

Deep neural network per la stima multiparametrica quantistica

Bignozzi Enrico 1855163

giugno 2022

Indice

0.1	Introduzione	4
1	Richiami teorici di quantistica e ottica	5
1.1	Rappresentazione stato quantistico	5
1.2	Principio d'indeterminazione di Heisenberg	6
1.3	Informazione Fisher Quantistica	7
1.4	qubit e stato entangled	10
1.5	Mach Zehender e stima della fase	11
1.6	Mach-Zendher utilizzato come circuito integrato	12
1.7	Effetto Hong-Ou-Mandel	13
1.8	N00N states	14
1.9	Processi non lineari	15
2	Esperimento	17
2.1	Set-Up/Design esperimento	17
3	Stima della fase con il metodo bayesiano	19
3.1	Probabilità a priori	19
3.2	Likelihood	19
3.3	Teorema di Bayes	20
3.4	Probabilità a posteriori	20
3.5	Metodo Monte Carlo	20
3.6	Recap Metodo Bayesiano	21
4	Stima della fase con il Reinforcement Learning	23
4.1	Reinforcement Learning	23
4.2	Utilizzo	23
5	Simulazione computazionale esperimenti	25
5.1	Codice senza RL	25
5.2	RISULTATI	26
5.3	Codice con RL	30
5.4	Commento sui risultati	34
6	Conclusioni	35

0.1 Introduzione

La metrologia, dalla parola greca "metron" (misura) e "logos" (studio), è la scienza che si concentra sullo studio delle misurazioni e delle unità di misura, con lo scopo di ottenere la misura più precisa possibile.

La metrologia delle fasi quantistiche è un campo di studio che si occupa di misurare e caratterizzare le fasi delle variabili quantistiche, una parte fondamentale dell'interpretazione e dell'applicazione della fisica quantistica.

Questo settore ha guadagnato importanza crescente negli ultimi decenni a causa del suo ruolo cruciale nella realizzazione di tecnologie quantistiche avanzate e nell'avanzamento della nostra comprensione della natura stessa della realtà quantistica.

Inoltre, la metrologia delle fasi quantistiche gioca un ruolo cruciale nella verifica sperimentale di fenomeni come l'entanglement quantistico e l'interferenza.

Nel campo della stima dei parametri nei sistemi quantistici, la precisione della misura è un aspetto fondamentale. La quantità di informazione ottenibile da una misura è una misura cruciale di tale precisione e gioca un ruolo centrale nella determinazione della miglior stima di un parametro.

L'obiettivo del progetto svolto è quello di minimizzare l'incertezza associata alla misura della fase nel march-zender come si vedrà in seguito.

Iniziamo a fare richiami teorici per inquadrare il problema.

Capitolo 1

Richiami teorici di quantistica e ottica

1.1 Rappresentazione stato quantistico

Detto \mathcal{H} uno spazio di Hilbert di dimensione N costituito dalla seguente base ortonormale $V = |1\rangle, |2\rangle, \dots, |N\rangle$.

Un generico stato-vettore normalizzato $|\psi\rangle$ appartenente a \mathcal{H} si può scrivere come combinazione lineare dei vettori V della sovracitata base ortonormale:

$$|\psi\rangle = \sum_{n=1}^N \gamma_n |n\rangle, \quad (1.1)$$

Questa equazione rappresenta la forma generale di uno stato quantistico $|\psi\rangle$, dove γ_n sono i coefficienti di sovrapposizione tra la base $|n\rangle$ e lo stato $|\psi\rangle$.

$$\sum_{n=1}^N |\gamma_n|^2 = 1, \quad (1.2)$$

$$\gamma_n \in \mathbb{C}. \quad (1.3)$$

Questa nozione è essenziale per affrontare i problemi di misura esposti in seguito.

1.2 Principio d'indeterminazione di Heisenberg

Il principio d'indeterminazione di Heisenberg stabilisce i limiti inferiori nella misurazione dei valori di grandezze fisiche.

Il principio è rappresentato nel seguente modo:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}, \quad (1.4)$$

dove Δx rappresenta l'incertezza nella posizione della particella, Δp rappresenta l'incertezza nell'impulso della particella, \hbar è la costante ridotta di Planck.

Ne segue che esiste un limite alla precisione che si può avere su una misura.

Il nostro scopo sarà, come spiegato meglio in seguito, raggiungere tale limite inferiore sulla misura.

1.3 Informazione Fisher Quantistica

Un concetto chiave in metrologia è l'**Informazione Fisher Quantistica (FQ)**, un concetto fondamentale che deriva dalla teoria delle probabilità quantistiche ed è utilizzata per valutare quanto informazione è contenuta in uno stato quantistico rispetto a un parametro di interesse.[1] La derivata parziale dell'operatore densità ρ_λ rispetto al parametro λ è legata all'operatore Log-Derivative dell'operatore densità, rappresentato come:

$$\frac{\partial \rho_\lambda}{\partial \lambda} = \frac{1}{2} (\rho_\lambda L_\lambda + L_\lambda \rho_\lambda) = 2. \quad (14)$$

La FQ è strettamente correlata all'operatore Symmetric Logarithmic Derivative (SLD) tramite la seguente relazione:

$$F(\lambda) = \text{Re} [\text{Tr} (\rho_\lambda E_x L_\lambda)]^2, \quad (15)$$

dove E_x è una misura POVM scelta. La FQ ha due proprietà importanti:

1. **Convessità:** Se consideriamo uno stato misto generale ρ , espresso come una combinazione convessa di stati puri ρ_j con coefficienti c_j e la stessa misura è fissata, allora la FQ complessiva è limitata superiormente dalla somma pesata delle FQ dei singoli stati puri:

$$F(\lambda) \leq \sum_j c_j F_j(\lambda),$$

dove $F(\lambda)$ è la FQ dello stato misto e $F_j(\lambda)$ è la FQ calcolata per lo stato puro ρ_j .

2. **Additività:** Se consideriamo ν sonde indipendenti misurate indipendentemente, la FQ dell'insieme totale è la somma delle FQ delle singole sonde:

$$F_{\text{tot}}(\lambda) = \sum_i F_i(\lambda),$$

dove $F_i(\lambda)$ è la FQ relativa alla i -esima sonda insieme alla sua misura.

Esamineremo il concetto di Informazione Fisher Quantistica, come essa può essere calcolata e massimizzata, e come questo concetto conduce al **Limite di Cramer-Rao Quantistico (QCRB)**, un concetto analogo al ben noto Limite di Cramer-Rao della statistica classica, ma applicato ai sistemi quantistici.[1] Il QCRB fornisce una stima inferiore sulla varianza dell'errore nella stima di un parametro basata su misure quantistiche, garantendo che la precisione della stima non possa superare tale limite. In forma generale, il QCRB è espresso come:

$$\Delta\lambda \geq \frac{1}{\sqrt{FQ(\rho_\lambda)}}.$$

La prima proprietà delle sonde ottimali può essere derivata dalla convexity dell'Informazione Fisher Quantistica (FQ): il massimo di FQ è sempre raggiunto da stati puri. Ora ci concentriamo inizialmente su m sonde che sono classicamente correlate, cioè non entangled. Lo stato totale può essere quindi scritto come $\rho_{\text{tot}} = \rho_1 \otimes \rho_2 \cdots \otimes \rho_m$. Il valore di FQ per questo stato è calcolato come segue:

$$FQ(\rho_{\text{tot}}) = \sum_{i=1}^m F(\rho_i) \leq m \cdot F_{\text{max}}$$

dove per la prima uguaglianza è stata sfruttata l'additività di FQ, e F_{\max} rappresenta il massimo di FQ tra gli stati ρ_m . Quindi, in presenza di ν pacchetti indipendenti di m sonde classicamente correlate, dall'Eq. (19) l'incertezza minima $\Delta\lambda$ scala come segue:

$$\Delta\lambda \geq \frac{1}{\sqrt{\nu m F_{\max}}}.$$

Poiché F_{\max} è una costante, l'errore che scala con il numero di sonde m è $\Delta\lambda \propto \frac{1}{\sqrt{m}}$. Questo limite statistico è chiamato Limite Quantistico Standard (Standard Quantum Limit, SQL). Tale limite corrisponde al QCRB ottimizzato su qualsiasi stato di sonda classicamente correlato arbitrario e può essere considerato come una conseguenza del teorema del limite centrale.

Nelle sezioni precedenti abbiamo visto che le risorse quantistiche nella fase di misurazione non sono necessarie per raggiungere il QCRB. Al contrario, le risorse quantistiche impiegate per la preparazione degli stati di sonda possono aumentare la sensibilità rispetto agli approcci classici, superando il SQL. Questo quindi ci permetterebbe di ottenere i migliori risultati possibili per quanto riguarda la misura della fase.

