大学物理(1)

云南大学

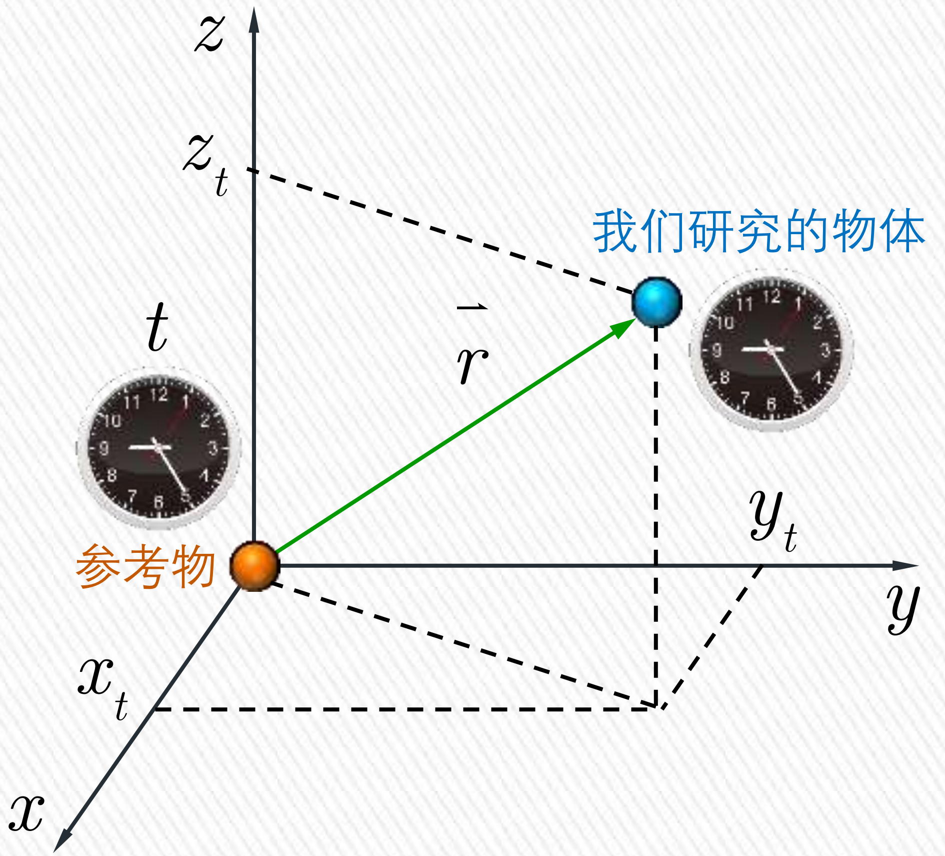
第 1 章

质点运动学

任课教师：张艳

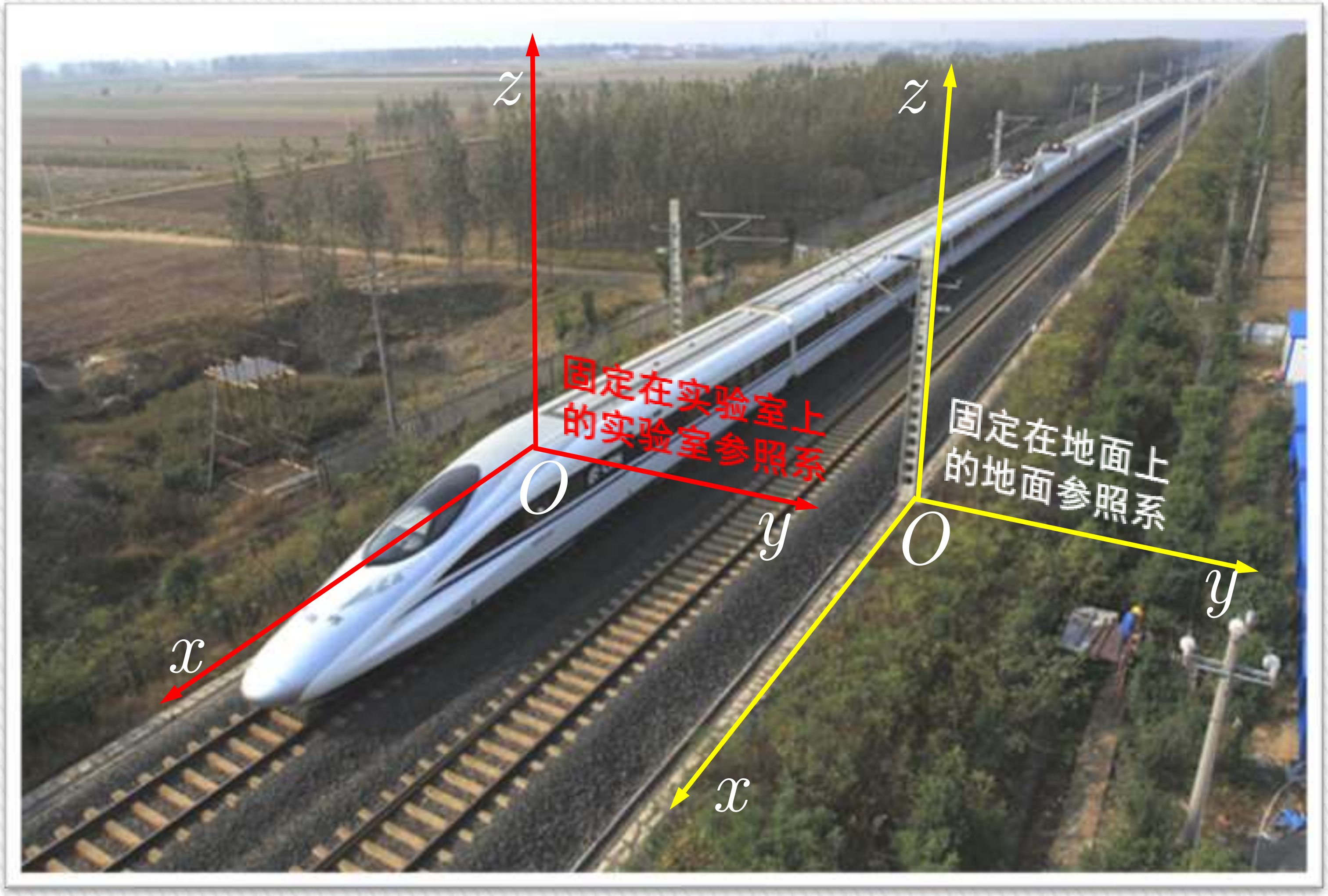
1.1 参考系

» 运动必然相对于某一参考物，固定在这一参考物上的一套坐标系 (x , y , z 或 $\boldsymbol{r}$) 和**同步的**时钟 (t) 就称为**参考系**。



