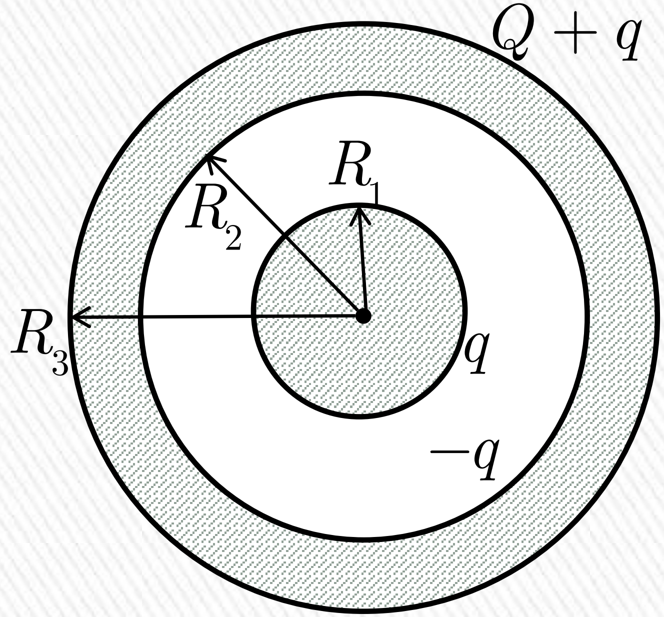
第9章 静电场中的导体

习题解答

习题 9.2：一导体球半径为 R_1，其外同心地罩一个内外半径分别为 R_2、R_3 的厚导体壳，此系统带电后内球电势为 φ_1，外球所带总电量为 Q。求此系统各处的电势和电场分布。



解：本题没有给出内球所带的电量，而是给出内球的电势。设内球所带电量为 q。

首先对该系统进行静电平衡分析：

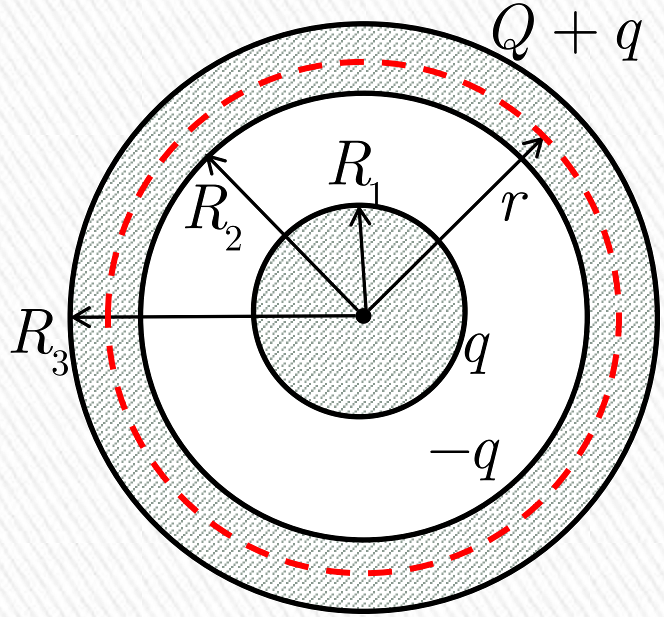
静电平衡时，

(1) 内导体球的电荷全都集中在内球表面；

(2) 外罩的导体球壳是一个空腔导体，根据其静电平衡的条件，在它的空腔内表面感应出电荷 $-q$，外表面感应出电荷 $+q$，加上原有的电荷，总共 $Q+q$。

(3) 整个系统的带电情况为：**从内到外 3 个均匀带电同心球壳**，半径分别为 R_1、R_2、R_3，带电量分别为 q、$-q$、$Q+q$。

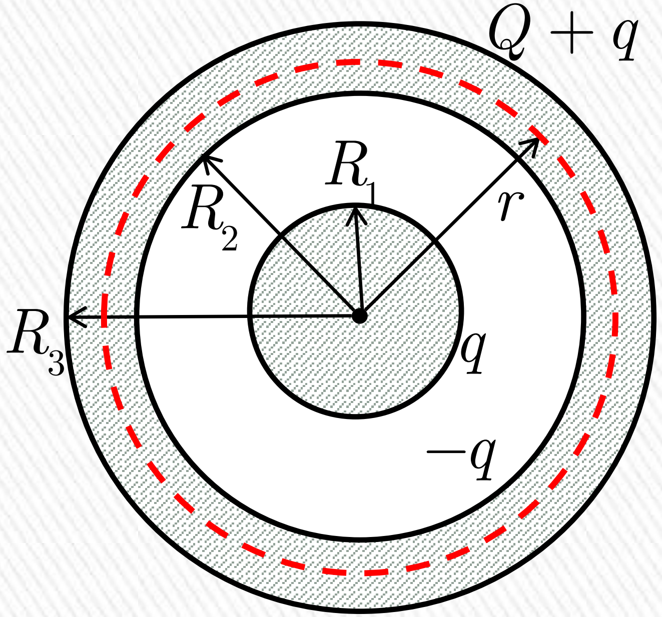
习题 9.2：一导体球半径为 R_1，其外同心地罩一个内外半径分别为 R_2、R_3 的厚导体壳，此系统带电后内球电势为 φ_1，外球所带总电量为 Q。求此系统各处的电势和电场分布。