Stima di Fase in Metrologia Quantistica

La stima di fase è un problema fondamentale nella metrologia quantistica, con applicazioni rilevanti in una vasta gamma di contesti scientifici e tecnologici. Questo problema riguarda la determinazione precisa di uno spostamento di fase sconosciuto tra due stati quantistici o percorsi ottici. La stima di fase è una componente chiave di molte applicazioni, tra cui la misurazione di grandezze fisiche, la sincronizzazione degli orologi atomici e la rilevazione di effetti gravitazionali. In questo contesto, utilizziamo la notazione quantistica per rappresentare gli operatori, ad esempio:

- Gli stati quantistici sono rappresentati da vettori nel cosiddetto spazio di Hilbert. Un generico stato quantistico è denotato come $|\psi\rangle$.
- Gli operatori quantistici, come gli operatori di fase, sono rappresentati da matrici. Ad esempio, l'operatore di fase è rappresentato come $F(\phi)$.
- La misura quantistica è descritta da operatori di misura, noti come operatori di proiezione. Un'osservabile O è rappresentata da un operatore di proiezione P_O .

Operatore di Fase

Un'operazione chiave nella stima di fase è l'operatore di fase, che introduce uno spostamento di fase ϕ in uno stato quantistico $|\psi\rangle$. L'operatore di fase è rappresentato come:

$$F(\phi) = e^{i\phi}$$

dove e rappresenta la base dei logaritmi naturali, i è l'unità immaginaria, e ϕ è lo spostamento di fase che vogliamo stimare. Questo operatore agisce su uno stato quantistico come segue:

$$F(\phi)|\psi\rangle = |\psi(\phi)\rangle$$

Stima di Fase Quantistica

La stima di fase quantistica mira a determinare il valore di ϕ con la massima precisione possibile utilizzando sonde quantistiche. L'obiettivo è calcolare l'incertezza standard $\Delta\phi$ della stima di ϕ . L'incertezza standard della stima di fase è legata alla quantità di informazione ottenuta dalla misura e può essere limitata da due limiti fondamentali: il limite quantistico standard (SQL) e il limite di Heisenberg (HL).

Limite Quantistico Standard (SQL)

Il limite quantistico standard rappresenta una limitazione inferiore all'incertezza standard $\Delta\phi$ per la stima di fase. Esso è dato da:

$$\Delta\phi \geq \frac{1}{\sqrt{N}}$$

dove N è il numero medio di particelle o fotoni utilizzati per la stima. Questo limite è una conseguenza della meccanica quantistica e rappresenta il limite minimo teorico per la precisione nella stima di fase. [1]

Limite di Heisenberg (HL)

Il limite di Heisenberg rappresenta un limite superiore all'incertezza standard $\Delta\phi$ per la stima di fase. Esso è dato da:

$$\Delta\phi \geq \frac{1}{N}$$

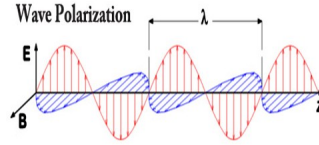
dove N è ancora il numero medio di particelle o fotoni utilizzati per la stima. Se gli N fotoni sono utilizzati separatamente si raggiunge al massimo il limite quantistico standard, se invece li si preparano in uno stato entangled è raggiungibile il limite di heisenberg, che rappresenta una piu' precisa stima della fase.

1.4 qubit e stato entangled

I qubit sono stati-vettori del tipo $|0\rangle, |1\rangle$ che costituiscono una base di uno spazio di Hilbert di dimensione 2.

Questi sono utili al fine di una trattazione corpuscolare della luce, infatti è possibile identificare un qubit come un fotone.

Un fotone può essere polarizzato in diversi modi, come polarizzazione orizzontale, polarizzazione verticale o polarizzazione diagonale, a seconda della direzione delle oscillazioni del campo elettromagnetico associato al fotone. Queste polarizzazioni possono essere utilizzate per codificare informazioni quantistiche in un fotone. Ad esempio, la polarizzazione orizzontale può rappresentare lo stato $|0\rangle$ e la polarizzazione verticale può rappresentare lo stato $|1\rangle$.



Polarizzazione

Si utilizza solitamente la seguente convenzione per gli stati:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1.5)$$

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

Posso esprimere, come già detto, un generico stato quantistico/fotone nel seguente modo:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

Poichè in laboratorio si è lavorato con due fotoni allora è necessario lavorare in uno spazio di Hilbert \mathcal{H} definito come il prodotto tensoriale degli spazi di Hilbert \mathcal{H}_A e \mathcal{H}_B dei singoli qubit:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B. \quad (1.8)$$

\mathcal{H} è uno spazio di dimensione 4 costituito dalla possibile seguente base:

$$|0\rangle_A|0\rangle_B, |0\rangle_A|1\rangle_B, |1\rangle_A|0\rangle_B, |1\rangle_A|1\rangle_B. \quad (1.9)$$

Ne consegue che il generico stato quantistico identificante due fotoni sarà esprimibile nel seguente modo:

$$|\psi\rangle = \sum_{i=0,j=0}^1 \gamma_{ij} |i\rangle_A |j\rangle_B. \quad (1.10)$$

1.5 Mach Zehender e stima della fase

Un dispositivo ampiamente utilizzato per la stima di fase quantistica è l'interferometro Mach-Zehnder (MZI). L'MZI è composto da due splitter di fasci e uno spostatore di fase.

L'interferometro Mach-Zehnder è uno dei più comuni strumenti adatti per stimare la fase.

I due elementi principali del Mach-Zehnder sono il "phase shifter", che aggiunge una fase tra gli operatori di annichilazione e creazione, e il "beam splitter", che permette il mescolamento fra due modi ottici.

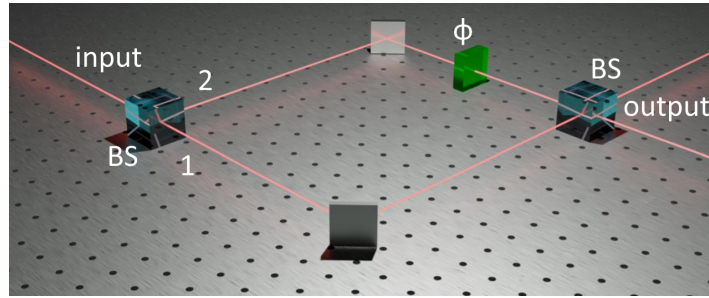
Per essere più specifici:

Uno "beam splitter", noto anche come divisore di fascio o splitter ottico, è un dispositivo ottico utilizzato per suddividere un raggio di luce in due o più raggi separati. Un "phase shifter" è un dispositivo utilizzato per modificare la fase di un segnale elettrico o ottico senza influenzare significativamente la sua ampiezza.

Ora considerando un Beam Splitter che con probabilità di trasmissione e riflessione del 50/50 e il phase shifter che aggiunge una fase su un solo braccio, l'azione dei singoli elementi è descritta nel seguente modo:

$$PS(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\phi} \end{pmatrix}, BS = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \pm i \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \pm i \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad (1.11)$$

Il Mach-Zehnder è composto da due BS e un PS, così che sia descrivibile dalle seguenti operazioni matriciali:



Schema del Mach-Zehnder.

$$MZI(\phi) = BS/PS/BS = \begin{pmatrix} \cos(\phi/2) & -\sin(\phi/2) \\ \sin(\phi/2) & \cos(\phi/2) \end{pmatrix}$$

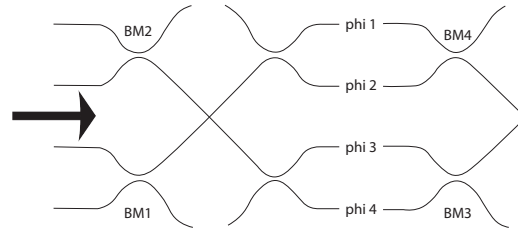
1.6 Mach-Zendher utilizzato come circuito integrato

Per scalare il sistema e per studiare più di una fase è utile passare ai dispositivi integrati. I circuiti integrati (CI), comunemente noti come chip o microchip, sono dispositivi elettronici che incorporano un gran numero di componenti elettronici attivi e passivi, come transistor, resistenze, condensatori e diodi, all'interno di un singolo substrato o circuito stampato. Questi componenti sono miniaturizzati e interconnessi in modo molto compatto all'interno del chip. La realizzazione di piattaforme ottiche lineari per applicazioni quantistiche possono richiedere centinaia di elementi ottici, e quindi, le dimensioni delle strumentazioni necessarie ad avere una sufficiente precisione sulla misura della fase sarebbero troppo grandi per essere contenute in un normale tavolo ottico. Tali circuiti forniscono stabilità, scalabilità, miniaturizzazione, flessibilità, riduzione dei costi, standardizzazione, maggiore efficienza e precisione per applicazioni quantistiche.[1] I circuiti più comuni sono basati sul Silicio.

