RECHERCHE OPÉRATIONNELLE I

Modéliser, Analyser et Résoudre des programmes linéaires

H. KHALFI
h.khalfi@usms.ma

A. METRANE
a.metrane@usms.ma

29 janvier 2024

Objectif

Vous **sensibilisez** aux outils de la recherche opérationelle et ses applications.

- → **Modélisation** d'un problem ;
- → **Analyse d'optimalité** des modèles linéaires ;
- → **Techniques Algorithmiques** de résolutions ;
- → **Post-Analyse** de la solution.

Domaines d'applications

→ Gestion de la chaine logistique

- Confection de tournées (véhicules de livraisons, routes de facteurs, déneigement/ramassage des ordures, transport en commun, aviation civile, etc.)
- Localisation d’entrepôts/usines (détermination du nombre optimal, localisation, affectation des clients aux entrepôts/usines)
- Gestion des inventaires (niveaux et stratégies de commandes optimales)
- Gestion intégrée de la chaîne logistique (commandes aux fournisseurs, localisation des entrepôts et usines, gestion des inventaires, tournées de livraisons, etc.)

→ Finance

- Composition optimale de portefeuilles

Domaines d'applications

→ Marketing

- Répartition d'un budget de publicité
- Nombre et localisation de succursales
- Partage des territoires de ventes
- Tarification (prix de vente, etc.)

→ Gestion des ressources humaines

- Affectation de personnel à des tâches/postes
- Confection d'horaires de personnel

Competences ciblées

- → Apprendre à modéliser quelques problèmes réels ;
- → Argumenter vos stratégies de résolutions et d'analyse ;
- → Acquérir une démarche rigoureuse de prise de décision.

Définition de la R.O.

Science du **comment mieux faire avec moins**. c'est un ensemble d'outils pour

- → rationaliser
- → simuler
- → optimiser
- → planifier

l'architecture et le fonctionnement des systèmes industriels et économiques ; ce qui permet aux décideurs de faire des choix éfficaces et robustes.

Le rôle de la R.O.

Trouver l'équilibre optimal entre des facteurs qui s'opposent dans un système complexe

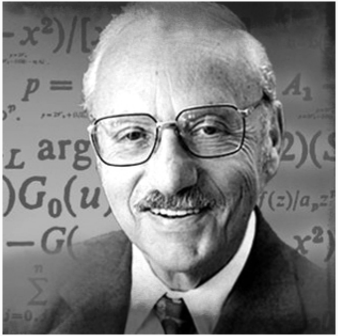
Exemple : Dans une entreprise :

- Nombres d'ouvriers et de machine => Limitation de la production
- Commandes, ventes et profits => Encouragent la production

Un bref historique de la recherche opérationnelle

À propos de la RO, on a parlé d’une méthode, d’une approche, d’un ensemble de techniques, d’une activité née d’une collaboration multidisciplinaire, d’un prolongement des mathématiques, de la statistique, de l’économie et de l’ingénierie. On a parlé d’une vocation même. La RO, c’est tout cela et un peu plus, mais c’est surtout la recherche d’optimisation d’un processus.

L'algorithme du simplexe (1939)



"It happened because during my first year at Berkeley I arrived late one day at one of [Jerzy] Neyman's classes. On the blackboard there were two problems that I assumed had been assigned for homework. I copied them down. A few days later I apologized to Neyman for taking so long to do the homework   the problems seemed to be a little harder than usual. I asked him if he still wanted it. He told me to throw it on his desk...To make a long story short, the problems on the blackboard that I had solved thinking they were homework were in fact two famous unsolved problems in statistics."

L'algorithme du simplexe

En 1945, on comptait en RO plus de 1000 personnes dans les groupes américains et près de 400 dans les groupes anglais. L'industrie civile américaine n'adopta pas tout de suite la méthodologie de la RO. La résistance au changement y fut très forte. En fait, le vent vint de l'Angleterre où, après la guerre, la nationalisation de grandes industries (charbon, gaz, électricité, rail et transport routier) donna le banc d'essai que nécessitait l'implantation de cette philosophie. Aux États-Unis, la conversion à la nouvelle philosophie se fit d'abord dans les universités, où les services armés financèrent la poursuite de recherches amorcées pendant la guerre.

