RECHERCHE OPÉRATIONNELLE I

Chapitre 3 : Algorithme du Simplexe

H. KHALFI
h.khalfi@usms.ma

A. METRANE
a.metrane@usms.ma

20 février 2023

Introduction

On a vu précédemment que la solution optimale est un sommet situé sur la frontière du domaine des solutions réalisables.

Une démarche simple est de calculer en chaque sommet la valeur de la fonction objective et prendre le sommet ou ce dernier est le plus grand. Pour accélérer cette procédure, on a intérêt, au moment d’explorer un nouveau sommet, à choisir parmi les sommets voisins de celui ou l’on se trouve celui qui permet d’obtenir la plus grande augmentation de la fonction économique.

Principe du méthode simplexe

Partant d'une solution réalisable connue, située en un sommet de la frontière du domaine d'acceptabilité, on cherche parmi les sommets voisins celui qui améliore le plus la fonction objectif à optimiser. On passe alors à ce sommet et on recommence jusqu'à ce qu'on soit en un sommet tel que le passage à aucun des sommets voisins n'améliore la fonction à optimiser. Ce sommet sera alors l'optimum cherché.

Historique

L'algorithme du simplexe est la méthode la plus utilisée de la recherche opérationnelle. C'est G.B. Dantzig qui, dans un article paru en 1949, a décrit cet algorithme, qui constitue l'épine dorsale de la recherche opérationnelle. Depuis, cet algorithme a fait l'objet de centaines d'articles scientifiques et a servi à la résolution de nombreux modèles linéaires relatifs à des problèmes de gestion, de diététique, de transport, d'affectation...

Hypothèse

Dans ce chapitre, nous supposons que l'origine est un point réalisable (c'est à dire : $x_i = 0$, pour tous i, est réalisable).

Prenons l'exemple 1 suivant :

$$Max\ Z = 87x_1 + 147x_2 + 258x_3.$$

$$\begin{aligned} s.c \qquad x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\leq 90 \\ 15x_1 + 21x_2 + 30x_3 &\leq 1260 \\ x_1 + x_2 + x_3 &\leq 84 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \text{ et } x_3 \geq 0 & \end{aligned}$$

La mise sous forme standard consiste à introduire des variables suplémentaires **positives** (Variables d'écart) une pour chaque contrainte de manière à réecrire les inégalité $\leq$ et $\geq$ sous forme d'égalité.

Variables d'écart

Rappelons qu'une contrainte du modèle s'écrit comme :

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 90$$

Et introduisons une nouvelle variables e_1 définie ainsi :

$$e_1 = 90 - (x_1 + 2x_2 + 3x_3)$$

La variable e_1 est qualifiée de variable **d'écart**. Elle représente dans ce cas **le reste du premier ressource** lorsqu'on retient le plan de production $(x; y; z)$.

La contrainte $x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 90$ est équivalente à la formule suivante :

$$e_1 = 90 - (x_1 + 2x_2 + 3x_3) \text{ et } e_1 \geq 0$$

Forme Standard PLS

$$Max\ Z = 87x_1 + 147x_2 + 258x_3.$$

$$\begin{aligned}
s.c \qquad x_1 + 2x_2 + 3x_3 + e_1 &= 90\\
15x_1 + 21x_2 + 30x_3 + e_2 &= 1260\\
x_1 + x_2 + x_3 + e_3 &= 84\\
x \geq 0, x_2 \geq 0 \text{ et } x_3 \geq 0 \quad & e_1 \geq 0, e_2 \geq 0 \text{ et } e_3 \geq 0
\end{aligned}$$

Problème d'agriculteur

Écrivons sous forme standard le problème :

$$Max\ z = 1000x_1 + 2000x_2$$

$$\begin{array}{rrcl}
s.c & x_1 + x_2 & \leq & 150\ (Limitation\ sur\ le\ terrain) \\
& 4x_1 + 2x_2 & \leq & 440\ (Limitation\ sur\ l'eau) \\
& x_1 + 4x_2 & \leq & 480\ (Limitation\ Main-d'oeuvre) \\
& x_1 & \leq & 90\ (Limitation\ d'irrigation) \\
& x_1 \geq 0 \text{ et } x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

- (C1) on introduit e_1 l'écart entre la surface du terrain utilisé et la surface totale en hectare.

$$x_1 + x_2 + e_1 = 150$$

- (C2) on introduit e_2 le gain en terme de ressource d'eau.

$$4x_1 + x_2 + e_2 = 440$$

- (C3) on introduit e_3 l'écart entre les ressources humaines exploitées et disponible.

$$x_1 + 4x_2 + e_3 = 480$$

- (C4) on introduit e_4 l'écart entre le périmètre du terrain irrigué et la limitation maximale exigée.

$$x_1 + e_4 = 90$$

Problème d'agriculteur sous forme PLS

$$Max\ z = 1000x_1 + 2000x_2$$

$$\begin{aligned} s.c \qquad x_1 + x_2 + e_1 &= 150 \\ 4x_1 + 2x_2 + e_2 &= 440 \\ x_1 + 4x_2 + e_3 &= 480 \\ x_1 + e_4 &= 90 \end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, e_1 \geq 0, e_2 \geq 0, e_3 \geq 0, \text{ et } e_4 \geq 0$$

