Théorie des Graphes

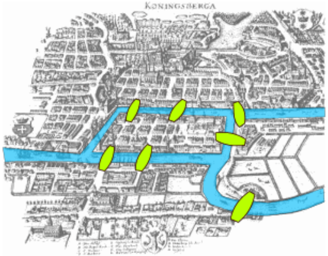
Chapitre 1 : Généralités

Imane EL MALKI et Pr. Imad HAFIDI
imane.elmalki@gmail.com

Master Big Data et Aide à la décision

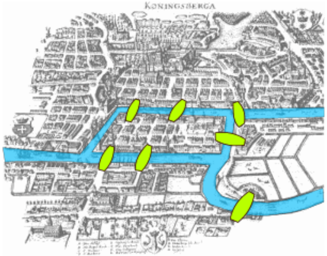
Historique

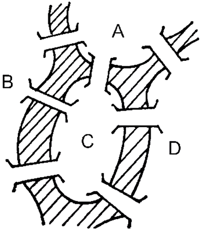
- Le début de la théorie des graphes était au *XVIII* siècle avec les travaux d'Euler



Historique

- Le début de la théorie des graphes était au *XVIII* siècle avec les travaux d'Euler





Historique

- Le début de la théorie des graphes était au *XVIII* siècle avec les travaux d'Euler

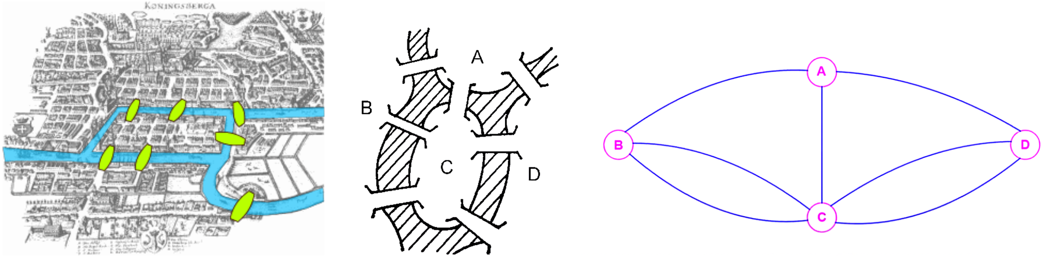


Figure : Problème des ponts de Konisberg

Historique

- A partir de 1946 : Explosion de l'étude de la théorie des graphes avec l'apparition des ordinateurs

Historique

- A partir de 1946 : Explosion de l'étude de la théorie des graphes avec l'apparition des ordinateurs
  - Kuhn (1955) : problème d'affectation

Historique

- A partir de 1946 : Explosion de l'étude de la théorie des graphes avec l'apparition des ordinateurs
  - Kuhn (1955) : problème d'affectation
  - Ford et Fulkerson (1955) : problème de flot maximum

Historique

- A partir de 1946 : Explosion de l'étude de la théorie des graphes avec l'apparition des ordinateurs
  - Kuhn (1955) : problème d'affectation
  - Ford et Fulkerson (1955) : problème de flot maximum
  - Berge (1958) : synthèse sur les graphes et ses applications

Historique

- A partir de 1946 : Explosion de l'étude de la théorie des graphes avec l'apparition des ordinateurs
  - Kuhn (1955) : problème d'affectation
  - Ford et Fulkerson (1955) : problème de flot maximum
  - Berge (1958) : synthèse sur les graphes et ses applications
  - Dijkstra (1959) : problème du plus court chemin

Historique

- A partir de 1946 : Explosion de l'étude de la théorie des graphes avec l'apparition des ordinateurs
  - Kuhn (1955) : problème d'affectation
  - Ford et Fulkerson (1955) : problème de flot maximum
  - Berge (1958) : synthèse sur les graphes et ses applications
  - Dijkstra (1959) : problème du plus court chemin
  - Roy (1959) : problème de flot de coût minimum

Cette explosion s'est accompagnée avec l'explosion du domaine de l'optimisation

Introduction

- La théorie des graphes s'est développée dans diverses domaines :
  - **Sciences Techniques :**
    - Cartographie : Réseau routier, réseau internet,...
    - Chimie et biologie : Modélisation des molécules, ADN,...

Introduction

- La théorie des graphes s'est développée dans diverses domaines :
  - **Sciences Techniques :**
    - Cartographie : Réseau routier, réseau internet,...
    - Chimie et biologie : Modélisation des molécules, ADN,...
  - **Sciences économiques :**
    - finances, logistique
    - Gestion des stocks, management
    - Planning de livraisons, gestion des flots, ordonnancement

Introduction

- La théorie des graphes s'est développée dans diverses domaines :
  - **Sciences Techniques :**
    - Cartographie : Réseau routier, réseau internet,...
    - Chimie et biologie : Modélisation des molécules, ADN,...
  - **Sciences économiques :**
    - finances, logistique
    - Gestion des stocks, management
    - Planning de livraisons, gestion des flots, ordonnancement

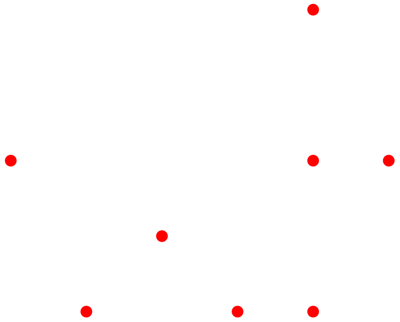
En général, un graphe permet de représenter la structure, les connexions d'un ensemble complexe en exprimant les relations entre ses éléments

Introduction

Qu'est-ce qu'un graphe ?

Introduction

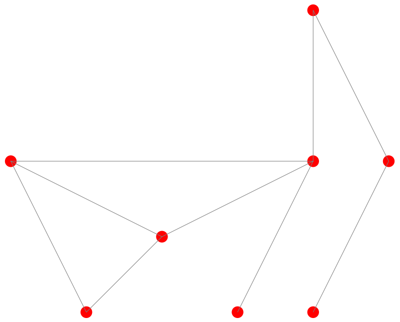
Qu'est-ce qu'un graphe ?



• : **Sommets**

Introduction

Qu'est-ce qu'un graphe ?

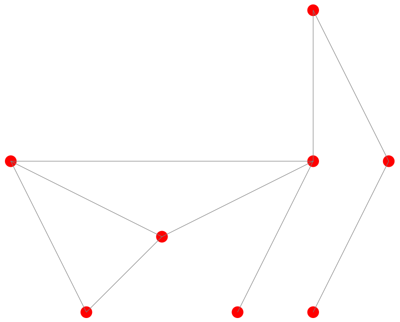


● : **Sommets**

— : **Liaisons**

Introduction

Qu'est-ce qu'un graphe ?



● : **Sommets**

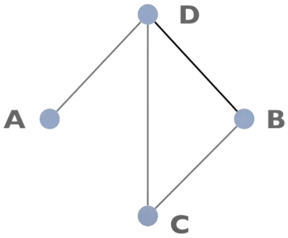
— : **Liaisons**

Définition

Un graph est un ensemble de points appelés sommets, reliés par des flèches ou des traits (liaisons).

