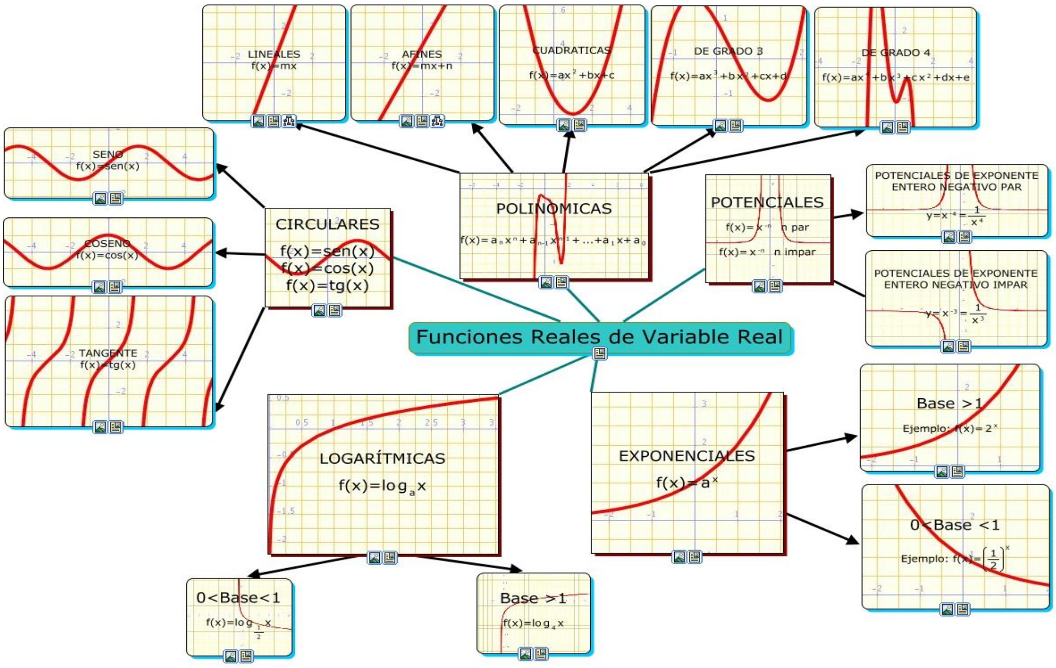
UNIDAD 3

FUNCIONES



Al finalizar la unidad habrás aprendido y podrás:

- **Identificar una función en cualquiera de sus representaciones.**
- **Realizar operaciones con funciones.**
- **Utilizar las gráficas de las funciones para poder obtener una serie de datos como intersecciones, raíces, ceros, máximos, mínimos, etc.**
- **Utilizar las funciones lineales y aplicarlas en contextos variados.**
- **Identifica los elementos de la función lineal y las aplica.**
- **Identificar las funciones cuadráticas y sus elementos.**
- **Aplicar las funciones cuadráticas en contextos diversos.**
- **Aplicar las propiedades de las raíces cuadráticas y el discriminante de la ecuación.**
- **Obtener las funciones inversas, determinando la inyectividad de la función original.**
- **Utilizar las funciones exponencial y logarítmica y aplicarlas en contextos variados.**
- **Modelar una serie de datos en funciones básicas.**
- **Resolver ecuaciones de todo tipo.**

HISTORIA

Lo más apropiado, quizás, sea comenzar en Mesopotamia. En las matemáticas babilónicas encontramos tablas con los cuadrados, los cubos y los inversos de los números naturales. Estas tablas sin duda definen funciones de N en N o de N en R, lo que no implica que los babilonios conocieran el concepto de función. Conocían y manejaban funciones específicas, pero no el concepto abstracto y moderno de función.

En el antiguo Egipto también aparecen ejemplos de usos de funciones particulares. Una tabla con la descomposición de 2/n en fracciones unitarias para los impares n desde 5 hasta 101 aparece en el Papiro Rhind o Papiro Ahmes, de unos 4000 años de antigüedad considerado como el primer tratado de matemáticas que se conserva.

En la Grecia clásica también manejaron funciones particulares —incluso en un sentido moderno de relación entre los elementos de dos conjuntos y no sólo de fórmula— pero es poco probable que comprendieran el concepto abstracto (y moderno) de función.

La mayor parte de los historiadores de las matemáticas parecen estar de acuerdo en atribuir a Nicole Oresme (1323-1382) la primera aproximación al concepto de función, cuando describió las leyes de la naturaleza como relaciones de dependencia entre dos magnitudes. Fue el primero en hacer uso sistemático de diagramas para representar magnitudes variables en un plano.

En la revolución científica iniciada en el siglo XVI los científicos centraron en atención en los fenómenos de la naturaleza, poniendo énfasis en las relaciones entre las variables que determinaban dichos fenómenos y que podían ser expresadas en términos matemáticos. Era necesario comparar las variables, relacionarlas, expresarlas mediante números y representarlas en algún sistema geométrico adecuado.

Galileo Galilei (1564-1642) quien pareció entender el concepto de función aún con mayor claridad. Casi al mismo tiempo que Galileo llegaba a estas ideas, Renè Descartes (1596-1650) introducía la geometría analítica. Descartes desarrolló y llevó a sus fundamentales consecuencias las ideas que siglos atrás se habían usado para representar en el plano relaciones entre magnitudes. Ahora cualquier curva del plano podía ser expresada en términos de ecuaciones y cualquier ecuación que relacionara dos variables podía ser representada geométricamente en un plano.

A finales del siglo XVII aparece por primera vez el término función en palabras de Johan Bernoulli. Pero no fue hasta 1748 cuando concepto de función saltó a la fama en matemáticas. Leonhard Euler, uno de los grandes genios de las matemáticas de todos los tiempos, publicó un libro, Introducción al análisis infinito.

Muchos matemáticos abordaron el problema de dar una definición precisa y adecuada de función. Y así se pasaron casi dos siglos, puliendo poco a poco el concepto, hasta que, ya en el siglo XX, Edouard Goursat dio en 1923 la definición que aparece en la mayoría de los libros de textos hoy en día: "Se dice que y es una función de x si a cada valor de x le corresponde un único valor de y. Esta correspondencia se indica mediante la ecuación $y = f(x)$."

Noether, E; Funciones, Aspectos globales.

FUNCIONES

Rico: "Todo pasa por las funciones"

La observación de un fenómeno, de un cambio, conduce a una función.

Esta consideración de dependencia conduce de forma natural a la noción de función.

Una función viene a expresar en términos cuantitativos la dependencia de una magnitud respecto de otra u otras.

