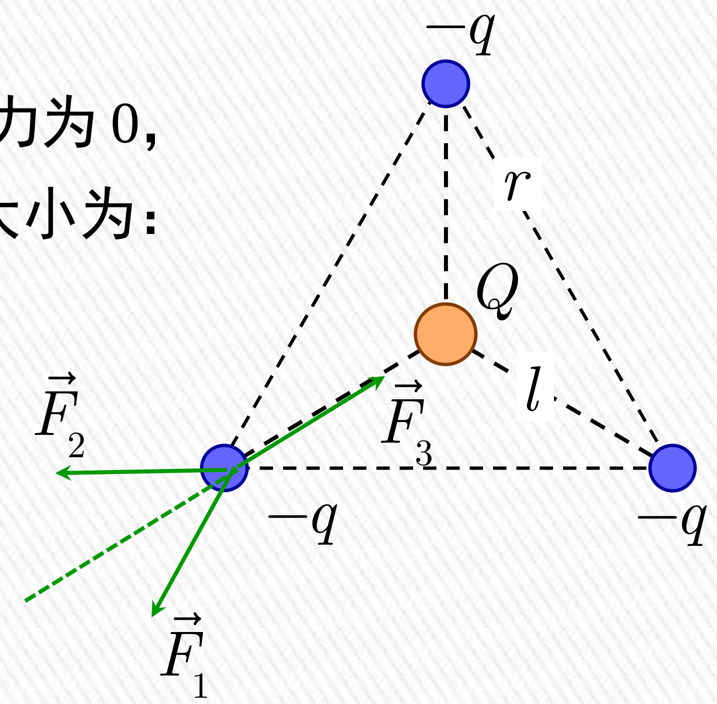
第7章 静电场

习题解答

习题 7.2：三个电量为 $-q$ 的点电荷各放在边长为 r 的等边三角形的三个顶点上，电荷 Q($Q>0$) 放在三角形的质心上。为使每个负电荷受力为零，Q 应为多大？



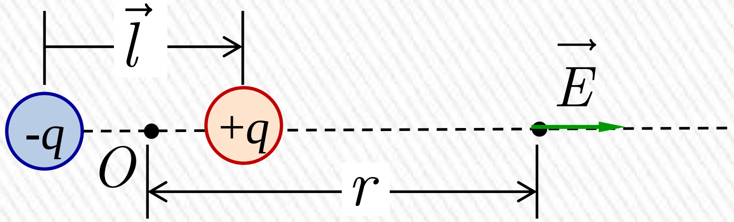
解：如图所示，Q 受到三个负电荷的合外力为 0，与 Q 的大小无关；某个 $-q$ 受到的合外力大小为：

$$2F_1\cos 30^\circ - F_3 = 2\cdot\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 l^2}\overset{令}{=}0$$

其中 $r=\sqrt{3}\,l$ ，解得 $Q=\dfrac{\sqrt{3}}{3}q$ 。

习题 7.6：一个电偶极子的电矩为 $\vec{p} = q\vec{l}$ ，证明此电偶极子轴线上距其中心为 $r\,(r >> l)$ 处的一点的场强为 $\vec{E} = 2\vec{p}/4\pi\varepsilon_0 r^3$ 。

证明：



$$E = E_+ + E_-$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (r - \frac{1}{2}l)^2} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (r + \frac{1}{2}l)^2}$$

$$= \frac{2qlr}{4\pi\varepsilon_0 (r^2 - \frac{1}{4}l^2)^2}$$

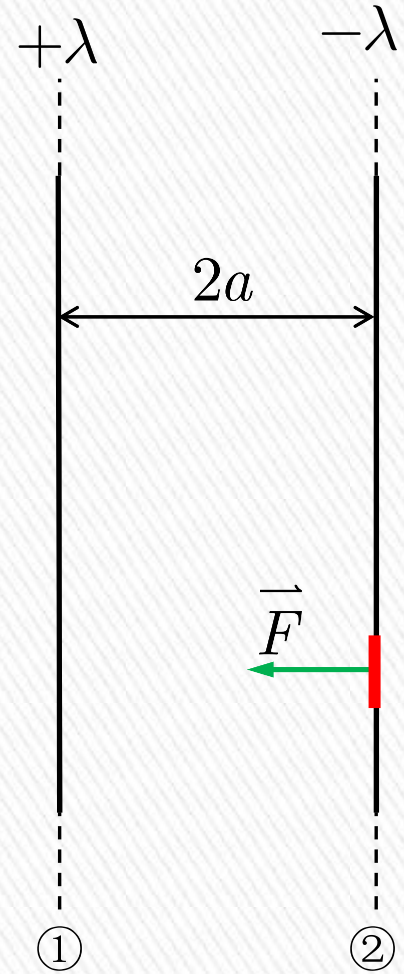
考虑 $r >> l$，代入 $p = ql$，并考虑方向得：

$$\vec{E} = \frac{2\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

习题 7.8：两根无限长的均匀带电直线相互平行，相距 $2a$，电荷线密度分别为 $+\lambda$ 和 $-\lambda$，求每单位长度的带电直线受到的作用力。