Histoire de Succès

Le raffinage du pétrole

Un modèle adopté en 1989 chez Texaco dicte la quantité des différents pétroles bruts à transformer en chacune des sortes d'essence. Le modèle tient compte des 14 caractéristiques à considérer dans la composition d'une essence (dont le pourcentage de plomb et de soufre, l'indice d'octane...). Texaco estime les économies réalisées grâce à ce modèle à 30 millions de dollars par année.

Histoire de Succès

Le raffinage du pétrole

Un modèle adopté en 1989 chez Texaco dicte la quantité des différents pétroles bruts à transformer en chacune des sortes d'essence. Le modèle tient compte des 14 caractéristiques à considérer dans la composition d'une essence (dont le pourcentage de plomb et de soufre, l'indice d'octane…). Texaco estime les économies réalisées grâce à ce modèle à 30 millions de dollars par année.

La gestion des forces policières

Le déploiement des policiers de San Francisco a donné lieu, en 1989, à une réorganisation qui tient compte des contraintes de congés, de vacances, d'absences motivées par la maladie, de l'urgence d'intervenir dans des secteurs à risque… Ainsi, 11 millions de dollars son épargnés annuellement ; l'attente après une demande d'intervention s'est écourtée de 20% ; les amendes relatives aux infractions en matière de stationnement ont augmenté de 3 millions de dollars par année

Histoire de Succès

La gestion du transport routier

La compagnie Yellow Freight System exploite un important parc decamions de toutes tailles, dont 45000 camions à remorque. Chaque année, pour ses 300.000 clients répartis dans 35.000 villes américaines, Yellow réalise 15 millions d'expéditions, chacune inférieure à une charge complète. Chaque jour, après le ramassage et la consolidation, Yellow doit prévoir le départ de 10.000 camions. L'organisation de cet horaire quotidien relève des gestionnaires ; ces derniers utilisent le progiciel SYSNET.

Histoire de Succès

La gestion du transport routier

La compagnie Yellow Freight System exploite un important parc decamions de toutes tailles, dont 45000 camions à remorque. Chaque année, pour ses 300.000 clients répartis dans 35.000 villes américaines, Yellow réalise 15 millions d'expéditions, chacune inférieure à une charge complète. Chaque jour, après le ramassage et la consolidation, Yellow doit prévoir le départ de 10.000 camions. L'organisation de cet horaire quotidien relève des gestionnaires ; ces derniers utilisent le progiciel SYSNET.

La gestion du transport des compagnies de chemins de fer

Les compagnies de chemins de fer disposent de modèles pour répartir sur leurs réseaux les divers types de wagons vides destinés à transporter les marchandises. Le modèle permet d'acheminer au moindre coût les wagons là où ils sont requis.

Histoire de Succès

La gestion du transport aérien

Les décisions concernant les itinéraires des appareils aériens, l'horaire des vols, les quantités de carburant achetées dans les divers aéroports où atterrissent les appareils, la constitution des équipages, l'organisation des horaires du personnel au sol, rien de tout cela n'est étranger à la RO.

Histoire de Succès

La gestion du transport aérien

Les décisions concernant les itinéraires des appareils aériens, l'horaire des vols, les quantités de carburant achetées dans les divers aéroports où atterrissent les appareils, la constitution des équipages, l'organisation des horaires du personnel au sol, rien de tout cela n'est étranger à la RO.

La gestion hospitalière

La gestion hospitalière est aussi un champ d'exercice de la RO : en plus d'aider à établir les horaires du personnel, elle permet d'élaborer les menus des patients, de contrôler les stocks de produits sanguins et de gérer l'attribution des salles de chirurgie. Le déploiement adéquat des véhicules d'intervention médicale est assuré dans de nombreuses villes à l'aide de la RO ; on cherche ainsi à assurer aux citoyens l'intervention la plus rapide possible.