解(续)：该系统相当于从内到外 3 个均匀带电同心球壳形成的静电场，根据**均匀带电球面**的电场强度的**高斯定理求法**，容易求得其电场强度大小为

$$E=\begin{cases}0 & ,\ r<R_1\\[2ex] \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & ,\ R_1\le r<R_2\\[2ex] 0 & ,\ R_2\le r<R_3\\[2ex] \dfrac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & ,\ r\ge R_3\end{cases}$$

习题 9.2：一导体球半径为 R_1，其外同心地罩一个内外半径分别为 R_2、R_3 的厚导体壳，此系统带电后内球电势为 φ_1，外球所带总电量为 Q。求此系统各处的电势和电场分布。

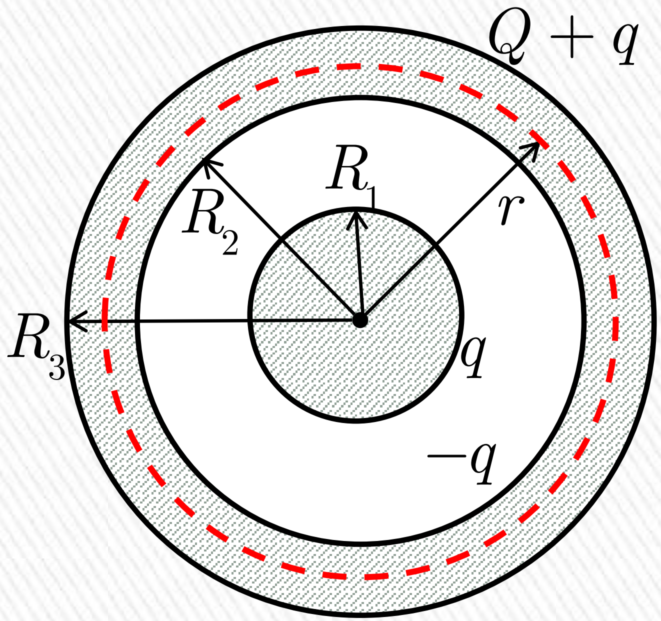


解(续)：该系统相当于从内到外 3 个均匀带电同心球壳形成的静电场，根据**电势的叠加原理**，**内球面的电势由 3 个带电球面共同贡献而成**，参看 **P267 例 8.1**，即：

$$\varphi_1=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0R_1}+\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0R_2}+\frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0R_3}$$

可以解得：$$q=\frac{4\pi\varepsilon_0R_1R_2R_3\varphi_1-R_1R_2Q}{R_2R_3-R_1R_3+R_1R_2}$$

习题 9.2：一导体球半径为 R_1，其外同心地罩一个内外半径分别为 R_2、R_3 的厚导体壳，此系统带电后内球电势为 φ_1，外球所带总电量为 Q。求此系统各处的电势和电场分布。