解：无限长带电直线周围的场强大小为：

$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x},$$ 其中 x 是场点到直线的垂直距离



因此一根带电直线在另一根带电直线处的场强大小为

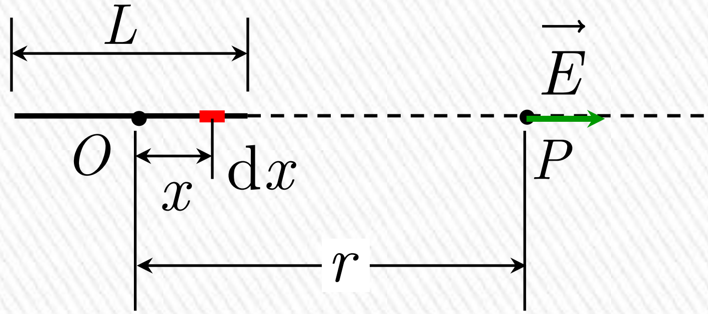
$$E=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

另一根带电直线单位长度所受到的电场力为：

$$F=E\cdot\lambda=\frac{\lambda^2}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

方向为相互吸引。

习题 7.9：一均匀带电直线长为 L，电荷线密度为 λ，求直线的延长线上距 L 中点为 r ($r > L/2$) 处的场强。



解：以带电直线的中点为原点 O，在直线上取微元 dx，则该微元的电量为 $\mathrm{d}q = \lambda \cdot \mathrm{d}x$，在 P 点产生的场强为：

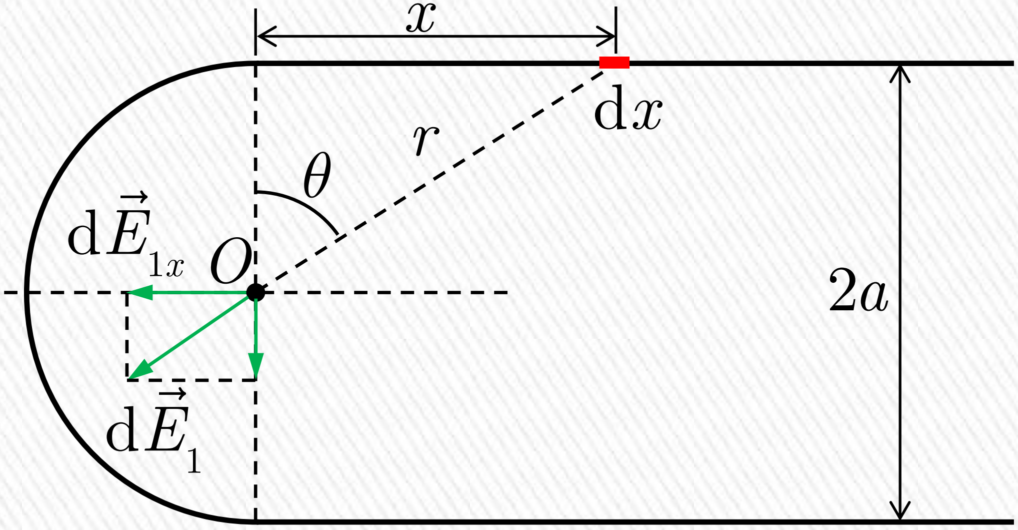
$$\mathrm{d}E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda \mathrm{d}x}{(r-x)^2}$$

整根带电直线在 P 点的场强为：

$$E = \int_L \mathrm{d}E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{\lambda \mathrm{d}x}{(r-x)^2} = \frac{\lambda L}{4\pi\varepsilon_0\left(r^2 - L^2/4\right)}$$

