

# RECHERCHE OPÉRATIONNELLE I

Quelques variantes de la méthode du simplexe

H. KHALFI

[h.khalfi@usms.ma](mailto:h.khalfi@usms.ma)

A. METRANE

[a.metrane@usms.ma](mailto:a.metrane@usms.ma)

12 mars 2023

## Introduction

### La méthode du simplexe en deux phases

- Introduction

- Résolution par la méthode du simplexe

- Phase 2

### La méthode Grand-M

- Motivation

- Algorithme

- Utilité et limitations

### Les cas particuliers ou pathologiques

- Modèle sans solution admissible

- Modèles non bornés

Tous les contraintes sont de la forme :

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

avec tous les  $b_i$  non négatifs. Le signe de  $b_i$  pose un problème lors de l'étape d'initialisation de l'algorithme Simplex.

- introduire les variables d'écart  $e_i$
- mettre toutes les variables de décision d'origine  $x_i = 0$
- obtenir une solution de base réalisable initiale  $\Rightarrow e_i = b_i$

En effet, **l'initialisation devient un problème sérieux si les contraintes ne sont pas de la forme ci-dessus.**

$$\begin{aligned} &\max -2x_1 - x_2 \\ \text{s.c. } &-2x_1 - 3x_2 \leq -19 \\ &3x_1 + 4x_2 \leq 32 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Tous les contraintes sont de la forme :

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

avec tous les  $b_i$  non négatifs. Le signe de  $b_i$  pose un problème lors de l'étape d'initialisation de l'algorithme Simplex.

- introduire les variables d'écart  $e_i$
- mettre toutes les variables de décision d'origine  $x_i = 0$
- obtenir une solution de base réalisable initiale  $\Rightarrow e_i = b_i$

En effet, **l'initialisation devient un problème sérieux si les contraintes ne sont pas de la forme ci-dessus.**

$$\begin{array}{ll} \max -2x_1 - x_2 & \max -2x_1 - x_2 \\ \text{s.c. } -2x_1 - 3x_2 \leq -19 & \Rightarrow \text{s.c. } 2x_1 + 3x_2 - \mathbf{e_1} = 19 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 32 & 3x_1 + 4x_2 + \mathbf{e_2} = 32 \\ x_1, x_2 \geq 0 & x_1, x_2, \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2} \geq 0 \end{array}$$

**La solution de base évidente est non réalisable ( $\mathbf{e_1} < 0$ )!!!**

## Idée

$$\begin{aligned} & \max -2x_1 - x_2 \\ \text{s.c. } & 2x_1 + 3x_2 - \mathbf{e}_1 = 19 \\ & 3x_1 + 4x_2 + \mathbf{e}_2 = 32 \\ & x_1, x_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \geq 0 \end{aligned}$$

## Idée

$$\begin{array}{ll} \max -2x_1 - x_2 & \\ \text{s.c. } 2x_1 + 3x_2 - e_1 = 19 & \\ 3x_1 + 4x_2 + e_2 = 32 & \\ x_1, x_2, e_1, e_2 \geq 0 & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ll} \max -2x_1 - x_2 & \\ \text{s.c. } 2x_1 + 3x_2 - e_1 + a_1 = 19 & \\ 3x_1 + 4x_2 + e_2 = 32 & \\ x_1, x_2, e_1, e_2, a_1 \geq 0 & \end{array}$$

**Nouvelle solution de base réalisable en prenant  $a_1 = 19$  et  $e_2 = 32$ .**

Dans ce chapitre, nous introduirons le concept de variable artificielle pour remédier à ce problème :

1. la méthode en deux phases;
2. La méthode Big-M.

## Observation

Ce n'est pas toujours simple de construire le tableau initial de la méthode du simplexe. Une solution de base réalisable n'est pas toujours simple de la trouver.