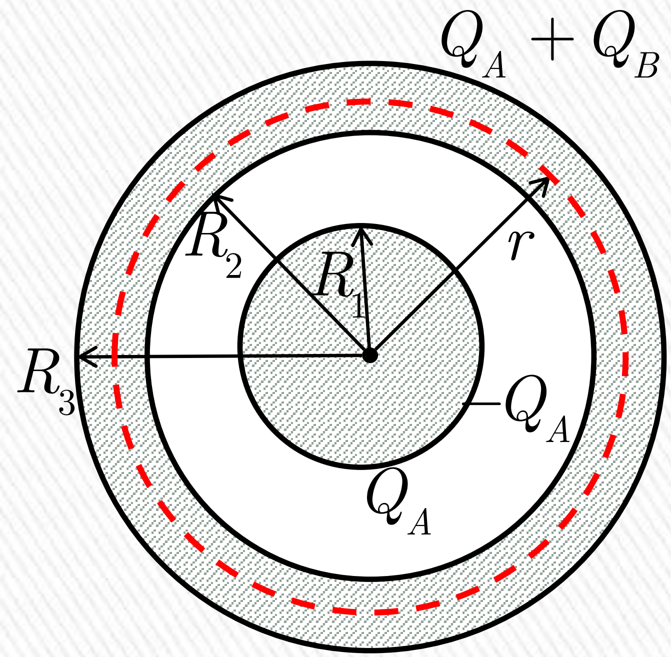


解(续)：仍用 q 来表示内球电量，根据**电势的叠加原理**，系统各处的电势均由 3 个带电球面共同贡献而成，见 **P267 例 8.1**，即：

$$\varphi=\begin{cases}\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1}+\dfrac{-q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}+\dfrac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}, & r<R_1\\[2ex] \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}+\dfrac{-q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}+\dfrac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}, & R_1\le r<R_2\\[2ex] \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}+\dfrac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r}+\dfrac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}, & R_2\le r<R_3\\[2ex] \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}+\dfrac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r}+\dfrac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 r}, & r\ge R_3\end{cases}$$

习题 9.3：在一半径为 $R_1 = 6.0$ cm 的金属球 A 外面套有一个同心的金属球壳 B，已知 B 的内外半径分别为 $R_2 = 8.0$ cm，$R_3 = 10.0$ cm。设 A 球带有总电量 $Q_A = 3\times10^{-8}$ C，球壳 B 带有总电量 $Q_B = 2\times10^{-8}$ C。

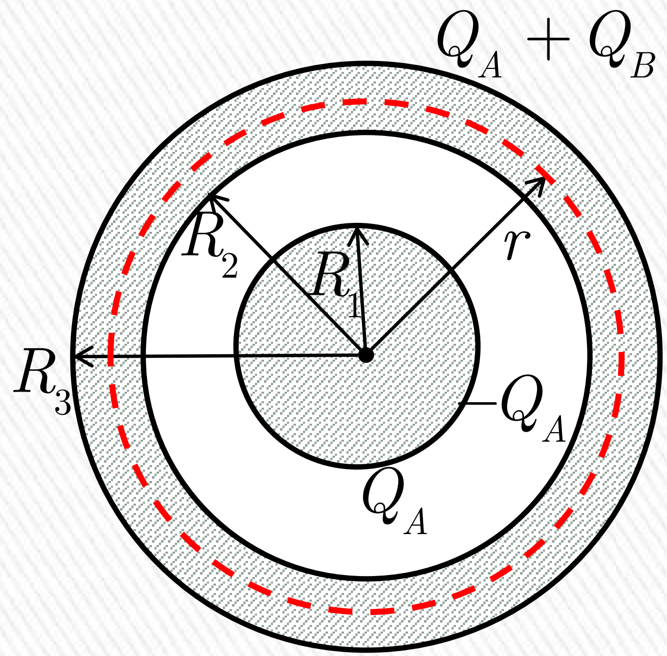
(1) 求球壳 B 内外表面上带有的电量，以及球 A 和球壳 B 的电势；



(1)解：对该系统进行静电平衡分析，该系统相当于 3 个半径分别为 R_1、R_2、R_3，带电量分别为 Q_A、$-Q_A$、Q_A+Q_B 的均匀带电球面。

习题 9.3：在一半径为 $R_1 = 6.0$ cm 的金属球 A 外面套有一个同心的金属球壳 B，已知 B 的内外半径分别为 $R_2 = 8.0$ cm，$R_3 = 10.0$ cm。设 A 球带有总电量 $Q_A = 3\times10^{-8}$ C，球壳 B 带有总电量 $Q_B = 2\times10^{-8}$ C。