方向如图。

习题 7.12：如图，两根平行长直导线间距 $2a$，一端用半圆形导线连接起来。全线均匀带电，线密度为 λ。证明在圆心 O 处的电场强度为零。



解法一：首先利用积分分别计算直线和圆弧在 O 点处的场强，然后再叠加起来。

(1) 计算直线部分的场强。根据对称性分析，无论是直线还是圆弧，在 O 点处的场强的 y 分量都为零，因此只需计算 x 分量

直线上，微元 $\mathrm{d}x$ 在 O 处的场强的 x 分量为：

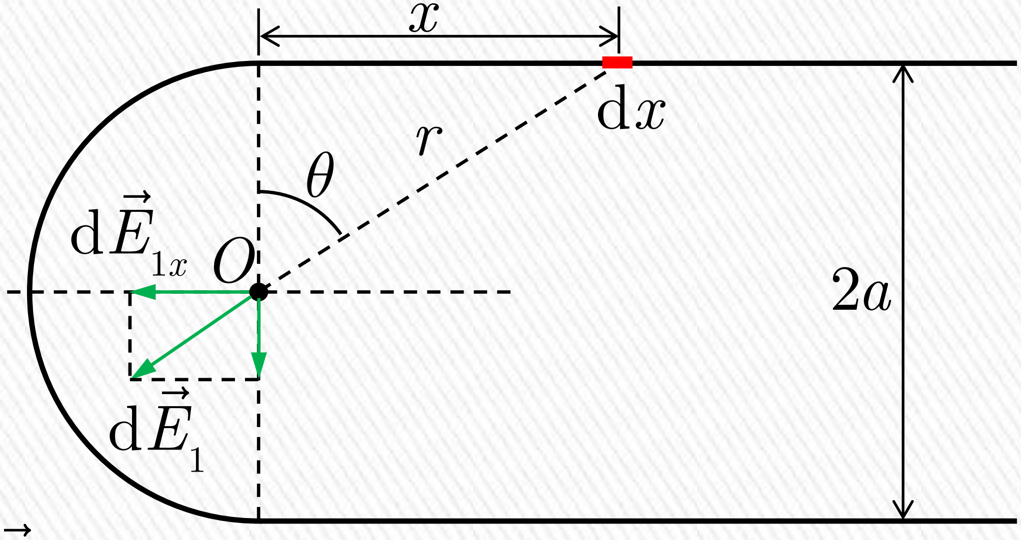
$$\mathrm{d}\vec{E}_{1x} = \frac{\lambda \mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot \sin\theta \cdot \left(-\vec{e}_x\right)$$，其中 $\sin\theta = \dfrac{x}{r}$，$r = \sqrt{a^2 + x^2}$

习题 7.12：如图，两根平行长直导线间距 $2a$，一端用半圆形导线连接起来。全线均匀带电，线密度为 λ。证明在圆心 O 处的电场强度为零。

解法一(续)：

(1) 计算直线部分的场强。

积分得：



$$\vec{E}_{1x} = \int \mathrm{d}\vec{E}_{1x}$$

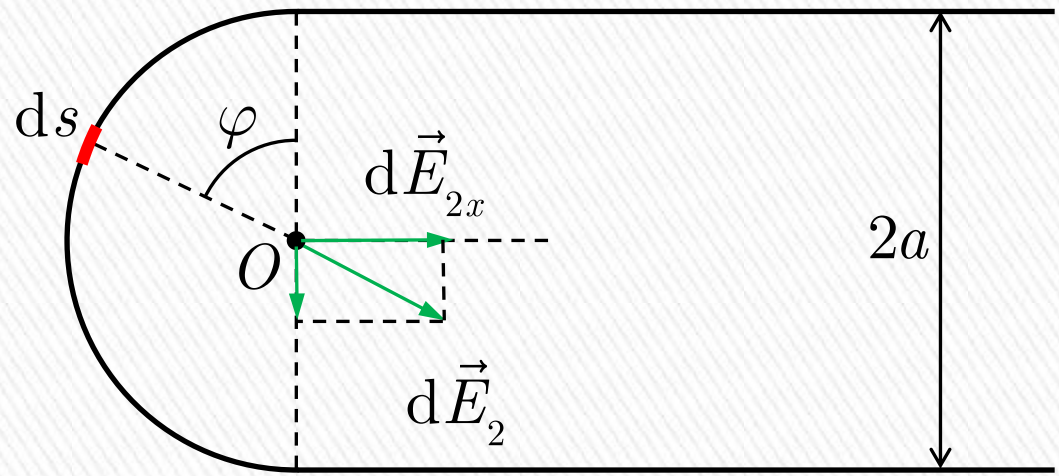
$$= \int_0^{\infty} \frac{x\lambda \mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0 \; a^2 + x^2 \;^{3/2}} \; -\vec{e}_x$$

$$= -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\vec{e}_x$$

上下两根直线在 O 点处的场强之和为：$\vec{E}_1 = 2\vec{E}_{1x} = -\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}\vec{e}_x$

习题 7.12：如图，两根平行长直导线间距 $2a$，一端用半圆形导线连接起来。全线均匀带电，线密度为 λ。证明在圆心 O 处的电场强度为零。

解法一(续)：



(2) 计算圆弧部分的场强。微元 ds 在 O 处的场强的 x 分量为

$$\mathrm{d}\vec{E}_{2x} = \frac{\lambda \cdot a\mathrm{d}\varphi}{4\pi\varepsilon_0 a^2} \cdot \sin\varphi \cdot \vec{e}_x$$