Nous essayons de traiter ce problème dans ce chapitre à l'aide de l'exemple suivant (PL) :

$$\text{Max } Z = 2000x_1 + 1000x_2$$

$$\text{s.c} \quad 10x_1 + 5x_2 \leq 200$$

$$2x_1 + 3x_2 = 60$$

$$\text{(PL)} \quad x_1 \leq 12$$

$$x_2 \geq 6$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

## l'ajout de variable d'écart (PLS)

$$\text{Max } Z = 2000x_1 + 1000x_2$$

$$\text{s.c} \quad 10x_1 + 5x_2 + e_1 = 200$$

$$2x_1 + 3x_2 = 60$$

$$\text{(PLS)} \quad x_1 + e_3 = 12$$

$$x_2 - e_4 = 6$$

$$x_i \geq 0, e_j \geq 0$$



## l'ajout de variable d'écart (*PLS*)

$$\text{Max } Z = 2000x_1 + 1000x_2$$

$$\text{s.c} \quad 10x_1 + 5x_2 + e_1 = 200$$

$$2x_1 + 3x_2 = 60$$

$$\text{(PLS)} \quad x_1 + e_3 = 12$$

$$x_2 - e_4 = 6$$

$$x_i \geq 0, e_j \geq 0$$

## Proposition

$$(PL) \Leftrightarrow (PLS)$$

Solution de base réalisable?

## l'ajout de variable d'écart (*PLS*)

$$\text{Max } Z = 2000x_1 + 1000x_2$$

$$\text{s.c} \quad 10x_1 + 5x_2 + e_1 = 200$$

$$2x_1 + 3x_2 = 60$$

$$\text{(PLS)} \quad x_1 + e_3 = 12$$

$$x_2 - e_4 = 6$$

$$x_i \geq 0, e_j \geq 0$$

## Proposition

$$(PL) \Leftrightarrow (PLS)$$

Solution de base réalisable? pas facile de la trouver!!

L'approche géométrique qu'on peut utiliser pour trouver la solution optimale est valable uniquement en dimension 2 ou au maximum en dimension 3. La plupart des modèles rencontrés en pratique ne satisfont pas à cette condition. Il existe une autre façon de procéder, de nature algébrique, qui utilise astucieusement l'algorithme du simplexe et cela **en ajoutant des variables appelées *artificielles* dans les contraintes non réalisables si on remplace les variables originales par 0 dans le (PLS).**

## Problème (PLF)

$$\text{Max } Z = 2000x_1 + 1000x_2$$

$$\text{s.c} \quad 10x_1 + 5x_2 + e_1 = 200$$

$$2x_1 + 3x_2 + a_2 = 60$$

$$\text{(PLF)} \quad x_1 + e_3 = 12$$

$$x_2 - e_4 + a_4 = 6$$

$$x_i \geq 0, e_j \geq 0, a_2, a_4 \geq 0$$

## Proposition

$$(PLS \Leftrightarrow PLF) \iff a_2 = a_4 = 0$$

## Objectif

Pour obtenir un modèle équivalent à (PLS), il faudrait ajouter au modèle précédent la double contrainte suivante :

$$a_2 = a_4 = 0$$

ce qui nous ramènerait à la situation de départ!

L'astuce consiste à ne inclure la double contrainte dans le modèle, mais à utiliser une fonction-objectif qui pénalise le fait que les variables artificielles prennent des valeurs positives. On considère ici le modèle ( $PMF_I$ ) obtenu du modèle précédent en substituant à  $z = 2000x_1 + 1000x_2$  l'objectif suivant :

$$\text{Min } z_A = a_2 + a_4 \text{ ou } \text{Max } z_A = -a_2 - a_4$$

## Problème ( $PLF_I$ )

$$\text{Min } Z_a = a_2 + a_4$$

$$\text{s.c} \quad 10x_1 + 5x_2 + e_1 = 200$$

$$2x_1 + 3x_2 + a_2 = 60$$

$$(\text{PLF}_I) \quad x_1 + e_3 = 12$$

$$x_2 - e_4 + a_4 = 6$$

$$x_i \geq 0, e_j \geq 0, a_2, a_4 \geq 0$$

## Solution de base réalisable

$(x_1, x_2) = (0, 0)$ ,  $(e_1, e_3, e_4) = (200, 12, 0)$  et  $(a_2, a_4) = (60, 6)$ . On a 4 contraintes et 7 variables, par suite 7-4 variables nulles.

$x_1, x_2$  et  $e_4$  sont hors base.

$e_1, e_3, a_2$  et  $a_4$  sont de base.

## Remarque

Il ne faut pas que la fonction objectif soit en fonction des variables de bases :

$$Z_a = a_2 + a_4 = (60 - 2x_1 - 3x_2) + (6 - x_2 + e_4) = 66 - 2x_1 - 4x_2 + e_4$$

Si à la fin de résolution, la fonction objectif de  $PLF_I$  est non nulle, alors  $PLS$  n'admet pas de solution réalisable.