Histoire de Succès

Organization	Problem	Annual Saving
Continental Airlines	Reassign crews to flights when schedule disruptions occur	$40 million
Samsung	Reduce manufacturing times and inventory levels	$200 million
P&G	Redesign the production and distribution system	$200 million
HP	Product portfolio management	$180 million
Taco Bell	Plan employee work schedules at restaurants	$13 million
Sears	Vehicle routing and scheduling for home services and deliveries	$42 million
Time Inc.	Management of magazine distribution channels	$3.5 million

Histoire de Succès

Domaines de Production

maximiser le profit selon la disponibilité de la main d’oeuvre, demande du marché, capacité de production, prix de revient du matériau brut ...
(Maximiser le bénifice)

Histoire de Succès

Domaines de Production

maximiser le profit selon la disponibilité de la main d'oeuvre, demande du marché, capacité de production, prix de revient du matériau brut ... (Maximiser le bénifice)

Domaine de gestion de Transport

minimiser distance totale parcourue selon quantités de matériaux à transporter, capacité des transporteurs, points de ravitaillement en carburant...(Minimiser les perte)

Exemple I

Le plus court ?

Le plus rapide ?

Le plus touristique ?

Exemple I

Il s'agit de :

→ determiner **le meilleur** circuit de Tata vers Marrakech.

Pour cela, il faut :

→ préciser les **itineraires possibles** pour vous ;

→ préciser le **critere de choix**.

Exemple II

Le plus nutritif ?

Le plus rapide à préprer ?

Le moins cher ?

Exemple II

Il s'agit de :

$\rightarrow$ determiner la **composition optimale** de votre menu.

Pour cela, il faut :

- $\rightarrow$ décrir les differentes **caracteristiques** du menus possibles ;
- $\rightarrow$ préciser le **critere** qui permet de comparer deux menus.

Les étapes de formulation d'un PL

Généralement il y a trois étapes à suivre pour pouvoir construire le modèle d'un programme linéaire :

- $\rightarrow$ Identifier les variables du problème à valeur non connues (**variables de décision**) et les représenter sous forme symbolique (exp. x_1, x_2, x_2, y_1, ...).
- $\rightarrow$ Identifier les restrictions (**contraintes**) du problème et les exprimer par un système d'équations linéaires.
- $\rightarrow$ Identifier le critère de sélection (**fonction objective**) et le représenter sous une forme linéaire en fonction des variables de décision. Spécifier si le critère de sélection est à maximiser ou à minimiser.

Exemple : Problème d'agriculture

Un agriculteur veut allouer 150 hectares de surface irrigable entre culture de tomates et celles de piments. Il dispose de 480 heures de main-d'œuvre et de $440m^3$ d'eau. Un hectare de tomates demande 1 heure de main-d'œuvre, $4m^3$ d'eau et donne un bénéfice net de 1000 dirhams. Un hectare de piments demande 4 heures de main-d'œuvre, $2m^3$ d'eau et donne un bénéfice net de 2000 dirhams.
Le bureau du périmètre irrigué veut protéger le prix des tomates et ne lui permet pas de cultiver plus de 90 hectares de tomates. Quelle est la meilleure allocation de ses ressources ?

Etape 1 : Variables de décision

Identification des variables de décision. Les deux activités que l'agriculteur doit déterminer sont les surfaces à allouer pour la culture de tomates et de piments :

x_1 : la surface allouée à la culture des tomates
x_2 : la surface allouée à la culture des piments.

On vérifie bien que les variables de décision x_1 et x_2 sont positives :

$$x_1 \geq 0 \ \texttt{et} \ x_2 \geq 0$$

Etape 2 : Les contraintes

Identification des contraintes. Dans ce problème les contraintes représentent la disponibilité des facteurs de production :

Terrain : l'agriculteur dispose de 150 hectares de terrain, ainsi la contrainte liée à la limitation de la surface de terrain est $x_1 + x_2 \leq 150$.

Etape 2 : Les contraintes

Identification des contraintes. Dans ce problème les contraintes représentent la disponibilité des facteurs de production :

<u>Terrain :</u> l'agriculteur dispose de 150 hectares de terrain, ainsi la contrainte liée à la limitation de la surface de terrain est $x_1 + x_2 \leq 150$.