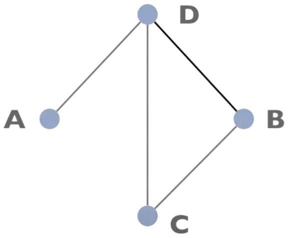
Introduction

Comment dessiner un graphe ?



Introduction

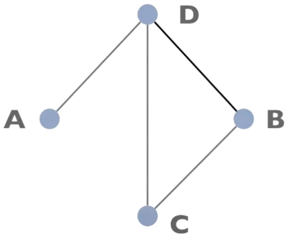
Comment dessiner un graphe ?

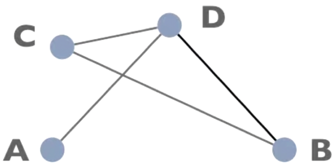


- 4 Sommets (A,B,C,D)
- 4 arêtes (AD, DB, BC, CD)

Introduction

Comment dessiner un graphe ?

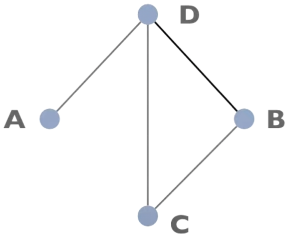


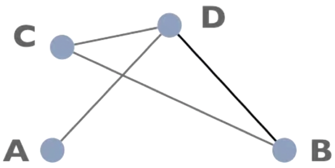


- 4 Sommets (A,B,C,D)
- 4 arêtes (AD, DB, BC, CD)

Introduction

Comment dessiner un graphe ?

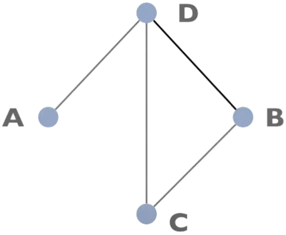




- 4 Sommets (A,B,C,D)
- 4 arêtes (AD, DB, BC, CD)

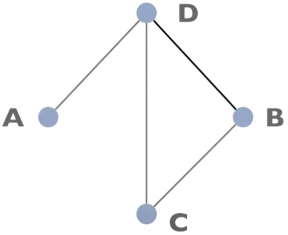
- 4 Sommets (A,B,C,D)
- 4 arêtes (AD, DB, BC, CD)

Introduction



- 4 Sommets (A,B,C,D)
- 4 arêtes (AD, DB, BC, CD)

Introduction



- 4 Sommets (A,B,C,D)
- 4 arêtes (AD, DB, BC, CD)

On note $G(S, L)$ le graphe constitué des sommets S et des liaisons L.
Où,

$$S = \{A, B, C, D\}$$
$$L = \{AD, DB, BC, CD\}$$

Voisins, et degré

- On dit que deux sommets sont **voisins**, s'il existe une arête entre les deux

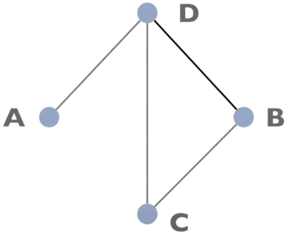
Voisins, et degré

- On dit que deux sommets sont **voisins**, s'il existe une arête entre les deux
- **Le degrés** d'un sommet **s**, est le nombre de ses voisins. On le note $deg(s)$ ou $d(s)$

Voisins, et degré

- On dit que deux sommets sont **voisins**, s'il existe une arête entre les deux
- **Le degrés** d'un sommet **s**, est le nombre de ses voisins. On le note $deg(s)$ ou $d(s)$

Exemple :



- A et D sont voisins
- A et C ne sont pas voisins
- $deg(A) = 1$, $deg(B) = 2$, $deg(C) = 2$ et $deg(D) = 3$

Graphes orientés et Non Orientés

Graphe non orienté

Un graphe non orienté $G(S, A)$ tels que :

- S est un ensemble non vide de sommets
- A est un ensemble d'arêtes
- Chaque arête de A associe une paire d'éléments de S non nécessairement distincts (la relation est bidirectionnelle).

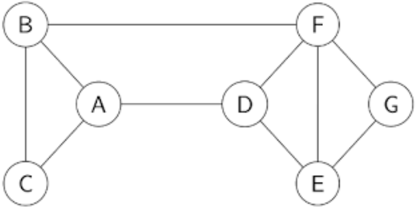
Graphes orientés et Non Orientés

Graphe non orienté

Un graphe non orienté $G(S, A)$ tels que :

- S est un ensemble non vide de sommets
- A est un ensemble d'arêtes
- Chaque arête de A associe une paire d'éléments de S non nécessairement distincts (la relation est bidirectionnelle).

Exemple :



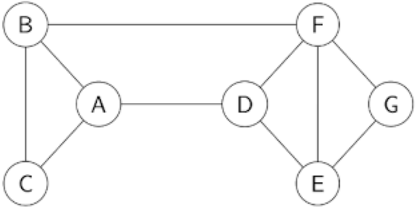
Graphes orientés et Non Orientés

Graphe non orienté

Un graphe non orienté $G(S, A)$ tels que :

- S est un ensemble non vide de sommets
- A est un ensemble d'arêtes
- Chaque arête de A associe une paire d'éléments de S non nécessairement distincts (la relation est bidirectionnelle).

Exemple :



- $S = \{A, B, C, D, E, F, G\}$
- $A = \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{C, B\}, \{B, F\}, \{F, G\}, \{G, E\}, \{E, D\}, \{D, A\}, \{D, F\}, \{F, E\}\}$

Graphes orientés et Non Orientés

Graphe orienté

Un graphe orienté $G(S, A)$ tels que :

- S est un ensemble non vide de sommets
- A est un ensemble d'arcs (flèches)
- Chaque arc L de A associe une paire d'éléments de S non nécessairement distincts. x est l'origine de L et y est le but de L (la relation est unidirectionnelle).

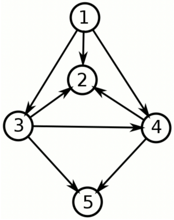
Graphes orientés et Non Orientés

Graphe orienté

Un graphe orienté $G(S, A)$ tels que :

- S est un ensemble non vide de sommets
- A est un ensemble d'arcs (flèches)
- Chaque arc L de A associe une paire d'éléments de S non nécessairement distincts. x est l'origine de L et y est le but de L (la relation est unidirectionnelle).

Exemple :



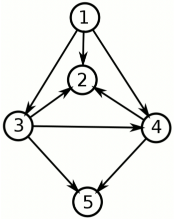
Graphes orientés et Non Orientés

Graphe orienté

Un graphe orienté $G(S, A)$ tels que :

- S est un ensemble non vide de sommets
- A est un ensemble d'arcs (flèches)
- Chaque arc L de A associe une paire d'éléments de S non nécessairement distincts. x est l'origine de L et y est le but de L (la relation est unidirectionnelle).

