大学物理(1)

雲南大學

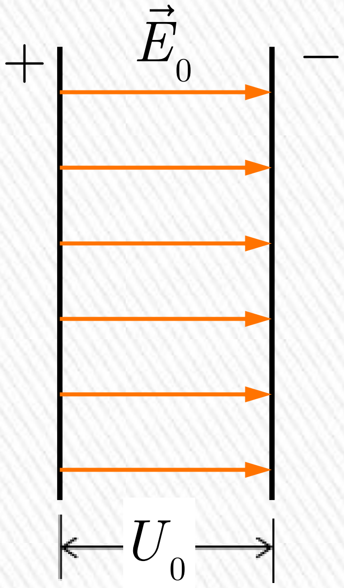
第 10 章

静电场中的电介质

什么叫做电介质

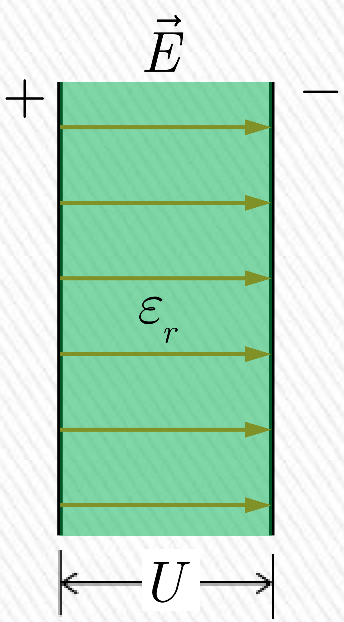
- **电介质**即通常所说的**绝缘体**，其实并没有完全电绝缘的材料。
- 本章只讨论**理想电介质**，即内部完全没有**自由电荷**。
- 但把一块电介质放到电场中，它也要受到电场的影响，即发生**电极化**现象。
- 处于**电极化**状态的电介质也会影响原有电场的分布。

10.1 电介质对电场的影响



- 平行板电容器的两块板子分别带电 $+Q$ 和 $-Q$。
- 由前述章节分析可知，板子之间会产生静电场 $\vec{E}_0$，进而使得板子之间产生电势差 U_0。
- 当板子之间是空气时，空气的电容率约等于**真空电容率** ε_0。
- 当板子之间插入电介质时，电场强度和电势差都变小了：

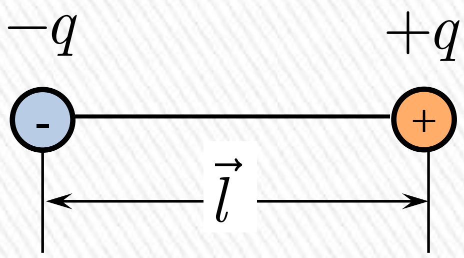
$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{\varepsilon_r}, \qquad U = \frac{U_0}{\varepsilon_r}$$



- 这里 $\boldsymbol{\varepsilon_r}$ 是该绝缘体的**相对介电常量**(也叫**相对电容率**)，其**绝对电容率**为 $\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_r\,\varepsilon_0$。
- 见 **P303 表 10.1**。

10.2 电介质的极化

» 电介质中的电荷分布比较复杂，将其简化之后，可以将每个分子看做一个由正负点电荷组成的**电偶极子**，电介质是由大量的电偶极子构成的；



» 电偶极子的**电矩**定义为：

$$\vec{p} = q\vec{l}$$

10.2 电介质的极化

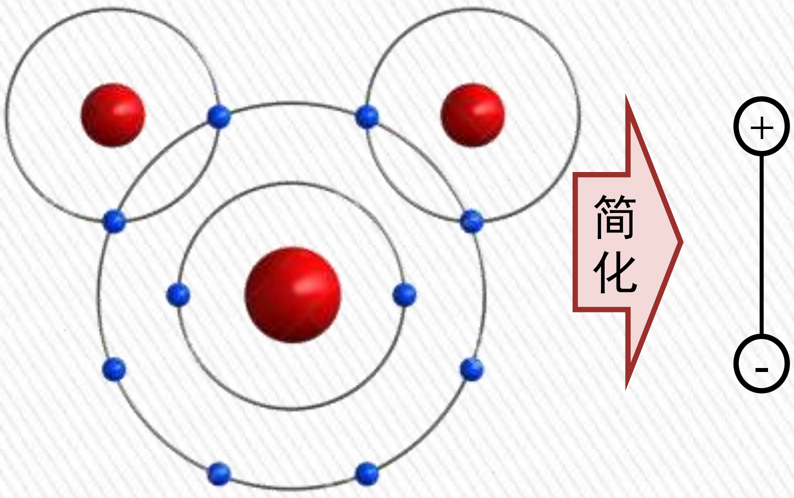
» 正常情况下正负电荷的质心不重合的分子称为**极性分子**，比如水、氯化钠、氯化氢等。

» 极性分子拥有**固有电矩**，即无论有没有外加电场，其分子都有电矩。

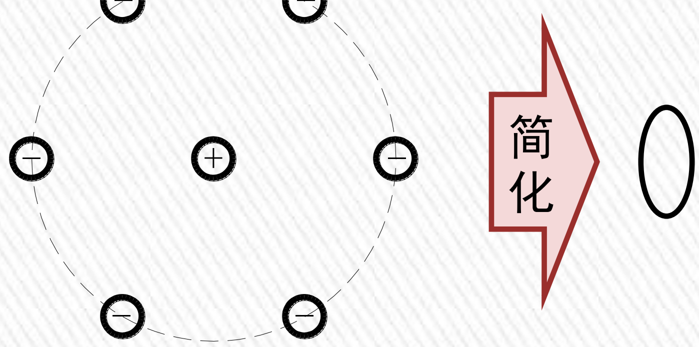
» 正常情况下正负电荷的质心重合的分子称为**非极性分子**，比如氮、氧、二氧化碳、氦、氖、氩、硅、四氟乙烯、六氟化硫等。