Exemple

Ecrire sous forme standard le problème suivant :

$$Max\ Z = 4x_1 - 6x_2 + 25x_3.$$

$$\begin{array}{lrcl} s.c & x_1 - 2x_2 + 3x_3 & \geq & 90 \\ & 15x_1 + 21x_2 + 30x_3 & \leq & 1260 \\ & x_1 + x_2 + x_3 & = & 84 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \text{ et } x_3 \geq 0 & & \end{array}$$

Objectif

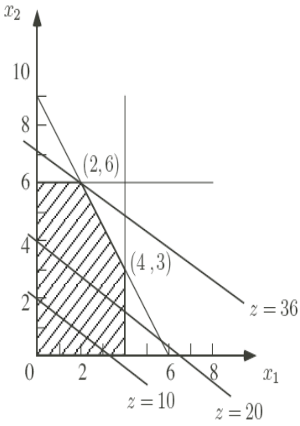
Algorithme du Simplexe $\longleftrightarrow$ Solution Optimale
d'un programme linéaire

$$\max z = 3x_1 + 5x_2$$

$$\text{s.c.q.} \left\{ \begin{array}{rcrcr} x_1 & & & \leq & 4 \\ & & 2x_2 & \leq & 12 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 18 \\ x_1 & & & \geq & 0 \\ & & x_2 & \geq & 0 \end{array} \right.$$

$$\max z = 3x_1 + 5x_2$$

$$\text{s.c.q.} \begin{cases} x_1 & & \leq & 4 \\ & 2x_2 & \leq & 12 \\ 3x_1 & + \; 2x_2 & \leq & 18 \\ x_1 & & \geq & 0 \\ & x_2 & \geq & 0 \end{cases} \qquad \longleftrightarrow$$



Droites d'isoprofit.

Forme matricielle d'un programme linéaire

$$\max z = c^T x,$$

$$\text{s.c.q.} \begin{cases} Ax & \leq b \\ x & \geq 0 \end{cases}$$

Forme matricielle d'un programme linéaire

$$\max z = c^T x,$$

$$\text{s.c.q.} \begin{cases} Ax & \leq b \\ x & \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{avec} \begin{cases} A \text{ matrice } (m \times n), & b \text{ vecteur } (m \times 1) \\ c \text{ vecteur } (n \times 1), & x \text{ vecteur } (n \times 1). \end{cases}$$

Variable d'écart

$$\max z = 3x_1 + 5x_2$$

$$\text{s.c.q.} \begin{cases} x_1 & & & \leq & 4 \\ & & 2x_2 & \leq & 12 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 18 \\ x_1 & & & \geq & 0 \\ & & x_2 & \geq & 0 \end{cases}$$

Variable d'écart

$$\max z = 3x_1 + 5x_2$$

$$\text{s.c.q.} \begin{cases} x_1 & & & \leq & 4 \\ & & 2x_2 & \leq & 12 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 18 \\ x_1 & & & \geq & 0 \\ & & x_2 & \geq & 0 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow$$

Variable d'écart

$$\max z = 3x_1 + 5x_2$$
$$\text{s.c.q.} \begin{cases} x_1 & & & \leq & 4 \\ & & 2x_2 & \leq & 12 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 18 \\ x_1 & & & \geq & 0 \\ & & x_2 & \geq & 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\max z = 3x_1 + 5x_2$$
$$\text{s.c.q.} \begin{cases} x_1 & & +e_1 & & & = & 4 \\ & 2x_2 & & +e_2 & & = & 12 \\ 3x_1 & +2x_2 & & & +e_3 & = & 18 \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq & 0 \end{cases}$$

Variables hors base (v.h.b.)

$$\begin{cases} x_1 & & +e_1 & & & = & 4 \\ & 2x_2 & & +e_2 & & = & 12 \\ 3x_1 & +2x_2 & & & +e_3 & = & 18 \end{cases}$$

Variables hors base (v.h.b.)

$$\begin{cases} x_1 & & +e_1 & & & = & 4 \\ & 2x_2 & & +e_2 & & = & 12 \\ 3x_1 & +2x_2 & & & +e_3 & = & 18 \end{cases}$$

$x_1 = x_2 = 0 \longleftrightarrow$

Variables hors base (v.h.b.)

$$\begin{cases} x_1 & & +e_1 & & & = & 4 \\ & 2x_2 & & +e_2 & & = & 12 \\ 3x_1 & +2x_2 & & & +e_3 & = & 18 \end{cases}$$

$x_1 = x_2 = 0 \longleftrightarrow$ x_1 et x_2 sont mises hors base.

Variables hors base (v.h.b.)

$$\begin{cases} x_1 & & +e_1 & & & = & 4 \\ & 2x_2 & & +e_2 & & = & 12 \\ 3x_1 & +2x_2 & & & +e_3 & = & 18 \end{cases}$$

$x_1 = x_2 = 0 \longleftrightarrow$ x_1 et x_2 sont mises hors base.

On appelle variables hors base (v.h.b.) les n variables de $\mathbb{R}^{n+m}$ fixées à zéro.
Les m variables restantes sont appelées variables de base (v.b.).

Variables hors base (v.h.b.)