Nei circuiti integrati, la luce è confinata a muoversi in percorsi costruiti all'interno del dispositivo. Queste guide sono create tramite impulsi laser che scrivono la geometria del percorso sul materiale.

Inoltre, la fase sintonizzabile si sposta tra i percorsi ottici può essere implementato da tecnologie appropriate a seconda della piattaforma integrata. Nel nostro caso tramite un'agente meccanico era possibile variare la lunghezza del percorso di uno dei due fotoni così da variarne la fase. L'obiettivo finale della fotonica quantistica integrata è il integrazione simultanea di tutte le fasi di un protocollo di informazione quantistica in un singolo chip: generazione, manipolazione e rilevamento di stati fotonici quantici.[1]

Noi utilizzeremo un circuito integrato per replicare un Mach-Zendher a 4 braccia schematizzato come segue: Dove ϕ_1, ϕ_2 e ϕ_3 rappresentano i phase shifter e $BM1, BM2, BM3$ e $BM4$



Schema del circuito integrato: BM è l'acronimo di beam splitter, che si trovano agli incroci delle braccia del circuito, phi rappresenta invece il phase shifter.

rappresentano i 4 beam splitter con probabilità di trasmissione e riflessione pari a 0.5

1.7 Effetto Hong-Ou-Mandel

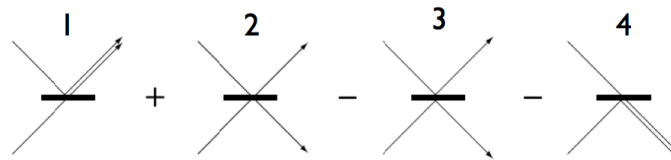
Questo fenomeno è rilevante per il progetto al fine di ottenere stati entanglement, così da minimizzare l'errore sulla fase che vedremo sarà inversamente proporzionale al numero di fotoni. L'effetto Hong-Ou-Mandel è un fenomeno quantistico che si verifica quando due fotoni identici vengono inviati in un beam splitter.

Quando ciò accade, i fotoni si comportano in modo quantistico e si combinano in modo tale che entrambi emergono dal divisore di fascio nello stesso output e sono indistinguibili. In altre parole, i due fotoni entrano come coppia e escono come coppia dal divisore di fascio, invece di uscire il 50 per cento delle volte come ci si aspetterebbe in base alla fisica classica.

Questo effetto fu scoperto per la prima volta da Ou, Mandel e Pereira nel 1987 [4] ed è stato chiamato così in onore dei loro contributi.

Questo fenomeno è una manifestazione del principio di indistinguibilità dei fotoni identici nella meccanica quantistica. Si dimostra che la probabilità che i fotoni escano insieme nella stessa uscita è di $\frac{1}{2}$.

Qui sotto riporto le 4 configurazioni possibili dovute all'interazione dei fotoni con il beam-splitter: Se i due fotoni sono indistinguibili gli eventi in cui un fotone viene riflesso e uno trasmesso



1-Il fotone proveniente dall'alto viene riflesso e il fotone proveniente dal basso viene trasmesso.

2-Entrambi i fotoni vengono trasmessi.

3-Entrambi i fotoni vengono riflessi.

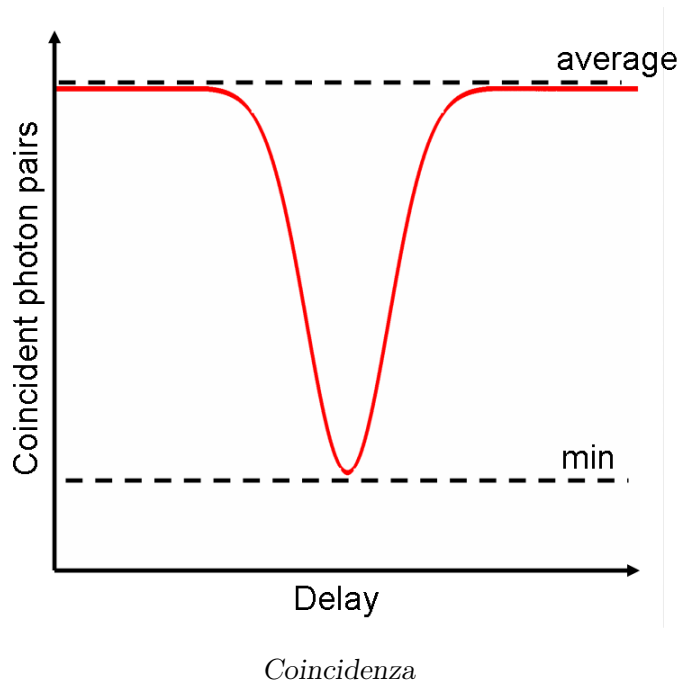
4-Il fotone proveniente dall'alto viene trasmesso e il fotone proveniente dal basso viene riflesso.

vengono soppressi, dunque non si verifica né la configurazione 2 né la configurazione 3 in figura. Come si capisce che si è verificato l'effetto Hong ou Mandel?

Per comprendere se si è verificato questo fenomeno bisogna cercare degli eventi di coincidenza, cioè vogliamo vedere che i due fotoni arrivino in due diversi rilevatori pressoché simultaneamente (o meglio a pochi nanosecondi di distanza), infatti se arrivano insieme si sono comportati in modo uguale, essendo quindi indistinguibili.

Quantitativamente questo si traduce in una diminuzione dell'intensità, infatti: Quando i due fotoni identici entrano nel beam splitter, possono essere descritti come onde probabilistiche, ciascuna associata a una probabilità di essere rilevata in un dato output. Queste onde interferiscono tra loro. Se i due fotoni sono indistinguibili, allora le loro funzioni d'onda si sovrappongono perfettamente, in modo che la loro interferenza possa essere costruttiva o distruttiva. Nel caso dell'effetto Hong-Ou-Mandel, si verifica la interferenza distruttiva. Questo significa che le onde dei due fotoni si sovrappongono in modo tale che le probabilità di rilevare un fotone in un output specifico si annullino a vicenda. Affinché sia osservata una coincidenza è necessario avere due rilevatori di fotoni in ogni singola uscita, così che la probabilità di osservare una coincidenza sarà di 0.5, che è pari alla probabilità che i fotoni escano in output diversi. Invece quando entrano contemporaneamente nella stessa porta li rendo indistinguibili, sopprimendo la possibilità di trovare la coincidenza.

In pratica quando si verifica il fenomeno della coincidenza allora siamo nella condizione sperimentale possibile affinché si minimizzi la fase.



1.8 N00N states

Una delle classi più importanti di stati quantistici con un numero fisso di particelle, che consente la stima di fase quantistica avanzata, è rappresentata dai cosiddetti stati $N00N$ che sono stati entangled, cioè stati quantistici che non possono essere descritti in modo separabile come la mera combinazione di stati individuali di particelle componenti, anche se sono separate da grandi distanze, distribuiti lungo due percorsi:

$$|\psi\rangle_{N00N} = \frac{|N\rangle_A |0\rangle_B + e^{i\phi} |0\rangle_A |N\rangle_B}{\sqrt{2}}; \quad (1.12)$$

dove N è il numero di particelle e ϕ è lo sfasamento fra i due stati.

Si può pensare che il primo stato rappresenti N particelle che percorrono tutto il cammino A del Mach-Zehnder, viceversa il secondo stato rappresenta N particelle che percorrono tutto il cammino B.

Lo stato $N00N$ è di grande interesse nell'ambito della metrologia quantistica in quanto si dimostra che l'incertezza associata alla misura di una fase ϕ su uno stato $|\psi\rangle_{N00N}$ ha un andamento del tipo:

$$\sigma_\phi^2 = \frac{1}{N}, \quad (1.13)$$

dove N è il numero di fotoni.

Lo stato $N00N$ a 2 fotoni è particolare in quanto viene sfruttato l'effetto Hong-Ou-Mandel, che si basa sull'indistinguibilità dei fotoni:

Questi ultimi sono iniettati lungo due diversi ingressi del circuito integrato e interferiscono attraverso l'effetto Hong-Ou-Mandel lungo gli ingressi del beam splitter che, essendo simmetrico, assicura che la probabilità di trovare i fotoni in diverse modalità di uscita sia nulla.

In questo modo lo stato finale in uscita dal circuito integrato sarà il seguente stato $N00N$:

$$|\psi\rangle_{N00N} = \frac{i(|2\rangle_A |0\rangle_B + |0\rangle_A |2\rangle_B)}{\sqrt{2}}. \quad (1.14)$$

Tramite gli stati $N00N$ è raggiungibile il limite di Heisenberg.

