

ENSIIE. Cours de Probabilité: FIPA. Probabilité

Abass SAGNA,
`abass.sagna@ensiie.fr`

Maître de Conférences à l'ENSIIE,
Laboratoire de Mathématiques et Modélisation d'Evry
Université d'Evry Val-d'Essonne, UMR CNRS 8071

September 27, 2019

1 Introduction

2 Univers, Événement

- Opérations sur les événements

3 Un peu de dénombrement

- Arrangement, permutation, combinaison

4 Probabilité

- Définition et propriétés

1 Introduction

2 Univers, Événement

- Opérations sur les événements

3 Un peu de dénombrement

- Arrangement, permutation, combinaison

4 Probabilité

- Définition et propriétés

Pour introduire la notion de probabilité considérons que M. X quitte sa maison le matin pour se rendre en voiture à une "réunion d'affaire" prévue à 9h dans une entreprise cliente de son entreprise.

- Son GPS lui propose 2 parcours (on notera P1 et P2) et les heures d'arrivée respectives: 8h50 et 9h01.
- M. X s'informe aussi de l'état du trafic à la radio.
- Malgré tout, il ne sait dire à l'avance et avec certitude s'il arrive avant ou après 9h en empruntant un parcours donné.
- Le choix de son parcours d'une part, et le temps d'arrivée d'autre part, sont tous soumis à un aléa.
- Il fait face à une *expérience aléatoire* qui consiste à choisir un parcours et à savoir s'il arrive en retard ou pas.

Définition

Une *expérience aléatoire* est une expérience dont on ne peut pas prédire le résultat avec certitude.

- Même si l'issue d'une expérience aléatoire n'est pas connue, on peut connaître l'ensemble Ω de ses issues possibles qui est appelé *univers*.
- En consultant la radio et son GPS, M. X recueille des informations qui lui permettent d'attribuer à chaque parcours ses chances d'arriver avant (ou après) 9h. Il choisira ensuite *le parcours où il pense avoir le plus de chance d'arriver avant 9h*.
- *L'application qui à chaque parcours attribue les chances d'arriver avant ou après 9h est une probabilité.*
- Plus généralement, une *probabilité* \mathbb{P} est une application définie sur un univers Ω (ou sur $\mathcal{P}(\Omega)$) et à valeurs dans $[0, 1]$ qui à toute éventualité ω de Ω (ou à tout événement E) associe le nombre $\mathbb{P}(\{\omega\})$ (ou $\mathbb{P}(E)$) qui mesure le degré de vraisemblance ou les chances de réalisation de ω (ou de E).

Dans ce chapitre,

- nous définirons un univers, un événement et
- puisqu'on doit calculer la probabilité d'un ensemble résultant d'opérations (telles que l'union, l'intersection, etc) sur d'autres ensembles, nous introduirons les opérations sur les ensembles avant de définir les axiomes des probabilités
- nous étudions ensuite la notion de probabilité et ses propriétés.

1 Introduction

2 Univers, Événement

- Opérations sur les événements

3 Un peu de dénombrement

- Arrangement, permutation, combinaison

4 Probabilité

- Définition et propriétés

Définition

On appelle **univers** l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire. Cet ensemble sera noté Ω . Les éléments de l'univers Ω sont appelés des **éventualités**.

Exemple. (a) Reconsidérons le problème de M. X. On a

$$\Omega = \{AV9P1, AP9P1, AV9P2, AP9P2\}$$

où $AV9P_i \equiv$ arriver avant 9h par le parcours P_i et $AP9P_i \equiv$ arriver après 9h par le parcours P_i , pour $i = 1, 2$.

(b) Si l'expérience consiste à lancer un dé et à noter le numéro qui apparaît, alors, l'univers $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Si on colorie les faces paires du dé en vert et les faces impaires en jaune et que l'expérience consiste à lancer le dé et à noter la couleur qui apparaît, alors, $\Omega = \{\text{Vert}, \text{Jaune}\}$.

Exemple (suite). (c) Soit l'expérience aléatoire qui consiste à lancer une fois une pièce de monnaie et à noter la face qui apparaît.

