Théorie des Graphes

Chapitre 3 : Les flots

Imane EL MALKI et Pr. Imad HAFIDI
imane.elmalki@gmail.com

Master Big Data et Aide à la décision

Réseau

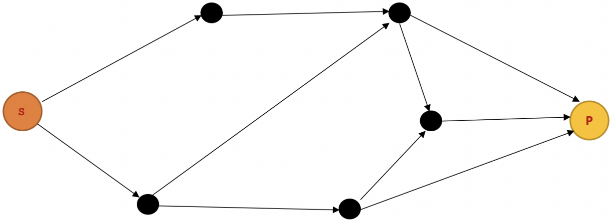
Définition :

Un réseau est un graphe orienté qui a des caractéristiques et des propriétés.
Il est composé d'un nombre de sommets avec deux sommets particuliers : **source** et **puits**

Réseau

Définition :

Un réseau est un graphe orienté qui a des caractéristiques et des propriétés.
Il est composé d'un nombre de sommets avec deux sommets particuliers : **source** et **puits**



Réseau

- La source **S** n'a pas d'arcs entrants

Réseau

- La source **S** n'a pas d'arcs entrants
- le puits **P** n'a pas d'arcs sortants

Réseau

- La source **S** n'a pas d'arcs entrants
- le puits **P** n'a pas d'arcs sortants
- à chaque arc on donne un poids, appelé **capacité de l'arc**

Réseau

- La source **S** n'a pas d'arcs entrants
- le puits **P** n'a pas d'arcs sortants
- à chaque arc on donne un poids, appelé **capacité de l'arc**

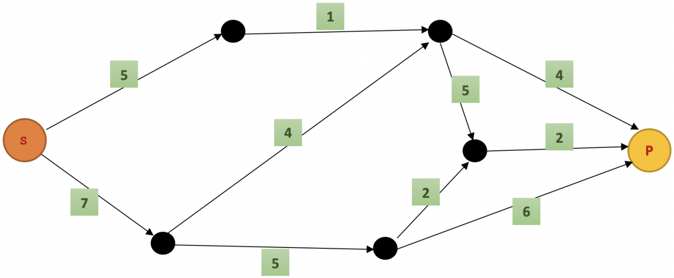


Figure : Réseau à flots (réseau de transport)

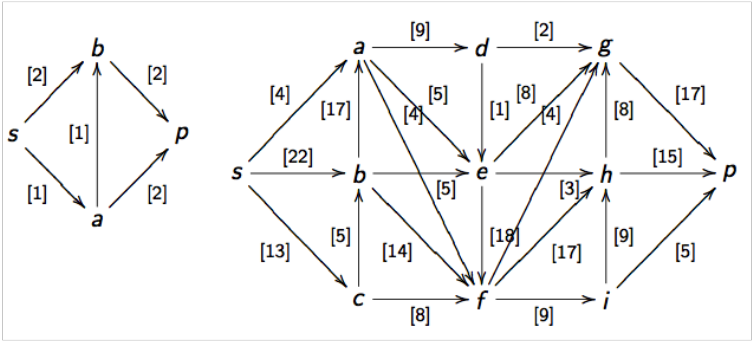
Réseaux

Définition

Un réseau de transport R = (S, A, s, p, c) est un graphe orienté et pondéré G =(S,A) :

1. sans circuit,
2. muni d'une source : un sommet $s \in S$ tel que $d^{-}(s) = 0$,
3. muni d'un puits: un sommet $p \in S$ tel que $d^{+}(p) = 0$,
5. dont chaque arc u dans A est valué par une capacité : un nombre positif ou nul noté c(u),
6. et tel qu'il existe au moins un chemin de s vers p.