1.9 Processi non lineari

Al fine di generare uno stato di singolo fotone si sfrutta un processo non lineare. Questo è un fenomeno che si verifica nell'esperimento in quanto vedremo che il laser entra in contatto con un materiale non lineare.

L'interazione della luce laser con la distribuzione di carica in cristalli non-centrosimmetrici produce effetti osservabili non-lineari che possono essere usati per l'amplificazione, la modulazione e la conversione delle frequenze laser.

Applicando un campo elettrico $E(t)$ su un materiale posso descrivere nel seguente modo la funzione di polarizzazione $P(t)$:

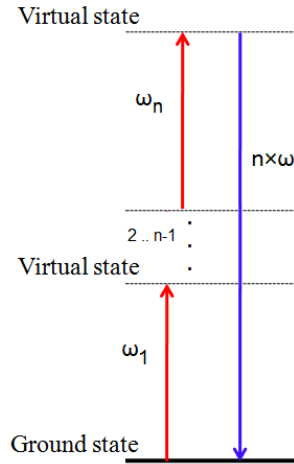
$$P(t) = \epsilon_0[\chi_1 E(t) + \chi_2 E(t)^2 + \chi_3 E(t)^3 + \dots] = P_1(t) + P_2(t) + P_3(t) + \dots \quad (1.15)$$

dove χ_i indica lo sviluppo i -esimo della suscettività elettrica.

Se χ_2 è non nullo allora si osservano processi non lineari.[5] Fra i processi non lineari più comuni ci sono la generazione di armoniche e la Spontaneous Parametric Down Conversion.

Generazione di armoniche

La generazione di armoniche è un fenomeno non lineare per il quale n fotoni a frequenze differenti interagiscono in specifiche condizioni generando un fotone con frequenza uguale alla somma delle frequenze dei fotoni interagenti.



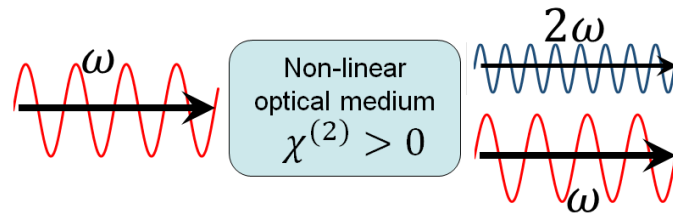
Schema del fenomeno della generazione di armoniche

La generazione della seconda armonica è un caso specifico di questo fenomeno per il quale due fotoni con la stessa frequenza interagiscono con un materiale interagendo e generando un nuovo fotone con il doppio dell'energia dei fotoni iniziali, ossia al doppio della frequenza. Questo fenomeno è citato in quanto è presente nell'esperimento che viene esposto nella prossima sezione.

Spontaneous Parametric Down Conversion

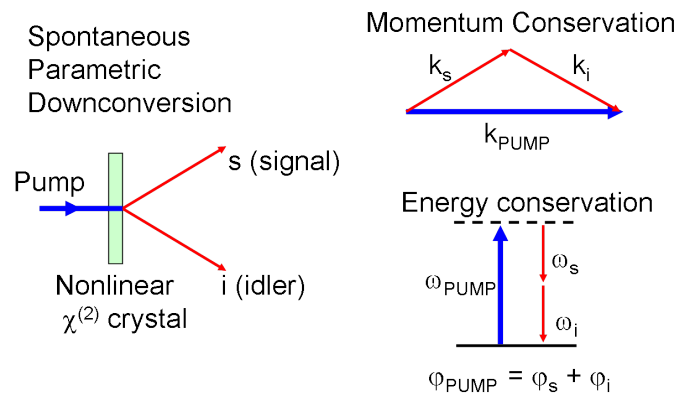
La Spontaneous Parametric Down Conversion (SPDC) [6] è un fenomeno ottico non lineare che converte un fotone in una coppia di fotoni di più bassa energia. Nel nostro esperimento vogliamo ottenere fotoni degeneri con i quali sfruttare l'effetto Houg-ou-Mandel, cioè:

$$\omega_1 = \omega_2 = \frac{\omega_{incidente}}{2}. \quad (1.16)$$



Schema del fenomeno della generazione di seconda armonica

In virtù della conservazione dell'energia e del momento ci sono solo alcune frequenze che permettono la SPDC degenerare.



Schema del fenomeno della Spontaneous Parametric Down Conversion

Capitolo 2

Esperimento

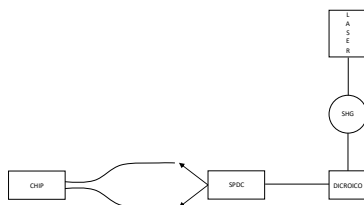
2.1 Set-Up/Design esperimento

L'esperimento è costituito da un laser che emette un fascio di luce rossa di lunghezza d'onda $785nm$, che, interagendo con un materiale non lineare, manifesta il fenomeno di generazione di seconda armonica.

Quindi il fascio laser che interagisce con il materiale non lineare si suddivide in un altro fascio di lunghezza d'onda pari a $392.5nm$.

In seguito i fasci luminosi incontrano un dicroico (filtro realizzato depositando su una lastrina di vetro strati alternati di materiali aventi indici di rifrazione diversi, in grado di riflettere una determinata componente cromatica dello spettro di un fascio luminoso) così da deviare il fascio luminoso di luce blu di lunghezza d'onda $392.5nm$, a cui siamo interessati.

Infine il fascio di luce blu attraversa un cristallo non lineare nel quale avviene il fenomeno della SPDC da cui si generano due fotoni che poi tramite le fibre ottiche sono condotti dentro un circuito integrato.



Il circuito integrato è costituito da 4 canali e da altrettanti beam splitter.

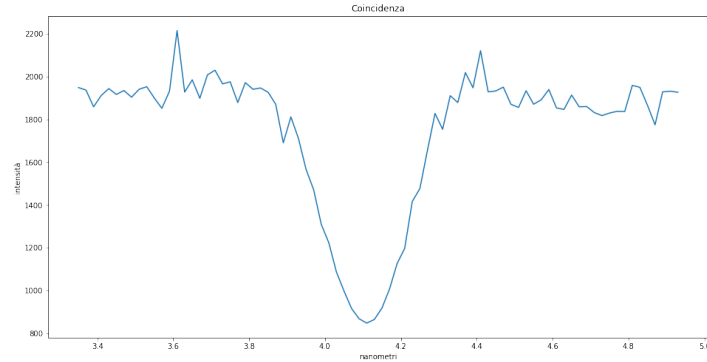
Dove è presente ciascuno beam splitter, a patto che i fotoni siano degeneri, avviene l'effetto HOM. Di conseguenza i due fotoni si "collocheranno" nello stesso canale così da ottenere l'errore minimo nella stima della fase.

Al fine di verificare che si sia verificato l'effetto Houn-gou-Mandel si sono posti molti fotodiodi

alla fine di ogni canale.

In virtù di questa configurazione al fine di verificare che sia avvenuto il fenomeno Houn-Ou-Mandel si cercano le coincidenze.

Ottenute le coincidenze siamo nelle condizioni sperimentali per minimizzare l'errore sulla stima



Coincidenza ottenuta sperimentalmente. Sull'asse x abbiamo i nanometri di differenza nel cammino ottico e sull'asse y abbiamo l'intensità

della fase.

Poiché l'output è probabilistico allora avremmo una distribuzione di probabilità anche per la fase.

Per stimare questa useremo i metodi bayesiani (spiegati in seguito).

Tramite questo approccio otterremo l'errore sulla stima di della fase, che è la varianza della likelihood.

Noi vogliamo conoscere questa distribuzione di probabilità. A questo scopo utilizzeremo la statistica, algoritmi computazionali e il reinforcement learning al fine di metterci nel miglior set-up per minimizzare l'errore sulla fase.

Capitolo 3

Stima della fase con il metodo bayesiano

Malgrado la metrologia quantistica riesca ad ottenere misure molto precise risente della disponibilità di risorse.

Per ovviare a questo problema si simulano degli esperimenti tramite algoritmi ed intelligenza artificiale.

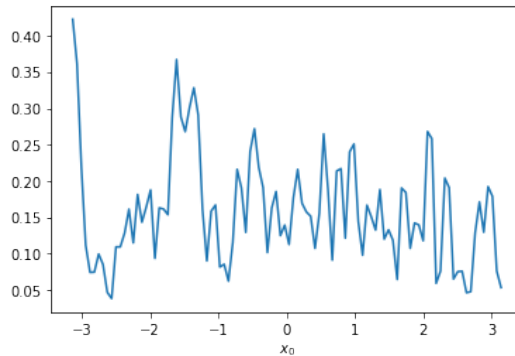
Utilizzeremo l'inferenza Bayesiana che consente un approccio efficace allo studio del fenomeno al fine di ricavare le distribuzioni di probabilità per l'angolo.

