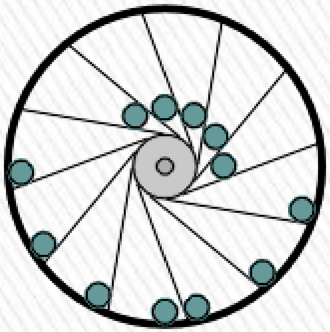
力学篇，第5章 刚体的转动

大学物理(1)

云南大学

第 5 章 刚体的转动



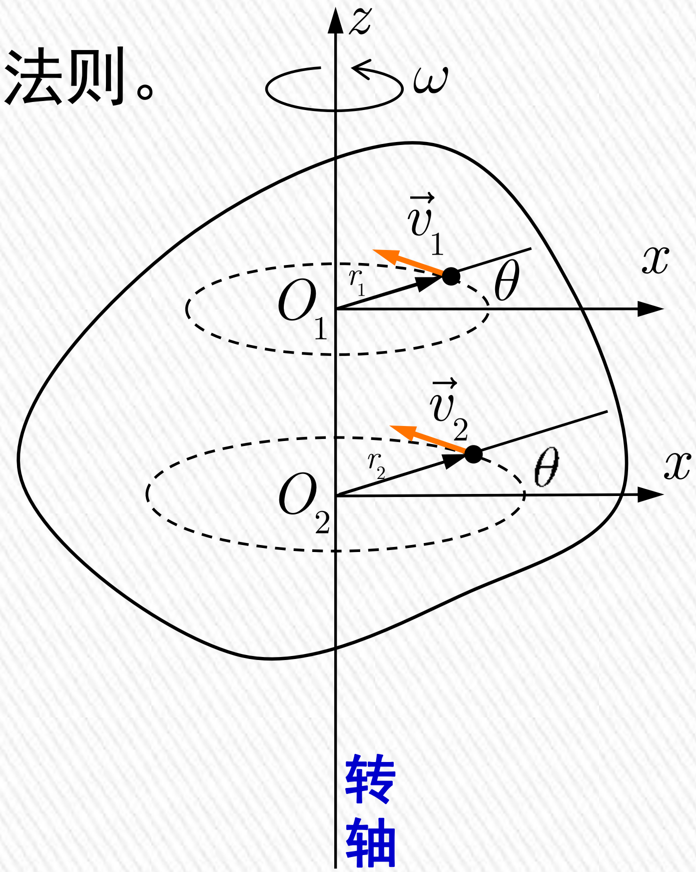
任课教师：张艳

5.1 刚体转动的描述

» **刚体**：受力时不改变形状和体积的物体。

» 刚体可看成是许多个质点组成的质点系，每个质点称为一个**质元**，各个质元之间的位置关系保持不变。

» **角速度**： $\omega = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$， 方向满足右手螺旋法则。



» **角速度和线速度的关系**： $v = r\omega$

» **角加速度**： $\alpha = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$

» **切向加速度、法向加速度和它们的关系**：

$$a_t = r\alpha \;,\quad a_n = r\omega^2$$

5.1 刚体转动的描述

» **刚体**在做定轴、匀加速转动时，其运动规律和质点的直线匀加速运动非常相似：

刚体的定轴匀加速转动：

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\theta$$

类比

质点的直线匀加速运动：

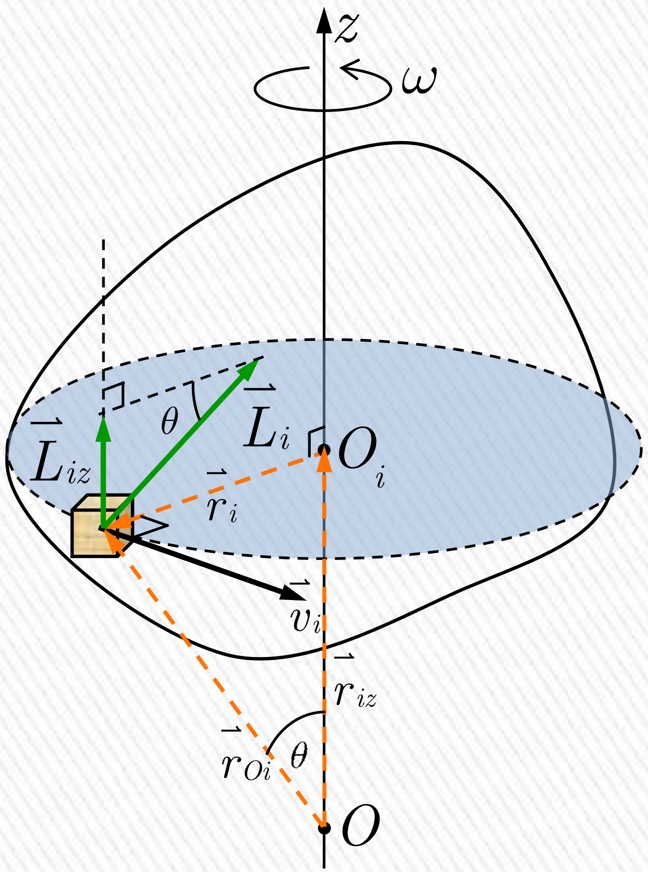
$$v = v_0 + at$$

$$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$v^2 - v_0^2 = 2as$$

5.2 转动定律

» 定义 $J_z \equiv \sum_i \Delta m_i r_i^2$ 为刚体相对于 z 轴的**转动惯量**，



$$M_z = \frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = J_z \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = J_z \alpha$$

