

ENSIIE. Cours de Probabilité: FIPA.

Probabilité conditionnelle

Abass SAGNA,
`abass.sagna@ensiie.fr`

Maître de Conférences à l'ENSIIE,
Laboratoire de Mathématiques et Modélisation d'Evry
Université d'Evry Val-d'Essonne, UMR CNRS 8071

September 27, 2019

Plan

- 1 Définition et exemples
- 2 Formule des probabilités composées
- 3 Partition d'un ensemble
- 4 Formule des probabilités totales
- 5 Événements indépendants

- 1 Définition et exemples
- 2 Formule des probabilités composées
- 3 Partition d'un ensemble
- 4 Formule des probabilités totales
- 5 Événements indépendants

- Un candidat passe un concours composé de Maths, Physique, Info., Eco., où les Maths et la Physique sont affectées des plus grands coefficients.
- Supposons que les notes de chaque épreuve sont diffusées avant l'entame d'une nouvelle épreuve et que le candidat est admis au concours si sa moyenne est supérieure ou égale à 10.
- Soit $E \equiv$ "le candidat est admis au concours", $F \equiv$ "le candidat (de profil scientifique) a eu une moyenne de 10 aux épreuves de Maths et Physique" et $G \equiv$ "le candidat (de profil scientifique) a eu une moyenne de 10 aux épreuves d'Info de d'Eco ". Comparez $\mathbb{P}(E|F)$ et $\mathbb{P}(E|G)$.
- On s'attend à ce que $\mathbb{P}(E|F) \geq \mathbb{P}(E|G)$? $\mathbb{P}(E|F) \leq \mathbb{P}(E|G)$?

Définition. Si $\mathbb{P}(F) > 0$ alors,

$$\mathbb{P}(E|F) = \frac{\mathbb{P}(E \cap F)}{\mathbb{P}(F)}. \quad (1)$$

REMARQUE. Si $F \subset E$ alors

$$\mathbb{P}(E|F) = \frac{\mathbb{P}(E \cap F)}{\mathbb{P}(F)} = \frac{\mathbb{P}(F)}{\mathbb{P}(F)} = 1.$$

EXEMPLE. On considère une épreuve de saut en long. pour 1 classe de 1^{re} L. On procède par élimination en faisant varier la barre entre 1 m et 1.60 m par pas de 10 cm. La barre est mise à 1 m, puis, à 1.10 m, etc et on élimine tous les élèves qui ne la franchissent pas.

Soient les événements suivants:

F_1 : "Franchir la barre des 1.40 m",

F_2 : "Franchir la barre des 1.50 m",

et E : "Franchir la barre des 1.60 m".

Montrer que la probabilité de franchir la barre des 1.60 m sachant que l'on a franchi la barre des 1.50 m est supérieure ou égale à la probabilité de franchir la barre des 1.60 m sachant que l'on a franchi la barre des 1.40 m.

Réponse. Notons d'abord que $E \subset F_2 \subset F_1$. Donc,

$$E = E \cap F_1 = E \cap F_2 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(F_2) \leq \mathbb{P}(F_1).$$

Par conséquent,

$$\mathbb{P}(E|F_2) = \frac{\mathbb{P}(E \cap F_2)}{\mathbb{P}(F_2)} = \frac{\mathbb{P}(E)}{\mathbb{P}(F_2)} \geq \frac{\mathbb{P}(E)}{\mathbb{P}(F_1)} = \frac{\mathbb{P}(E \cap F_1)}{\mathbb{P}(F_1)} = \mathbb{P}(E|F_1).$$

EXEMPLE. On lance deux fois une pièce de monnaie. Supposons que

$$\mathbb{P}(\{PP\}) = \frac{9}{16}, \quad \mathbb{P}(\{PF\}) = \frac{3}{16}, \quad \mathbb{P}(\{FP\}) = \frac{3}{16}, \quad \mathbb{P}(\{FF\}) = \frac{1}{16}.$$

Déterminer la proba. de $E \equiv$ "avoir 1 seul Pile aux 2 lancers" sachant que

a) on a $G \equiv$ "Face au premier lancer".

b) on a $H \equiv$ "Pile au premier lancer".