3.1 Probabilità a priori

In statistica una distribuzione di probabilità a priori di una quantità incognita ϕ è la distribuzione di probabilità che esprimerebbe l'incertezza di ϕ prima che i dati siano presi in considerazione:

$$P(\phi) \quad (3.1)$$

Negli esperimenti computazionale abbiamo preso un a probabilità a priori uniforme nell'intervallo $[0, \pi]$ (o $[0, 2\pi]$ a seconda delle casistiche che approfondiremo in seguito) per ognuna delle 3 fasi ϕ_1, ϕ_2 e ϕ_3 , rispetto alla fase di riferimento che si trova sul quarto braccio, settata a 0.



Distribuzione di probabilità a priori

3.2 Likelihood

In statistica, la funzione di verosimiglianza (o funzione di likelihood) assegna una previsione probabilistica ai dati osservati. Rappresenta la probabilità di outcome condizionata al fatto di avere un certo ϕ e θ :

$$P(outcome|\phi). \quad (3.2)$$

Negli esperimenti computazionali abbiamo preso un a probabilità a priori uniforme nell'intervallo $[0, \pi]$ (o $[0, 2\pi]$ a seconda delle casistiche che vedremo in seguito) per ognuna delle 3 fasi ϕ_1, ϕ_2 e ϕ_3 , non facendo quindi nessuna supposizione a priori.[2]

3.3 Teorema di Bayes

Il teorema di Bayes afferma che la probabilità di avere A condizionato al fatto di avere E moltiplicato per la probabilità di avere E è uguale alla probabilità di avere E condizionato ad A moltiplicato per la probabilità di avere A :

$$P(A|E) = \frac{P(E|A)P(A)}{P(E)}. \quad (3.3)$$

Da noi il teorema sarà utilizzato in seguito sotto la seguente forma:

$$P(\phi) = \frac{P(\phi)P(outcome|\phi)}{P(\phi|outcome)}. \quad (3.4)$$

In questo modo aggiorneremo di volta in volta la probabilità a priori che si verifichi una fase in funzione dell'output del modello.[2]

3.4 Probabilità a posteriori

Rappresenta la distribuzione di probabilità dei possibili valori dei parametri condizionata all'osservazione dei dati sperimentali.

Nel nostro caso dato un outcome, una probabilità a priori e una likelihood si ha :

$$P(\phi|outcome) = P(\phi)P(outcome|\phi) \quad (3.5)$$

Quindi ogni volta che sperimentalmente viene fatta una misura di outcome questa probabilità viene aggiornata.[2]

3.5 Metodo Monte Carlo

Il metodo si usa per trarre stime di integrali attraverso simulazioni computazionali:

Si generano una serie di numeri tra loro non correlati secondo la distribuzione di probabilità a priori sovracitata che crediamo abbia l'oggetto da studiare e si calcola la funzione per questi valori.

Utilizzeremo il metodo per la stima del valore medio ϕ :

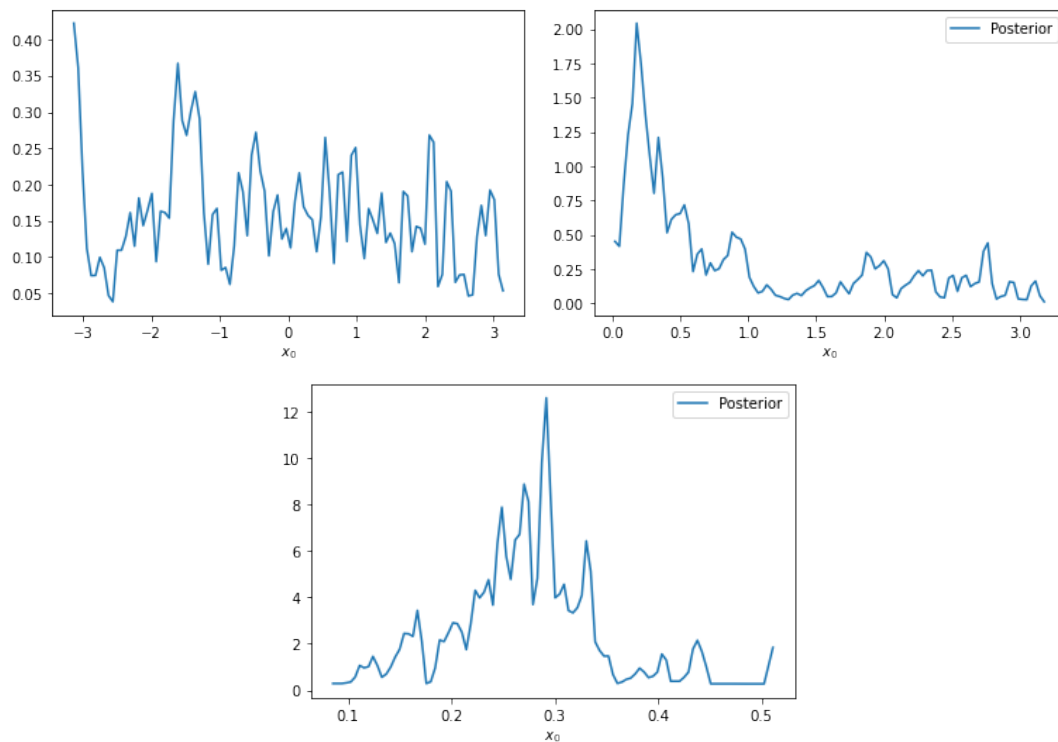
$$\langle \phi \rangle = \int \phi P(\phi) \sim \sum P_i(\phi) \phi. \quad (3.6)$$

Da qui è possibile ricavarsi la quadratic loss function Q_{loss} e la varianza σ^2 :

$$Q_{loss} = |\phi - \langle \phi \rangle|^2 \quad (3.7)$$

$$\sigma = \int (\phi - \langle \phi \rangle)^2 P(\phi|outcome) d\phi, \quad (3.8)$$

la quali permettono di ricavare una stima dell'errore commesso nel calcolo di ϕ . [3]

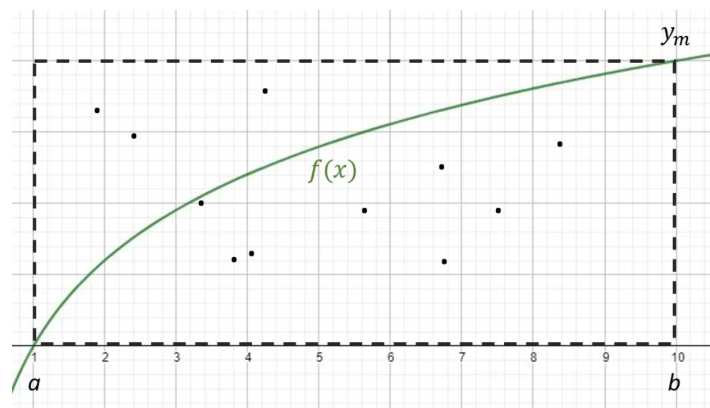


Da sinistra verso destra: Distribuzione di probabilità a priori, primo update della posterior, update finale della posterior (notasi asse delle ascisse).

3.6 Recap Metodo Bayesiano

In sostanza nell'esperimento computazionale si parte con una probabilità a priori di ϕ , osserviamo l'output e aggiorniamo la probabilità di ϕ tramite il teorema di Bayes. Questo processo viene ripetuto centinaia di volte finché non si crede si abbia la convergenza verso la distribuzione vera di ϕ .

Quando si ottiene questa probabilità tramite il metodo montecarlo è possibile stimare $\langle \phi \rangle$ e la Q_{loss} .

*Metodo Monte Carlo*

Capitolo 4

Stima della fase con il Reinforcement Learning

4.1 Reinforcement Learning

Reinforcement Learning (RL), noto anche come Apprendimento per Rinforzo, è una branca dell'Intelligenza Artificiale (IA) che si occupa dello sviluppo di algoritmi e modelli computazionali capaci di apprendere a prendere decisioni ottimali in un ambiente dinamico attraverso un'interazione continua con tale ambiente. Questo paradigma di apprendimento è ispirato al modo in cui gli esseri umani e gli animali imparano a compiere azioni basate sulle esperienze accumulate nel corso del tempo. Vi è un agente, l'entità che prende decisioni e apprende, in un ambiente. A seconda delle azioni che l'agente riceve uno specifico premio.

L'agente agisce secondo una certa politica che è sostanzialmente una funzione che mappa lo stato nel quale è agente in un numero che è l'azione che l'agente intraprende.