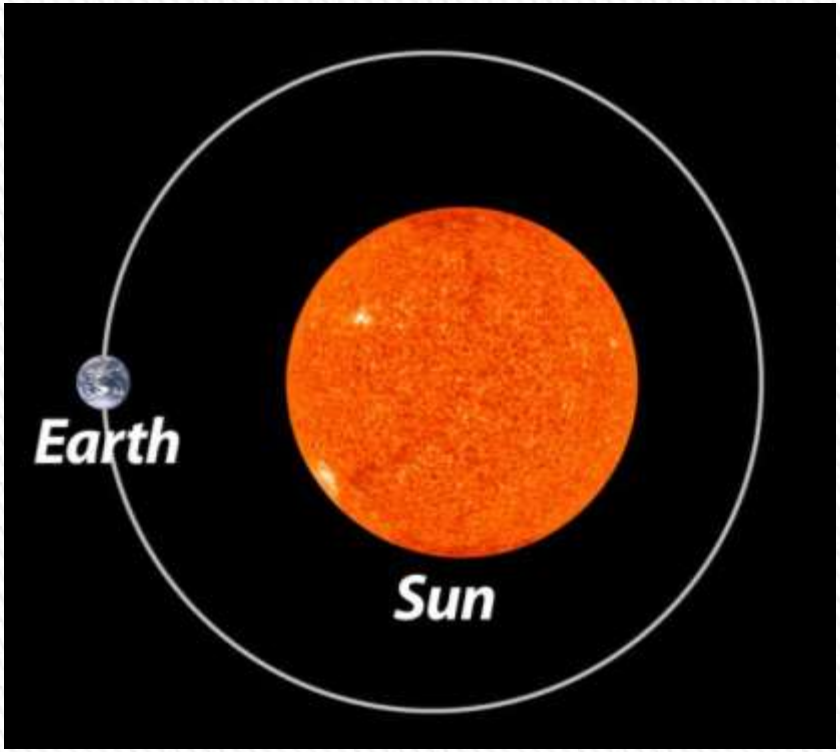
1.1 参考系

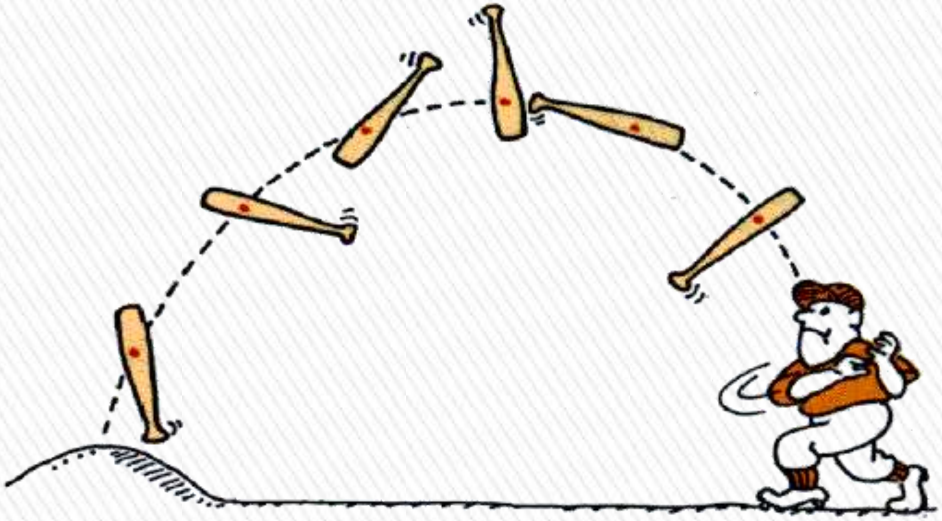
» 地面参考系和实验室参考系



1.2 质点的位矢、位移和速度

» **质点**：当物体尺寸与所要研究的尺寸相比小很多，或者物体形状不影响其运动性质时，我们常常将物体的真实形状忽略，将物体抽象成一个有质量、无大小的点，称为**质点**。





