P_2，电场力所做的功为：

$$A_{12} = E_{\mathrm{p1}} - E_{\mathrm{p2}} = \int_{(P_1)}^{(P_2)} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$= \int_{(P_1)}^{(P_2)} q\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$



$$\Rightarrow \quad \frac{E_{\mathrm{p1}}}{q} - \frac{E_{\mathrm{p2}}}{q} = \int_{(P_1)}^{(P_2)} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

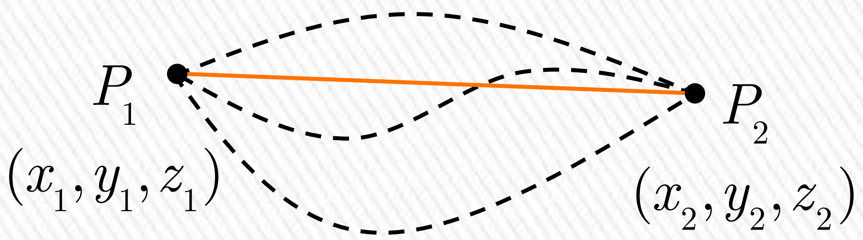
8.2 电势差和电势

» 由于静电场是保守场，我们自然联想到**势能**的概念：

» 即，肯定存在着这样一个空间坐标的**标量函数**，空间两点 P_1 和 P_2 对应的该函数的值的差，正好等于单位正电荷从 P_1 沿任意路径移动到 P_2 过程中，电场力所做的功：

$$\frac{E_{p1}}{q} - \frac{E_{p2}}{q} = \int_{(P_1)}^{(P_2)} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{(P_1)}^{(P_2)} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$



» 其中 φ 称为**电势**，它是空间坐标的函数：

$$\varphi_1 = \varphi(x_1, y_1, z_1)\,,\ \varphi_2 = \varphi(x_2, y_2, z_2)$$

» φ_1 -φ_2 称为两点的**电势差**，也叫作两点的**电压**，通常表示为：

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2$$

注意下标的顺序！

8.2 电势差和电势

» 要计算静电场中某点的电势，需要选取一个**电势零点**。

» 如果选取了空间中某点 P_0 为电势零点，则另一点 P 处的电势为：

$$\varphi_P = \int_{(P)}^{(P_0)} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

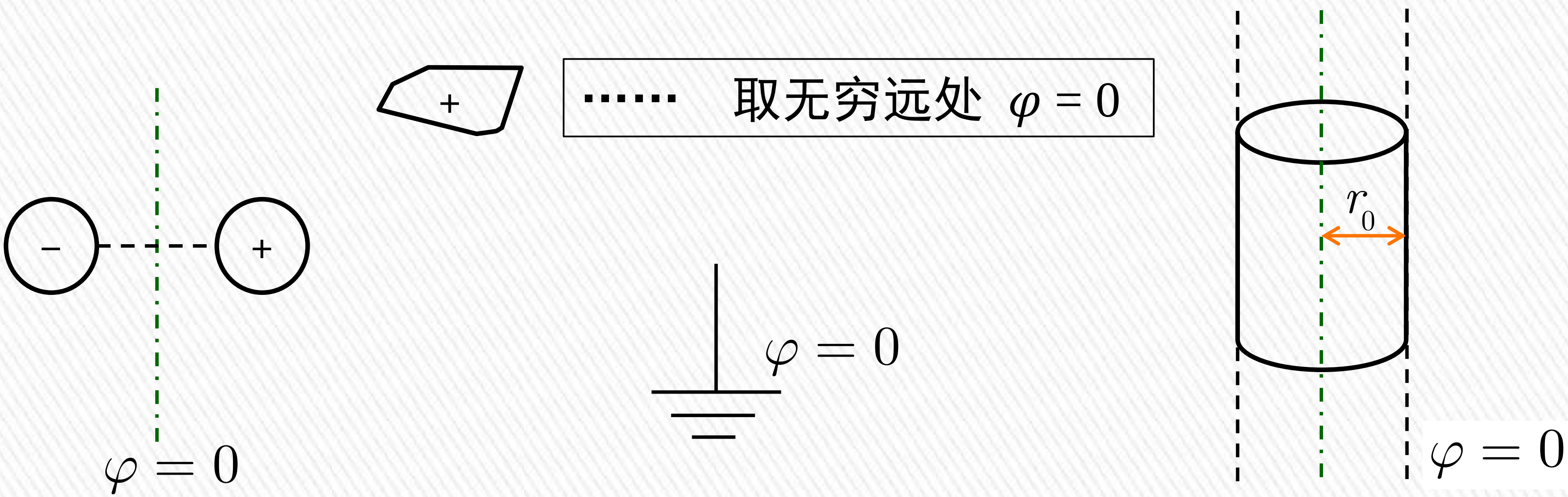
φ_P 在数值上等于将单位正电荷从 P 点移动到 P_0 点，电场力所做的功。

积分路径的选取原则：**选取能使积分最简单的**。

8.2 电势差和电势

» **电势零点**选取原则：

- 对于球对称或一般形状带电体，以计算方便为原则，一般选取无穷远处；
- 对于电偶极子，选取正负电荷连线中垂面上任一点；
- 对于有接地点的带电体系，接地点为零电势参考点；
- 对于无限大平面，无限长直导线，无限长圆柱等电荷分布扩展至无穷远处的带电体，选取带电体附近任一点。



8.2 电势差和电势

» 关于电势我们还需要知道三点知识：

- (1) 在 SI 制中，电势和电势差的单位都是伏特(V)。
- (2) 带电量为 q 的点电荷在电场中从 P_1 点移动到 P_2 点，电场力做功为：

$$A_{12} = q\int_{(P_1)}^{(P_2)} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = q\ \ \varphi_1 - \varphi_2\ \ = qU_{12}$$

