RECHERCHE OPÉRATIONNELLE I

Analyse Post-Optimale des solutions

H. KHALFI
h.khalfi@usms.ma

A. METRANE
a.metrane@usms.ma

2 avril 2023

Introduction

Étant donnée un programme linéaire sous la forme vectorielle :

$$\begin{aligned} &\min \quad z = c^t x \\ &Ax \leq b \\ &x \geq 0 \end{aligned} \tag{1}$$

L'objectif de cette partie est de **décrire** l'impact sur la solution optimale si on apporte un changement à l'un des paramètres du modèle. Autrement dit, comment varie la solution ou encore la fonction objective si l'on modifie une entrée du vecteur c ou de b ou encore de la matrice

Introduction

Nous focaliserons notre analyse au cas suivant :

→ Le modèle modifié doit être une variante de celui d'origine en y changeant **seulement un c_i ou bien un b_j** (souplesse de présentation).

Introduction

Nous focaliserons notre analyse au cas suivant :

- → Le modèle modifié doit être une variante de celui d'origine en y changeant **seulement un** c_i **ou bien un** b_j (souplesse de présentation).
- → Le modèle d'origine doit permettre, **sans pivotages supplémentaires**, le calcul d'une solution optimale du modèle modifié.

Introduction

Nous focaliserons notre analyse au cas suivant :

→ Le modèle modifié doit être une variante de celui d'origine en y changeant **seulement un** c_i **ou bien un** b_j (souplesse de présentation).

→ Le modèle d'origine doit permettre, **sans pivotages supplémentaires**, le calcul d'une solution optimale du modèle modifié.

Nous essayons d'atteindre ces objectives à l'aide de l'exemple :

$$\max\ Z = 1000x_1 + 1200x_2$$

s.c.

$$\begin{array}{lcll} 10x_1 + 5x_2 & \leq & 200 & \text{Main d'oeuvre} \\ 2x_1 + 3x_2 & \leq & 60 & \text{Matière première} \\ x_1 & \leq & 34 & \text{Limite du produit 1} \\ x_2 & \leq & 14 & \text{Limite du produit 2} \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 & & & \end{array}$$

Problème (PLS)

$$\max\ Z = 1000x_1 + 1200x_2$$

s.c.

$$\begin{array}{cccccccc}
10x_1 & +5x_2 & +e_1 & & & & = & 200 \\
2x_1 & +3x_2 & & +e_2 & & & = & 60 \\
x_1 & & & & +e_3 & & = & 34 \\
 & +x_2 & & & & +e_4 & = & 14
\end{array}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, e_i \geq 0 \quad i = 1, \ldots, 4$$

V.B	$\times 1$	x2	e1	e2	e3	e4	b
e4	0	0	0.1	-0.5	0	1	4
X1	1	0	0.15	-0.25	0	0	15
e3	0	0	-0.15	0.25	1	0	19
X2	0	1	-0.1	0.5	0	0	10
C.j	0	0	-30	-350	0	0	27000

Figure – Solution optimale et tableau final

Conclusion

La solution optimale est $(x_1, x_2) = (15, 10)$ qui propose de produire 15 tonnes du produit 1 et 10 tonnes du produit 2 avec un profit de

$$Z = 1000 * 15 + 1200 * 10 = 27000$$

L’administration songe à augmenter ou baisser le prix du produit 1 et elle aimerait savoir si ce plan de production resterait optimale ?

L'administration songe à augmenter ou baisser le prix du produit 1 et elle aimerait savoir si ce plan de production resterait optimale ?

