

第8章 电势

习题解答

习题 8.2: 两均匀带电球壳同心放置, 半径分别为 R_1 和 R_2 ($R_1 < R_2$), 已知内外球之间的电势差为 U_{12} , 求两球壳之间的电场分布。

解: 已知条件中有内外球壳的电势差, 却没有内外球壳的带电量, 因此首先假设内外球壳的带电量分别为 q_1 、 q_2 。

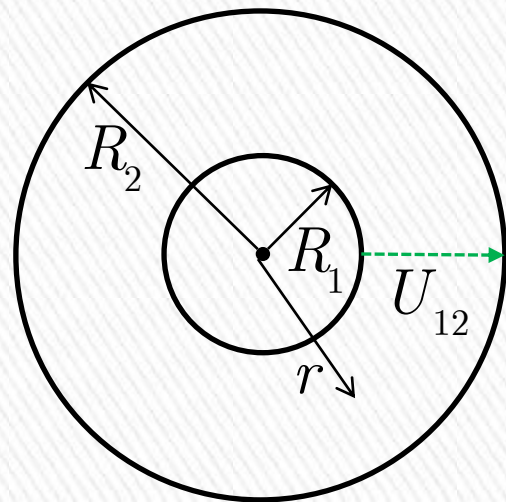
根据高斯定理, 容易求出**内外球壳之间的**电场方向为径矢方向, 大小为:

$$E = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad R_1 \leq r \leq R_2 \quad (1)$$

则内外球壳之间的电势差为**两球壳之间的电场强度在****两球壳之间的距离上**的积分:

$$U_{12} = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

$$\text{解得: } q_1 = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2 U_{12}}{R_2 - R_1}$$



习题 8.2: 两均匀带电球壳同心放置，半径分别为 R_1 和 R_2 ($R_1 < R_2$)，已知内外球之间的电势差为 U_{12} ，求两球壳之间的电场分布。

解(续): 求出 q_1 之后，将其代入**电场强度表达式**即可。内外球壳之间的电场强度大小为：

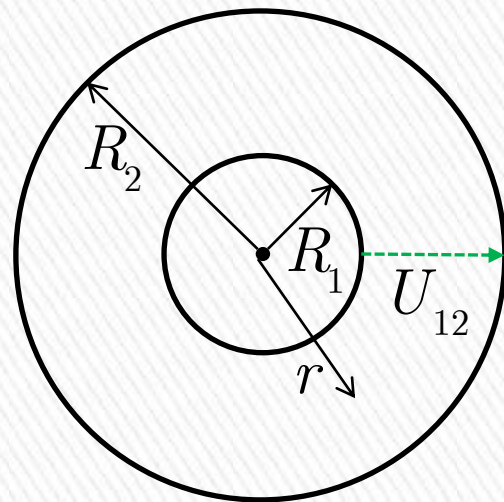
$$E = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \quad R_1 \leq r \leq R_2 \quad (1)$$

内球壳带电量为：

$$q_1 = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2 U_{12}}{R_2 - R_1}$$

代回 (1) 式，考虑方向，得：

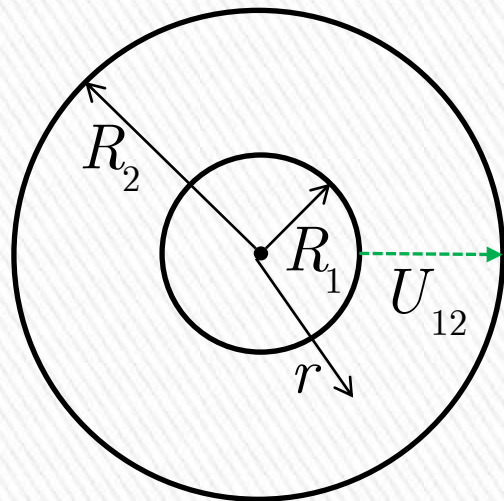
$$\vec{E} = \frac{R_1 R_2 U_{12}}{R_2 - R_1} \frac{\vec{e}_r}{r^2}$$