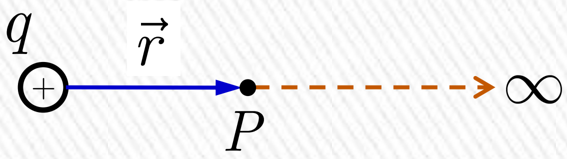
8.2 电势差和电势

» 关于电势我们还需要知道三点知识：

> (3) 点电荷 q 的电势函数，即：以无穷远处为电势零点，该电荷在**距离它自身 r** 的**点 P** 处产生的电势为：

$$\varphi = \int_{(P)}^{(\infty)} \overrightarrow{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{r}^{\infty} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{e}_r \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$



$\mathrm{d}\vec{r}$ 的方向如何判定？

沿从场点指向电势参考点的方向，

即积分下限和上限之间的方向。

8.2 电势差和电势

» 求电势的一般步骤：

(1) 求电场强度；

(2) 选取电势零点；

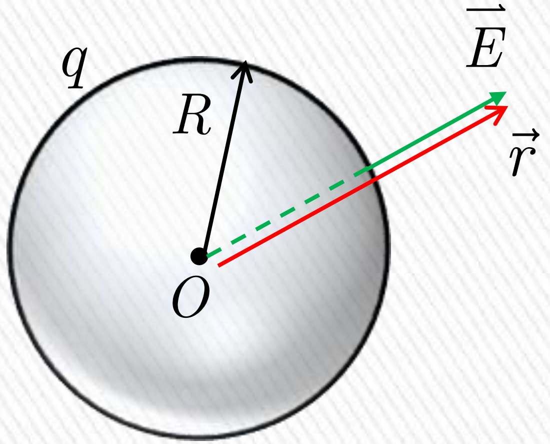
(3) 选取最简便的积分路径，一般沿直线积分；

(4) 如果积分路径经过多个电场区域，则分段积分之后相加。

8.2 电势差和电势

P267 例 8.1：求均匀带电球面的电场中的电势分布，球面半径为 R，总带电量为 q。

解：由 **P255 例7.9** 得知，均匀带电球面的电场强度方向为径矢方向，大小为：



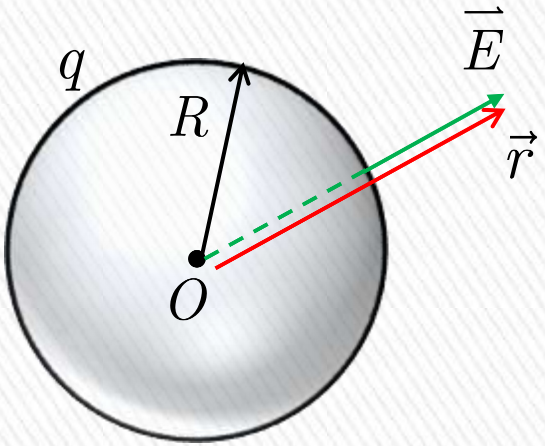
$$E=\begin{cases}0 & , r<R \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & , r\geq R\end{cases}$$

取无穷远为电势零点，则其电势为：

$$\varphi=\int_r^{\infty}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\int_r^{\infty}E\cdot \mathrm{d}r=\begin{cases}\displaystyle\int_r^R 0\mathrm{d}r+\int_R^{\infty}\frac{q\cdot \mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0 r^2} , & r\leq R \\ \displaystyle\int_r^{\infty}\frac{q\cdot \mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0 r^2} , & r>R\end{cases}$$

8.2 电势差和电势

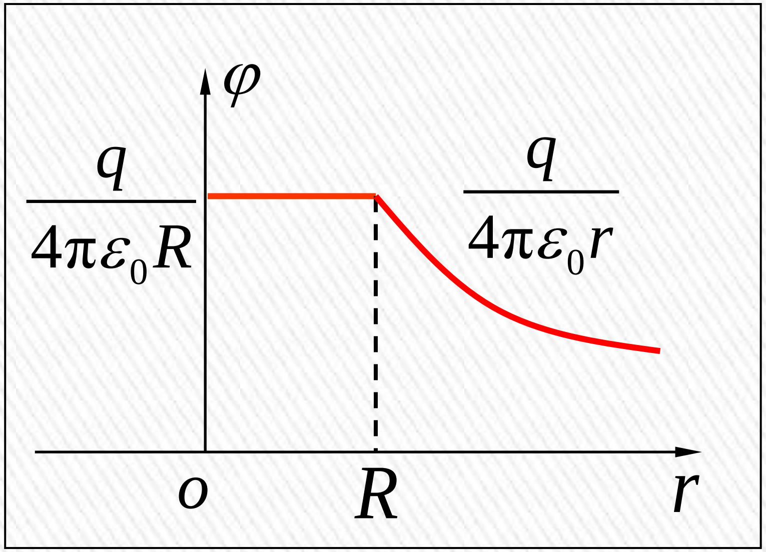
P267 例 8.1：求均匀带电球面的电场中的电势分布，球面半径为 R，总带电量为 q。



解(续)：

$$\varphi=\begin{cases}\int_r^R 0\mathrm{d}r+\int_R^{\infty}\dfrac{q\cdot\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, & r\le R\\[2ex] \int_r^{\infty}\dfrac{q\cdot\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, & r>R\end{cases}$$

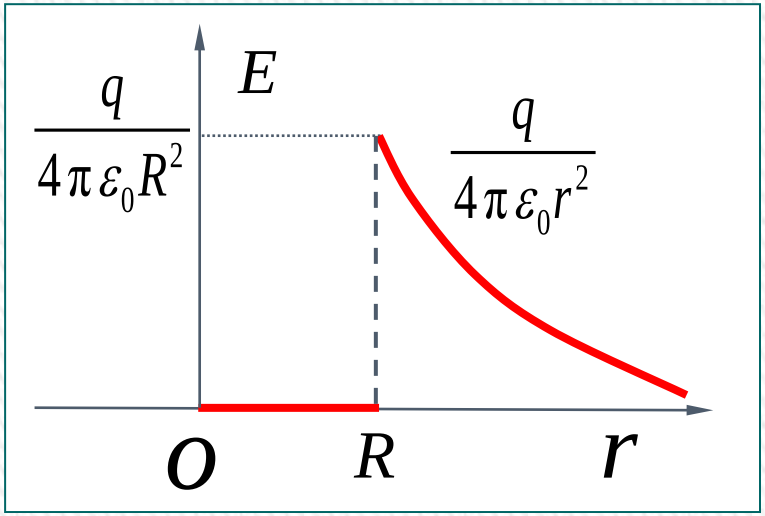
$$=\begin{cases}\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}, & r\le R\\[2ex] \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}, & r>R\end{cases}$$