## Tableau initial de la phase I

V.B	x1	x2	e1	e3	e4	a2	a4	b
e1	10	5	1	0	0	0	0	200
a2	2	3	0	0	0	1	0	60
e3	1	0	0	1	0	0	0	12
a4	0	1	0	0	-1	0	1	6
C.j	0	0	0	0	0	1	1	

Ce n'est pas un vrai tableau du simplexe puisque il faut que les coûts des variables de base soient égales à 0

$$L'_5 = L_5 - L_2 \quad \text{et} \quad L''_5 = L'_5 - L_4$$

V.B	x1	x2	e1	e3	e4	a2	a4	b	Ratio
e1	10	5	1	0	0	0	0	200	40
a2	2	3	0	0	0	1	0	60	20
e3	1	0	0	1	0	0	0	12	$\infty$
a4	0	1	0	0	-1	0	1	6	6
C.j	-2	-4	0	0	1	0	0	-66	0

V.B	x1	x2	e1	e3	e4	a2	a4	b	Ratio
e1	10	0	1	0	5	0	-5	170	34
a2	2	0	0	0	3	1	-3	42	14
e3	1	0	0	1	0	0	0	12	$\infty$
x2	0	1	0	0	-1	0	1	6	$\infty$
C.j	-2	0	0	0	-3	0	4	-42	0



## Tableau final de la phase I

V.B	x1	x2	e1	e3	e4	a2	a4	b
e1	6,67	0	1	0	0	-1,67	0	100
e4	0,67	0	0	0	1	0,33	-1	14
e3	1	0	0	1	0	0	0	12
x2	0,67	1	0	0	0	0,33	0	20
C.j	0	0	0	0	0	1	1	0

Figure – Tableau final de la phase 1

## Fin de la phase 1

Le dernier tableau est final de la phase 1 puisque tous les éléments de la ligne  $\bar{C}_j$  sont tous positifs.

Comme la valeur optimal du  $(PLF_I)$  est 0, alors ce tableau final fournira une solution de base réalisable de  $(PLS)$  qui est  $(x_1, x_2) = (0, 20)$  et  $(e_1, e_3, e_4) = (100, 12, 14)$ . Le tableau initial de la phase 2 sera construit à partir du tableau final de la phase 1.

Si la valeur optimal du  $(PLF_I)$  n'est pas égal à zéro ( $Z_a \neq 0$ ), alors  **$PLS$  n'admet pas de solution réalisable.**

## Tableau initial de la phase II

La phase II reprend l'objectif original qui était de maximiser  $z = 2000x_1 + 1000x_2$ . Le tableau initial de la phase II s'obtient en modifiant le dernier tableau de la première phase de la façon suivante :

Les colonnes associées aux variables artificielles sont supprimées;

La dernière lignes est recalculée à partir des nouveaux coefficients de base.

## Remarque

$$Max 2000x_1 + 1000x_2 = -Min - 2000x_1 - 1000x_2$$

Alors résoudre un problème de maximisation revient à résoudre un problème de minimisation avec un signe (-) près.

## Tableau initial de la phase II

V.B	x1	x2	e1	e3	e4	b
e1	20/3	0	1	0	0	100
e4	2/3	0	0	0	1	14
e3	1	0	0	1	0	12
x2	2/3	1	0	0	0	20
C.j	2000	1000	0	0	0	Z

Figure – Tableau Initial de la phase II

Ce n'est pas un vrai tableau de simplexe puisque le coût d'une variable de base est différent de 0

## Tableau initial de la phase II

$$L'_5 = L_5 - 1000L_4$$

V.B	x1	x2	e1	e3	e4	b	Ratio
e1	6,67	0	1	0	0	100	15
e4	0,67	0	0	0	1	14	21
e3	1	0	0	1	0	12	12
x2	0,67	1	0	0	0	20	30
C.j	1333,33	0	0	0	0	-20000	0

Ce Tableau n'est pas final puisque il y a au moins un élément de la ligne  $C_j$  (Coût réduit) qui est positif.

## Tableau suivant de la phase II

V.B	x1	x2	e1	e3	e4	b
e1	0	0	1	-6,67	0	20
e4	0	0	0	-0,67	1	6
x1	1	0	0	1	0	12
x2	0	1	0	-0,67	0	12
C.j	0	0	0	-1333,33	0	-36000

Ce Tableau est final puisque tous les éléments de la ligne  $C_j$  (Coût réduit) sont tous négatifs ou nuls.

