RECHERCHE OPÉRATIONNELLE I

Dualité en programmation linéaire

H. KHALFI
h.khalfi@usms.ma

A. METRANE
a.metrane@usms.ma

8 mai 2023

Introduction

Étant donnée un programme linéaire sous la forme vectorielle :

$$\begin{aligned} &\max \quad z = c^t x \\ &Ax \leq b \\ &x \geq 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Comment prouver l'optimalité ?

On peut commencer par chercher des majorants de la valeur optimale de la fonction objectif.

Introduction

Étant donnée un programme linéaire sous la forme vectorielle :

$$\begin{aligned} &\max \quad z = c^t x \\ &Ax \leq b \\ &x \geq 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Comment prouver l'optimalité ?

On peut commencer par chercher des majorants de la valeur optimale de la fonction objectif.

$$\begin{aligned} \max z = x_1 + x_2 & \\ 4x_1 + 5x_2 &\leq 20 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 6 \\ x_2 &\leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 & \end{aligned} \tag{2}$$

Idée

Trouver une combinaison valide des contraintes permettant de borner terme à terme la fonction objectif :

Idée

Trouver une combinaison valide des contraintes permettant de borner terme à terme la fonction objectif :

$$\max z = x_1 + x_2$$

$$\begin{array}{rcrcrl}
4x_1 & + & 5x_2 & \leq & 20 & \times y_1 \\
2x_1 & + & x_2 & \leq & 6 & \times y_2 \\
 & & x_2 & \leq & 2 & \times y_3 \\
\hline
(4y_1 + 2y_2)\,x_1 & + & (5y_1 + y_2 + y_3)\,x_2 & \leq & 20y_1 + 6y_2 + 2y_3 &
\end{array}$$

$$\min 20\,y_1 + 6\,y_2 + 2\,y_3 \qquad \text{(borne sup minimale)}$$

s.c. (borner terme à terme l'objectif)

$$\begin{array}{l}
4y_1 + 2y_2 \geq 1 \\
5y_1 + y_2 + y_3 \geq 1 \\
y_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3
\end{array} \tag{3}$$

Definition

Programme primal

$$(P)\left\{\begin{array}{rcl} \max z(x) & = & cx \\ Ax & \leq & b \\ x & \in & \mathbb{R}_+^n \end{array}\right.$$

Programme dual

$$(D)\left\{\begin{array}{rcl} \min w(y) & = & yb \\ yA & \geq & c \\ y & \in & \mathbb{R}_+^m \end{array}\right.$$

Definition

Programme primal

$$(P)\left\{\begin{array}{rcl}\max z(x) & = & cx\\ Ax & \leq & b\\ x & \in & \mathbb{R}_+^n\end{array}\right.$$

Programme dual

$$(D)\left\{\begin{array}{rcl}\min w(y) & = & yb\\ yA & \geq & c\\ y & \in & \mathbb{R}_+^m\end{array}\right.$$

Remarques.

Definition

Programme primal

$$(P)\left\{\begin{array}{rcl} \max z(x) & = & cx \\ Ax & \leq & b \\ x & \in & \mathbb{R}^n_+ \end{array}\right.$$

Programme dual

$$(D)\left\{\begin{array}{rcl} \min w(y) & = & yb \\ yA & \geq & c \\ y & \in & \mathbb{R}^m_+ \end{array}\right.$$

Remarques.

- $m =$ nombre de contraintes de $(P) =$ nombre de variables de (D),

Definition

Programme primal

$$(P)\left\{\begin{array}{rcl} \max z(x) & = & cx \\ Ax & \leq & b \\ x & \in & \mathbb{R}^n_+ \end{array}\right.$$

Programme dual

$$(D)\left\{\begin{array}{rcl} \min w(y) & = & yb \\ yA & \geq & c \\ y & \in & \mathbb{R}^m_+ \end{array}\right.$$

Remarques.

- $m =$ nombre de contraintes de $(P) =$ nombre de variables de (D),
- $n =$ nombre de variables de $(P) =$ nombre de contraintes de (D).

Definition

Programme primal

$$(P)\begin{cases} \max z(x) & = & cx \\ Ax & \leq & b \\ x & \in & \mathbb{R}^n_+ \end{cases}$$

Programme dual

$$(D)\begin{cases} \min w(y) & = & yb \\ yA & \geq & c \\ y & \in & \mathbb{R}^m_+ \end{cases}$$

Remarques.