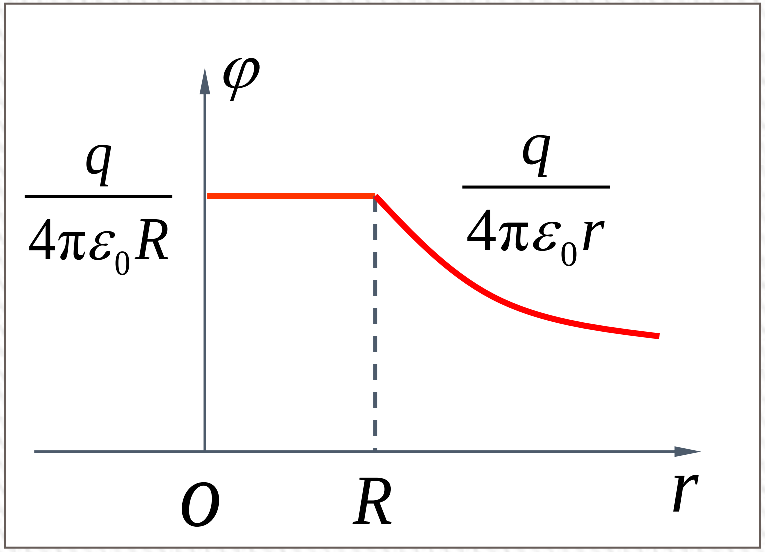
8.2 电势差和电势

讨论：均匀带电球面的电场和电势的关系：

$$E=\begin{cases}0 & , \quad r\le R\\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & , \quad r>R\end{cases}$$

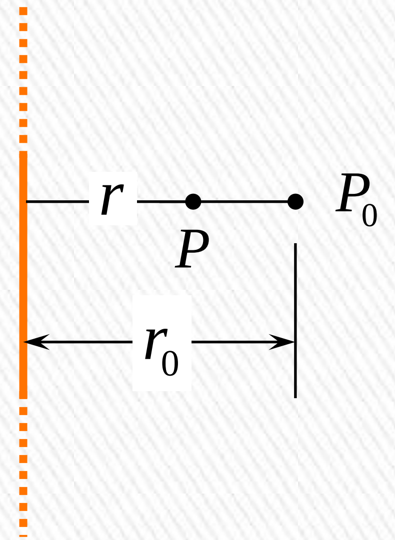


$$\varphi=\begin{cases}\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} & , \quad r\le R\\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} & , \quad r>R\end{cases}$$



8.2 电势差和电势

P267 例 8.2：求无限长均匀带电直线的电场的电势分布，已知电荷线密度为 λ 。



解：由 **P257 例7.11** 得知，无限长均匀带电直线的电场分布是轴对称、垂直于直线的，其大小为：

$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

对于这类电荷分布扩展到无限远的情况，不能选取无穷远为电势零点，选择带电体附近的 P_0 点，则 P 点的电势为：

$$\varphi=\int_{(P)}^{(P_0)}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_{r}^{r_0}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\mathrm{d}r=-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln r+\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln r_0=-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln r+C$$

C 是一个跟电势零点有关的常数。

8.3 电势叠加原理

» 对于在空间中具有某种分布的多个点电荷激发的静电场，该电场中某点的电势也满足叠加原理。

» 这一点，很容易从电场力的叠加原理、电场的叠加原理联想到，并且导出。

$$\varphi = \int_P^{P_0} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_P^{P_0} \sum_i \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \sum_i \int_P^{P_0} \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

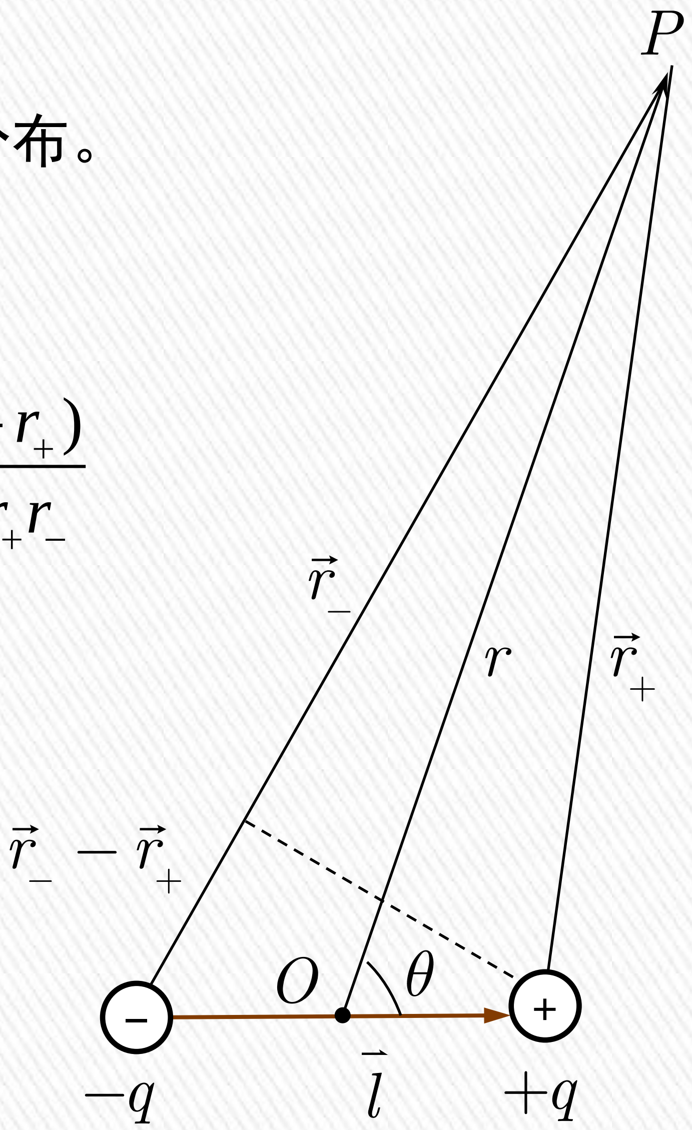
$$\varphi = \sum_i \varphi_i = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$$