Exemple :



- $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $A = \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{1, 3\}, \{3, 2\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}, \{4, 2\}, \{3, 2\}\}$

Graphes orientés et Non Orientés

Définition : Degré

Soient, $G(X, A)$ un graphe orienté, et x un sommet. On note $d^+(x)$ le nombre d'arcs ayant x comme extrémité initiale, et $d^-(x)$ le nombre d'arcs ayant x comme extrémité finale. Alors, on a:

$$d(x) = d^+(x) + d^-(x)$$

Graphes pondérés

Graphe pondéré

Un graphe pondéré est un graph auquel on a associé une ou plusieurs fonction de valuation.

- On attribut à chaque arête ou arc une valeur numérique
- La fonction de valuation peut présenté : un coût, une distance, une contrainte, ...

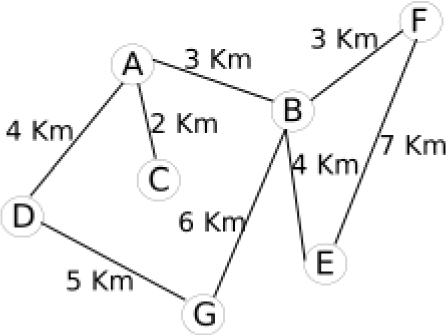
Graphes pondérés

Graphe pondéré

Un graphe pondéré est un graph auquel on a associé une ou plusieurs fonction de valuation.

- On attribut à chaque arête ou arc une valeur numérique
- La fonction de valuation peut présenté : un coût, une distance, une contrainte, ...

Exemple :



Exercice

Exercice 1

On organise un tournoi avec n équipes. Sachant que chaque équipe en rencontre $n-1$ différentes, combien faut-il organiser de match ?

1- Représenter cette situation par un graphe pour $n = 3, 5, 7$.

2- Pour chaque n calculer la somme des degrés des graphes.

3- Que peut-on en déduire ?

Exercice

Exercice 1

On organise un tournoi avec n équipes. Sachant que chaque équipe en rencontre $n-1$ différentes, combien faut-il organiser de match ?

1- Représenter cette situation par un graphe pour $n = 3, 5, 7$.

2- Pour chaque n calculer la somme des degrés des graphes.

3- Que peut-on en déduire ?

Propriétés

La somme des degrés d'un graphe non orienté est égale à deux fois le nombre d'arêtes.

Chaîne, Chemain

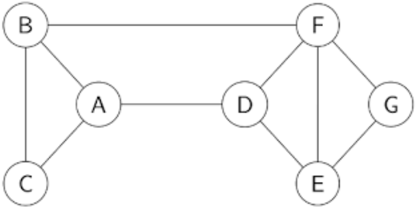
Définition : Chaîne

Soit $G(S, A)$ un graphe **non orienté**.

• Une chaine est une suite de sommets $P = [s_1, ..., s_k]$ tel que $s_i, s_{i+1} \in A$ pour tout $1 \leq i \leq k + 1$.

• Longueur de la chaine P : $Long(P) =$ nombre d'arêtes de P.

Exemple :

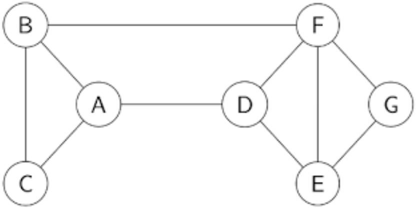


Chaîne, Chemain

Définition : Chaîne

Soit $G(S, A)$ un graphe **non orienté**.
• Une chaine est une suite de sommets $P = [s_1, ..., s_k]$ tel que $s_i, s_{i+1} \in A$ pour tout $1 \leq i \leq k + 1$.
• Longueur de la chaine P : $Long(P) =$ nombre d'arêtes de P.

Exemple :



- Une chaine : $P_1 = (A, C, B, F, E)$
- Une chaine : $P_2 = (A, D, E, G, F, B, C)$
- $Long(P_1) = 4$ et $Long(P_2) = 6$

Chaîne, Chemain

Définition : Chemain

Soit $G(S, A)$ un graphe **orienté**.

• Un chemain est une suite de sommets $P = [s_1, ..., s_k]$ tel que $s_i, s_{i+1} \in A$ pour tout $1 \leq i \leq k+1$.

• Longueur du chemain P : $Long(P) =$ nombre d'arcs de P.

Chaîne, Chemain

Définition : Chemain

Soit $G(S, A)$ un graphe **orienté**.
• Un chemain est une suite de sommets $P = [s_1, ..., s_k]$ tel que $s_i, s_{i+1} \in A$ pour tout $1 \leq i \leq k+1$.
• Longueur du chemain P : $Long(P) =$ nombre d'arcs de P.

Chemain, chaîne simple, élémentaire

- Un chemin (chaîne) est simple s'il ne contient pas deux fois le même arête (arc).
- Un chemin (chaine) est élémentaire s'il ne contient pas deux fois le même sommet.

Chaîne, Chemain

Définition : Chemain

Soit $G(S, A)$ un graphe **orienté**.
• Un chemain est une suite de sommets $P = [s_1, ..., s_k]$ tel que $s_i, s_{i+1} \in A$ pour tout $1 \leq i \leq k + 1$.
• Longueur du chemain P : $Long(P) =$ nombre d'arcs de P.

Chemain, chaîne simple, élémentaire

- Un chemin (chaîne) est simple s'il ne contient pas deux fois le même arête (arc).
- Un chemin (chaine) est élémentaire s'il ne contient pas deux fois le même sommet.

Circuit, Cycle

- Un circuit est un chemin d'un sommet vers lui-même. En particulier une boucle est un circuit de longueur 1.
- Un cycle est une chaîne d'un sommet vers lui-même. En particulier une boucle est un circuit de longueur 1.

Graphe Connexe

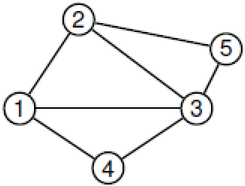
Définition : Graphe connexe

On dit qu'un graphe $G(S, A)$ est connexe, s'il existe un chemin entre tous paire de sommets

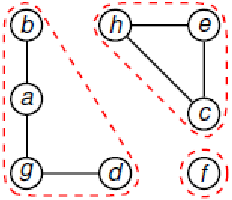
Graphe Connexe

Définition : Graphe connexe

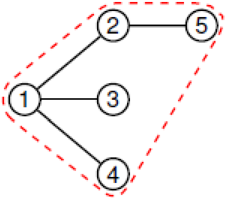
On dit qu'un graphe $G(S, A)$ est connexe, s'il existe un chemin entre tous paire de sommets