通常表示成 $\boxed{M = J\alpha}$

刚体所受到的相对于定轴的合外力矩，等于它的转动惯量和它的角加速度的乘积。

* 转动与平动的类比

平动

名称	符号
位矢	$\vec{r}$
速度	$\vec{v}$
加速度	$\vec{a}$
质量	m
力	$\vec{F}$
动量	$\vec{p}=m\vec{v}$

$$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t},\ \vec{a}_t=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$$

转动

名称	符号
角度	$\vec{\theta}$
角速度	$\vec{\omega}$
角加速度	$\vec{\alpha}$
转动惯量	J
力矩	$\vec{M}$
角动量	$\vec{L}=J\vec{\omega}$

$$\vec{\omega}=\frac{\mathrm{d}\vec{\theta}}{\mathrm{d}t},\ \vec{\alpha}=\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}$$

注：刚体的定轴旋转只有正反两个方向。

线量和角量的关系：$v=r\omega$，$a_t=r\alpha$

转动和平动的关系：$\overrightarrow{M}=\vec{r}\times\vec{F}$，$\overrightarrow{L}=\vec{r}\times\vec{p}$

* 转动与平动的定理对照

平动

运动规律：

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \dfrac{1}{2}\vec{a}t^2 \\ \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t \end{cases}$$

牛顿第二定律：

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

动量定理：

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \text{动量守恒定律}$$

转动

运动规律：

$$\begin{cases} \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \dfrac{1}{2}\alpha t^2 \\ \omega = \omega_0 + \alpha t \end{cases}$$

刚体定轴转动定理：

$$M = J\alpha$$

角动量定理：

$$\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \text{角动量守恒定律}$$

5.3 转动惯量的计算

» 在上一节中，我们定义了转动惯量

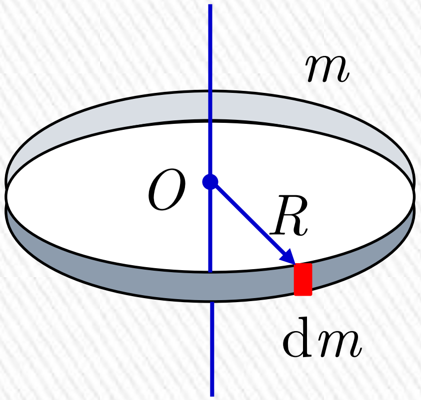
$$J_z \equiv \sum_i m_i r_i^2$$

对于质量连续分布的刚体，上式中的求和需要换成积分，即：

$$J_z \equiv \int_V r^2 \mathrm{d}m$$

5.3 转动惯量的计算

P159 例 5.2：求质量为 m，半径为 R 的均匀薄**圆环**的转动惯量，转轴如图所示。



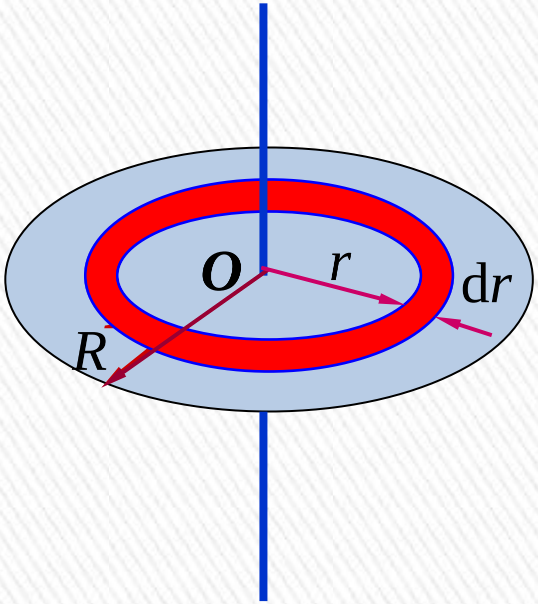
解：如图所示，在圆环上取微元 $\mathrm{d}m$，可知无论微元取在什么位置，它距离转轴的距离均为 R。