## Fin de Phase II

Puisque tous les valeurs de la dernière ligne ( $\bar{c}_j$ ) sont négatives ou nulles, alors le dernier tableau est final, par suite la solution optimal et  $(x_1, x_2) = (12, 12)$

## Remarques

Si on n'a pas une solution de base réalisable simple (Évidante) pour (PLS), alors il faut faire la phase 1 de la méthode du simplexe dont le but de trouver cette solution de base réalisable, et on a les deux cas suivantes :

Si  $Z_a \neq 0$ , alors il n'existe aucune solution réalisable et par suite aucune solution du (PL).

Si  $Z_a = 0$ , alors le domaine réalisable et non vide, en plus on peut trouver une solution de base réalisables à partir du tableau final de la phase 1. Le dernier tableau de la phase 1 sera le tableau initial de la phase 2 en supprimant les colonnes des variables artificielles et en recalculant la dernière ligne ( $\bar{c}_j$ ).

## Quelques points à améliorer

- méthode des deux phases ne tient pas compte de la fonction objectif dans sa première étape.
- on risque d'obtenir une solution réalisable très éloignée de l'optimum du problème d'origine.

La méthode grand M est une variante de la méthode simplex conçue pour résoudre des problèmes comprenant généralement des contraintes "supérieures à" ainsi que des contraintes "inférieures à", où le vecteur zéro ne représente pas une solution réalisable.

Le « **grand M** » fait référence à un grand nombre associé aux variables artificielles, représenté par la lettre M.



## Principe de la méthode

Plutôt que de diviser le problème d'optimisation en deux problèmes séparés, on va directement intégrer les variables artificielles dans les contraintes initiales.

Plutôt que de diviser le problème d'optimisation en deux problèmes séparés, on va directement intégrer les variables artificielles dans les contraintes initiales.

### Comment?

**Idée de base :** La méthode du grand M consiste à optimiser en utilisant une fonction objective formée de la fonction objectif initiale et de la somme, très fortement pénalisée, des variables artificielles.

$$\text{Max } Z = 2000x_1 + 1000x_2 - Ma_2 - Ma_4$$

subject to

$$\begin{array}{rclcl} 10x_1 + 5x_2 & +e_1 & = & 200 & \\ 2x_1 + 3x_2 & & +a_2 & = & 60 \\ x_1 & +e_3 & = & 12 & \\ x_2 & -e_4 +a_4 & = & 6 & \end{array} \quad (1)$$

$$\text{and } x_1, x_2, e_1, e_3, e_4, a_2, a_4 \geq 0$$

## Algorithme

**Étape 1 :** Introduire les variables artificielles dans chaque ligne de contrainte qui empêche l'obtention d'une solution de base réalisable.

**Étape 2 :** Ajouter une pénalisation des variable artificielle à la fonction objectif :  
Pour une maximisation  $z = c^t \cdot x - M a_1 - M a_2 - \dots - M a_m$ .  
( pour une minimisation  $z = c^t \cdot x + M a_1 + M a_2 + \dots + M a_m$ )

**Étape 3 :** Ajuster la forme du tableau initiale pour mettre les variables artificielle dans la base.

**Étape 4 :** Résoudre le problème par la méthode du simplexe standard.

Si le problème est réalisable, à la fin de la résolution on une solution optimale tel que  $\forall i a_i = 0$ , si non le problème est non réalisable.

## Tableau initial de la méthode

$V.B$	$x_1$	$x_2$	$e_1$	$e_3$	$e_4$	$a_2$	$a_4$	$b$
$e_1$	10	5	1	0	0	0	0	200
$a_2$	2	3	0	0	0	1	0	60
$e_3$	1	0	0	1	0	0	0	12
$a_4$	0	1	0	0	-1	0	1	6
$C_j$	2000	1000	0	0	0	$-M$	$-M$	$Z$

Figure – Tableau initial de la méthode

$V.B$	$x_1$	$x_2$	$e_1$	$e_3$	$e_4$	$a_2$	$a_4$	$b$
$e_1$	10	5	1	0	0	0	0	200
$a_2$	2	3	0	0	0	1	0	60
$e_3$	1	0	0	1	0	0	0	12
$a_4$	0	1	0	0	-1	0	1	6
$C_j$	$2000 + 2M$	$1000 + 4M$	0	0	$-M$	0	0	$Z + 66M$