(1) 求球壳 B 内外表面上带有的电量，以及球 A 和球壳 B 的电势；



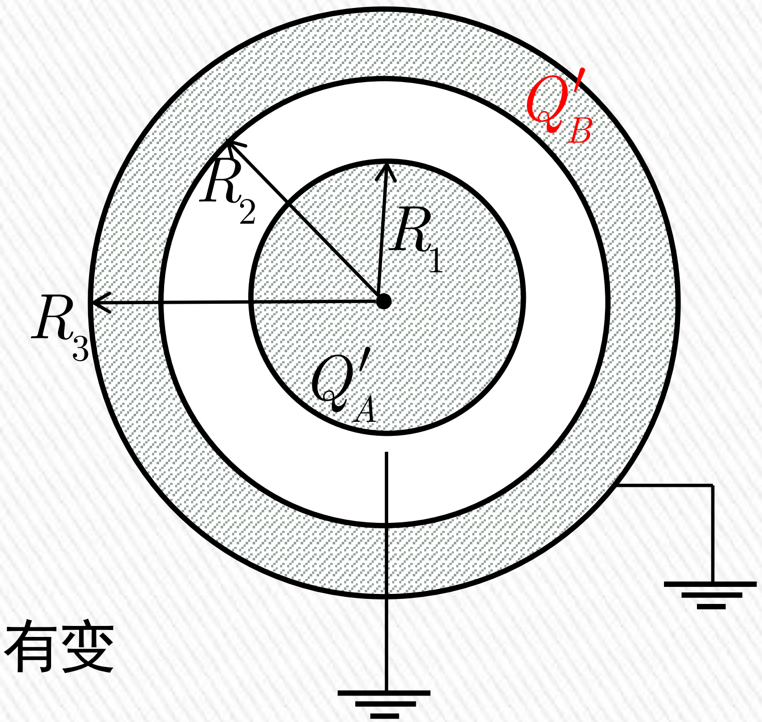
(1)解(续)：该系统相当于 3 个半径分别为为 R_1、R_2、R_3，带电量分别为 Q_A、$-Q_A$、Q_A+Q_B 的均匀带电球面。

球 A 和 球壳 B 均为等势体，其电势均由 3 个带电球面贡献而成，参看**习题 9.2** 的结论可得：

$$\varphi_A = \frac{Q_A}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{-Q_A}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + \frac{Q_A + Q_B}{4\pi\varepsilon_0 R_3}\ ,\quad \varphi_B = \frac{Q_A + Q_B}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

习题 9.3：在一半径为 $R_1 = 6.0$ cm 的金属球 A 外面套有一个同心的金属球壳 B，已知 B 的内外半径分别为 $R_2 = 8.0$ cm，$R_3 = 10.0$ cm。设 A 球带有总电量 $Q_A = 3\times10^{-8}$ C，球壳 B 带有总电量 $Q_B = 2\times10^{-8}$ C。

(2) 将球壳 B 接地然后断开，再把球 A 接地。求球 A 和球壳 B 内外表面上的电量，以及球 A 和 球壳 B 的电势。



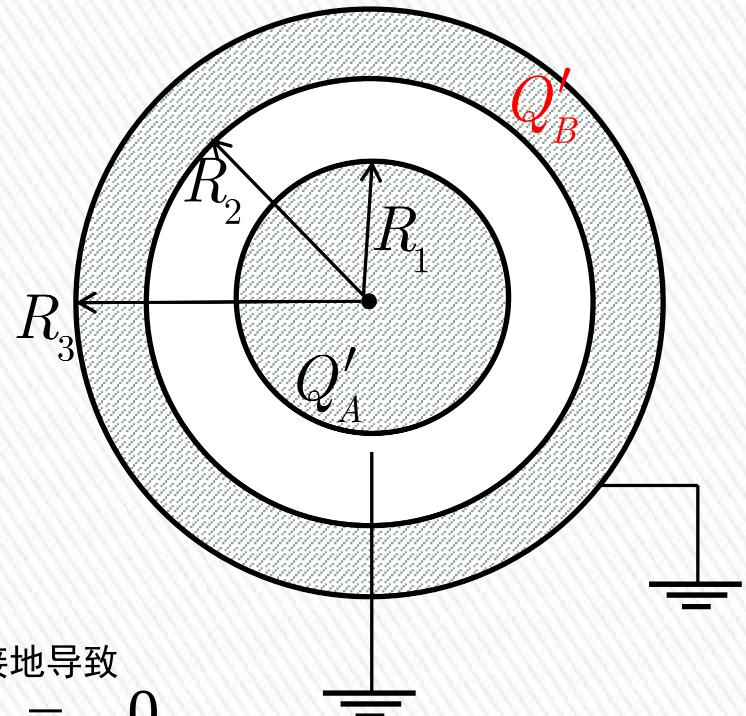
(2)解：球壳 B 接地意味着它在外表面的电荷被清零，其总电量即内表面所带的电量 $Q_B' = -Q_A$ ；接地断开之后球壳 B 的总电量不变。

A 接地意味着 A 的电势变为 0，电量有变化，设为 Q_A'；

根据静电平衡分析，此时系统相当于 3 个半径分别为 R_1、R_2、R_3，带量分别为 Q_A'，$-Q_A'$，$Q_A'+Q_B'$ 的同心球面。

习题 9.3：在一半径为 $R_1 = 6.0$ cm 的金属球 A 外面套有一个同心的金属球壳 B，已知 B 的内外半径分别为 $R_2 = 8.0$ cm，$R_3 = 10.0$ cm。设 A 球带有总电量 $Q_A = 3\times10^{-8}$ C，球壳 B 带有总电量 $Q_B = 2\times10^{-8}$ C。