Réseaux


b
[2]
[2]
s
[1]
p
[1]
[2]
a
[9]
[2]
a
d
g
[4]
[17]
[5]
[4]
[1]
[8]
[4]
[8]
[17]
s
[22]
b
e
h
[15]
p
[5]
[3]
[13]
[5]
[14]
[18]
[17]
[9]
[5]
c
f
i
[8]
[9]

Flots

Définition

Soit un réseau de transport R = (S, A, s, p, c), un flot sur R est une application :

$$f : A \longrightarrow \mathbb{R}$$

le flux sur l'arc u = (x,y) est donc f(u) = f(x,y) et vérifie :

1. **contrainte de capacité** $\forall u \in A, f(u) \leq c(u)$
2. **conservation des flots** $\forall x \in S, x \neq s, s \neq p$

$$\sum_{z \in d^{-}(x)} f(z,x) = \sum_{y \in d^{+}(x)} f(x,y)$$

Flots

Définition

Soit un réseau de transport R = (S, A, s, p, c), un flot sur R est une application :

$$f : A \longrightarrow \mathbb{R}$$

le flux sur l'arc u = (x,y) est donc f(u) = f(x,y) et vérifie :

1. **contrainte de capacité** $\forall u \in A, f(u) \leq c(u)$
2. **conservation des flots** $\forall x \in S, x \neq s, s \neq p$

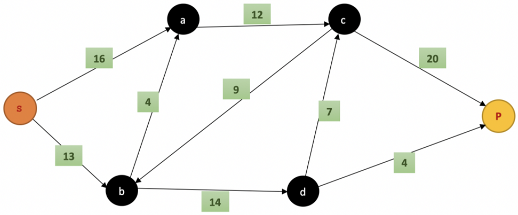
$$\sum_{z \in d^-(x)} f(z,x) = \sum_{y \in d^+(x)} f(x,y)$$

Remarque :

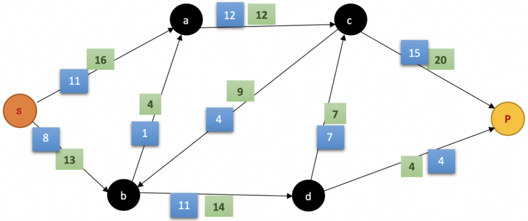
Les deux propriétés sont intuitives :

- La première formalise le fait qu'on ne peut pas dépasser la capacité d'un arc.
- La deuxième, exprime que la quantité des flots entrant dans un sommet égale à la quantité sortante.

Flots

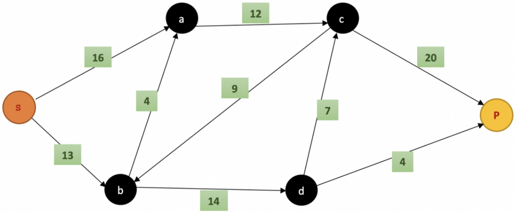


Un réseau de flot

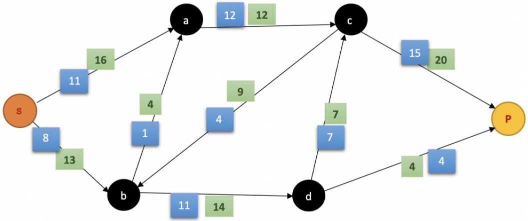


Le même réseau muni d'un flot

Flots



Un réseau de flot

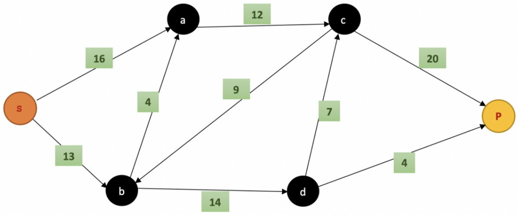


Le même réseau muni d'un flot

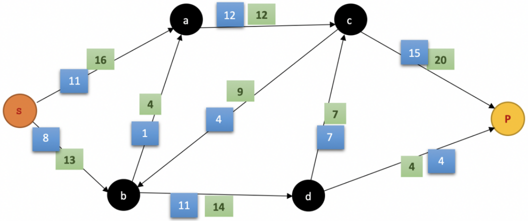
Définition

Soit G un réseau de flot muni d'un flot f. On dit que l'arc (u, v) est saturé si $f(u, v) = c(u, v)$

Flots



Un réseau de flot



Le même réseau muni d'un flot

Définition

Soit G un réseau de flot muni d'un flot f. On dit que l'arc (u, v) est saturé si $f(u, v) = c(u, v)$

Exemple :

