UEVE. Cours de Probabilité: EC 322. Variables aléatoires continues

Abass SAGNA,
abass.sagna@ensiie.fr

Maître de Conférences à l'ENSIIE,
Laboratoire de Mathématiques et Modélisation d'Evry
Université d'Evry Val-d'Essonne, UMR CNRS 8071

November 14, 2019

Plan

Densité de probabilité et fonction de répartition

Espérance et variance

Quelques lois continues usuelles

- Loi uniforme
- Loi exponentielle
- Loi Normale ou de Gauss

Théorèmes limites

Références

Plan

Densité de probabilité et fonction de répartition

Espérance et variance

Quelques lois continues usuelles
- Loi uniforme
- Loi exponentielle
- Loi Normale ou de Gauss

Théorèmes limites

Références

Densité d'une v.a. continue

DÉFINITION. Une v.a. X est dite continue si elle est à valeurs dans un ensemble non dénombrable. Par exemple, X peut représenter la température, les notes d'une classe, la durée de vie d'une ampoule, ... Elle est définie par sa densité de probabilité. Pour comprendre le passage du discret au continu considérons l'exemple suivant.

- Soit X^n une v.a. à valeurs dans $E = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, $a = x_0 < \cdots < x_n = b$. On sait que dans ce cas,
$$\sum_{i=0}^{n} p(x_i) = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(X^n = x_i) = 1. \tag{1}$$
- Si X^n est uniforme sur $E = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$: $\mathbb{P}(X^n = x_i) = \frac{1}{n+1}$, $\forall i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ et si on rajoute de plus en plus de points sur $[a, b]$ alors $\mathbb{P}(X^n = x_i) = 1/(n+1)$ tend vers 0.
- Cela permet de comprendre que si une v.a. X est continue, alors $\mathbb{P}(X = x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Définition d'une densité

- D'où la nécessité de trouver une expression équivalente à (1) lorsque $n \to +\infty$.

Soit F^n la f.r. définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$F^n(x) = \mathbb{P}(X^n \in]-\infty, x]) = \mathbb{P}(X^n \leq x).$$

Soit f telle que $\forall\ i \in \{0, \dots, n\}$,

$$F^n(x_i) - F^n(x_{i-1}) \approx f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}), \text{ pour } n \text{ assez grand.} \quad (2)$$

Supposons $\forall\ i \in \{0, 1, \dots, n\}$, $x_i = a + \frac{i(b-a)}{n}$. Alors $x_i - x_{i-1} = (b-a)/n$ et

$$\mathbb{P}\left(X^n \in]x_{i-1}, x_i]\right) = F^n(x_i) - F^n(x_{i-1}) = \frac{1}{n+1}.$$

Donc, pour n assez grand, on peut écrire

$$F^n(x_i) - F^n(x_{i-1}) = \frac{1}{b-a}\frac{n}{n+1}(x_i - x_{i-1}) \approx f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$$

avec f la fonction définie pour tout $x \in [a, b]$ par

$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$

et par $f(x) = 0$ si $x \notin [a, b]$. Ce qui permet de définir une v.a. continue de loi uniforme sur l'intervalle $[a, b]$. Elle est définie par sa densité f. En considérant l'expression (2), on a

$$\mathbb{P}(X = x_i) \approx f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) \approx \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx.$$

D'où

$$\sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(X = x_i) \approx \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx.$$

Donc, si X est une v.a. continue à valeur dans $\mathbb{R}$, de densité f, (1) sera remplacée par

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1. \tag{3}$$

Définition. (a) Soit X une v.a. Suposons qu'il existe une fonction positive $f : \mathbb{R} \mapsto [0, +\infty)$ t.q. $\forall [a, b] \subset \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(X \in [a, b]) = \int_a^b f(x)dx. \tag{4}$$

Alors X est une v.a. continue de densité de probabilité f.

(b) La fonction de répartition de X est alors donnée, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du.$$

Remarque. (a) Si la densité f de X est continue, elle peut être déduite de la f.r. F par dérivation:

$$f(x) = F'(x) = \frac{dF(x)}{dx}.$$

(b) Les propriétés d'une f.r. d'une v.a. continues sont les mêmes que celles d'une v.a. discrète à la différence que pour une v.a. continue $F(x) = F(x_-)$.