则该圆环转动惯量为：

$$J = \int R^2 \mathrm{d}m = R^2 \int \mathrm{d}m = mR^2$$

5.3 转动惯量的计算

P159 例 5.3：求质量为 m，半径为 R 的均匀**圆盘**的转动惯量，转轴如图所示。



解：如图所示，在圆盘上取半径为 r 的环状微元 $\mathrm{d}m$。

设圆盘的质量面密度为 ρ，则圆盘的质量为 $\rho\pi R^2$，微元的质量为 $\rho 2\pi r\mathrm{d}r$ 。

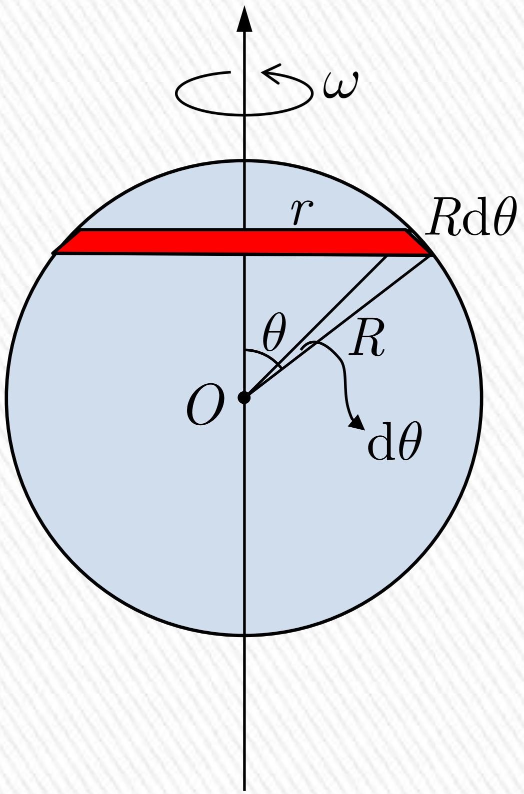
则该圆盘的转动惯量为

$$J=\int r^2\mathrm{d}m=\int_0^R r^2\cdot\rho 2\pi r\mathrm{d}r=\frac{1}{2}\rho\pi R^4=\frac{1}{2}mR^2$$

5.3 转动惯量的计算

例：求质量为 m，半径为 R 的薄**球壳**相对于过球心的转轴的转动惯量。

解：如图所示，在球壳上取半径为 r 的环状微元 $\mathrm{d}m$。设球壳的质量面密度为 ρ，则球壳的质量为 $\rho\cdot 4\pi R^2$，环状微元的质量为



$$\mathrm{d}m=\rho\cdot 2\pi rR\mathrm{d}\theta=\rho\cdot 2\pi R\sin\theta\cdot R\mathrm{d}\theta$$

球壳的转动惯量为：

$$J=\int r^2\mathrm{d}m=\int_0^\pi \left(R\sin\theta\right)^2\cdot\rho\cdot 2\pi R\sin\theta\cdot R\mathrm{d}\theta$$

$$=2\rho\pi R^4\left(\frac{2}{3}\int_0^\pi\sin\theta\mathrm{d}\theta\right)$$

$$=\frac{8}{3}\rho\pi R^4$$

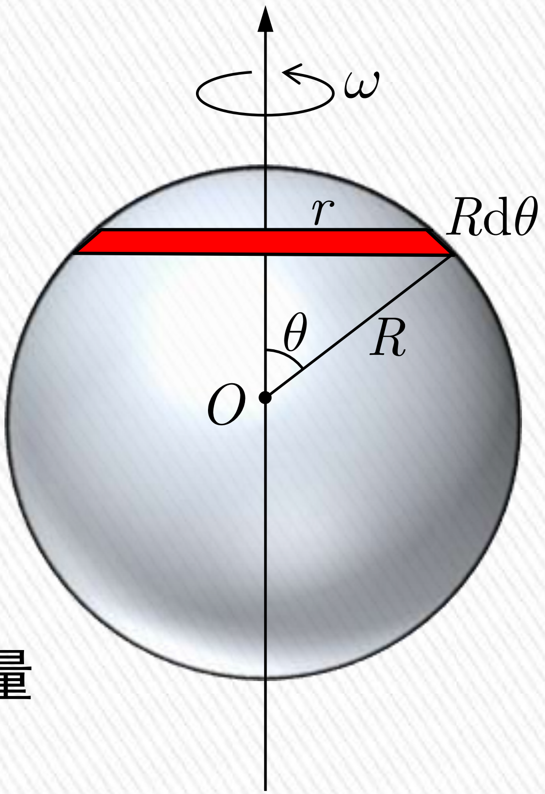
$$=\frac{2}{3}mR^2$$

$$m=\rho\cdot 4\pi R^2$$

5.3 转动惯量的计算

例：求质量为 m，半径为 R 的**实心球体**相对于质心轴的转动惯量。

解：如图所示，在球体上取半径为 r 的圆盘状微元 $\mathrm{d}m$。设球体的质量体密度为 ρ，则球体的质量为 $\rho\cdot 4\pi R^3/3$，盘状微元的质量为



$$\begin{aligned}\mathrm{d}m &= \rho\cdot\pi r^2\cdot R\mathrm{d}\theta\cdot\sin\theta \\ &= \rho\cdot\pi(R\sin\theta)^2\cdot R\mathrm{d}\theta\cdot\sin\theta \\ &= \rho\cdot\pi R^3\cdot\sin^3\theta\cdot\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