整个半圆弧在 O 点的场强为：

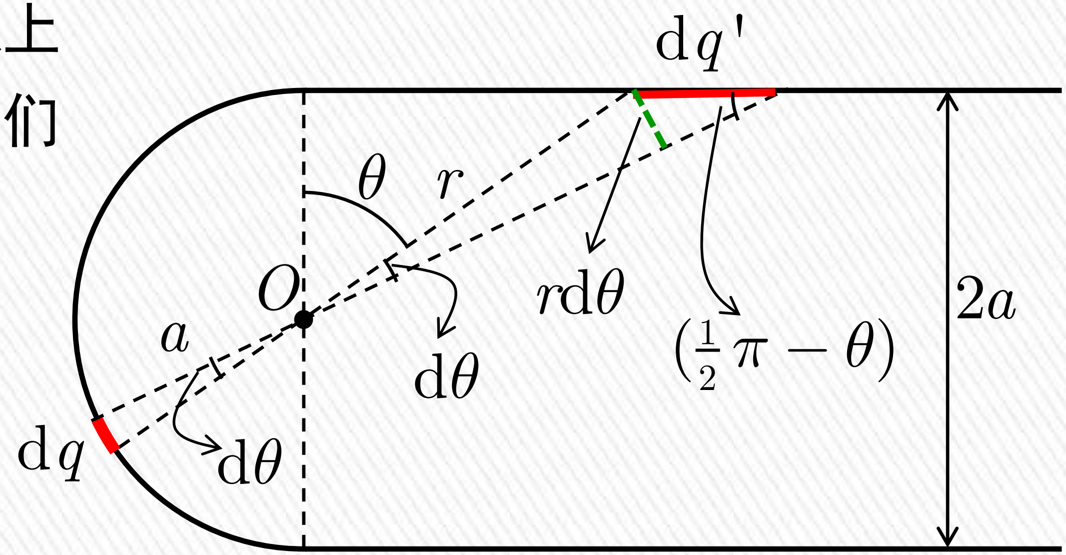
$$\vec{E}_2 = \int \mathrm{d}\vec{E}_{2x} = \int_0^\pi \frac{\lambda a \sin\varphi \mathrm{d}\varphi}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\vec{e}_x = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}\vec{e}_x$$

(3) 直线部分和圆弧部分的场强之和为：

$$E = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}\vec{e}_x + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}\vec{e}_x = 0$$

习题 7.12：如图，两根平行长直导线间距 $2a$，一端用半圆形导线连接起来。全线均匀带电，线密度为 λ。证明在圆心 O 处的电场强度为零。

解法二：分别在直线和半圆弧上**任选**两个相对的微元，证明它们在 O 处的合场强为 0。



dq 的电荷为：

$$\mathrm{d}q=\lambda\cdot a\mathrm{d}\theta$$

在 O 点的场强为：

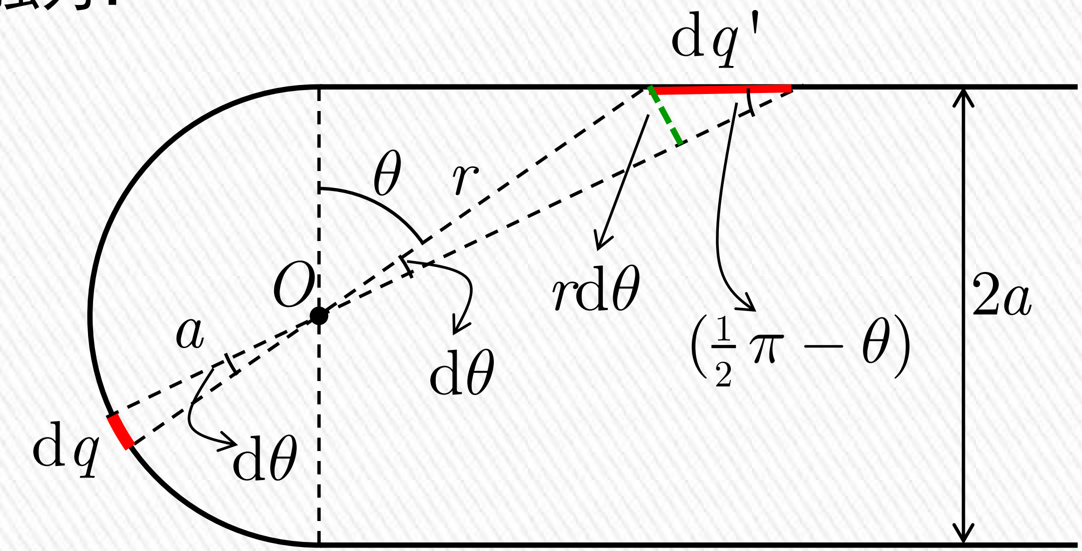
$$\mathrm{d}E=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}=\frac{\lambda a\mathrm{d}\theta}{4\pi\varepsilon_0 a^2}=\frac{\lambda\mathrm{d}\theta}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

dq’的电荷为：

$$\mathrm{d}q'=\lambda\cdot\frac{r\mathrm{d}\theta}{\cos(\frac{1}{2}\pi-\theta)}=\lambda\frac{r\mathrm{d}\theta}{\sin\theta}=\lambda\frac{\frac{a}{\sin\theta}\mathrm{d}\theta}{\sin\theta}=\frac{\lambda a\mathrm{d}\theta}{\sin^2\theta}$$