Définition d'une densité

Ainsi, pour que f soit une densité de probabilité il faut qu'elle vérifie:

1. la condition de positivité

$$f(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

2. et la condition

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

Exemple. Soit $\lambda > 0$ et X une v.a. de densité

$$f(x) = c\, e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\{x>0\}} = \begin{cases} c\, e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

1. Déterminer c pour que f soit une densité de probabilité.
2. Déterminer la fonction de répartition de X.

Plan

Densité de probabilité et fonction de répartition

Espérance et variance

Quelques lois continues usuelles
- Loi uniforme
- Loi exponentielle
- Loi Normale ou de Gauss

Théorèmes limites

Références

Définition. Si X est une v.a. continue de densité de probabilité f. Alors

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, f(x) dx.$$

Nous énonçons le Théorème de transfert pour une v.a. continue.

Théorème. Soit X une v.a. continue de densité f. Pour toute fonction réelle g,

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx. \tag{5}$$

Exemple. Soit X une v.a. de densité (avec $a < b$)

$$f(x) = \mathbb{1}_{[a,b]}(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a,b] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Calculer la fonction de répartition de X.
2. Calculer $\mathbb{E}(X)$.
3. Déterminer $\mathbb{E}(X^2)$.

Définition. Si X est une v.a. continue de densité f. Alors

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \left(\mathbb{E}(X)\right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \, f(x)dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x \, f(x)dx\right)^2.$$

Exemple. Soit X une v.a. de densité de probabilité

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.

Plan

Densité de probabilité et fonction de répartition

Espérance et variance

Quelques lois continues usuelles
- Loi uniforme
- Loi exponentielle
- Loi Normale ou de Gauss

Théorèmes limites

Références

Plan

Densité de probabilité et fonction de répartition

Espérance et variance

Quelques lois continues usuelles
- Loi uniforme
- Loi exponentielle
- Loi Normale ou de Gauss

Théorèmes limites

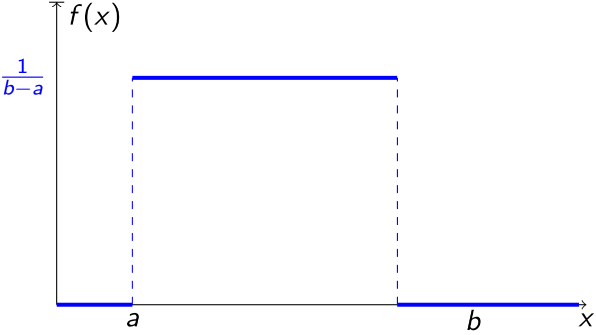
Références

Lois Uniforme

Loi uniforme sur $[a, b]$. Elle modélise une v.a. qui a un comportement uniforme sur $[a, b]$. Si $X \sim U([a, b])$ alors sa densité

$$f(x) = \frac{1}{b-a}\mathbf{1}_{[a,b]}(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $X \sim U([a, b])$ on a $\mathbb{E}(X) = (a+b)/2, \ \mathrm{Var}(X) = (b-a)^2/12.$



Exemple. On considère le jeu aléatoire suivant impliquant deux joueurs:

- un joueur R disposant de 2 pions rouges et
- un joueur V disposant de 2 pions verts

On considère un intervalle $[a, b]$ sur lequel on jette une petite bille selon une loi uniforme X sur $[a, b]$ de densité de probabilité f.
Le jeu se déroule comme suit.

- Les joueurs placent leur deux pions les uns après les autres en des points de l'intervalle $[a, b]$.
- Une fois placés les joueurs n'ont plus la possibilité de déplacer leurs pions.
- On lance la bille selon une loi uniforme sur $[a, b]$ et
  a) si la bille passe le plus près d'un des pions du joueur R que ceux du joueur V alors le joueur R marque un point
  b) si la bille passe le plus près d'un des pions du joueur V que ceux du joueur R alors le joueur V marque un point.
  c) sinon les joueurs marquent tous les deux un point.

On renouvelle l'expérience à 10 reprises et le gagnant sera celui qui aura marqué le plus de points.

1. Rappeler l'expression de la fonction de répartition de X.
2. Pour simplifier on pose $a = 0$ et $b = 1$. Le joueur R choisit les emplacements $1/4$ puis $3/4$ de l'intervalle $[0, 1]$ et le joueur V les emplacements $1/3$ puis $1/2$.

a) Quelles sont les chances pour le joueur R de marquer un point.

b) Quelles sont les chances pour le joueur V de marquer un point.

c) En déduire lequel des deux joueurs a le plus de chances de gagner la partie.

d) Existe-t-il une stratégie qui permet de toujours avoir le plus de chances de gagner quelque soit la stratégie de l'adversaire.

