

第5章 刚体的转动

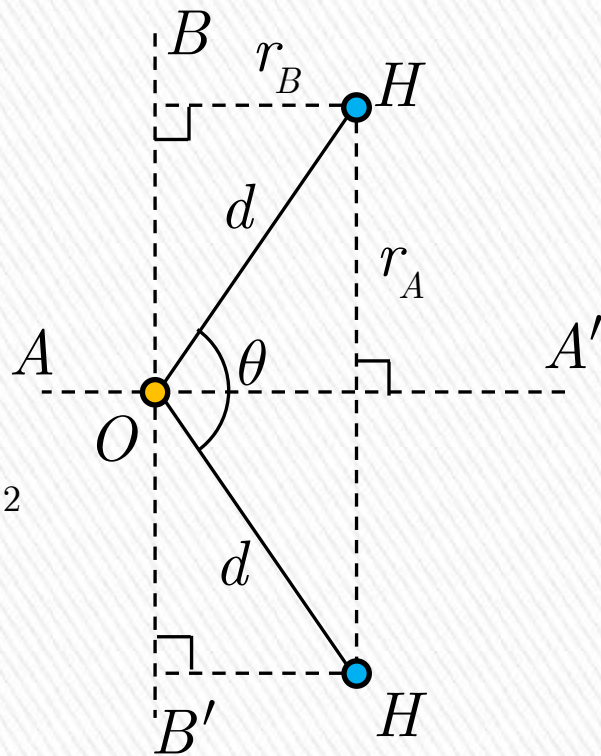
习题解答

习题 5.5: 水分子的形状如图。从光谱分析得知水分子对 AA' 轴的转动惯量为 $J_{AA'} = 1.93 \times 10^{-47} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, 对 BB' 轴的转动惯量为 $J_{BB'} = 1.14 \times 10^{-47} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 。根据此数据和各原子的质量求出氢和氧原子之间的距离 d 和夹角 θ 。

解: 氢原子质量: $m_H = 1.674 \times 10^{-27} \text{ kg}$

根据质点对定轴的转动惯量定义可知:

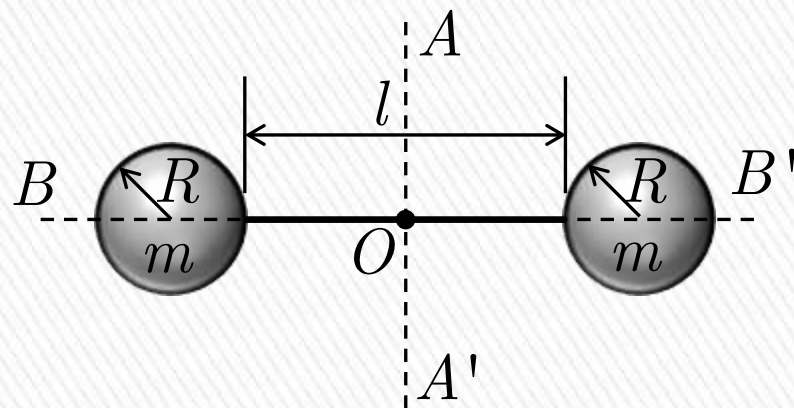
$$\left\{ \begin{aligned} J_A &= m_O r_O^2 + 2m_H r_A^2 \\ &= 0 + 2m_H \left(d \sin \frac{\theta}{2} \right)^2 = 1.93 \times 10^{-47} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \\ J_B &= m_O r_O^2 + 2m_H r_B^2 \\ &= 0 + 2m_H \left(d \cos \frac{\theta}{2} \right)^2 = 1.14 \times 10^{-47} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \end{aligned} \right.$$



习题 5.8: 一个哑铃由两个质量为 m , 半径为 R 的铁球和中间一根长 l 的杆组成, 杆的质量忽略。求此哑铃对于通过连杆中心并和它垂直的轴的转动惯量。它对于通过两球的连心线的轴的转动惯量又是多大?