习题 7.12：如图，两根平行长直导线间距 $2a$，一端用半圆形导线连接起来。全线均匀带电，线密度为 λ。证明在圆心 O 处的电场强度为零。

解法二(续)：dq' 在 O 点的场强为：



$$dE' = \frac{dq'}{4\pi\varepsilon_0\left(\dfrac{a}{\sin\theta}\right)^2}$$

$$= \frac{\dfrac{\lambda a d\theta}{\sin^2\theta}}{\dfrac{4\pi\varepsilon_0 a^2}{\sin^2\theta}}$$

$$= \frac{\lambda d\theta}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

dq 和 dq' 在 O 点的场强大小相等，方向相反，因此合场强为 0 。

习题 7.15：实验证明，地球表面上方电场不为 0，晴天大气电场的平均场强约为 120 V/m，方向向下，这意味着地球表面有多少过剩电荷？试译每平方厘米的额外电子数来表示。

解：设地球表面为均匀球面，总面积为 S，则它所带总电量为

$$q = \varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \varepsilon_0 ES$$

单位面积的带电量为

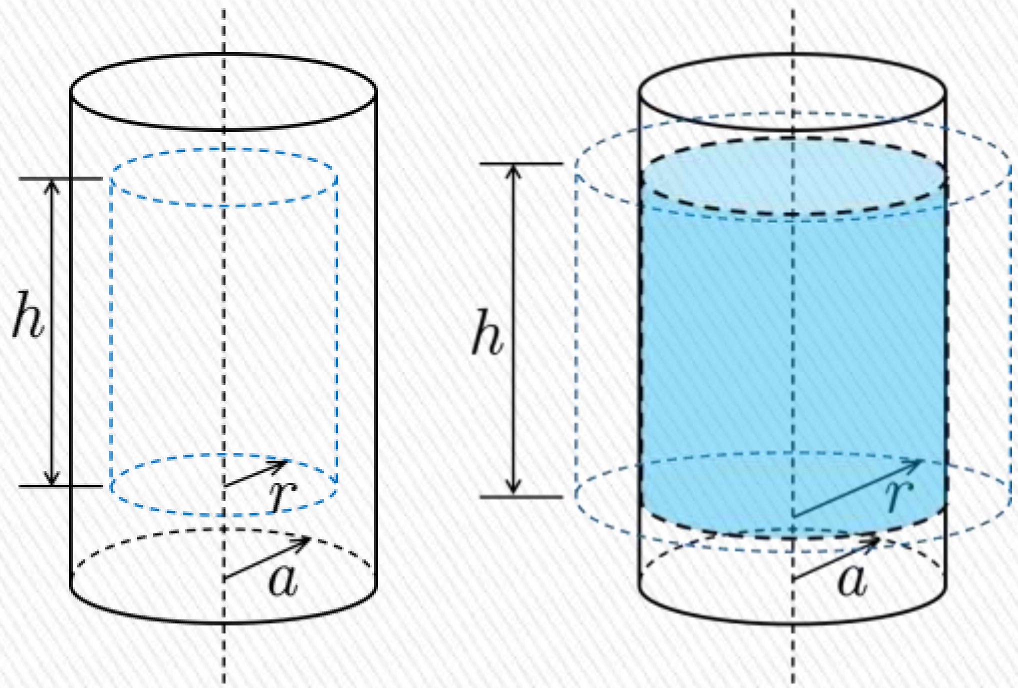
$$\sigma = \frac{q}{S} = \frac{\varepsilon_0 ES}{S} = \varepsilon_0 E$$

单位面积上的额外电子数为

$$n = \frac{\sigma}{e} = \frac{\varepsilon_0 E}{e} \overset{\text{代入数据}}{=} 6.64 \times 10^9 \text{ 个}/\mathrm{m}^2 = 6.64 \times 10^5 \text{ 个}/\mathrm{cm}^2$$

习题 7.17：一无限长的均匀带电薄圆筒，截面半径为 a，电荷面密度为 σ，设垂直于筒轴方向从中心轴向外的径矢方向的大小为 r，求其电场分布，并画出 E-r 曲线。

解：圆筒是轴对称的，取底面半径为 r、高为 h 的封闭圆柱面作为高斯面。高斯面有两种可能性，一种是在圆筒内部($r < a$)，一种是在圆筒外部($r > a$)。



$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} \overset{\text{根据对称性}}{=} E\cdot 2\pi rh$$