ALGUNAS APLICACIONES

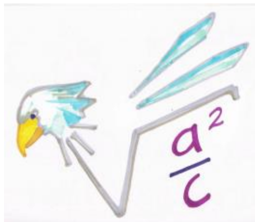
Construcción:

Telecomunicaciones:

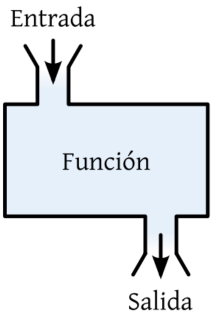
Medios de transporte:

Veterinaria, zootecnia:

Administración, economía:



RELACIÓN:



FUNCIÓN:
Una función es una relación especial en la cual ____________

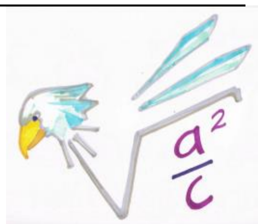
____

____

Para un valor de la primera componente __________________

____

Si concebimos a la función como una máquina que ingresa un valor y sale otro, de acuerdo a lo que se programe



REPRESENTACIÓN DE UNA FUNCIÓN

TABLA ____________________________________

____

PARES ORDENADOS ____

____

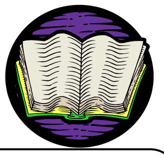
____

Reconocer si es una función o no, justificando el por qué:

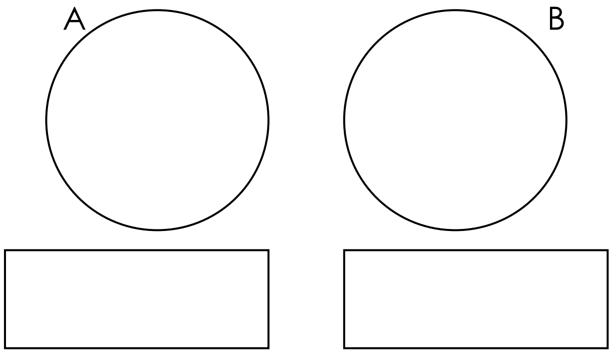
a) {(0,4), (1,5), (2,15), (3,6), (6,1)}
b) {(-2,4), (4,-2), (5,7), (7,5), (1,1)}
c) {(2,7), (3,7), (6,7), (7,7), (5,7)}
d) {(1,3), (4,6), (6,7), (5,6), (1,3)}
e) {(2,8), (2,7), (5,7), (6,9), (5,1)}
f) {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5)}

MAPA DE FLECHAS ____

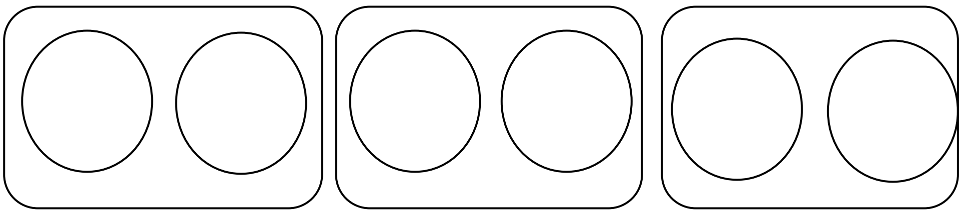
____



Mapa de flechas o diagrama sagital. ¿Cómo se representa a Sagitario?



Reconocer si es una función o no, justificando cada una:



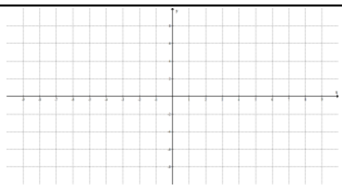
Función “uno a uno” o INYECTIVA	“Varios a uno”	“Uno a varios”

Se llama Plano Cartesiano en honor a René Descartes, quien fue el primero que planteó un sistema de coordenadas rectangulares

PLANO CARTESIANO ____

____

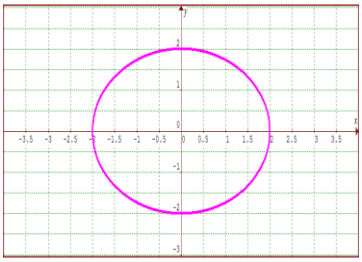
Eje y,
Eje vertical
Eje de ordenadas

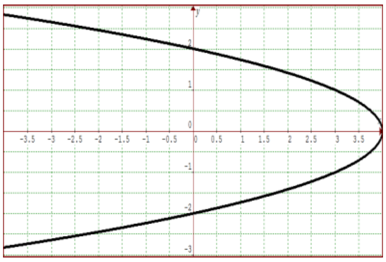


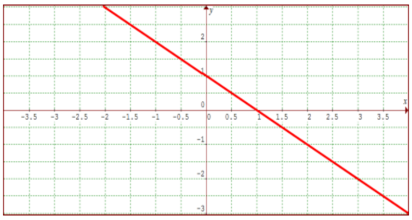
Eje x,
Eje horizontal
Eje de abscisas

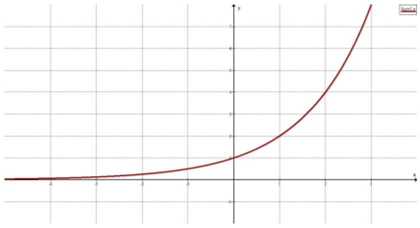
¿Qué tan exactas pueden ser las gráficas? Hay que hacer una diferencia entre gráfica y bosquejo o esbozo.

Reconocer si es una función o no, justificando cada una.





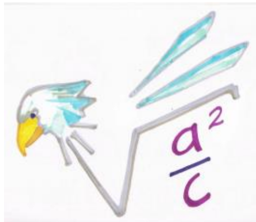




Método de la línea vertical ____________

____

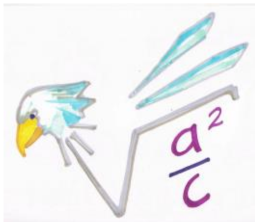
____



LEY DE FORMACIÓN _____________________________________

____

Notación:



a) $y = f(x) = x+2$

   Elementos:

   Se lee:

b) $f : x \rightarrow x + 2$

   Elementos:

   Se lee:

Reconocer si es una función o no justificando cada una de ellas:

a) $\{(x,y) \ / \ x+y = 4\}$

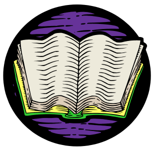
b) $\{(x,y) \ / \ x^2 + y = 4\}$

c) $\{(x,y) \,/\, x < 4,\ y > 3\}$

d) $\{(x,y) \,/\, y = 4 + \sqrt{x}\}$

e) $\{(x,y) \,/\, x^2 + y^2 = 4\}$

f) $\{(x,y) \,/\, y = 2 + \log_3 x\}$



La ley de formación puede estar presentada como una ecuación o una inecuación, aunque en este último caso no sería función, ¿por qué?

EJERCICIOS:

1. Sea la función $f(x) = 4x - 6$. Calcular:
   a) $f(3) + f(5)$

   b) $f(2,5) - 3f(1,5)$

   c) "a" para que $f(a) + f(a+1) = 10$

   d) "b" para que $f(2b) - f(b) = 18$

   e) El valor de la abscisa para que tenga 7 de imagen.

   f) El valor de la ordenada para una abscisa de 6.