- ◇ Dans ce cas l'ensemble des issues possibles de l'expérience aléatoire est $\Omega = \{P, F\}$ où $P \equiv$ Pile et $F \equiv$ Face.
- ◇ Si au lieu de lancer une seule fois la pièce on la lance deux fois et on note les faces successives qui apparaissent, alors, $\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}$.

(d) Si l'expérience consiste à compter le nombre d'appels par heure sur un standard téléphonique, l'univers $\Omega = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\} = \mathbb{N}$.

(e) Soit l'expérience consistant à mesurer les températures (en $^{\circ}\text{C}$) sur l'année d'un site donné au "coucher du soleil". Alors on prendra $\Omega = \mathbb{R}$.

Définition

*On appelle **événement** tout sous-ensemble de l'univers Ω . Autrement dit, un événement est un ensemble d'issues possibles de l'expérience.*

Exemple. (a) Dans l'exemple où

$$\Omega = \{AV9P1, AP9P1, AV9P2, AP9P2\},$$

$E = \{AV9P1, AV9P2\}$ est un événement. C'est l'événement "arriver avant 9h". L'événement "arriver après 9h" est $F = \{AP9P1, AP9P2\}$.

(b) Dans l'exemple où $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $E = \{2, 4, 6\}$ est l'événement qu'un nombre paire apparaît.

(c) Dans l'exemple où l'univers $\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}$, $E = \{PP, FP\}$ est l'événement que Pile apparaît au second lancer.

- (d) Dans l'exemple des appels, l'événement "le nombre d'appels est inférieur ou égal à 7" est décrit par l'ensemble $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.
- (e) Dans l'exemple de la mesure de température, $E = [12, 25]$ est l'événement que la température est comprise entre 12 et 25 °C.

1 Introduction

2 Univers, Événement

- Opérations sur les événements

3 Un peu de dénombrement

- Arrangement, permutation, combinaison

4 Probabilité

- Définition et propriétés

- Définir une proba. sur $\Omega = \{AV9P1, AV9P2, AP9P1, AP9P2\}$ consiste à attribuer à chaque $\omega \in \Omega$ ses chances de réalisation.
- On peut chercher à évaluer les chances de réalisation de l'événement E : "arriver avant 9h". L'événement E se réalise si on arrive avant 9h par le parcours P1 ou si on arrive avant 9h par le parcours P2. Autrement dit $\omega \in E$ si et seulement si $\omega = AV9P1$ ou $\omega = AV9P2$. On dit que E est l'union des événements $AV9P1$ et $AV9P2$ et on écrit

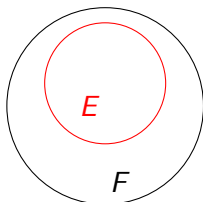
$$E = \{AV9P1\} \cup \{AV9P2\} = \{AV9P1, AV9P2\}.$$

- L'opération d'union est l'une des opérations qu'on peut faire sur les événements. Nous définissons dans ce qui suit les opérations usuelles sur les événements telles que l'inclusion, l'union, l'intersection, le complémentaire.

Soit une expérience aléatoire d'univers Ω et soit E un événement de Ω . On dira que l'événement E s'est réalisé si le résultat ω de notre expérience appartient à E : on notera $\omega \in E$.

Définition

On dit que l'événement E est inclus dans l'événement F , et on note $E \subset F$ ou $F \supset E$, lorsque tous les résultats de l'expérience qui sont dans E sont aussi dans F . Ainsi, F se réalise dès que E se réalise: $\omega \in E \implies \omega \in F$.



L'événement E est
inclus dans l'événement F

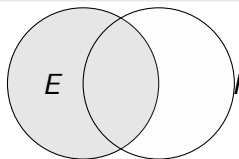
Inclusion entre événements

Exemple. Si le contexte est celui de l'exemple où on lance deux fois une pièce de monnaie alors,

$$E = \{FF\} \subset G = \{PP, FF\}$$

Définition

On appelle *union* des événements E et F et on note $E \cup F$, l'ensemble des résultats de l'expérience qui appartiennent soit à E , soit à F , soit à E et F . Ainsi $E \cup F$ se réalise: $\omega \in E \cup F$, si et seulement si E ou F se réalisent: $\omega \in E$ ou $\omega \in F$.