Question

Pour quelle valeur de K le point $(x_1, x_2) = (15, 10)$ restera une solution optimale du problème :

$$\max \ Z = Kx_1 + 1200x_2$$

s.c.

$$\begin{array}{cccccccc} 10x_1 & +5x_2 & +e_1 & & & & = & 200 \\ 2x_1 & +3x_2 & & +e_2 & & & = & 60 \\ x_1 & & & & +e_3 & & = & 34 \\ & +x_2 & & & & +e_4 & = & 14 \end{array}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, e_i \geq 0 \quad i = 1, \ldots, 4$$

Réponse

Posons $K = 1000 + \Delta$, Nous allons démarrer du dernier tableau en changeant la ligne des coûts c_j par $L_5 = -(1000 + \Delta, 1200, 0, 0, 0, 0)$

Réponse

Posons $K = 1000 + \Delta$, Nous allons démarrer du dernier tableau en changeant la ligne des coûts c_j par $L_5 = -(1000 + \Delta, 1200, 0, 0, 0, 0)$

V.B	$\times 1$	x2	e1	e2	e3	e4	b
e4	0	0	0.1	-0.5	0	1	4
X1	1	0	0.15	-0.25	0	0	15
e3	0	0	-0.15	0.25	1	0	19
X2	0	1	-0.1	0.5	0	0	10
C.j	$1000 + \Delta$	1200	0	0	0	0	0

Figure – Tableau de démarrage pour garder la même solution optimale

Nous effectuons Les opérations suivantes :

$$\begin{aligned} L_5' &= L_5 + (1000+\Delta)\, L_1 \quad &\Longrightarrow \quad L'5 = (0, -1200, 150 + 0.15\Delta, -250 - 0.25\Delta, 0, 0) \\ L_5'' &= L_5' + 1200\, L_2, \quad &\Longrightarrow \quad L_5'' = (0, 0, 30 + 0.15\Delta, 350 - 0.25\Delta, 0, 0) \end{aligned}$$

V.B	$\times 1$	x2	e1	e2	e3	e4	b
e4	0	0	0.1	-0.5	0	1	4
X1	1	0	0.15	-0.25	0	0	15
e3	0	0	-0.15	0.25	1	0	19
X2	0	1	-0.1	0.5	0	0	10
C.j	0	0	$-30 - 0.15\Delta$	$-350 + 0.25\Delta$	0	0	0

Figure – Tableau final pour le problème modifié

Cette solution de base est optimale pour le problème modifié si et seulement si tous les éléments de la ligne coût sont positive ou nuls.

$$-200 \leq \Delta \leq 1400 \iff 800 \leq K \leq 2400$$

Cette solution de base est optimale pour le problème modifié si et seulement si tous les éléments de la ligne coût sont positive ou nuls.

$$-200 \leq \Delta \leq 1400 \Longleftrightarrow 800 \leq K \leq 2400$$

Conclusion

Si on change le coût du produit 1 entre 800 et 2400, alors le plan de production $(x_1, x_2) = (15, 10)$ restera optimal, c'ad on va toujours produire 15 tonnes du produit 1 et 10 tonnes du produit 2 avec un profit $27000 + 15\Delta$.

Pour respecter les consignes de prévention d’une pandémie, le nombre d’heures disponible pour la main d’œuvre va diminuer. Comment cela va affecter le profit éventuelle ? (Est ce que l’opération reste rentable ?)

Pour respecter les consignes de prévention d'une pandémie, le nombre d'heures disponible pour la main d'œuvre va diminuer. Comment cela va affecter le profit éventuelle ? (Est ce que l'opération reste rentable ?)

Question

Sous la contrainte d'heure de main d'œuvre $\leq H$, quelle nouvelle répartition de produits (x_1, x_2), l'entreprise doit choisir pour réaliser un bénéfice maximal ?

$$\max\ Z = 1000x_1 + 1200x_2$$

s.c.

$$\begin{array}{cccccccc}
10x_1 & +5x_2 & +e_1 & & & & = & H \\
2x_1 & +3x_2 & & +e_2 & & & = & 60 \\
x_1 & & & & +e_3 & & = & 34 \\
 & +x_2 & & & & +e_4 & = & 14
\end{array}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, e_i \geq 0 \quad i = 1, \ldots, 4$$

Réponse

Posons $H = 200 + \Delta$, Nous allons démarrer du tableau initial du problème d'origine en ajoutant une colonne pour la variation de la ressource Δ

Réponse

Posons $H = 200 + \Delta$, Nous allons démarrer du tableau initial du problème d'origine en ajoutant une colonne pour la variation de la ressource Δ