Graphe connexe,



Graphe non connexe,



Graphe connexe,

fortement connexe

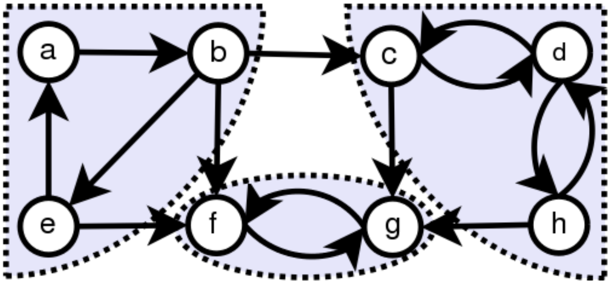
Définition

- La relation R définie par xRy ssi $x = y$ ou il existe un chemin de x vers y et de y vers x est une relation d'équivalence.
- Ses classes d'équivalence sont appelées les composantes fortement connexes de G
- G est fortement connexe s'il n'admet qu'une seule classe d'équivalence.

fortement connexe

Définition

- La relation R définie par xRy ssi $x = y$ ou il existe un chemin de x vers y et de y vers x est une relation d'équivalence.
- Ses classes d'équivalence sont appelées les composantes fortement connexes de G
- G est fortement connexe s'il n'admet qu'une seule classe d'équivalence.



Graphes Hamiltoniens et Euleriens

Définition : Hamiltonien

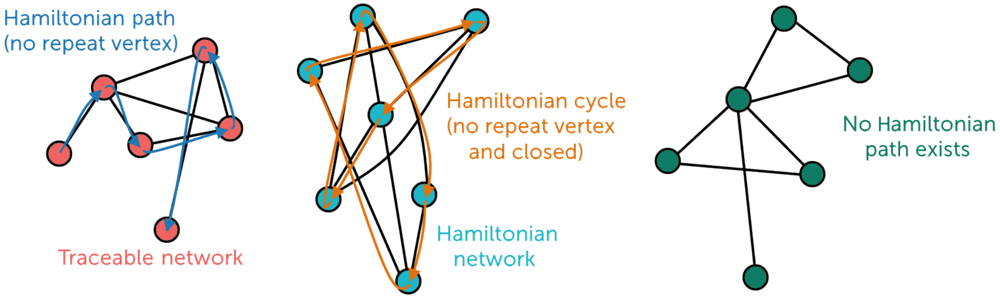
Un circuit (Chemin) est dit hamiltonien s'il est élémentaire et passe par tous les sommets du graphes.

Graphes Hamiltoniens et Euleriens

Définition : Hamiltonien

Un circuit (Chemin) est dit hamiltonien s'il est élémentaire et passe par tous les sommets du graphes.

Exemple :



Graphes Hamiltoniens et Euleriens

Définition : Eulérien

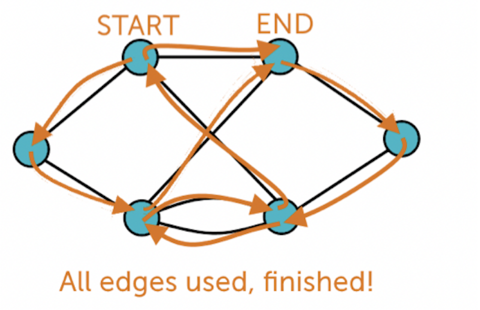
Un circuit (Chemin) est dit Eulérien s'il est simple et passe par tous les arcs (arètes) du graphe.

Graphes Hamiltoniens et Euleriens

Définition : Eulérien

Un circuit (Chemin) est dit Eulérien s'il est simple et passe par tous les arcs (arètes) du graphe.

Exemple :



Graphes Hamiltoniens et Euleriens

Remarque

- Si le degré de chaque sommet est $\geq \dfrac{n}{2}$, G est Hamiltonien.

Graphes Hamiltoniens et Euleriens

Remarque

- Si le degré de chaque sommet est $\geq \frac{n}{2}$, G est Hamiltonien.
- G soit Eulérien, s'il est connexe et que le degré de chaque sommet soit pair.

Graphes Hamiltoniens et Euleriens

Remarque

- Si le degré de chaque sommet est $\geq \frac{n}{2}$, G est Hamiltonien.
- G soit Eulérien, s'il est connexe et que le degré de chaque sommet soit pair.

Sous Graphe

Définition :

Soit le graphe $G(S, A)$,

- Sous graphe de G est un graphe $G'(S', A')$ tel que : $S' \subseteq S$ et $A' \subseteq A$

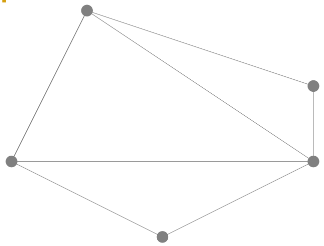
Sous Graphe

Définition :

Soit le graphe $G(S, A)$,

- Sous graphe de G est un graphe $G'(S', A')$ tel que : $S' \subseteq S$ et $A' \subseteq A$

Exemple :



Graphe G(S,A)

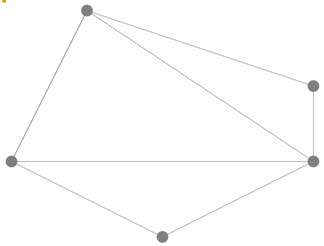
Sous Graphe

Définition :

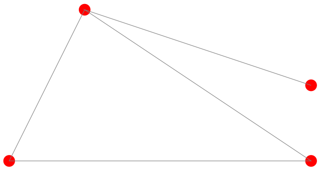
Soit le graphe $G(S, A)$,

- Sous graphe de G est un graphe $G'(S', A')$ tel que : $S' \subseteq S$ et $A' \subseteq A$

Exemple :



Graphe G(S,A)



G'(S',A') Sous-Graphe de G

Graphe Partiel

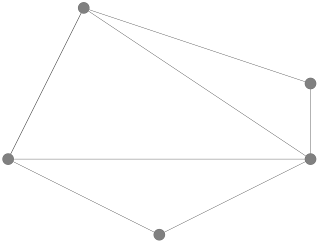
Définition :

Soit le graphe $G(S, A)$,
Le graphe partiel du graphe $G(S, A)$, orienté ou non, engendré par le sous-ensemble $A' \subset A$ est le graphe $G'(S, A')$.

Graphe Partiel

Définition :

Soit le graphe $G(S, A)$,
Le graphe partiel du graphe $G(S, A)$, orienté ou non, engendré par le sous-ensemble $A' \subset A$ est le graphe $G'(S, A')$.

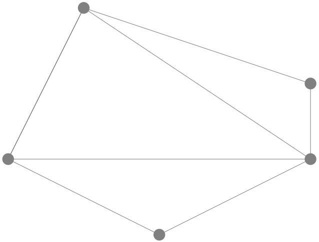


Graphe G(S,A)

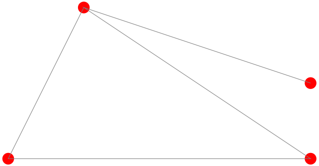
Graphe Partiel

Définition :

Soit le graphe $G(S, A)$,
Le graphe partiel du graphe $G(S, A)$, orienté ou non, engendré par le sous-ensemble $A' \subset A$ est le graphe $G'(S, A')$.