Nous représentons ci-contre les événements E , F et leur union en gris

Union d'événements

Exemple. (a) Le contexte est celui de l'exemple où on lance 2 fois une pièce de monnaie. Si $E = \{PP\}$ et $F = \{PF, FP\}$ alors,

$$E \cup F = \{PP, PF, FP\}.$$

L'événement $E \cup F$ se réalisera si Pile apparaît dans l'un des deux lancers.

Exemple (suite). (b) Considérons l'exemple de la température. Soit $E = [12, 15]$ l'événement que la température est comprise entre 12 et 15 °C et $F = [13.5, 20]$ l'événement que la température est comprise entre 13.5 et 20 °C. Alors

$$E \cup F = [12, 20].$$

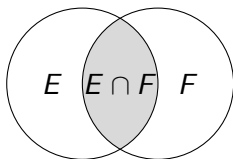
$E \cup F$ se réalise lorsque la température est comprise entre 12 et 20 °C.

Définition

a) On appelle *intersection* des événements E et F et on note $E \cap F$, l'ensemble des résultats de l'expérience qui appartiennent en même temps à E et à F . Ainsi, $E \cap F$ se réalise: $\omega \in E \cap F$, si et seulement si les 2 événements E et F se réalisent: $\omega \in E$ et $\omega \in F$.

b) Deux événements E et F sont dits *disjoints* si

$$E \cap F = \emptyset.$$



Nous représentons ci-contre les événements E , F et leur intersection

Intersection d'événements

Exemple. (a) Soit l'exemple de lancer de pièce. Soit $E = \{PP\}$, $F = \{FP, PP\}$ et $G = \{PF\}$. Alors, $E \cap G = \emptyset$. Autrement dit, les événements E (avoir Pile aux deux lancers) et G (avoir Pile au premier lancer et Face au second) ne peuvent pas se réaliser en même temps. On a

$$E \cap F = \{PP\}.$$

$E \cap F$ se réalise si et seulement si Pile apparaît aux deux lancers.

(b) Considérons l'exemple de la température. Si $E = [12, 15]$ et $F = [13.5, 20]$ alors,

$$E \cap F = [13.5, 15].$$

Définition. (a) On appelle complémentaire de E , et on note E^c ou \bar{E} , l'ensemble des résultats de l'expérience qui appartiennent à Ω et qui n'appartiennent pas à E . E^c se réalise: $\omega \in E^c$, si et seulement si E ne se réalise pas: $\omega \notin E$.

(b) Soit E et F 2 événements. L'événement F privé de E , noté $F \setminus E$, est l'ensemble des résultats de l'expérience qui appartiennent à F et qui n'appartiennent pas à E . Autrement dit,

$$F \setminus E = F \cap E^c.$$

Exemple. (a) Soit l'exemple de lancer de pièce. Si $E = \{PP, FP\}$ et $G = \{PF, FP, PP\}$ (avoir au moins un Pile) alors, $E^c = \{PF, FF\}$ et $G \setminus E = \{PF\}$.

(b) Soit l'exemple de l'appel téléphonique. Le complémentaire de $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ (le nombre d'appels est inférieur ou égal à 4) est l'événement "le nombre d'appels est supérieur ou égal à 5":
 $E^c = \{5, 6, 7, 8, \dots\}$.

Proposition

1. Soit E, F, G trois événements. On a

a) *Commutativité:*

$$E \cup F = F \cup E \quad \text{et} \quad E \cap F = F \cap E.$$

b) *Associativité:*

$$(E \cup F) \cup G = E \cup (F \cup G) \quad \text{et} \quad (E \cap F) \cap G = E \cap (F \cap G).$$

c) *Distributivité:*

$$(E \cup F) \cap G = (E \cap G) \cup (F \cap G) \quad \text{et} \quad (E \cap F) \cup G = (E \cup G) \cap (F \cup G).$$

Proposition

2. Soit E_1, E_2, \dots, E_n n événements. On a

$$\left(\bigcup_{i=1}^n E_i \right)^c = \bigcap_{i=1}^n E_i^c \quad (1)$$

et

$$\left(\bigcap_{i=1}^n E_i \right)^c = \bigcup_{i=1}^n E_i^c. \quad (2)$$

EXERCICE. Donner l'expression simplifiée des événements suivants:

- $(E \cup F) \cap (E \cup F^c)$
- $(E \cup F) \cap (E^c \cup F) \cap (E \cup F^c).$
- $(E \cup F) \cap (F^c \cap G^c)^c$ si $E \subset F \subset G$.