Noi abbiamo utilizzato il metodo Cross-Entropy (CEM) che è una tecnica per la quale si generano molte politiche di azione, si simula il processo e in seguito si seleziona la politica ottimale.

4.2 Utilizzo

Il reinforcement ha lo scopo di scegliere i pesi ottimali per aggiornare nel modo migliore possibile la distribuzione di probabilità dell'angolo.

L'agente predice il numero di fotoni che vengono utilizzati e l'angolo venendo addestrato al fine di minimizzare la varianza (quindi l'errore commesso nella stima dell'angolo). Ne segue che praticando molti esperimenti è possibile ottenere una distribuzione di probabilità attesa per un certo sfasamento.

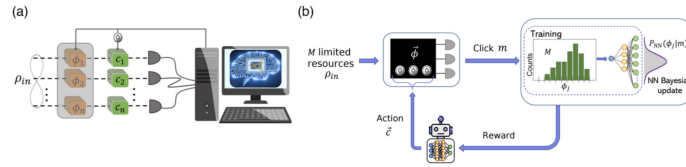
In pratica minimizzando la Q_{loss} l'algoritmo impara la distribuzione di probabilità di ϕ .

Capitolo 5

Simulazione computazionale esperimenti

Si è scritto un codice al fine di comprendere meglio le condizioni sperimentali ottimali nelle quali mettersi.

Al fine di allenare l'agente sono state fatte diverse misure sperimentali e i risultati sono stati salvati in un file.



(b) Raffigurazione dell'esperimento. I fotoni entrano nel chip, che è rappresentato dalla rete neurale ed escono in un certo output. La rete apprende la distribuzione di probabilità a posteriori associata all'aggiornamento bayesiano a singola misura.

(b) Raffigurazione dell'esperimento. I fotoni entrano nel chip, che è rappresentato dalla rete neurale ed escono in un certo output. La rete apprende la distribuzione di probabilità a posteriori associata all'aggiornamento bayesiano a singola misura.

(a) *Problema generico di stima multiparametrica completamente gestito da processi di intelligenza artificiale.*

(b) *Raffigurazione dell'esperimento. I fotoni entrano nel chip, che è rappresentato dalla rete neurale ed escono in un certo output. La rete apprende la distribuzione di probabilità a posteriori associata all'aggiornamento bayesiano a singola misura.*

Sono stati fatti due codici per simulare l'esperimento che si differenziano per la presenza e l'assenza dell'apprendimento rinforzato.

La simulazione degli esperimenti si concentra nel chip

5.1 Codice senza RL

Nel codice viene simulato l'ingresso e l'uscita di uno o due fotoni nel chip. Il chip viene ricreato attraverso queste righe di codice:

Si crea una distribuzione a priori dei parametri θ scelta uniforme in due possibili intervalli: $[0, \pi]$, $[0, 2\pi]$. Si seleziona manualmente il numero di fotoni entranti nel chip, scegliendo fra 1 o due fotoni. A seconda del numero di fotoni che entrano si hanno quattro (1 fotone) o 10 uscite (2 fotoni). In

```

class Chip(FiniteOutcomeModel):

    @property#phi
    def n_modelparams(self):
        return 3

    @property
    def is_n_outcomes_constant(self):
        return True
    def n_outcomes(self, expparams):
        if self.phot == 1:
            return 4
        else:
            return 10
    def are_models_valid(self, modelparams):
        return np.all(np.logical_and(modelparams > 0, modelparams <= 2*np.pi), axis=1)
    @property
    def expparams_dtype(self):
        return [('ts', 'float', 3)]

    def likelihood(self, outcomes, modelparams, expparams):
        super(Chip, self).likelihood(outcomes, modelparams, expparams)
        like = np.zeros([outcomes.shape[0], modelparams.shape[0], expparams.shape[0]])
        for idx in range(outcomes.shape[0]):
            if self.phot == 1:
                like[idx, :, :] = lHd_1photon(outcomes[idx], modelparams, expparams)
            else:
                like[idx, :, :] = lHd_2photon(outcomes[idx], modelparams, expparams)
        return like

```

Simulazione del circuito integrato

questo modo si hanno quattro possibili casistiche che ora riepilogo:

$$\begin{array}{ccc} \text{numero fotoni} & \text{intervallo} & \text{numero uscite} \end{array} \quad (5.1)$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & (0, \pi) & 4 \end{array} \quad (5.2)$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & (0, 2\pi) & 4 \end{array} \quad (5.3)$$

$$\begin{array}{ccc} 2 & (0, \pi) & 10 \end{array} \quad (5.4)$$

$$\begin{array}{ccc} 2 & (0, 2\pi) & 10 \end{array} \quad (5.5)$$

Si scelgono casualmente i tre valori del parametro θ :

$$\vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3) \quad (5.6)$$

dove $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in (0, 2\pi)$. Lo scopo dell'esperimento è scegliere i parametri theta ottimali affinché l'esperimento venga al meglio. A ciasuna uscita viene associata una probabilità differente. Viene simulato l'esperimento scegliendo come uscita quella più probabile a seconda dei valori di ϕ e θ .

Così grazie all'inferenza bayesiana viene aggiornata la probabilità a posteriori grazie al teorema di Bayes:

$$P_{post} = P(\theta|outcome) = \frac{P(\theta)P(outcome|\theta)}{\int P(\theta)P(outcome|\theta)} \quad (5.7)$$

Tramite questa viene calcolata tramite il metodo montecarlo il valore medio di phi.

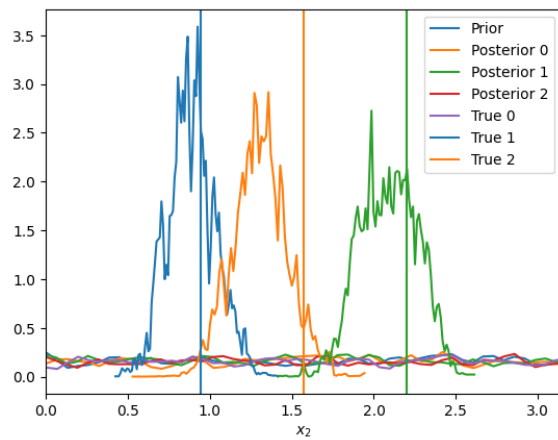
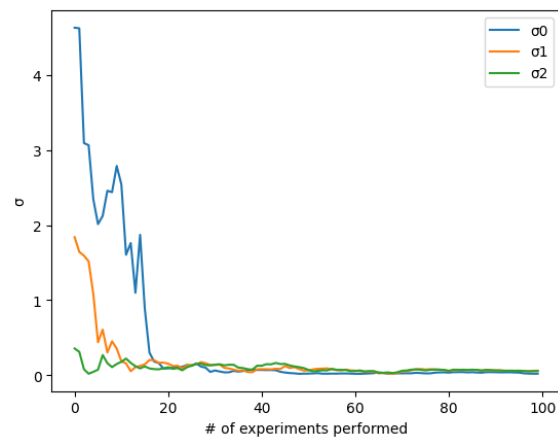
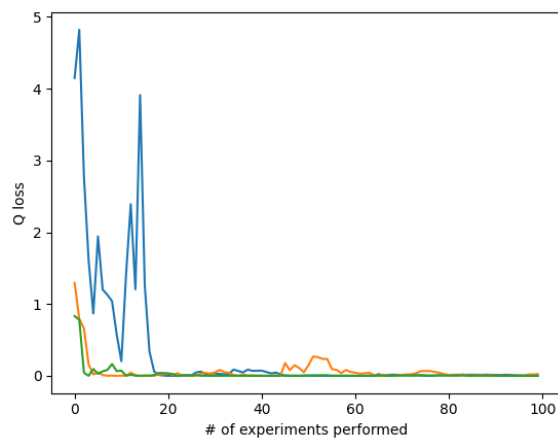
$$\langle \phi \rangle = \frac{\int \phi P_{post}}{\int P_{post}} \quad (5.8)$$

Questo algoritmo viene ripetuto molte volte. Proponiamo qui i risultati ottenuti con due fotoni in input all'ingresso del circuito.