Graphe G(S,A)

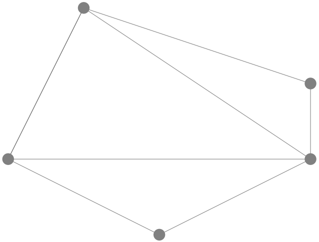


G'(S',A') Sous-Graphe de G

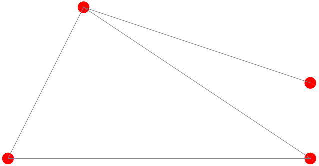
Graphe Partiel

Définition :

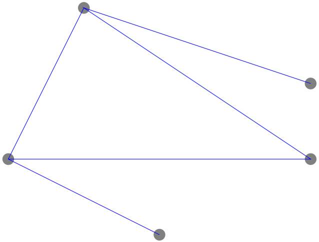
Soit le graphe $G(S, A)$,
Le graphe partiel du graphe $G(S, A)$, orienté ou non, engendré par le sous-ensemble $A' \subset A$ est le graphe $G'(S, A')$.



Graphe G(S,A)



G'(S',A') Sous-Graphe de G



G"(S,A") graphe partiel de G

Matrice d'adjacence

Définition

Soit $G(S, A)$ un graphe d'ordre $|S| = n$, on associe une matrice M de taille (n, n) dont les éléments sont notés m_{ij} tels que,

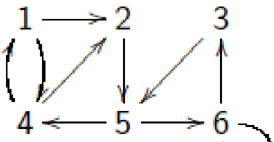
- $m_{ij} = 0$ si le sommet i n'est pas voisin du sommet j.
- $m_{ij} = 1$ si le sommet i est voisin du sommet j.

Matrice d'adjacence

Définition

Soit $G(S, A)$ un graphe d'ordre $|S| = n$, on associe une matrice M de taille (n, n) dont les éléments sont notés m_{ij} tels que,

- $m_{ij} = 0$ si le sommet i n'est pas voisin du sommet j.
- $m_{ij} = 1$ si le sommet i est voisin du sommet j.



(b)

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Fig.: Représentation d'un graphe à l'aide de sa matrice d'adjacence

Nombre de chemins

Définition

Soit M la matrice d'adjacence d'un graphe simple orienté comportant n sommets.
Le nombre de chemins de longueur p d'un sommet s_i à un sommet s_j est le nombre situé sur la i^{eme} ligne et la j^{eme} colonne de la matrice M^p

Nombre de chemins

Définition

Soit M la matrice d'adjacence d'un graphe simple orienté comportant n sommets.
Le nombre de chemins de longueur p d'un sommet s_i à un sommet s_j est le nombre situé sur la i^{eme} ligne et la j^{eme} colonne de la matrice M^p

Exemple : On pose,

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$\exists$ 2 chemins de longueur 3 qui associe s_2 à s_1.
$\exists$ 5 chemins de longueur 3 qui associe s_3 à s_2.

Nombre de chemins

Définition

Soit M la matrice d'adjacence d'un graphe simple orienté comportant n sommets.
Le nombre de chemins de longueur p d'un sommet s_i à un sommet s_j est le nombre situé sur la i^{eme} ligne et la j^{eme} colonne de la matrice M^p

Exemple : On pose,

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$\exists$ 2 chemins de longueur 3 qui associe s_2 à s_1.
$\exists$ 5 chemins de longueur 3 qui associe s_3 à s_2.

Définition

Soit M la matrice d'adjacence d'un graphe ayant n sommets $s_1, ..., s_n$, et $M^{[p]} = (M_{ij})$ la matrice booléenne d'exposant p.
Si $M_{ij} \neq 0$ alors, il existe au moins un chemin de longueur p reliant le sommet s_i au sommet s_j.

Fermeture transitive

Définition :

La fermeture transitive d'un graphe simple orienté notée $(S, T(A))$ les sommets et en ajoutant, si nécessaire les arcs (x, y) pour les quels il existe un chemin de x à y dans le graphe initial.

Fermeture transitive

Définition :

La fermeture transitive d'un graphe simple orienté notée $(S, T(A))$ les sommets et en ajoutant, si nécessaire les arcs (x, y) pour les quels il existe un chemin de x à y dans le graphe initial.

Exemple :

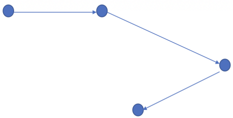
Fermeture transitive

Définition :

La fermeture transitive d'un graphe simple orienté notée $(S, T(A))$ les sommets et en ajoutant, si nécessaire les arcs (x, y) pour les quels il existe un chemin de x à y dans le graphe initial.

Exemple :

1)



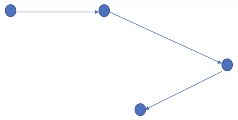
Fermeture transitive

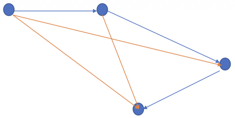
Définition :

La fermeture transitive d'un graphe simple orienté notée $(S, T(A))$ les sommets et en ajoutant, si nécessaire les arcs (x, y) pour les quels il existe un chemin de x à y dans le graphe initial.

Exemple :

1)





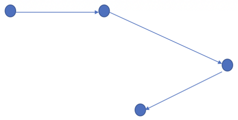
Fermeture transitive

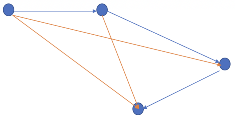
Définition :

La fermeture transitive d'un graphe simple orienté notée $(S, T(A))$ les sommets et en ajoutant, si nécessaire les arcs (x, y) pour les quels il existe un chemin de x à y dans le graphe initial.

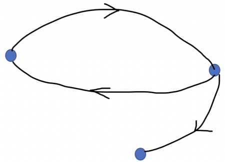
Exemple :

1)





2)



Fermeture transitive

Définition :

La fermeture transitive d'un graphe simple orienté notée $(S, T(A))$ les sommets et en ajoutant, si nécessaire les arcs (x, y) pour les quels il existe un chemin de x à y dans le graphe initial.

Exemple :

1)

2)

Fermeture transitive

Exemple (suite 1)

Soit M la matrice adjacente du deuxième graphe :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Fermeture transitive

Exemple (suite 1)

Soit M la matrice adjacente du deuxième graphe :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit $\hat{M}$ la matrice adjacente de sa fermeture transitive tel que,

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Fermeture transitive

Exemple (suite 1)

Soit M la matrice adjacente du deuxième graphe :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit $\hat{M}$ la matrice adjacente de sa fermeture transitive tel que,

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Comment obtenir $\hat{M}$ à partir de M ?