解: 根据刚体对定轴的转动惯量的定义, 以及平行轴定理, 可知:

$$J_{AA'} = 2 \left[J_C + m \left(\frac{l}{2} + R \right)^2 \right]$$



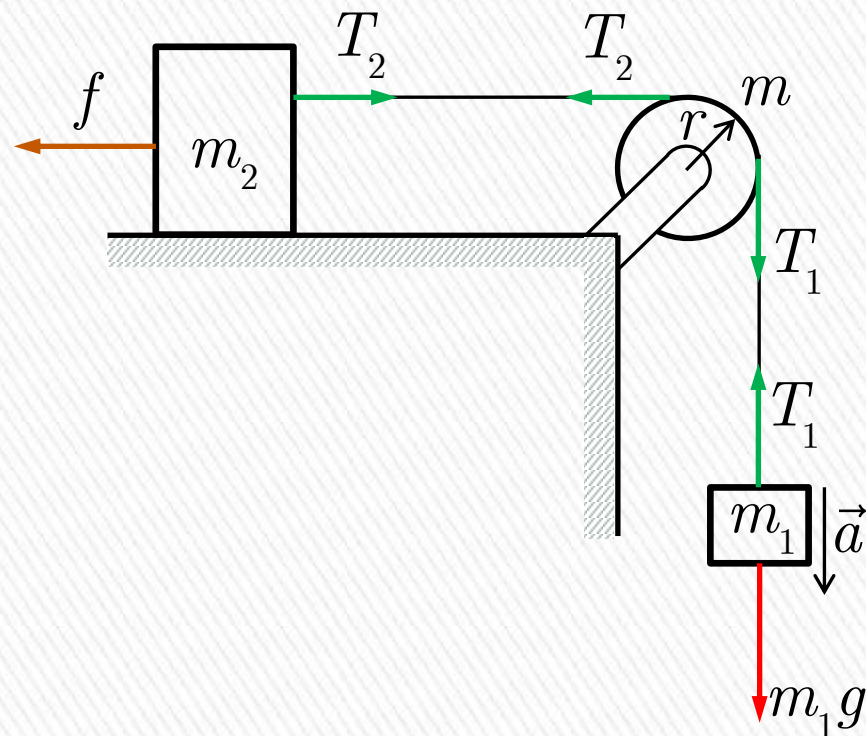
查 P161 表5.1, 均匀球体通过质心轴的转动惯量为: $J_C = \frac{2}{5} mR^2$

代入求得: $J_{AA'} = \frac{14}{5} mR^2 + \frac{1}{2} ml^2 + 2mRl$

同时可知: $J_B = 2J_C = \frac{4}{5} mR^2$

习题 5.11： 如图所示，两物体质量分别为 m_1 和 m_2 ，定滑轮的质量为 m ，半径为 r ，可视为均匀圆盘。已知 m_2 与桌面之间的滑动摩擦系数为 μ_k ，求 m_1 下落的加速度和两段绳子中的张力。

解： 分别分析 m_1 ， m_2 和滑轮的受力情况，列出动力学方程：



$$\begin{cases} m_1 : m_1 g - T_1 = m_1 a \\ m_2 : T_2 - \mu_k m_2 g = m_2 a \\ \text{滑轮} : T_1 r - T_2 r = J \alpha \end{cases}$$

$$\text{其中 } J = \frac{1}{2} m r^2, \quad \alpha = \frac{a}{r}$$

$$\text{联立以上方程，可解得：} \begin{cases} a = \frac{m_1 - \mu_k m_2}{m_1 + m_2 + m/2} g \\ T_1 = \frac{1 + \mu_k m_2 + m/2}{m_1 + m_2 + m/2} m_1 g, \quad T_2 = \frac{1 + \mu_k m_1 + \mu_k m/2}{m_1 + m_2 + m/2} m_2 g \end{cases}$$

习题 5.15: 坐在转椅上的人手握哑铃。双臂伸直时, 人、哑铃、椅子系统对竖直轴的转动惯量为 $J_1 = 2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, 在外人推动后, 此系统开始以 $n_1 = 15 \text{ r/min}$ 转动。当人的双臂收回, 使得系统的转动惯量变为 $J_2 = 0.8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, 它的转速 n_2 是多大? 双臂收回的过程中, 系统的机械能是否守恒? 什么力做了功, 做功多少? 摩擦力不计。

解: 忽略摩擦力和空气阻力, 该系统**角动量守恒**。因此有:

$$J_1 n_1 = J_2 n_2 \Rightarrow n_2 = \frac{J_1}{J_2} n_1 = 37.5 \text{ r/min}$$

人收回哑铃的过程中, 手臂对哑铃做功, 因此系统的**机械能不守恒**, 根据转动动能定理可知, 手臂做的功等于系统转动动能的增量:

$$A = \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 - \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 \stackrel{\text{代入数据}}{=} 3.701 \text{ J}$$