1.2 质点的位矢、位移和速度

» 运动函数

» 参考系确定后，一个质点的位置 (x, y, z) 在空间中随时间的变化就可以用时间 (t) 的函数来表示：

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

上述函数就称为该质点的**运动函数**，或称为质点的**运动方程**。

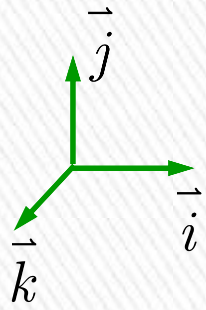
运动函数可理解为物体坐标随时间变化的函数。

1.2 质点的位矢、位移和速度

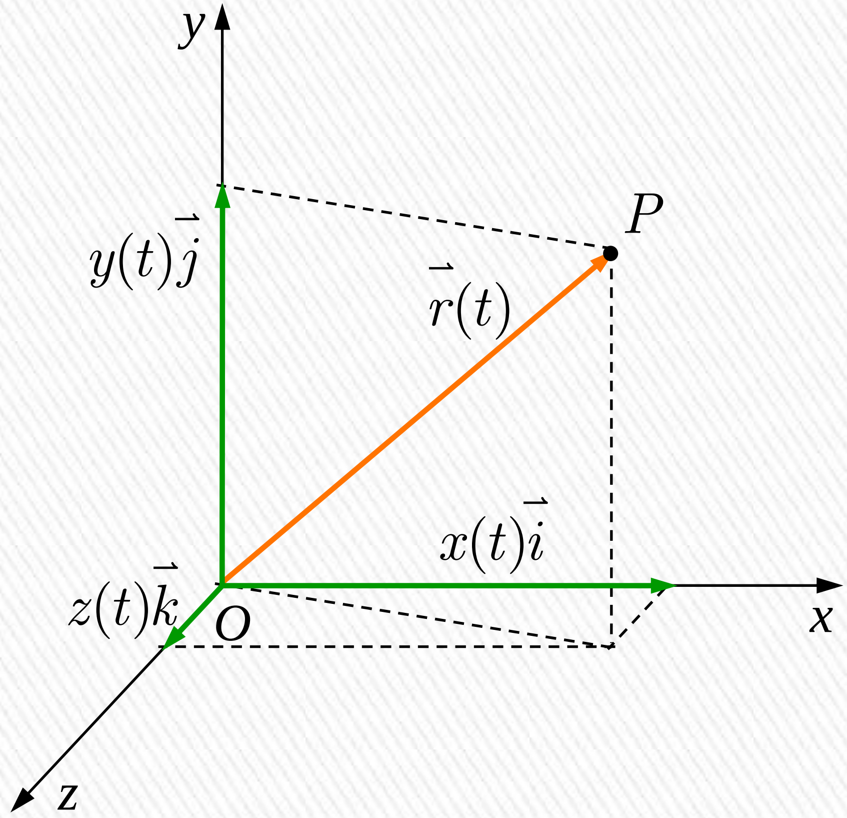
» 位矢：“位置矢量”的简称

» 习惯上，在印刷体中用粗体表示矢量，手写时则必须用带箭头符号来表示矢量，例如 $\vec{r}$ 。

$$\vec{r}=\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$$

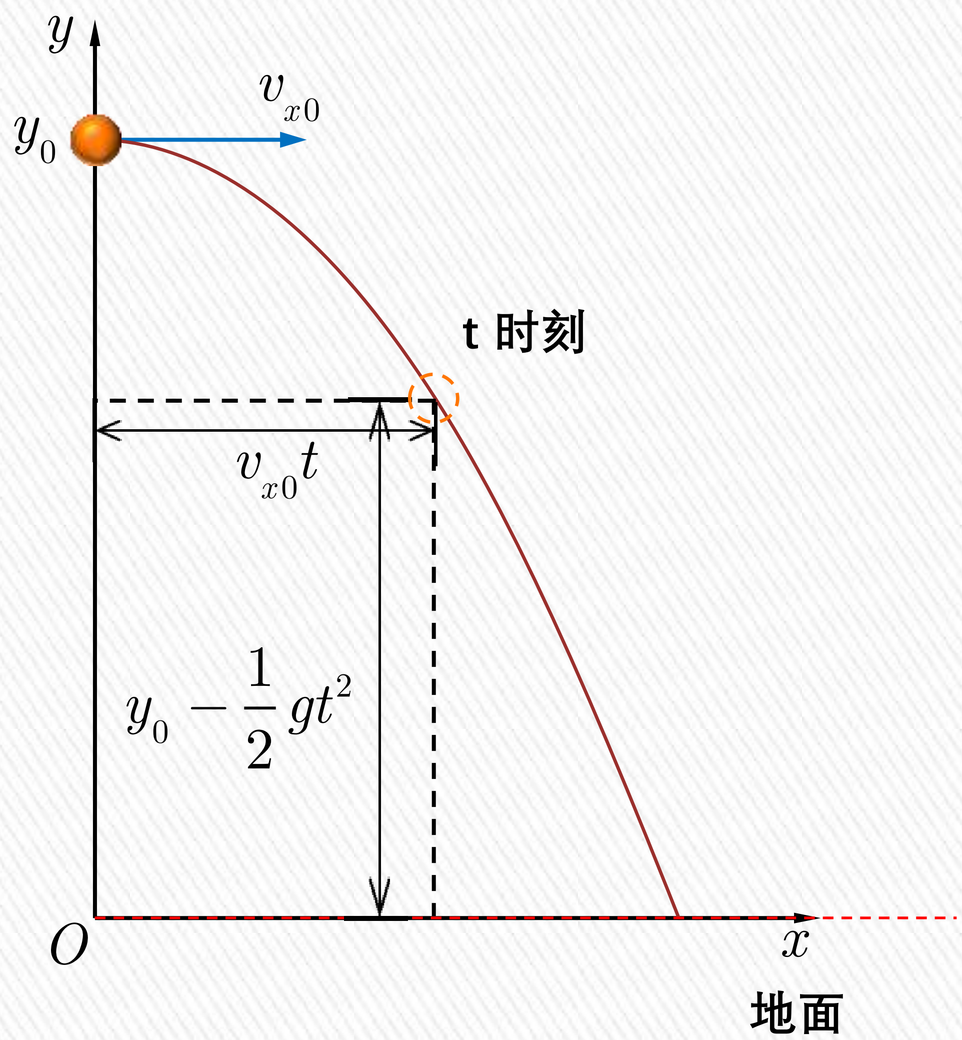


单位矢量长度为 1



1.2 质点的位矢、位移和速度

例：写出平抛运动的运动函数.