» 如果这些电荷连续地分布在某个带电体上，则需要把求和转换成积分：

$$\varphi = \int \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

8.3 电势叠加原理

P268 例 8.3：求电偶极子的电场中的电势分布。



解：由电势叠加原理，P 点的电势为

$$\varphi = \varphi_+ + \varphi_- = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_+} + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r_-} = \frac{q(r_- - r_+)}{4\pi\varepsilon_0 r_+ r_-}$$

当 $r >> l$ 时，有

$$r_- - r_+ = l\cos\theta\text{，}\ r_+ r_- \simeq r^2$$

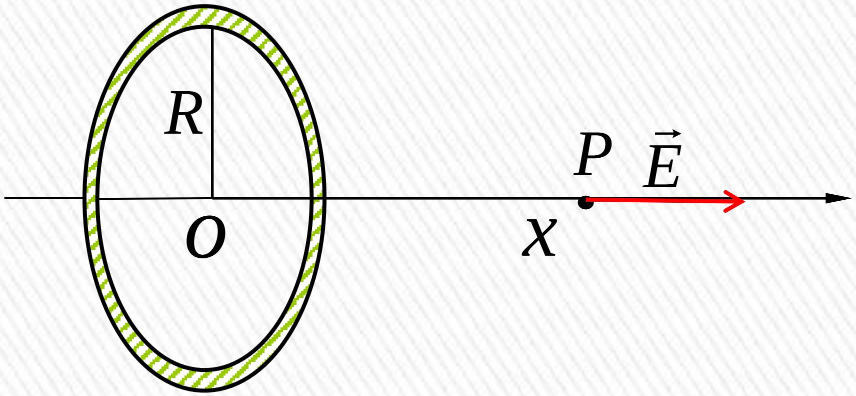
代入得：

$$\varphi = \frac{ql\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{pr\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

8.3 电势叠加原理

P269 例 8.4：一半径为 R 的均匀带电圆环，所带总电量为 q，求其轴线上任一点 P 的电势。

解法一：由 **P249 例7.5**得知，均匀圆环轴线上的场强为



$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qx}{(R^2+x^2)^{3/2}}$$

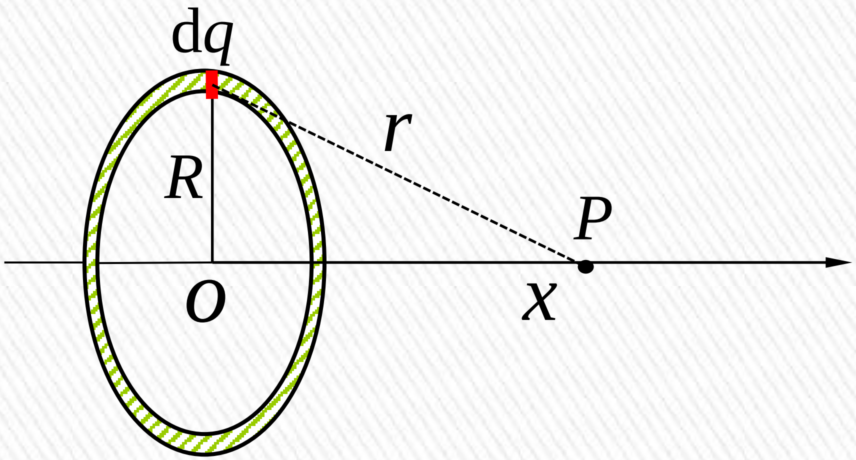
则以无穷远处为电势零点，P 点处的电势为

$$\varphi = \int_{(P)}^{\infty}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{x} = \int_{(P)}^{\infty} E\cdot \mathrm{d}x$$

$$= \int_{x}^{\infty}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qx\mathrm{d}x}{(R^2+x^2)^{3/2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(R^2+x^2)^{1/2}}$$

8.3 电势叠加原理

P269 例 8.4：一半径为 R 的均匀带电圆环，所带总电量为 q，求其轴线上任一点 P 的电势。



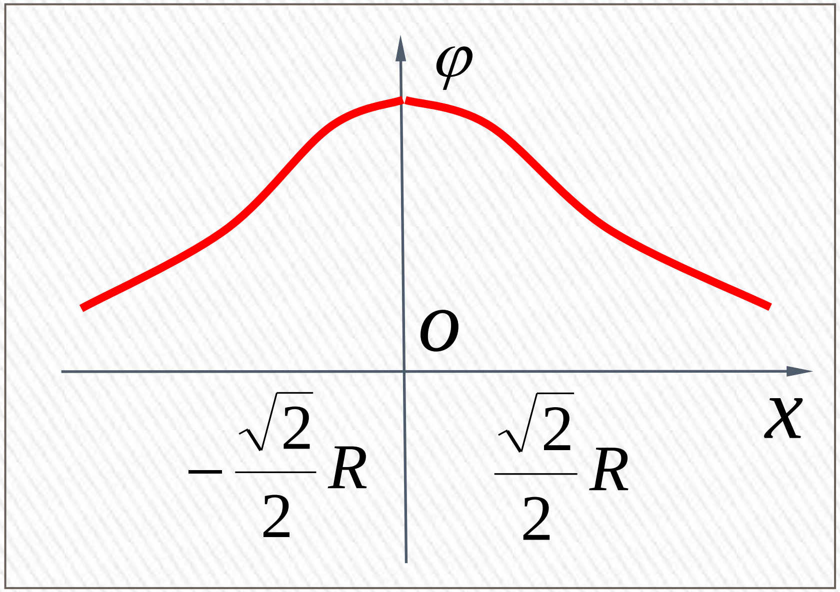
解法二：在圆环上取一微元 dq，微元在 P 点产生的电势为：

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

由电势的叠加原理，P 点的电势为

$$\varphi = \int_q \mathrm{d}\varphi = \int_q \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