习题 8.4: 两个同心的均匀带电球面, 半径分别为 R_1 和 R_2 ($R_1 < R_2$), 分别带有总电量 q_1, q_2 。(1) 求两球面的电势及二者之间的电势差。

(1)解: 由 **P267 例8.1**可知, 两个带电球面在它们周边产生的电势分别为

$$\varphi_{\text{内}} = \begin{cases} \frac{q_1}{4 \pi \varepsilon_0 R_1}, & r \leq R_1 \\ \frac{q_1}{4 \pi \varepsilon_0 r}, & r > R_1 \end{cases}, \quad \varphi_{\text{外}} = \begin{cases} \frac{q_2}{4 \pi \varepsilon_0 R_2}, & r \leq R_2 \\ \frac{q_2}{4 \pi \varepsilon_0 r}, & r > R_2 \end{cases}$$



由电势的叠加原理,

内球面**位置**的电势 = 内球面**电荷**在内球面**位置**产生的电势 + 外球面**电荷**在内球面**位置**产生的电势,

外球面**位置**的电势 = 内球面**电荷**在外球面位置产生的电势 + 外球面**电荷**在外球面**位置**产生的电势,

$$\varphi_1 = \frac{q_1}{4 \pi \varepsilon_0 R_1} + \frac{q_2}{4 \pi \varepsilon_0 R_2}, \quad \varphi_2 = \frac{q_1}{4 \pi \varepsilon_0 R_2} + \frac{q_2}{4 \pi \varepsilon_0 R_2}$$

习题 8.4: 两个同心的均匀带电球面, 半径分别为 R_1 和 R_2 ($R_1 < R_2$), 分别带有总电量 q_1, q_2 。(1) 求两球面的电势及二者之间的电势差。

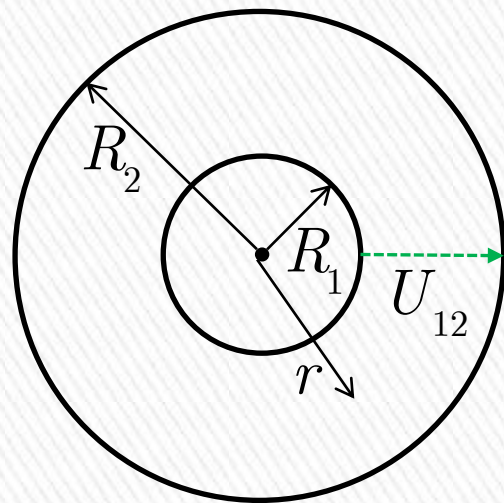
(1)解(续): 内外球面**位置**的电势分别为:

$$\varphi_1 = \frac{q_1}{4 \pi \varepsilon_0 R_1} + \frac{q_2}{4 \pi \varepsilon_0 R_2}$$

$$\varphi_2 = \frac{q_1}{4 \pi \varepsilon_0 R_2} + \frac{q_2}{4 \pi \varepsilon_0 R_2}$$

则两球面之间的电势差为:

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q_1}{4 \pi \varepsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$



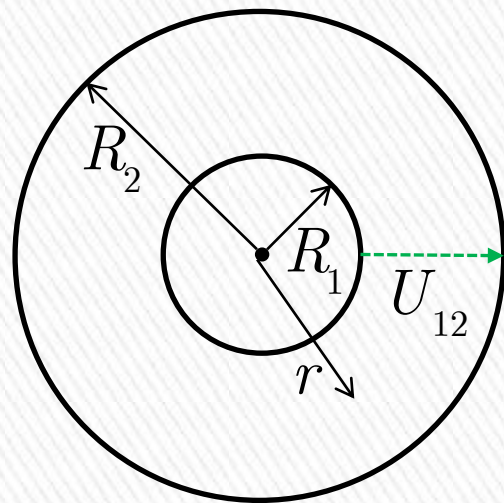
习题 8.4: 两个同心的均匀带电球面，半径分别为 R_1 和 R_2 ($R_1 < R_2$)，分别带有总电量 q_1, q_2 。(2) 不管 q_1 大小如何，只要是正电荷，内球电势总是高于外球电势；只要是负电荷，内球电势总是低于外球电势。说明其原因。