$V.B.$	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4	B	Δ
x_1	10	5	1	0	0	0	200	1
x_2	2	3	0	1	0	0	60	0
e_3	1	0	0	0	1	0	34	0
e_4	0	1	0	0	0	1	14	0
c_j	1000	1200	0	0	0	0	0	0

Figure – Tableau de démarrage

Réponse

Posons $H = 200 + \Delta$, Nous allons démarrer du tableau initial du problème d'origine en ajoutant une colonne pour la variation de la ressource Δ

$V.B.$	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4	B	Δ
x_1	10	5	1	0	0	0	200	1
x_2	2	3	0	1	0	0	60	0
e_3	1	0	0	0	1	0	34	0
e_4	0	1	0	0	0	1	14	0
c_j	1000	1200	0	0	0	0	0	0

Figure – Tableau de démarrage

Nous observons que les colonnes de e_1 et Δ sont semblables. Cette propriété sera conservé d'une itération à l'autre.

V.B.	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4	B	Δ
x_1	1	0	0.15	−0.25	−0	0	15	0.15
x_2	0	1	−0.1	0.5	0	0	10	−0.1
e_3	0	0	−0.15	0.25	1	0	19	−0.15
e_4	0	0	0.1	−0.5	0	1	4	0.1
c_j	0	0	−30	−350	0	0	27000	30

Figure – Solution optimale et tableau final

La solution de base associée à ce tableau sera optimale si elle est réalisable. C'est à dire que chacune des variables de base est ≥ 0.

V.B.	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4	B	Δ
x_1	1	0	0.15	−0.25	−0	0	15	0.15
x_2	0	1	−0.1	0.5	0	0	10	−0.1
e_3	0	0	−0.15	0.25	1	0	19	−0.15
e_4	0	0	0.1	−0.5	0	1	4	0.1
c_j	0	0	−30	−350	0	0	27000	30

Figure – Solution optimale et tableau final

La solution de base associée à ce tableau sera optimale si elle est réalisable. C'est à dire que chacune des variables de base est ≥ 0.

Conclusion

La solution optimale est $(x_1 = 15 + 0.15\Delta, x_2 = 10 - 0.1\Delta)$ avec $-40 \leq \Delta \leq 100$. Cela signifie que l'entreprise doit opter pour la stratégie $x_1 \searrow$ et $x_2 \nearrow$.

Méthode du Simplexe revisité

Nous désirons revisiter les notions vu précédemment pour étudier rigoureusement la sensibilité de la solution optimale par rapport aux données du problème d'optimisation linéaire :

$$\begin{aligned} &\max z = c^t x \\ &Ax \leq b \\ &x \geq 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Méthode du Simplexe revisité

Nous désirons revisiter les notions vu précédemment pour étudier rigoureusement la sensibilité de la solution optimale par rapport aux données du problème d'optimisation linéaire :

$$\begin{aligned} &\max z = c^t x \\ &Ax \leq b \\ &x \geq 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Pour faire l'analyse post-optimale, il faut pouvoir exprimer la solution du simplexe par rapport aux données initiales du problème et non par rapport aux tableaux du simplexe qui change à chaque itération.

L'analyse post-optimale est aussi connue sous le nom d'analyse de sensibilité.

- $\rightarrow$ Introduisons les variables d'écart au problème (2)
- $\rightarrow$ Notons par A la nouvelle matrice de format $m \times (m+n)$
- $\rightarrow$ Faisons l'hypothèse que nous connaissons les variables de base B de la solution optimale x_B.
- $\rightarrow$ Retrouvons la nouvelle matrice du problème dans la base B et hors de la base N.
- $\rightarrow$ Exprimons la solutions du programme linéaire x_B

Évidemment, cette information provient du tableau final du simplexe, d'où le terme d'analyse post-optimale.

Notons par $B = \{x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_m}\}$ la liste des variables de base et par N son complémentaire par rapport à l'ensemble d'indices $\{1, 2, \dots m+n\}$. Par exemple, si $m = n = 3$ on a

$$B = \{x_1, x_5, x_2\},$$
$$N = \{x_3, x_4, x_6\}$$

À partir des ensembles B et N, nous pouvons extraire les sous-matrices suivantes de A :

- → A_B est la sous-matrice formée des colonnes correspondantes aux variables de B. On suit l'ordre spécifié par B.
- → A_N est la sous-matrice formée des colonnes correspondantes aux variables de N ordonnées selon N.