Réponse. a) et b). On veut déterminer $\mathbb{P}(E|G)$ et $\mathbb{P}(E|H)$. On a

$$\mathbb{P}(E|G) = \frac{\mathbb{P}(E \cap G)}{\mathbb{P}(G)} = \frac{\mathbb{P}(\{FP\})}{\mathbb{P}(\{FF, FP\})} = \frac{3/16}{4/16} = \frac{3}{4} \quad \text{et}$$

$$\mathbb{P}(E|H) = \frac{\mathbb{P}(E \cap H)}{\mathbb{P}(H)} = \frac{\mathbb{P}(\{PF\})}{\mathbb{P}(\{PP, PF\})} = \frac{3/16}{12/16} = \frac{1}{4}.$$

Réponse. Notons d'abord que $E \subset F_2 \subset F_1$. Donc,

$$E = E \cap F_1 = E \cap F_2 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(F_2) \leq \mathbb{P}(F_1).$$

Par conséquent,

$$\mathbb{P}(E|F_2) = \frac{\mathbb{P}(E \cap F_2)}{\mathbb{P}(F_2)} = \frac{\mathbb{P}(E)}{\mathbb{P}(F_2)} \geq \frac{\mathbb{P}(E)}{\mathbb{P}(F_1)} = \frac{\mathbb{P}(E \cap F_1)}{\mathbb{P}(F_1)} = \mathbb{P}(E|F_1).$$

EXEMPLE. On lance deux fois une pièce de monnaie. Supposons que

$$\mathbb{P}(\{PP\}) = \frac{9}{16}, \quad \mathbb{P}(\{PF\}) = \frac{3}{16}, \quad \mathbb{P}(\{FP\}) = \frac{3}{16}, \quad \mathbb{P}(\{FF\}) = \frac{1}{16}.$$

Déterminer la proba. de $E \equiv$ "avoir 1 seul Pile aux 2 lancers" sachant que

a) on a $G \equiv$ "Face au premier lancer".

b) on a $H \equiv$ "Pile au premier lancer".

Réponse. a) et b). On veut déterminer $\mathbb{P}(E|G)$ et $\mathbb{P}(E|H)$. On a

$$\mathbb{P}(E|G) = \frac{\mathbb{P}(E \cap G)}{\mathbb{P}(G)} = \frac{\mathbb{P}(\{FP\})}{\mathbb{P}(\{FF, FP\})} = \frac{3/16}{4/16} = \frac{3}{4} \quad \text{et}$$

$$\mathbb{P}(E|H) = \frac{\mathbb{P}(E \cap H)}{\mathbb{P}(H)} = \frac{\mathbb{P}(\{PF\})}{\mathbb{P}(\{PP, PF\})} = \frac{3/16}{12/16} = \frac{1}{4}.$$

EXEMPLE. On joue à Pile ou Face en jetant une pièce de monnaie non tronquée avec la règle du jeu suivante: on gagne 1€ si Pile apparaît et on perd 1€ sinon. On jète trois fois la pièce. Notons les événements $E \equiv$ “gagner 1€” et $F \equiv$ “avoir un seul Pile aux deux premiers lancers”. Déterminer $\mathbb{P}(E|F)$.

EXERCICE. Une urne contient 7 boules blanches, 4 boules rouges. On tire successivement et sans remise 2 boules de l'urne. Quelle est la probabilité d'avoir deux boules rouges si les événements élémentaires sont équiprobables?

Proposition

Soit F un événement non vide. Alors, l'application $\mathbb{P}(\cdot|F)$ définie sur Ω est une probabilité. En particulier, pour tout événement E on a

$$\mathbb{P}(\bar{E}|F) = 1 - \mathbb{P}(E|F).$$

Attention. $\mathbb{P}(E|\bar{F}) \neq 1 - \mathbb{P}(E|F)$.