Figure – Tableau initial de la méthode après correction

# Résolution par simplexe usuelle

→ Iteration 1 :

<i>V.B</i>	$x_1$	$x_2$	$e_1$	$e_3$	$e_4$	$a_2$	$a_4$	$b$	<i>Ratio</i>
$e_1$	10	5	1	0	0	0	0	200	40
$a_2$	2	3	0	0	0	1	0	60	30
$e_3$	1	0	0	1	0	0	0	12	$\infty$
$a_4$	0	1	0	0	-1	0	1	6	6
$C_j$	$2000 + 2M$	$1000 + 4M$	0	0	$-M$	0	0	$Z + 66M$	

→ Iteration 2 :

<i>V.B</i>	$x_1$	$x_2$	$e_1$	$e_3$	$e_4$	$a_2$	$a_4$	$b$	<i>Ratio</i>
$e_1$	10	0	1	0	5	0	0	170	$170/5 = 34$
$a_2$	2	0	0	0	3	1	0	42	$42/3 = 14$
$e_3$	1	0	0	1	0	0	0	12	$\infty$
$x_2$	0	1	0	0	-1	0	1	6	$\infty$
$C_j$	$2000 + 2M$	0	0	0	$1000 + 3M$	0	0	$Z - 6000 + 42M$	

# Résolution par simplexe usuelle

→ Itération 3 :

<i>V.B</i>	<i>x1</i>	<i>x2</i>	<i>e<sub>1</sub></i>	<i>e<sub>3</sub></i>	<i>e<sub>4</sub></i>	<i>a<sub>2</sub></i>	<i>a<sub>4</sub></i>	<i>b</i>	<i>Ratio</i>
<i>e<sub>1</sub></i>	20/3	0	1	0	0	0	0	100	300/20 = 15
<i>e<sub>4</sub></i>	2/3	0	0	0	1	1/3	0	14	3/2 * 14 = 21
<i>e<sub>3</sub></i>	1	0	0	1	0	0	0	12	12
<i>x<sub>2</sub></i>	2/3	1	0	0	0	0	1	20	60/2 = 30
<i>C<sub>j</sub></i>	4000/3	0	0	0	0	-1000/3 - <i>M</i>	0	<i>Z</i> - 20000	

→ Résultat :

<i>V.B</i>	<i>x1</i>	<i>x2</i>	<i>e<sub>1</sub></i>	<i>e<sub>3</sub></i>	<i>e<sub>4</sub></i>	<i>a<sub>2</sub></i>	<i>a<sub>4</sub></i>	<i>b</i>
<i>e<sub>1</sub></i>	0	0	1	-20/3	0	0	0	20
<i>e<sub>4</sub></i>	0	0	0	-2/3	0	1/3	0	6
<i>x<sub>1</sub></i>	1	0	0	1	0	0	0	12
<i>x<sub>2</sub></i>	0	1	0	-2/3	0	0	1	12
<i>C<sub>j</sub></i>	0	0	0	-4000/3	0	-1000/3 - <i>M</i>	0	<i>Z</i> - 36000

## Exemple 1

On cherche à résoudre le problème  $\min z = 2x_1 + 3x_2$

$$\begin{aligned} \text{s.c.} \quad & (1/2)x_1 + (1/4)x_2 \leq 4 \\ & x_1 + 3x_2 \geq 20 \\ & x_1 + x_2 = 10 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned} \tag{2}$$

## Exemple 1

On cherche à résoudre le problème  $\min z = 2x_1 + 3x_2$

$$\begin{aligned} \text{s.c.} \quad & (1/2)x_1 + (1/4)x_2 \leq 4 \\ & x_1 + 3x_2 \geq 20 \\ & x_1 + x_2 = 10 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned} \tag{2}$$

La forme standard du problème est :

$$\begin{aligned} \min z &= 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.c.} \quad & (1/2)x_1 + (1/4)x_2 + e_1 = 4 \\ & x_1 + 3x_2 - e_2 = 20 \\ & x_1 + x_2 = 10 \\ & x_1, x_2, e_1, e_2 \geq 0 \end{aligned}$$



Après l'Étape 1 et 2 :

$$\min z = 2x_1 + 3x_2 + Ma_2 + Ma_3$$

S.C.