- les arcs (a,c), (d,c) et (d,p) sont saturé

Flots

Définition

La valeur d'un flot *f* est

$$v(f) = \sum_{v \in A} f(s, v)$$

Flots

Définition

La valeur d'un flot f est

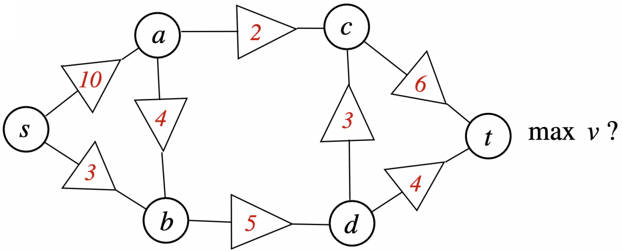
$$v(f) = \sum_{v \in A} f(s, v)$$

Il s'agit donc de la quantité de flot qui sort de la source **S**. (Ou la quantité du flot qui entre au puits **P**)

Algorithme de Ford-fulkerson

Problème de flot maximal

On veut par exemple trouver le trafic maximal entre deux villes d'un réseau routier dont on connait la capacité.
Etant donné un graphe orienté et pondéré possédant une seule source et un seul puits.
Trouver un flot réalisable maximal (dont la valeur est maximale).



Coupes

Définition

Une coupe sur un réseau de flot R=(S,A,s,p,c) est une partition des sommets notée $(X, \overline{X})$ de S vérifiant :

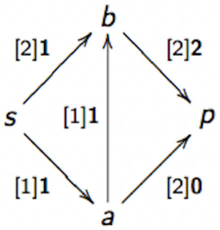
- $A = X \cup \overline{X}$
- $X \cap \overline{X} = \emptyset$
- $s \in X$ et $p \in \overline{X}$

$\overline{X}$ est le complémentaire de X dans S. La capacité de la coupe X est :

$$C(X, \overline{X}) = \sum_{(x,y) \in A, x \in X, y \in \overline{X}} c(x, y)$$

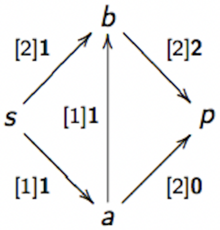
Coupes

Exemple :



Coupes

Exemple :



Les coupes possibles pour ce réseau de transport sont les suivantes :

X	$\overline{X}$	$C(X, \overline{X})$
s	a,b,p	3
s, a	b, p	5
s,b	a,p	3
s,a,b	p	4

Algorithme de Ford-Fulkerson : Coupes

Théorème de Ford-Fulkerson

Soit R = (S, A, s, p, c) un réseau de transport. Pour tout flot f Pour tout flot réalisable f et toute coupe X, on a:

$$v(f) < c(X, \overline{X})$$

où $v(f)$ est la valeur du flot f.

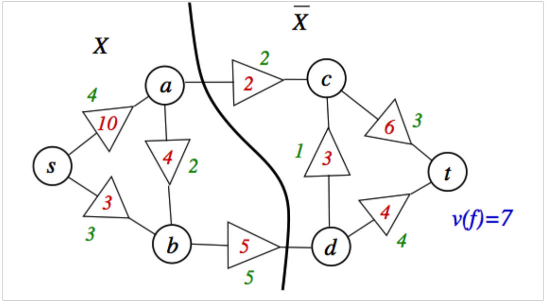
Algorithme de Ford-Fulkerson : Coupes

Principe :

La méthode de Ford-Fulkerson consiste à démarrer avec un flot initial nul, puis à augmenter ce flot à chaque itération en trouvant un "chemin augmentant" dans un "réseau résiduel". Les arcs du chemin augmentent dans le réseau résiduel nous disent quels arcs changer dans le réseau original pour augmenter la valeur du flot.

Algorithme de Ford-Fulkerson : Coupes

Le théorème de Ford-Fulkerson permet de savoir si un flot est maximal ou non. Par exemple :



v (f) = 7 et $c(X, \overline{X})$ = 7 $\Rightarrow$flot maximal.

Algorithme de Ford-Fulkerson : Coupes

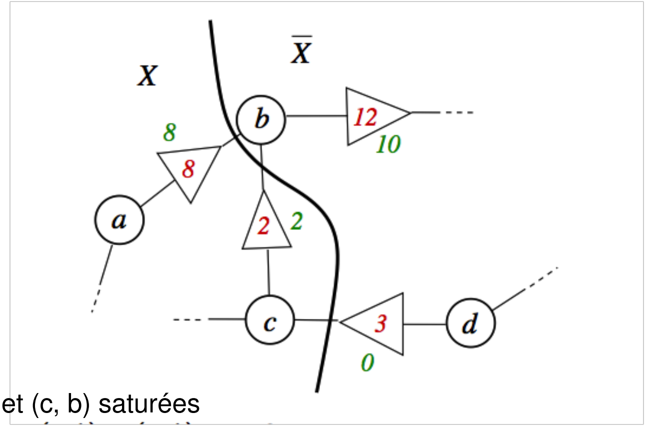
Le Théorème de Ford-Fulkerson admet un corollaire qui donne une condition suffisante pour avoir un flot maximal.