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & & +e_1 & & & = & 4 \\ & 2x_2 & & +e_2 & & = & 12 \\ 3x_1 & +2x_2 & & & +e_3 & = & 18 \end{array}\right.$$

$x_1 = x_2 = 0 \longleftrightarrow$ x_1 et x_2 sont mises hors base.

On appelle variables hors base (v.h.b.) les n variables de $\mathbb{R}^{n+m}$ fixées à zéro.
Les m variables restantes sont appelées variables de base (v.b.).

$$\left.\begin{array}{ccc} e_1 & = & 4 \\ e_2 & = & 12 \\ e_3 & = & 18 \end{array}\right\} \text{variables de base}$$

Solution réalisable et Sommets

Solution réalisable et Sommets

On appelle solution de base une solution où en ayant choisi n variables hors base, on obtient une solution unique en résolvant les m contraintes d'égalités obtenues en ajoutant les variables d'écart.

Solution réalisable et Sommets

On appelle solution de base une solution où en ayant choisi n variables hors base, on obtient une solution unique en résolvant les m contraintes d'égalités obtenues en ajoutant les variables d'écart.

On appelle solution de base réalisable une solution de base qui, en plus, vérifie les contraintes de positivité (réalisable).

Solution réalisable et Sommets

On appelle solution de base une solution où en ayant choisi *n* variables hors base, on obtient une solution unique en résolvant les *m* contraintes d'égalités obtenues en ajoutant les variables d'écart.

On appelle solution de base réalisable une solution de base qui, en plus, vérifie les contraintes de positivité (réalisable).

$$x_1 = 0,$$

Solution réalisable et Sommets

On appelle solution de base une solution où en ayant choisi n variables hors base, on obtient une solution unique en résolvant les m contraintes d'égalités obtenues en ajoutant les variables d'écart.

On appelle solution de base réalisable une solution de base qui, en plus, vérifie les contraintes de positivité (réalisable).

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 0$$

Solution réalisable et Sommets

On appelle solution de base une solution où en ayant choisi *n* variables hors base, on obtient une solution unique en résolvant les *m* contraintes d'égalités obtenues en ajoutant les variables d'écart.

On appelle solution de base réalisable une solution de base qui, en plus, vérifie les contraintes de positivité (réalisable).

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0 \quad \text{variables hors base}$$

Solution réalisable et Sommets

On appelle solution de base une solution où en ayant choisi n variables hors base, on obtient une solution unique en résolvant les m contraintes d'égalités obtenues en ajoutant les variables d'écart.

On appelle solution de base réalisable une solution de base qui, en plus, vérifie les contraintes de positivité (réalisable).

$x_1 = 0, \quad x_2 = 0$ variables hors base

$e_1 = 4,$

Solution réalisable et Sommets

On appelle solution de base une solution où en ayant choisi n variables hors base, on obtient une solution unique en résolvant les m contraintes d'égalités obtenues en ajoutant les variables d'écart.

On appelle solution de base réalisable une solution de base qui, en plus, vérifie les contraintes de positivité (réalisable).

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0 \quad \text{variables hors base}$$
$$e_1 = 4, \quad e_2 = 12,$$

Solution réalisable et Sommets

On appelle solution de base une solution où en ayant choisi n variables hors base, on obtient une solution unique en résolvant les m contraintes d'égalités obtenues en ajoutant les variables d'écart.

On appelle solution de base réalisable une solution de base qui, en plus, vérifie les contraintes de positivité (réalisable).

$$\begin{array}{lll} & x_1 = 0, & x_2 = 0 \\ e_1 = 4, & e_2 = 12, & e_3 = 18 \end{array}$$ variables hors base

Solution réalisable et Sommets

On appelle solution de base une solution où en ayant choisi n variables hors base, on obtient une solution unique en résolvant les m contraintes d'égalités obtenues en ajoutant les variables d'écart.

On appelle solution de base réalisable une solution de base qui, en plus, vérifie les contraintes de positivité (réalisable).

$$\begin{array}{rrrl} & x_1 = 0, & x_2 = 0 & \text{variables hors base} \\ e_1 = 4, & e_2 = 12, & e_3 = 18 & \text{variables de base} \end{array}$$

Solution réalisable et Sommets

On appelle solution de base une solution où en ayant choisi n variables hors base, on obtient une solution unique en résolvant les m contraintes d'égalités obtenues en ajoutant les variables d'écart.

On appelle solution de base réalisable une solution de base qui, en plus, vérifie les contraintes de positivité (réalisable).

$$\begin{array}{llll} & x_1 = 0, & x_2 = 0 & \text{variables hors base} \\ e_1 = 4, & e_2 = 12, & e_3 = 18 & \text{variables de base} \end{array} \quad \text{Solution de base} \underset{\text{réalisable}}{\longleftrightarrow}$$

Solution réalisable et Sommets

On appelle solution de base une solution où en ayant choisi n variables hors base, on obtient une solution unique en résolvant les m contraintes d'égalités obtenues en ajoutant les variables d'écart.