(2)解: 两球面之间的电势差为

$$U_{12} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

显然， $\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) > 0$ ， U_{12} 的正负取决于 q_1 。

$q_1 > 0$ 时， $U_{12} > 0$ ，内球电势高于外球电势；反之亦然。



习题 8.8: 一计数管中有一直径为 2.0 cm 的金属长圆筒，在圆筒的轴线处装有一根直径为 1.27×10^{-5} m 的细金属丝。设金属丝与圆筒的电势差为 1×10^3 V，求：


- (1) 金属丝表面的场强大小；
- (2) 圆筒内表面的场强大小。

解： **金属丝和圆筒之间的电场强度** 取决于金属丝的电荷线密度，设为 λ ，则该场强大小为：

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

则金属丝和圆筒之间的电势差为

$$U_{12} = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} d\vec{r} = \int_{R_1}^{R_2} E dr = \int_{d/2}^{D/2} \frac{\lambda dr}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{D}{d}$$


$$\lambda = \frac{2\pi\epsilon_0 U_{12}}{\ln D/d}$$

习题 8.8: 一计数管中有一直径为 2.0 cm 的金属长圆筒，在圆筒的轴线处装有一根直径为 1.27×10^{-5} m 的细金属丝。设金属丝与圆筒的电势差为 1×10^3 V，求：

- (1) 金属丝表面的场强大小；
- (2) 圆筒内表面的场强大小。

解(续): 金属丝表面的场强为

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0(d/2)} \stackrel{\text{代入数据}}{=} 2.14 \times 10^7 \text{ V/m}$$

圆筒内表面的场强为

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0(D/2)} \stackrel{\text{代入数据}}{=} 1.36 \times 10^4 \text{ V/m}$$

习题 8.9：一无限长均匀带电圆柱，电荷体密度为 ρ ，截面半径为 a 。

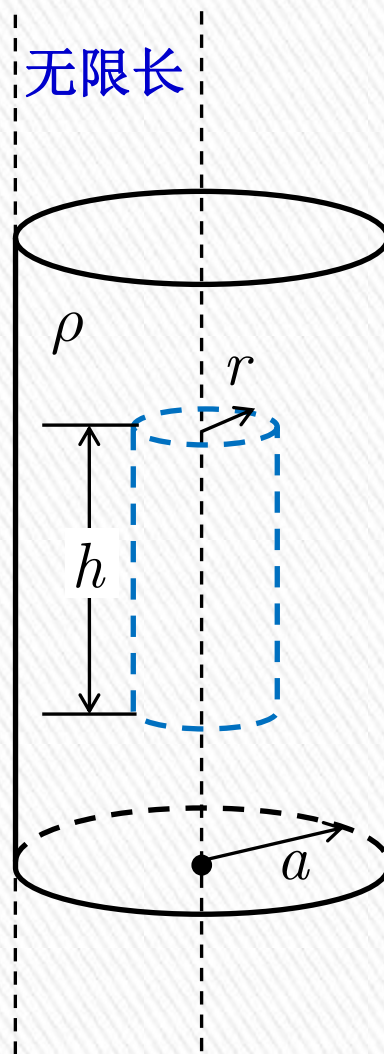
- (1) 用高斯定理求出圆柱内外电场强度的分布；
- (2) 求出圆柱内外的电势分布，以轴线为电势零点；
- (3) 画出 $E-r$ 和 $\varphi-r$ 曲线。

(1)解：均匀圆柱的场强分布式轴对称的，作底面半径为 r 、高为 h 的封闭圆柱高斯面。

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \stackrel{\text{对称性分析}}{=} E \cdot 2\pi r h$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0} \begin{cases} \pi r^2 h \cdot \rho, & r < a \\ \pi a^2 h \cdot \rho, & r \geq a \end{cases}$$

$$\Rightarrow E = \begin{cases} \frac{\rho}{2\varepsilon_0} r, & r < a \\ \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \frac{a^2}{r}, & r \geq a \end{cases}$$