Fermeture transitive

Propriété :

Soient M la matrice d'adjacence d'un graphe à n sommets, et $\hat{M}$ la matrice d'adjacence de sa fermeture transitive. Alors,

$$\hat{M} = M \oplus M^{[2]} \oplus \cdots \oplus M^{[n]}$$

Fermeture transitive

Propriété :

Soient M la matrice d'adjacence d'un graphe à n sommets, et $\hat{M}$ la matrice d'adjacence de sa fermeture transitive. Alors,

$$\hat{M} = M \oplus M^{[2]} \oplus \cdots \oplus M^{[n]}$$

Exemple (suite 2)

On a,

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad M^{[2]} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad M^{[3]} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors,

$$\hat{M} = M \oplus M^{[2]} \oplus M^{[3]} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Arbre

Définition : Arbre

On appelle un Arbre tout graphe non orienté connexe et ne contient aucun cycle.

Arbre

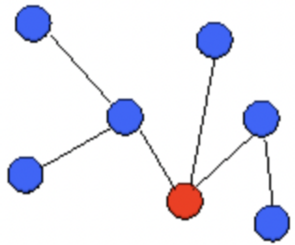
Définition : Arbre

On appelle un Arbre tout graphe non orienté connexe et ne contient aucun cycle.
Une forêt est un graphe non orienté, sans cycle.

Arbre

Définition : Arbre

On appelle un Arbre tout graphe non orienté connexe et ne contient aucun cycle.
Une forêt est un graphe non orienté, sans cycle.



Arbre

Arbre : Cas particuliers

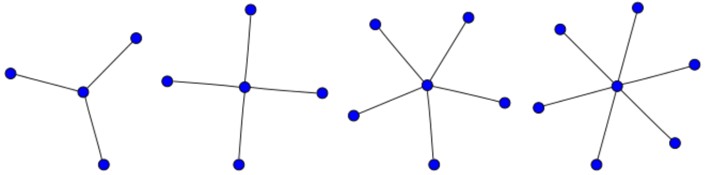


Figure : Etoile

Arbre : Cas particuliers

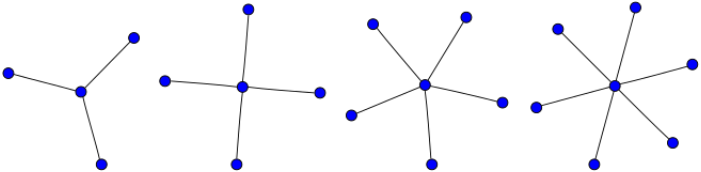


Figure : Etoile

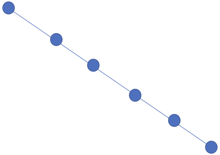


Figure : Chemin

Arbre : Cas particuliers

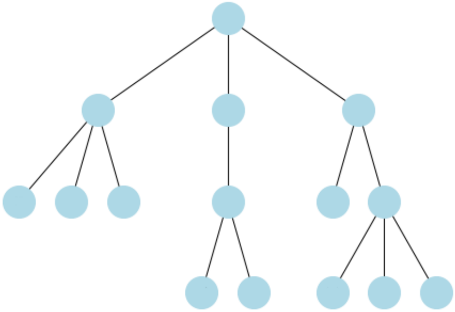


Figure : Arbre enraciné

Arbre

Théorème fondamentale des arbres

Soit $G = (S, A)$ un graphe à n sommets et m arêtes, alors,
G est un arbre $\Leftrightarrow$ G est connexe et sans cycle $\Leftrightarrow$ G est connexe et $m = n - 1$ $\Leftrightarrow$ G est sans cycle et $m = n - 1$ $\Leftrightarrow$ G est connexe minimal $\Leftrightarrow$ G est sans cycle maximale $\Leftrightarrow$ $\forall u, v \in S$, G contient un unique chemin entre u et v.

Arbre

Théorème fondamentale des arbres

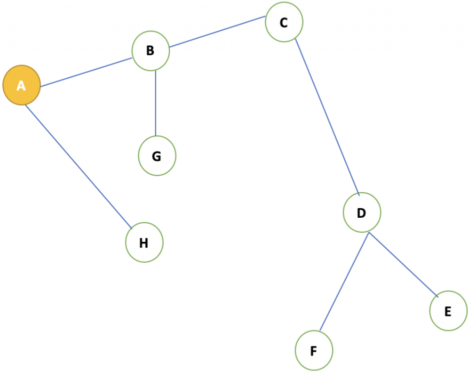
Soit $G = (S, A)$ un graphe à n sommets et m arêtes, alors,
G est un arbre $\Leftrightarrow$ G est connexe et sans cycle $\Leftrightarrow$ G est connexe et $m = n - 1$ $\Leftrightarrow$ G est sans cycle et $m = n - 1$ $\Leftrightarrow$ G est connexe minimal $\Leftrightarrow$ G est sans cycle maximale $\Leftrightarrow$ $\forall u, v \in S$, G contient un unique chemin entre u et v.

Remarque Soit $G = (S, A)$ un graphe, G est connexe si et seulement si G contient un arbre couvrant.

Racine

Définition : Racine

Il existe un unique sommet de degré entrant 0 qu'on appelle **racine**.



Arborescence

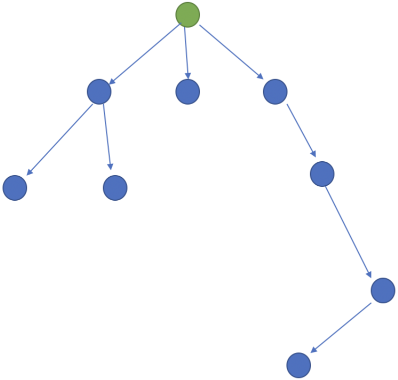
Définition

Une arborescence est un graphe orienté sans circuit admettant une racine $s_0 \in S$, telle que, pour tout autre sommet $s_i \in S$, il existe un chemin unique allant de s_0 vers s_i. Si l'arborescence comporte n sommets alors elle comporte exactement $n - 1$ arcs.

Arborescence

Définition

Une arborescence est un graphe orienté sans circuit admettant une racine $s_0 \in S$, telle que, pour tout autre sommet $s_i \in S$, il existe un chemin unique allant de s_0 vers s_i. Si l'arborescence comporte n sommets alors elle comporte exactement $n - 1$ arcs.



Graphe biparti

Définition

On dit qu'un graphe G = (S,A) est biparti si l'ensemble S des sommets peut être partitionné en deux sous-ensembles distincts S1 et S2 de telle sorte que :

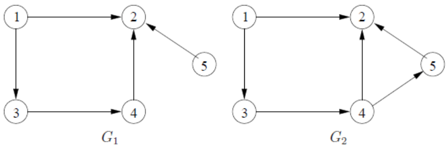
$$\forall (x,y) \in A \begin{cases} x \in S1 & \Rightarrow & y \in S2 \\ x \in S2 & \Rightarrow & y \in S1 \end{cases}$$

Graphe biparti

Définition

On dit qu'un graphe G = (S,A) est biparti si l'ensemble S des sommets peut être partitionné en deux sous-ensembles distincts S1 et S2 de telle sorte que :

$$\forall (x,y) \in A \begin{cases} x \in S1 & \Rightarrow \quad y \in S2 \\ x \in S2 & \Rightarrow \quad y \in S1 \end{cases}$$



On voit que G_1 est biparti avec $E_1 = \{1,4,5\}$ et $E_2 = \{2,3\}$. Le graphe G_2 n'est pas biparti.