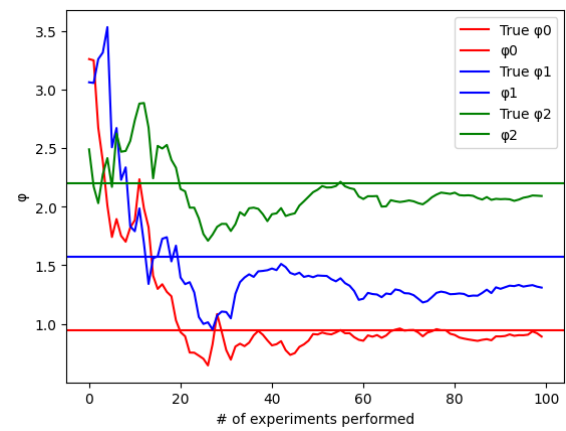
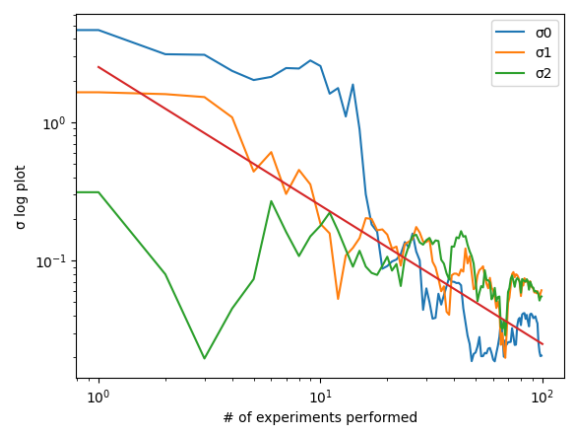
5.2 RISULTATI

Due fotoni $(0, \pi)$

Riporto qui sotto i risultati ottenuti utiulizzando due fotoni nell'intervallo $(0, \pi)$.

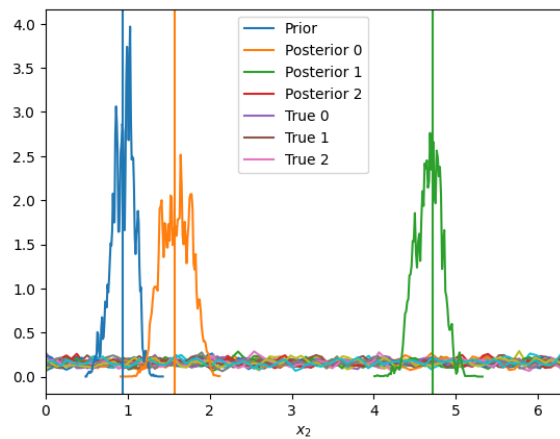
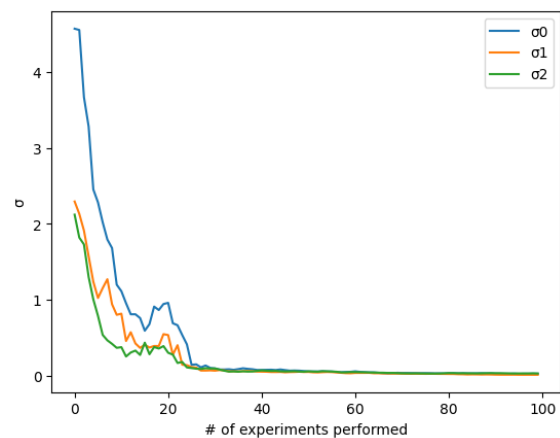
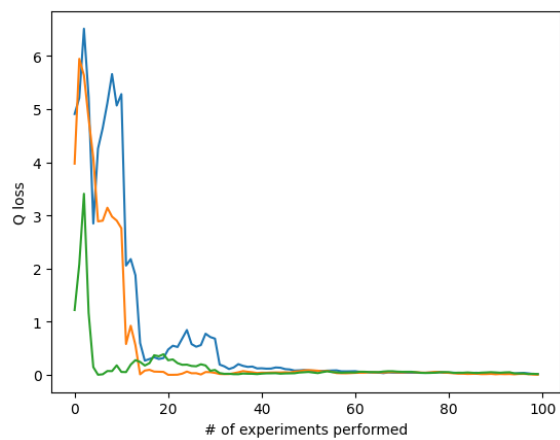
Posterior vs True values of ϕ Errore nella stima di ϕ in funzione del numero di esperimenti

Qloss in funzione del numero di esperimenti

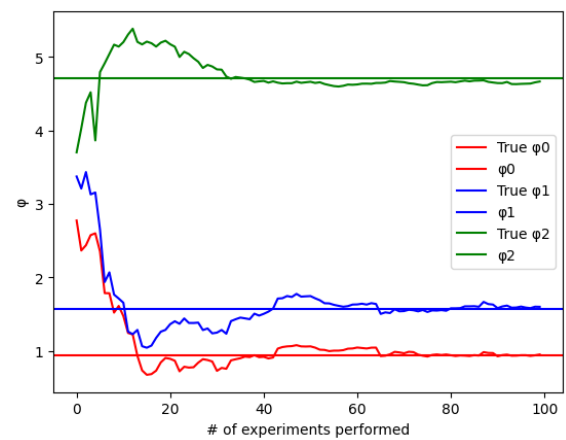
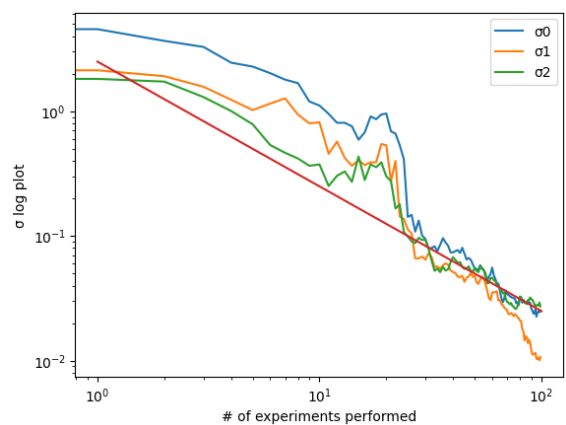
Posterior in funzione del numero di esperimenti e True values of ϕ Errore nella stima di ϕ in funzione del numero di esperimenti

Due fotoni $(0, 2\pi)$

Riporto qui sotto i risultati ottenuti utilizzando due fotoni nell'intervallo $(0, 2\pi)$.

Posterior vs True values of ϕ Errore nella stima di ϕ in funzione del numero di esperimenti

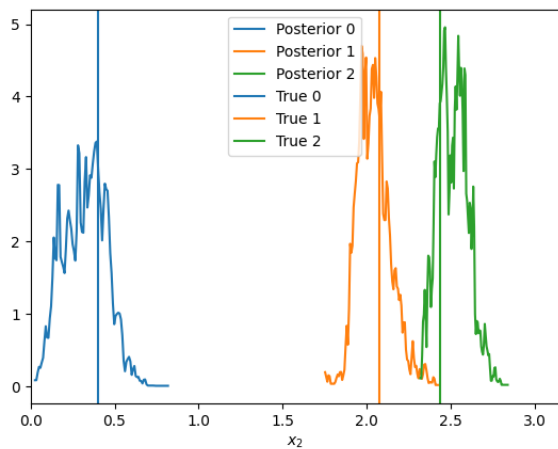
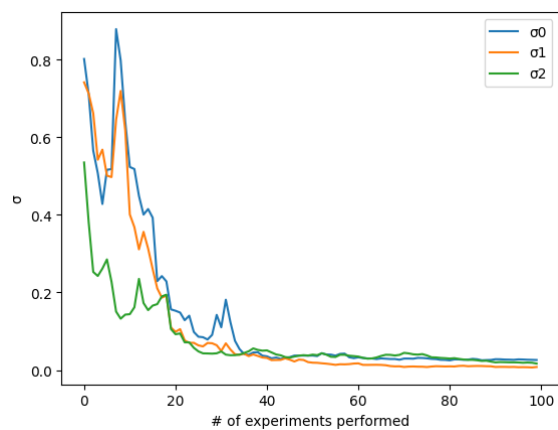
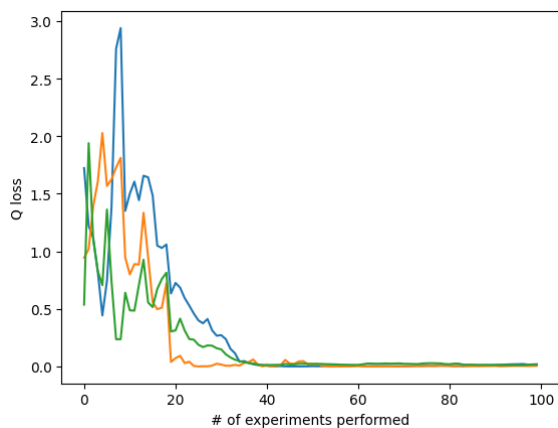
Qloss in funzione del numero di esperimenti

Posterior in funzione del numero di esperimenti e True values of ϕ Errore nella stima di ϕ in funzione del numero di esperimenti