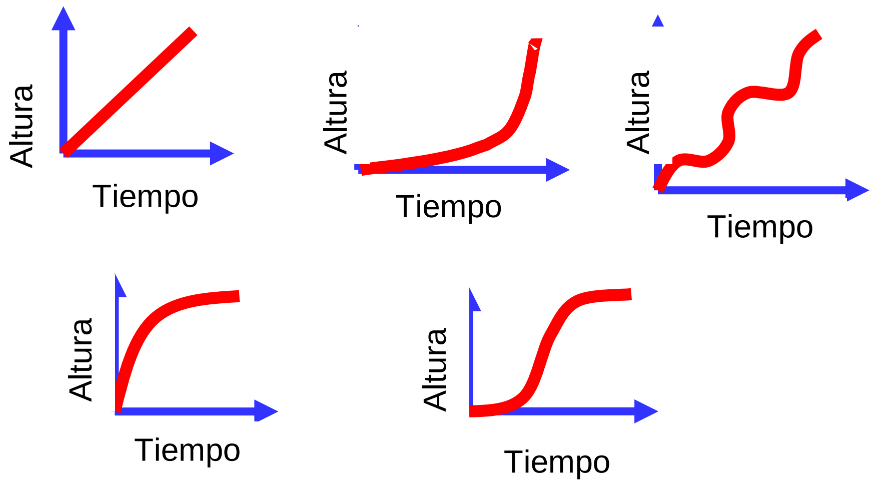
2. Sean las funciones $f: x \to x^2 - 4$; $g: x \to 5 - x$; $h: x \to 1/x$. Calcular:
   a) $f(3) - g(2) + h(0,5)$

   b) $f(g(4))$

c) “a” para que f(a) – g(a) = 4

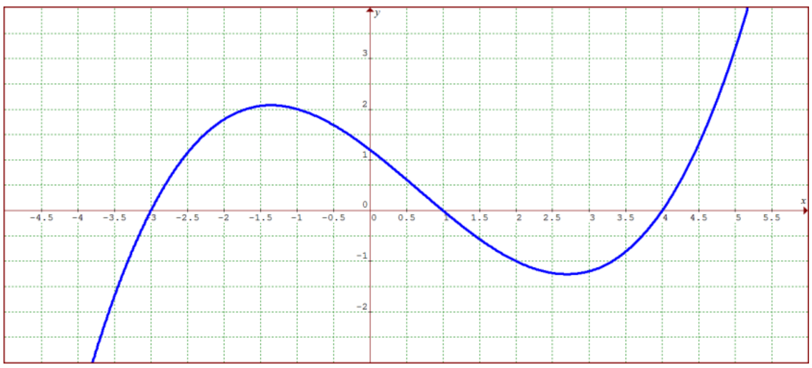
d) “m” para que g(m) = h(m)

3. Elige el gráfico que mejor se ajusta a cada una de las situaciones al izar una bandera en un mástil vertical:
   a) bandera izada a un ritmo constante.
   b) bandera izada rápidamente al principio, luego cada vez más despacio en la parte superior.
   c) bandera izada a tirones “mano sobre mano”
   d) Lentamente al principio y se acelera al final.
   e) Lentamente al principio, luego se acelera y después se fue deteniendo en la parte final del mástil



EJEMPLOS:

a) Se presenta la función y=f(x) en la gráfica siguiente:



Calcular:

f(-1) = ____________ f(1) = ____________

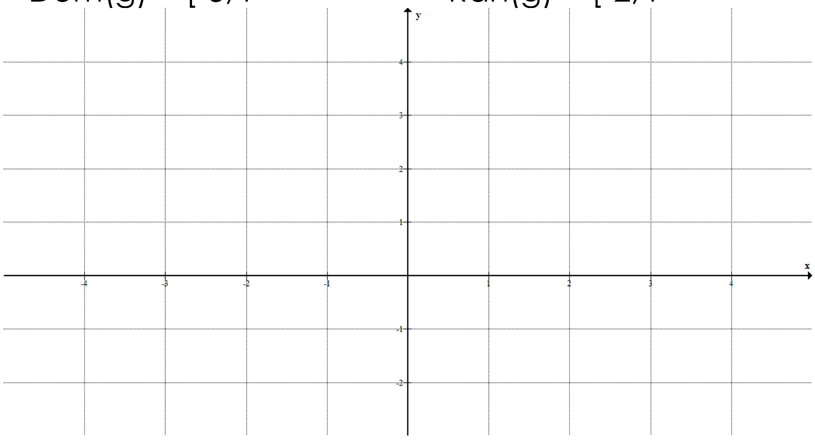
f(-2) = ____________ f(4,5) = ____________

f(a) = 0,5 → a = ____ , _____ , ______

En términos generales las funciones pueden ser aplicadas no sólo sobre conjuntos numéricos, este es un ejemplo de esto, ¿puedes plantear otro?

b) Efectuar una gráfica de la función y = g(x), de manera que:

g(-2) = 3	g(0) = -1
g(1) = 0	g(3) = 2
Dom(g) = [-3,4>	Ran(g) = [-2,4>



c) Sean los conjuntos A={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} y B={2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}. Hacer un diagrama de flechas que represente la función: $f_1=\{(x,y) \in A \times B \ / \ x + y = 6\}$

Una función está plenamente definida si se representa mediante alguna de las formas vistas y además se menciona el dominio.

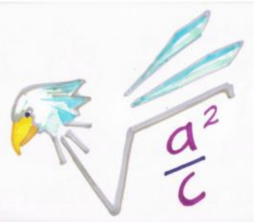
ELEMENTOS DE LA FUNCIÓN

DOMINIO ____

____

RANGO O RECORRIDO ______________________________

____



Ejercicios:

a) Hallar el dominio y el rango de las relaciones y expresarlas de todas las formas vistas:

– {(3,2), (5,8), (2,2), (6,3), (8,1)}
Dom: Ran:

– {(0,0), (4,-2), (-3,1), (-1,-1), (3,4)}
Dom: Ran:

– $y = x+2$ donde $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$
Dom: Ran:

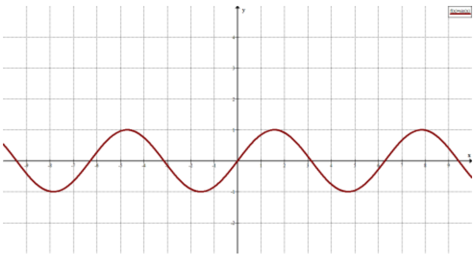
– $y > x+3$ donde $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ e $y \in \{4, 5, 6, 7, 8, 10\}$
Dom: Ran:

Para calcular el dominio y el rango de las funciones representadas mediante pares ordenados debemos:

____

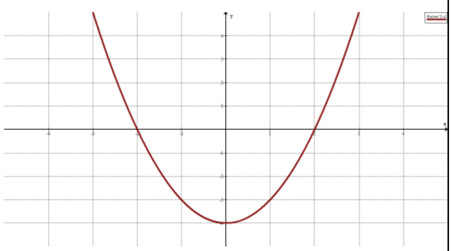
____

b) En cada gráfico hallar el dominio y el rango de las funciones:



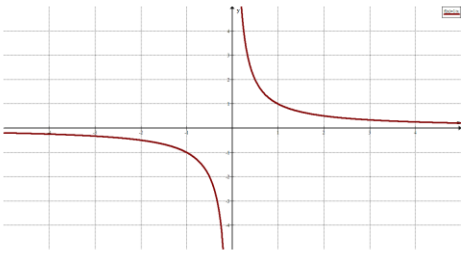
Dom:

Ran:



Dom:

Ran:

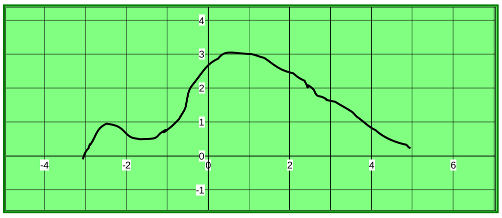


Dom:

Ran:

Dom:

Ran:



Para calcular el dominio y el rango de las funciones representadas mediante gráficos debemos:

____

____

c) En cada función indicar el dominio y rango:

$y = 3x + 2$

$y = x^2 – 4$

$y = 2^x$

$y = \log_2(x-1)$

Para calcular el dominio y el rango de las funciones representadas mediante su ley de formación:

____

____

____

____

Ejercicios:

Determinar el dominio de cada función:

a) $y=\sqrt{x-3}$

b) $y=x^3-3x^2+8$

c) $y=\log_3(2x-5)$

d) $y=\sqrt{x^2-9}$

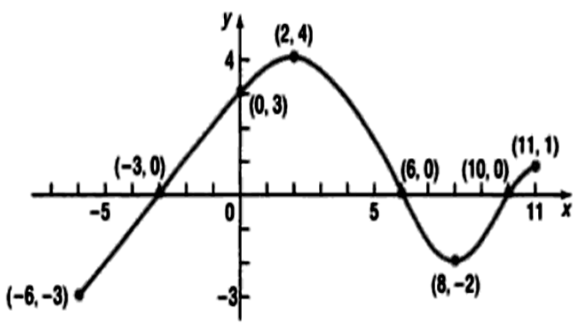
e) $f: x \rightarrow \dfrac{x-3}{x}$

f) $g: x \rightarrow \sqrt[5]{2x-3}$

g) $h: x \rightarrow \dfrac{1}{x^3+x^2-2x}$

h) $i: x \rightarrow \log_{(3x-2)}(x-1)$

En los problemas del 9 al 20, utilice la gráfica de la función f dada en la figura.



9. Determine $f(0)$ y $f(-6)$.

10. Determine $f(6)$ y $f(11)$.

11. ¿Es $f(2)$ positivo o negativo?

12. ¿Es $f(8)$ positivo o negativo?

13. ¿Para qué números x se cumple que $f(x)=0$?

14. ¿Para qué números x se cumple que $f(x)>0$?

15. ¿Cuál es el dominio de f?

16. ¿Cuál es el rango de f?

17. ¿Cuáles son las intersecciones-x?

18. ¿Cuáles son las intersecciones-y?

19. ¿Cuántas veces la recta $y=\frac{1}{2}$ corta a la gráfica?

20. ¿Cuántas veces la recta $y=3$ interseca la gráfica?

En la calculadora:

FUNCIÓN RAIZ CUADRADA

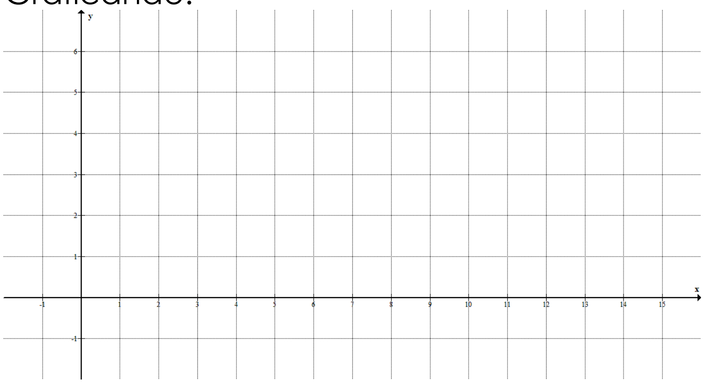
Graficar, hallando dominio y rango de la función:

$y = \sqrt{x}$

Tabulando:

x				
y				

Graficando:



Dom:

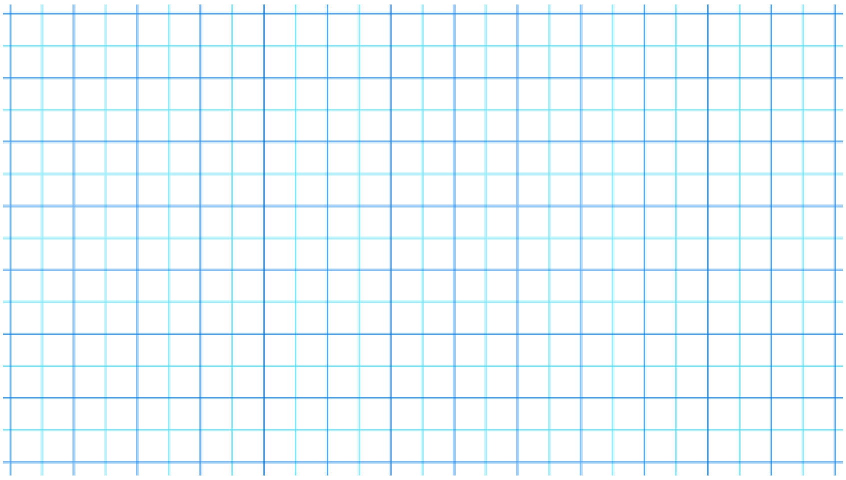
Ran:

Es muy importante conocer las formas de las funciones básicas y luego entender las transformaciones para realizar un bosquejo de gráfico fácilmente

TRANSFORMACIONES DE GRÁFICAS

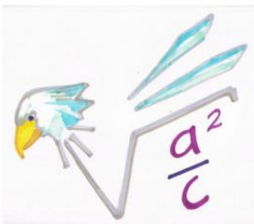
Realiza la gráfica de las siguientes funciones (en el mismo plano) y determina el dominio y el rango de cada una.

a) $y=\sqrt{x}$ b) $y=\sqrt{x}+2$ c) $y=\sqrt{x}-1$



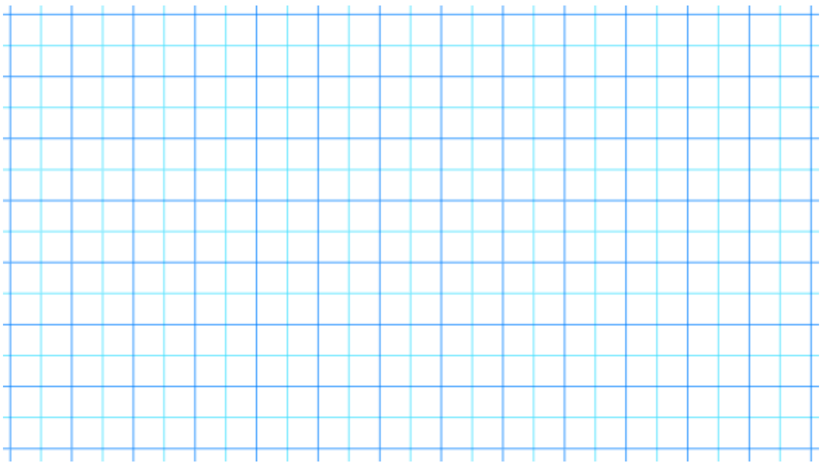
¿Cómo será la gráfica de la función $y=\sqrt{x}+1$?

Conclusión:



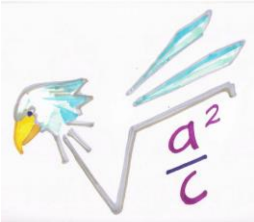
Realiza la gráfica de las siguientes funciones (en el mismo plano) y determina el dominio y el rango de cada una.

a) $y=\sqrt{x}$ b) $y=\sqrt{x+4}$ c) $y=\sqrt{x-3}$



¿Cómo será la gráfica de la función $y=\sqrt{x-1}$?