» 非极性分子没有**固有电矩**，只有在外加电场的时候，正负电荷的质心分开一小段距离，形成**感生电矩**。

» **感生电矩约为固有电矩的 10^{-5}** 。



极性分子

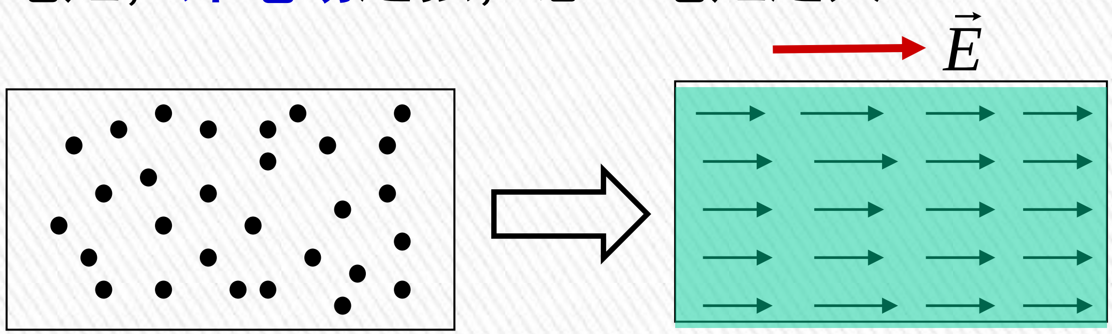


非极性分子

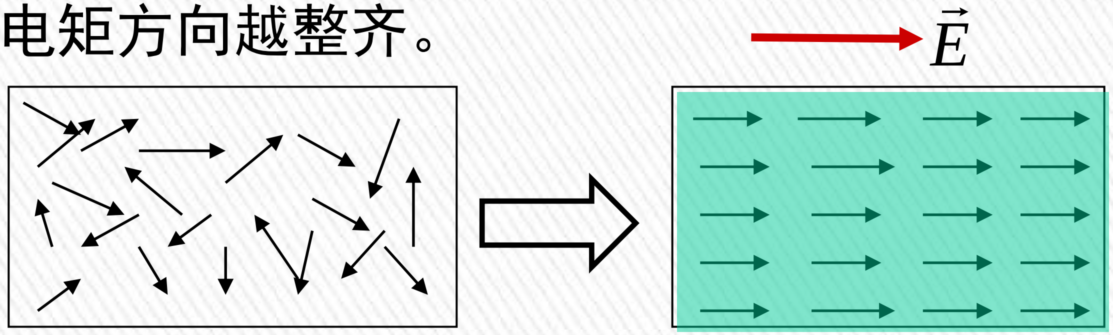
10.2 电介质的极化

» 当把一块均匀的电介质放入**外电场**中时，其分子会因为电场力的作用而发生变化，最终达到一个平衡态。

» 如果电介质是由**非极性分子**构成，则这些分子将会沿**外电场**方向产生感生电矩，**外电场**越强，感生电矩越大。



» 如果电介质是由**极性分子**构成，则这些分子原本均匀随机的固有电矩方向，会因**外电场**的影响而沿着外电场方向产生偏转，**外电场**越强，固有电矩方向越整齐。



10.2 电介质的极化

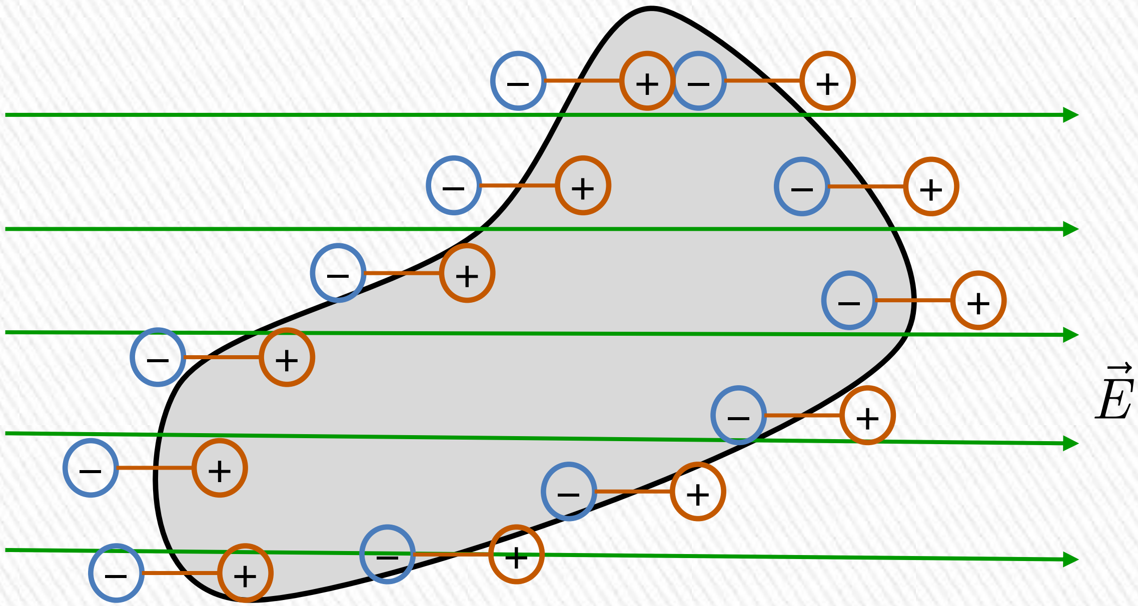
- 无论**是非极性分子**还是**极性分子**，只要处在**外电场**中，它们的正负电荷重心都会偏离正常情况。
- 因此，无论什么类型的电介质处在**外电场**中，其分子都可等效为**电偶极子**。
- 虽然两种电介质受外电场影响时发生变化的微观机制不同，但其宏观效果是一样的。

10.2 电介质的极化

» 一块电介质被极化后，在其内部的宏观微小的区域内，正负电荷电量仍然相等，因而表现为中性。

» 但是，在电介质的表面却出现了只有正电荷或者只有负电荷的电荷层，这种电荷称为**面束缚电荷**(或叫**面极化电荷**)，因为它不能像导体中的自由电荷那样能用传导的方法引走。

» 这种**在外电场**的作用下，电介质表面出现**束缚电荷**的现象，叫做**电介质的极化**。



10.2 电介质的极化

» 电介质的极化可以用**极化强度** $\vec{P}$ 来表示。

» 对于**各向同性**的电介质，其**极化强度** $\vec{P}$ **正比于电场强度** $\vec{E}$ ：

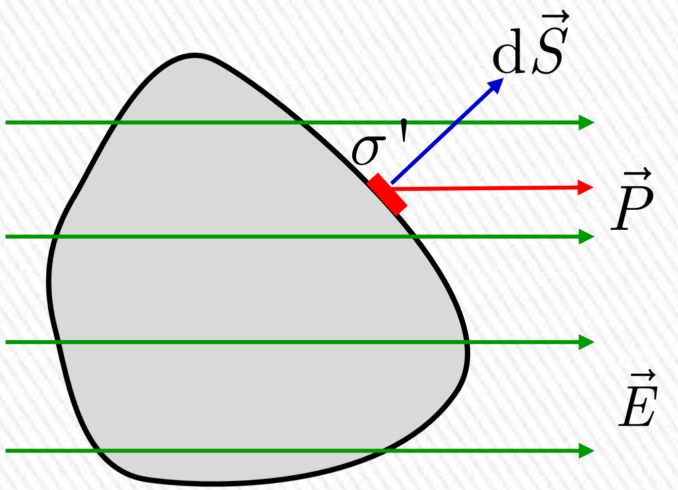
$$\vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E}$$