<u>Eau :</u> la culture d'un hectare de tomates demande $4m^3$ d'eau et celle d'un hectare de piments demande $2m^3$ mais l'agriculteur ne dispose que de $440m^3$. La contrainte qui exprime les limitations des ressources en eau est $4x_1 + 2x_2 \leq 440$.

Etape 2 : Les contraintes

Identification des contraintes. Dans ce problème les contraintes représentent la disponibilité des facteurs de production :

- Terrain : l'agriculteur dispose de 150 hectares de terrain, ainsi la contrainte liée à la limitation de la surface de terrain est $x_1 + x_2 \leq 150$.
- Eau : la culture d'un hectare de tomates demande $4m^3$ d'eau et celle d'un hectare de piments demande $2m^3$ mais l'agriculteur ne dispose que de $440m^3$. La contrainte qui exprime les limitations des ressources en eau est $4x_1 + 2x_2 \leq 440$.
- Main-d'œuvre : Les 480 heures de main-d'œuvre seront départager (pas nécessairement en totalité) ente la culture des tomates et celles des piments. Sachant qu'un hectare de tomates demande une heure de main-d'œuvre et un hectare de piments demande 4 heures de main-d'œuvre alors la contrainte représentant les limitations des ressources humaines est $x_1 + 4x_2 \leq 480$.

Etape 2 : Les contraintes

Identification des contraintes. Dans ce problème les contraintes représentent la disponibilité des facteurs de production :

Terrain : l'agriculteur dispose de 150 hectares de terrain, ainsi la contrainte liée à la limitation de la surface de terrain est $x_1 + x_2 \leq 150$.

Eau : la culture d'un hectare de tomates demande $4m^3$ d'eau et celle d'un hectare de piments demande $2m^3$ mais l'agriculteur ne dispose que de $440m^3$. La contrainte qui exprime les limitations des ressources en eau est $4x_1 + 2x_2 \leq 440$.

Main-d'œuvre : Les 480 heures de main-d'œuvre seront départager (pas nécessairement en totalité) ente la culture des tomates et celles des piments. Sachant qu'un hectare de tomates demande une heure de main-d'œuvre et un hectare de piments demande 4 heures de main-d'œuvre alors la contrainte représentant les limitations des ressources humaines est $x_1 + 4x_2 \leq 480$.

Les limitations du bureau du périmètre irrigué : Ces limitations exigent que l'agriculteur ne cultive pas plus de 90 hectares de tomates. La contrainte qui représente cette restriction est $x_1 \leq 90$.

Etape 3 : la fonction objectif

Identification de la fonction objectif. La fonction objectif consiste à maximiser le profit apporté par la culture de tomates et de piments. Les contributions respectives 1000 et 2000, des deux variables de décision x_1 et x_2 sont proportionnelles à leur valeur. La fonction objectif est donc

$$1000x_1 + 2000x_2$$

Etape 3 : la fonction objectif

Identification de la fonction objectif. La fonction objectif consiste à maximiser le profit apporté par la culture de tomates et de piments. Les contributions respectives 1000 et 2000, des deux variables de décision x_1 et x_2 sont proportionnelles à leur valeur. La fonction objectif est donc

$$1000x_1 + 2000x_2$$

Le modèle linéaire ou Programme linéaire (PL) est :

$$Max\ z = 1000x_1 + 2000x_2$$

$$\begin{array}{lrcl}
s.c & x_1 + x_2 & \leq & 150 \\
 & 4x_1 + 2x_2 & \leq & 440 \\
 & x_1 + 4x_2 & \leq & 480 \\
 & x_1 & \leq & 90 \\
 & x_1 \geq 0 \text{ et } x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

Exemple de fabrication

Une entreprise specialisé dans la fabrication de matérielle informatique propose à ses catalogues deux nouveaux ordinateurs l'IM4 et IM5. Chacun deux comportes le même processeur mais ils diffèrent par le nombre de barrettes mémoire. Pour l'IM4 il y en a deux et pour l'IM5 il y en a six. La capacité du marché á fournir ses composantes ne dépassent pas les 10.000 unités de processeurs et 48.000 barrettes. Le processus d'assemblage ne dure qu'une minute pour l'IM5 tandis que cette durée s'élève à 3 minutes pour l'IM4 et on ne dispose apriori que de 24.000 minutes maximum avant la date de commercialisation. IM4 procure un profit de 400 euros et l'Im5 est vendu à 800 euros.

