ENSA KHOURIBGA
ÉCOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUÉES

RAPPORT DE GENERALITES SUR L'OPTIMISATION

Partie I :

Conditions suffisantes d'existence d'extrema

Réalisé par:

- BELLA Abdelouahab
- AMMARI Souhaila
- AATAR Ridouane

Encadré par :

- Pr EL HADFI Youssef

Année universitaire 2023/2024

Table des matières

INTRODUCTION GENERALE

La recherche d'extremums (ou extrema) joue un rôle crucial en mathématiques et dans les sciences en général, particulièrement lorsqu'on explore les conditions de recherche des extremums. En optimisant une certaine quantité, il est souvent nécessaire d'examiner la compacité et la coercivité des ensembles associés.

En mathématiques, les conditions de compacité et de coercivité sont des outils fondamentaux pour étudier la convergence des suites et le comportement des fonctions. La compacité est liée à la limitation de l'extension des ensembles, tandis que la coercivité exprime une croissance contrôlée des fonctions. Ces propriétés sont essentielles pour garantir l'existence d'extremums dans des espaces fonctionnels plus généraux.

Lors de l'exploration des conditions de recherche d'extremums, il est souvent nécessaire de considérer des ensembles compacts, car cela garantit la séquentialité compacte. De plus, la coercivité assure que les valeurs des fonctions ne "s'éloignent pas indéfiniment" à mesure que l'on s'éloigne de l'origine.

Ces conditions sont particulièrement pertinentes dans les domaines où les fonctions à optimiser sont définies sur des espaces fonctionnels infinis, tels que les espaces de Sobolev en analyse fonctionnelle. En intégrant la compacité et la coercivité dans l'étude des extremums, on élargit la portée des résultats et on offre des bases plus solides pour comprendre et optimiser des phénomènes complexes dans des contextes mathématiques et scientifiques avancés.

1. Les conditions suffisantes d'existence d'extrema

1.1. Introduction

L'optimisation joue un rôle crucial dans divers domaines, et la compréhension du comportement des fonctions sur des domaines spécifiques est fondamentale pour résoudre les problèmes d'optimisation. Ce rapport introduit le concept d'extrema sur des domaines compacts et explore les conditions dans lesquelles ces extrema existent

1.2. Espaces Métriques :

1.2.1. Définition :

Soit E un ensemble non vide. On appelle distance sur E toute application d de E × E dans R + vérifiant les propriétés suivantes :

- (Séparation) Pour tout (x, y) ∈ E × E ; d (x, y) = 0 si et seulement si x = y.
- (Symétrie) Pour tout (x, y) ∈ E × E ; d (x, y) = d (y, x).
- (Inégalité triangulaire) Pour tout x, y et z dans E ; d (x, z) ≤ d (x, y) + d (y, z).

Un ensemble non vide E muni d'une distance est appelé espace métrique.

1.2.2. Exemples :

Les applications suivantes définissent des distances sur leurs domaines de définition respectifs. La vérification est immédiate, sauf pour l'inégalité triangulaire pour la distance Euclidienne. Celle-là se fait par le moyen de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et sera donnée dans la section suivante

— La distance Euclidienne (ou usuelle) sur $\mathbb{R}^2$: $d\big((x1,\ x2),(y1,\ y2)\big) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2} + \sqrt{(y_2 - x_2)^2}$

— La distance usuelle sur $\mathbb{R}$: $d(x,\ y) = |x - y|$

— La distance de Manhattan sur $\mathbb{R}^2$: $d\big((x_1,\ x_2),(y_1,\ y_2)\big) = |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2|$

— La distance discrète : $d(x,\ y) = 0$ si $x = y$, et $d(x,\ y) = 1$ si $x \neq y$

1.3. Convergence de suites dans un espace vectoriel normé/espace métrique :

1.3.1. Définition :

Soit (E, d) un espace métrique, $(a_n)_{n\in N}$ une suite d'éléments de E, et a ∈ E. On dit que $(a_n)_n$ converge vers a si et seulement si $\forall\epsilon > 0,\ \exists n_0,\ \forall n \geq n_0 : d(a_n,\ a) < \epsilon$

Autrement dit, $(a_n)_n$ converge vers a dans E si et seulement $(d(a_n,a))n$ converge vers 0 dans R.

1.3.2. Exemples :

Dans ($\mathbb{R}$^2, ||. ||∞) , la suite $\left(1 + \frac{1}{n}, 4 - \frac{7}{n^2}\right)$converge vers (1, 4)

Alors $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}, 4 - \frac{7}{n^2}\right)$et a= (1, 4)

$$d(a_n, a) = \|a_n - a\|_\infty$$

$$= \left\| \left(\frac{1}{n}, - \frac{7}{n^2}\right)\right\| \infty$$

$$= \max\left(\left|\frac{1}{n}\right|, \left|-\frac{7}{n^2}\right|\right)$$

$$= \frac{1}{n} \to 0$$

1.4. Compacité du domaine :

1.4.1. Définition :

Soit (E, d) un espace métrique et A ⊂ E. On dit que A est compact si et seulement si toute suite d'éléments de A admet une sous suite qui converge dans A

Exemples :

— Si A est fini, alors A est compact

— R n'est pas compact.

— Une partie non bornée d'un espace E n'est jamais compacte.

— Une partie non fermée d'un espace E n'est jamais compacte.

— [0, 1[n'est pas compact.

— [0, 1] est compact.

— Les compacts de R_n sont les sous-ensembles fermés bornées.