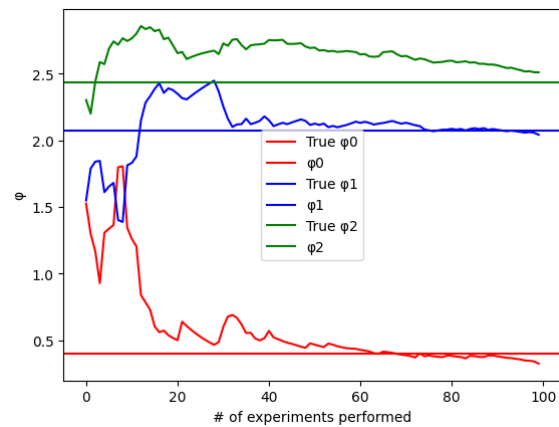
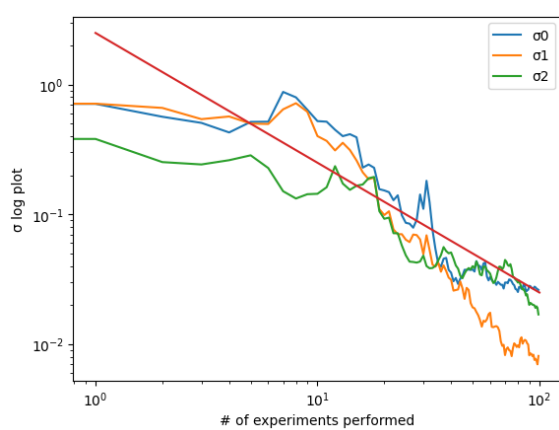
5.3 Codice con RL

Due fotoni $(0, \pi)$

Riporto qui sotto i risultati ottenuti utilizzando due fotoni nell'intervallo $(0, \pi)$.

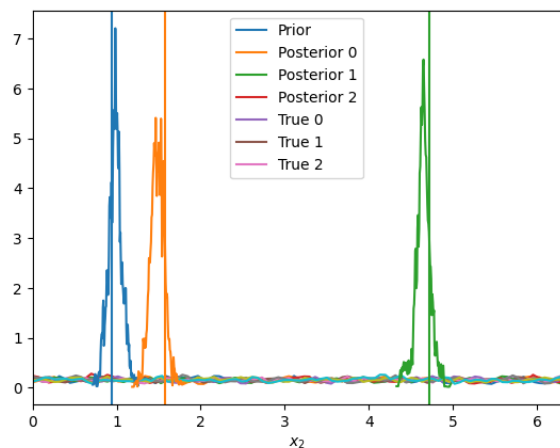
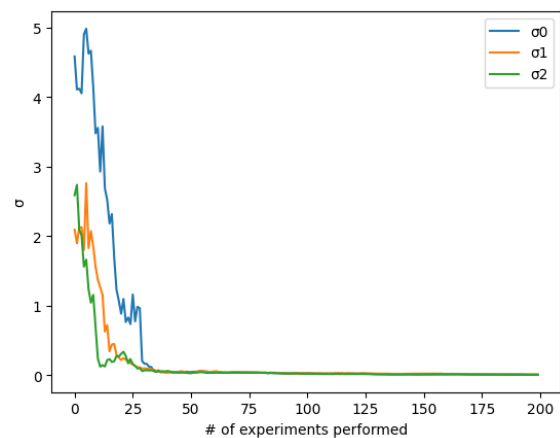
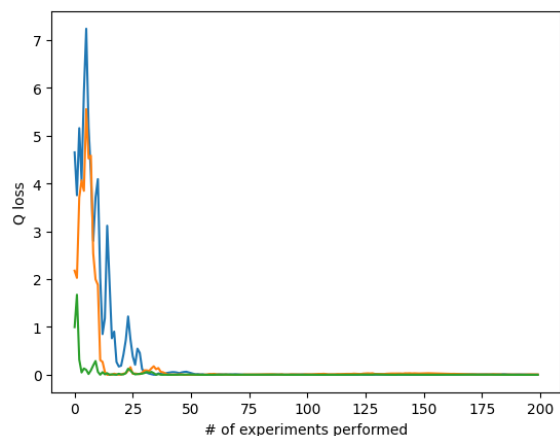
Posterior vs True values of ϕ Errore nella stima di ϕ in funzione del numero di esperimenti

Qloss in funzione del numero di esperimenti

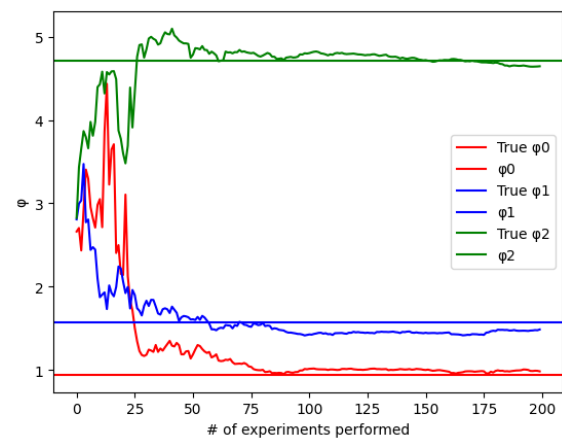
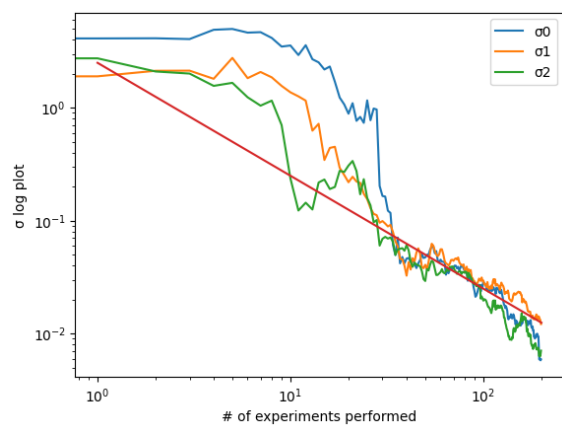
Posterior in funzione del numero di esperimenti e True values of ϕ Errore nella stima di ϕ in funzione del numero di esperimenti

Due fotoni $(0, 2\pi)$

Riporto qui sotto i risultati ottenuti utilizzando due fotoni nell'intervallo $(0, 2\pi)$.

Posterior vs True values of ϕ Errore nella stima di ϕ in funzione del numero di esperimenti

Qloss in funzione del numero di esperimenti

Posterior in funzione del numero di esperimenti e True values of ϕ Errore nella stima di ϕ in funzione del numero di esperimenti

5.4 Commento sui risultati

E' chiaro dalle immagini che il codice con il reinforcement learning permetta il raggiungimento di risultati migliori: L'agente shifta la misura in modo tale che la posterior ricostruita (discretizzata con le particelle Monte Carlo) si picchi di più rispetto al caso non ottimizzato, in questo modo si sono ottenuti stime migliori dell'errore sulla fase.

Capitolo 6

Conclusioni

Per sviluppare protocolli di metrologia quantistica ottimizzati, è necessario affrontare diverse sfide nel regime di risorse limitate.

Abbiamo tentato di superare il problema della limitatezza delle risorse tramite un agente per scegliere la politica di controllo ottimale delle risorse tramite una rete neurale che aggiorna le conoscenze in un esperimento di stima multiparametrica rumoroso.

Il training della rete neurale sono eseguiti direttamente sui dati sperimentali, senza alcuna conoscenza a priori del sensore quantico considerato, basandosi unicamente sulle statistiche dei risultati accessibili di un numero limitato di esperimenti.

Questo dimostra sperimentalmente l'efficacia di un approccio completamente basato sull'intelligenza artificiale per impostare in seguito l'esperimento.

L'implementazione di un approccio senza modelli per la stima quantistica multiparametrica apre la strada all'uso automatizzato e quotidiano di sensori quantistici complessi senza la necessità di una caratterizzazione dispendiosa di tempo e risorse o della richiesta di una modellizzazione teorica accurata.

Quest'ultima può costituire una limitazione fondamentale in tutti i casi in cui la descrizione teorica dell'intera evoluzione quantistica è carente.

Di conseguenza, la maggior parte degli scenari di metrologia quantistica trarrà notevoli benefici dalla strategia sviluppata.

Bibliografia

- [1] Photonic quantum metrology; Emanuele Polino, Mauro Valeri, Nicolo Spagnolo and Fabio Sciarrino.
- [2] Casella, Giorgio; Berger, Roger L. (2002). Inferenza statistica (2a ed.). Duxbury.
- [3] Deep reinforcement learning for quantum multiparameter estimation Valeria Cimini ,a Mauro Valeri ,a Emanuele Polino ,a Simone Piacentini ,b Francesco Ceccarelli ,b Giacomo Corrielli ,b Nicolò Spagnolo ,a Roberto Osellame ,b and Fabio Sciarrino a
- [4] C. K. Hong, Z. Y. Ou, and L. Mandel, “Measurement of subpicosecond time intervals between two photons by interference”
- [5] Boyd Robert. Nonlinear Optics
- [6] Spontaneous parametric down-conversion. Christophe Couteau