On appelle solution de base réalisable une solution de base qui, en plus, vérifie les contraintes de positivité (réalisable).

$$\begin{array}{cccl} & x_1 = 0, & x_2 = 0 & \text{variables hors base} \\ e_1 = 4, & e_2 = 12, & e_3 = 18 & \text{variables de base} \end{array} \quad \underset{\text{réalisable}}{\overset{\text{Solution de base}}{\longleftrightarrow}} \quad e_1, e_2, e_3 \geq 0$$

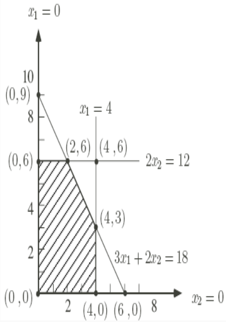
Solution réalisable et Sommets

Le lien entre l'algèbre et la géométrie est alors donné par la propriété suivante.

La notion géométrique de sommet du polygone correspond à la notion algébrique de solution de base réalisable.

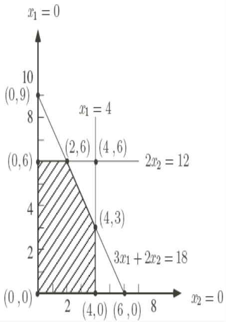
Solution réalisable et Sommets

La notion géométrique de sommet du polygone correspond à la notion algébrique de solution de base réalisable.



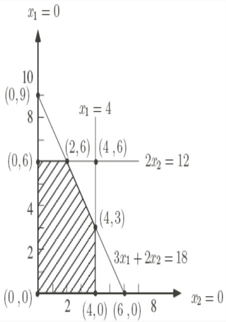
Solution réalisable et Sommets

La notion géométrique de sommet du polygone correspond à la notion algébrique de solution de base réalisable.



Solution réalisable et Sommets

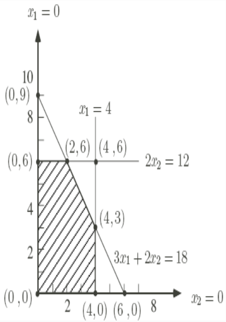
La notion géométrique de sommet du polygone correspond à la notion algébrique de solution de base réalisable.



v.h.b.	(x_1, x_2)	(e_1, e_2, e_3)	sommet?
x_1, x_2	$(0, 0)$	$(4, 12, 18)$	

Solution réalisable et Sommets

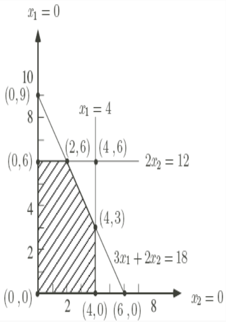
La notion géométrique de sommet du polygone correspond à la notion algébrique de solution de base réalisable.



v.h.b.	(x_1, x_2)	(e_1, e_2, e_3)	sommet?
x_1, x_2	$(0, 0)$	$(4, 12, 18)$	oui
x_1, e_2	$(0, 6)$	$(4, 0, 6)$	

Solution réalisable et Sommets

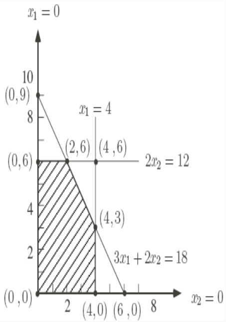
La notion géométrique de sommet du polygone correspond à la notion algébrique de solution de base réalisable.



v.h.b.	(x_1, x_2)	(e_1, e_2, e_3)	sommet?
x_1, x_2	$(0, 0)$	$(4, 12, 18)$	oui
x_1, e_2	$(0, 6)$	$(4, 0, 6)$	oui
x_1, e_3	$(0, 9)$	$(4, -6, 0)$	

Solution réalisable et Sommets

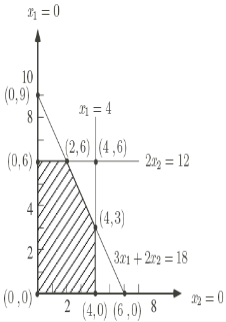
La notion géométrique de sommet du polygone correspond à la notion algébrique de solution de base réalisable.



v.h.b.	(x_1, x_2)	(e_1, e_2, e_3)	sommet?
x_1, x_2	$(0,0)$	$(4,12,18)$	oui
x_1, e_2	$(0,6)$	$(4,0,6)$	oui
x_1, e_3	$(0,9)$	$(4,-6,0)$	non
e_2, e_3	$(2,6)$	$(2,0,0)$	

Solution réalisable et Sommets

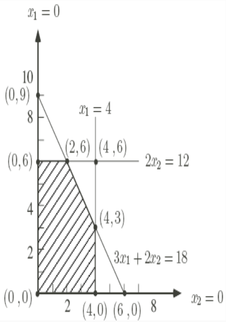
La notion géométrique de sommet du polygone correspond à la notion algébrique de solution de base réalisable.



v.h.b.	(x_1, x_2)	(e_1, e_2, e_3)	sommet?
x_1, x_2	$(0, 0)$	$(4, 12, 18)$	oui
x_1, e_2	$(0, 6)$	$(4, 0, 6)$	oui
x_1, e_3	$(0, 9)$	$(4, -6, 0)$	non
e_2, e_3	$(2, 6)$	$(2, 0, 0)$	oui
e_1, e_2	$(4, 6)$	$(0, 0, -6)$	