Définition

Une coupe (X,$\overline{X}$) est dite minimale pour f si toute arête de X vers $\overline{X}$ est saturée et toute arête de $\overline{X}$ vers X est insaturée.
On dit qu'une arête (i, j) est saturée si $fij = cij$ et qu'une arête (j, i) est insaturée si $fji = 0$

Algorithme de Ford-Fulkerson : Coupes

Exemple : coupe minimale

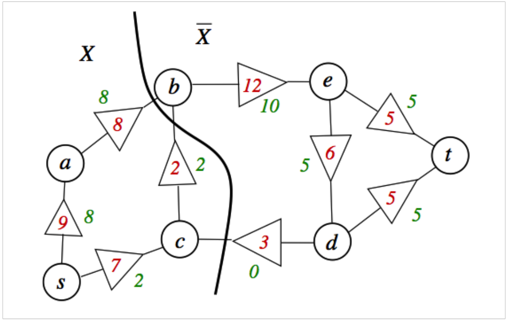


- arêtes (a, b) et (c, b) saturées
- arête (d,c) insaturée

Algorithme de Ford-Fulkerson : Coupes

Proposition

S'il existe une coupe minimale pour un flot f , alors ce flot est maximal.



$\Rightarrow$ flot maximal $v(f) = c(X, \overline{X}) = 10$

Problématique

Trouver coupe minimale ??

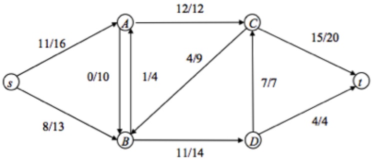
Il existe toujours un flot possible qui est le flot nul.
Problème : comment trouver un flot qui a la valeur maximum ? Celui de l'exemple est-il maximum ?

Chemin améliorant

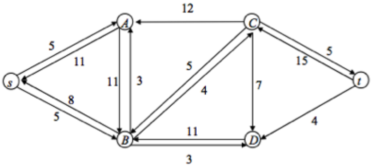
Déterminer le réseau résiduel :
pour chaque arc a = uv, $f(a) \leq c(a)$, on peut augmenter le flot de $c(a) - f(a)$.
on peut le diminuer de f(a), donc faire passer un flot f(a) sur un arc vu. Si cet arc existe déjà avec une capacité c(-a), celle-ci s'ajoute à f(a).

Le graphe orienté avec ces capacités est le réseau résiduel.

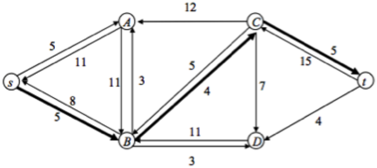
On cherche un chemin de s à t dans le réseau résiduel. Il correspond à une possibilité d'amélioration du flot en modifiant de la valeur du minimum des capacités résiduelles sur le chemin.



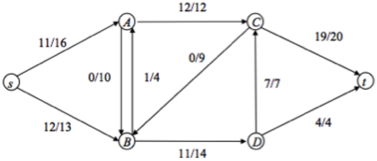
Le flot



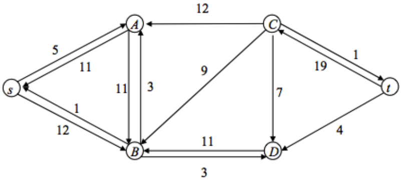
Le réseau résiduel correspondant



Un chemin améliorant



Le flot après amélioration



Le nouveau réseau résiduel

Dans ce réseau, il n'y a pas de chemin de s à t, donc pas de chemin améliorant.

Théorème

Si f est un flot dans un réseau de transport, les trois conditions suivantes sont équivalentes :

1. f est un flot maximum ;
2. Le réseau résiduel de f ne contient aucun chemin améliorant ;
3. Il existe une coupe X dont la capacité vaut v(f).