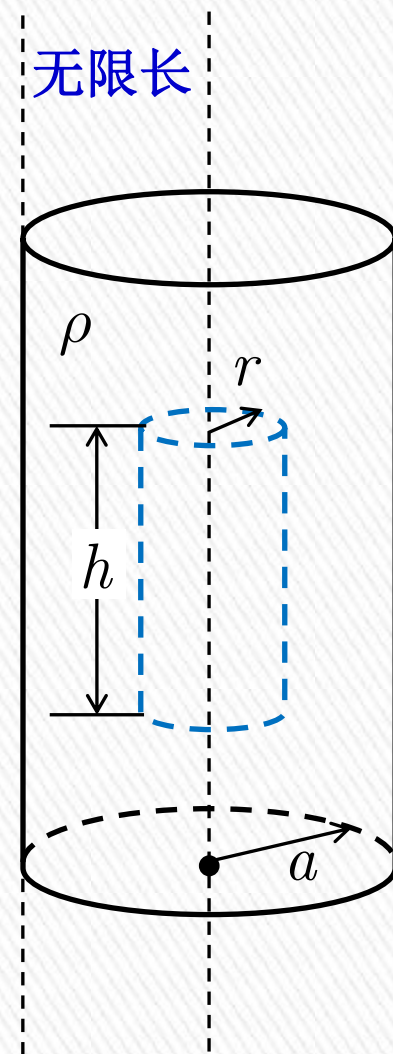
习题 8.9：一无限长均匀带电圆柱，电荷体密度为 ρ ，截面半径为 a 。

(2) 求出圆柱内外的电势分布，以轴线为电势零点；

(3) 画出 $E-r$ 和 $\varphi-r$ 曲线。

(2)解： 根据电势的定义，

$$\begin{aligned}\varphi &= \int_r^0 \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_r^0 E \cdot dr \\ &= \begin{cases} \int_r^0 \frac{\rho}{2\varepsilon_0} r dr, & r < a \\ \int_r^a \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \frac{a^2}{r} dr + \int_a^0 \frac{\rho}{2\varepsilon_0} r dr, & r \geq a \end{cases} \\ &= \begin{cases} -\frac{\rho r^2}{4\varepsilon_0}, & r < a \\ -\frac{a^2 \rho}{4\varepsilon_0} \left(1 + 2 \ln \frac{r}{a} \right), & r \geq a \end{cases}\end{aligned}$$