$\vec{P}$ 的量纲是 库伦每平方米，$\mathrm{C/m^2}$ ，和电荷面密度的量纲相同。

» 在电介质**外表面**取一个面积元 $\mathrm{d}S$ ，则此面积元上的**束缚电荷面密度** σ' 和**极化强度** $\vec{P}$ 的关系为：

$$\sigma' = \vec{P} \cdot \vec{e}_n$$

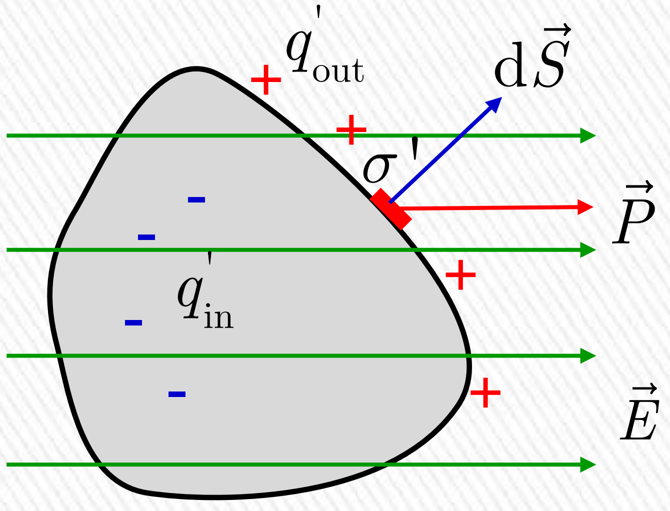
$\vec{e}_n$ 是 $\mathrm{d}\vec{S}$ 的方向矢量。



10.2 电介质的极化

» dS 处的**束缚电荷面密度**为

$$\sigma' = \vec{P} \cdot \vec{e}_n$$



» 则整个电介质**外表面**的束缚电荷总量为：

$$q'_{\mathrm{out}} = \oint_S \vec{P} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

» q'_{out} 表示电介质**外表面**的**束缚电荷**，以 q'_{in} 表示电介质内部留下的多余的电荷(即**体束缚电荷**)，根据电荷守恒定律，显然，

$$q'_{\mathrm{out}} + q'_{\mathrm{in}} = 0\,,$$

即 $q'_{\mathrm{in}} = -q'_{\mathrm{out}} = -\oint_S \vec{P} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$

10.2 电介质的击穿

» 当外加电场不是很强时，它只会引起电介质的极化，不会破坏电介质的绝缘性。

» 如果外加电场很强，则电介质的分子中的正负电荷有可能被拉开，形成自由电荷，电介质的绝缘性被破坏，这种现象叫做**电介质的击穿**。

» 一种电介质材料所能承受的不被击穿的最大的电场强度，叫做这种电介质材料的**介电强度**或者**击穿场强**。

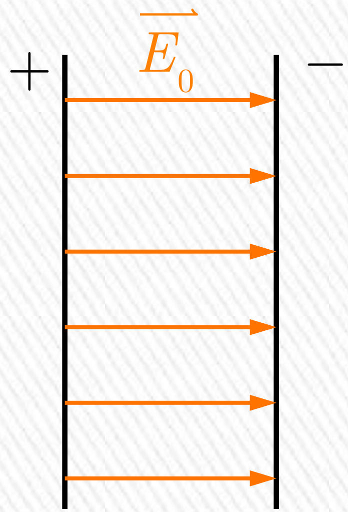
» **P306 表10.3** 。

10.3 电位移 D 的高斯定律

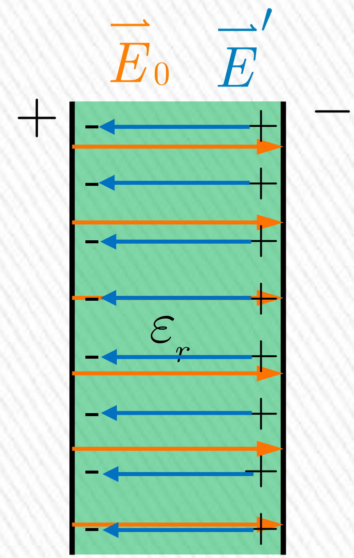
» 电介质被**外电场** $\vec{E}_0$ 极化，产生**外电场**的电荷统称**自由电荷**。

» 电介质表面的**束缚电荷**(**极化电荷**) 产生一个跟外电场方向相反的**极化电场** $\vec{E}'$ 。

» 最终，**电介质中的电场** $\vec{E}$ 就变成了**外电场** $\vec{E}_0$和**极化电场** $\vec{E}'$ 的**叠加**。



没有电介质时



插入电介质之后，$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$

10.3 电位移 *D* 的高斯定律

» 有电介质存在时的高斯定理也是成立的，即：

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} q_0 + q'_{\text{in}}$$

其中 q_0 是产生外电场的自由电荷，

q'_{in} 是产生极化电场的束缚电荷。

该公式的麻烦之处在于等号右边的 q'_{in} 和等号左边的 $\vec{E}$ 有关联。

» **束缚电荷** q'_{in} 和**极化强度** $\vec{P}$ 的关系为： $q'_{\text{in}} = -\oint_S \vec{P}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$

因此 $\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} q_0 - \oint_S \vec{P}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$

移项得： $\oint_S \left(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{S} = q_0$

定义一个新的辅助物理量 **电位移** $\vec{D} \equiv \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

则高斯定理的形式为： $\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = q_0$

10.3 电位移 *D* 的高斯定律

» **电位移 *D* 的高斯定理**：通过**任意闭合曲面**的**电位移通量**，等于该闭合曲面包围的**自由电荷**的代数和。

$$\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = q_0 \;, \quad \vec{D} \text{ 的单位为库伦每平方米}(\mathrm{C} / \mathrm{m}^2) \text{。}$$