$$(1/2)x_1 + (1/4)x_2 + e_1 = 4$$

$$x_1 + 3x_2 - e_2 + a_2 = 20$$

$$x_1 + x_2 + a_3 = 10$$

$$x_1, x_2, e_1, e_2, a_2, a_3 \geq 0$$

On obtient

$V.B$	$x_1$	$x_2$	$e_1$	$e_2$	$a_2$	$a_3$	$b$
$e_1$	0	0	1	$-1/8$	$1/8$	$-5/8$	$1/4$
$x_2$	0	1	0	$1/2$	$1/2$	$-1/2$	5
$x_1$	1	0	0	$1/2$	$-1/2$	$3/2$	5
$C_j$	0	0	0	$1/2$	$(2M-1)/2$	$(2M-3)/2$	$Z-25$

La solution après deux itérations du simplexe est  $x_1 = 5, x_2 = 5 \Rightarrow z = 25$

## Exemple 2

On cherche à résoudre le problème :  $\min z = 0.4x_1 + 0.5x_2$  s.c.

$$0.3x_1 + 0.1x_2 \leq 2.7$$

$$0.5x_1 + 0.5x_2 = 6$$

$$0.6x_1 + 0.4x_2 \geq 6$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

## Exemple 2

On cherche à résoudre le problème :  $\min z = 0.4x_1 + 0.5x_2$  s.c.

$$0.3x_1 + 0.1x_2 \leq 2.7$$

$$0.5x_1 + 0.5x_2 = 6$$

$$0.6x_1 + 0.4x_2 \geq 6$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Nous devons tout d'abord transformer le système de contraintes afin de pouvoir traiter un système linéaire :

$$0.3x_1 + 0.1x_2 + e_1 = 2.7$$

$$0.5x_1 + 0.5x_2 = 6$$

$$0.6x_1 + 0.4x_2 - e_3 = 6$$

$$e_1 \geq 0, e_3 \geq 0$$

En ajoutant les variables artificielles, nous obtenons :

$$0.3x_1 + 0.1x_2 + e_1 = 2.7$$

$$0.5x_1 + 0.5x_2 + a_2 = 6$$

$$0.6x_1 + 0.4x_2 - e_3 + a_3 = 6$$

$$e_1 \geq 0, e_3 \geq 0, a_2 \geq 0, a_3 \geq 0$$

En ajoutant les variables artificielles, nous obtenons :

$$0.3x_1 + 0.1x_2 + e_1 = 2.7$$

$$0.5x_1 + 0.5x_2 + a_2 = 6$$

$$0.6x_1 + 0.4x_2 - e_3 + a_3 = 6$$

$$e_1 \geq 0, e_3 \geq 0, a_2 \geq 0, a_3 \geq 0$$

Afin de démarrer la méthode du simplexe, nous appliquons une des deux méthodes :

Méthode à deux phases

**Phase 1 :** minimiser  $\min a_2 + a_3$  jusqu'à obtenir une valeur optimale nulle (si le programme linéaire à une solution réalisable).

**Phase 2 :** minimiser  $\min z = 0.4x_1 + 0.5x_2$ .

Méthode du grand M pour l'optimisation du problème :

$$\min z = 0.4x_1 + 0.5x_2 + Ma_2 + Ma_3$$

Sur le plan conceptuelle la méthode grand M est utile pour formuler certaines contraintes.

Soit la  $C$  une quantité de crédit que vous recevrez si vous réussissez à un cours. Votre succès dépend de trois facteurs :

- $p = 1$  si le professeur est bon ; 0 autrement.
- $a = 1$  si vous assistez au cours ; 0 autrement.
- $t = 1$  si vous travaillez chez vous ; 0 autrement.

Écrire la contrainte indiquant que si le professeur est bon et vous assistez le cours et que vous travaillez chez vous, alors le nombre de crédit  $x$  crédits que vous recevrez grâce à ce cours devrait être supérieure à  $C$ .

Sur le plan conceptuelle la méthode grand M est utile pour formuler certaines contraintes.

Soit la  $C$  une quantité de crédit que vous recevrez si vous réussissez à un cours. Votre succès dépend de trois facteurs :

- $p = 1$  si le professeur est bon ; 0 autrement.
- $a = 1$  si vous assistez au cours ; 0 autrement.
- $t = 1$  si vous travaillez chez vous ; 0 autrement.

Écrire la contrainte indiquant que si le professeur est bon et vous assistez le cours et que vous travaillez chez vous, alors le nombre de crédit  $x$  crédits que vous recevrez grâce à ce cours devrait être supérieure à  $C$ .