Considérant l'exemple :

$$\max \ Z = 1000x_1 + 1200x_2$$

s.c.

$$\begin{array}{cccccccc} 10x_1 & +5x_2 & +e_1 & & & & = & 200 \\ 2x_1 & +3x_2 & & +e_2 & & & = & 60 \\ x_1 & & & & +e_3 & & = & 34 \\ & +x_2 & & & & +e_4 & = & 14 \end{array}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, e_i \geq 0 \quad i = 1, \ldots, 4$$

Le système matriciel $Ax = b$ avec les variables écarts est :

$$\begin{bmatrix} 10 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 \\ 60 \\ 34 \\ 14 \end{bmatrix} \tag{3}$$

D’apres le tableau finale du simplexe :

$V.B.$	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4	B
x_1	1	0	0.15	-0.25	-0	0	15
x_2	0	1	-0.1	0.5	0	0	10
e_3	0	0	-0.15	0.25	1	0	19
e_4	0	0	0.1	-0.5	0	1	4
c_j	0	0	-30	-350	0	0	27000

D'apres le tableau finale du simplexe :

$V.B.$	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4	B
x_1	1	0	0.15	-0.25	-0	0	15
x_2	0	1	-0.1	0.5	0	0	10
e_3	0	0	-0.15	0.25	1	0	19
e_4	0	0	0.1	-0.5	0	1	4
c_j	0	0	-30	-350	0	0	27000

On a bien que $B = \{x_1, x_2, e_3, e_4\}$ et $N = \{e_1, e_2\}$. Les sous-matrices A_B et A_N s'écrivent

$$A_B = \begin{bmatrix} 10 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

D'apres le tableau finale du simplexe :

$V.B.$	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4	B
x_1	1	0	0.15	-0.25	-0	0	15
x_2	0	1	-0.1	0.5	0	0	10
e_3	0	0	-0.15	0.25	1	0	19
e_4	0	0	0.1	-0.5	0	1	4
c_j	0	0	-30	-350	0	0	27000

On a bien que $B = \{x_1, x_2, e_3, e_4\}$ et $N = \{e_1, e_2\}$. Les sous-matrices A_B et A_N s'écrivent

$$A_B = \begin{bmatrix} 10 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

À l'aide d'une partition par blocs selon les ensembles d'indices B et N, on peut écrire :

$$Ax = b \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} A_B & A_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = b \Longleftrightarrow A_B x_B + A_N x_N = b \tag{4}$$

L'écriture matricielle de l'exemple précédant devient :

$$\begin{bmatrix} 10 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 \\ 60 \\ 34 \\ 14 \end{bmatrix}$$

L'écriture matricielle de l'exemple précédant devient :

$$\begin{bmatrix} 10 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 \\ 60 \\ 34 \\ 14 \end{bmatrix}$$

On peut calculer algébriquement la solution

$$Ax = b \Longleftrightarrow A_B x_B + A_N x_N = b \Longleftrightarrow x_B + A_B^{-1} A_N x_N = A_B^{-1} b$$

En conclusion

$$x_B = A_B^{-1} \left(b - A_N x_N \right) \tag{5}$$

La matrice A_B est inversible puisque B est une base. En particulier, la solution optimale est donnée par la formule

$$x_B = A_B^{-1} b$$

car les variables hors-base doivent être nulles, $x_N = 0$.

Comment calculer la dernière ligne du tableau du simplexe ?