Plan

- 1 Définition et exemples
- 2 Formule des probabilités composées**
- 3 Partition d'un ensemble
- 4 Formule des probabilités totales
- 5 Événements indépendants

Proposition

Soit E_1, E_2, \dots, E_n une suite de n événements. Alors,

$$\mathbb{P}(E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n) = \mathbb{P}(E_1) \mathbb{P}(E_2 | E_1) \mathbb{P}(E_3 | E_1 \cap E_2) \dots \mathbb{P}(E_n | E_1 \cap \dots \cap E_{n-1}).$$

EXEMPLE. Une urne contient 8 boules blanches, 5 boules rouges. On tire successivement et sans remise 3 boules de l'urne. Quelle est la probabilité d'avoir successivement (si les événements élémentaires sont équiprobables)

- a) une boule rouge, une boule rouge, une boule blanche,
- b) une boule blanche, une boule rouge, une boule blanche.

EXEMPLE. Quelle est la probabilité qu'un groupe de 50 individus tirés au hasard aient tous des dates d'anniversaire différentes

Plan

- 1 Définition et exemples
- 2 Formule des probabilités composées
- 3 Partition d'un ensemble**
- 4 Formule des probabilités totales
- 5 Événements indépendants

Définition

Une suite E_1, \dots, E_n de n événements forment *une partition de Ω* si

- $E_i \neq \emptyset, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\},$
- $E_i \cap E_j = \emptyset, \quad \forall i \neq j,$
- $\bigcup_{i=1}^n E_i = \Omega.$

EXEMPLE. (a) Soit E un événement non vide. Alors E et E^c forment une partition de Ω .

(b) Si E et F sont disjoints, alors E , F et $E^c \cap F^c$ forment une partition de Ω .

(c) Si E et F sont deux ensembles quelconques de Ω , donner une partition de Ω à partir des événements E et F .

Plan

- 1 Définition et exemples
- 2 Formule des probabilités composées
- 3 Partition d'un ensemble
- 4 Formule des probabilités totales**
- 5 Événements indépendants

Définition

Une suite E_1, \dots, E_n de n événements forment *une partition de Ω* si

- $E_i \neq \emptyset, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\},$
- $E_i \cap E_j = \emptyset, \quad \forall i \neq j,$
- $\bigcup_{i=1}^n E_i = \Omega.$

EXEMPLE. (a) Soit E un événement non vide. Alors E et E^c forment une partition de Ω .

(b) Si E et F sont disjoints, alors E, F et $E^c \cap F^c$ forment une partition de Ω .

Proposition

Soit F_1, F_2, \dots, F_n une suite de partition de Ω et soit E un événement. Alors,

$$\mathbb{P}(E) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(E \cap F_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(F_i) \mathbb{P}(E|F_i). \quad (2)$$

EXEMPLE. Une usine fabrique 3 type d'ampoules (type 1, 2 et 3). Les proba. que la durée de vie des ampoules de type 1, 2 et 3 dépassent 5 ans sont resp. de 0.7, 0.4 et de 0.3. On suppose que 30% des ampoules fabriquées sont de type 1, 20% sont de type 2 et 50% sont de type 3. Quelle est la proba. qu'1 ampoule tirée au hasard ait une durée de vie supérieure à 5 ans?

On notera E l'événement que la durée de vie de l'ampoule choisie est supérieure à 5 ans et F_j l'événement que l'on a choisi l'ampoule de type j , $j = 1, 2, 3$.

Proposition. Si E_1, \dots, E_n est une partition de Ω alors, $\forall i$,

$$\mathbb{P}(E_i|F) = \frac{\mathbb{P}(E_i \cap F)}{\mathbb{P}(F)} = \frac{\mathbb{P}(E_i)\mathbb{P}(F|E_i)}{\sum_{j=1}^n \mathbb{P}(E_j)\mathbb{P}(F|E_j)}. \quad (3)$$

EXEMPLE. Reprenons l'exemple précédent. Sachant qu'une ampoule a durée plus de 5 ans, quelle est la probabilité quelle provienne du type i , $i = 1, 2, 3$.

EXEMPLE. Une usine fabrique 3 type d'ampoules (type 1, 2 et 3). Les proba. que la durée de vie des ampoules de type 1, 2 et 3 dépassent 5 ans sont resp. de 0.7, 0.4 et de 0.3. On suppose que 30% des ampoules fabriquées sont de type 1, 20% sont de type 2 et 50% sont de type 3. Quelle est la proba. qu'1 ampoule tirée au hasard ait une durée de vie supérieure à 5 ans?