Graphe planaire

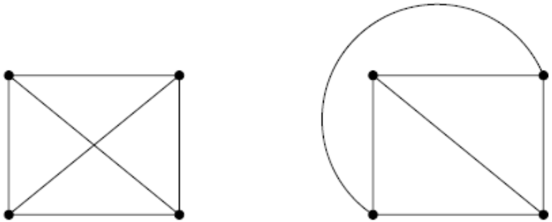
Définition

Un graphe G est planaire si il possède une représentation dans le plan telle que ses arêtes ne se coupent pas.

Graphe planaire

Définition

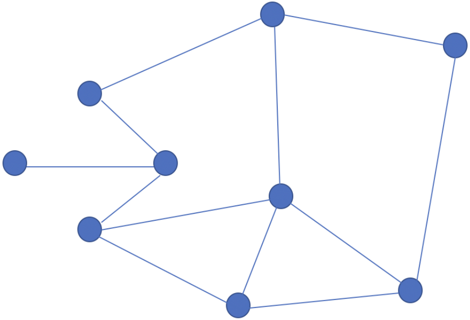
Un graphe G est planaire si il possède une représentation dans le plan telle que ses arêtes ne se coupent pas.



Parcours en Largeur

Principe :

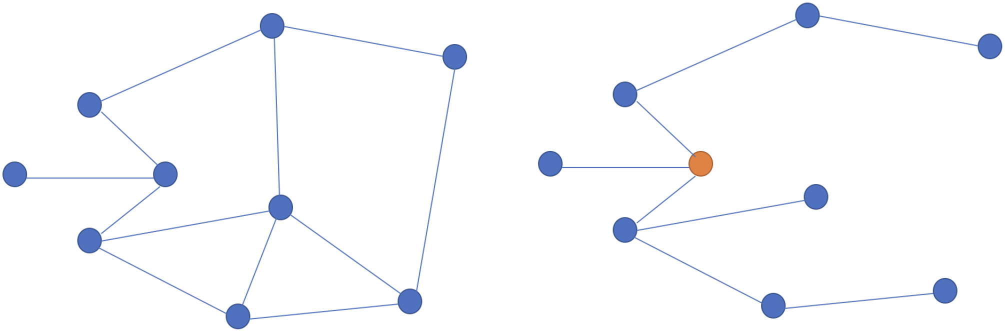
On se donne le graphe suivant,



Parcours en Largeur

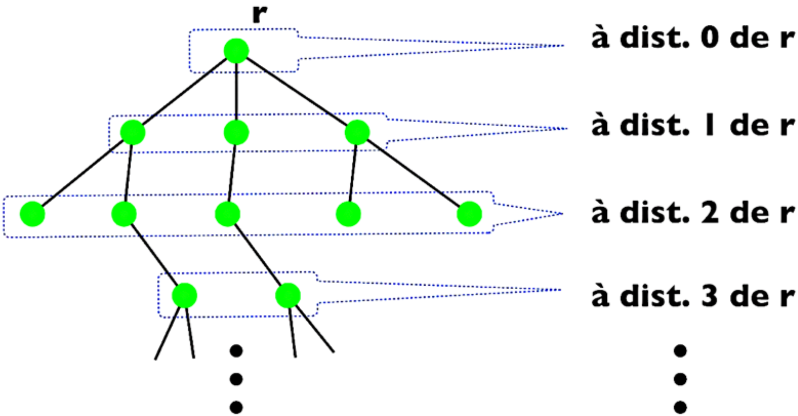
Principe :

On se donne le graphe suivant,



Parcours en Largeur

Résumé des étapes :



Parcours en Largeur

Algorithme de parcours en Largeur d'abord d'un graphe G en partant du sommet i. Cet algorithme utilise une file F et nécessite une méthode pour marquer les sommets. Au début, tous les sommets sont non marqués.

Parcours en Largeur

Algorithme de parcours en Largeur d'abord d'un graphe G en partant du sommet i. Cet algorithme utilise une file F et nécessite une méthode pour marquer les sommets. Au début, tous les sommets sont non marqués.

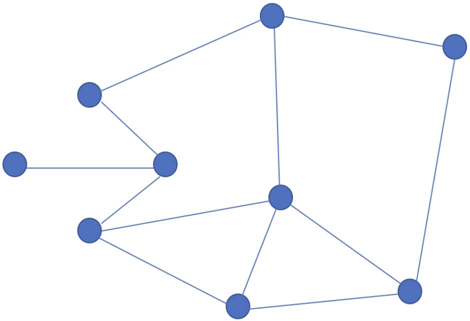
algorithme

Larg(G,i)
  $F \leftarrow \emptyset$;Marquer i; enfiler i dans F;
  Tant que $F \neq \emptyset$ faire
    $s \leftarrow$ Tête de F ; défiler F
    pour $w \in \Gamma^{+}(s)$ faire
      si w n'est pas marqué alors
        Marquer w; enfiler w dans P
      Fin si
    Fin pour
  Fin Tant que

Parcours en Profondeur

Principe :

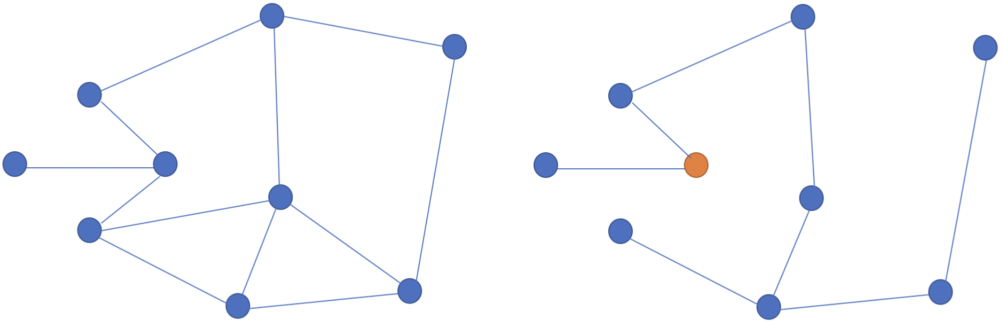
On prend le même graphe,



Parcours en Profondeur

Principe :

On prend le même graphe,



Parcours en Profondeur

Résumé des étapes :

- à partir d'un sommet *r*
  - Sommet courant. Le marquer comme étant visité
- Tant que c'est possible :
  - Aller vers un voisin, **non encore visité**, du sommet courant
  - Marquer ce voisin
  - Mémoriser l'arête par laquelle on est arrivé
- Si tous les voisins du sommet courant sont déjà visités :
  - Revenir vers le sommet par lequel il a été découvert (Backtrack)
- Phase de descente à partir du sommet courant
- Coincé sur le sommet de départ ?
  - Fin de l'algorithme

Parcours en Profondeur

Algorithme de parcours en profondeur d'abord d'un graphe G en partant du sommet i. Cet algorithme utilise une pile P et nécessite une méthode pour marquer les sommets. Au début, tous les sommets sont non marqués.