$\rightarrow$ Quelles quantités des deux ordinateurs doit-on fabriquer ?

Exemple de transport

Une entreprise disposant de deux lieux de production doit envoyer ensuite ses produits finis vers 3 entrepôts regionaux pour répondre au besoin locaux. l'entreprise peut transiter ses produits de n'importe quelle usine vers n'importe quels entropôt. la capacite de production de la premiere usine est de 100 miliers de tonnes, la deuxieme peut fournir jusqu'a 120 miliers de tonnes. Les 3 entrepots peuvent acceuillir repectivement 50, 70 et 80 miliers de tonnes de produits. Le cout de transport pour une tonne entre les usines et les entrepôts est resumé dans le tableau ci-dessous en miliers d'euro :

	E1	E2	E3
U1	4	3	6
U2	3	5	3

$\rightarrow$ Quelles quantités doit-on transporter de chaque usines vers chaque depôt ?

Exemple d’une Manufacture

Une manufacture, qui fabrique trois produits, utilise trois ressources pour cette production : services techniques, main-d’œuvre et services administratifs. Le tableau suivant donne les ressources nécessaires à la production d’une tonne de chacun des produits, ainsi que diverses autres données pertinentes.

Produit	Serv techn	Main-d’œuvre	Serv Admin	Profit (dhs/t)
P1	1 (h/t)	10 (h/t)	2 (h/t)	100
P2	1 (h/t)	4 (h/t)	2 (h/t)	60
P3	1 (h/t)	5 (h/t)	6 (h/t)	40
Temps disp (en h)	100	600	300	

Construire un modèle linéaire qui indique comment planifier la production de façon à maximiser les profits. Résoudre ce modèle et déterminer un plan de production optimal.

Modélisation

Définition des variables de décision

$$x_j = \text{nombre de tonnes de } P_j \text{ durant la période de planification}$$

où $j = 1,\ 2,\ 3$. Le problème se traduit par le modèle linéaire consistant à maximiser

$$z = 100x_1 + 60x_2 + 40x_3$$

sous les contraintes technologiques suivantes :

Serv Tech $\quad x_1 + x_2 + x_3 \leq 100$

Personnel $\quad 10x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 600$

Serv Adm $\quad 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 \leq 300$

Les contraintes de non-négativité sont : $x_j \geq 0$ pour $j = 1,\ 2,\ 3$.

Un problème général de programmation linéaire en forme canonique consiste à déterminer les réels $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n$ qui maximisent (ou minimisent) une fonction linéaire

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + ...c_nx_n$$

et qui vérifie les égalités linéaires :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ...a_{1n}x_n \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ...a_{2n}x_n \geq b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + ...a_{pn}x_n \geq b_p \\ x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n \geq 0 \end{cases}$$

où n et p sont des entiers naturels non nuls ; $a_{ij},\ c_j$ et b_j sont des réels donnés, $i \in I = \{1,\ ...,\ p\}$, $j \in J = \{1,\ ...,\ n\}$.

Exemple : Problème de médecine

Un spécialiste en médecine a fabriqué un médicament (des comprimés) pour guérir les sujets atteints d'un rhume. Ces comprimés sont fabriquées selon deux formats :

Petite taille : elle contient 2 grains d'aspirine, 5 grains de bicarbonate et 1 grain de codéine.

Grande taille : elle contient 1 grain d'aspirine, 8 grains de bicarbonate et 6 grains de codéine.

Pour guérir la maladie, le sujet a besoin de 12 grains d'aspirine, 74 grains de bicarbonate et 24 grains de codéine. Déterminer le nombre de comprimés minimales à prescrire au sujet pour qu'il soit guérit.