Plan

Densité de probabilité et fonction de répartition

Espérance et variance

Quelques lois continues usuelles

- Loi uniforme
- Loi exponentielle
- Loi Normale ou de Gauss

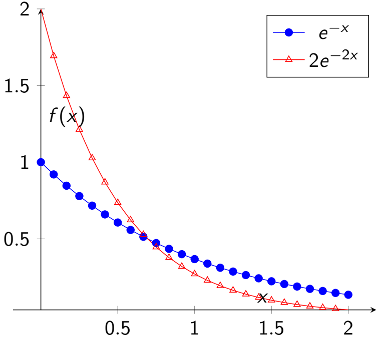
Théorèmes limites

Références

Loi exponentielle. Elle décrit des phénomènes t.q. temps d'attente, durée de vie. Si $1/\lambda, \lambda > 0$ est l'espérance de vie (ou le temps moyen d'attente, alors la densité de X est définie par

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{\{x\geq 0\}} = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ on a $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$, $\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.



Exemple. On considère les durées de vie (en année) d'ampoules de même type d'une usine. On suppose que la durée de vie d'une ampoule est une v.a. X qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1.5$. On achète une ampoule de ce type.

1. Quelle est la proba. pour qu'elle dure au moins: 2 ans? 5 ans?
2. Quelle est la probabilité pour qu'elle dure au moins un mois de plus sachant qu'elle a duré 2 ans?

Plan

Densité de probabilité et fonction de répartition

Espérance et variance

Quelques lois continues usuelles
- Loi uniforme
- Loi exponentielle
- Loi Normale ou de Gauss

Théorèmes limites

Références

Loi Normale

Loi Normale. (Laplace-Gauss ou gaussienne) elle est l'une des lois de proba. les plus utilisées. Une v.a. X suit la loi normale d'espérance $\mu \in \mathbb{R}$ et de variance σ^2: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, si sa densité

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Elle est *centrée* si $\mu = 0$, *réduite* si $\sigma^2 = 1$. Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$,

$$\mathbb{E}(X) = \mu, \qquad \mathrm{Var}(X) = \sigma^2.$$

Proposition. Soit $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Alors

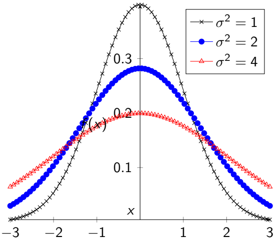
1. on a

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1), \tag{6}$$

2. la v.a. X est symétrique: si $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ alors $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(X - \leq x) = \mathbb{P}(-X \leq x).$$

En particulier, $\mathbb{P}(X \leq -x) = \mathbb{P}(X \geq x) = 1 - \mathbb{P}(X \leq x).$



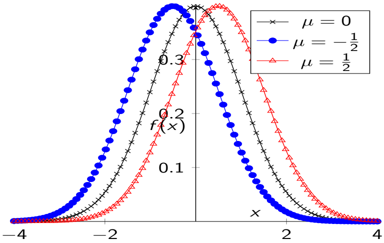


Figure: Densité d'une loi $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$. Figure 1: $\mu = 0$; Figure 2: $\sigma = 1$.

Remarque. La f.r. $F(x)$ d'une loi Normale ne peut pas être calculée de façon explicite. Ses valeurs sont calculées numériquement et données sous forme de tableau appelé Table de la loi Normale.

Exemple 1. Sur une seconde période d'un match de foot, le nbre X de km parcouru par un joueur non dopé suit une loi Normale $\mathcal{N}(4.5, 4)$. La FIFA décide de faire passer un "test pour dopage" à tout joueur dont le nbre de km parcouru x lors de la seconde partie est invraisemblablement élevé à leurs yeux: $\mathbb{P}(X \geq x) \leq 0.005$.

1. Un joueur a parcouru 7.6 km lors de la seconde partie. Doit-on lui faire passer un "test pour dopage"?
2. Quelle est la distance minimale parcourue x à partir de laquelle on doit faire passer un "test pour dopage" à un joueur. C'est-à-dire, trouver x tel que $\mathbb{P}(X \geq x) = 0.005$.

Données. Si $Z \sim \mathcal{N}(0; 1)$ alors $\mathbb{P}(Z \leq 1.55) = 0.9394$, $\mathbb{P}(Z \leq 0.78) = 0.7823$, $\mathbb{P}(Z \leq 2.57) = 0.995$.