根据**P159 例 5.3**的结论，圆盘微元的转动惯量为：

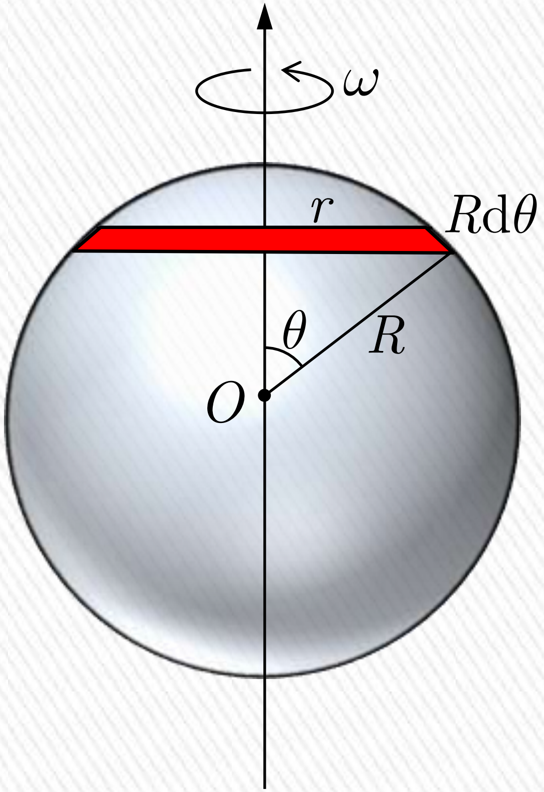
$$\mathrm{d}J = \frac{1}{2}\mathrm{d}m\cdot r^2 = \frac{1}{2}\;\rho\cdot\pi R^3\cdot\sin^3\theta\cdot\mathrm{d}\theta\;\cdot\;{R\sin\theta}^{\;2}$$

5.3 转动惯量的计算

例：求质量为 m，半径为 R 的**实心球体**相对于质心轴的转动惯量。

解(续)：圆盘微元的转动惯量为：

$$\mathrm{d}J=\frac{1}{2}\mathrm{d}m\cdot r^{2}=\frac{1}{2}\;\rho\cdot\pi R^{3}\cdot\sin^{3}\theta\cdot\mathrm{d}\theta\;\cdot\;{R\sin\theta}^{\;2}$$



球体的转动惯量为：

$$J=\int\mathrm{d}J=\int_{0}^{\pi}\frac{1}{2}\;\rho\cdot\pi R^{3}\cdot\sin^{3}\theta\cdot\mathrm{d}\theta\;\cdot\;{R\sin\theta}^{\;2}$$

$$=\frac{1}{2}\rho\cdot\pi R^{5}\cdot\left(\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot\int_{0}^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\right)$$

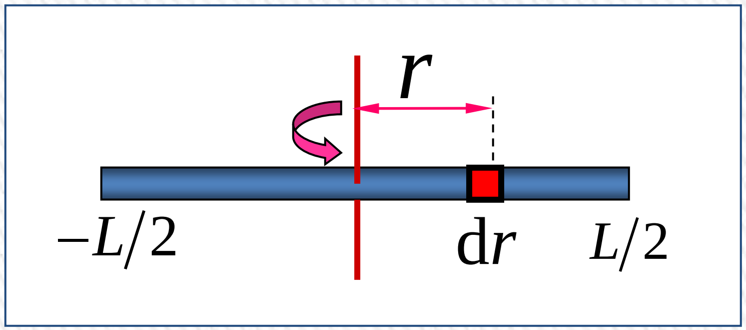
$$=\frac{8}{15}\rho\cdot\pi R^{5}$$

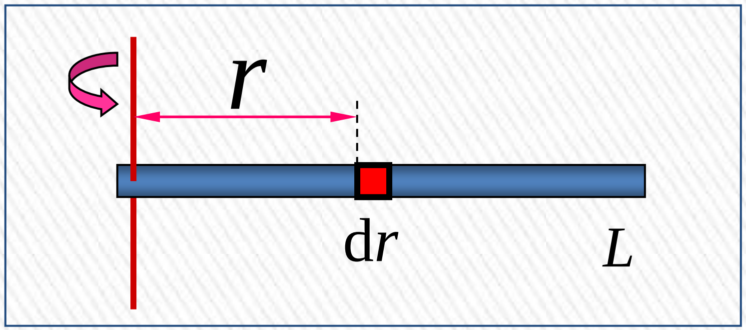
$$=\frac{2}{5}mR^{2}$$

$$m=\frac{4}{3}\rho\pi R^{3}$$

5.3 转动惯量的计算

P160 例 5.4：求质量为 m，长度 L 的均匀细棒分别绕中心和一端旋转的转动惯量。





解：令棒的质量线密度为 ρ，则细棒的质量为 ρL；如图所示，取一距离 r 处的微元 $\mathrm{d}m$，则 $\mathrm{d}m=\rho\mathrm{d}r$。