(2) 将球壳 B 接地然后断开，再把球 A 接地。求球 A 和球壳 B 内外表面上的电量，以及球A 和 球壳 B 的电势。



(2)解(续)：系统相当于 3 个带量分别为 Q_A'，$-Q_A'$，$Q_A'+Q_B'$ 的同心球面，其中 $Q_B'=-Q_A$ 。

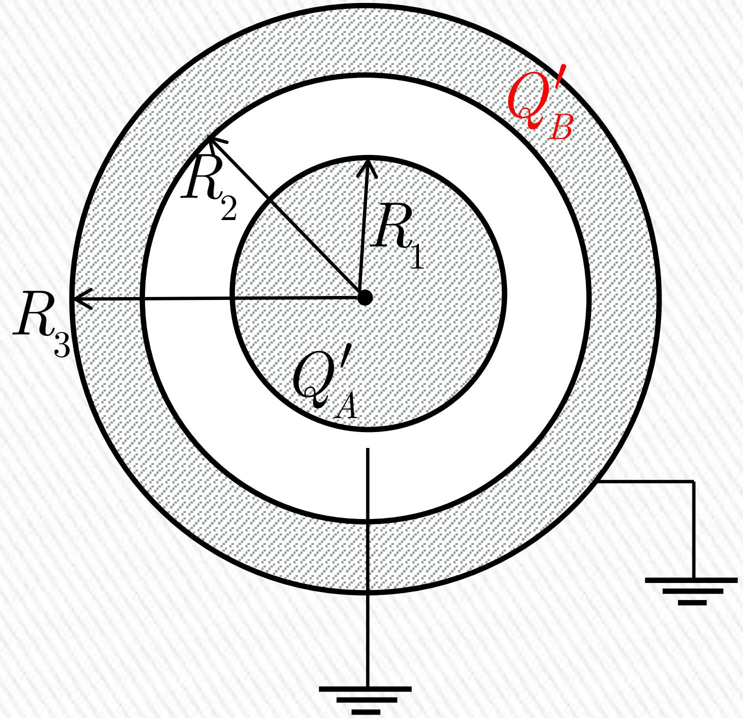
根据前述结论，内球电势为：

$$\varphi_A = \frac{Q_A'}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{-Q_A'}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + \frac{Q_A'+Q_B'}{4\pi\varepsilon_0 R_3} \overset{\text{接地导致}}{=} 0$$

解得：$$Q_A' = \frac{Q_A/R_3}{1/R_1 - 1/R_2 + 1/R_3}$$

习题 9.3：在一半径为 $R_1=6.0\ \text{cm}$ 的金属球 A 外面套有一个同心的金属球壳 B，已知 B 的内外半径分别为 $R_2=8.0\ \text{cm}$，$R_3=10.0\ \text{cm}$。设 A 球带有总电量 $Q_A=3\times10^{-8}\ \text{C}$，球壳 B 带有总电量 $Q_B=2\times10^{-8}\ \text{C}$。

(2) 将球壳 B 接地然后断开，再把球 A 接地。求球 A 和球壳 B 内外表面上的电量，以及球 A 和 球壳 B 的电势。

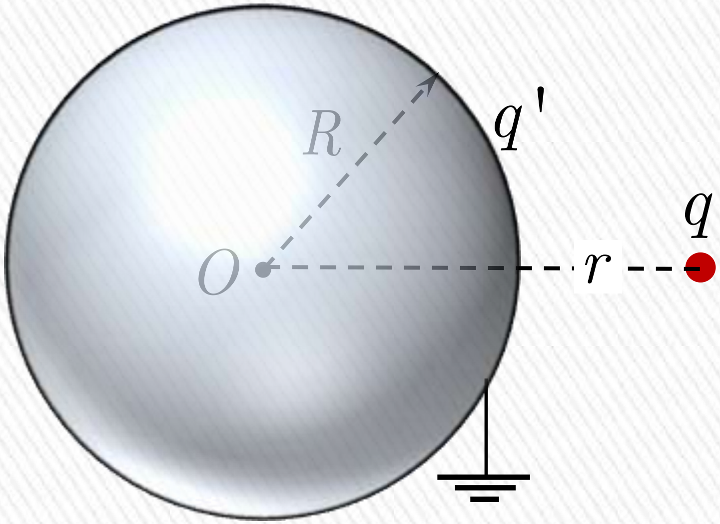


(2)解(续)：系统相当于 3 个带量分别为 Q_A'，$-Q_A'$，$Q_A'+Q_B'$ 的同心球面，外球电量为 $Q_B'=-Q_A$，球 A 电势为 0，球 A 电量 Q_A' 已求出，则球壳 B 内外表面的电量也可知。