从小球抛出时开始计时，

t 时刻小球的横坐标为：

$$x = v_{x0}t$$

纵坐标为：

$$y = y_0 - \frac{1}{2}gt^2$$

运动函数为：

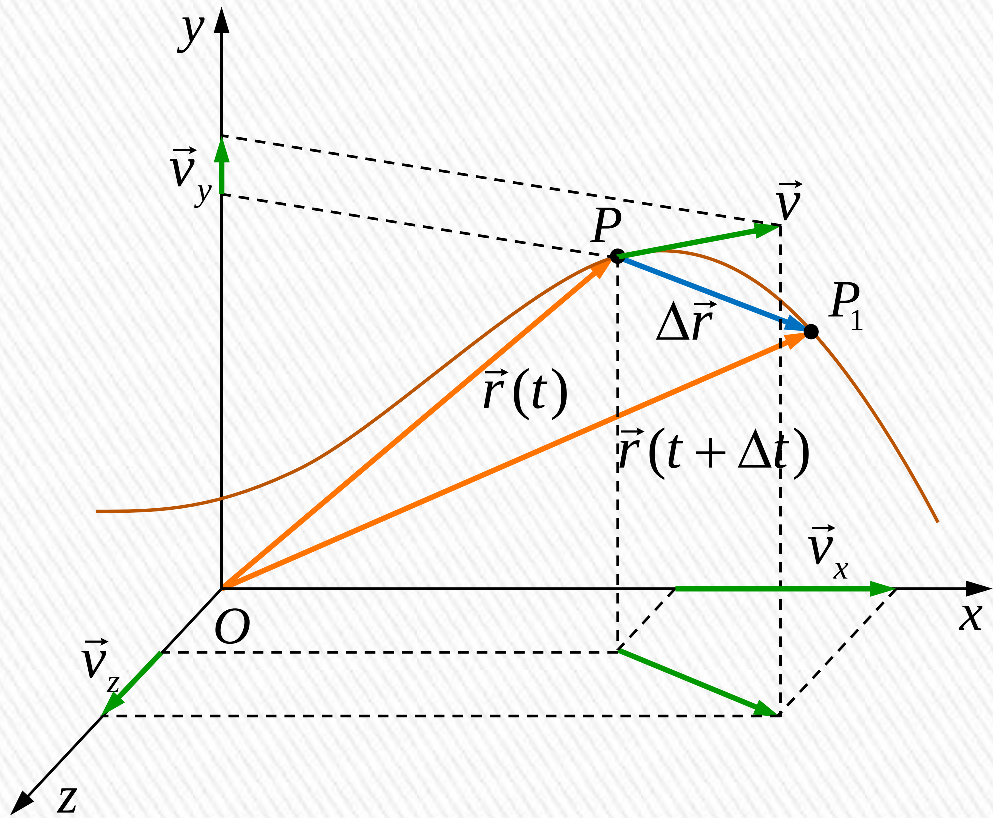
$$\begin{cases} x = v_{x0}t \\ y = y_0 - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

1.2 质点的位矢、位移和速度

位移(矢量)：$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$

速度(矢量)：$\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$

速率(标量)： $v = |\vec{v}| = \left|\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right| = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$



速度(矢量)的合成：

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{k} = \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z$$

速率(标量)的合成：

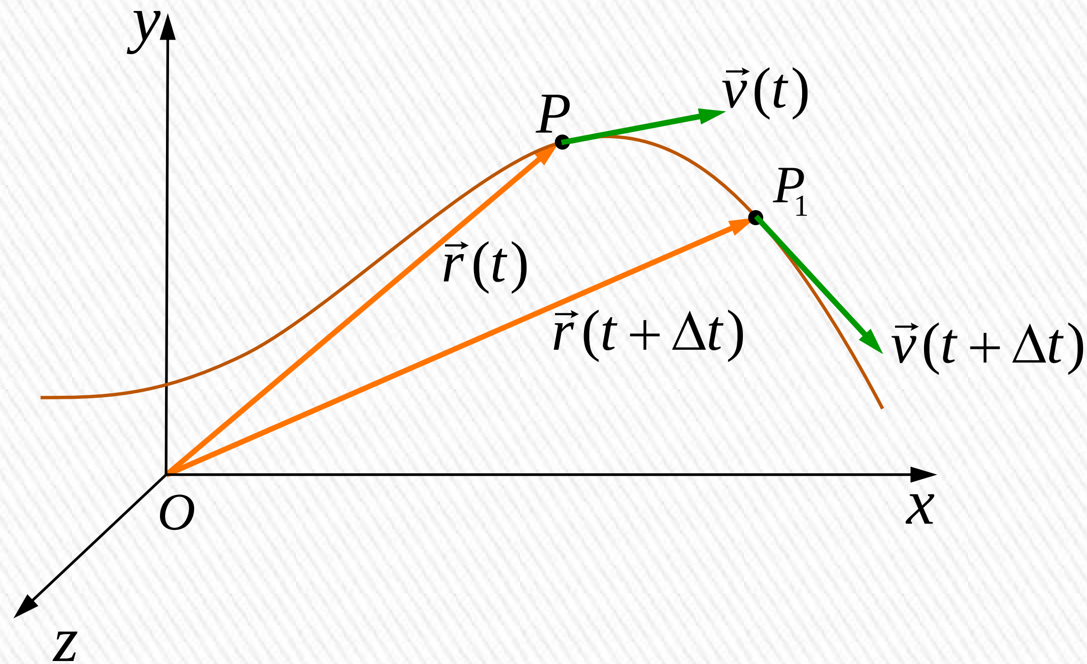
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

SI 单位制中的速度单位：m/s (米每秒)

1.3 加速度

加速度： $\vec{a}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$

$$=\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}$$



加速度(矢量)的合成：

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\vec{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\vec{j}+\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\vec{k}=\vec{a}_x+\vec{a}_y+\vec{a}_z$$