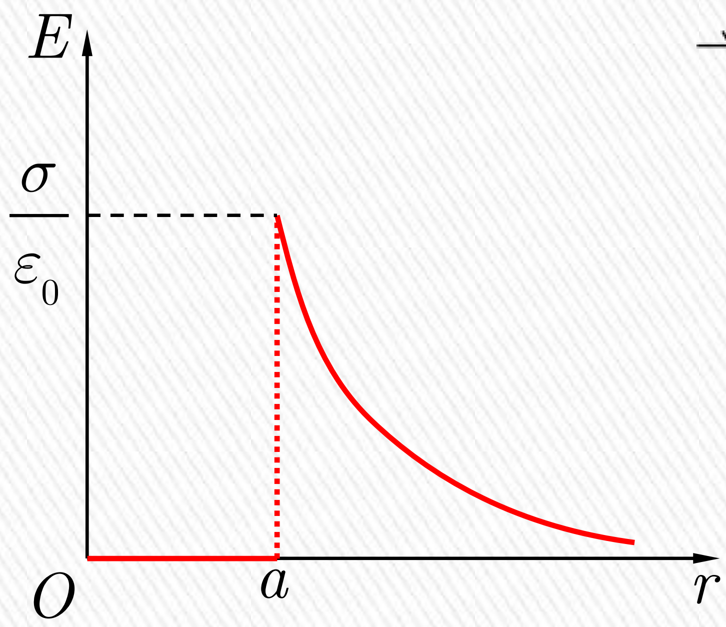
$$= \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i^{\text{in}} = \frac{1}{\varepsilon_0}\begin{cases} 0\ , & r<a \\ \sigma\cdot 2\pi ah\ , & r>a \end{cases}$$

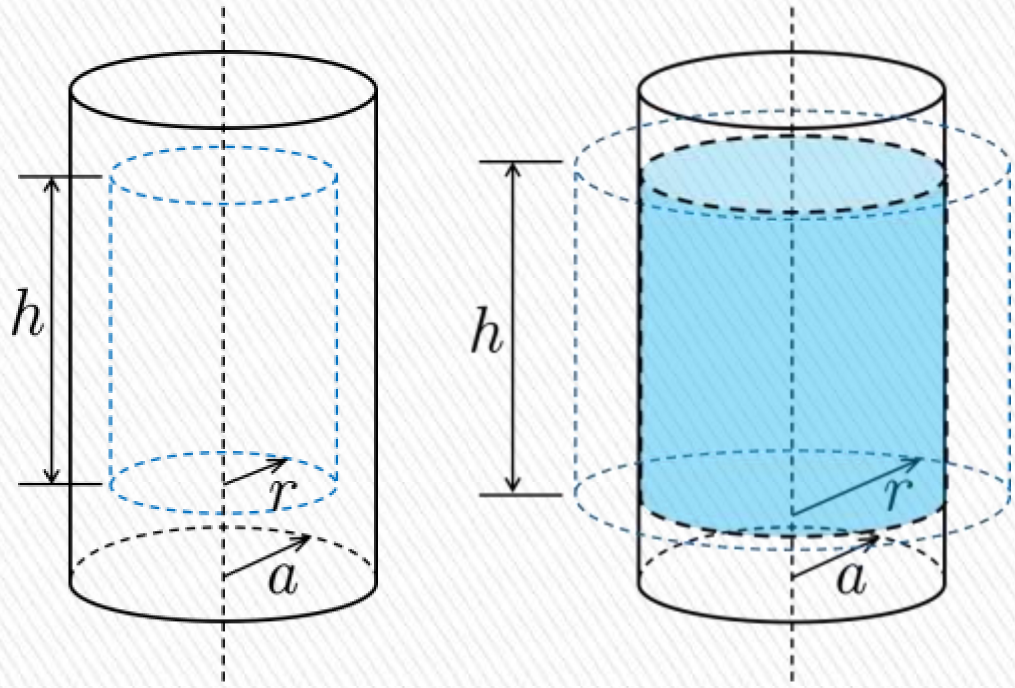
$$\Rightarrow \quad E = \begin{cases} 0\ , & r<a \\ \dfrac{a\sigma}{r\varepsilon_0}\ , & r>a \end{cases}$$

习题 7.17：一无限长的均匀带电薄圆筒，截面半径为 a，电荷面密度为 σ，设垂直于筒轴方向从中心轴向外的径矢方向的大小为 r，求其电场分布，并画出 E-r 曲线。