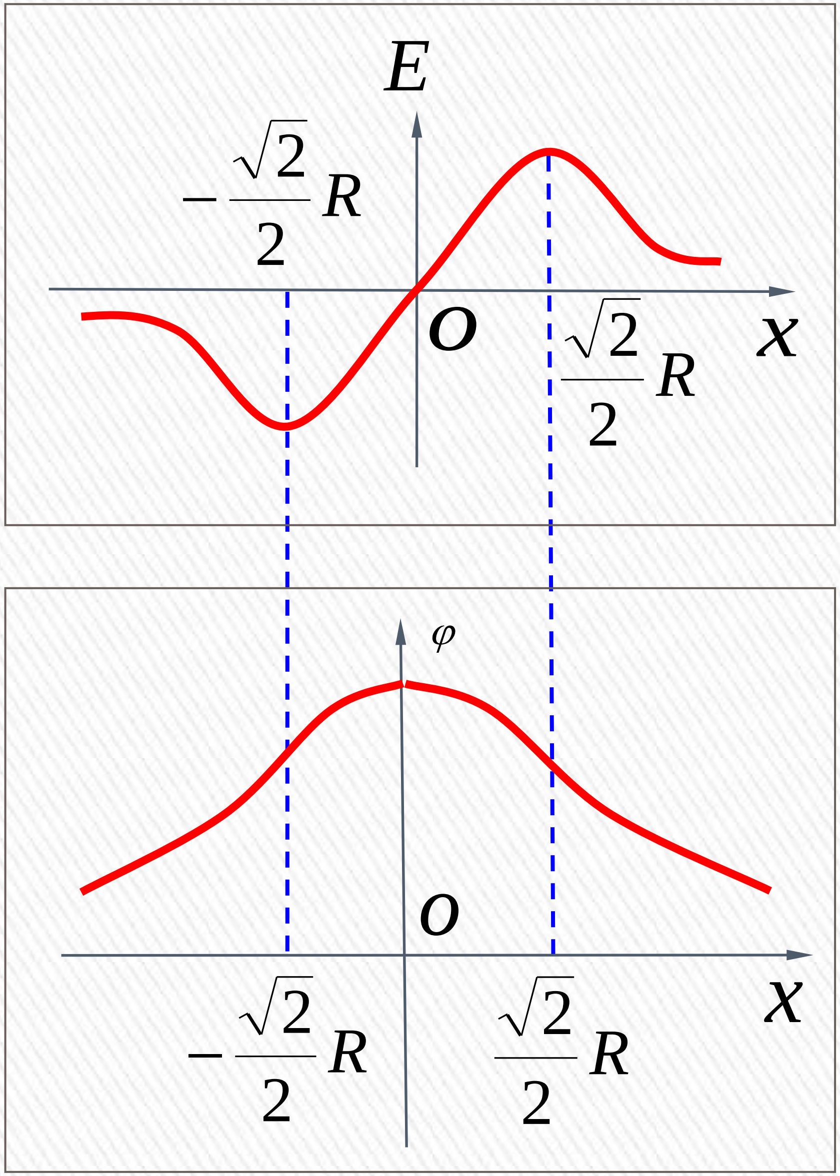
$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(R^2+x^2)^{1/2}}$$