加速度大小(标量)的合成：

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$$

SI 单位制中的加速度单位：$\mathrm{m/s^2}$(米每秒平方)

P24 例1.2 已知某质点在平面上运动，运动函数为：

$$\begin{cases} x = A\cos\omega t \\ y = B\sin\omega t \end{cases},$$ 其中 A, B, ω 均为常数。

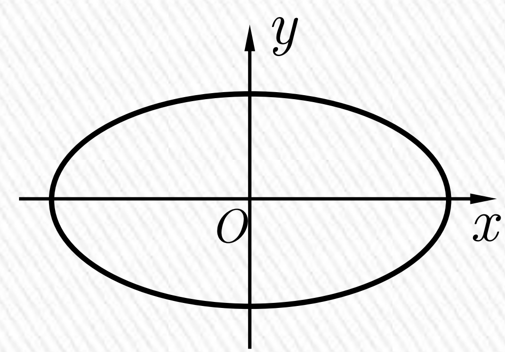
(1) 求该运动的运动轨迹方程，并指出是什么形状的方程；

(2) 求分速度、合速度、速率和加速度表达式；

(3) 从 $t = 0$ 到 t_1 这段时间内，该质点走过的路程、位移和平均速率。

(1)解：轨迹方程：

$$\begin{cases} x = A\cos\omega t \\ y = B\sin\omega t \end{cases} \xrightarrow{\text{消除}t} \begin{cases} \dfrac{x^2}{A^2} = \cos^2\omega t \\ \dfrac{y^2}{B^2} = \sin^2\omega t \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 \text{ (椭圆)}$$



P24 例1.2 已知某质点在平面上运动，运动函数为：

$$\begin{cases} x = A\cos\omega t \\ y = B\sin\omega t \end{cases},$$ 其中 A, B, ω 均为常数。

(2) 求分速度、合速度、速率和加速度表达式；

(2)解：

分速度：
$$\begin{cases} \vec{v}_x = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i} = -A\omega\sin\ \omega t\ \vec{i} \\ \vec{v}_y = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{j} = B\omega\cos\ \omega t\ \vec{j} \end{cases}$$

合速度：$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y = -A\omega\sin\ \omega t\ \vec{i} + B\omega\cos\ \omega t\ \vec{j}$

速率：$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\ A\omega\sin\omega t\ ^{2} + \ B\omega\cos\omega t\ ^{2}}$

加速度：$\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -A\omega^2\cos\ \omega t\ \vec{i} - B\omega^2\sin\ \omega t\ \vec{j}$

P24 例1.2 已知某质点在平面上运动，运动函数为：

$$\begin{cases} x = A\cos\omega t \\ y = B\sin\omega t \end{cases},\quad \text{其中 } A, B, \omega \text{ 均为常数。}$$

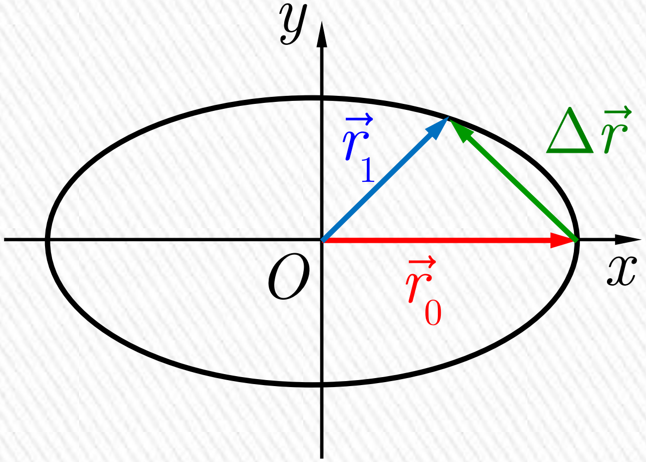
(3) 从 $t = 0$ 到 t_1 这段时间内，该质点走过的路程、位移和平均速率。

(3)解：

位移：$\Delta\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0$

$$= \left[A\cos(\omega t_1)\vec{i} + B\sin(\omega t_1)\vec{j}\right] - A\vec{i}$$

$$= A\left[\cos(\omega t_1) - 1\right]\vec{i} + B\sin(\omega t_1)\vec{j}$$



路程：$s = \int_0^{t_1} \mathrm{d}s = \int_0^{t_1} v\,\mathrm{d}t$

$$= \int_0^{t_1} \sqrt{(A\omega\sin\omega t)^2 + (B\omega\cos\omega t)^2}\,\mathrm{d}t$$

平均速率：$v = s/t_1$

1.4 匀加速运动

» 定义：

加速度的**大小**和**方向**均不随时间改变的运动。例如：自由落体运动。

» 利用高等数学知识推导匀加速运动的速度公式。

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\vec{a} \Leftrightarrow \mathrm{d}\vec{v}=\vec{a}\mathrm{d}t$$

注意积分上下限

等式两边做 $0\text{-}t$ 时刻的定积分：$\int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}}\mathrm{d}\vec{v}=\int_0^t\vec{a}\mathrm{d}t$

$$\Rightarrow \vec{v}=\vec{v}_0+\vec{a}t$$

⟶ 速度公式

分量形式 ⇒

$$\begin{cases} v_x=v_{0x}+a_xt \\ v_y=v_{0y}+a_yt \\ v_z=v_{0z}+a_zt \end{cases}$$

1.4 匀加速运动

» 利用高等数学知识推导匀加速运动的位矢和位置公式。

$$\because \ \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t \ ,$$

$$\therefore \ \mathrm{d}\vec{r} = \left(\vec{v}_0 + \vec{a}t\right)\mathrm{d}t$$

积分得：$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \mathrm{d}\vec{r} = \int_0^t \left(\vec{v}_0 + \vec{a}t\right)\mathrm{d}t$

