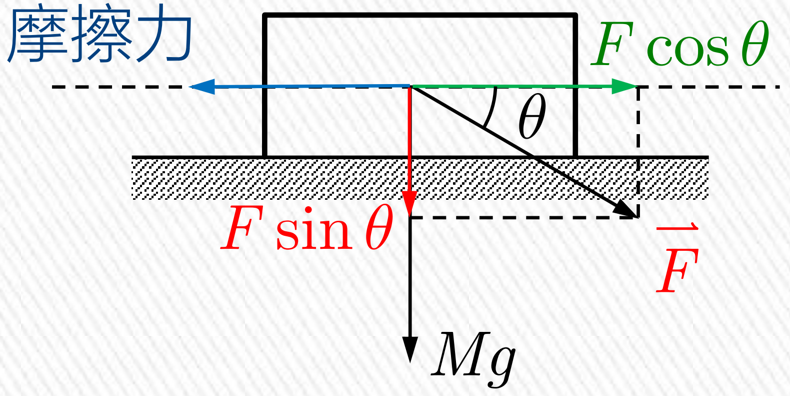
第2章 运动与力

习题解答

习题 2.1 用力 $\vec{F}$ 推水平地面上一质量为 M 的木箱，设力 $\vec{F}$ 与水平面的夹角为 $\boldsymbol{\theta}$，木箱与地面之间的滑动摩擦系数和静摩擦系数分别为 μ_k 和 μ_s。(1) 要推动木箱，F 至少应多大？此后维持木箱匀速前进，F 应需多大？

(1) 解：要推动箱子从静止开始运动，推力的水平分量不能小于最大静摩擦力，即：



$$F\cos\theta \geq f_{静} = \mu_s(F\sin\theta + Mg)$$

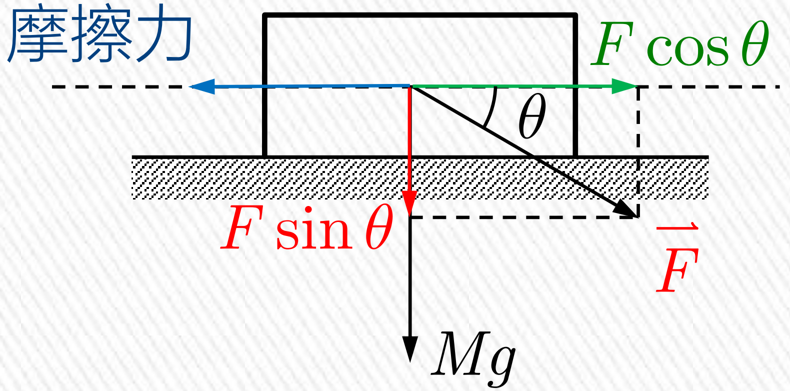
$$\Rightarrow F \geq \frac{\mu_s Mg}{\cos\theta - \mu_s \sin\theta}$$

维持木箱匀速前进，推力的水平分量应等于滑动摩擦力：

$$F\cos\theta = f_{滑} = \mu_k(F\sin\theta + Mg) \Rightarrow F = \frac{\mu_k Mg}{\cos\theta - \mu_k \sin\theta}$$

习题 2.1 用力 $\vec{F}$ 推水平地面上一质量为 M 的木箱，设力 $\vec{F}$ 与水平面的夹角为 $\boldsymbol{\theta}$，木箱与地面之间的滑动摩擦系数和静摩擦系数分别为 μ_k 和 μ_s 。(2) 证明当 $\boldsymbol{\theta}$ 角大于某个数值时，无论用多大的力也无法推动箱子。此时 $\boldsymbol{\theta}$ 角为多大？