Solution réalisable et Sommets

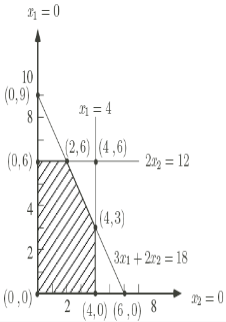
La notion géométrique de sommet du polygone correspond à la notion algébrique de solution de base réalisable.



v.h.b.	(x_1, x_2)	(e_1, e_2, e_3)	sommet ?
x_1, x_2	$(0, 0)$	$(4, 12, 18)$	oui
x_1, e_2	$(0, 6)$	$(4, 0, 6)$	oui
x_1, e_3	$(0, 9)$	$(4, -6, 0)$	non
e_2, e_3	$(2, 6)$	$(2, 0, 0)$	oui
e_1, e_2	$(4, 6)$	$(0, 0, -6)$	non
e_1, e_3	$(4, 3)$	$(0, 6, 0)$	

Solution réalisable et Sommets

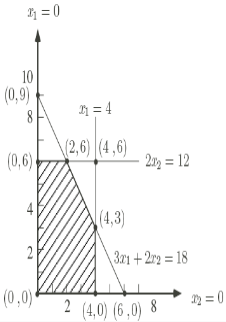
La notion géométrique de sommet du polygone correspond à la notion algébrique de solution de base réalisable.



v.h.b.	(x_1, x_2)	(e_1, e_2, e_3)	sommet?
x_1, x_2	$(0,0)$	$(4,12,18)$	oui
x_1, e_2	$(0,6)$	$(4,0,6)$	oui
x_1, e_3	$(0,9)$	$(4,-6,0)$	non
e_2, e_3	$(2,6)$	$(2,0,0)$	oui
e_1, e_2	$(4,6)$	$(0,0,-6)$	non
e_1, e_3	$(4,3)$	$(0,6,0)$	oui
x_2, e_1	$(4,0)$	$(0,6,6)$	

Solution réalisable et Sommets

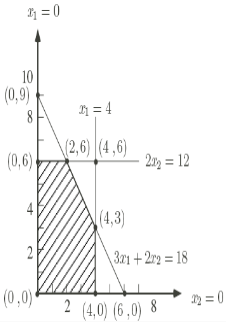
La notion géométrique de sommet du polygone correspond à la notion algébrique de solution de base réalisable.



v.h.b.	(x_1, x_2)	(e_1, e_2, e_3)	sommet?
x_1, x_2	$(0, 0)$	$(4, 12, 18)$	oui
x_1, e_2	$(0, 6)$	$(4, 0, 6)$	oui
x_1, e_3	$(0, 9)$	$(4, -6, 0)$	non
e_2, e_3	$(2, 6)$	$(2, 0, 0)$	oui
e_1, e_2	$(4, 6)$	$(0, 0, -6)$	non
e_1, e_3	$(4, 3)$	$(0, 6, 0)$	oui
x_2, e_1	$(4, 0)$	$(0, 6, 6)$	oui
x_2, e_3	$(6, 0)$	$(-2, 12, 0)$	

Solution réalisable et Sommets

La notion géométrique de sommet du polygone correspond à la notion algébrique de solution de base réalisable.



v.h.b.	(x_1, x_2)	(e_1, e_2, e_3)	sommet?
x_1, x_2	$(0, 0)$	$(4, 12, 18)$	oui
x_1, e_2	$(0, 6)$	$(4, 0, 6)$	oui
x_1, e_3	$(0, 9)$	$(4, -6, 0)$	non
e_2, e_3	$(2, 6)$	$(2, 0, 0)$	oui
e_1, e_2	$(4, 6)$	$(0, 0, -6)$	non
e_1, e_3	$(4, 3)$	$(0, 6, 0)$	oui
x_2, e_1	$(4, 0)$	$(0, 6, 6)$	oui
x_2, e_3	$(6, 0)$	$(-2, 12, 0)$	non

Correspondance entre solution de base réalisable et sommet.

Solutions de base adjacentes

On appelle solutions de base adjacentes deux solutions de base dont les variables de base sont les mêmes sauf une qui est de base dans la première base et hors base dans la seconde.

Solutions de base adjacentes

On appelle solutions de base adjacentes deux solutions de base dont les variables de base sont les mêmes sauf une qui est de base dans la première base et hors base dans la seconde.

$$\left.\begin{array}{rclrcl} x_1 & = & 0, & x_1 & = & 0 \\ x_2 & = & 0, & x_2 & = & 6 \\ e_1 & = & 4, & e_1 & = & 4 \\ e_2 & = & 12, & e_2 & = & 0 \\ e_3 & = & 18, & e_3 & = & 6 \end{array}\right\}$$

Solutions de base adjacentes

On appelle solutions de base adjacentes deux solutions de base dont les variables de base sont les mêmes sauf une qui est de base dans la première base et hors base dans la seconde.

$$\left.\begin{array}{rclrcl} x_1 & = & 0, & x_1 & = & 0 \\ x_2 & = & 0, & x_2 & = & 6 \\ e_1 & = & 4, & e_1 & = & 4 \\ e_2 & = & 12, & e_2 & = & 0 \\ e_3 & = & 18, & e_3 & = & 6 \end{array}\right\} \text{solutions de base adjacentes}$$