La réponse : On a que

$$z = c^t x = c_B^t x_B + c_N^t x_N$$

On substitue la valeur de $x_B = A_B^{-1}(b - A_N x_N)$

$$\begin{aligned} z &= c_B^t \left[A_B^{-1}(b - A_N x_N)\right] + c_N^t x_N \\ &= c_B^t A_B^{-1} b + c_N^t x_N - c_B^t A_B^{-1} A_N x_N \\ &= c_B^t A_B^{-1} b + \left[c_N^t - c_B^t A_B^{-1} A_N\right] x_N \end{aligned}$$

Le tableau du simplex peut être écrit alors :

$V.B.$	x_B	x_N	B
x_B	I	$A_B^{-1} A_N$	$A_B^{-1} b$
c_j	0	$\left[c_N^t - c_B^t A_B^{-1} A_N\right]$	$-c_B^t A_B^{-1} b$

Le tableau précédant sera donc optimale si

→ La solution de base est réalisable,

$$A_B^{-1} b \geq 0 \tag{6}$$

→ Les couts réduits sont tous negatifs,

$$c_N^t - c_B^t A_B^{-1} A_N \leq 0$$

Analysons l'effet d'une modification du vecteur b. Autrement dit, il s'agit d'étudier le comportement de la solution pour le problème modifié lorsque que l'on change b par $\tilde{b} = b + \Delta b$.

$$\begin{aligned} &\max\ z = c^t x \\ &Ax \leq \tilde{b} \\ &x \geq 0 \end{aligned} \tag{7}$$

Analysons l'effet d'une modification du vecteur b. Autrement dit, il s'agit d'étudier le comportement de la solution pour le problème modifié lorsque que l'on change b par $\tilde{b} = b + \Delta b$.

$$\begin{aligned} &\max\ z = c^t x \\ &Ax \leq \tilde{b} \\ &x \geq 0 \end{aligned} \tag{7}$$

Soit B les variables de base de la solution du problème d'origine où la solution est donnée par $x_B = A^{-1}b$.

Sous quelle condition on aura que la base B demeure optimale ?

La réponse : Il faut remarquer que le vecteur b n'apparait que dans la condition d'optimalité (6) du problème d'origine. Par conséquent, les variables de la base B demeurent optimales pour le problème modifié si

$$A_B^{-1}\tilde{b} \geq 0 \iff A_B^{-1}\Delta b \geq -A_B^{-1}b \tag{8}$$

Exemple

Considérant l'exemple :

$$\max \ Z = 1000x_1 + 1200x_2$$

s.c.

$$\begin{array}{ccccccc} 10x_1 & +5x_2 & +e_1 & & & & = & 200 \\ 2x_1 & +3x_2 & & +e_2 & & & = & 60 \\ x_1 & & & & +e_3 & & = & 34 \\ & +x_2 & & & & +e_4 & = & 14 \end{array}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, e_i \geq 0 \quad i = 1, \ldots, 4$$

Les données sont (avec les variables d'écart)

$$A_B = \begin{bmatrix} 10 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 200 \\ 60 \\ 34 \\ 14 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1000 \\ 1200 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Puisque $B = \{x_1, x_2, e_3, e_4\}$ est une base. On a donc

$$A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0.15 & -0.25 & 0 & 0 \\ -0.1 & 0.5 & 0 & 0 \\ -0.15 & 0.25 & 1 & 0 \\ 0.1 & -0.5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcul de x_B :

$$x_B = A_B^{-1} b = \begin{bmatrix} 0.15 & -0.25 & 0 & 0 \\ -0.1 & 0.5 & 0 & 0 \\ -0.15 & 0.25 & 1 & 0 \\ 0.1 & -0.5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 200 \\ 60 \\ 34 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 10 \\ 19 \\ 4 \end{bmatrix} \geq 0$$

Calcul des couts réduits $c_N^t - c_B^t A_B^{-1} A_N$:

$$c_N^t - c_B^t A_B^{-1} A_N = [0,0] - [1000, 1200, 0, 0] \begin{bmatrix} 0.15 & -0.25 & 0 & 0 \\ -0.1 & 0.5 & 0 & 0 \\ -0.15 & 0.25 & 1 & 0 \\ 0.1 & -0.5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= [0,0] - [1000, 1200, 0, 0] \begin{bmatrix} 0.15 & -0.25 \\ -0.1 & 0.5 \\ -0.15 & 0.25 \\ 0.1 & -0.5 \end{bmatrix} = -[30, 380] \leq 0$$

Donc la solution $(x_1, x_2) = (15, 10)$ est optimale, i.e. $x = (15, 10, 19, 4, 0, 0)$.