D'autres lois usuelles

Loi Gamma. Une v.a. X suit la loi Gamma de paramètres $a > 0$ et $\lambda > 0$: $X \sim \Gamma(a.\lambda)$, si elle admet pour densité

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\Gamma(\cdot)$ est la fonction Gamma définie, pour tout $a > 0$, par

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx.$$

Si $X \sim \Gamma(a, \lambda)$ alors,

$$\mathbb{E}(X) = a/\lambda \quad \text{et} \quad \mathrm{Var}(X) = a/\lambda^2.$$

La loi exponentielle est un cas particulier de la loi Gamma:

$$X \sim \mathcal{E}(\lambda) \Longleftrightarrow X \sim \Gamma(1, \lambda).$$

D'autres lois usuelles

Loi Beta. Une v.a. X suit une loi Beta de paramètres $a, b > 0$: $X \sim \mathrm{Beta}(a, b)$ si sa densité s'écrit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{B(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1} & \text{si } x \in]0,1[\\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où la fonction $B(\cdot,\cdot)$ est définie par

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

Si $X \sim \mathrm{Beta}(a, b)$ alors

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a}{a+b} \quad \text{et} \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}.$$

D'autres lois usuelles

Loi de Pareto. Une variable aléatoire X suit la loi de Pareto de paramètre (indice) $a > 1$ si sa densité s'écrit

$$f(x) = \begin{cases} ax^{a+1} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

Si X suit la loi de Pareto d'indice a alors,

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a}{a-1} \quad \text{et} \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{a}{(a-1)^2(a-2)}, \ a > 2.$$

D'autres lois usuelles

Loi du chi-deux à n degrés de liberté. Soit $X_1, \ldots, X_n$, n v.a. indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Alors la variable aléatoire

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

suit une loi du chi-deux à n dégrés de liberté. On note $X \sim \chi^2(n)$ ou $X \sim \chi^2_n$.

Loi de Student à n dégrés de liberté. Soit $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $U \sim \chi^2(n)$ ind. de Z, alors, la variable aléatoire

$$T = \frac{Z}{\sqrt{U/n}}$$

suit une loi de Student à n degrés de liberté. On note $X \sim T(n)$.

Plan

Densité de probabilité et fonction de répartition

Espérance et variance

Quelques lois continues usuelles
- Loi uniforme
- Loi exponentielle
- Loi Normale ou de Gauss

Théorèmes limites

Références

Loi des grands nombres et TCL

Proposition. Soit $X_1, X_2, X_3, \ldots$ une suite de v.a. i.i.d t.q. $\mathbb{E}(X_1) = \mu$. Alors, avec probabilité 1, la moyenne empirique

$$\bar{X}_n \longrightarrow \mu \qquad \text{quand} \quad n \to +\infty. \tag{7}$$

Théorème. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d d'espérance et de variance finies: $\mu = \mathbb{E}(X_i)$ et $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_i)$, $\forall i \geq 1$. Alors,

$$\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0;1).$$

Autrement dit, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}\left(\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \leq x\right) \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}du \quad \text{quand} \quad n \to +\infty. \tag{8}$$

On suppose que les montants $X_1, \ldots, X_n$ des n retraits de Seb. de son compte sont indépendants et à valeurs dans $\{20, 30, 40, 50, 100\}$ avec les probabilités:

$$\mathbb{P}(X_i = 20) = 1/2, \quad \mathbb{P}(X_i = 30) = 1/5,$$
$$\mathbb{P}(X_i = 40) = 3/20, \quad \mathbb{P}(X_i = 50) = 1/10 \text{ et } \mathbb{P}(X_i = 100) = 1/20$$

pour tout $i = 1, \ldots, n$.

1. Pour $n = 10, 20, 30$, on a dressé un histogramme des fréquences pour un échantillon de la loi de $\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}$ de taille $N = 10^6$.
2. Pour tout $n \in \{10, 20, 30\}$, tracer sur le même graphique que l'histogramme la fonction $i \mapsto \mathbb{P}(X \in C_i)$ où $X \sim \mathcal{N}(0; 1)$. Commenter les graphiques obtenus.

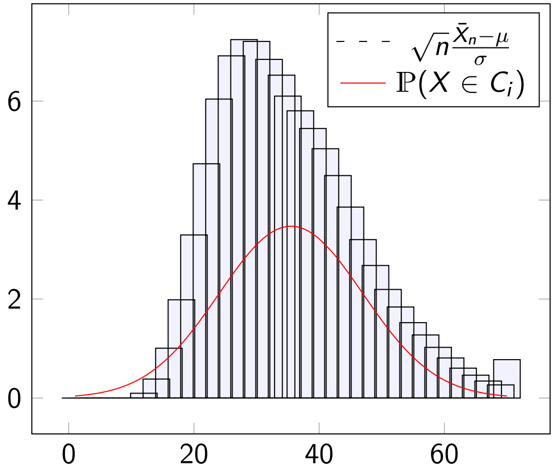


Figure: Histogramme des fréquences pour un échantillon de taille $N = 10^6$ de la loi de $\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n-\mu}{\sigma}$, $n = 10$, et la fonction $i \mapsto \mathbb{P}(X \in C_i)$ où $X \sim \mathcal{N}(0;1)$.