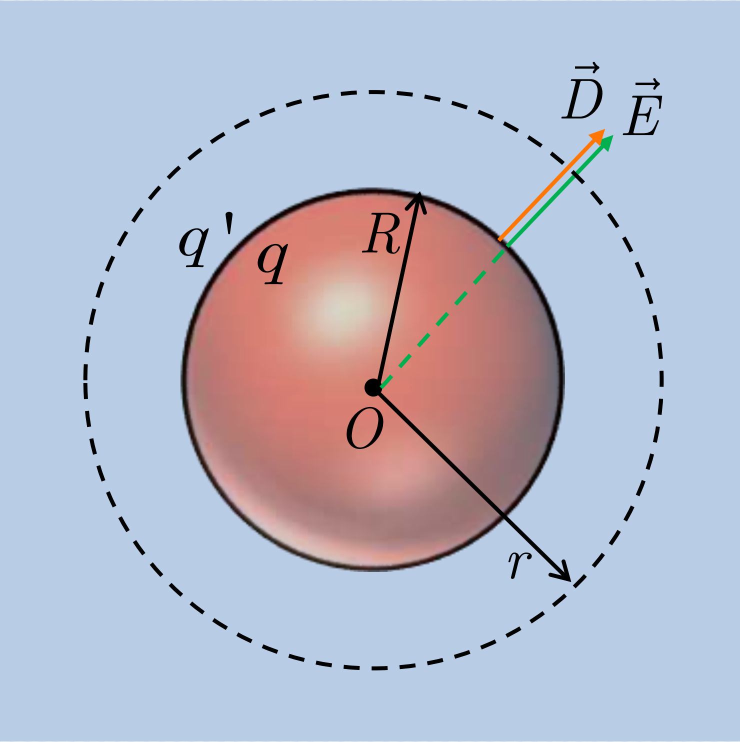
» **电位移 *D*** 和**电场强度 *E*** 的关系：

因为 $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$，而 $\vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E}$

所以 $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon \vec{E}$

其中 $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$，称为电介质的介电常量，也叫做电容率。

P307 例 10.1：一个带正电的金属球，半径为 R，电量为 q，浸泡在相对电容率为 ε_r 的油中，求球外的电场分布，以及贴近金属球表面的油面上的束缚电荷总量 q' 。



解：由于对称性的存在，金属球的电荷 q 和束缚电荷 q' 都是均匀分布的，电场强度 $\vec{E}$ 和电位移 $\vec{D}$ 的分布也都是球对称的。

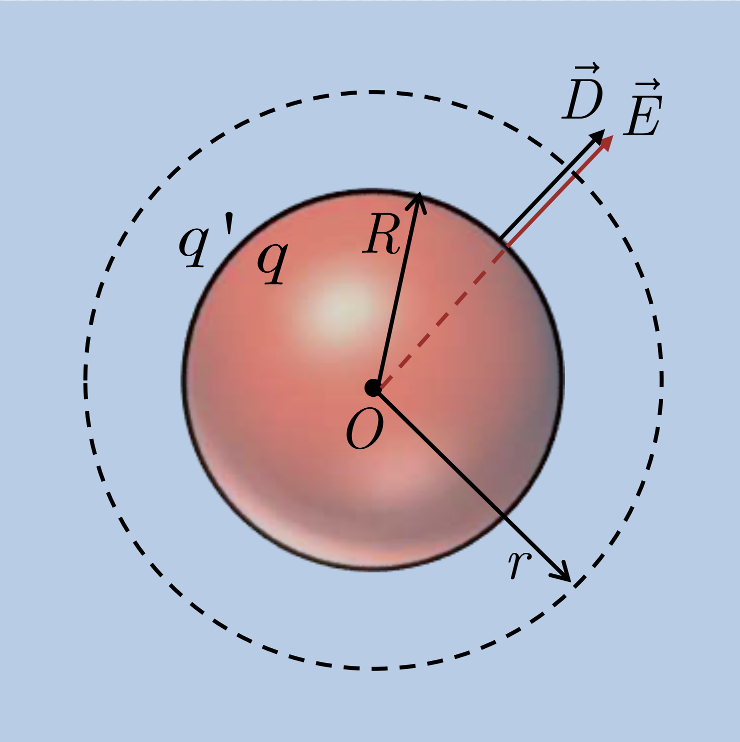
在球面之外作一个半径为 r 的高斯面，应用 D 的高斯定理得：

$$\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = D\cdot 4\pi r^2 = q$$

$$\Rightarrow D = \frac{q}{4\pi r^2}$$

$$\Rightarrow E = \frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}$$

P307 例 10.1：一个带正电的金属球，半径为 R，电量为 q，浸泡在相对电容率为 ε_r 的油中，求球外的电场分布，以及贴近金属球表面的油面上的束缚电荷总量 q' 。



解(续)：合场强 $\vec{E}$、自由电荷 q 产生的场强 $\vec{E}_0$ 以及束缚电荷产生的场强 $\vec{E}'$ 之间的关系为：

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$$

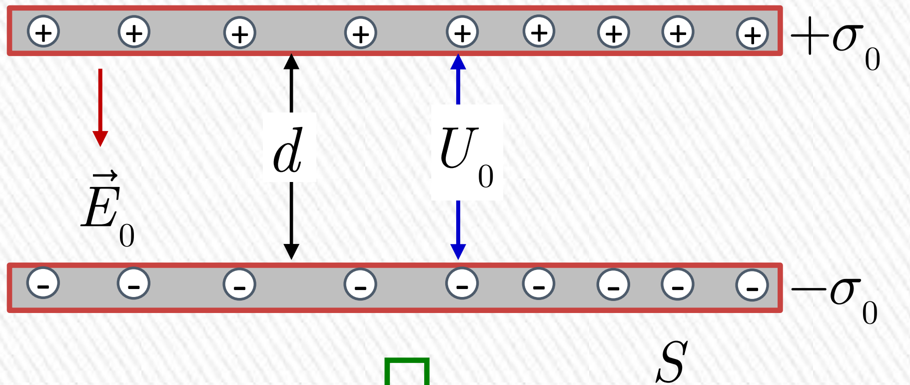
单独考虑 q 的影响， $E_0 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

单独考虑 q' 的影响，$E' = \dfrac{q'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

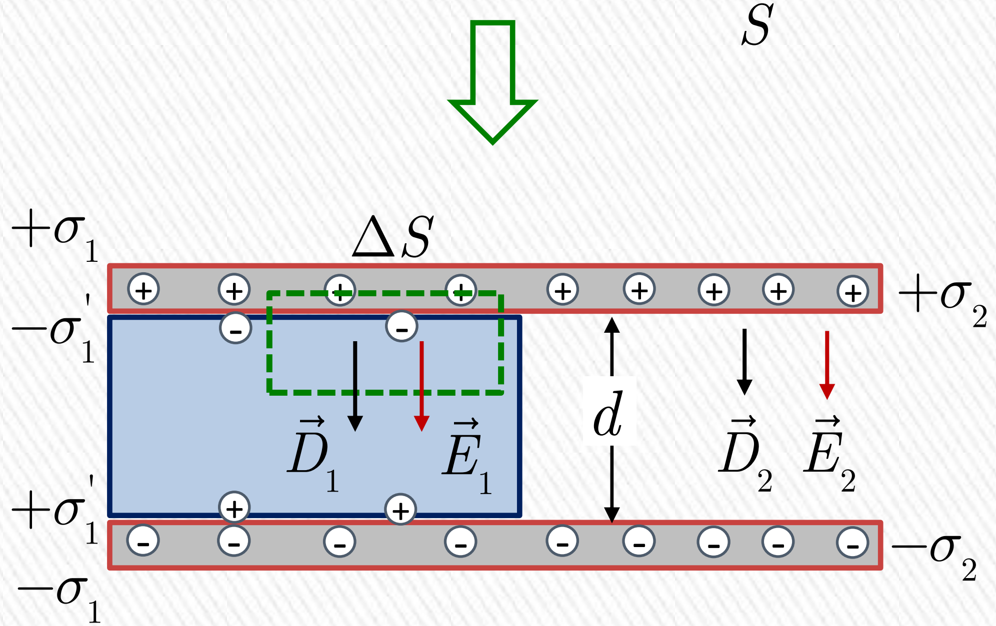
联立以上 3 个方程解得：$q' = \left(\dfrac{1}{\varepsilon_r} - 1\right)q$