Calcul des couts réduits $c_N^t - c_B^t A_B^{-1} A_N$:

$$c_N^t - c_B^t A_B^{-1} A_N = [0,0] - [1000, 1200, 0, 0] \begin{bmatrix} 0.15 & -0.25 & 0 & 0 \\ -0.1 & 0.5 & 0 & 0 \\ -0.15 & 0.25 & 1 & 0 \\ 0.1 & -0.5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= [0,0] - [1000, 1200, 0, 0] \begin{bmatrix} 0.15 & -0.25 \\ -0.1 & 0.5 \\ -0.15 & 0.25 \\ 0.1 & -0.5 \end{bmatrix} = -[30, 380] \leq 0$$

Donc la solution $(x_1, x_2) = (15, 10)$ est optimale, i.e. $x = (15, 10, 19, 4, 0, 0)$.
Si $b^t \rightarrow \tilde{b}^t = \begin{bmatrix} 200 + \Delta & 60 & 34 & 14 \end{bmatrix}$. Alors

$$\tilde{x}_B = A_B^{-1}(\tilde{b}) = \overbrace{A_B^{-1} b}^{x_b} + A_B^{-1} \begin{bmatrix} \Delta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 10 \\ 19 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.15\Delta \\ -0.1\Delta \\ -0.15\Delta \\ 0.1\Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 + 0.15\Delta \\ 10 - 0.1\Delta \\ 19 - 0.15\Delta \\ 4 + 0.1\Delta \end{bmatrix}$$

On aura que $\tilde{x}_B \geq 0$ si et seulement si la nouvelle solution optimale est positive. On obtient l'intervalle pour le paramètre b_1 : $-40 \leq \Delta \leq 100$

En regardant seulement un changement de b_2 on aura d'une façon similaire : On pose $b^t \to \tilde{b}^t = \begin{bmatrix} 200 & 60+\Delta & 34 & 14 \end{bmatrix}$. Alors

$$\tilde{x}_B = A_B^{-1}(\tilde{b}) = \overbrace{A_B^{-1}b}^{x_b} + A_B^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ \Delta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 10 \\ 19 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.25\Delta \\ 0.5\Delta \\ 0.25\Delta \\ -0.5\Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15-0.25\Delta \\ 10+0.5\Delta \\ 19+0.25\Delta \\ 4-0.1\Delta \end{bmatrix}$$

On aura que $\tilde{x}_B \geq 0$ si et seulement si la nouvelle solution est positive. On obtient l'intervalle pour le paramètre b_2 : $-20 \leq \Delta \leq 40$

Quel sera l'effet sur la valeur de la fonction objective ?

On a que

$$z(\tilde{b_2}) = c_B^t \tilde{x}_B + c_N^t \tilde{x}_N = c_B^t \tilde{x}_B = [1000, 1200, 0, 0] \begin{bmatrix} 15-0.25\Delta \\ 10+0.5\Delta \\ 19+0.25\Delta \\ 4-0.1\Delta \end{bmatrix} = 27000 + 350\Delta$$

Pour $z(\tilde{b_1}) = 27000 + 30\Delta$

On désire trouver la condition qui assure que la base B demeure optimale si l'on change $c \to \tilde{c} = c + \Delta$.
En premier, on observe que la solution $x_B = A_B^{-1} b$ reste inchangée. Mais le tableau du simplexe peut perdre le caractère optimal. Pour cela, on doit imposer la condition de stabilité

$$\tilde{c}_N^t - \tilde{c}_B^t A_B^{-1} A_N \leq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (c + \Delta c)_N^t - (c + \Delta c)_B^t A_B^{-1} A_N \leq 0$$

Dans ce qui suit on va étudier l'effet d'une modification pour une seule variable x_i :

$$c_i \to \tilde{c}_i = c_i + \Delta$$

Il y a 2 cas à analyser :

- $\to$ x_i est une variable hors-base.
- $\to$ x_i est une variable de base,

Cas d'une variable de base

Le vecteur $\tilde{c}_N^t - \tilde{c}_B^t A_B^{-1} A_N$ s'écrit

$$
\begin{aligned}
&c_N^t - \left(c_B^t A_B^{-1} A_N\right) - \Delta\, E_i^t A_B^{-1} A_N \leq 0 \\
&r_N - \Delta E_i^t A_B^{-1} A_N \leq 0 \\
&r_N - \Delta \times \text{ ligne i de } A_B^{-1} A_N \leq 0
\end{aligned}
$$

