TD 1

Exercice 1 :
Un agriculteur doit choisir entre deux types d'engrais A et B pour fertiliser ses terres qui requièrent par hectare au moins 60kg de potassium, 120kg de calcium et 90kg de sodium. Sachant que les paquets de A (respectivement de B) contiennent 1kg de potassium, 3kg de calcium et 3kg de sodium (respectivement 2kg de potassium, 2kg de calcium et 1kg de sodium). Calculer les quantités optimales de A et B à utiliser par hectare lorsque les paquets de A et B valent chacun 100dh.

Exercice 2 :
On se propose de réaliser une alimentation économique pour des bestiaux, qui contient obligatoirement 4 sortes de composants nutritifs, A, B, C et D. L'industrie alimentaire produit précisément deux aliments M et N qui contiennent ces composants : 1Kg d'aliment M contient 100g de A, 100g de C, 200g de D ; 1Kg d'aliment N contient 100g de B, 200g de C, 100g de D. Un animal doit consommer par jour au moins : 0.4 Kg de A ; 0.6 Kg de B ; 2 Kg de C ; 1.7 Kg de D. L'aliment M coûte 100 DH le Kg et N coûte 40 DH le Kg. Quelles quantités d'aliments M et N doit-on utiliser par jour et par animal pour réaliser l'alimentation la moins coûteuse ?

Exercice 3 :
- Chaque jour, l'ONCF peut faire partir d'une gare des trains rapides et des express.

Un rapide comporte 1 voitures postale(s), 5 wagons de 2ème classe, 7 wagons de 1ère classe et 9 wagon(s) couchettes.

Un express comporte 2 voiture postale(s), 4 wagons de 2ème classe, 7 wagons de 1ère classe et 6 wagon (s) de couchettes.

On dispose chaque jour de 12 voitures postales, 30 wagons de 2ème classe, 119 de 1ère classe et 81 de couchettes.

— un wagon de 2ème classe contient 52 voyageurs ;
— un wagon de 1ère classe : 41 ;
— un wagon de couchettes : 34.

Combien de rapides et combien d'express faut-il faire partir chaque jour pour que le nombre de voyageurs transportés soit maximum ?

Exercice 4 :
Une entreprise fabrique trois types de jus : Jus d'orange, Jus de mangue et jus de fruits à partir des trois matières premières sucre, concentré (sirop) et additives-arôme.

— 1 litre de jus d'orange nécessite 100g de sucre, 30g de concentré et 4 unités additives-arôme.
— 1 litre de jus de mangue nécessite 80g de sucre, 45g de concentré et 6 unités additives-arôme.
— 1 litre de jus de fruits nécessite 120g de sucre, 40g de concentré et 7 unités additives-arôme.

L'entreprise dispose de 1 tonne de sucre, 350kg de concentré et 6000 unités d'additives-arôme. Le commercial de cette entreprise nous informe qu'il faut produire au moins 7000 litre entre le jus d'orange et le jus de fruit et il ne faut pas dépasser 3000 litre de jus de mangue. En plus, le nombre de litre de jus d'orange doit être plus grand que le double de nombre de litre de jus de fruit.
La marge sur 1 litre de jus d'orange et de 2dh, 1 litre de jus de mangue et 2,5dh et 1 litre de jus de fruits et 3dh. Construire un modèle linéaire qui réalise le maximum de bénéfice.

N.B 1tonne = 1000 Kg

<u>Exercice 5 :</u> - Formuler les problèmes ci-dessous en programmes linéaires sous formes standard :

-
$$
\begin{aligned}
\text{Max } z &= 2x_1 - x_2 \\
\frac{1}{3}x_1 + x_2 &= 2 \\
-2x_1 + 5x_2 &\leq 7 \\
x_1 + x_2 &\leq 4 \\
x_1 &\geq 0 \\
x_2 &\in \mathbb{R}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

-
$$
\begin{aligned}
\text{Min } z = -3x_1 + x_3 & \\
x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 \quad & -3x_3 \geq 2 \\
4x_2 + x_3 \quad & = 5 \\
x_1, \quad & x_3 \geq 0 \\
x_2 \quad & \leq 0
\end{aligned}
\tag{2}
$$

-
$$
\begin{aligned}
\text{Min } z &= 2x_1 - 3x_2 \\
x_2 &\geq -3 \\
2x_1 - x_2 &= 2 \\
-x_1 + 3x_2 &\geq 1 \\
x_1 &\geq 0
\end{aligned}
\tag{3}
$$