» 均匀带电圆环轴线上的电场强度和电势的关系：

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qx}{(R^2+x^2)^{3/2}}$$

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+x^2}}$$

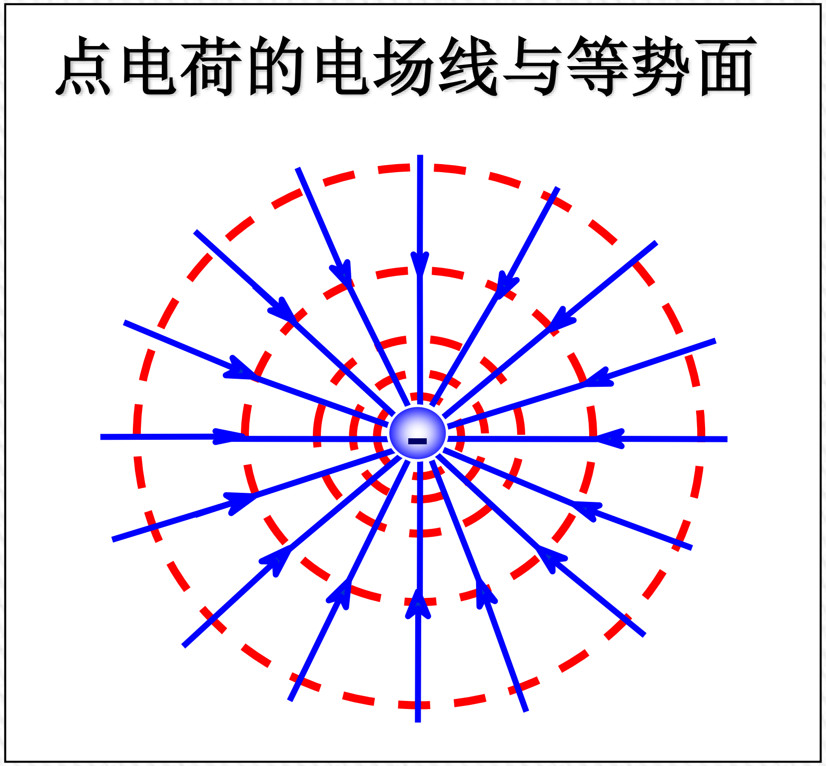


8.3 电势叠加原理

» 等势面：

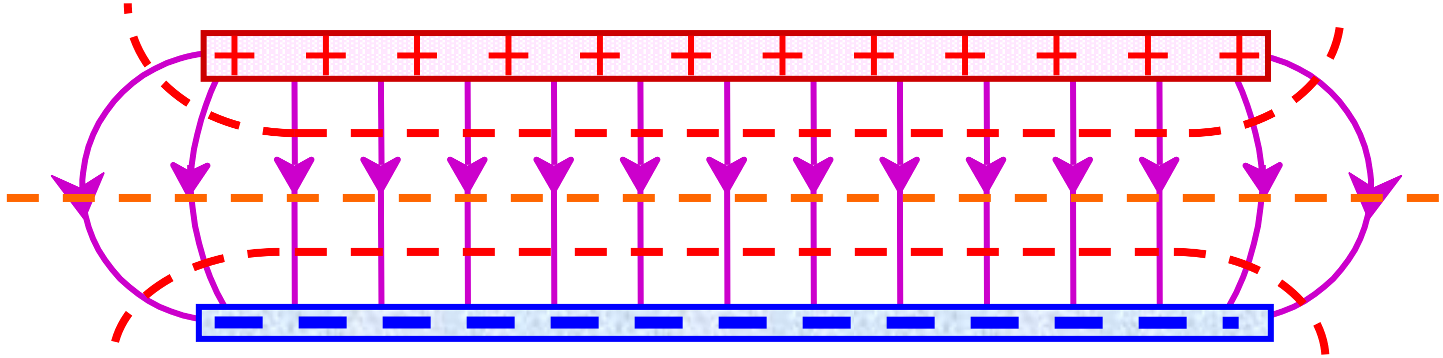
电势相等的点组成的曲面叫做等势面。

或者反过来说，如果在电场中一个曲面上各点电势相等，则这个面称为等势面。

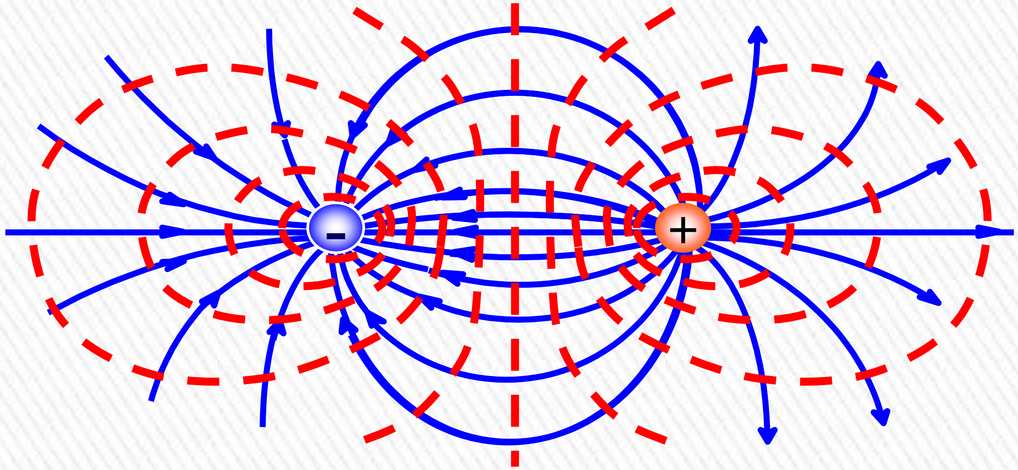


8.3 电势叠加原理

两平行带电平板的电场线和等势面



一对等量异号点电荷的电场线和等势面

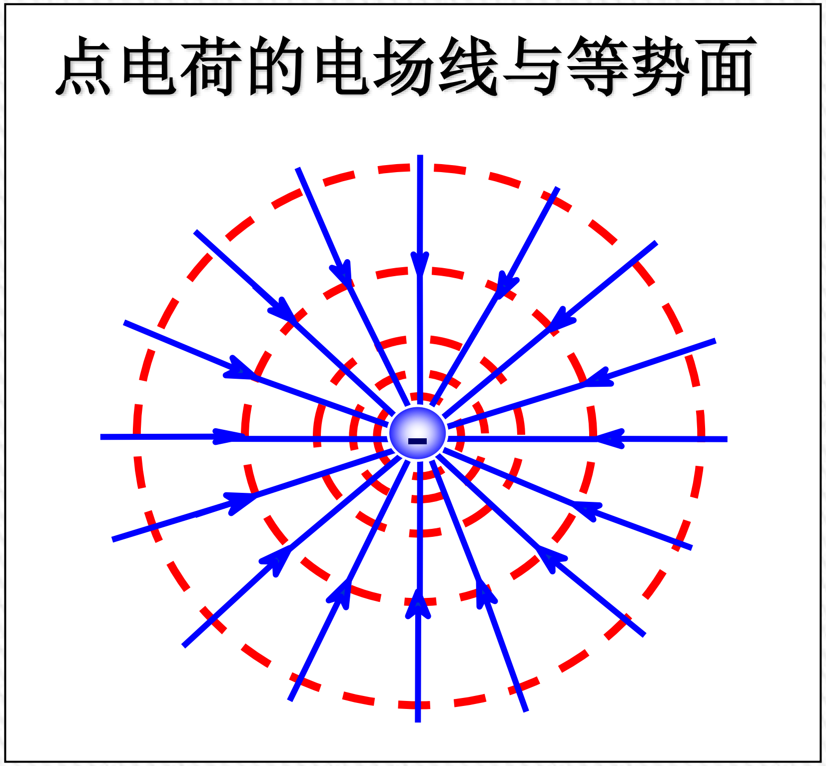


8.3 电势叠加原理

» 等势面和电场分布的关系：

> 等势面和电场线处处正交；

> 等势面越密集，电场强度越大，反之亦然；



8.4 电势梯度

» 电场强度和电势之间有确定的数学关系，

» 电势等于电场强度在空间上的积分：

$$\varphi = \int \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