Avec ces conditions, on obtient l'intervalle de stabilité sur Δ

Rappelons le tableau final :

$V.B.$	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	e_4	B
x_1	1	0	0.15	-0.25	-0	0	15
x_2	0	1	-0.1	0.5	0	0	10
e_3	0	0	-0.15	0.25	1	0	19
e_4	0	0	0.1	-0.5	0	1	4
c_j	0	0	-30	-350	0	0	27000

Intervalle pour c_1 :
On pose $\tilde{c}_1 = c_1 + \Delta = 1000 + \Delta$. La condition s'écrit :

$r_N - \Delta\times$ ligne 1 de $A_B^{-1}A_N = [-30, -380] - \Delta[0.15, -0.25] = [-30 - 0.15\Delta, -380 + 0.25\Delta] \leq 0$

Cas d'une variable hors-base

La composante *i* du vecteur $\tilde{c}_N^t - \tilde{c}_B^t A_B^{-1} A_N$ s'écrit

$$\begin{aligned}
&c_i + \Delta - \left(c_B^t A_B^{-1} A_N\right)_i \leq 0 \\
&\Delta \leq -\left(c_i - \left(c_B^t A_B^{-1} A_N\right)_i\right) = -r_i \\
&\tilde{c}_i \leq c_i - r_i
\end{aligned}$$

où les r_i sont les composantes de la dernière ligne du tableau du simplexe. Autrement dit, nous avons toute l'information pour calculer les intervalles de stabilité des coefficients c_i

Dans notre exemple, les variables hors base ont tous des couts nulles.

Exemple

Prenons un autre exemple :

$$\min z = x_1 + \frac{3}{2}x_2 + 3x_3$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 10 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Exemple

Prenons un autre exemple :

$$\min z = x_1 + \tfrac{3}{2}x_2 + 3x_3$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 10 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$V.B.$	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	B
x_1	1	0	3	-2	1	2
x_2	0	1	-1	1	-1	4
c_j	0	0	$3/2$	$1/2$	$1/2$	8

Figure – Le tableau final du simplexe pour l'exemple ci-dessus.

Les données sont (avec les variables d'écart)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 3/2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_N = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

donc

$$A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcul des couts réduits $c_N^t - c_B^t A_B^{-1} A_N$:

$$\begin{aligned} c_N^t - c_B^t A_B^{-1} A_N &= [3,0,0] - [1,3/2] \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= [3,0,0] - [1,3/2] \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= [3,0,0] - [3/2, -1/2, -1/2] \\ &= [3/2, 1/2, 1/2] \geq 0 \qquad \text{(problème de min)} \end{aligned}$$

Donc la solution $x_B = (2,4)$ est optimale, i.e. $x = (2,4,0,0,0)$.

La dernière ligne fournit le vecteur des couts réduits : $r = (0, 0, 3/2, 1/2, 1/2)$ Les variables de base sont $B = \{x_1, x_2\}$ et celles hors-base $N = \{x_3, e_1, e_2\}$. La fonction objective est de la forme

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_3 + c_3 x_3$$

avec $c_1 = 1, c_2 = 3/2$ et $c_3 = 3$. Nous avons seulement la possibilité de perturber x_3. Calculons l'intervalle de stabilité autour de c_3 associé à la variable hors-base x_3. La condition de stabilité est

$$\tilde{c}_3 \geq c_3 - r_3 = 3 - 3/2 = 3/2 \iff \tilde{c}_3 \geq 3/2$$

La solution optimale $x = (2, 4, 0, 0, 0)$ est la même pour toutes les valeurs $\tilde{c}_3 \geq 3/2$. De plus, la valeur de la fonction objective $(z = 8)$ demeure inchangée car la variable est hors-base.