1 Introduction

2 Univers, Événement

- Opérations sur les événements

3 Un peu de dénombrement

- Arrangement, permutation, combinaison

4 Probabilité

- Définition et propriétés

1 Introduction

2 Univers, Événement

- Opérations sur les événements

3 Un peu de dénombrement

- Arrangement, permutation, combinaison

4 Probabilité

- Définition et propriétés

- Le combinatoire permet de dénombrer le nombre d'éléments d'un ensemble sans être contraint de compter ses éléments un par un.
- Elle fournit des méthodes pratiques de calcul de probabilité dans certaines situations (cas équiprobable).
- La proba. d'un événement E peut être déterminée par le rapport entre le nombre d'éléments de E sur celui de Ω .
- D'où la nécessité dans ce cas de déterminer le nbre d'éléments de Ω .

Définition

Soit E un ensemble. On appelle **cardinal de E** et on note $\text{card}(E)$ le nombre d'éléments de E .

Exemple simple. On lance trois fois une pièce de monnaie et on note les faces qui apparaissent.

- 1 Déterminer l'univers Ω .
- 2 Quel est le cardinal de Ω .
- 3 Déterminer $\text{card}(\Omega)$ lorsqu'on lance n fois la pièce.

Exemple. Une urne contient 4 boules numérotées de 1 à 4. On considère l'expérience aléatoire qui consiste à tirer successivement et sans remise 2 boules et à noter leurs numéros successifs. Quel est le cardinal de Ω ?

Définition

Soit n et p deux entiers tels que $p \leq n$ et E un ensemble de cardinal n . Un **arrangement de p éléments parmi n** , noté A_n^p , est une liste **ordonnée** de p éléments **distincts** parmi les n .

RAPPEL. Soit n un entier. Le factoriel de n , noté $n!$, est défini par

$$n! = n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1 \quad \text{avec} \quad 0! = 1.$$

Proposition

Le nombre d'arrangement de p éléments parmi n est donné par

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} = n \times (n-1) \times \dots \times (n-p+1).$$

Réponse. Remarquons d'abord que le fait de tirer les boules de l'urne de façon successive permet de tenir compte de l'ordre du tirage. Ainsi le tirage 12, par exemple, est différent du tirage 21. Aussi, le fait de ne pas remettre la boule tirée de l'urne pour effectuer le second tirage nous évite de répéter un chiffre. Ainsi, les tirages 11 ou 44, par exemple, ne sont pas possibles. On est donc en présence d'un arrangement (sans répétition) de deux éléments parmi quatre. Le nombre de tirages différents est donc de $A_4^2 = 12$.

Exercice. Une urne contient cinq boules numérotées de 1 à 5. On considère l'expérience aléatoire qui consiste à tirer successivement et sans remise, trois boules de l'urne et à noter les numéros successifs qui apparaissent. Soit E l'événement que les deux premiers tirages font apparaître successivement les numéros 2 et 1 et F l'événement que les deux premiers tirages font apparaître les numéros 1 et 2.

- 1 Déterminer le cardinal de l'univers Ω .
- 2 A-t-on l'inclusion $E \subset F$ ou $F \subset E$.
- 3 Déterminer le cardinal de E et celui de F .

Exemple. Vous achetez une carte téléphonique dont le code secret est choisi parmi les chiffres de 0 à 9. Vous effacez par inadvertance 2 chiffres. Vous vous décidez à tester l'ensemble des cas possibles pour retrouver le bon numéro.

- 1 Combien de possibilité avez-vous de choisir les 2 chiffres manquants.
- 2 S'il vous faut en moyenne 1mn 30s pour tester un code, combien de temps il faut en moyenne pour tester l'ensemble des codes possibles.