如左图所示的转动惯量为：$J=\int r^2\mathrm{d}m=2\int_0^{L/2} r^2\rho\mathrm{d}r=\dfrac{1}{12}\rho L^3=\dfrac{1}{12}mL^2$

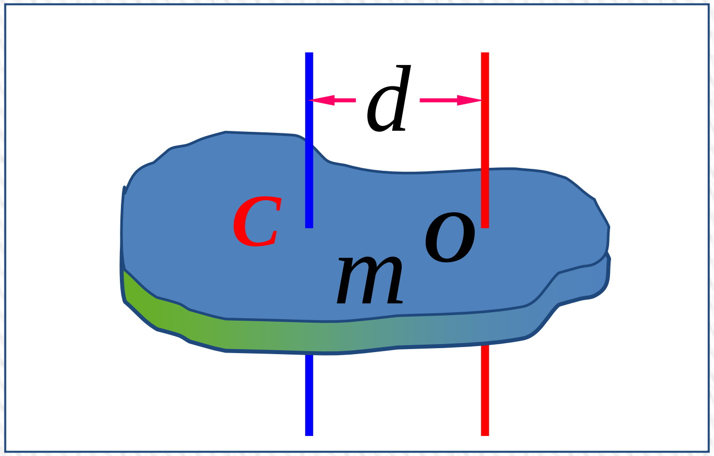
如右图所示的转动惯量为：$J=\int r^2\mathrm{d}m=\int_0^{L} r^2\rho\mathrm{d}r=\dfrac{1}{3}\rho L^3=\dfrac{1}{3}mL^2$

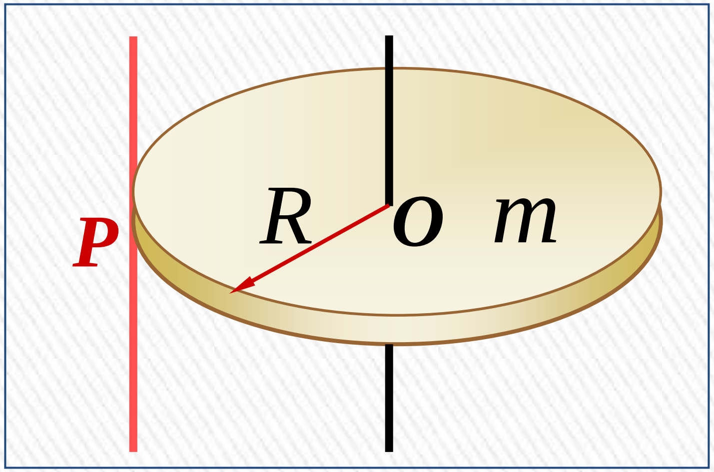
5.3 转动惯量的计算

» **平行轴定理**：

» 质量为 m 的刚体，如果对其质心轴的转动惯量为 J_C，则对任一与该轴平行、相距为 d 的转轴的转动惯量为：

$$J = J_C + md^2$$



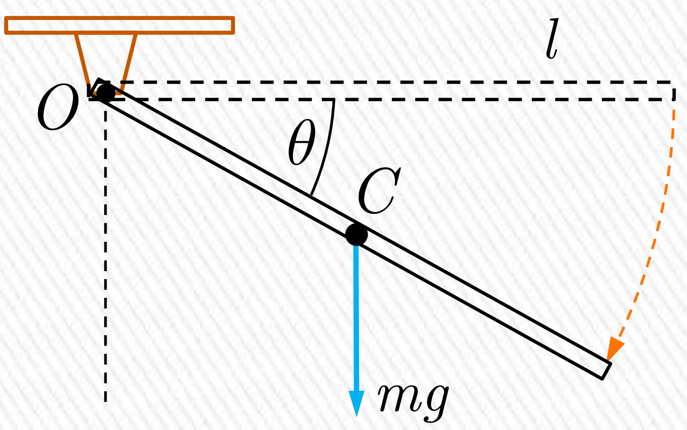


5.4 转动定律的应用

P163 例 5.7：一根长 l，质量 m 的均匀细棒，其一端有一固定的、可旋转的光滑水平轴。最初棒静止在水平位置，求它下摆 θ 角时的角加速度和角速度，以及此时棒所受轴的力的大小和方向。