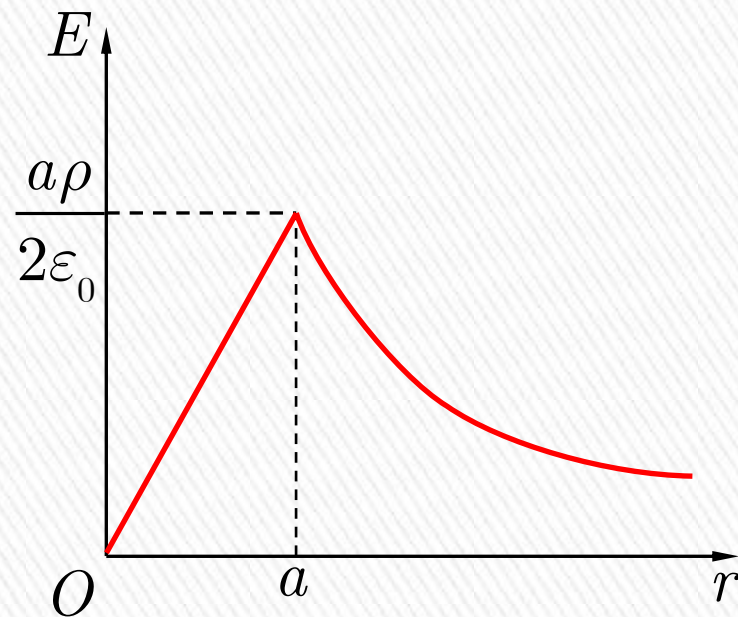


习题 8.9：一无限长均匀带电圆柱，电荷体密度为 ρ ，截面半径为 a 。

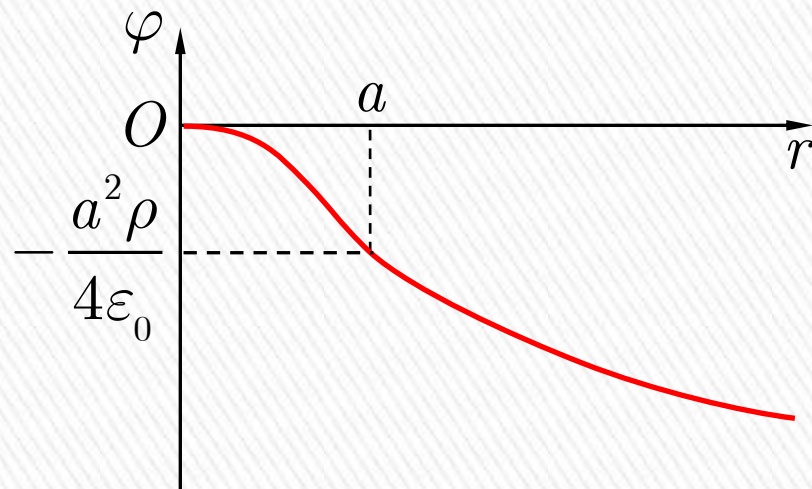
(3) 画出 $E-r$ 和 $\varphi-r$ 曲线。

(3)解：

$$E = \begin{cases} \frac{\rho}{2\varepsilon_0} r, & r < a \\ \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \frac{a^2}{r}, & r \geq a \end{cases}$$



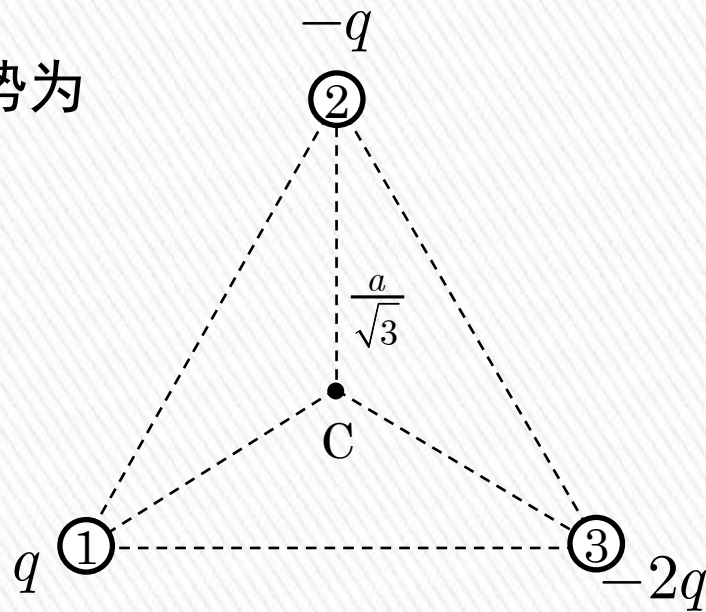
$$\varphi = \begin{cases} -\frac{\rho r^2}{4\varepsilon_0}, & r < a \\ -\frac{a^2\rho}{4\varepsilon_0} \left(1 + 2\ln \frac{r}{a} \right), & r \geq a \end{cases}$$



习题 8.20：一边长为 a 的正三角形，其三个顶点上各放置 q ， $-q$ ， $-2q$ 的点电荷，求此三角形质心上的电势。将一电量为 $+Q$ 的点电荷从无穷远处移到质心上，外力要做多少功？

解：根据电势的叠加原理，质心 C 点的电势为

$$\begin{aligned}\varphi_C &= \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 \\ &= \frac{\sqrt{3}q}{4\pi\epsilon_0 a} - \frac{\sqrt{3}q}{4\pi\epsilon_0 a} - \frac{\sqrt{3}q}{2\pi\epsilon_0 a} \\ &= -\frac{\sqrt{3}q}{2\pi\epsilon_0 a}\end{aligned}$$