Définition

Soit n et p deux entiers et E un ensemble de cardinal n . *Un arrangement, avec répétition, de p éléments parmi n est une liste ordonnée de p éléments non nécessairement distincts parmi les n .*

Proposition

Le nombre d'arrangement, *avec répétition*, de p éléments parmi n est donné par n^p .

Définition

Soit E un ensemble de cardinal n . Une permutation des éléments de E est une liste ordonnée et sans répétition des n éléments de E . C'est un arrangement (sans répétition) de n éléments parmi n .

Proposition

Soit E un ensemble de cardinal n . Le nombre de permutation des éléments de E est donné par $n!$

Exemple. On veut former un nombre à 5 chiffres dont les 3 derniers chiffres sont une permutation de 0, 1 et 2. Combien peut-on en former

- ❶ si les 2 premiers chiffres sont distincts et composés des chiffres de 3 à 9.
- ❷ si les 2 premiers chiffres sont distincts et composés des chiffres de 0 à 9.

Définition. Soit $k, n \in \mathbb{N}^*$, $k \geq n$ et soit $E = \{a_1, \dots, a_n\}$. Soit p_1, \dots, p_n , des entiers naturels tels que $p_1 + \dots + p_n = k$. On appelle **permutation de k éléments de E avec p_1, p_2, \dots, p_n répétitions**, toute suite ordonnée des éléments de E telle que a_1, \dots, a_n apparaissent resp. p_1, \dots, p_n fois.

Proposition. Le nombre de permutations de k éléments de E avec p_1, p_2, \dots, p_n répétitions est égal à

$$\frac{k!}{p_1! p_2! \cdots p_n!}.$$

Exemple. On dispose de 3 boules rouges, de 2 boules blanches et de 2 boules jaunes. De combien de façons peut-on les arranger.

Réponse. Soit $E = \{R, B, J\}$, où $R \equiv$ Boule rouge, $B \equiv$ Boule blanche, $J \equiv$ Boule jaune: permutations de $k = 7$ elts de E avec $p_1 = 3$, $p_2 = 2$, $p_3 = 2$ répétitions. Le nombre de façons de les arranger: $\frac{7!}{3!2!2!} = 35$.

Définition. Soit $k, n \in \mathbb{N}^*$, $k \geq n$ et soit $E = \{a_1, \dots, a_n\}$. Soit p_1, \dots, p_n , des entiers naturels tels que $p_1 + \dots + p_n = k$. On appelle **permutation de k éléments de E avec p_1, p_2, \dots, p_n répétitions**, toute suite ordonnée des éléments de E telle que a_1, \dots, a_n apparaissent resp. p_1, \dots, p_n fois.

Proposition. Le nombre de permutations de k éléments de E avec p_1, p_2, \dots, p_n répétitions est égal à

$$\frac{k!}{p_1! p_2! \cdots p_n!}.$$

Exemple. On dispose de 3 boules rouges, de 2 boules blanches et de 2 boules jaunes. De combien de façons peut-on les arranger.

Réponse. Soit $E = \{R, B, J\}$, où $R \equiv$ Boule rouge, $B \equiv$ Boule blanche, $J \equiv$ Boule jaune: permutations de $k = 7$ elts de E avec $p_1 = 3$, $p_2 = 2$, $p_3 = 2$ répétitions. Le nombre de façons de les arranger: $\frac{7!}{3!2!2!} = 35$.

Définition

Soit E un ensemble de cardinal n et $p \leq n$. Une combinaison de p éléments parmi n , notée C_n^p , est un sous ensemble de E de cardinal p .

Proposition

On a

$$\binom{p}{n} = C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{A_n^p}{p!}.$$

REMARQUE. Ici, l'ordre des éléments ne compte pas et il n'y a pas de répétition.

Proposition

1. $C_n^p = C_n^{n-p}; \quad C_n^0 = C_n^n = 1; \quad C_n^1 = C_n^{n-1} = n.$
2. $C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}.$

Les propriétés des C_n^p permettent de construire le **triangle de Pascal**.

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5	...
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	...

Exemple. Vous disposez de 3 boules rouges et de 2 boules blanches, les boules de même couleur étant indiscernables. De combien de façons pouvez-vous les arranger?