Algorithme Ford Fulkerson

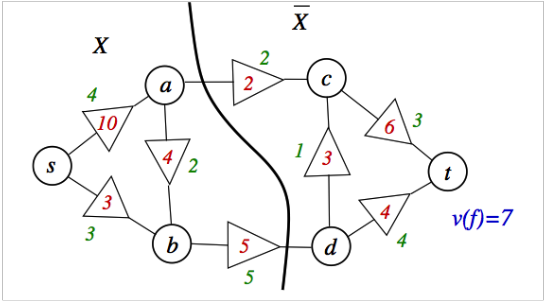
Pour trouver un flot de valeur maximale, nous pouvons donc utiliser la méthode suivante :

Algorithme

1. On part d'un flot quelconque (éventuellement nul) ;
2. On fabrique le réseau résiduel ;
3. On cherche un chemin améliorant ;
4. On itère jusqu'à ce qu'on ne trouve plus de tel chemin.

Remarque La meilleure stratégie pour la recherche d'un chemin améliorant est de faire une exploration du graphe résiduel en largeur.
L'algorithme prend alors le nom d'algorithme d'Edmonds-Karp.

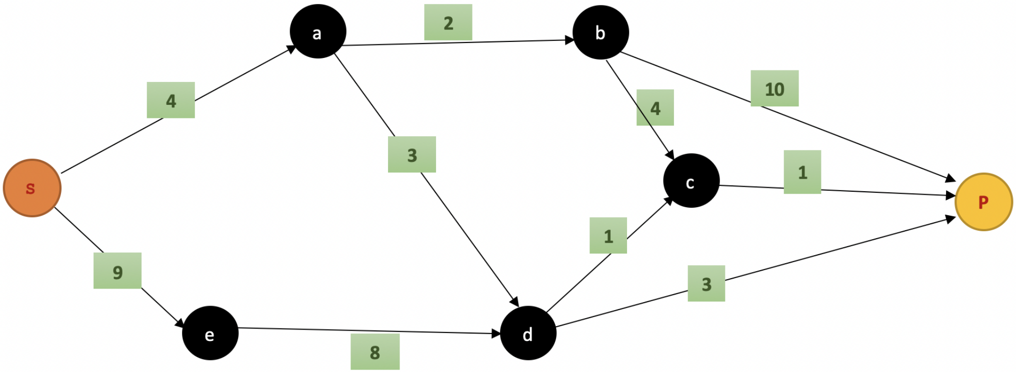
Algorithme Ford Fulkerson



Algorithme Ford Fulkerson

Exemple d'application :

Cherchons le flot maximal du réseau suivant :



Algorithme de Ford-Fulkerson

Algorithme :

- Initialisation par un flot initial réalisable ($f = 0$)
- Tant que le flot n'est pas maximal
  - Marquage de la source s
  - Tant qu'on marque des sommets

    Pour tout sommet marqué i

    Marquer les sommets j non marqués tq $f(i,j) < c(i,j)$ ou $f(j,i) > 0$

    Fin pour

    Fin Tant que
  - Si le puits t n'est pas marqué alors le flot est maximal
    Sinon amélioration du flot

  Fin Tant que

Algorithme de Ford-Fulkerson

Amélioration du flot :

- Trouvez une chaîne qui a permis de marquer P et calculer $\varepsilon = min(\varepsilon_1, \varepsilon_2) > 0$ avec

$$\varepsilon_1 = min\{c(i_k, i_{k+1}) - f(i_k, i_{k+1}) \text{ avec } (i_k, i_{k+1}) \in Gamma \text{ (arête directe)}\}$$
$$\varepsilon_2 = min\{f(i_{k+1}, i_k) \text{ avec } (i_{k+1}, i_k) \in Gamma \text{ (arête inverse)}\}$$

- Trouver le nouveau flot f'
  - Si $(i_k, i_{k+1}) \in Gamma$ (arête directe) alors $f'(i_k, i_{k+1}) = f(i_k, i_{k+1}) + \varepsilon$
  - Si $(i_{k+1}, i_k) \in Gamma$ (arête inverse) alors $f'(i_k, i_{k+1}) = f(i_k, i_{k+1}) - \varepsilon$

  Où, ε est l'amélioration qu'on peut apporter au flot tel que :

$$\varepsilon = min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} > 0$$

Problème d'ordonnancement

La planification

La planification est une activité courante de la vie moderne :

- Organiser un voyage : banque, agent de voyage, préparation des valises, réservation du taxi.
- Soirée : Inviter ses amis, faire des courses, nettoyer la maison, préparation des repas...

