Contrôle N°1

DIRECTIVES :

Durée : 2h15, aucune documentation n'est permise.
Vous êtes invités à porter une attention particulière à la rédaction,
réfléchissez bien avant de faire des calculs fastidieux !

Question de Cours : (4.5 pts)

1. Soit le problème : max $c^t \cdot x$ sous contraintes $Ax <= b$ où A est une matrice de taille $p \times q$, c de taille $q \times 1$, et b de taille $p \times 1$. Quelle est le nombre de variables de base ? et celui des variables hors base ? **(1 pt)**
2. Donner un exemple d'un programme linéaire de deux variables qui n'a pas de solutions. **(0,5 pt)**
3. Comment choisir la variable entrante pour un problème de minimisation ? **(0,5 pt)**
4. Pourquoi on choisit la variable sortante celle qui a le plus petit ratio positif ? Est-ce que ce choix dépend de la nature du problème (Max/Min) ? **(1 pt)**
5. Répondre avec Vrai ou Faux **(1,5 pts)**
   (a) Un programme linéaire ne peut pas contenir des variables qui changent de signe.
   (b) Si un programme linéaire n'admet aucune variable sortante alors le problème est non borné.
   (c) La Phase (I) de la méthode à deux Phases permet toujours d'obtenir un sommet de la région réalisable du problème initiale.

Exercice 2 : (6 pts)

Considérons le modèle (P) de programmation linéaire ci-dessous :

$$
\begin{array}{rrcl}
\max Z = x_1 + 2x_2 & & & \\
\text{s.c.} & -x_1 + 2x_2 & \leq & 12 \\
 & 3x_1 + 5x_2 & \leq & 52 \\
 & x_1 & \leq & 12 \\
 & x_1,\ x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

1. Tracer le graphe de la région admissible de ce modèle linéaire. Calculer les coordonnées de chaque point extrême. **(1 pt)**
2. Évaluer la fonction objectif Z en chacun des sommets de la région admissible. Trouvez la solution optimale (ou les solutions optimales) de (P). **(1 pt)**
3. Écrire le problème linéaire standard (PLS) associé à (P). **(1 pt)**
4. Résoudre ce problème à l'aide de l'algorithme du simplexe. **(2 pts)**
5. On rajoute l'inégalité suivante $x_1 + x_2 \leq 14$ au contraintes du problème (P). Quelle est la solution optimale du problème dans ce cas ? Donner le tableau final du simplexe. **(2 pts)**

<u>Exercice 3 :</u> (3 pts)

Une machine M produit deux types de produits P et Q mais pas en même temps. La machine M est disponible 85 heures par semaine, 40 unités de P ou 10 unités de Q peuvent être produites par heure. Chaque unité de P et chaque unité de Q dégagent respectivement un revenu net de 17 euros et 59 euros. La demande est telle que l'on ne doit pas produire plus de 2000 unités de P ni plus de 300 unités de Q par semaine. Quel est le programme optimal de production par semaine ? Modéliser ce programme linéaire.

<u>Exercice 4</u> : (6.5 pts)

On cherche à résoudre le problème :

$$\begin{aligned} \min\ Z = 4x_1 + 5x_2 & \\ \text{s.c.}\quad 3x_1 + x_2 &\leq 27 \\ 5(x_1 + x_2) &= 60 \\ 6x_1 + 4x_2 &\geq 60 \\ x_1,\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

1. Trouver une solution de base réalisable à l'aide de l'algorithme du Simplexe (Phase I). **(2 pts)**
2. Écrire le tableau initiale de la phase (II) et résoudre ce problème. **(2 pts)**
3. Combien faut-il d'itération de l'algorithme du Simplexe (Phase II) pour trouver la solution optimale. Tracer le domaine réalisable ainsi que le chemin traverser par l'algorithme pour arriver au sommet optimale. **(1 pt)**
4. On considère les contraintes suivantes :

$$(C_1)\ x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 4, \quad (C_2)\ 2x_1 + x_2 + x_3 \geq 5, \quad (C_3)\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 6$$

   Trouver une solution de base réalisable du système de contraintes ci-dessus en utilisant une seule variable artificielle (*). **(1.5 pts)**

(*) **<u>Méthode :</u>** Soit b le second membre d'un ensemble de contraintes $Ax \geq b$. Posons $b_k = \max_i b_i$ et considérons le système sous forme linéaire standard (PLS). Le nouveau système constitué de la contrainte (C_k) et de sa soustraction par toutes les contraintes (C_i), tel que $i \neq k$, ne nécessite qu'une seule variable artificielle pour appliquer la Phase (I).