Solutions de base adjacentes

On appelle solutions de base adjacentes deux solutions de base dont les variables de base sont les mêmes sauf une qui est de base dans la première base et hors base dans la seconde.

$$\left.\begin{array}{rclrcl} x_1 & = & 0, & x_1 & = & 0 \\ x_2 & = & 0, & x_2 & = & 6 \\ e_1 & = & 4, & e_1 & = & 4 \\ e_2 & = & 12, & e_2 & = & 0 \\ e_3 & = & 18, & e_3 & = & 6 \end{array}\right\} \text{solutions de base adjacentes}$$

$$\left.\begin{array}{rclrcl} x_1 & = & 0, & x_1 & = & 2 \\ x_2 & = & 0, & x_2 & = & 6 \end{array}\right\}$$

Solutions de base adjacentes

On appelle solutions de base adjacentes deux solutions de base dont les variables de base sont les mêmes sauf une qui est de base dans la première base et hors base dans la seconde.

$$\left.\begin{array}{rclrcl} x_1 &=& 0, & x_1 &=& 0 \\ x_2 &=& 0, & x_2 &=& 6 \\ e_1 &=& 4, & e_1 &=& 4 \\ e_2 &=& 12, & e_2 &=& 0 \\ e_3 &=& 18, & e_3 &=& 6 \end{array}\right\} \text{solutions de base adjacentes}$$

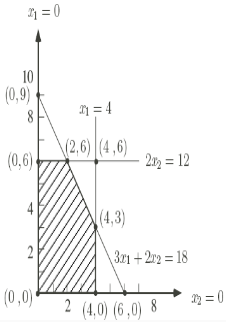
$$\left.\begin{array}{rclrcl} x_1 &=& 0, & x_1 &=& 2 \\ x_2 &=& 0, & x_2 &=& 6 \end{array}\right\} \text{solutions de base non-adjacentes}$$

Solutions de base adjacentes

On appelle solutions de base adjacentes deux solutions de base dont les variables de base sont les mêmes sauf une qui est de base dans la première base et hors base dans la seconde.

$$\begin{cases} x_1 = 0, & x_1 = 0 \\ x_2 = 0, & x_2 = 6 \\ e_1 = 4, & e_1 = 4 \\ e_2 = 12, & e_2 = 0 \\ e_3 = 18, & e_3 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0, & x_1 = 0 \\ x_2 = 0, & x_2 = 6 \end{cases}$$

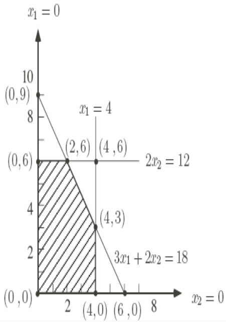


Solutions de base adjacentes

On appelle solutions de base adjacentes deux solutions de base dont les variables de base sont les mêmes sauf une qui est de base dans la première base et hors base dans la seconde.

$$\begin{cases} x_1 = 0, & x_1 = 0 \\ x_2 = 0, & x_2 = 6 \\ e_1 = 4, & e_1 = 4 \\ e_2 = 12, & e_2 = 0 \\ e_3 = 18, & e_3 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0, & x_1 = 0 \\ x_2 = 0, & x_2 = 6 \end{cases}$$



La notion géométrique de sommets adjacents correspond à la notion algébrique de solutions de base réalisables adjacentes.

La résolution des modèles sous forme standard

Un résumé de l’algorithme du simplexe

L’algorithme du simplexe choisit d’abord un sommet initial, puis effectue une opération itérative, dite **pivotage**, qui habituellement correspond à passer d’un sommet à un sommet adjacent plus ”rentable”.
Nous décrirons le fonctionnement de l’algorithme du simplexe en l’appliquant sur notre exemple.

Retoure à notre PLS

$$Max\ Z = 87x_1 + 147x_2 + 258x_3.$$

$$
\begin{aligned}
s.c \qquad x_1 + 2x_2 + 3x_3 + e_1 &= 90 \\
15x_1 + 21x_2 + 30x_3 + e_2 &= 1260 \\
x_1 + x_2 + x_3 + e_3 &= 84 \\
x \geq 0, x_2 \geq 0 \text{ et } x_3 \geq 0 \quad & e_1 \geq 0, e_2 \geq 0 \text{ et } e_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Solution initiale

La mise en évidence d'une solution de base admissible initiale

Comme on l'a vu précédemment dans l'exemple 1, les points extrême correspondent aux solutions de base admissible (réalisable). Celles-ci sont obtenues en annulant 3 des 6 variables x_1, x_2, x_3, e_1, e_2 et e_3. Par exemple, poser $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ conduit à un système d'équations trivial à résoudre, notamment :

$$e_1 = 90$$

$$e_2 = 1260$$

$$e_3 = 84$$

Graphiquement, cette solution correspond au sommet O (l'origine). la fonction objectif est égal à 0.

On sait, à partir de l’analyse géométrique, que le sommet O n’est pas solution optimale. Il faut donc modifier cette solution initiale de façon à augmenter la valeur prise par la fonction objectif z.
L’algorithme du simplexe procède par **itérations**, chacune correspondant au passage d’un sommet de la région admissible à un sommet adjacent de cette région.
Notre exemple exigera 2 itérations.