La planification s'appuie sur des procédés plus élaborés qui révèlent du talent organisationnelle ou des techniques de la recherche opérationnelle : le circuit répétitif qu'emprunte les éboueurs d'un quartier en a fourni un exemple

Problème d'ordonnancement

Étapes de planification

Pour une planification plus optimale, il faut :

- préciser l'objectif ;
- déterminer les opérations où les taches nécessaires pour atteindre cet objectif ;
- estimer la durée de chaque tache et les ressources exigées par chacune ;
- calculer la durée totale et le coût de totale du projet ;
- dresser un calendrier d'échelonnement des taches (ordonnancement des taches).

Exemples

La planification est dans tous les domaines :

- Lancement d'un nouveau produit,
- installation d'un nouvel équipement,
- mise en place d'une opération de communication

Problème d’ordonnancement

Méthodes d’ordonnancement

Il existe parmi les divers méthodes proposées aux planificateurs modernes, deux prétendues principales au titre de méthode reine :

- PERT (Program Evolution and Revue Technique): a pris son départ en 1958 au bureau des programmes spéciaux de la marine américaine, pour être en mise en oeuvre la première fois dans la gestion du gigantesque du projet que constituaient la conception, la fabrication et le lancement de la fusée POLARIS (coordination de l’action de près de 6000 constructeurs pour la réalisation de missiles à ogives nucléaires POLARIS) ancêtre du programme spatiale américain.
- MPM (Méthode des Potentiels Metra) : mise au point en France par Bernard Roy et son équipe utilisée en particulier pour l’aménagement des superstructures du paquebot France.

Problème d'ordonnancement

Exemple

Pour organiser la construction d'une maison on devra franchir les étapes suivantes :
Étape 1 :
Creusement du trou, Fondations, Coulage de la dalle, Montage des murs, Charpente et toiture, huisseries, montage des cloisons internes, menuiserie interne, plâtres, électricité, plomberie, ..
Étape 2 :
Préciser la durée de chaque tache.
Étape 3 :
l'ordre naturel des taches : il est déraisonnable de convoquer l'électricien après le plâtrier ou le peintre avant le plâtrier ...

Pour ne pas nous encombrer avec la signification des taches, nous allons supposer maintenant qu'il y a 7 taches à effectuer que nous appellerons A, B, C, D, E, F, G

Problème d'ordonnancement

Nous allons présenter notre problème d'ordonnancement avec le tableau suivant :

Nom du tâche	Durée de la tache	Tâches pré-requises
A	2	Aucune
B	3	A
C	5	A
D	1	A, B, C
E	5	A, C
F	6	A, D, B
G	3	B, E, F

Définition

Définition

La méthode MPM est une technique d'ordonnancement basée sur la théorie des graphes, visant à optimiser la planification des tâches d'un projet.

Définition

Définition

La méthode MPM est une technique d'ordonnancement basée sur la théorie des graphes, visant à optimiser la planification des tâches d'un projet.

But

L'utilisation de la MPM permet:

- Déterminer la durée minimum du projet
- Dates de départs des différents taches pour respecter la durée minimum du projet.
- Déterminer les taches critiques (où un retard peut affecter la durée minimum du projet)

Définition

Définition

La méthode MPM est une technique d'ordonnancement basée sur la théorie des graphes, visant à optimiser la planification des tâches d'un projet.

But

L'utilisation de la MPM permet:

- Déterminer la durée minimum du projet
- Dates de départs des différents taches pour respecter la durée minimum du projet.
- Déterminer les taches critiques (où un retard peut affecter la durée minimum du projet)

Remarque

Le recours à la méthode des potentiels Métra suppose qu'aient été identifiées préalablement les différentes tâches nécessaires à la réalisation du projet, leur durée et leurs relations d'antériorité.