On notera E l'événement que la durée de vie de l'ampoule choisie est supérieure à 5 ans et F_j l'événement que l'on a choisi l'ampoule de type j , $j = 1, 2, 3$.

Proposition. Si E_1, \dots, E_n est une partition de Ω alors, $\forall i$,

$$\mathbb{P}(E_i|F) = \frac{\mathbb{P}(E_i \cap F)}{\mathbb{P}(F)} = \frac{\mathbb{P}(E_i)\mathbb{P}(F|E_i)}{\sum_{j=1}^n \mathbb{P}(E_j)\mathbb{P}(F|E_j)}. \quad (3)$$

EXEMPLE. Reprenons l'exemple précédent. Sachant qu'une ampoule a durée plus de 5 ans, quelle est la probabilité quelle provienne du type i , $i = 1, 2, 3$.

Plan

- 1 Définition et exemples
- 2 Formule des probabilités composées
- 3 Partition d'un ensemble
- 4 Formule des probabilités totales
- 5 Événements indépendants

- Lorsqu'on tire 2 boules d'une urne qui contient n boules blanches et m boules noires, le résultat du 1^{er} tirage influe sur celui du second.
- Par ailleurs, lorsqu'on lance 2 fois une pièce de monnaie, le résultat du second lancer n'est pas influencé par celui du premier lancer.

L'indépendance entre E et F rend compte de l'absence d'influence entre E et F : E et F sont indépendants si la connaissance de l'information partielle que E (resp. F) s'est réalisé ne change pas la probabilité que F (resp. E) se réalise. C-à-d, $\mathbb{P}(E|F) = \mathbb{P}(E)$ (resp. $\mathbb{P}(F|E) = \mathbb{P}(F)$). Comme

$$\mathbb{P}(E|F) = \frac{\mathbb{P}(E \cap F)}{\mathbb{P}(F)},$$

on a la définition équivalente suivante.

Définition. Deux événements E et F sont *indépendants*ssi

$$\mathbb{P}(E \cap F) = \mathbb{P}(E)\mathbb{P}(F). \quad (4)$$

EXEMPLE. On lance deux fois une pièce de monnaie équilibrée et on note la face qui apparaît. On suppose que les événements élémentaires de $\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}$ sont équiprobables. Soit E l'événement qu'on obtient Pile au premier lancer, G l'événement qu'on obtient Face au second lancer et H l'événement "avoir deux Pile".

- 1 Les événements E et G sont-ils indépendants.
- 2 Les événements E et H sont-ils indépendants?

Proposition

Si E et F sont indépendants alors E est indépendant de \bar{F} ; \bar{E} est indépendant de F et \bar{E} est indépendant de \bar{F} .

EXEMPLE. Montrer que \emptyset et Ω sont indépendants de tout événement E .

EXEMPLE. On lance deux fois une pièce de monnaie équilibrée et on note la face qui apparaît. On suppose que les événements élémentaires de $\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}$ sont équiprobables. Soit E l'événement qu'on obtient Pile au premier lancer, G l'événement qu'on obtient Face au second lancer et H l'événement "avoir deux Pile".

- ❶ Les événements E et G sont-ils indépendants.
- ❷ Les événements E et H sont-ils indépendants?

Proposition

Si E et F sont indépendants alors E est indépendant de \bar{F} ; \bar{E} est indépendant de F et \bar{E} est indépendant de \bar{F} .

EXEMPLE. Montrer que \emptyset et Ω sont indépendants de tout événement E .

Définition

Les événements E_1, E_2, \dots, E_n sont indépendants ssi $\forall I \subset \{1, 2, \dots, n\}$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} E_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(E_i). \quad (5)$$

EXEMPLE. On lance de façon infinie et indépendante une pièce de monnaie tronquée dont la probabilité d'apparition de Pile est p et celle de Face est $1 - p$. Déterminer

- ❶ la probabilité que Pile apparaisse pour la première fois au n -ième tirage.
- ❷ la probabilité que Pile apparaisse au moins une fois lors des n premiers lancers.
- ❸ la probabilité qu'il ait exactement k Pile lors des n premiers lancers.
- ❹ la probabilité d'avoir Pile à tous les lancers.

On notera P_i l'événement que Pile apparaît au i -ième lancer et F_i l'événement que Face apparaît au i -ième lancer.