La construction du tableau initial

Les calculs nécessités par l’algorithme du simplexe s’effectuent plus facilement et plus rapidement lorsque le modèle linéaire est disposé sous forme de **tableau simplexe**.
Un tel tableau présente, de façon visuelle et structurée, les variables et les coefficients du modèle. De plus, chaque tableau met en évidence une solution de base particulière du modèle linéaire, dite **solution de base associée**, ou encore **solution canonique associée**.

Tableau du simplexe

On présente notre solution avec le tableau suivant :

	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	B
e_1	1	2	3	1	0	0	90
e_2	15	21	30	0	1	0	1260
e_3	1	1	1	0	0	1	84
$\overline{c_j}$	87	147	258	0	0	0	Z

Chaque tableau du simplexe partitionne les variables en 2 groupes :

- les variables de base : les **variables de base** sont les 3 variables apparaissant dans la section gauche.
- les variables hors base : les **variables hors base** sont les 3 autres.

Par exemple, les variables hors base du tableau précédent sont x_1, x_2 et x_3. De façon générale, la **solution de base associée** à un tableau s'obtient en posant égales à 0 les variables hors base et donnant à chacune des variables de base la valeur apparaissant sur la même ligne.

Le choix de la variable entrante

La solution de base initiale du modèle n'est pas optimale.
Comment s'en convaincre par des arguments strictement algébriques ? S'il n'est pas optimale, il faut augmenter la valeur de l'une ou l'autre de ces variables $x_1; x_2; x_3$.
Laquelle, ou lesquelles choisir ? Laissons-nous guider par l'intuition : on augmentera la variable qui rapporte le plus x_3.
Afin de simplifier l'analyse, supposons que x_1 et x_2 garde pour le moment la valeur 0. On augmente x_3, le bénéfice va augmenter.

Que choisir pour la variable qui va sortir de la base ?

On a potentiellement trois choix : e_1, e_2, e_3.

$$
\begin{aligned}
0+0+3 \quad x_3 + e_1 &= 90 \\
0+0+30 \quad x_3 + e_2 &= 1260 \\
0+0+1 \quad x_3 + e_3 &= 84
\end{aligned}
$$

$x_3 \geq 0$ $e_1 \geq 0$, $e_2 \geq 0$ et $e_3 \geq 0$

Autrement

Quelle est la valeur maximale qu'on peut donner à x_3 sans violer les contraintes du modèle ?

la contrainte 3 ($e_3 = 0$) : $x_3 = 84$
la contrainte 2 ($e_2 = 0$) : $x_3 = \frac{1260}{30}$
la contrainte 1 ($e_1 = 0$) : $x_3 = 30$

Autrement

Quelle est la valeur maximale qu'on peut donner à x_3 sans violer les contraintes du modèle ?

la contrainte 3 ($e_3 = 0$) : $x_3 = 84$
la contrainte 2 ($e_2 = 0$) : $x_3 = \frac{1260}{30}$
la contrainte 1 ($e_1 = 0$) : $x_3 = 30$
Si $x_3 = 84$, la contrainte 2 n'est plus satisfaite.
Si $x_3 = \frac{1260}{30} = 42$, la contrainte 1 n'est plus verifiée.
Si $x_3 = 30$, tous les contraintes sont verifiée.

le Pivot

	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	B	B /colonne choisie
e_1	1	2	3	1	0	0	90	30
e_2	15	21	30	0	1	0	1260	42
e_3	1	1	1	0	0	1	84	84
$\overline{c_j}$	87	147	258	0	0	0	0	0

choix de pivot

Pour chaque itération, nous suivons les règles suivantes :

- Variable entrante : plus fort coefficient strictement positif.
- Variable sortante : plus petite valeur strictement positive dans B/Colonne choisie.
- Le pivot : intersection de la ligne et de la colonne sélectionnée.

x_3 variable entrante remplace la variable e_1 dans le nouveau tableau.
Le pivot est égal à 3.

Nouveau sommet

Transformation du tableau

Ligne x_3 (ancienne ligne e_1) $\longrightarrow$ à(ligne e_1)/3 . (Division par le pivot).

Ligne e_2 $\longrightarrow$ à Ligne $e_2 - 30$ ligne x_3

Ligne e_3 $\longrightarrow$ à Ligne $e_3 -$ ligne x_3

Ligne B $\longrightarrow$ à Ligne $\overline{c_j}$ -258 ligne x_3

On obtient le tableau suivant :

	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	B
x_3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	0	30
e_2	5	1	0	-10	1	0	360
e_3	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	1	54
$\overline{c_j}$	1	-25	0	-86	0	0	7740

Remarque importante

On vérifie pour chaque tableau calculé que les valeurs de variable de base sont **positive ou nulle**

Règle de pivot

Une autre manière de construire le tableau suivant :

- Diviser la ligne de pivot par la valeur de pivot.
- À chacune des variables de base, on associé la valeur 1 à l'intersection de la ligne et la colonne de cette même variable et le reste de la colonne c'est 0.
- Calculer le reste des valeurs du tableau par la règle de pivot.
  Par exemple 21 sera remplacer par $\frac{21\times3-2\times30}{3}=1$.
  147 sera remplacer par $\frac{147\times3-2\times258}{3}=-25$

Remarques

- Le passage de l'ancien tableau au nouveau tableau traduit le passage du sommet $(0,0,0)$ ou le bénéfice est nul à un autre sommet ou le bénéfice est 7740 (le bénéfice a été amélioré)
- La fonction bénéfice est $B=x_1-25x_2-86e_1$ B peut augmenter si on augmente x_1 avec $x_2=e_1=0$. Il faut passer à un autre sommet, l'algorithme n'est pas encore terminé.