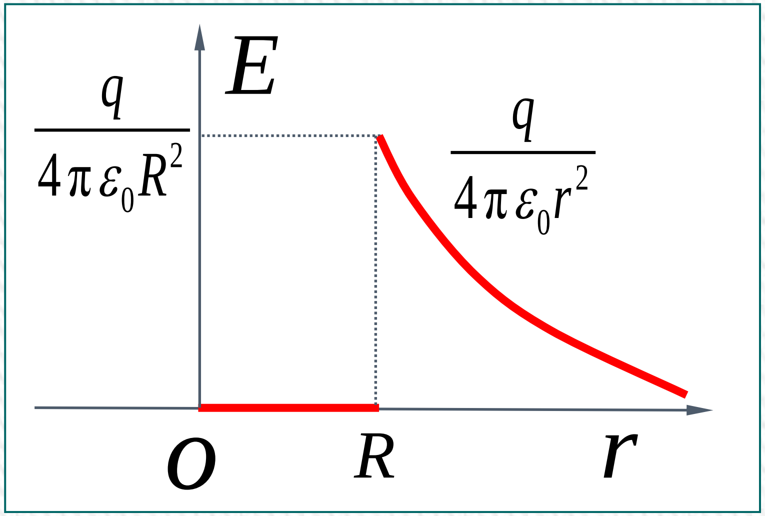
» 电场强度等于电势的梯度的负值：

$$\overrightarrow{E} = -\nabla \varphi$$

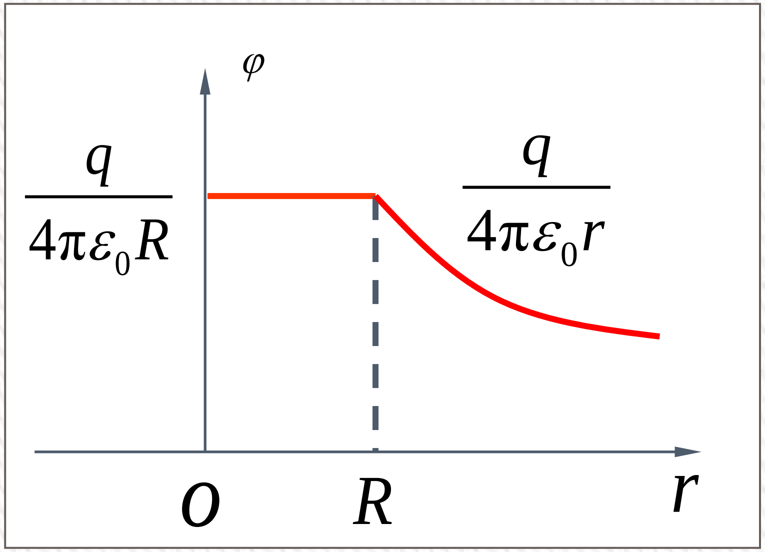
8.4 电势梯度

» 均匀带电球面的电场强度和电势的关系：

$$E=\begin{cases}0 & , \ r<R \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & , r\geq R\end{cases}$$



$$\varphi=\begin{cases}\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}, r\leq R \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}, r>R\end{cases}$$

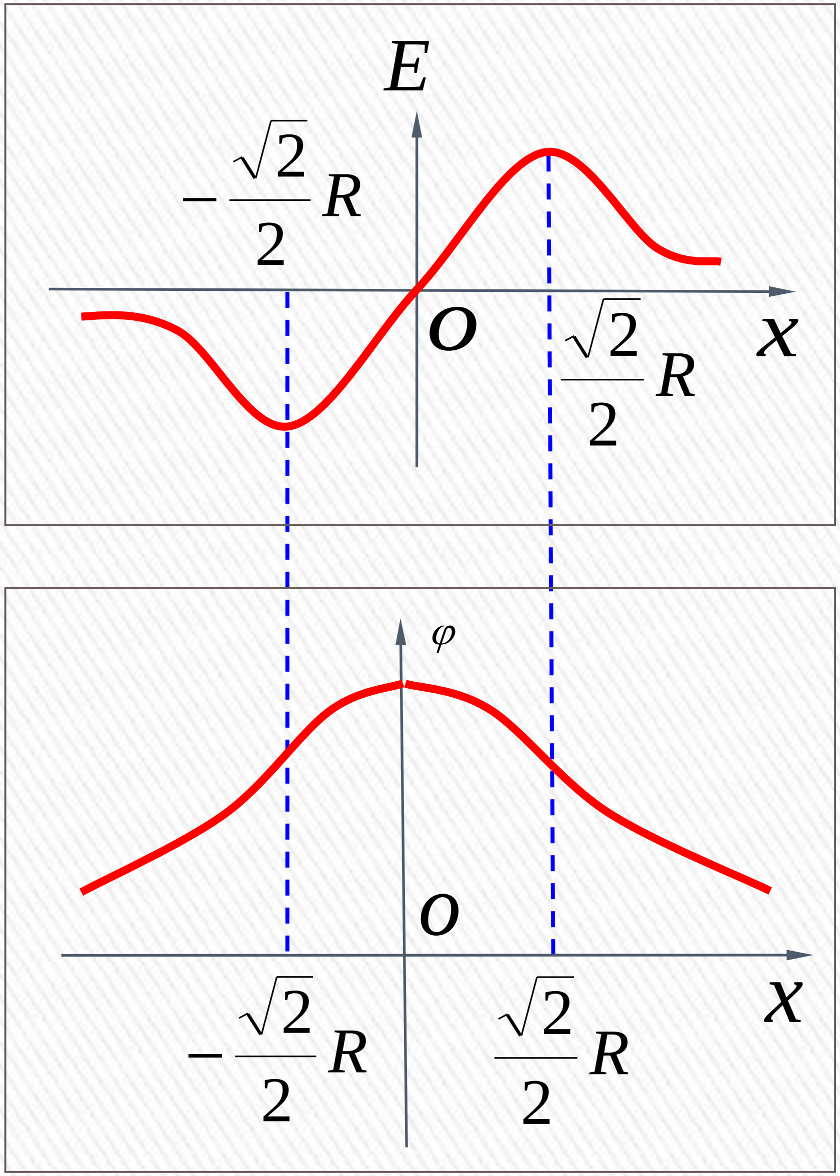


8.4 电势梯度

» 均匀带电圆环轴线上的电场强度和电势的关系：

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qx}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2 + x^2}}$$