习题 5.16: 图中均匀杆长 $L=0.4\text{ m}$, 质量 $M=1.0\text{ kg}$, 由其上端的光滑水平轴吊起而处于静止。今有一质量 $m=8.0\text{ g}$ 的子弹以速率 $v_0=200\text{ m/s}$ 水平射入杆中而不复出, 射入点在轴下 $d=3L/4$ 处。

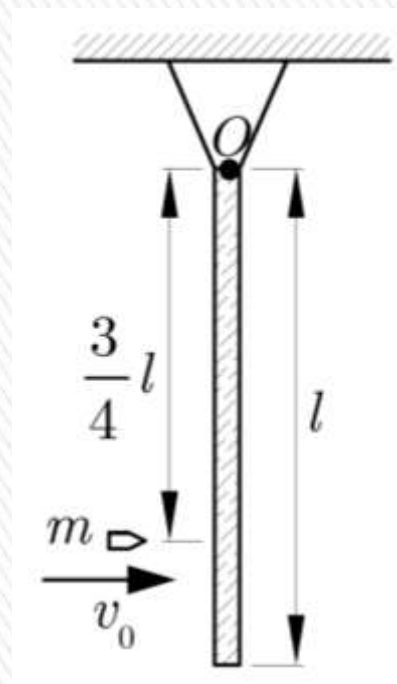
(1) 求子弹停在杆中时杆的角速度 ω 。

(2) 求杆的最大偏转角度 θ 。

(1) 解: 子弹和杆的碰撞过程中, 系统所受合外力矩为零, 角动量守恒:

$$mv_0 \cdot \frac{3}{4}l = \left(m \left(\frac{3}{4}l \right)^2 + \frac{1}{3}Ml^2 \right) \omega$$

$$\text{解得: } \omega = \frac{36mv_0}{16Ml + 27ml} = 8.88\text{ rad/s}$$

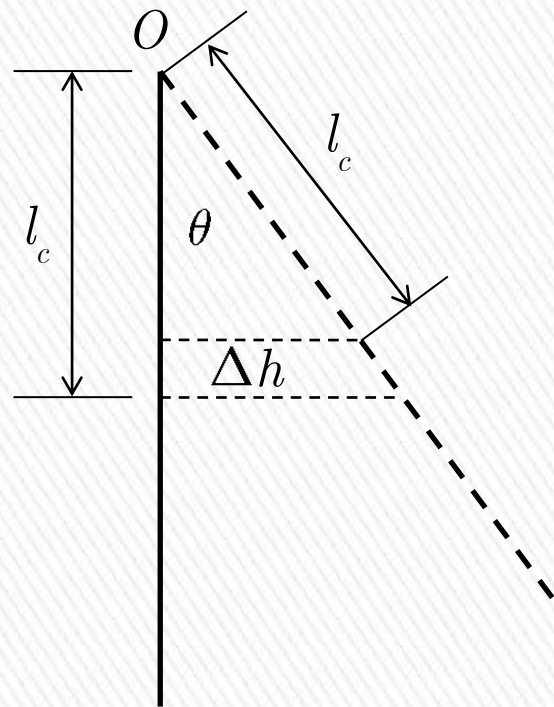


- (1) 求子弹停在杆中时杆的角速度 ω 。
- (2) 求杆的最大偏转角度 θ 。

(2) 解：子弹和杆向上偏移的过程中，机械能守恒，子弹和杆的转动动能转化为重力势能：

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(m \frac{3}{4} l^2 + \frac{1}{3} M l^2 \right) \omega^2 \\ &= Mg \frac{1}{2} L + mg \frac{3}{4} L (1 - \cos \theta) \end{aligned}$$

代入数据解得: $\theta = 94^{\circ}18'$



习题 5.18: 两辆质量都是1200 kg 的汽车在平直公路上都以 72 km/h 的高速迎面开行。由于两车质心轨道距离仅为 0.5 m，因为发生碰撞，碰后两车挂在一起，此残体对其质心轴的转动惯量为 2500 kg·m²，求：

- (1) 两车挂在一起的旋转角速度；
- (2) 由于碰撞而损失的机械能。

(1) 解: 两车碰撞过程中，外力矩(摩擦力形成的)可以忽略不计，因此角动量守恒：

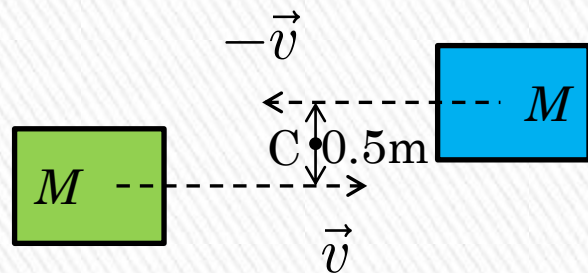
$$2 \cdot Mvr = J\omega$$

其中 $M = 1200 \text{ kg}$ ， $v = 72 \text{ km/h} = 20 \text{ m/s}$ ， $r = 0.25 \text{ m}$ ， $J = 2500 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ ，代入数据求得：

$$\omega = 4.8 \text{ rad/s}$$

(2) 解: 损失的机械能为：

$$2 \cdot \frac{1}{2} Mv^2 - \frac{1}{2} J\omega^2 \stackrel{\text{代入数据}}{=} 4.5 \times 10^5 \text{ J}$$