Exemple de fabrication de voitures

Une usine produit des voitures sport et des économique. On y trouve 3 ateliers, où la production des voitures des deux types s'effectue en parallèle.

Atelier 1 : montage des moteurs. Monter un moteur requiert 3,5 heures de main-d'œuvre dans le cas de l'économique et 4 heures dans le cas d'une voiture sport. Cet atelier dispose chaque mois de 1500heures de main-d'œuvre.

Atelier 2 : carrosserie. Une carrosserie d'une voiture économique requiert 2 heures de main-d'œuvre; pour la carrosserie d'une voiture sport, il faut prévoir 1 heure de plus. Cet atelier dispose de 2000 heures par mois.

Atelier 3 : Assemblage. Pour assembler une voiture économique, il faut compter 1,5 heure; pour assembler une voiture sport, il faut une demi-heure de plus. Cet atelier peut assembler tout ce que produisent les ateliers 1 et 2.

Fabrication voitures

Si l’on ne tient pas compte des coûts de main-d’œuvre, une voiture économique rapporte 23 450dh et une voiture sport 34 560dh. Les heures de main-d’œuvre reviennent à 160dh chacune dans l’atelier 1, à 150dh chacune dans l’atelier 2 et à 120dh chacune dans l’atelier 3. Enfin, il faut produire au moins 120 voitures économique par mois.
Construire un modèle linéaire qui indique comment planifier la production mensuelle des voitures économique et sport, de façon à maximiser les profits.

Modélisation

Définition des variables de décision :

$$x_j = \text{nombre de voitures du modèle } j \text{ produites mensuellement,}$$

où $j = 1$(voiture économique), 2(sport). L'objectif s'écrit :

$$Max\ z = 22410x_1 + 33230x_2.$$

Les contraintes sont :

$$\begin{array}{lrcl}
\text{Atelier 1} & 3.5x_1 + 4x_2 & \leq & 1500 \\
\text{Atelier 2} & 2x_1 + 3x_2 & \leq & 2000 \\
\text{MIN Économique} & x_1 & \geq & 120
\end{array}$$

L'unique plan optimal propose de produire 120 voitures économique et 270 voitures de sport mensuellement. L'usine en retirerait un profit mensuel de 10166130 dh.

Exemple : Problème d'alimentation

On se propose de réaliser une alimentation économique pour des bestiaux, qui contient obligatoirement 4 sortes de composants nutritifs, A, B, C et D. L'industrie alimentaire produit précisément deux aliments M et N qui contiennent ces composants : 1Kg d'aliment M contient 100g de A, 100g de C, 200g de D ; 1Kg d'aliment N contient 100g de B, 200g de C, 100g de D. Un animal doit consommer par jour au moins : 0.4 Kg de A ; 0.6 Kg de B ; 2 Kg de C ; 1.7 Kg de D. L'aliment M coûte 100 DH le Kg et N coûte 40 DH le Kg. Quelles quantités d'aliments M et N doit-on utiliser par jour et par animal pour réaliser l'alimentation la moins coûteuse ?

Exemple : Problème de traiteur

Un traiteur doit organiser son festival culturel annuel en continu pendant les cinq prochains jours. Il y a un arrangement de dîner pour chaque équipe invitée. L'exigence de serviettes pendant ces cinq jours est :

Jours :	1	2	3	4	5
Serviettes :	80	50	100	80	150

En conséquence, un traiteur a été prié de fournir les serviettes conformément au calendrier ci-dessus. Une fois le festival terminé, le traiteur n'a plus besoin de serviettes. Une nouvelle serviette coûte 2 euro. Les frais de lavage pour une serviette usagée sont de 0,5 euro par service ordinaire et de 1euro si service express est utilisé.

Une serviette donnée pour le lavage par service ordinaire est retournée le troisième jour, tandis que sous service express, elle est retournée le lendemain.

→ Comment le traiteur doit répondre aux exigences des organisateurs du festival afin que le coût total soit minimisé ?