P308 例 10.2：两块平行金属板之间原本是真空，两板上的电荷面密度分别为$\pm\sigma_0$，板间电压 $U_0 = 300$ V。这时保持两板上的电量不变，将板间一半空间充以相对电容率 $\varepsilon_r = 5$ 的电介质，求板间电压变为多少？电介质上下表面的面束缚电荷密度为多大？(忽略边缘效应)

解：设金属板的面积为 S，板间距离为 d。初始状态时，板间电场为 $E_0 = \sigma_0/\varepsilon_0$，板间电压为 $U_0 = E_0 d$。

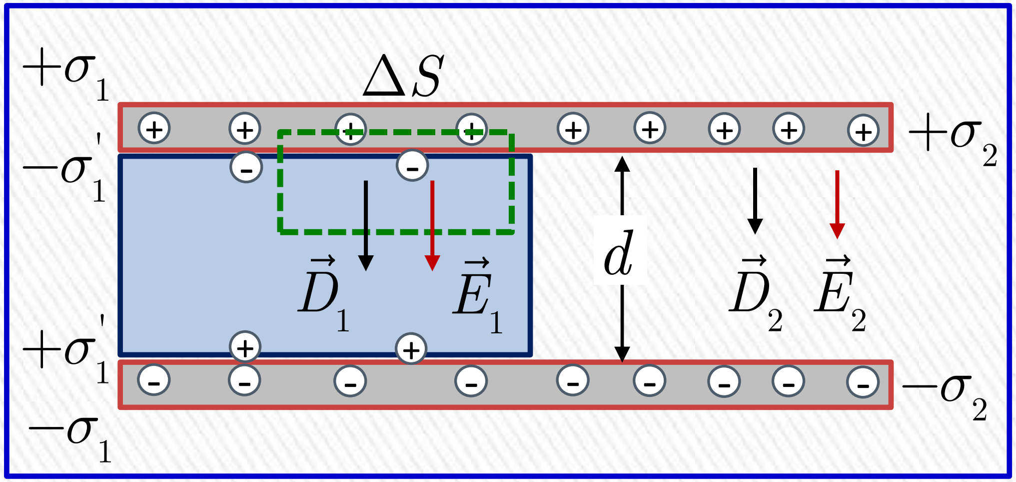


塞入电介质后，板间的场强产生了变化，板子上的电荷面密度产生了变化，左右两边的电荷面密度变得不一样，但是板子上的自由电荷总量是不变的，两板之间的电势差还是相等的(但不再是 U_0)。



P308 例 10.2：两块平行金属板之间原本是真空，两板上的电荷面密度分别为$\pm\sigma_0$，板间电压 $U_0 = 300$ V。这时保持两板上的电量不变，将板间一半空间充以相对电容率 $\varepsilon_r = 5$ 的电介质，求板间电压变为多少？电介质上下表面的面束缚电荷密度为多大？(忽略边缘效应)

解(续)：对于左半边，作如图绿色框所示的柱形高斯面，底面积ΔS，根据 D 的高斯定理：



$$\oint_S \vec{D}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_{\text{下底}} \vec{D}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$= D_1 \cdot \Delta S = \sigma_1 \cdot \Delta S$$

$$\Rightarrow D_1 = \sigma_1 \Rightarrow E_1 = \frac{D_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \quad \textbf{(1)}$$

对于右半边，容易得：

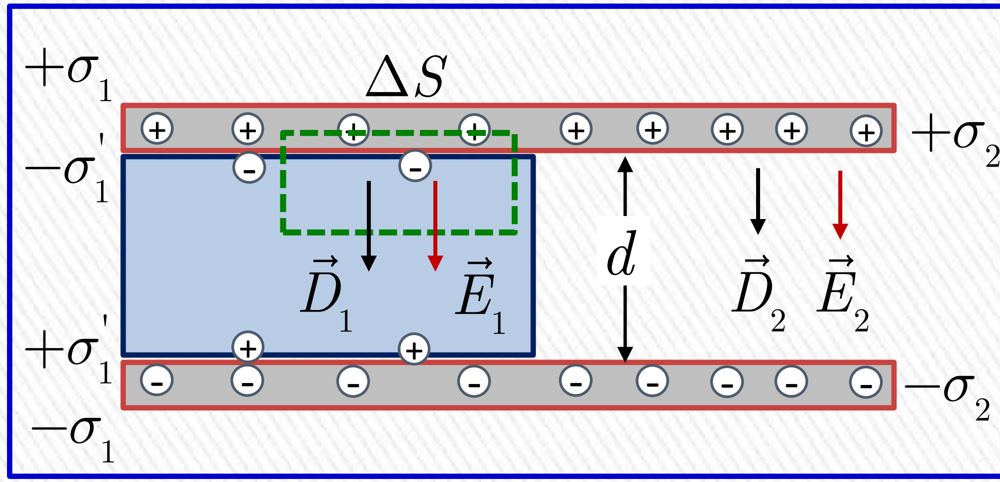
$$E_2 = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0} \quad \textbf{(2)}$$

金属板上电荷守恒得： $\sigma_1 + \sigma_2 = 2\sigma_0$ **(3)**

左右两边电势差相等得：$E_1 d = E_2 d \Rightarrow E_1 = E_2$ **(4)**

P308 例 10.2：两块平行金属板之间原本是真空，两板上的电荷面密度分别为$\pm\sigma_0$，板间电压 $U_0 = 300$ V。这时保持两板上的电量不变，将板间一半空间充以相对电容率 $\varepsilon_r = 5$ 的电介质，求板间电压变为多少？电介质上下表面的面束缚电荷密度为多大？(忽略边缘效应)