- $m =$ nombre de contraintes de $(P) =$ nombre de variables de (D),
- $n =$ nombre de variables de $(P) =$ nombre de contraintes de (D).
- Si (P) contient deux contraintes, (D) contient deux variables et peut être résolu graphiquement quelque soit le nombre de variables de (P).

Exemples d'agriculteur

Le modèle linéaire ou Programme linéaire (P) est :

$$Max\ z = 1000x_1 + 2000x_2$$

$$\begin{array}{lrcl}
s.c & x_1 + x_2 & \leq & 150 \\
 & 4x_1 + 2x_2 & \leq & 440 \\
 & x_1 + 4x_2 & \leq & 480 \\
 & x_1 & \leq & 90 \\
 & x_1 \geq 0 \text{ et } x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

Exemples d'agriculteur

Donc le programme dual est (D) :

$$Min\ z_D = 150y_1 + 440y_2 + 480y_3 + 90y_4$$

$$\begin{array}{lrcl} s.c & y_1 + 4y_2 + y_3 + y_4 & \geq & 1000 \\ & y_1 + 2y_2 + 4y_3 & \geq & 2000 \\ & y_1, y_2, y_3 \text{ et } y_4 & \geq & 0 \end{array}$$

Pour expliquer la signification du problème dual on va se baser sur l'exemple de l'agriculteur. Supposons qu'un agriculteur (client) voudrait acheter la totalité de nos ressources disponibles. Notre agriculteur acceptera certainement cette proposition si le prix offert par ce client lui procure le même profit.

y_1 represente le prix d'un hectare de terrain.

y_2 le prix d'un m^3 d'eau.

y_3 le prix d'une heure de main d'œuvre.

y_4 le prix de la permission de la culture d'un hectare de tomates.

Le problème du client consiste à minimiser les frais d'achat des ressources : c'est à dire $150y_1 + 440y_2 + 480y_3 + 90y_4$ sous la contrainte que les prix satisfont notre agriculteur.
Pour notre agriculteur un hectare de terrain, $4m^3$ d'eau, une heure de travail et un hectare de permission du bureau est équivalent a un revenu de 1000 dhs. Tandis que, un hectare de terrain, $2m^3$ d'eau et 4 heures de travail lui engendrent un revenu de 2000 dhs.

Il n'est prêt à vendre ses ressources que si $y_1 + 4y_2 + y_3 + y_4$ lui rapporte un revenu supérieur ou égale à 1000 DH et que si $y_1 + 2y_2 + 4y_3$ lui rapporte un revenu supérieur ou égal à 2000 DH.

Exemples d'agriculteur

Ainsi le problème du client est (D) :

$$Min\ z_D = 150y_1 + 440y_2 + 480y_3 + 90y_4$$

$$\begin{array}{lrcl} s.c & y_1 + 4y_2 + y_3 + y_4 & \geq & 1000 \\ & y_1 + 2y_2 + 4y_3 & \geq & 2000 \\ & y_1, y_2, y_3 \text{ et } y_4 & \geq & 0 \end{array}$$

Tableau final du problème dual

V.B	x1	x2	e1	e2	e3	e4	b
x1	1	0	1,33	0	-0,33	0	40
e2	0	0	-4,67	1	0,67	0	60
x2	0	1	-0,33	0	0,33	0	110
e4	0	0	-1,33	0	0,33	1	50
C.j	0	0	-666,67	0	-333,33	0	260000

Tableau final du problème primal

V.B	y1	y2	y3	y4	e1	e2	b
y1	1	4,67	0	1,33	-1,33	0,33	666,67
y3	0	-0,67	1	-0,33	0,33	-0,33	333,33
C.j	0	60	0	50	40	110	260000

Tableau final du problème dual

Géneralisation de l'interpretation économique

	ressource i	demande j
produit j	a_{ij}	c_j
coùt i	b_i	

Problème primal (demandeur de produit) : quelle quantité x_i de ressource i doit t-on acheter pour satisfaire la demande à coût minimum ?

$$\min \sum_i b_i x_i \quad \text{s.c.} \quad \sum_i a_{ij} x_i \geq c_j \quad \forall j$$

Problème dual (vendeur de produit) : à quel prix proposer les produits pour maximiser le profit tout en restant compétitif ?