Parcours en Profondeur

Algorithme de parcours en profondeur d'abord d'un graphe G en partant du sommet i. Cet algorithme utilise une pile P et nécessite une méthode pour marquer les sommets. Au début, tous les sommets sont non marqués.

algorithme

Prof(G,i)
  $P \leftarrow \emptyset$; empiler i dans P;
  Tant que $P \neq \emptyset$ faire
    $s \leftarrow$ sommet de P ; marquer s ; dépiler P
    pour $w \in \Gamma^+(s)$ faire
      si w n'est pas marqué alors
        empiler w dans P
      Fin si
    Fin pour
  Fin Tant que

Problématique

Problématique

Le problème de coloration d'un graphe consiste à affecter à chaque sommet une couleur tel que :

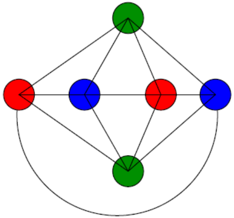
- Deux sommets adjacents ne soient pas porteurs de la même couleur.
- Utiliser le minimum de couleur

Problématique

Problématique

Le problème de coloration d'un graphe consiste à affecter à chaque sommet une couleur tel que :

- Deux sommets adjacents ne soient pas porteurs de la même couleur.
- Utiliser le minimum de couleur



Nombre chromatique

- Un graphe G est dit k-colorable si G possède une k-coloration.
- Le nombre chromatique est défini comme le nombre minimum de couleurs distincts nécessaires à la coloration des sommets de G.

Nombre chromatique

- Un graphe G est dit k-colorable si G possède une k-coloration.
- Le nombre chromatique est défini comme le nombre minimum de couleurs distincts nécessaires à la coloration des sommets de G.

Remarque

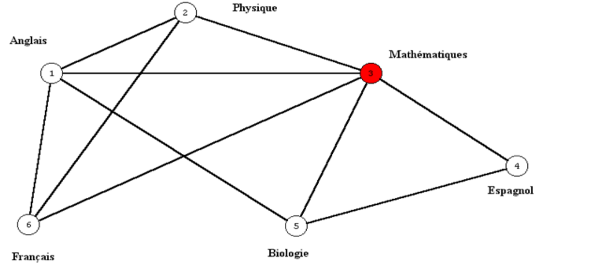
- Le problème de coloration pour un nombre chromatique > 2 a une complexité non polynomiale.
- Le problème de coloration a beaucoup d'applications :
  - Allocation des fréquences radios
  - Conception des puces électroniques
  - Réalisation des emplois du temps

Exemple

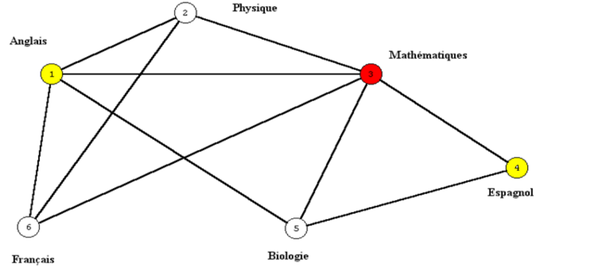
Cinq étudiants doivent passer des écrits d'examen.

- Radia en Anglais, Physique, Mathématiques
- Zineb en Espagnol, Biologie, Mathématiques
- Ahmed en Mathématiques, Français, Anglais
- Salah en Anglais, Biologie
- Adil en Physique, Français

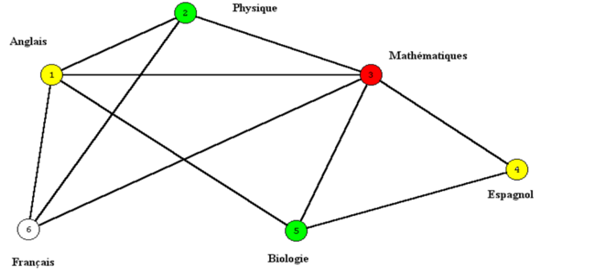
Si chaque écrit dure 1/2 journée, quel nombre minimal de jours doit-on prévoir?



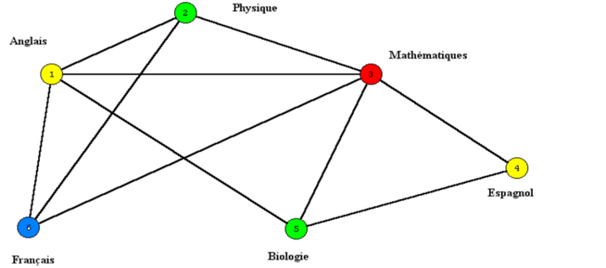
Sommet	M	A	P	F	B	E
Ordre	5	4	3	3	3	2
Couleur	R					



Sommet	M	A	P	F	B	E
Ordre	5	4	3	3	3	2
Couleur	R	J				J



Sommet	M	A	P	F	B	E
Ordre	5	4	3	3	3	2
Couleur	R	J	V		V	J



Sommet	M	A	P	F	B	E
Ordre	5	4	3	3	3	2
Couleur	R	J	V	B	V	J

En appliquant l'algorithme de coloration, il a fallu quatre couleurs pour colorier ce graphe.
le nombre chromatique de ce graphe est 4.
Il faudra donc 4 jours pour organiser cet examen.

Problème d'arbre couvrant minimale

Problématique

Lors de la phase de conception d'un circuit électrique, on a souvent besoin de relier entre elles les broches de composants électriquement équivalents.
Pour interconnecter un ensemble de n broches, on peut utiliser un arrangement de n ? 1 câbles, chacun reliant deux broches.
On peut modéliser ce problème de câblage à l'aide d'un graphe non-orienté connexe G = (S,A). S représente l'ensemble des broches, et pour chaque arête (u, v), on a un poids w(u, v) qui spécifie le coût (la longueur de câble nécessaire).

Problème d'arbre couvrant minimale

Problématique

Lors de la phase de conception d'un circuit électrique, on a souvent besoin de relier entre elles les broches de composants électriquement équivalents.
Pour interconnecter un ensemble de n broches, on peut utiliser un arrangement de n ? 1 câbles, chacun reliant deux broches.
On peut modéliser ce problème de câblage à l'aide d'un graphe non-orienté connexe G = (S,A). S représente l'ensemble des broches, et pour chaque arête (u, v), on a un poids w(u, v) qui spécifie le coût (la longueur de câble nécessaire).

On veut alors trouver un graphe partiel connexe et acyclique $G^{'} = (S, T)$ tel que :

$$w(T) = \sum_{(u,v)\in T} w(u, v)$$

dont le poids soit minimum.