Définition

Soit E un ensemble contenant n éléments, on appelle **combinaison avec répétition** de p éléments de E , toute suite (l'ordre ne comptant pas) de p éléments avec répétition.

Proposition

Le nombre de p -combinaison avec répétition d'un ensemble à n éléments, qu'on notera ici \mathcal{B}_n^p vaut:

$$\mathcal{B}_n^p = C_{n+p-1}^p = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}.$$

Exemple. On lance simultanément 3 dés numérotés de 1 à 6 et on note les numéros qui apparaissent pour chaque dé. Quelle est le nombre de résultats possibles?

- 1 Introduction
- 2 Univers, Événement
 - Opérations sur les événements
- 3 Un peu de dénombrement
 - Arrangement, permutation, combinaison
- 4 Probabilité
 - Définition et propriétés

- 1 Introduction
- 2 Univers, Événement
 - Opérations sur les événements
- 3 Un peu de dénombrement
 - Arrangement, permutation, combinaison
- 4 Probabilité
 - Définition et propriétés

Soit une expérience aléatoire d'univers Ω et E un événement de Ω . Avant de mener l'expérience, on ne sait pas si E se réalisera ou pas. Dans ce contexte d'incertitude on souhaite quantifier les chances que E se réalise. On introduit la notion de probabilité \mathbb{P} : une application qui, à tout événement E , associe le nombre $\mathbb{P}(E) \in [0, 1]$, qui mesure les chances de réalisation de E .

La théorie est fondée sur trois axiomes.

- ❶ **Axiome 1.** Pour tout événement E on a:

$$\mathbb{P}(E) \in [0, 1]. \quad (3)$$

- ❷ **Axiome 2.** On a

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1. \quad (4)$$

- ❸ **Axiome 3.** Pour toute suite E_1, E_2, \dots , d'événements deux à deux disjoints ($E_i \cap E_j = \emptyset$ pour tout $i \neq j$) on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_n). \quad (5)$$

REMARQUE. (a) Il découle de l'axiome 3 que pour toute suite finie E_1, \dots, E_n d'événements 2 à 2 disjoints on a $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(E_i)$.
(b) Comme conséquence immédiate des axiomes 2 et 3, on a $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

EXEMPLE. (a) Si l'expérience aléatoire consiste à lancer un dé équilibré (où toutes les faces ont la même chance d'apparition), déterminer $\mathbb{P}(\{i\})$ pour tout $i \in \{1, \dots, 6\}$.

(b) Si l'expérience consiste à lancer une pièce de monnaie tronquée où la face Face a deux fois plus de chance d'apparaître que la face Pile, déterminer les probabilités d'avoir Pile et Face.

CAS ÉQUIPROBABLE. Dans certaines applications, on suppose que les événements élémentaires de Ω sont *équiprobables*, c-à-d, ont la même probabilité de se réaliser. Si Ω est de cardinal $|\Omega|$ fini alors $\forall i \in \Omega$,

$$\mathbb{P}(\{i\}) = \frac{1}{|\Omega|}.$$

REMARQUE. (a) Il découle de l'axiome 3 que pour toute suite finie E_1, \dots, E_n d'événements 2 à 2 disjoints on a $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(E_i)$.
(b) Comme conséquence immédiate des axiomes 2 et 3, on a $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

EXEMPLE. (a) Si l'expérience aléatoire consiste à lancer un dé équilibré (où toutes les faces ont la même chance d'apparition), déterminer $\mathbb{P}(\{i\})$ pour tout $i \in \{1, \dots, 6\}$.

(b) Si l'expérience consiste à lancer une pièce de monnaie tronquée où la face Face a deux fois plus de chance d'apparaître que la face Pile, déterminer les probabilités d'avoir Pile et Face.

CAS ÉQUIPROBABLE. Dans certaines applications, on suppose que les événements élémentaires de Ω sont *équiprobables*, c-à-d, ont la même probabilité de se réaliser. Si Ω est de cardinal $|\Omega|$ fini alors $\forall i \in \Omega$,

$$\mathbb{P}(\{i\}) = \frac{1}{|\Omega|}.$$

Dans ce cas, il découle de l'Axiome 3 que la probabilité d'un événement E est égale à

$$\mathbb{P}(E) = \frac{\text{card}(E)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}. \quad (6)$$

EXEMPLE. 1. On lance un dé équilibré numéroté de 1 à 6. Soit E l'événement "on obtient un nombre impair". Déterminons $\mathbb{P}(E)$.