(2) 解：由(1)的结论



$$F \geq \frac{\mu_s Mg}{\cos\theta - \mu_s \sin\theta}$$

可知，当 $\cos\theta - \mu_s \sin\theta = 0$ 时，需要用无穷大的力才能推动箱子，即无法推动。

此时 $\boldsymbol{\theta}$ 角为：

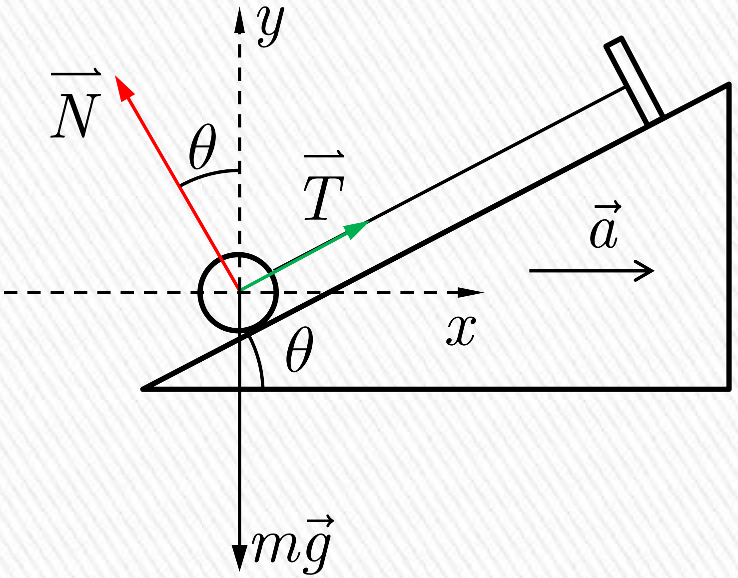
$$\cos\theta - \mu_s \sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = \arctan\frac{1}{\mu_s}$$

习题 2.2 设质量 $m = 0.50$ kg 的小球挂在倾角 $\boldsymbol{\theta} = 30^\circ$ 的光滑斜面上，

(1) 当斜面以加速度 $a = 2.0$ m/s^2 沿如图方向运动时，绳子的张力及小球对斜面的正压力分别有多大？

(2) 斜面的加速度多大时，小球将脱离斜面？

(1) 解：建立坐标系，对小球进行受力分析。



$$
\left.\begin{aligned}
&x\text{ 方向：}\quad T\cos\theta - N\sin\theta = ma \\
&y\text{ 方向：}\quad N\cos\theta + T\sin\theta = mg
\end{aligned}\right\}
$$

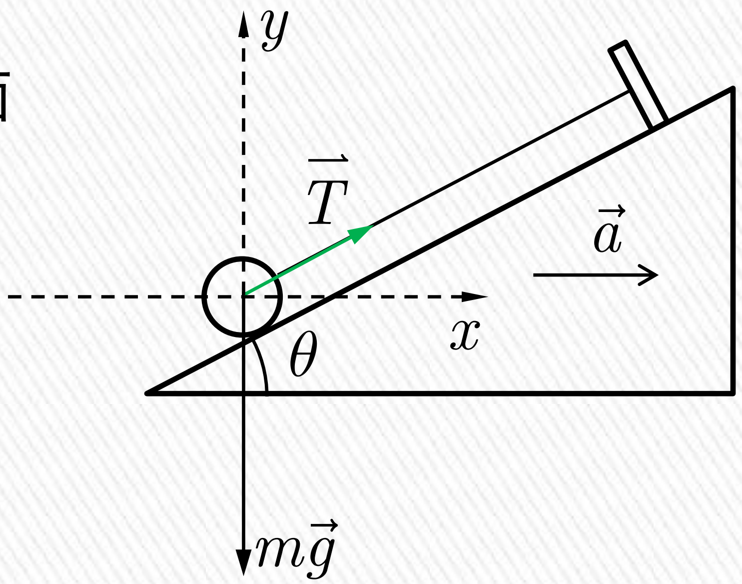
解方程组得：
$$
\begin{cases}
T = mg\sin\theta + ma\cos\theta = 3.32\ \text{N} \\
N = mg\cos\theta - ma\sin\theta = 3.75\ \text{N}
\end{cases}
$$

习题 2.2 设质量 $m = 0.50\ \text{kg}$ 的小球挂在倾角 $\boldsymbol{\theta} = 30^\circ$ 的光滑斜面上，

(1) 当斜面以加速度 $a = 2.0\ \text{m/s}^2$ 沿如图方向运动时，绳子的张力及小球对斜面的正压力分别有多大？

(2) 斜面的加速度多大时，小球将脱离斜面？

(2) 解：小球脱离斜面，意思是小球对斜面无压力。



$$\left.\begin{aligned} &x\text{ 方向：} && T\cos\theta = ma \\ &y\text{ 方向：} && T\sin\theta = mg \end{aligned}\right\}$$

解方程组得：$a = g\cot\theta = 17.0\ \text{m/s}^2$

习题 2.10 两根弹簧的劲度系数分别为 k_1 和 k_2，

(1) 证明它们串联时，总的劲度系数为 $k=\dfrac{k_1k_2}{k_1+k_2}$；

(1) 证明：两弹簧串联时，两弹簧的伸长量之和等于总伸长量：

$$\Delta x_1+\Delta x_2=\Delta x$$

两个弹簧和它们组合而成的弹簧都应遵循胡克定律，所以有：

$$\frac{F}{k_1}+\frac{F}{k_2}=\frac{F}{k} \Rightarrow k=\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}$$