-
$$Max\ z = x_1 + 2x_2 - x_3$$

$$
\begin{array}{lrcl}
s.c & -x_1 + 2x_2 + 3x_3 & \geq & -4 \\
& 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 & \geq & 5 \\
& x_1 + x_2 + x_3 & = & 2 \\
& x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 1 \text{ et } x_3 & \in & \mathbb{R}
\end{array}
$$

-
$$Max\ z = \min\{-5X_1 + X_2 + X_3, -7X_1 + 6X_2 + 10X_3, 13X_1 - 2X_2 + 6X_3\}$$

$$
\begin{array}{lrcl}
s.c & X1 + X2 + X3 & = & 24000 \\
& X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0 \text{ et } X_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

<u>Exercice 6</u> : - Considérons le modèle de programmation linéaire suivant (P) où l'objectif propose la maximisation d'une fonction linéaire

$$Min\ Z = -3x_1 + x_2$$

sous les contraintes

$$
\begin{array}{rcl}
4x_1 - 3x_2 & \leq & 24 \\
3x_1 + x_2 & \geq & 12 \\
3x_1 + 2x_2 & \leq & 35 \\
6x_1 - x_2 & \leq & 50 \\
x_1 & \geq & x_2 \\
x_1,\ x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

1. Tracer sur un graphe cartésien la région admissible de ce modèle linéaire. Calculer les coordonnées de chaque point extrême.
2. Évaluer la fonction objectif Z en chacun des sommets de la région admissible. Trouvez la solution optimale (ou les solutions optimales) de (P).

Exercice 7 :
Considérons le modèle de programmation linéaire suivant (P) où l'objectif propose la maximisation d'une fonction linéaire

$$Max\ Z = x_1 + 2x_2$$

sous les contraintes

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 &\leq 12 \\ 3x_1 + 5x_2 &\leq 52 \\ x_1 + x_2 &\leq 14 \\ x_1 &\leq 12 \\ x_1,\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

1. Tracer sur un graphe cartésien la région admissible de ce modèle linéaire. Calculer les coordonnées de chaque point extrême.
2. Évaluer la fonction objectif Z en chacun des sommets de la région admissible. Trouvez la solution optimale (ou les solutions optimales) de (P).
3. Résoudre ce problème à l'aide de l'algorithme du simplexe.

Exercice 8 :
Résoudre ce problème à l'aide de l'algorithme du simplexe les problèmes suivants :

1. $$Max\ z = \frac{3}{2}x_1 + x_2$$

$$s.c \qquad \begin{aligned} \frac{5}{2}x_1 + 5x_2 &\leq 150 \\ 5x_1 + 2x_2 &\leq 120 \\ x_1 \geq 0 \text{ et } x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

2. $$Max\ z = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

$$s.c \qquad \begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 &\leq 4 \\ 2x_1 + 2x_3 &\leq 5 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &\leq 7 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \text{ et } x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Exercice 9 :
- Voici un tableau de l'algorithme du simplexe associé à un problème d'optimisation linéaire. L'algorithme est-il terminé ?

variables de base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	e_1	e_2	e_3	B
x_5	1	$9/13$	$19/13$	$1/13$	1	$1/13$	0	0	$85/13$
e_2	-4	$-123/13$	$-173/13$	$125/13$	0	$-18/13$	1	0	$1525/13$
e_3	0	$21/13$	$27/13$	$232/13$	0	$-2/13$	0	1	$2300/13$
c_j	-14	$-\frac{125}{13}$	$-\frac{898}{13}$	$\frac{548}{13}$	0	$-\frac{50}{13}$	0	0	$-\frac{4250}{13}$

- Voici le dernier tableau d'un problème d'optimisation linéaire :

variables de base	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	B
e_1	$26/5$	$14/5$	0	1	$-4/5$	0	156
x_3	$11/15$	$14/15$	1	0	$1/15$	0	$1/3$
e_3	$29/5$	$-44/5$	0	0	$-6/5$	1	299
c_j	$-\frac{56}{3}$	$-\frac{71}{3}$	0	0	$-\frac{10}{3}$	0	$Z-\frac{50}{3}$

(4)

Que pouvez-vous conclure ?

H. KHALFI & A. METRANE