即：$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$

位矢公式

分量形式

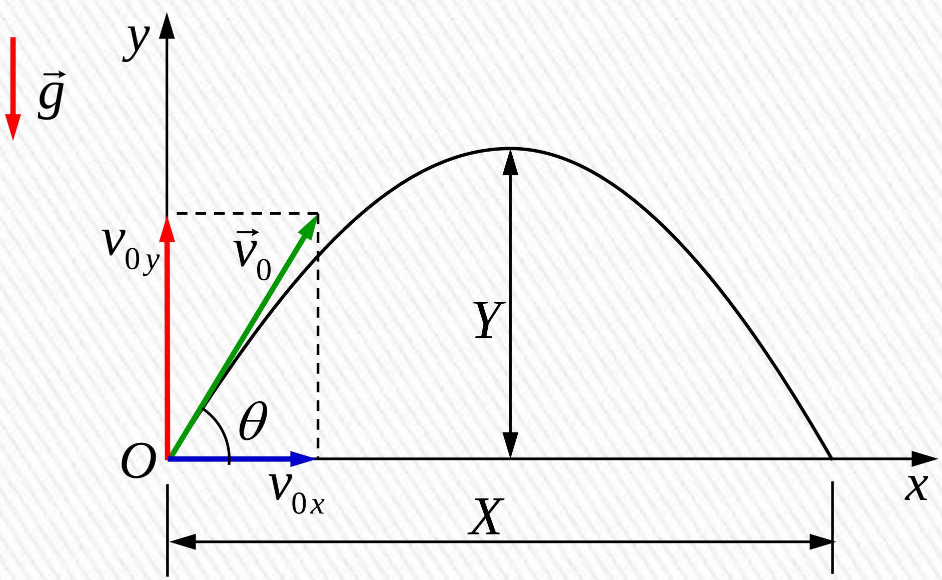
$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \\ y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \\ z = z_0 + v_{0z}t + \frac{1}{2}a_z t^2 \end{cases}$$

1.5 抛体运动

» 将抛体运动分解为**水平**和**竖直**两个方向，

» 如果不考虑空气阻力，物体在**水平**方向上的分运动是**匀速直线运动**，在**竖直**方向上的运动是**匀加速运动**，加速度为重力加速度 g。

喷泉的照片，喷泉的水流形成了类似抛物线的形状。



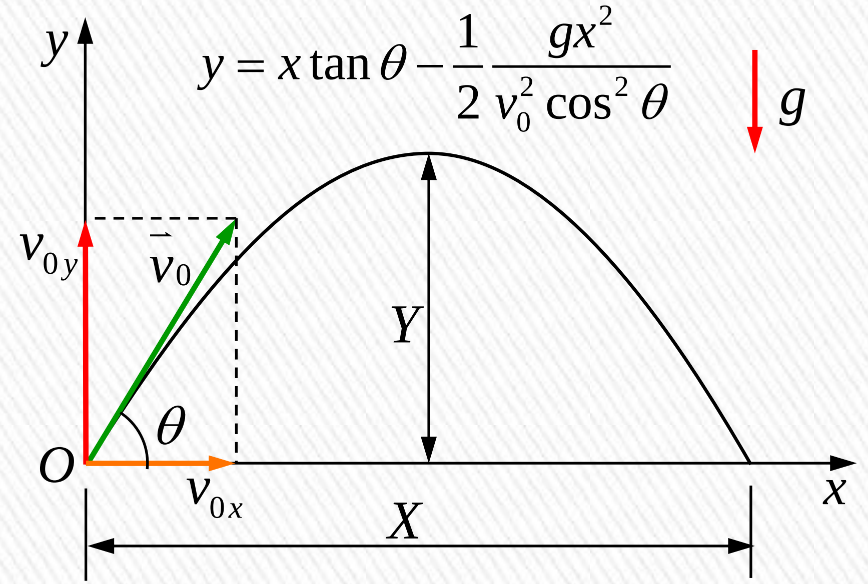
1.5 抛体运动

初速度的分量：$v_{0x}=v_0\cos\theta$，$v_{0y}=v_0\sin\theta$

运动函数：$x=v_0t\cos\theta$，$y=v_0t\sin\theta-\dfrac{1}{2}gt^2$

抛射最大高度：$Y=\dfrac{v_0^2\sin^2\theta}{2g}$

射程：$X=\dfrac{v_0^2\sin 2\theta}{g}$



1.6 (匀速)圆周运动

» 线速度：

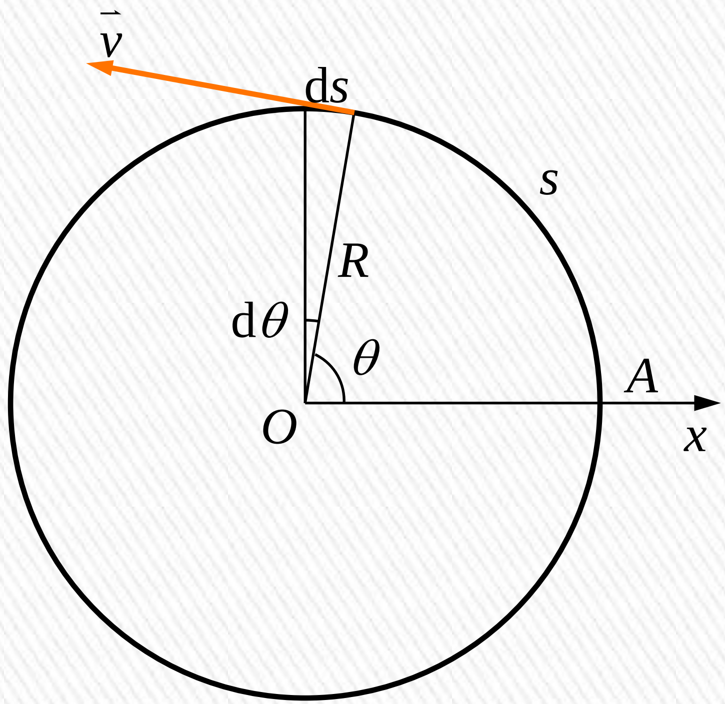
$v=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$,方向为该点的切线方向。