将一电量为 $+Q$ 的点电荷从无穷远处移到质心上，外力做的功即该点电荷在质心处的电势能：

$$A = Q\varphi = -\frac{\sqrt{3}qQ}{2\pi\epsilon_0 a}$$

习题 8.21: 如图，三块相互平行的均匀带电大平面，电荷面密度分别为 $\sigma_1 = 1.2 \times 10^{-4} \text{ C/m}^2$, $\sigma_2 = 2.0 \times 10^{-5} \text{ C/m}^2$, $\sigma_3 = 1.1 \times 10^{-4} \text{ C/m}^2$ 。A 点与平面 II 相距 5.0 cm, B 点与平面 II 相距 7.0 cm。

(1) 计算 AB 两点之间的电势差。

解: 如图所示，以向右为正方向，1 区和 2 区的电场强度大小分别为

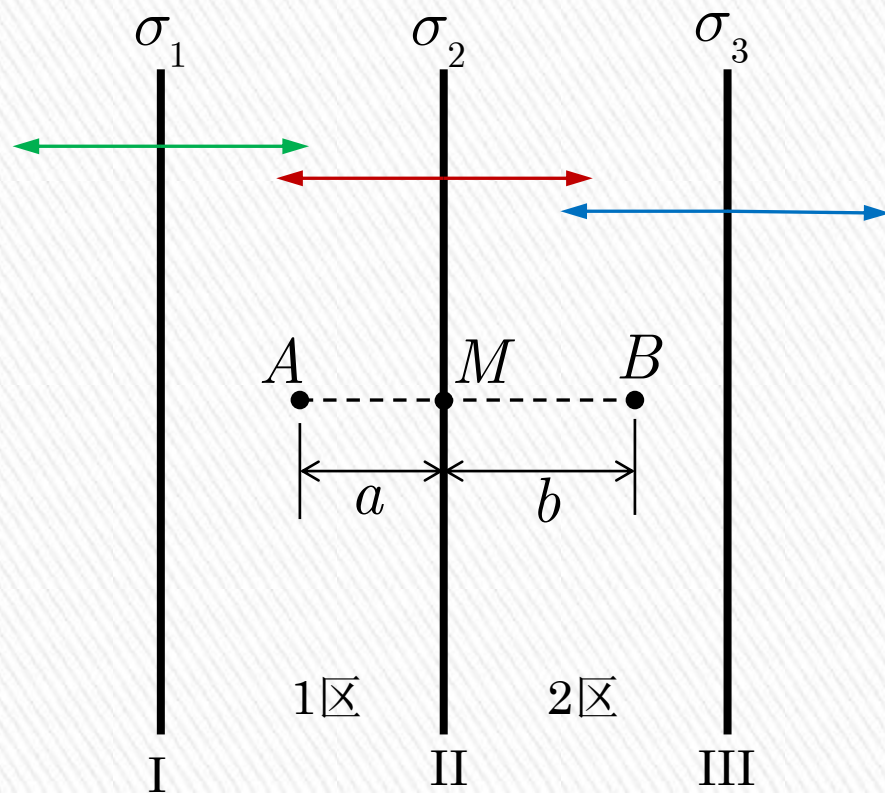
$$E_1 = \frac{1}{2\varepsilon_0} (\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3)$$

$$E_2 = \frac{1}{2\varepsilon_0} (\sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_3)$$

$$\text{则 } U_{AB} = E_1 \cdot a + E_2 \cdot b$$

代入数据

$$= 9.0 \times 10^4 \text{ V}$$



习题 8.21: 如图，三块相互平行的均匀带电大平面，电荷面密度分别为 $\sigma_1 = 1.2 \times 10^{-4} \text{ C/m}^2$, $\sigma_2 = 2.0 \times 10^{-5} \text{ C/m}^2$, $\sigma_3 = 1.1 \times 10^{-4} \text{ C/m}^2$ 。A 点与平面 II 相距 5.0 cm, B 点与平面 II 相距 7.0 cm。

(2) 把电量为 $q_0 = -1.0 \times 10^{-8} \text{ C}$ 的点电荷从 A 点移到 B 点，外力克服电场力做功多少？

解: 外力克服电场力做功即该电荷的电势能差的相反数：

$$A_{AB}' = -A_{AB}$$

$$= -q_0 U_{AB}$$

代入数据

$$= 9 \times 10^{-4} \text{ J}$$