Au lieu de travailler avec une contrainte non linéaire  $x \geq C p a t$ . On peut utiliser la contrainte linéaire :

$$x \geq C - M(3 - p - a - t)$$



## Désavantage de La méthode

- La question difficile est : Quelle doit être la taille de  $M$ ?
- Si le nombre de variables artificielles est trop grand, des difficultés numériques sérieuses empêchent la méthode de converger vers la solution optimale. En effet à cause du choix imprécis de grand  $M$ , plusieurs erreurs de majoration s'accumulent.
- la faisabilité n'est pas connue jusqu'à l'optimalité.
- La méthode grand  $M$  n'est jamais utilisée dans des codes commerciaux car elle est inférieure à la méthode à deux phases lorsque le problème a beaucoup de paramètres.

(PL)

$$\text{Max } Z = 1000x_1 + 2000x_2$$

$$\text{s.c} \quad 10x_1 + 5x_2 \leq 200$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 60$$

$$(PL_1) \quad x_1 \geq 34$$

$$2x_2 \geq 14$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

## l'ajout de variable d'écart (*PLS*)

$$\text{Max } Z = 1000x_1 + 2000x_2$$

$$\text{s.c} \quad 10x_1 + 5x_2 + e_1 = 200$$

$$2x_1 + 3x_2 + e_2 = 60$$

$$\text{(PLS)} \quad x_1 - e_3 = 34$$

$$2x_2 - e_4 = 14$$

$$x_i \geq 0, e_j \geq 0$$

## L'ajout de variable artificielle ( $PLF_I$ )

Puisque  $(x_1, x_2) = (0, 0)$  n'est pas réalisable, alors on aura besoin de la phase 1. On ajoute uniquement des variables artificielles pour la 3<sup>ème</sup> et 4<sup>ème</sup> contraintes

$$\text{Min } Z_a = a_3 + a_4$$

$$\begin{array}{llll} \text{s.c} & 10x_1 + 5x_2 + e_1 & = & 200 \\ & 2x_1 + 3x_2 + e_2 & = & 60 \\ (PLF_1) & x_1 - e_3 + a_3 & = & 34 \\ & 2x_2 - e_4 + a_4 & = & 14 \\ & x_i \geq 0, e_j \geq 0, & a_3, a_4 \geq 0 & \end{array}$$

## Itération 1 et 2 de phase I

V.B	x1	x2	e1	e2	e3	a3	e4	a4	b	Ratio
e1	10	5	1	0	0	0	0	0	200	40
e2	2	3	0	1	0	0	0	0	60	20
a3	1	0	0	0	-1	1	0	0	34	$\infty$
a4	0	2	0	0	0	0	-1	1	14	7
C.j	-1	-2	0	0	1	0	1	0	48	0

V.B	x1	x2	e1	e2	e3	a3	e4	a4	b	Ratio
e1	10	0	1	0	0	0	2,5	-2,5	165	16,5
e2	2	0	0	1	0	0	1,5	-1,5	39	19,5
a3	1	0	0	0	-1	1	0	0	34	34
x2	0	1	0	0	0	0	-0,5	0,5	7	$\infty$
C.j	-1	0	0	0	1	0	0	1	34	0

## Fin de la phase I

V.B	x1	x2	e1	e2	e3	a3	e4	a4	b
x1	1	0	0,1	0	0	0	0,25	-0,25	16,5
e2	0	0	-0,2	1	0	0	1	-1	6
a3	0	0	-0,1	0	-1	1	-0,25	0,25	17,5
x2	0	1	0	0	0	0	-0,5	0,5	7
C.j	0	0	0,1	0	1	0	0,25	0,75	17,5

C'est le tableau final de la phase 1 puisque tous les coefficients de la ligne des coûts sont tous positifs (Problème de minimisation). Alors Comme la valeurs optimale ( $Z_a$ ) de la phase 1 est non nulle ( $Z_a = 17.5 \neq 0$ ) alors il n'existe aucune solution réalisable. Par suite, le problème ( $PL_1$ ) n'admet pas de solution.

## (Modèles non bornés)

$$\text{Max } Z = x_1 + 2x_2$$

$$\begin{array}{llll} \text{s.c} & -2x_1 + 3x_2 & \leq & 6 \\ & 6x_1 - 9x_2 & \leq & 18 \\ & x_1 & \geq & 1 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$