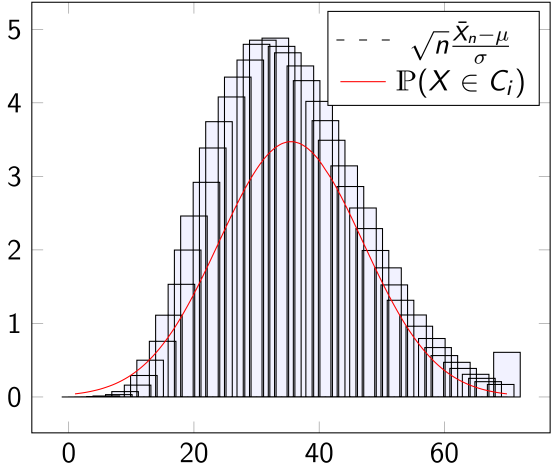


Figure: Histogramme des fréquences pour un échantillon de taille $N = 10^6$ de la loi de $\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n-\mu}{\sigma}$, $n = 20$, et la fonction $i \mapsto \mathbb{P}(X \in C_i)$ où $X \sim \mathcal{N}(0;1)$, $i = 1, \ldots, 69$.

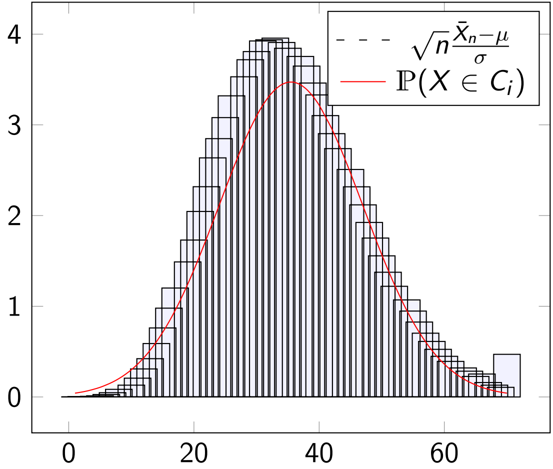


Figure: Histogramme des fréquences pour un échantillon de taille $N = 10^6$ de la loi de $\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n-\mu}{\sigma}$, $n = 30$, et la fonction $i \mapsto \mathbb{P}(X \in C_i)$ où $X \sim \mathcal{N}(0;1)$.

Exemple TCL

Exemple. On découpe un gros projet en mini-projets par jour ouvré. On suppose que le nbre d'heures de travail/jour ouvré sur le projet est une suite $(X_k)_k$ de variables aléatoires i.i.d de moyenne $\mu = 4$ et de variance $\sigma^2 = 4$. Pour que le projet soit rentable, le nbre total d'heures de travail sur le projet ne doit pas dépasser 280 h.

1. Etant donné que l'entreprise ne valide un projet que si elle est sûre à 98% que les contraintes sur le temps total de travail seront respetées, qu'elle est le nombre maximal de jours ouvrés de travail à préevoir pour ce projet.
2. Qu'elle date de livraison (en jours ouvrés) à proposer au client si celle-ci doit être fixée 5 jours ouvrés après la durée maximale prévue pour le projet.
3. Qu'elle est le temps moyen de travail par jours ouvrés que doit respecter l'entreprise si le client demande une livraison au bout de 55 jours ouvrés. On suppose qu'on a toujours $\sigma^2 = 4$.

Plan

Densité de probabilité et fonction de répartition

Espérance et variance

Quelques lois continues usuelles

Loi uniforme

Loi exponentielle

Loi Normale ou de Gauss

Théorèmes limites

Références

1. David Delauney. *Exercices d'algèbres et de probabilités*. De Boeck Supérieur, 2017.

2. C. Degrave et D. Degrave. *Probabilités-Statistiques 1re et 2e années*. Bréal, 2004.

3. Jean Guégand et Jean-Pierre Gavini. *Probabilités*. Ellipses, 1998.

4. Jean Jacod et Philip Protter. *L'essentiel en Théorie des Probabibilités*. Cassini, 2002.

5. Jean-Yves Ouvrard. *Probabilités I*. Cassini, 2008.

6. Pierre Priouret. *Probabilités*. Fascicule de cours de Licence Mathématiques troisième année et T.D. du module LM390 de l'U.P.M.C, 2004-2005.

7. Ramachandran M. Kandethody et Tsokos P. Chris. *Mathematical Statistics with Applications*. Academic Press, 2009.

8. Bernard Grais. *Méthodes Statistiques*. Dunod, 1988.