解(续)：解 4 个方程得：

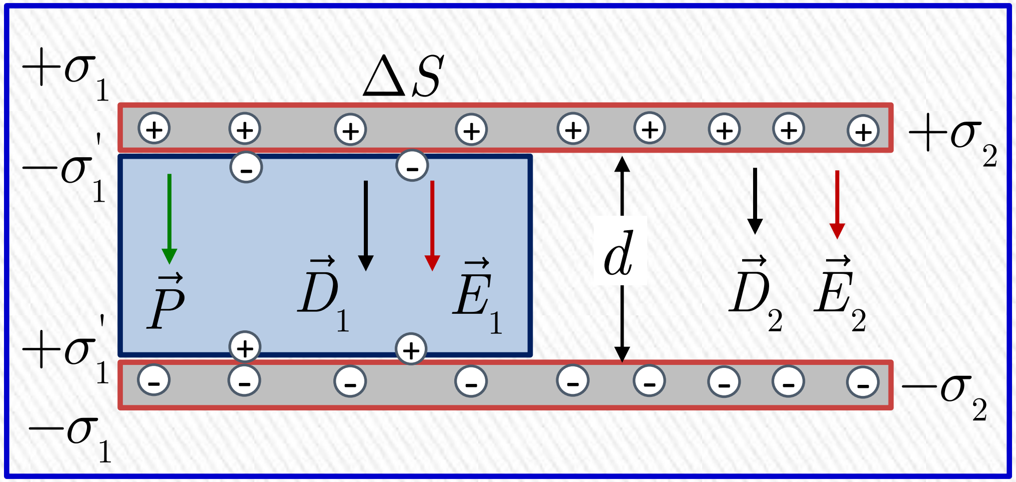


$$\begin{cases} \sigma_1 = \dfrac{2\varepsilon_r}{1+\varepsilon_r}\sigma_0 = \dfrac{5}{3}\sigma_0 \\[2ex] \sigma_2 = \dfrac{2}{1+\varepsilon_r}\sigma_0 = \dfrac{1}{3}\sigma_0 \\[2ex] E_1 = E_2 = \dfrac{2}{1+\varepsilon_r}E_0 = \dfrac{1}{3}E_0 \end{cases}$$

板间电压为： $U = E_1 d = \dfrac{1}{3}E_0 \cdot d = \dfrac{1}{3}U_0 = 100\ \text{V}$

P308 例 10.2：两块平行金属板之间原本是真空，两板上的电荷面密度分别为$\pm\sigma_0$，板间电压 $U_0 = 300$ V。这时保持两板上的电量不变，将板间一半空间充以相对电容率 $\varepsilon_r = 5$ 的电介质，求板间电压变为多少？电介质上下表面的面束缚电荷密度为多大？(忽略边缘效应)

解(续)：要求电介质表面的**束缚电荷面密度** σ_1'，先求电介质的**极化强度**：



$$\vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E}_1$$

$$= \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\frac{\sigma_1}{\varepsilon_0\varepsilon_r}\cdot\vec{e}_n$$

代入数据

$$= \frac{4}{3}\sigma_0\cdot\vec{e}_n$$

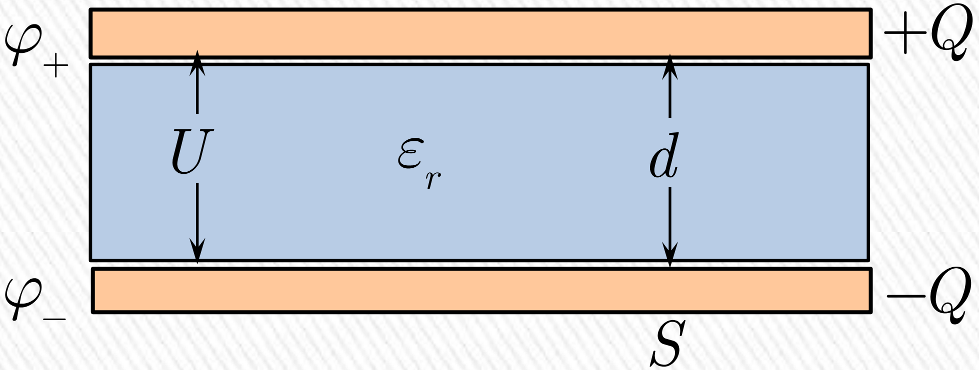
则 $\sigma_1' = \vec{P}\cdot\vec{e}_n = \frac{4}{3}\sigma_0\cdot\vec{e}_n\cdot\vec{e}_n = \frac{4}{3}\sigma_0$

10.4 电容器和它的电容

» 电容是一种常用的电子元件，由两块用电介质隔开的金属导体组成。

» 电容器最基本的形式是**平行板电容器**，两端加上等量异号电荷 $\pm Q$，板间产生电压 $U = \varphi_+ - \varphi_-$，则它的电容为：

$$C = \frac{Q}{U}$$



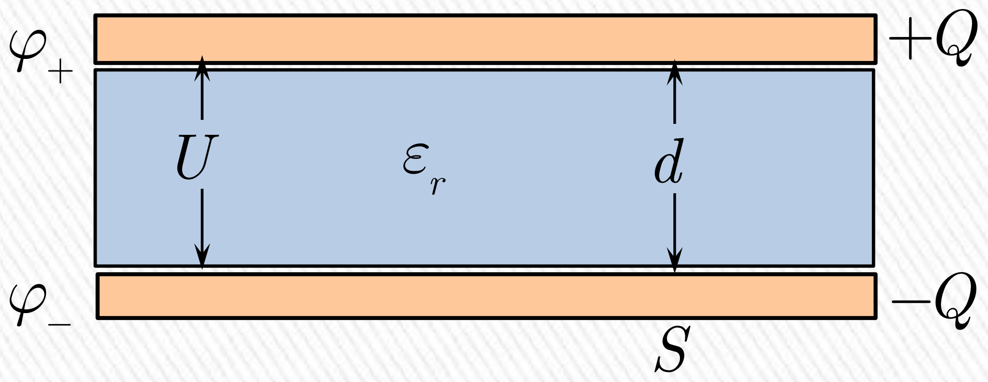
» 电容器的电容大小只取决于它本身的结构，即导体形状、导体尺寸以及导体之间的电介质，与它所带的电量无关。

10.4 电容器和它的电容

» **平行板电容器**的电容大小。(**任何形状的电容都是如此解法**)