Réponse. On a $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $E = \{1, 3, 5\}$. Comme le dé est équilibré, toutes les faces sont équiprobables. Par conséquent

$$\mathbb{P}(E) = \frac{\text{card}(E)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

EXERCICE. On tire en même temps 3 boules d'une urne contenant 5 boules rouges et 3 boules blanches. Quelle est la probabilité que l'une des boules tirées soit rouge et que les deux autres soient blanches.

Dans ce cas, il découle de l'Axiome 3 que la probabilité d'un événement E est égale à

$$\mathbb{P}(E) = \frac{\text{card}(E)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}. \quad (6)$$

EXEMPLE. 1. On lance un dé équilibré numéroté de 1 à 6. Soit E l'événement "on obtient un nombre impair". Déterminons $\mathbb{P}(E)$.

Réponse. On a $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $E = \{1, 3, 5\}$. Comme le dé est équilibré, toutes les faces sont équiprobables. Par conséquent

$$\mathbb{P}(E) = \frac{\text{card}(E)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

EXERCICE. On tire en même temps 3 boules d'une urne contenant 5 boules rouges et 3 boules blanches. Quelle est la probabilité que l'une des boules tirées soit rouge et que les deux autres soient blanches.

Proposition

Soit E et F deux événements.

1. On a

$$\mathbb{P}(\bar{E}) = 1 - \mathbb{P}(E). \quad (7)$$

2. On a

$$\mathbb{P}(F \setminus E) = \mathbb{P}(F) - \mathbb{P}(E \cap F). \quad (8)$$

En particulier, si $E \subset F$ alors

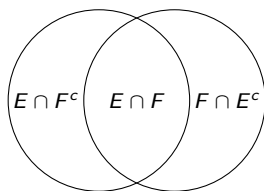
$$\mathbb{P}(F \setminus E) = \mathbb{P}(F) - \mathbb{P}(E) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(E) \leq \mathbb{P}(F) \quad (9)$$

3. On a:

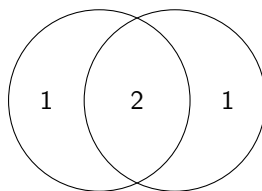
$$\mathbb{P}(E \cup F) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) - \mathbb{P}(E \cap F). \quad (10)$$

En particulier, si E et F sont disjoints: $E \cap F = \emptyset$, alors,
 $\mathbb{P}(E \cup F) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F)$.

Idée de la preuve du point 3.



a)



b)

Lorsqu'on évalue la probabilité de $E \cup F$ par $\mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F)$ on a rajouter 2 fois la proba. de $E \cap F$. D'où la nécessité de retrancher $\mathbb{P}(E \cap F)$ une fois pour éviter de la compter deux fois.

EXEMPLE. 1. On joue à Pile ou Face en lançant une pièce de monnaie avec la règle de jeu suivante: on gagne 1€ si Pile apparaît et on perd 1€ si face apparaît. Soient $E \equiv$ "gagner 15€" et $F \equiv$ "gagner 8 €". A-t-on $\mathbb{P}(E) \leq \mathbb{P}(F)$ ou $\mathbb{P}(E) \geq \mathbb{P}(F)$?

2. Soit une expérience aléatoire d'univers Ω et E, F deux événements.

- ① Montrer que $\mathbb{P}(E \cap F) \leq \mathbb{P}(E)$, $\mathbb{P}(E \cap F) \leq \mathbb{P}(F)$,
 $\mathbb{P}(E) \leq \mathbb{P}(E \cup F)$ et $\mathbb{P}(F) \leq \mathbb{P}(E \cup F)$.
- ② On suppose que $\mathbb{P}(E) = 0.3$, $\mathbb{P}(F) = 0.4$ et $\mathbb{P}(E \cap F) = 0.1$.
Déterminer $\mathbb{P}(E \cup F)$ et $\mathbb{P}(E^c \cap F^c)$.