习题 2.10 两根弹簧的劲度系数分别为 k_1 和 k_2，

(2) 证明它们并联时，总的劲度系数为 $k = k_1 + k_2$ ；

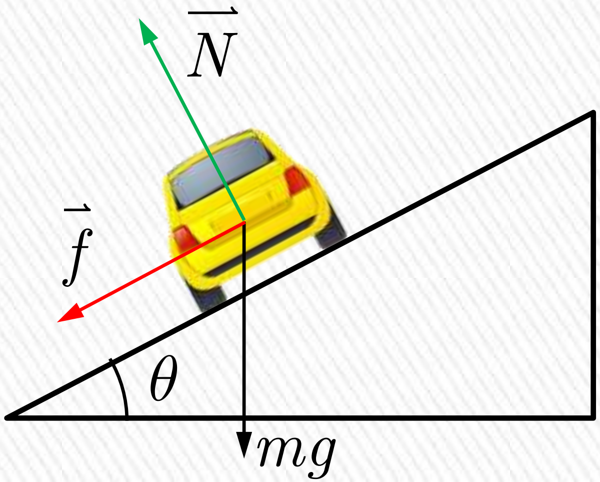
(2) 证明：两弹簧并联时，两弹簧伸长量相等，但受到的拉力不同，它们受到的拉力之和应等于总拉力：

$$k_1\Delta x + k_2\Delta x = k\Delta x \Rightarrow k = k_1 + k_2$$

习题 2.11 如图，质量 $m = 1200$ kg 的汽车在一弯道上行驶，速率 $v = 25$ m/s。弯道的半径 $R = 400$ m，路面外高内低，倾角 $\theta = 6°$。

(1) 求作用于汽车上的水平法向力和摩擦力。

(2) 若汽车和轨道之间的静摩擦系数 $\mu_s = 0.9$，要保证汽车不侧滑，最大允许速率为多大？



(1) 解法一，以地面作为参考系：

首先，汽车法向力为：$F_n = m\dfrac{v^2}{R}$

然后，对汽车进行受力分析：

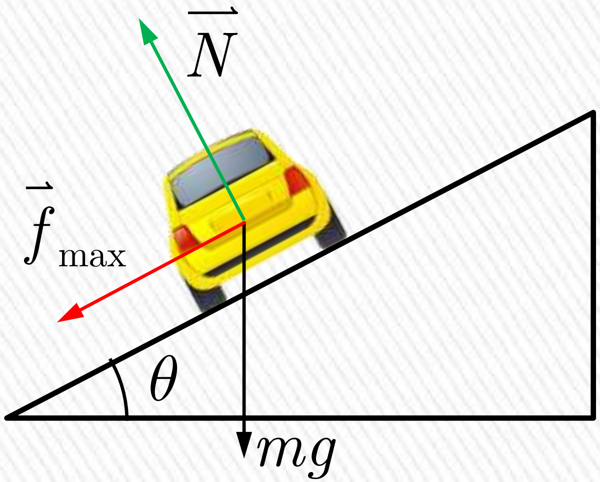
$$\left.\begin{aligned}&\text{水平方向：} N\sin\theta + f\cos\theta = m\frac{v^2}{R}\\ &\text{竖直方向：} N\cos\theta - f\sin\theta - mg = 0\end{aligned}\right\}$$

解得摩擦力为：$f = m\dfrac{v^2}{R}\cos\theta - mg\sin\theta$

习题 2.11 如图，质量 $m = 1200$ kg 的汽车在一弯道上行驶，速率 $v = 25$ m/s。弯道的半径 $R = 400$ m，路面外高内低，倾角 $\theta = 6°$ 。