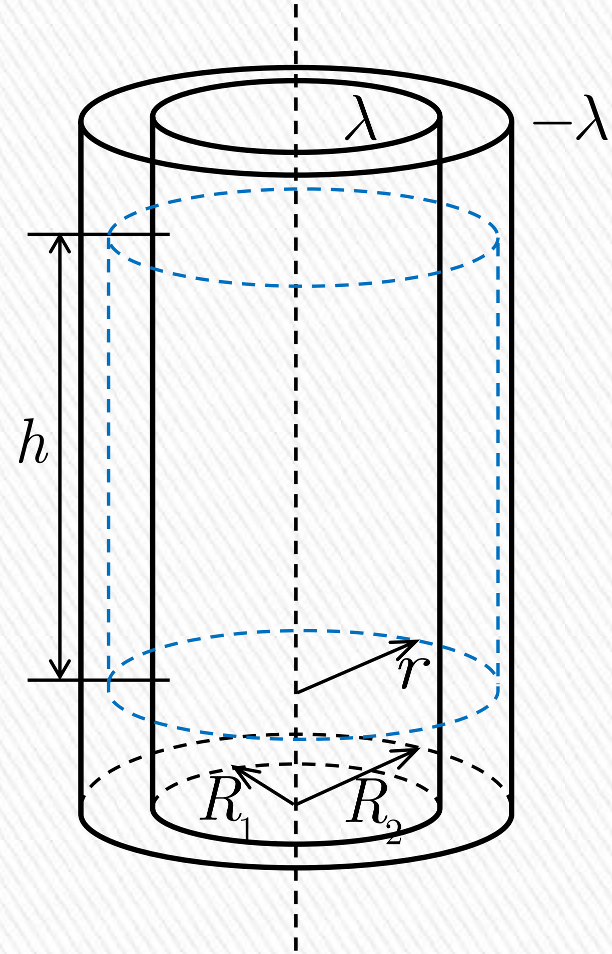
解(续)：

$$E=\begin{cases}0\,, & r<a\\ \dfrac{a\sigma}{r\varepsilon_0}\,, & r>a\end{cases}$$





习题 7.18：两个无限长的同轴圆筒半径分别为 R_1 和 R_2，单位长度带电荷分别为 $+\lambda$ 和 $-\lambda$，求其电场分布。



解：类似于 7.17 题，作底面半径为 r、高为 h 的封闭圆柱状高斯面，

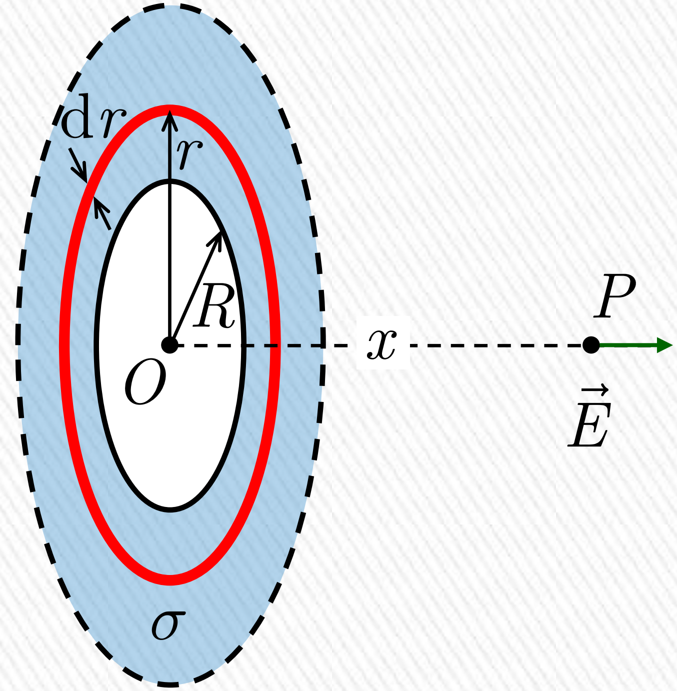
$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} \overset{\text{根据对称性}}{=} E\cdot 2\pi r h$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i^{\mathrm{in}} = \frac{1}{\varepsilon_0}\begin{cases} 0\ , & r < R_1 \\ \lambda\cdot h\ , & R_1 < r < R_2 \\ 0\ , & r > R_2 \end{cases}$$

$$E = \begin{cases} 0\ , & r < R_1 \text{ 或 } r > R_2 \\ \dfrac{\lambda}{2\pi r \varepsilon_0}, & R_1 < r < R_2 \end{cases}$$

习题 7.21：一无限大平面中部有一半径为 R 的小孔，设平面均匀带电，电荷面密度为 σ，求通过小孔中心并与平面垂直的直线上的场强分布。

解法一(积分法)：无限大平面可认为是一个和圆形小孔同心的、半径为 ∞ 的圆面。



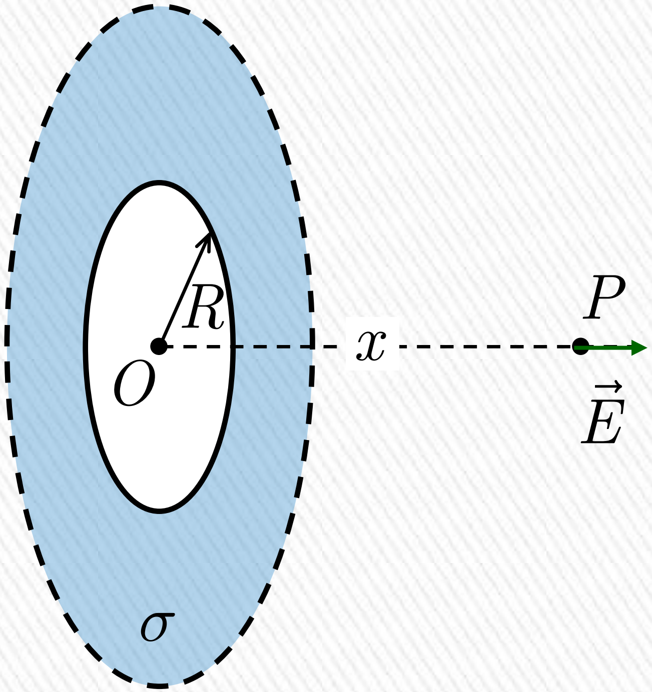
取一个和小孔同心的环状微元，根据**例 7.5** 的结论，该微元在点 P 处的场强大小为：

$$\mathrm{d}E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma\cdot 2\pi r\mathrm{d}r\cdot x}{(R^2+x^2)^{3/2}}=\frac{\sigma x r\mathrm{d}r}{2\varepsilon_0\left(x^2+r^2\right)^{3/2}}$$