解：刚体运动方程为

$$M = J\alpha$$



转动惯量 J 已知，需要求力矩 M 。

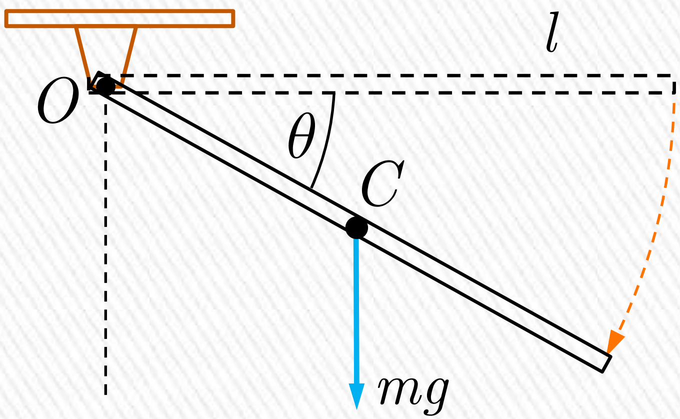
只有重力对细棒产生力矩，根据质心运动原理，重力相对于 O 点对细棒的力矩为：

$$M = \frac{1}{2}mgl\cos\theta$$

则棒的角加速度为 $$\alpha = \frac{M}{J} = \frac{\frac{1}{2}mgl\cos\theta}{\frac{1}{3}ml^2} = \frac{3g\cos\theta}{2l}$$

5.4 转动定律的应用

P163 例 5.7：一根长 l，质量 m 的均匀细棒，其一端有一固定的、可旋转的光滑水平轴。最初棒静止在水平位置，求它下摆 θ 角时的角速度和角加速度，以及此时棒所受轴的力的大小和方向。



解(续)：棒的角加速度为 $\alpha = \dfrac{3g\cos\theta}{2l}$

代数变换得：

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}$$

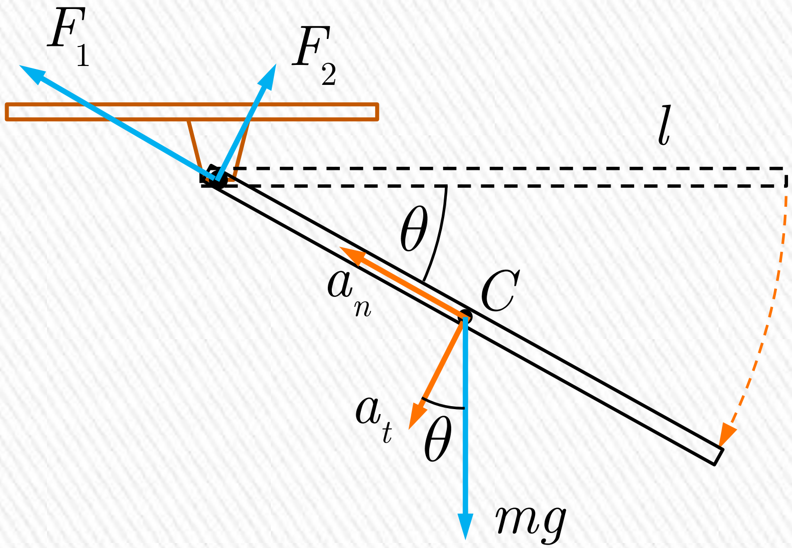
即：$\dfrac{3g\cos\theta}{2l} = \omega\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta} \Rightarrow \dfrac{3g}{2l}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \omega\,\mathrm{d}\omega$

积分得：$\displaystyle\int_0^\theta \frac{3g\cos\theta}{2l}\mathrm{d}\theta = \int_0^\omega \omega\,\mathrm{d}\omega \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g\sin\theta}{l}}$

5.4 转动定律的应用

P163 例 5.7：一根长 l，质量 m 的均匀细棒，其一端有一固定的、可旋转的光滑水平轴。最初棒静止在水平位置，求它下摆 θ 角时的角速度和角加速度，以及此时棒所受轴的力的大小和方向。

解(续)：分别设棒所受轴的法向力和切向力为 F_1 和 F_2，方向如图。



根据质心运动原理，对细棒进行法向和切向受力分析得：

$$\begin{cases} F_1 - mg\sin\theta = ma_n \\ mg\cos\theta - F_2 = ma_t \end{cases}$$

其中 $$\begin{cases} a_n = \omega^2 r = \dfrac{3g\sin\theta}{l}\cdot\dfrac{l}{2} \\ a_t = \alpha r = \dfrac{3g\cos\theta}{2l}\cdot\dfrac{l}{2} \end{cases}$$

解得：$$\begin{cases} F_1 = \dfrac{5}{2}mg\sin\theta \\ F_2 = \dfrac{1}{4}mg\cos\theta \end{cases}$$