Construction du graphe

Règles

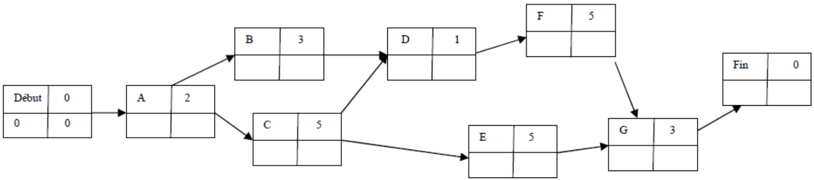
- un sommet correspond à une tâche
- un arc définit une relation d'antériorité
- on ajoute des sommets Début et Fin : D précède tout sommet et n'admettant aucun prédécesseur immédiat, tandis que F est lié comme sommet terminale à tout sommet qui ne possède aucun successeur.
- Chaque sommet de la représentation graphique est figuré par un rectangle.

Date de départ au plus tôt	Nom de la tache	Date d'arrivée au plus tôt
Date de départ au plus tard	Durée de la tache	Date d'arrivée au plus tard

Graphe MPM

Exemple

Nous reprenons l'exemple cité précédemment.



Ce graphe permet de visualiser les relations entre les différentes taches à réaliser pour mener ce projet. Son tracé nous amène à examiner les relations d'antériorité et de postériorité entre les taches.

Moment plus tôt

Définition

Une tâche s ne pouvant débuter que lorsque toutes les tâches qui y aboutissent sont terminées, le moment plus tôt où se terminera l'ensemble des tâches aboutissant au sommet s. Ce moment au plus tôt sera noté E(s).

Elle s'obtient très simplement :

$$E(s) = Max_t(E(t) + \text{Durée tâche}(t))$$

t représente l'ensemble des tâches immédiatement antérieures à s.

La détermination des dates au plus tôt des différents sommets se fait donc par calculs successifs, à partir du sommet "Début" (dont, par convention, la date au plus tôt est fixée à 0).

$$E(A) = 0 \quad E(B) = E(A) + 2 = 2$$
$$E(C) = E(A) + 2 = 2$$
$$E(D) = Max(E(A) + 2, E(B) + 3, E(C) + 5) = 7$$
$$E(E) = Max(E(A) + 2, E(C) + 5) = 7$$
$$E(F) = Max(E(D) + 1, E(B) + 3) = 8$$
$$E(G) = Max(E(D) + 1, E(E) + 5, E(F) + 6) = 14$$
$$E(Fin) = E(G) + 3 = 17$$

Remarque

La durée minimale du projet est le moment plus tôt de la tache fin.
Le projet ne peu donc se terminer en moins de 17 jours. C'est la durée minimale du projet.

Moment plus tard

Définition

Le moment au plus tard d'un réseau MPM correspond à la date à laquelle une tâche doit être exécutée au plus tard pour ne pas remettre en cause la durée optimale totale du projet. Le moment au plus tard dénoté L(s).

Ceci sera obtenu en commençant par les sommets de niveau les plus élevés jusqu'aux sommets de niveau les plus faibles :

$$L(s) = Min_t(L(t) - \text{Durée tâche}(s))$$

t représente l'ensemble des tâches successeurs à s.

Les moments au plus tard se calculent successivement en ordre inverse que l'ordre de calcule des moments au plus tôt, à partir du sommet "Fin" (dont, par convention, la date au plus tard est fixée à la durée minimum du projet).

$$
\begin{aligned}
L(G) &= E(Fin) - 3 = 14 & L(F) &= L(G) - 6 = 8 \\
L(E) &= L(G) - 5 = 9 & L(D) &= Min(L(F) - 1, L(G) - 1) = 7 \\
L(C) &= Min(L(D) - 5, L(E) - 5) = 2 & L(B) &= Min(L(D) - 3, L(F) - 3) = 2 \\
L(A) &= Min(L(C) - 2, L(B) - 2) = 0 & L(\text{Début}) &= L(A) - 0 = 0
\end{aligned}
$$

Remarque

La date plus tard de la tache Début doit être égale au zéro.

Chemins, Taches critiques

Tache critique

Une tache critique est une tache dont la date plus tôt est égale à la date plus tard.
Dans notre exemple :

Chemin critique

On appelle chemin critique la succession des tâches pour lesquels aucun retard n'est possible sans remettre en cause la durée optimale du projet (tâches pour lesquelles date au plus tôt = date au plus tard).
Dans notre exemple :