RÉPONSE. 1. On a $E \subset F$. Par conséquent $\mathbb{P}(E) \leq \mathbb{P}(F)$.

2. 1. Cela découle du fait que $E \cap F \subset E$ (ou F), E (ou F) $\subset E \cup F$ et de la proposition.

2. 2. On déduit de l'équation (10) que $\mathbb{P}(E \cup F) = 0.6$ et de la proposition que

$$\mathbb{P}(\bar{E} \cap \bar{F}) = \mathbb{P}((E \cup F)^c) = 1 - \mathbb{P}(E \cup F) = 0.4.$$

EXEMPLE. 1. On joue à Pile ou Face en lançant une pièce de monnaie avec la règle de jeu suivante: on gagne 1€ si Pile apparaît et on perd 1€ si face apparaît. Soient $E \equiv$ "gagner 15€" et $F \equiv$ "gagner 8 €". A-t-on $\mathbb{P}(E) \leq \mathbb{P}(F)$ ou $\mathbb{P}(E) \geq \mathbb{P}(F)$?

2. Soit une expérience aléatoire d'univers Ω et E, F deux événements.

- ① Montrer que $\mathbb{P}(E \cap F) \leq \mathbb{P}(E)$, $\mathbb{P}(E \cap F) \leq \mathbb{P}(F)$,
 $\mathbb{P}(E) \leq \mathbb{P}(E \cup F)$ et $\mathbb{P}(F) \leq \mathbb{P}(E \cup F)$.
- ② On suppose que $\mathbb{P}(E) = 0.3$, $\mathbb{P}(F) = 0.4$ et $\mathbb{P}(E \cap F) = 0.1$.
Déterminer $\mathbb{P}(E \cup F)$ et $\mathbb{P}(E^c \cap F^c)$.

RÉPONSE. 1. On a $E \subset F$. Par conséquent $\mathbb{P}(E) \leq \mathbb{P}(F)$.

2. 1. Cela découle du fait que $E \cap F \subset E$ (ou F), E (ou F) $\subset E \cup F$ et de la proposition.

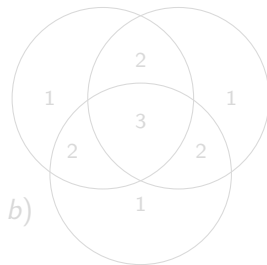
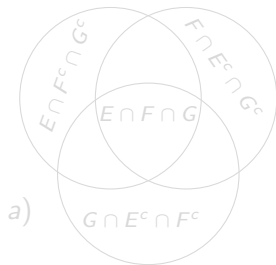
2. 2. On déduit de l'équation (10) que $\mathbb{P}(E \cup F) = 0.6$ et de la proposition que

$$\mathbb{P}(\bar{E} \cap \bar{F}) = \mathbb{P}((E \cup F)^c) = 1 - \mathbb{P}(E \cup F) = 0.4.$$

EXEMPLE. Soit E, F et G trois événements. Montrer que

$$\mathbb{P}(E \cup F \cup G) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(G) - \mathbb{P}(E \cap F) - \mathbb{P}(E \cap G) - \mathbb{P}(F \cap G) + \mathbb{P}(E \cap F \cap G). \quad (11)$$

Réponse. En considérant $E \cup F \cup G$ de la figure a) que nous décomposons en différents ensembles (numérotées selon le nombre de fois où elles sont répétées en b)). Pour qu'il n'ait pas de redondance dans $E \cup F \cup G$ il faut retrancher une fois les ensembles numérotés par 2, et deux fois l'ensemble numéroté par 3



EXEMPLE. Soit E, F et G trois événements. Montrer que

$$\mathbb{P}(E \cup F \cup G) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(G) - \mathbb{P}(E \cap F) - \mathbb{P}(E \cap G) - \mathbb{P}(F \cap G) + \mathbb{P}(E \cap F \cap G). \quad (11)$$

Réponse. En considérant $E \cup F \cup G$ de la figure a) que nous décomposons en différents ensembles (numérotées selon le nombre de fois où elles sont répétées en b)). Pour qu'il n'ait pas de redondance dans $E \cup F \cup G$ il faut retrancher une fois les ensembles numérotés par 2, et deux fois l'ensemble numéroté par 3