(1) 给电容器的两极分别加上电荷 $\pm Q$，则两极之间的场强为：

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}$$



(2) 两极之间的电压为：

$$U = Ed = \frac{Qd}{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}$$

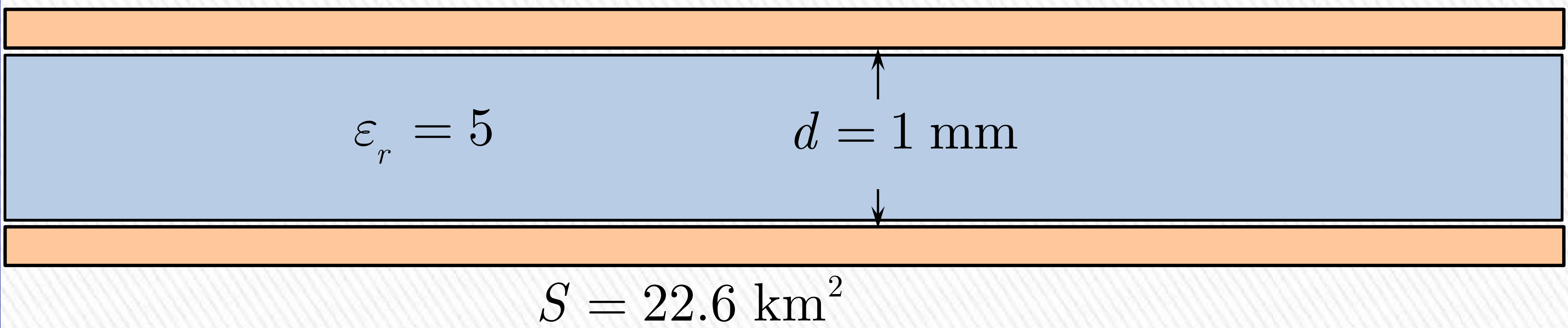
(3) 电容大小为：$C_{\text{平行板}} = \dfrac{Q}{U} = \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d}$

» 平行板电容器的大小正比于板的面积和电介质的电容率，反比于板间距离，与所带电量 $\pm Q$ 无关。

10.4 电容器和它的电容

» 电容的 SI 单位为 **法拉(F)**。

» 法拉是一个非常大的单位，以平行板电容器为例，若要制作 1 F 的电容，板间距离 1 mm，中间填充 $\varepsilon_r = 5$ 的电介质，那么平行板的面积需要达到 **22.6 平方公里**！



» 常用的电容单位为 **微法(μF)** 和 **皮法(pF)**：

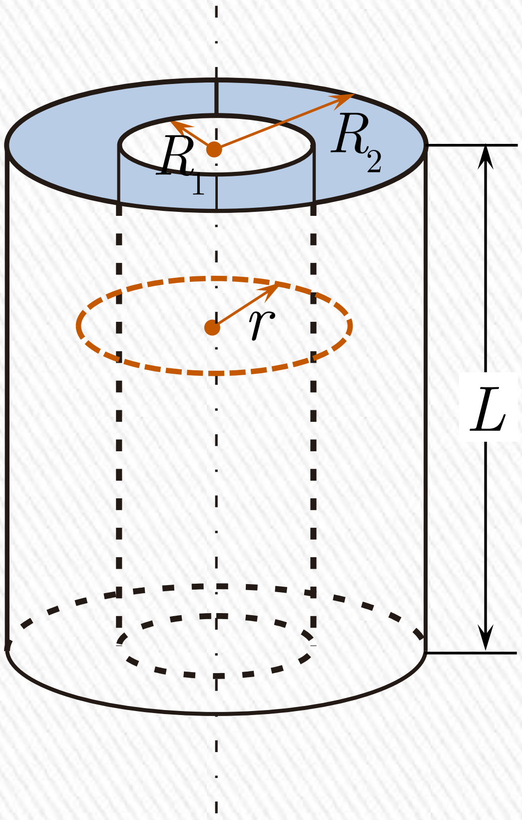
$$1\ \mu\mathrm{F} = 10^{-6}\ \mathrm{F}\ ,\ 1\ \mathrm{pF} = 10^{-12}\ \mathrm{F}$$

10.4 电容器和它的电容

» **圆柱形电容器**由两个同轴的金属圆筒构成，筒的长度为 L，两筒的半径分别为 R_1 和 R_2，两筒之间填充相对电容率为 ε_r 的电介质。

(1) 给内外筒分别充以电荷 $\pm Q$，则它们的电荷线密度分别为 $\pm\lambda=\pm Q/L$，由高斯定理求得两筒之间的场强为

$$E=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r rL}$$



(2) 两筒之间的电压为：

$$U=\int_{R_1}^{R_2}\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r rL}\,\mathrm{d}r=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

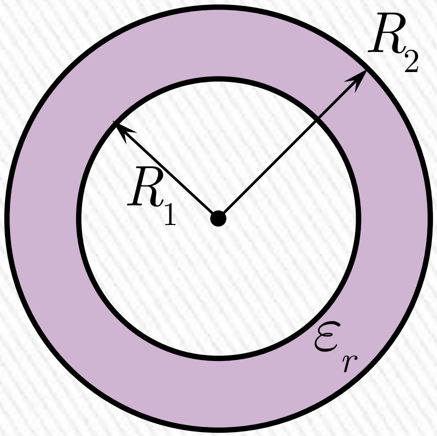
(3) 电容大小为：$C_{圆柱}=\dfrac{Q}{U}=\dfrac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L}{\ln(R_2/R_1)}$

10.4 电容器和它的电容

» **球形电容器**由两个同心金属球壳构成，球壳半径分别为 R_1 和 R_2，球壳之间填充相对电容率为 ε_r 的电介质。

» 用相同的方法可以求得其电容为

$$C_{\text{球形}} = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$



10.4 电容器和它的电容

» 衡量一个电容器的主要指标有两个，一是它的电容大小，二是它的耐电压能力，而这两者往往是矛盾的。

$$C_{平行板}=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{d}\ ,\quad C_{圆柱}=\frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L}{\ln\left(R_2/R_1\right)}\ ,\quad C_{球形}=\frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_1 R_2}{R_2-R_1}$$

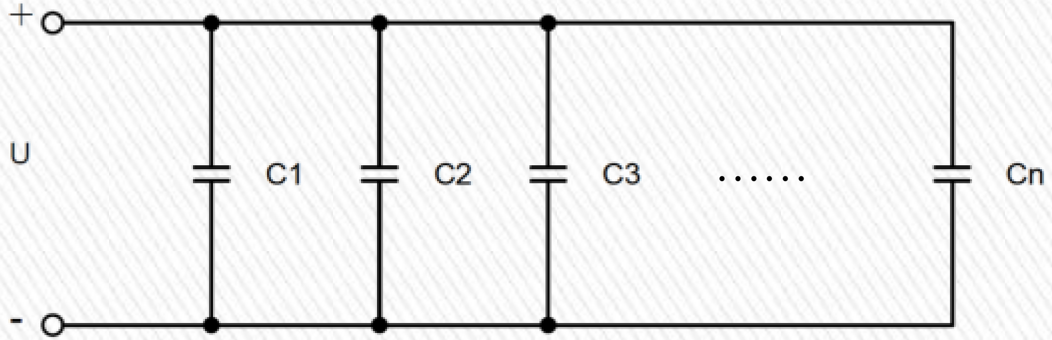
» 从三种主流电容器的电容大小公式可知，当电介质不变时，电容器两极之间的间距越小，电容越大，但同时其耐电压能力也越小。