根据前述结论，球壳 B 的电势为 $\varphi_B=\dfrac{Q_A'+Q_B'}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$。

习题 9.4：一个接地的导体球，半径为 R，原来不带电。今将一点电荷 q 放在球外距离球心 r 的地方，求球上的感生电荷总量。

解：设球上的感生电荷为 q' 。由静电平衡原理可知，这些电荷都分布在导体球的表面上。



因导体球是接地的，因此它的电势始终为 0 。研究导体球心 O 处的电势，根据电势的叠加原理，该处的电势由点电荷 q 和感应电荷 q' 共同贡献而成。

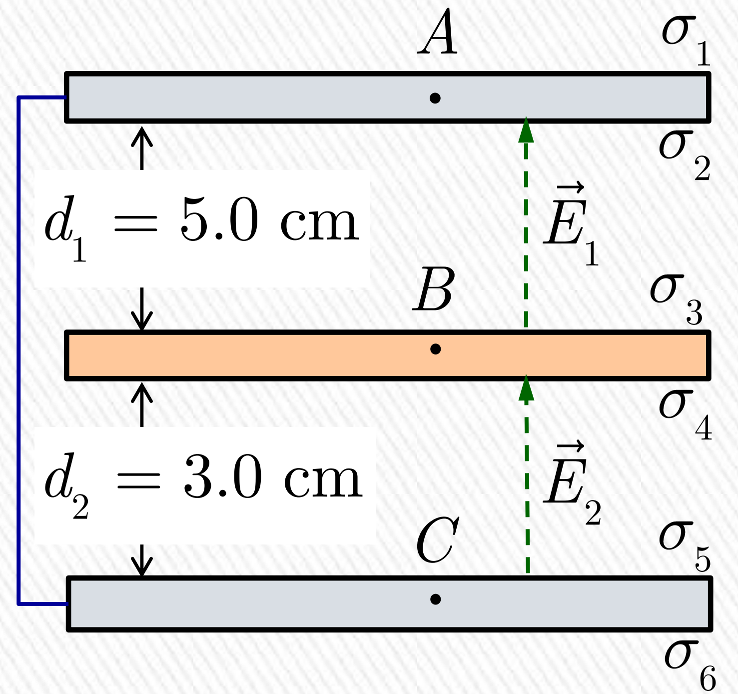
点电荷 q 对 O 点的电势贡献为：
$$\varphi_O^q = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

感应电荷 q' 对 O 点的电势贡献为：
$$\varphi_O^{q'} = \int_{q'} \frac{\mathrm{d}q'}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

令 $\varphi_O^q + \varphi_O^{q'} = 0$ 即可求出 q'。

习题 9.5：有三块互相平行的导体板，外面的两块用导线连接，原来不带电。中间一块所带电荷的总面密度为 $1.3\times10^{-5}\ \mathrm{C/cm^2}$ 。求每块板的两个表面上的电荷密度分别是多少？(忽略边缘效应)

解：分别设三块板子的 6 个平面的电荷面密度为 $\sigma_1 \sim \sigma_6$ 。



在三块板子中各取一点 A, B, C，则这三点的电场强度均为 0，由此可得：

$$A：\ \sigma_1-\sigma_2-\sigma_3-\sigma_4-\sigma_5-\sigma_6=0 \quad (1)$$

$$B：\ \sigma_1+\sigma_2+\sigma_3-\sigma_4-\sigma_5-\sigma_6=0 \quad (2)$$

$$C：\ \sigma_1+\sigma_2+\sigma_3+\sigma_4+\sigma_5-\sigma_6=0 \quad (3)$$

A,C 相连而等势，即 $U_{AB}=U_{CB}$，即 $-E_1 d_1 = E_2 d_2$，可得：

$$-(\sigma_1+\sigma_2-\sigma_3-\sigma_4-\sigma_5-\sigma_6)d_1=(-\sigma_1-\sigma_2-\sigma_3-\sigma_4+\sigma_5+\sigma_6)d_2 \quad (4)$$

习题 9.5：有三块互相平行的导体板，外面的两块用导线连接，原来不带电。中间一块所带电荷的总面密度为 1.3×10^{-5} C/cm^2 。求每块板的两个表面上的电荷密度分别是多少？(忽略边缘效应)