$$\max \sum_j c_j w_j \quad \text{s.c.} \quad \sum_j a_{ij} w_j \leq b_i \quad \forall i$$

Théorème

Les liens entre le programme primal et son dual sont les suivants :

Primal	Dual
maximisation	minimisation
coefficient de z	second membre des contraintes
second membre des contraintes	coefficient de w
contrainte $\begin{cases} = \\ \leq \\ \geq \end{cases}$	variable $\begin{cases} \text{sans contrainte de signe} \\ \geq 0 \\ \leq 0 \end{cases}$
variable $\begin{cases} \text{sans contrainte de signe} \\ \geq 0 \\ \leq 0 \end{cases}$	contrainte $\begin{cases} = \\ \geq \\ \leq \end{cases}$

Théorème

Le dual du dual est le primal.

Exemple

$$\max z(x) = cx$$

$$(P)\left\{\begin{array}{rcl} Ax & = & b \\ x & \geq & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix} \\ x \geq 0 \end{array}\right.$$

Exemple

$$\max z(x) = cx$$

$$(P) \begin{cases} Ax & = & b \\ x & \geq & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix} \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Le dual de (P) est donné par

$$\min w(u,v) = (u,v) \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix} = (u-v)b$$

$$(D) \begin{cases} (u,v) \begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix} = (u-v)A \geq c, \\ u, v \in \mathbb{R}_+^m. \end{cases}$$

Exemple

$$\max z(x) = cx$$

$$(P)\begin{cases} Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix} \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Le dual de (P) est donné par

$$\min w(u,v) = (u,v)\begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix} = (u-v)b$$

$$(D)\begin{cases} (u,v)\begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix} = (u-v)A \geq c, \\ u,v \in \mathbb{R}_+^m. \end{cases}$$

$$y = u - v \Rightarrow \min w(y) = yb$$

$$(D)\begin{cases} yA \geq c \\ y \text{ sans restriction de signe (noté } (y)). \end{cases}$$

Proposition

Soit (x,y) une solution réalisable de (P) et (u,v) une solution réalisable de (D). Alors :

$$z(x,y) \leq w(u,v)$$

$z(x,y) = w(u,v) \Rightarrow (x,y)$ *et* (u,v) *sont des solutions optimales de* (P) *et* (D).

Proposition

Soit (x,y) une solution réalisable de (P) et (u,v) une solution réalisable de (D). Alors :

$$z(x,y) \leq w(u,v)$$

$$z(x,y) = w(u,v) \Rightarrow (x,y) \text{ et } (u,v) \text{ sont des solutions optimales de } (P) \text{ et } (D).$$

Rappelons les trois cas qui peuvent se produire en appliquant le simplexe à (P) :

(i) il existe une ou plusieurs solutions optimales finies

(ii) l'ensemble des solutions réalisables est non borné et $\max z(x,y) = +\infty$

(iii) (P) ne possède pas de solutions réalisables.

Théorème de dualité

		(D) (i)	(D) (ii)	(D) (iii)
(P)	(i)	a)	$\times$	$\times$
	(ii)	$\times$	$\times$	b)
	(iii)	$\times$	b)	c)

Théorème

Seuls les trois cas suivants peuvent se produire :

a) (P) *et* (D) *possèdent des solutions optimales et* $\max z(x,y) = \min w(u,v)$.

b) (P) *ou* (D) *possède une solution réalisable, mais pas les deux.*

c) *Ni* (P) *ni* (D) *possèdent des solutions réalisables.*

Théorème

Soient (x,y) *resp.* (u,v) *des solutions réalisables de* (P) *resp. de* (D). (x,y) *et* (u,v) *sont alors des solutions optimales de* (P) *et de* (D) *si et seulement si les énoncés suivants valent :*

Théorème

Soient (x, y) resp. (u, v) des solutions réalisables de (P) resp. de (D). (x, y) et (u, v) sont alors des solutions optimales de (P) et de (D) si et seulement si les énoncés suivants valent :

> *Si une contrainte est satisfaite en tant qu'inégalité (stricte) dans (P) resp. (D), alors la variable correspondante de (D) resp. de (P) est nulle.*

Théorème

Soient (x, y) *resp.* (u, v) *des solutions réalisables de* (P) *resp. de* (D)*.* (x, y) *et* (u, v) *sont alors des solutions optimales de* (P) *et de* (D) *si et seulement si les énoncés suivants valent :*