» 解决问题的方法：

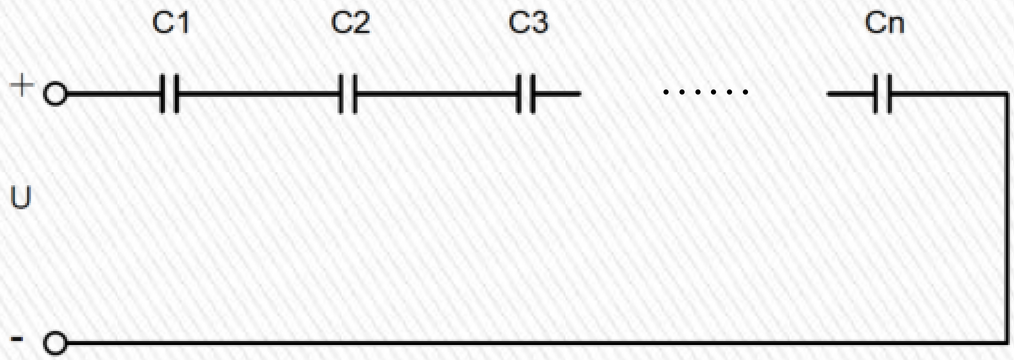
- > 研究**电容率更大**、同时**介电强度更高**的**新型材料**；
- > 电容器**并联**和**串联**。

10.4 电容器和它的电容

» 电容器**并联**之后的总电容为：$C = \sum_i C_i$

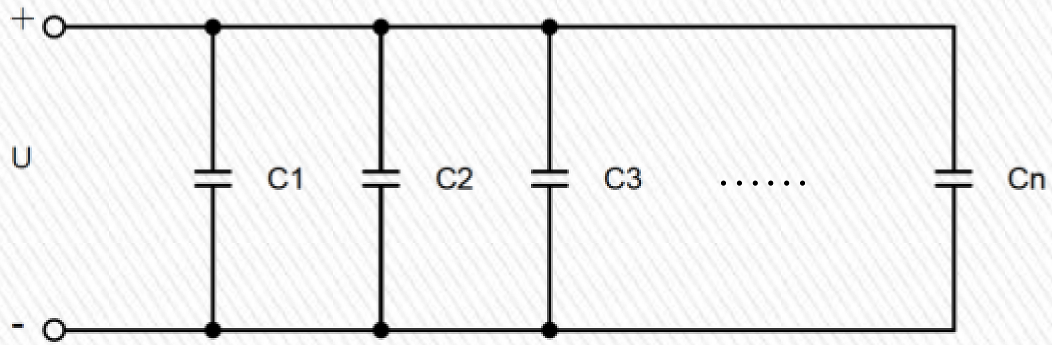


» 电容器**串联**之后的总电容为：$\frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i}$

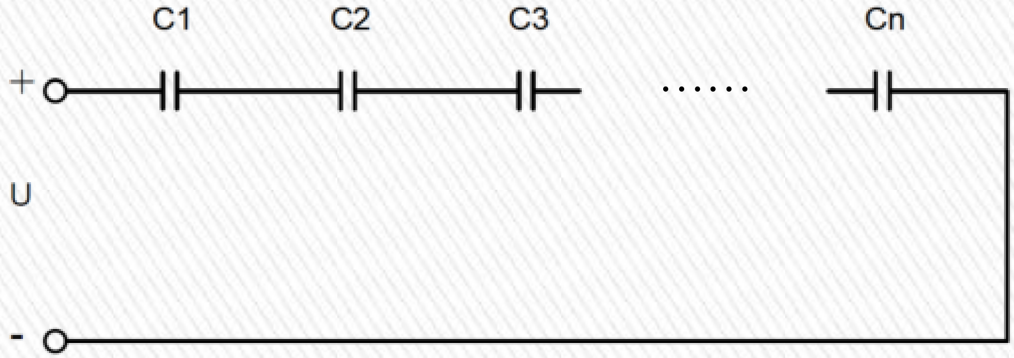


10.4 电容器和它的电容

» 电容器**并联**之后，总电容变大了，但由于每个电容都直接连接到电源上，电容器组的**耐压能力**取决于耐压能力最小的那个电容。



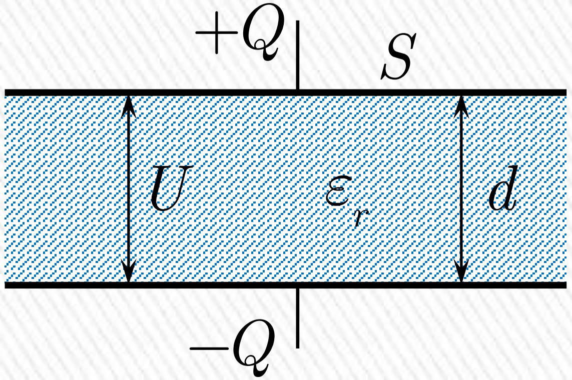
» 电容器**串联**之后，总电容变小了，但由于总电压分配到各个电容器上，所以电容器组的总体**耐压能力**提高了。



10.5 电容器的能量

» 以平行板电容器为例，两板分别充以电荷 $\pm Q$ 时，板间场强为：

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}$$



» 静电场的能量密度为

$$w_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \varepsilon_r E^2 = \frac{1}{2} DE$$

» 则该电容所储存的能量为：

$$W = \int_V w_e \mathrm{d}V = \int_V \frac{1}{2}\varepsilon_0 \varepsilon_r \left(\frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}\right)^2 \mathrm{d}V = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \varepsilon_r \left(\frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}\right)^2 \cdot Sd$$

» 整理上式，并代入 $C = \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d}$ 可得：$W = \dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{C}$

» **以上结论虽然是由平行板电容器推导而得，但对任意电容都成立。**

10.5 电容器的能量

» 电容器是重要的储能元器件，储能载体为板间静电场，放电形式为瞬间放电。

» 其储存的能量为：

$$W=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}=\frac{1}{2}CU^2=\frac{1}{2}QU$$

» 显然，当两端电压不变时，电容越大储能越多。

» 而电容大小正比于制作电容器的电介质的电容率。