1.4.2. Théorème (Heine-Borel) :

Soit E un K-espace vectoriel normé de dimension finie, et A ⊂ E. Alors A est compact si et seulement si A est fermé borné

L'essentiel du théorème est : tout fermé borné de $\mathbb{R}^n$ est compact

1.4.3. Existence d'extrema sur un domaine compact :

Si K est un compact (i.e. est fermé et borné) de $\mathbb{R}^n$,

Et f : k———> $\mathbb{R}$ est continue, alors f admet un minimum ainsi qu'un maximum global sur K

Preuve Sur un compact de $\mathbb{R}^n$, *une application continue réelle est bornée et atteint ses bornes*

$\exists\, x_{min} \in K \quad f(x_{min}) = \inf_{x \in K} f(x) = \min_{x \in K} f(x)$

$\exists\, x_{max} \in K \quad f(x_{max}) = \sup_{x \in K} f(x) = \max_{x \in K} f(x)$

1.5. Application coercives :

Les fonctions coercitives jouent un rôle crucial dans le domaine de l'optimisation mathématique, offrant un cadre pour analyser le comportement des fonctions sur des domaines non bornés et fermés. Ce rapport explore la définition des fonctions coercitives, présente un théorème fondamental concernant l'existence de minima et de maxima globaux, et fournit une démonstration détaillée pour étayer ces affirmations.

1.5.1. Définition :

Une application $f : \; D \subset \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}$ continue est coercive si D est un fermé non borné et si

$$\lim_{||x|| \to +\infty} f(x) = +\infty$$

(Souvent $D = \mathbb{R}_n$)

<<Autrement dit, une fonction réelle est coercive si elle tend vers l'infini à l'infini>>

Proposition : Toute fonction numérique continue et coercive est à section inférieure bornée

1.5.2. Démonstration :

La démonstration commence par choisir un nombre réel suffisamment grand a pour garantir que l'image inverse de l'intervalle $(-\infty,\ a]$, notée K, est non vide. Il est essentiel de noter que $f^{-1}\big((-\infty,\ a]\big) = K$. La continuité de f et la nature fermée de l'intervalle

$(-\infty,\ a]$ Dans R conduisent à la conclusion que K est un ensemble fermé dans $\mathbb{R}_n$.

De plus, *K* est démontré comme borné. Supposons le contraire, et que *K* contient une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} \big||x_n|\big| = +\infty$, et pour tout *n*, $f(x_n) \leq a$ Cette hypothèse contredit la coercivité de f.

Selon le théorème précédent, la compacité de *K* implique que *f* atteint un minimum global *u* sur *K*. Il est important de souligner que la construction d'a garanti que pour tous les *x* en dehors de *K*, $f(x) > a > f(u)$. Cette condition établit *u* comme un minimum global de *f* sur l'ensemble du domaine *D*.

1.6. Exemples :

1.6.1. Exemple 1 :

On va montrer l'existence des extrema globaux dans l'application :

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ **Définie par** $f(x,y) =\ x4 + y4 - x3 - y3$

- **On a que $\mathbb{R}^2$ est Fermé en $\mathbb{R}^2$ mais n'est pas bornée**
- **f est continue dans $\mathbb{R}$ (car est une fonction polynomiale)**
- $\lim\limits_{(x,y)\to\infty} f(x,y) = +\infty$ **(Car le degré de polynôme est pair).**
- **On remarque que le coefficient de son terme de plus haut degré est positif**

Alors f est une application coercive, donc il admet un minimum global mais aucun maximum global.

1.6.2. Exemple 2 :

On va montrer l'existence des extrema globaux dans l'application :

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ **Définie par** $f(x,y) = -2x + (x - 2y)^2 + 3y^3$

- **On a que $\mathbb{R}^2$ est Fermé en R² mais n'est pas bornée.**
- f **est continue dans $\mathbb{R}$ (car est une fonction polynomiale).**
- $\lim\limits_{(x,y)\to\infty} f(x,y) = -\infty$ **(Car le degré de polynôme est impair).**

Alors f n’est pas coercive, donc il n’admet ni minimum globale ni maximum globale.

1.6.3. Exemple 3 :

On va montrer l’existence des extrema globaux dans l’application :

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ **Définie par** $f(x,y) = x^2 - x^4 - y^2$.

- **On a que $\mathbb{R}^2$ est Fermé en $\mathbb{R}^2$mais n’est pas bornée.**
- **f Est continue dans $\mathbb{R}$ (car est une fonction polynomiale)**
- **On remarque que le coefficient de son terme de plus haut degré est négatif.**
- **Donc** $\lim\limits_{(x,y)\to\infty} f(x,y) = -\infty$ **(car le degré de polynôme est pair).**

Alors f n’est pas coercive, donc il n'admet qu'un minimum global.

- **Mais pour $(-f)$:** $\lim\limits_{(x,y)\to\infty} -f(x,y) = +\infty$**(car (-f) est une fonction polynomiale et le coefficient de son terme de plus haut degré est positif.)**

Alors $(-f)$ est coercive donc f admets un maximum global mais aucun minimum global.

Conclusion

En résumé, cette exploration des extrema sur les domaines compacts offre une base théorique solide pour l'optimisation. Le théorème démontré établit l'existence de valeurs minimales et maximales globales sur des ensembles compacts, soulignant leur pertinence en optimisation contrainte. Les conditions d'existence des extrema, notamment avec les fonctions coercitives, fournissent des outils pratiques. L'exemple des polynômes illustre l'application de ces concepts. En comprenant comment le degré et le coefficient principal influent sur les extrema, cette étude offre des indications précieuses pour résoudre des problèmes d'optimisation réels. En somme, cette exploration constitue une ressource clé pour ceux impliqués dans l'optimisation, offrant à la fois des fondements théoriques et des applications pratiques pour aborder efficacement une variété de défis d'optimisation.