- *Si une contrainte est satisfaite en tant qu'inégalité (stricte) dans* (P) *resp.* (D)*, alors la variable correspondante de* (D) *resp. de* (P) *est nulle.*
- *Si la valeur d'une variable dans l'un des programmes* (P) *ou* (D) *est* $\neq 0$*, alors la contrainte correspondante de l'autre programme est une égalité.*

Exemple

$$(P) \left| \begin{array}{l} \max z(x) = 4x_1 + 5x_2 \\ \text{sous } 3x_1 + x_2 \leq 1,\ x_1 + 4x_2 \leq 1,\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

$$(D) \left| \begin{array}{l} \min w(y) = y_1 + y_2 \\ \text{sous } 3y_1 + y_2 \geq 4,\ y_1 + 4y_2 \geq 5,\ y_1, y_2 \geq 0 \end{array} \right. \Rightarrow x^* = \left(\frac{3}{11}, \frac{2}{11} \right).$$

Exemple

$$(P)\left|\begin{array}{l}\max z(x) = 4x_1 + 5x_2\\ \text{sous } 3x_1 + x_2 \leq 1,\ x_1 + 4x_2 \leq 1,\ x_1, x_2 \geq 0\end{array}\right.$$

$$(D)\left|\begin{array}{l}\min w(y) = y_1 + y_2\\ \text{sous } 3y_1 + y_2 \geq 4,\ y_1 + 4y_2 \geq 5,\ y_1, y_2 \geq 0\end{array}\right. \Rightarrow x^* = \left(\frac{3}{11}, \frac{2}{11}\right).$$

D'après le Théorème 0.5 on a

$$\left.\begin{array}{l}x_1 > 0 \Rightarrow 3y_1 + y_2 = 4\\ x_2 > 0 \Rightarrow y_1 + 4y_2 = 5\end{array}\right\}$$

Exemple

$$(P)\left|\begin{array}{l}\max z(x) = 4x_1 + 5x_2 \\ \text{sous } 3x_1 + x_2 \leq 1,\ x_1 + 4x_2 \leq 1,\ x_1, x_2 \geq 0\end{array}\right.$$

$$(D)\left|\begin{array}{l}\min w(y) = y_1 + y_2 \\ \text{sous } 3y_1 + y_2 \geq 4,\ y_1 + 4y_2 \geq 5,\ y_1, y_2 \geq 0\end{array}\right. \quad \Rightarrow x^* = \left(\frac{3}{11}, \frac{2}{11}\right).$$

D'après le Théorème 0.5 on a

$$\left.\begin{array}{l} x_1 > 0 \Rightarrow 3y_1 + y_2 = 4 \\ x_2 > 0 \Rightarrow y_1 + 4y_2 = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow (y_1, y_2) = (1, 1).$$

Exemple

$$(P)\left|\begin{array}{l}\max z(x) = 4x_1 + 5x_2\\ \text{sous } 3x_1 + x_2 \leq 1,\ x_1 + 4x_2 \leq 1,\ x_1, x_2 \geq 0\end{array}\right.$$

$$(D)\left|\begin{array}{l}\min w(y) = y_1 + y_2\\ \text{sous } 3y_1 + y_2 \geq 4,\ y_1 + 4y_2 \geq 5,\ y_1, y_2 \geq 0\end{array}\right. \quad \Rightarrow x^* = \left(\frac{3}{11}, \frac{2}{11}\right).$$

D'après le Théorème 0.5 on a

$$\left.\begin{array}{l}x_1 > 0 \Rightarrow 3y_1 + y_2 = 4\\ x_2 > 0 \Rightarrow y_1 + 4y_2 = 5\end{array}\right\} \Rightarrow (y_1, y_2) = (1, 1).$$

$y^* = (1,1)$ et $z\left(\frac{3}{11}, \frac{2}{11}\right) = 2 = w(1,1)$

Problème de médecine

Trouver le problème dual du problème de médecine.

$$Min\ z = x + y.$$

$$s.c \qquad \begin{array}{rcl} 2x + y & \geq & 12 \\ 5x + 8y & \geq & 74 \\ x + 6y & \geq & 24 \\ x & \geq & 0 \text{ et } y \geq 0 \end{array}$$

Résoudre le problème dual à l'aide de l'algorithme du simplexe.