积分得：

$$E=\frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\int_R^{\infty}\frac{r\mathrm{d}r}{\left(x^2+r^2\right)^{3/2}}\overset{令\ t=x^2+r^2}{=}\frac{\sigma x}{4\varepsilon_0}\int_{x^2+R^2}^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^{3/2}}=\frac{\sigma x}{2\varepsilon_0\left(x^2+R^2\right)^{1/2}}$$

习题 7.21：一无限大平面中部有一半径为 R 的小孔，设平面均匀带电，电荷面密度为 σ，求通过小孔中心并与平面垂直的直线上的场强分布。



解法二(叠加原理)：P 点处的场强由两个带电体叠加而成，一个是电荷面密度为 $+\sigma$ 的无限大平面，一个是电荷面密度为 $-\sigma$ 的、半径为 R 的小圆面。

无限大平面在 P 点的场强为：

$$E_{+} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

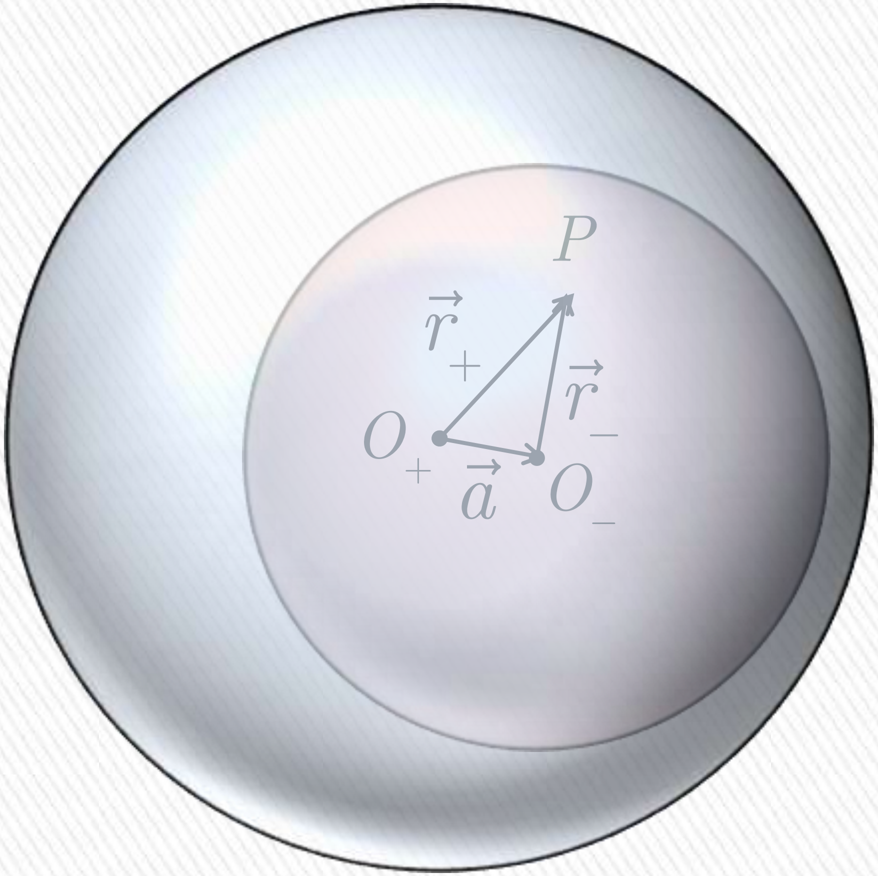
根据**例 7.6** 的结论，半径为 R 的圆面在 P 点的场强为：

$$E_{-} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{x}{\left(x^2 + R^2\right)^{1/2}}\right]$$

叠加得：$E = E_{+} + E_{-}$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{x}{\left(x^2 + R^2\right)^{1/2}}$$

习题 7.22：一均匀带电体，半径为 R，电荷体密度为 ρ，今在球内挖出一半径为 $r\ (r < R)$ 的球体，证明由此形成的空腔内的电场是均匀的，并求其值。



解：由叠加原理，空腔处的场强等于密度为 ρ 的大球体的场强加上密度为 $-\rho$ 的小球体的场强。

在空腔内任取一点 P，根据**例 7.10**，大球体在此处的场强为

$$\vec{E}_+ = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}_+$$

小球体在此处的场强为：

$$\vec{E}_- = \frac{-\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}_-$$

叠加得：$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\vec{r}_+ - \vec{r}_-) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{a} = \vec{C}$$