8.4 电势梯度

» 用电势描述电场 vs 用场强描述电场:

(1) 电势是**标量**，求得电势分布后如果需要给出场强，只需对电势函数进行微分运算，有时，这比直接用库仑定律和叠加原理求电场容易些。

(2) 通常在实验上，**电势比电场强度更容易测得**。

(3) 电势和电场强度在解决问题时各有优势，由电势计算电场对电荷做功多少更直接，而用电场强度计算电荷受力更直接。

» 电势经常用来处理与做功多少、能量改变有关的问题；

» 电场强度经常用来处理电荷在电场中的运动学和动力学问题。

8.5 电荷在外电场中的静电势能

» 由于静电场是保守场，因此，可以引入**电势能**的概念来描述处于静电场中的带电粒子的状态，正如重力场中引入**重力势能**。

» 按照势能的定义，带电粒子在静电场中从 P_1 移动到 P_2 过程中，静电力做的功应等于系统势能的减少量，即：

$$\left.\begin{aligned} A_{12} &= -\ W_2 - W_1\ \ = W_1 - W_2 \\ A_{12} &= q\int_{P_1}^{P_2} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = q\ \ \varphi_1 - \varphi_2\ \ = q\varphi_1 - q\varphi_2 \end{aligned}\right\}$$

两式类比即可得电势能的定义：

$$W = q\varphi$$

» 不难看出，电势能的单位跟能量一样。

» 除了**焦耳(J)**之外，高能粒子领域经常用**电子伏(eV)**作为单位，意思是一个电子的电量受到 1V 的电势差的加速所获取的能量。

8.7 静电场的能量

» 静电场是一种物质，它拥有能量，其能量密度为：

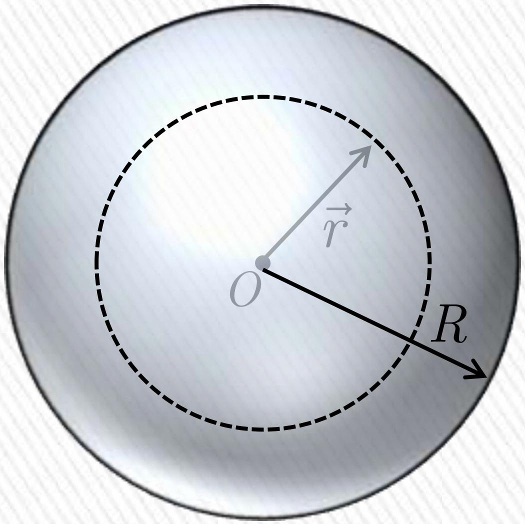
$$w_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

» 如果知道了一个带电系统的电场分布，则该电场的**总能量**等于对该电场进行**全空间积分**：

$$W = \int_V w_e \mathrm{d}V = \int_V \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 \mathrm{d}V$$

8.7 静电场的能量

P277 例 8.12：真空中一个均匀带电球体，半径为 R，带电量为 q，试求它的静电能。



解：由 **P256 例7.10**得知，均匀带电球体的场强为

$$E=\begin{cases}\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{r}{R^3}, r<R\\[2ex] \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2}, r\geq R\end{cases}$$

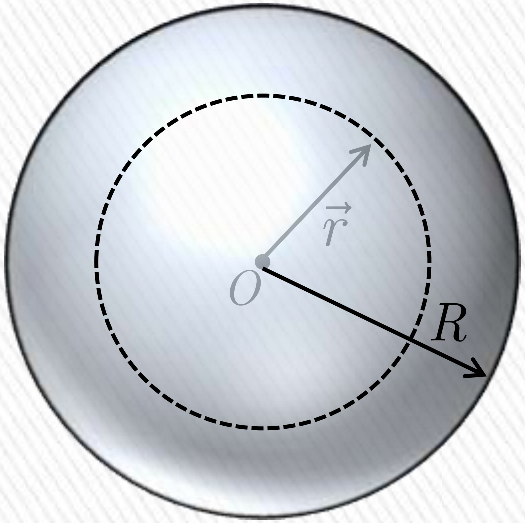
对它的静电场进行全空间积分得：

$$W=\int_{r<R} w_{e1}\mathrm{d}V+\int_{r\geq R} w_{e2}\mathrm{d}V$$

$$=\int_{r<R}\frac{\varepsilon_0}{2}E_1^2\mathrm{d}V+\int_{r\geq R}\frac{\varepsilon_0}{2}E_2^2\mathrm{d}V$$

8.7 静电场的能量

P277 例 8.12：真空中一个均匀带电球体，半径为 R，带电量为 q，试求它的静电能。



解(续)：

$$E=\begin{cases}\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{r}{R^3}, & r<R\\[2ex] \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2}, & r\ge R\end{cases}$$

$$W=\int_0^R\frac{\varepsilon_0}{2}E_1^2\mathrm{d}V+\int_R^\infty\frac{\varepsilon_0}{2}E_2^2\mathrm{d}V$$

$$=\int_0^R\frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{R^3}\right)^2\mathrm{d}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)+\int_R^\infty\frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\right)\mathrm{d}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$$

$$=\frac{3q^2}{20\pi\varepsilon_0 R}$$