解(续)：

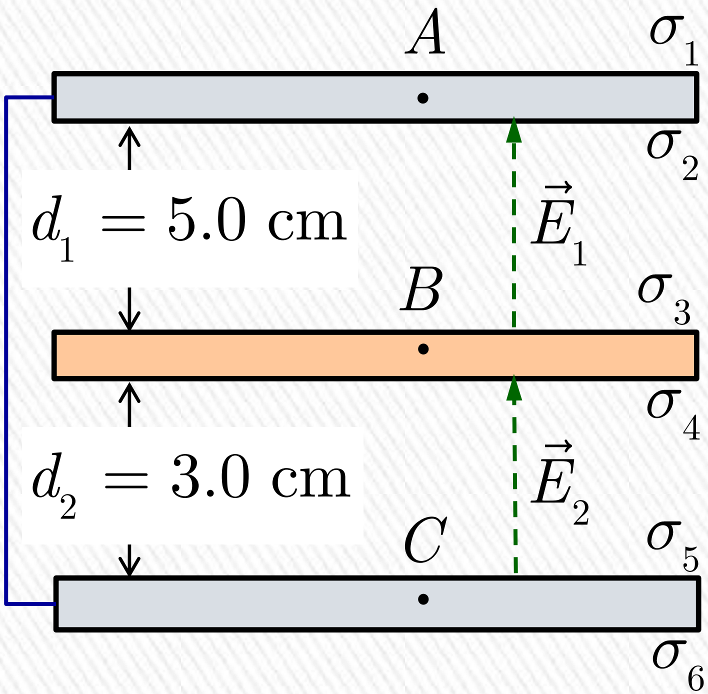
因电荷守恒，对于 B 板有：

$$\sigma_3+\sigma_4=1.3\times10^{-5} \quad (5)$$

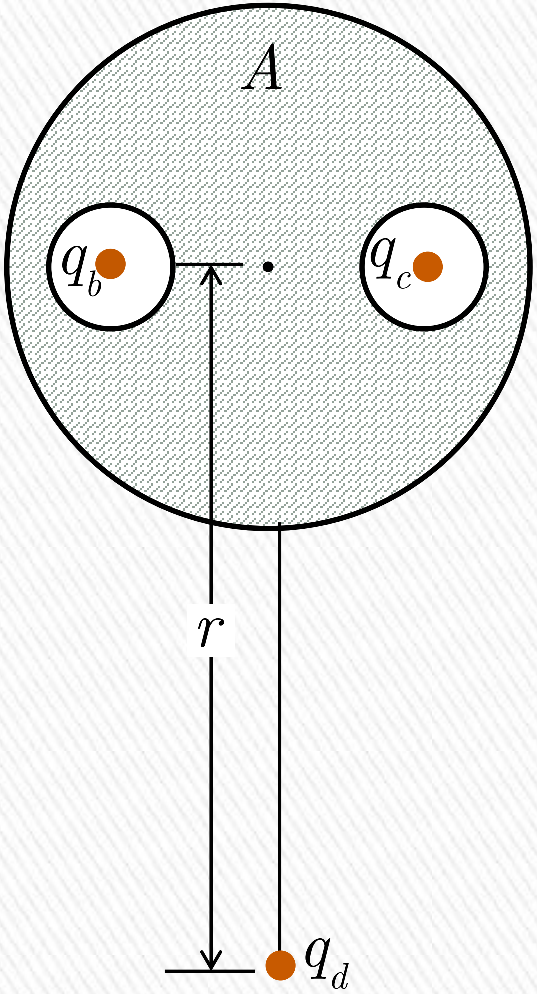
对于 A 板和 C 板有：

$$\sigma_1+\sigma_2+\sigma_5+\sigma_6=0 \quad (6)$$

联立以上 6 个方程，即可解出 $\sigma_1 \sim \sigma_6$ 。



习题 9.6：一球形导体 A 含有两个球形空腔，这导体本身的总电荷为 0，但在两空腔中心分别有一点电荷 q_a 和 q_b，导体球外距离很远的 r 处有另一点电荷 q_d。试求 q_b, q_c, q_d 各受多大的力。