5.5 （相对固定轴的）角动量守恒

» 质点系(刚体)相对于定点的角动量定理为：

$$\overrightarrow{M}=\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$$

» 质点系(刚体)的角动量守恒定律为：质点系所受合外力矩为 0 时，它将维持转速和转轴方向不变。

$$\overrightarrow{M}=0\;\Rightarrow\;\vec{L}=\vec{C}$$

5.6 转动中的功和能

» 质点的**平动动能**：

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

提问：二者的量纲是否一致？

» 刚体的**转动动能**：

$$E_k = \frac{1}{2}J\omega^2$$

» **平动动能、转动动能、重力势能、弹力势能，都属于机械能。**

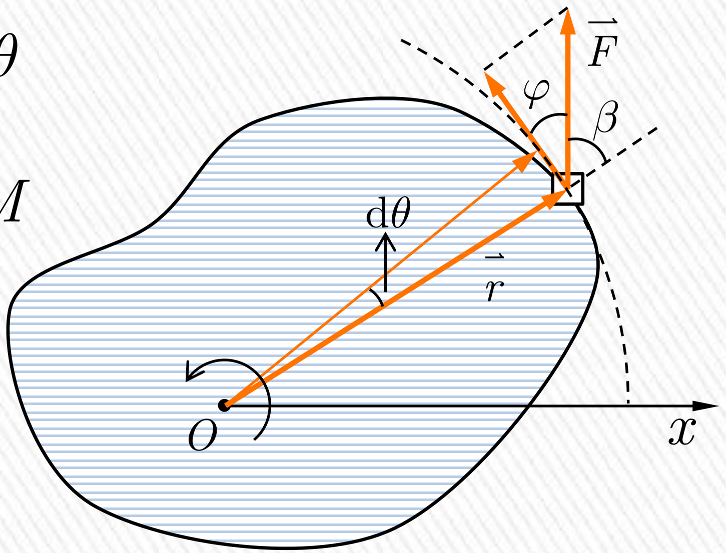
5.6 转动中的功和能

» 刚体受外力 $\vec{F}$ 作用，绕过 O 点垂直于板面的轴，转过了 $\mathrm{d}\theta$ 的角度，在这一过程中，力所做的功为：

$$\mathrm{d}A = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = F\cos\varphi\left|\mathrm{d}r\right| = F\cos\varphi r\mathrm{d}\theta$$

其中 $F\cos\varphi r = \left|\vec{r}\times\vec{F}\right| = rF\sin\beta = M$

$$\therefore\quad \mathrm{d}A = M\mathrm{d}\theta$$



从角度 θ_1 转到角度 θ_2 所做的功为：

$$A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M\mathrm{d}\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} J\alpha\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_{\theta_1}^{\theta_2} J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\theta = \int_{\omega_1}^{\omega_2} J\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\omega$$