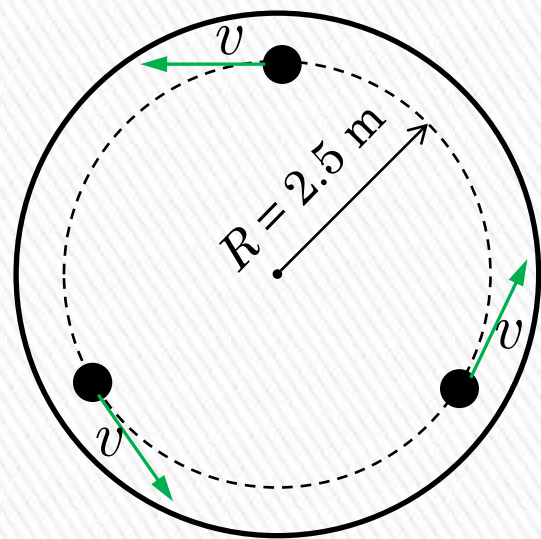
习题 5.19：宇宙飞船中有三个宇航员绕着船舱的环形内壁沿同一方向跑动以产生人造重力。

(1) 如果想使得人造重力等于他们在地面上所受的自然重力，那么他们跑动的速率应为多大？设他们的质心运动的半径为 2.5 m，人体当做质点来处理。

(1) 解：要使宇航员跑动的离心力等于自然重力，则跑动速率必须满足：

$$3m \cdot \frac{v^2}{R} = 3m \cdot g$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{Rg} \stackrel{\text{代入数据}}{=} 4.95 \text{ m/s}$$



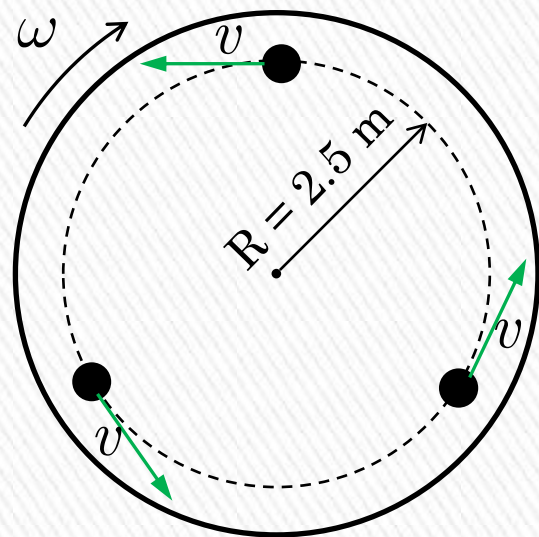
习题 5.19：宇宙飞船中有三个宇航员绕着船舱的环形内壁沿同一方向跑动以产生人造重力。

(2) 如果飞船最初未动，那么当宇航员在上面跑动时，飞船将以多大的角速度旋转？设每个宇航员的质量为 70 kg ，飞船船体对于其纵轴的转动惯量为 $3 \times 10^5\text{ kg}\cdot\text{m}^2$ 。

(2) 解：飞船-宇航员系统所受的外力矩可以忽略不计，该系统的角动量守恒：

$$3mvR - J\omega = 0$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{3mvR}{J} \stackrel{\text{代入数据}}{=} 8.67 \times 10^{-3} \text{ rad/s}$$



习题 5.19：宇宙飞船中有三个宇航员绕着船舱的环形内壁沿同一方向跑动以产生人造重力。

(3) 要使得飞船转过 30° ，宇航员需要跑几圈？

(3) 解：飞船转过 30° 的时间为

$$t = \frac{\pi}{6\omega}$$

宇航员对飞船的角速度为

$$\omega + \frac{v}{R}$$

在时间 t 内跑过的圈数为

$$n = \frac{\omega + v/R}{2\pi} t \quad \text{代入数据} = 19 \text{ 圈}$$