» 角速度：(SI 单位：弧度每秒，rad/s)

$\omega=\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$,方向满足右手螺旋定则。

» 线速度与角速度的关系：

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{R\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=R\omega$$



» 加速度：

切向加速度 $a_t=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=0$，法向加速度 $a_n=\dfrac{v^2}{R}=\omega^2R$

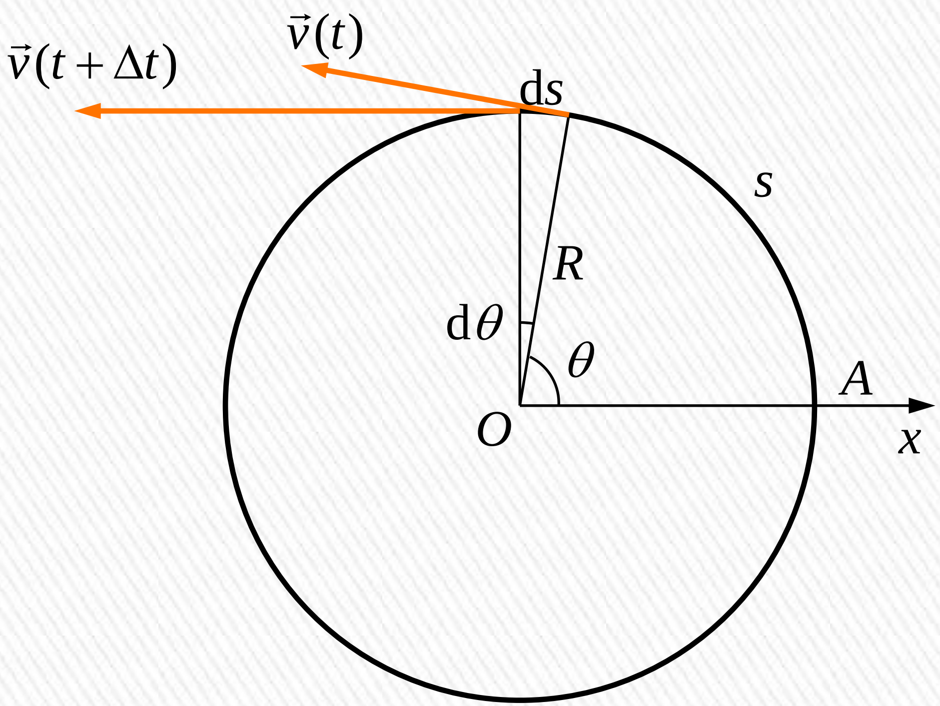
1.6 (变速)圆周运动

» 切向加速度：

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{R\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = R\alpha$$

其中 $\alpha = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$ 称为角加速度，

表示角速度随时间的变化率。



» 法向加速度：

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$

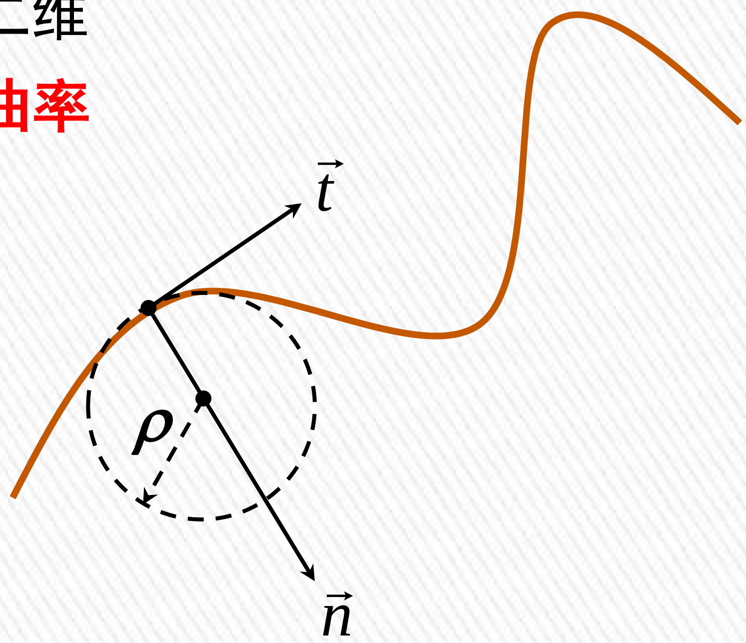
» (合)加速度：切向加速度和法向加速度的矢量和：

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t \quad , \quad a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$$