$$= \int_{\omega_1}^{\omega_2} J\omega\mathrm{d}\omega$$

$$= \frac{1}{2}J\omega_2^2 - \frac{1}{2}J\omega_1^2 = E_{k2} - E_{k1}$$

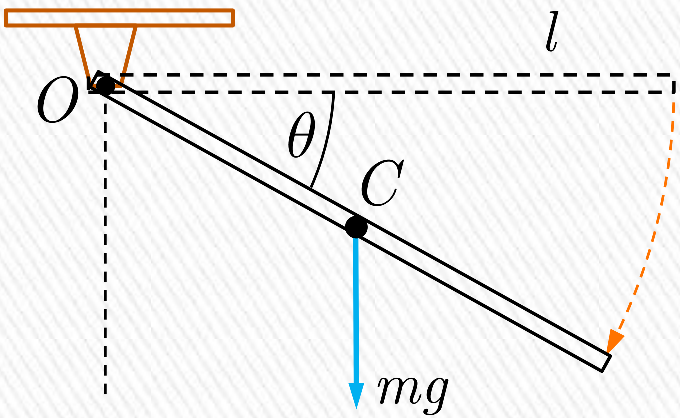
定轴转动的动能定理

合外力矩对一个绕固定轴转动的刚体所做的功等于它的**转动动能**的增量。

5.4 转动定律的应用

P163 例 5.7：一根长 l，质量 m 的均匀细棒，其一端有一固定的、可旋转的光滑水平轴。最初棒静止在水平位置，求它下摆 θ 角时的角速度。

解法二(刚体的转动动能定理)：棒下摆的过程中，只有重力力矩做功。



重力矩为：$$M = mg\cdot\frac{1}{2}l\cdot\cos\theta$$

重力矩做功：

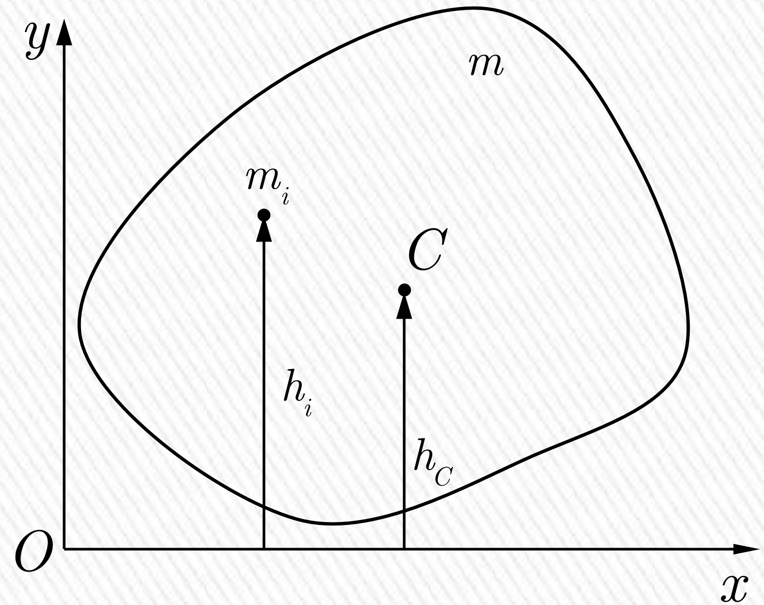
$$A=\int_0^{\theta}M\mathrm{d}\theta=\int_0^{\theta}mg\cdot\frac{1}{2}l\cdot\cos\theta\cdot\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}mgl\sin\theta$$

根据**转动动能定理**：$$\frac{1}{2}mgl\sin\theta=\frac{1}{2}J\omega^2\Rightarrow\ \omega=\sqrt{\frac{3g\sin\theta}{l}}$$

5.6 转动中的功和能

» 对于均匀受到重力作用刚体，它的重力势能相当于把刚体的所有质量集中于质心时所具有的重力势能。

证明：



$$E_p = \sum_i m_i g h_i = g \sum_i m_i h_i$$

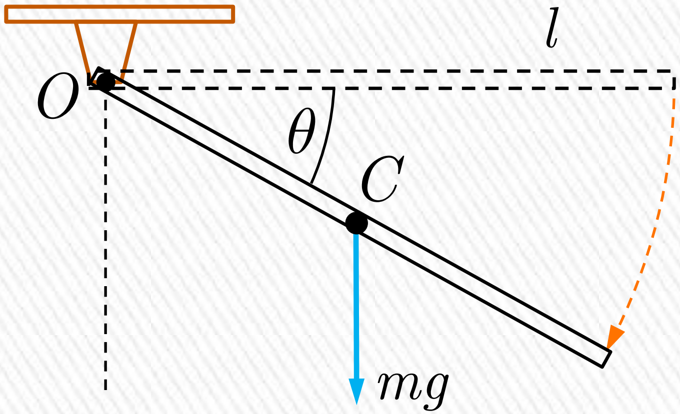
$$\text{而} h_C = \frac{\sum_i m_i h_i}{m} \Leftrightarrow \sum_i m_i h_i = m h_C$$

$$\therefore E_p = m g h_C$$

5.4 转动定律的应用

P163 例 5.7：一根长 l，质量 m 的均匀细棒，其一端有一固定的、可旋转的光滑水平轴。最初棒静止在水平位置，求它下摆 θ 角时的角速度。

解法三(机械能守恒)：棒下摆的过程中，只有重力矩做功，机械能守恒。



以棒的初始位置为重力势能的零势面，列机械能守恒方程得：

$$0 = \frac{1}{2}J\omega^2 - \frac{1}{2}mgl\sin\theta$$

$$\Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{3g\sin\theta}{l}}$$

* 转动与平动的类比

平动

名称	符号
位矢	$\vec{r}$
速度	$\vec{v}$
加速度	$\vec{a}$
质量	m
力	$\vec{F}$
动量	$\vec{p} = m\vec{v}$
动能	$E_k = \frac{1}{2}mv^2$

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}, \vec{a}_t = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$$

转动

名称	符号
角度	$\vec{\theta}$
角速度	$\vec{\omega}$
角加速度	$\vec{\alpha}$
转动惯量	J
力矩	$\vec{M}$
角动量	$\vec{L} = J\vec{\omega}$
转动动能	$E_k = \frac{1}{2}J\omega^2$

$$\vec{\omega} = \frac{\mathrm{d}\vec{\theta}}{\mathrm{d}t}, \vec{\alpha} = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}$$

* 转动与平动的定理对应

平动

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}t$$

牛顿第二定律：

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

动量定理：

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \text{动量守恒定律}$$

质心系的动量定理：

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = m\vec{a}_C$$

平动动能：$E_k = \dfrac{1}{2}mv^2$

转动

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

刚体定轴转动定理：

$$M = J\alpha$$

角动量定理：

$$\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \text{角动量守恒定律}$$

质心系的角动量定理：

$$M_C = \frac{\mathrm{d}L_C}{\mathrm{d}t} = J_C\alpha$$

转动动能：$E_k = \dfrac{1}{2}J\omega^2$