Conclusión:

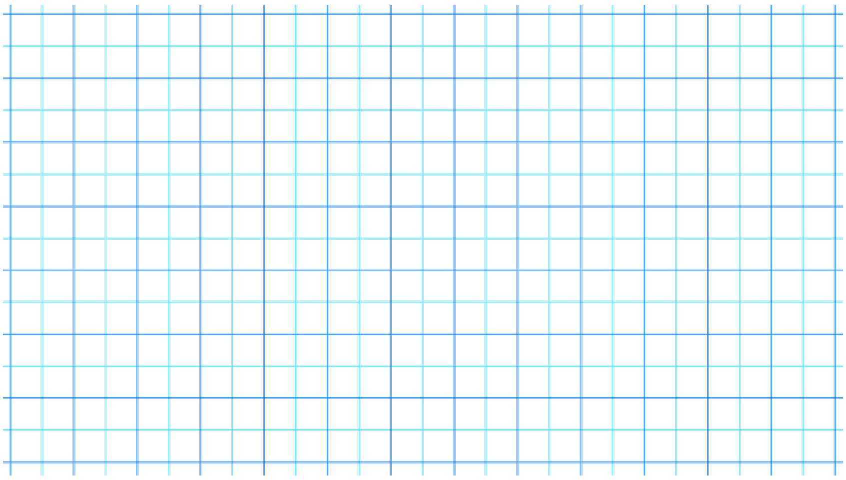


¿Cómo será la gráfica de la función $y=\sqrt{x-3}+2$? ¿Qué desplazamientos se han realizado?

Las traslaciones se describen, habitualmente, mediante un vector: $\begin{pmatrix} Horiz. \\ Vert. \end{pmatrix}$

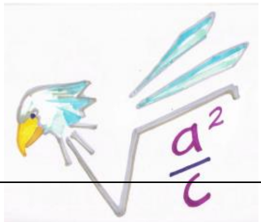
Realiza la gráfica de las siguientes funciones (en el mismo plano) y determina el dominio y el rango de cada una.

a) $y=\sqrt{x}$ b) $y=-\sqrt{x}$ c) $y=\sqrt{-x}$



¿Cómo será la gráfica de la función $y=-\sqrt{-x}+1$?

Conclusión:

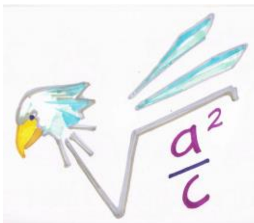


Realiza la gráfica de las siguientes funciones (en el mismo plano) y determina el dominio y el rango de cada una.

a) $y = \sqrt{x}$ b) $y = 2\sqrt{x}$ c) $y = \frac{1}{3}\sqrt{x}$

¿Cómo será la gráfica de la función $y = \frac{3}{5}\sqrt{x} + 1$?

Conclusión:

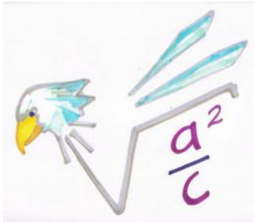


Realiza la gráfica de las siguientes funciones (en el mismo plano) y determina el dominio y el rango de cada una.

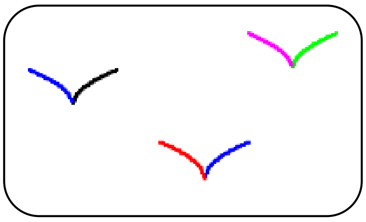
a) $y = \sqrt{x}$ b) $y = \sqrt{3x}$ c) $y = \sqrt{\frac{x}{2}}$

¿Cómo será la gráfica de la función $y = -2\sqrt{3x} + 1$?

Conclusión:

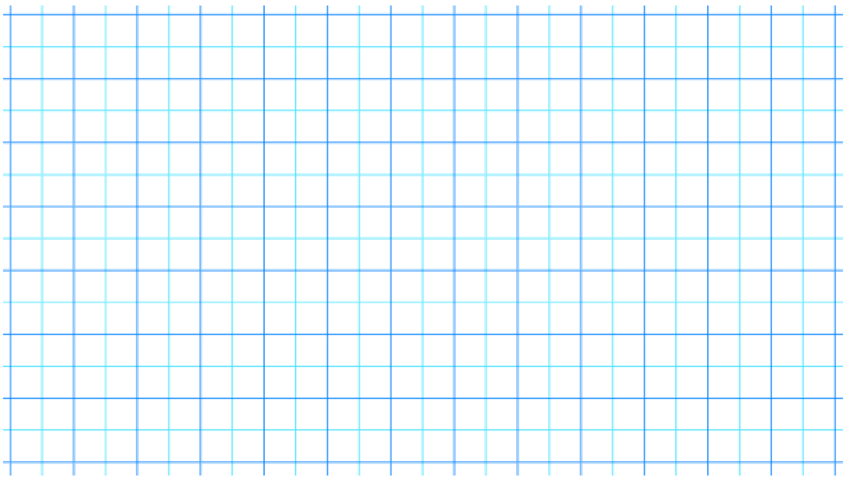


En la calculadora, reproducir el siguiente gráfico:



Grafica, usando los criterios de transformaciones y halla el dominio y el rango

$$y = \sqrt{x-3} + 1$$



$y = \sqrt{x+5} - 6$

$y = \sqrt{1-x} + 2$

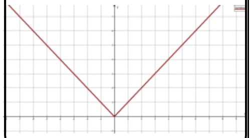
$y = 3 - \sqrt{x+1}$

$$y = 4 - \sqrt{3 - x}$$

Comprueba, en tu cuaderno, que estos mismos resultados se aplican a la **función valor absoluto**.

La función valor absoluto se define como:

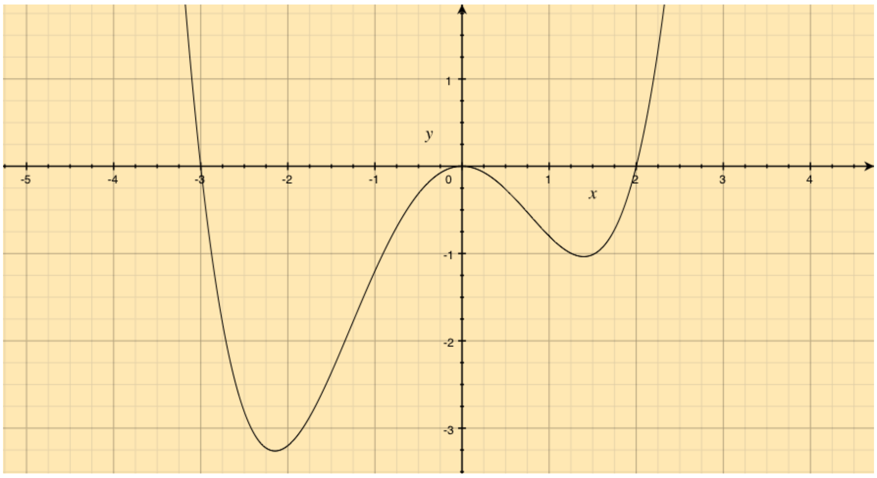
Y su gráfica es:



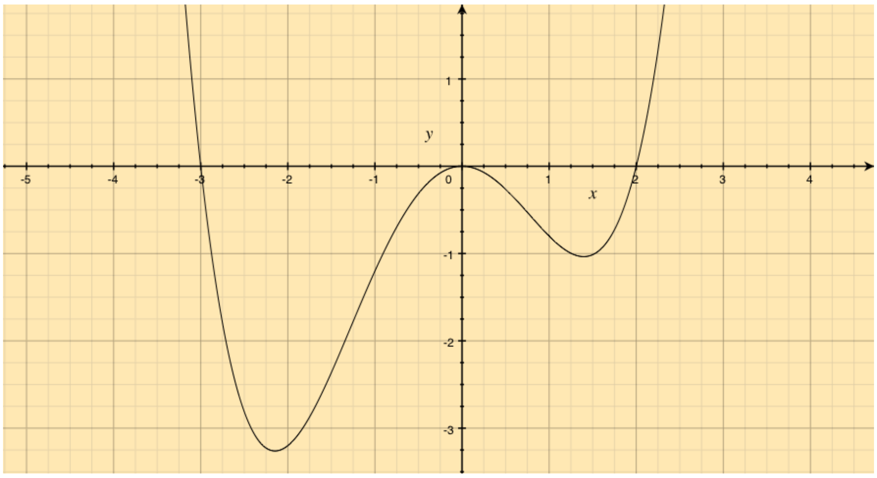
Ejercicio:

Se muestra la gráfica de la función y = f(x). Grafica las funciones:

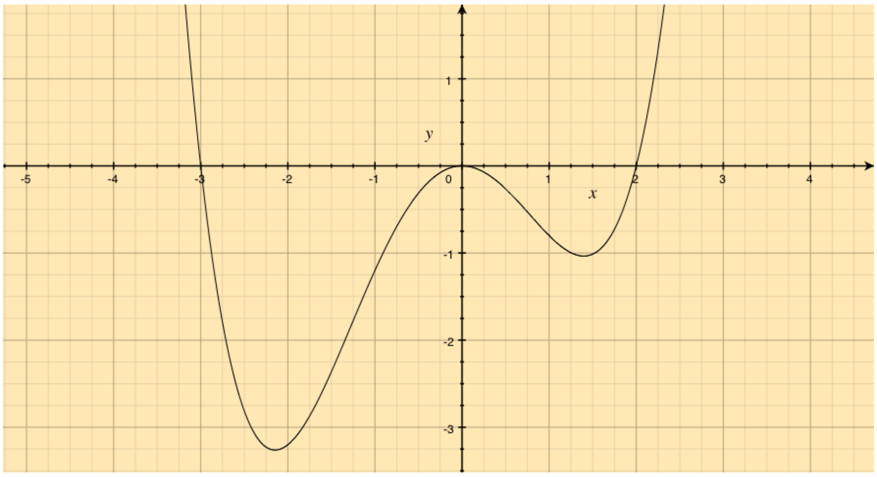
a) y= f(x+1) – 2



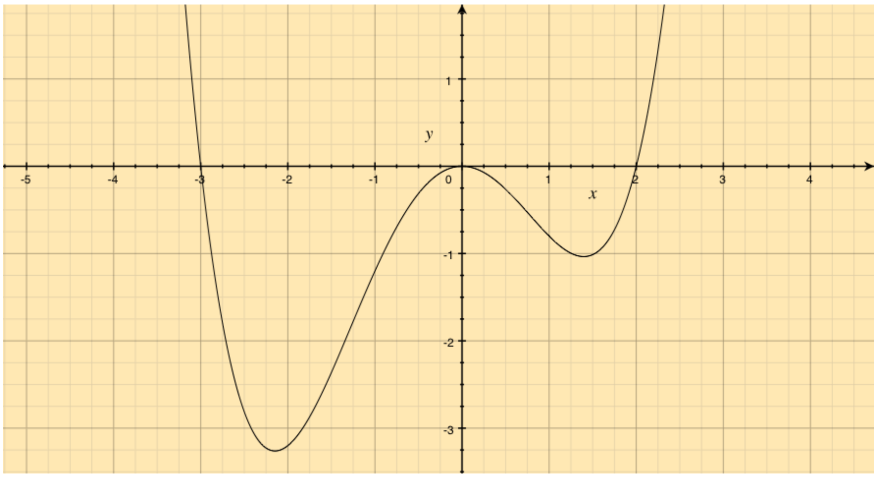
b) y= f(x-2) + 1



c) y= 1 - f(x)



d) y= f(-x) – 1



RESUMEN DE LAS TRANSFORMACIONES DE FUNCIONES

FUNCIÓN RACIONAL

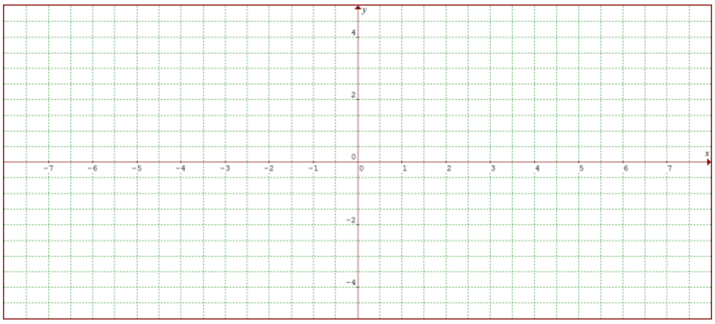
Graficar, hallando dominio y rango de la función:

$$y = \frac{1}{x}$$

Tabulando:

x							
y							

Graficando:



Dom:

Ran:

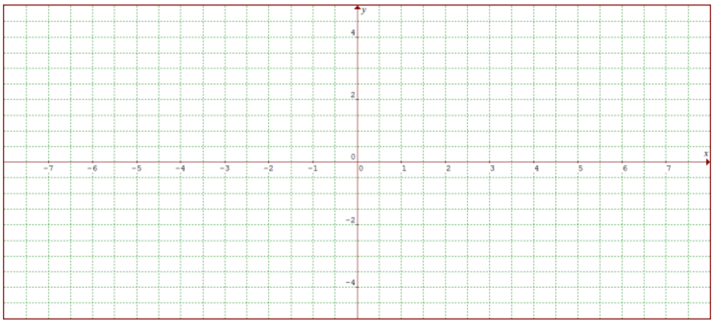
ASÍNTOTAS son ____

____

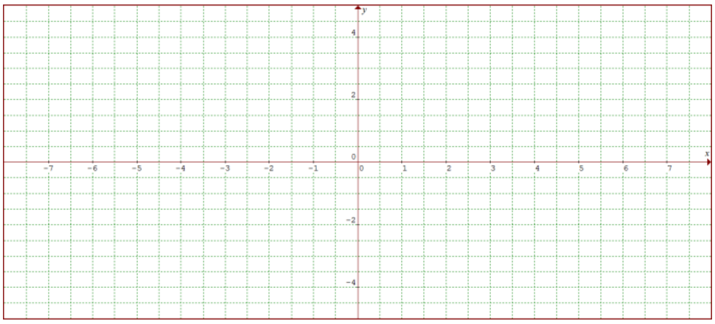
En este ejemplo las ecuaciones de ellas son:

Ejercicios:
Graficar, hallando dominio, rango y asíntotas:

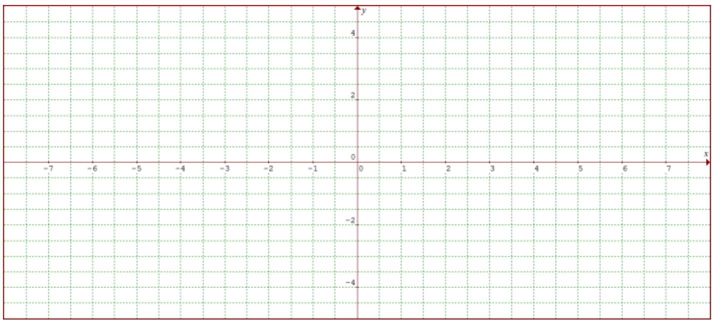
$$y = \frac{1}{x-1}$$



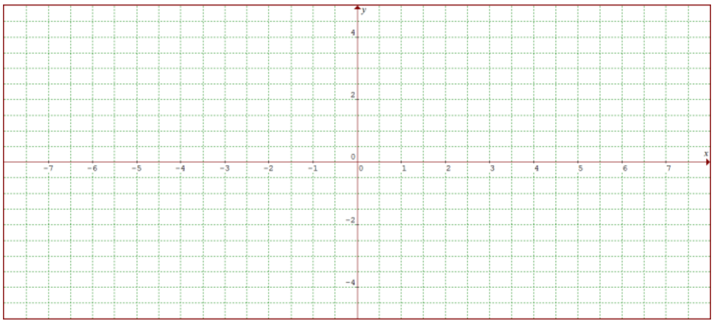
$$f : x \to \frac{2}{x+3}$$



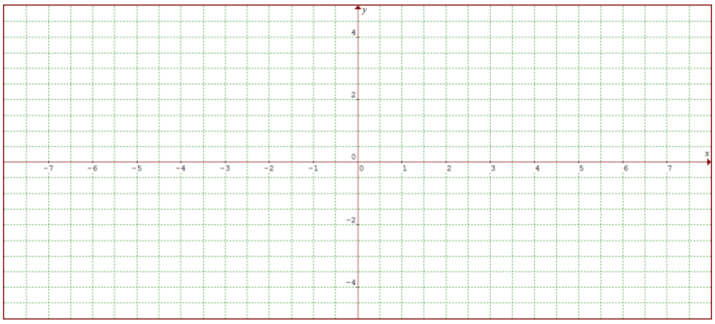
$$y = \frac{1}{x^2}$$



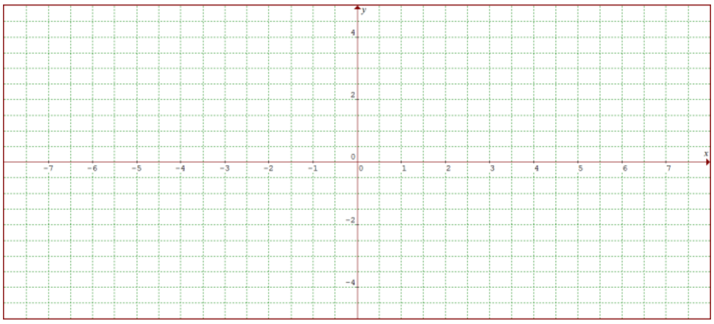
$$g : x \to \frac{2}{x^2 - 4}$$



$$y = \frac{2}{x^2 + 1}$$

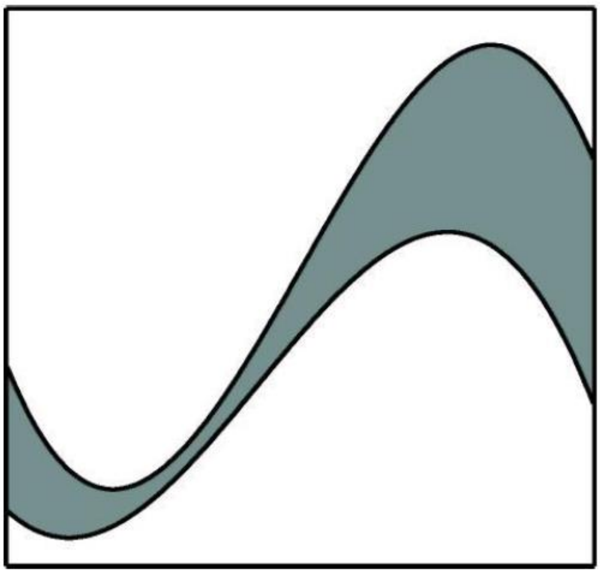


$$h : x \to \frac{x}{x - 1}$$



EL LOGOTIPO DE LOGAN

Logan ha diseñado el logotipo que aparece a continuación.



La figura muestra un cuadrado que ha sido dividido en tres regiones utilizando para ello dos curvas. El logotipo es la región sombreada que hay entre las dos curvas. Logan desea desarrollar funciones matemáticas que se ajusten a estas curvas.

Utilizando unos ejes de coordenadas apropiados, identifique y registre una serie de puntos sobre las curvas que permitan desarrollar funciones de ajuste para las mismas. Defina todas las variables utilizadas y especifique claramente cualquier parámetro empleado.

Utilizando algún medio tecnológico, sitúe estos dos conjuntos de datos (puntos) sobre una gráfica. ¿A qué tipo de funciones se ajusta el comportamiento (la forma) de los datos? Expliqué por qué ha elegido estas funciones.

Halle funciones que representen las curvas superior e inferior que forman el logotipo. Analice cualquier posible limitación.

Logan quiere imprimir camisetas con el logotipo en la espalda. Para ello, tiene que duplicar las dimensiones del logotipo. Describa cómo han de ser modificadas sus funciones.

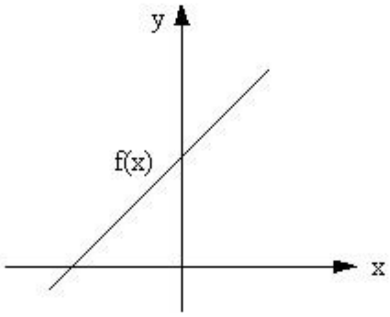
Logan también quiere imprimir tarjetas de visita. Una tarjeta de visita estándar mide 9 cm por 5 cm. ¿Cómo han de modificarse sus funciones para que el logotipo ocupe todo el ancho de la tarjeta? Use algún medio tecnológico para mostrar los resultados.

¿Qué fracción del área de la tarjeta ocupa el logotipo? ¿Por qué puede ser esto un aspecto importante en una tarjeta de visita?