EXEMPLE

Reprenons l'exemple précédent à l'itération finale du simplexe :

$V.B.$	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	B
x_1	1	0	3	-2	1	2
x_2	0	1	-1	1	-1	4
c_j	0	0	$3/2$	$1/2$	$1/2$	8

ou bien sous forme matricielle :

$$= \begin{array}{|c|c|c|} \hline x_B & x_N & B \\ \hline I & A_B^{-1}A_N & A_B^{-1}b \\ \hline 0 & r_N & -c_B^t x_B \\ \hline \end{array}$$

Intervalle pour c_1 :
On pose $\tilde{c}_1 = c_1 + \Delta = 1 + \Delta$. La condition s'écrit :

$$r_N - \Delta \times \text{ ligne 1 de } A_B^{-1}A_N = (3/2, 1/2, 1/2) - \Delta(3, -2, 1) = (3/2 - \Delta, 1/2 + 2\Delta, 1/2 - \Delta) \geq 0$$

Sachant que $c_1 = 1$, on trouve

$$-\frac{1}{4} \leq \Delta \leq \frac{1}{2} \Longrightarrow \frac{3}{4} \leq \tilde{c}_1 \leq 3/2$$

et que z est changé en

$$z = c_B^t x_B = (1 + \Delta, 3/2) \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 8 + 2\Delta$$

Par conséquent, on observe bien que

$$\frac{\partial z}{\partial c_1} = \bar{x}_1 = 2$$

Intervalle pour c_2 On pose $\tilde{c}_2 = c_2 + \Delta = 3/2 + \Delta$ La condition s'écrit

$r_N - \Delta \times$ ligne 2 de $A_B^{-1} A_N = (3/2, 1/2, 1/2) - \Delta(-1, 1, -1) = (3/2 + \Delta, 1/2 - \Delta, 1/2 + \Delta) \geq 0$

Sachant que $c_2 = 3/2$, on trouve

$$-\frac{1}{2} \leq \Delta \leq \frac{1}{2} \Longrightarrow 1 \leq \tilde{c}_2 \leq 2$$

et que z est changé en

$$z = c_B^t x_B = (1, 3/2 + \Delta) \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 8 + 4\Delta$$

Par conséquent, on observe bien que

$$\frac{\partial z}{\partial c_2} = \bar{x}_2 = 4$$

Intervalle de stabilité Maximale?

Nous poursuivons l'analyse de l'exemple précédent à la limite de l'intervalle de stabilité de c_2 : $1 \leq \tilde{c}_2 \leq 2$.
Nous posons $\tilde{c}_2 = 2$, et nous voulons savoir ce qui se passe au-delà de cette valeur.

Il faudra reprendre le tableau du simplexe en mettant à jour la dernière ligne. Pour cela, il suffit d'évaluer $c_N^t - c_B^t A_B^{-1} A_N$ avec la nouvelle valeur de c_2

$$c_N^t - c_B^t A_B^{-1} A_N = (3,0,0) - (1,2) \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = (3,0,0) - (1,0,-1) = (2,0,1)$$

et z est changé en

$$z = c_B^t x_B = (1,2) \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 10$$

Par conséquent, on obtient le nouveau tableau du simplexe

$V.B.$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	B
x_1	1	0	3	-2	1	2
x_2	0	1	-1	1	-1	4
c_j	0	0	2	0	1	10

On fait entrer la variable x_4 dans la base $B = \{x_1, x_2\}$ et qui ne va pas modifier la valeur de z. On pivote autour de la deuxième ligne.

On trouve :

$V.B.$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	B
x_1	1	2	1	0	-1	10
x_4	0	1	-1	1	-1	4
c_j	0	0	2	0	1	10

Le nouveau sommet sera $\tilde{x} = (10, 0, 0, 4, 0)$ avec les variables de base $\tilde{B} = \{x_1, x_4\}$. Ainsi, on peut recommencer la procédure de calcul de l'intervalle de stabilité autour de c_2. La variable x_2 est hors-base. Un simple calcul montre

$$\tilde{c}_2 \geq c_2 - r_2 = 2 - 0 = 2 \Longrightarrow \tilde{c}_2 \geq 2$$

Par conséquent, la solution (10,0,0,4,0) sera optimale pour toutes les valeurs supérieures à 2. La valeur de z reste inchangée.