解：由于 q_b 和 q_c 所在空腔被周围金属屏蔽，导体壳内部的场强不受外部电荷 q_d 的影响，因此 q_b 和 q_c 所受的电场力

$$F_b = F_c = 0$$ 。

对于电荷 q_d，由于导体球距离很远，导体球可近似看做一个总电量为 $q_b + q_c$ 的点电荷，它对电荷 q_d 的作用力为

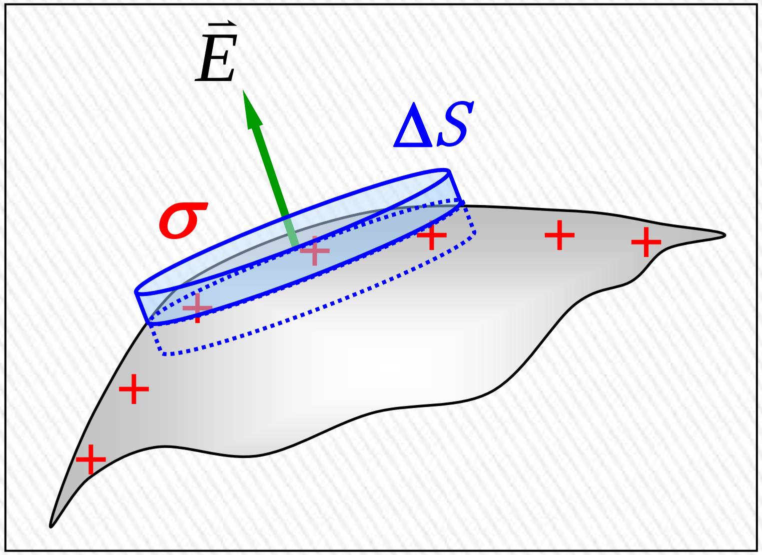
$$F_d = \frac{(q_b + q_c)q_d}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

习题 9.7：证明静电平衡时，导体表面单位面积受的力为 $\vec{f}=\dfrac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\vec{e}_n$ ，其中 σ 为电荷面密度， $\vec{e}_n$ 为表面的外法线方向的单位矢量。此力与电荷正负无关，总是指向导体外部。

证明：先求导体表面的场强。在导体表面作一底面积为 ΔS 的扁柱型高斯面，则

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\int_{上底}\vec{E}\cdot d\vec{S}+\int_{下底}\vec{E}\cdot d\vec{S}+\int_{柱面}\vec{E}\cdot d\vec{S}=\int_{上底}\vec{E}\cdot d\vec{S}=E\cdot\Delta S$$

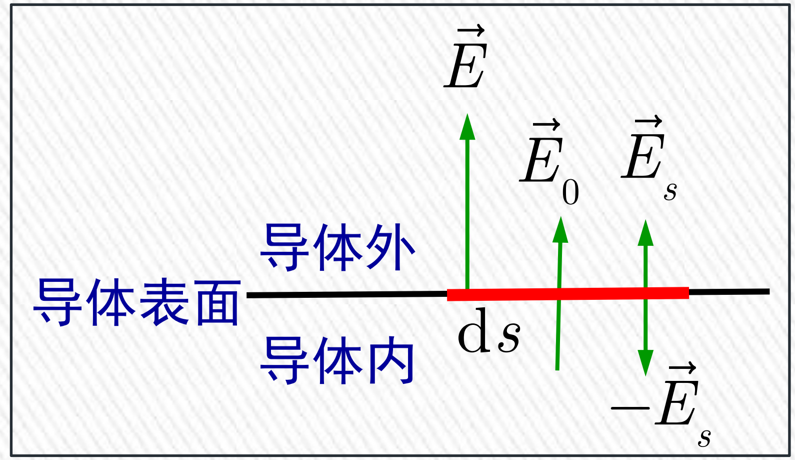
$$=\frac{\sigma\cdot\Delta S}{\varepsilon_0}\quad\Rightarrow\quad E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$



这里 $\vec{E}$ 是导体表面的合场强，由两部分贡献而成：**外电场** $\vec{E}_0$ 和 **导体表面电荷自身所产生的的电场** $\vec{E}_s$ 。

习题 9.7：证明静电平衡时，导体表面单位面积受的力为 $\vec{f}=\dfrac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\vec{e}_n$ ，其中 σ 为电荷面密度， $\vec{e}_n$ 为表面的外法线方向的单位矢量。此力与电荷正负无关，总是指向导体外部。

证(续)：导体表面的场强为 $\vec{E}=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e}_n$ 。



在导体表面取一面积元 d*S*，分析该处的电场：

$$\begin{cases}\text{导体外：}\vec{E}_0+\vec{E}_s=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e}_n\\ \text{导体内：}\vec{E}_0-\vec{E}_s=0\end{cases}$$

解得：外电场 $\vec{E}_0=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_n$

d*S* 受力为：

$$\boxed{\mathrm{d}\vec{F}=\vec{E}_0\cdot\mathrm{d}q=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_n\cdot\sigma\mathrm{d}s}$$

单位面积受力为：

$$\boxed{\vec{f}=\frac{\mathrm{d}\vec{F}}{\mathrm{d}s}=\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\vec{e}_n}$$

σ^2 永远为正，因此此力与电荷正负无关。