On effectue notre choix du pivot :

	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	B	B /colonne choisie
x_3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	0	30	90
e_2	5	1	0	-10	1	0	360	72
e_3	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	1	54	81
$\overline{c_j}$	1	-25	0	-86	0	0	7740	

Transformation du tableau

Variable entrante qui correspond à la plus grande valeurs positive dans la ligne $\overline{c_j}$ qui est la variable x_1.

Variable sortante qui correspond à la plus petite valeurs positive dans la colonne "B /colonne choisie" qui est la variable e_2

Le pivot=5. La variable x_1 remplace la variable e_2.

Ligne x_1 (ancienne ligne e_2) $\longrightarrow$ à(ligne e_2)/5 . (Division par le pivot).

Ligne x_3 $\longrightarrow$ à Ligne $x_3 - \frac{1}{3}$ ligne x_1

Ligne e_3 $\longrightarrow$ à Ligne $e_3 - \frac{2}{3}$ ligne x_1

Ligne $\overline{c_j}$ $\longrightarrow$ à Ligne $\overline{c_j}$ − ligne x_1

Effectuons les calculs sur les lignes x_1 et $\overline{c_j}$. On obtient :

	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	B
x_3							6
x_1	1	$\frac{1}{5}$	0	-2	$\frac{1}{5}$	0	72
e_3							6
$\overline{c_j}$	0	$-25,2$	0	-84	$-\frac{1}{5}$	0	7812

La fonction bénéfice s'écrit : $Z = 7812 - 25,2x_2 - 84e_1 - \frac{1}{5}e_2$.

On remarque que si on augmente x_2, e_1 ou e_2, le bénéfice ne pourra que diminuer, on a atteint l'optimum.

l'optimum est atteint lorsque tous les coefficients de la ligne $\overline{c_j}$ sont tous **négatifs** ou nuls (**Pour un problème de maximisation**).

La solution est : $x_3 = 6, x_1 = 72, x_2 = 0, e_1 = 6, e_2 = e_3 = 0$

le bénéfice est : 7812 (On peut vérifier cette valeur : $72 * 87 + 258 * 6 = 7812$).

Remarques importantes

S'il n'y a pas de candidat pour quitter la base, on peut faire croître la variable entrante et donc aussi la fonction objectif autant qu'on le veut. Dans ce cas, **le problème est non borné.**

S'il y a plusieurs candidats pour quitter la base, alors n'importe lequel de ces candidats peut servir. La présence de plusieurs candidats pour quitter la base a une conséquence importante : **la dégénérescence.**

Problème d'agriculteur

Résoudre ce problème à l'aide de l'algorithme du simplexe :

$$Max\ z = 1000x_1 + 2000x_2$$

$$\begin{array}{lrcl} s.c & x_1 + x_2 & \leq & 150 \\ & 4x_1 + 2x_2 & \leq & 440 \\ & x_1 + 4x_2 & \leq & 480 \\ & x_1 & \leq & 90 \\ & x_1 \geq 0 \text{ et } x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Une société fabrique 3 sortes de produits X, Y et Z à partir de 3 sortes de composants A, B, C. Pour la production du mois d'octobre 1999, elle dispose d'un stock de :

1070 composants A

880 composants B

350 composants C

Les quantités de composants intervenant dans les fabrications sont données par le tableau suivant :

	x	y	z
A	2	1	2
B	1	2	3
C	0	1	4

Les conditions d'exploitation sont les suivantes :

	x	y	z
Prix de vente unitaire	10	8	14
Coût unitaire	3	4	7,5

Exercice 1

Une société fabrique trois produits A, B et C. La chaîne de montage comprend deux ateliers I et II. Les capacités (en kWh/jour) des ateliers sont les suivantes :

Atelier I : 720

Atelier II : 480.

Les caractéristiques de la production sont résumées dans le tableau ci-dessous. Quel est le programme de production journalier optimal?

Produit	A	B	C
Bénéfice	108	100	84
Consommation Atelier I	27	10	6
Consommation Atelier II	3	10	14

Exercice 2

L'entreprise Duralumin fabrique pour des entreprises de quincaillerie, des pièces en inox. Ces pièces sont de trois types : A,B et C. Elles sont fabriquées par lots de 50 dans un grand atelier où sont rassemblées deux machines pour la découpe de l'inox, une machine pour l'emboutissage, deux machines pour le polissage et la finition. Chaque machine fonctionne 120 heures par mois. Les caractéristiques de fabrication sont rassemblées dans le tableau suivant :

	Coût de l'heure	Lot A	Lot B	Lot C
Découpe	20 euros	1h	1,5 h	1,5h
Emboutissage	30 euros	0,5h		1h
Polissage et finition	40 euros	2h	1h	1h
Inox		50 euros	85 euros	68 euros
Prix de vente		200 euros	200 euros	210 euros