(1) 求作用于汽车上的水平法向力和摩擦力。

(2) 若汽车和轨道之间的静摩擦系数 $\mu_s = 0.9$，要保证汽车不侧滑，最大允许速率为多大？



(2) 解法一，以地面作为参考系：

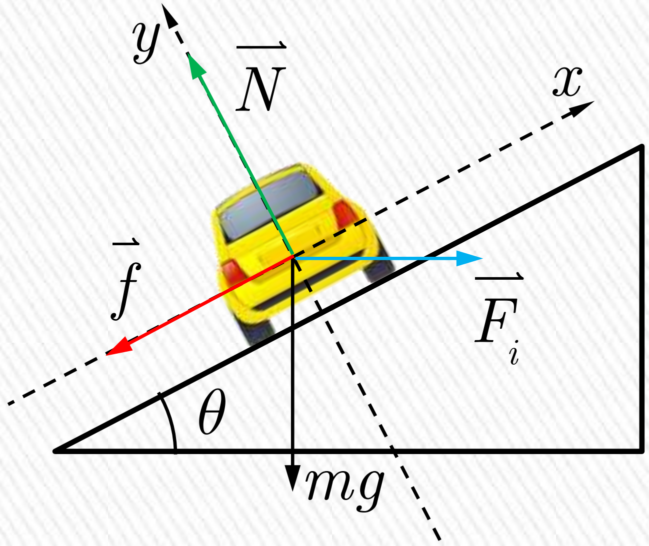
当汽车发生侧滑倾向时，静摩擦力方向如图所示。以最大静摩擦力 $f_{\max} = \mu_s N$ 代入原方程得：

$$\left.\begin{aligned} &\text{水平方向：}\quad N\sin\theta + \mu_s N\cos\theta = m\frac{v_{\max}^2}{R} \\ &\text{竖直方向：}\quad N\cos\theta - \mu_s N\sin\theta - mg = 0 \end{aligned}\right\}$$

解得最大速率为：$v_{\max} = \sqrt{\dfrac{Rg(\sin\theta + \mu_s\cos\theta)}{\cos\theta - \mu_s\sin\theta}}$

习题 2.11 如图，质量 $m = 1200$ kg 的汽车在一弯道上行驶，速率 $v = 25$ m/s。弯道的半径 $R = 400$ m，路面外高内低，倾角 $\theta = 6°$ 。

(1) 求作用于汽车上的水平法向力和摩擦力。



(1) 解法二，以汽车作为参考系：

首先，汽车法向力为： $F_n = m\dfrac{v^2}{R}$

然后，以作圆周运动的小车作为参照物建立非惯性参照系，加入非惯性力的牛顿第二定律为：

$$\vec{F} + \vec{F_i} = m\vec{a'}$$

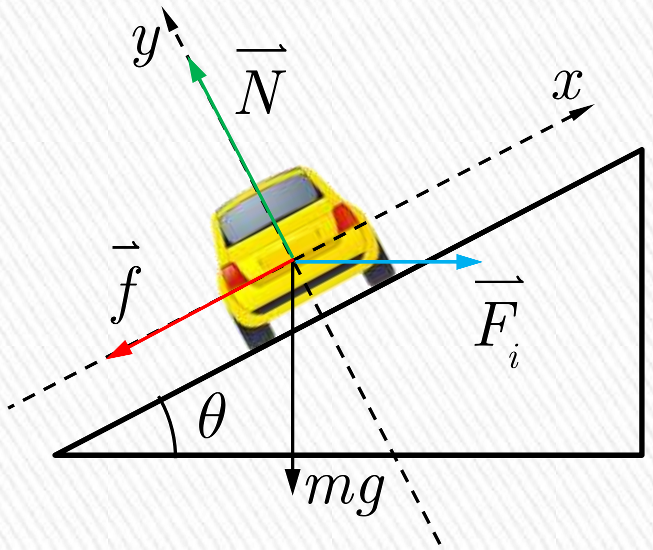
其中， $\boxed{F_i = m\dfrac{v^2}{R}}$

在汽车参考系里，汽车是静止的，对其进行受力分析得：

$$\begin{cases} x\ 方向：\ F_i\cos\theta - f - mg\sin\theta = 0 \\ y\ 方向：\ N - F_i\sin\theta - mg\cos\theta = 0 \end{cases} \Rightarrow f = m\frac{v^2}{R}\cos\theta - mg\sin\theta$$

习题 2.11 如图，质量 $m = 1200$ kg 的汽车在一弯道上行驶，速率 $v = 25$ m/s。弯道的半径 $R = 400$ m，路面外高内低，倾角 $\theta = 6°$。

(2) 若汽车和轨道之间的静摩擦系数 $\mu_s = 0.9$，要保证汽车不侧滑，最大允许速率为多大？



(2) 解法二，以汽车作为参考系：

当车将要发生侧向滑动的瞬间，最大静摩擦力为：$f_{\max} = \mu_s N$

代入原方程组得：

$$\begin{cases} x\text{ 方向：} & F_i \cos\theta - \mu_s N - mg\sin\theta = 0 \\ y\text{ 方向：} & N - F_i \sin\theta - mg\cos\theta = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{F_i = m\frac{v_{\max}^2}{R}}$$

解得：$$v_{\max} = \sqrt{\frac{Rg(\sin\theta + \mu_s\cos\theta)}{\cos\theta - \mu_s\sin\theta}}$$