1.6 (变速)圆周运动

» 二维曲线运动

以上加速度的结论可以应用于任何二维曲线运动，但需将半径换为所研究点的**曲率半径**。



» 如果质点的运动方程为

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

» 则 t 时刻质点所处位置的曲率半径为

$$\rho = \frac{{f'^2 + g'^2}^{3/2}}{\left| f'g'' - f''g' \right|}$$

其中 f' 和 f'' 分别为 f 对时间 t 的一次导和二次导。

1.7 相对运动

» 同一个运动，相对于不同的参考系，其运动形式是不同的。

» 小球在两个参考系中的**位移关系**：

$$\Delta\vec{r}_{SE} = \Delta\vec{r}_{VE} + \Delta\vec{r}_{SV}$$

$\Delta\vec{r}_{SE}$：小球在地球参考系中的位移

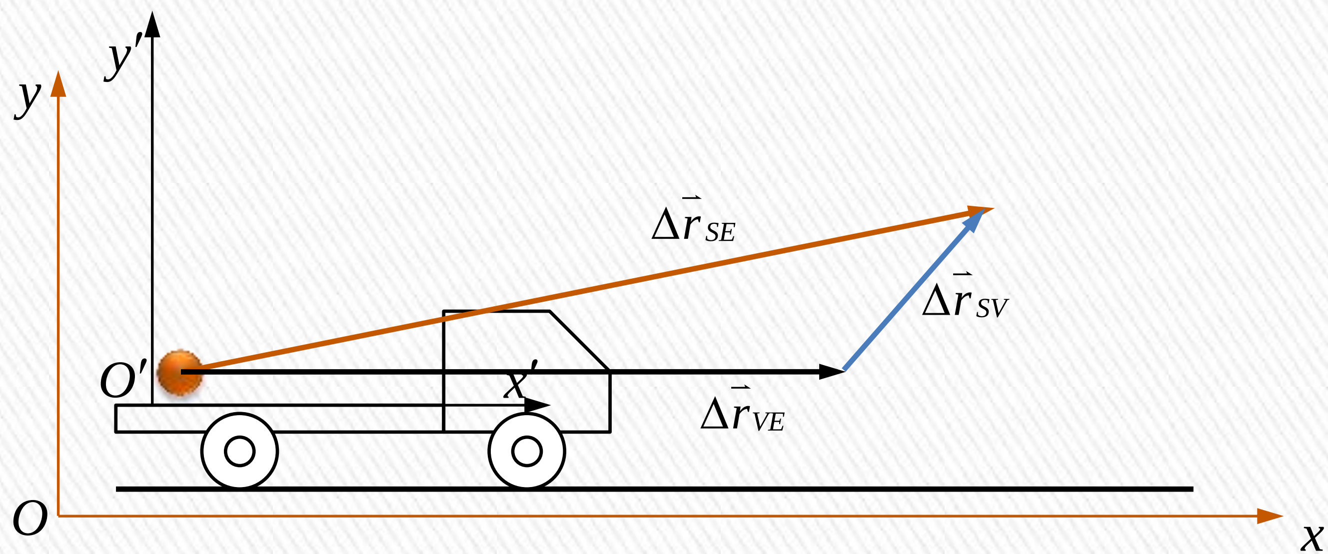
$\Delta\vec{r}_{VE}$：车辆在地球参考系中的位移

$\Delta\vec{r}_{SV}$：小球在车辆参考系中的位移

小球：**S**mall ball

车辆参考系：**V**ehicle reference system

地球参考系：**E**arth reference system



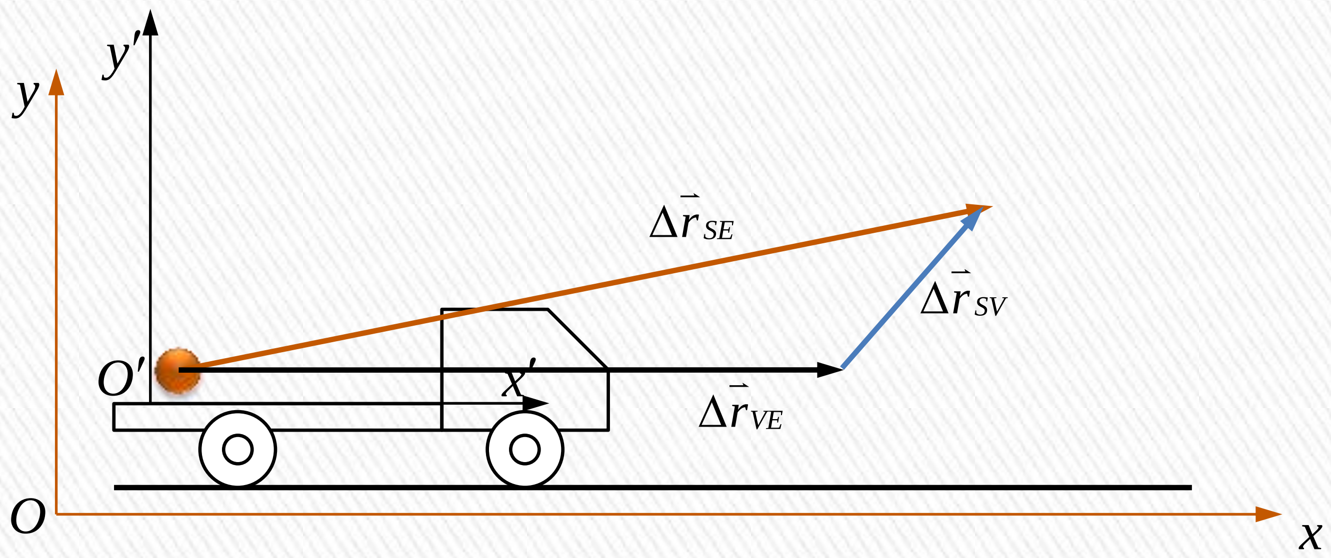
1.7 相对运动

» 小球在两个参考系中的**速度关系**：

$$\vec{v}_{SE} = \vec{v}_{VE} + \vec{v}_{SV}$$

$\vec{v}_{SE}$	$\vec{v}_{VE}$	$\vec{v}_{SV}$
小球在地球参考系中的速度	车辆在地球参考系中的速度	小球在车辆参考系中的速度

小球：**S**mall ball
车辆参考系：**V**ehicle reference system
地球参考系：**E**arth reference system



1.7 相对运动

» 同理，小球在两个参照系中的**加速度**关系：

$$\vec{a}_{SE} = \vec{a}_{VE} + \vec{a}_{SV}$$

» 特例：当两个参照系的相对速度恒定时，有

$$\vec{a}_{SE} = \vec{a}_{SV}$$

小球：**S**mall ball

车辆参考系：**V**ehicle reference system

地球参考系：**E**arth reference system