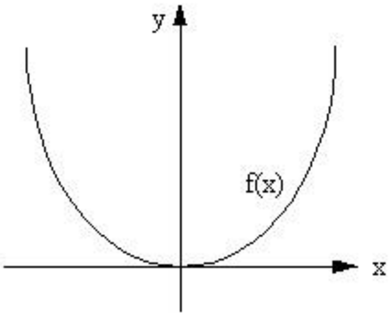
EJERCICIOS

1. Observa estos gráficos y di cuáles corresponden a funciones y cuáles no. Explica cada caso.

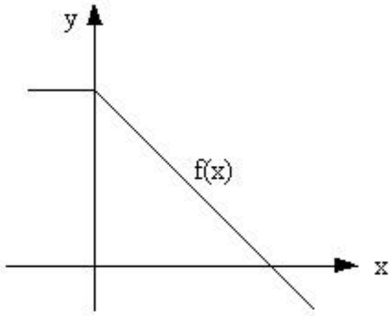
a)



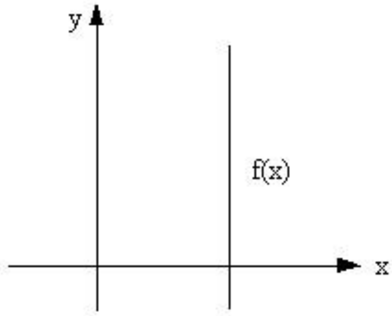
b)



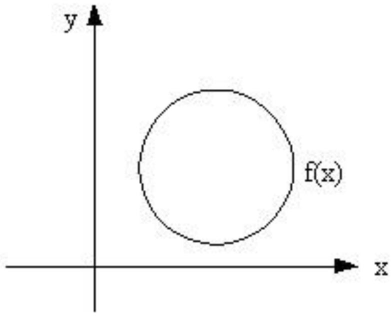
c)



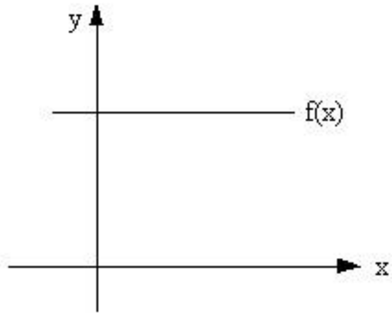
d)



e)



f)



2. En los problemas, calcular los valores indicados para la función dada.
   a) $f(x) = 3x^2+5x-2$; $f(0)$, $f(-2)$, $f(1)$
   b) $g(x) = x+1/$; $g(-1)$, $g(1)$, $g(2)$
   c) $h(t) = \sqrt{t^2+2t+4}$; $h(2)$, $h(0)$, $h(-4)$
   d) $f(x) = (2t-1)^{-3/2}$; $f(1)$, $f(5)$, $f(13)$
   e) $f(x) = x^2 - x-2$; $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$
   f) $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } t< -5 \\ t+1 & \text{si } -5\leq t \leq 5; \\ \sqrt{t} & \text{si } t>5 \end{cases}$ $f(-6)$, $f(-5)$, $f(16)$

3. Dadas las siguientes funciones:

$f(x) = 3x - 2$ $\quad g(x) = x^2 - 4$ $\quad h(x) = \sqrt{2x - 3}$ $\quad k(x) = \dfrac{10 - x}{3}$

(a) Halle:

(i) f(4) = (ii) g(6) =

(iii) h(26) = (iv) k(–2) =

(v) $f(-\frac{1}{6})$ = (vi) g(–3.5) =

(vii) k(0.1) = (viii) g(3) – f(3) =

(ix) h(1) = (x) k(–3.2)

(b) Halle el valor de x en cada caso:

(i) k(x) = 7 (ii) h(x) = 4
(iii) f(x) = x (iv) k(x) = f(x)
(v) $g(x) \times h(x) = 0$

(c) Halle:

(i) k(k(4)) = (ii) h(k(-8)) = (iii) f(f(f(1))) =

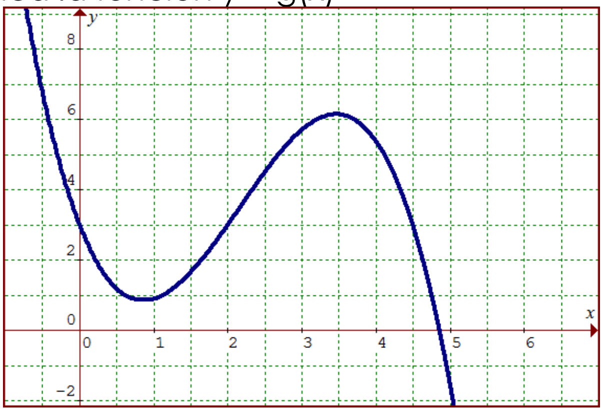
4. Se grafica la función y = f(x)

(a) Escriba el dominio y el rango de la función

(b) Halle f(3)=

(c) Resuelva f(x) = 4

5. Se grafica la función y = g(x)



(a) Resuleva g(x) = 3

(b) De la grafica resuelva g(x) = x

(c) Escriba los valores positivos k de manera que la ecuación g(x) = k tiene tres soluciones en el dominio.

6. (a) Halle el rango de $g(x) = 10 - 3x$ para el dominio $0 \le x \le 3$.

(b) Halle el rango de $h(x) = x^2 - 4x + 6$ para el dominio $0 \le x \le 3$.

7. Si f: $x \rightarrow x^2 + 3x - 2$
   a) Encontrar f(3), f(–5) y f(0,01)
   b) Encontrar a si f(a) = 5

8. Los puntos (1, –2) y (0, 5) se encuentran sobre la curva $y = x^2 + bx + c$. Hallar b y c.

9. Indica las expresiones algebraicas que son funciones y calcula su dominio.
   a) $y = +\sqrt{x}$ b) $y = \pm\sqrt{x}$ c) $y = x^2 + 2x$
   d) $y = -\sqrt{x}$ e) $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ f) $y = 1 - x^2$

10. Para las ecuaciones, determina el valor de x si P(x,3) pertenece a cada ecuación y define si es función:
   a) $x+3y = 6$ b) $y^2+y+1 = x$
   c) $x^2+x+1 = y$ d) $2x+xy+y = 0$

11. Determina el dominio y rango de las siguientes relaciones y di si es función o no.
   a) $y = \dfrac{3x+2}{3}$ b) $x = \dfrac{2}{y-2}$ c) $x^2 - 2x + 1 = y$
   d) $\sqrt{x^2 - 1} = y$ e) $2x + xy + 2 = 0$ f) $\sqrt{y^2 + 2y + 1} = x$

12. Si un objeto se lanza verticalmente hacia arriba desde el suelo con una velocidad inicial de 160 pies por segundo, su altura (en pies) t segundos después está dada por la función H(t) = -16²t +160t.
    (a) Elaborar la gráfica de la función H(t)
    (b) Usando la gráfica anterior determinar cuándo llegará al suelo el objeto.
    c) Usando la gráfica determine la altura máxima que alcanzará el objeto.

13. Especificar el dominio de la función dada.
    a) g(x) = $\frac{x^2+5}{x+2}$
    b) $y=\sqrt{x-5}$
    c) g(t) = $\sqrt{t^2+9}$
    d) f(t) = $(2t-4)^{3/2}$
    e) f(x) = $(x^2-9)^{-1/2}$
    f) g(t) = $\frac{1}{|t-1|}$
    g) f(x) = $(2-3x)^{-1/3}$

14. Suponga que t horas después de la medianoche, la temperatura en Miami era:

    C(t) = $\frac{1}{6}t^2+4t+10$ grados Celsius

    a) ¿Cuál fue la temperatura a las 2:00 p.m.?
    b) ¿Cuánto aumentó o disminuyó la temperatura entre las 6:00 y las 9:00 p.m.?

15. Una función es definida por f(x) = 2x + 1, x $\in \Re$. Encontrar el valor(es) de x para que f(2x) = f(x + 1).

16. Se estima que dentro de t años la población de cierta comunidad suburbana será?

    P(t) =20- $\frac{6}{t+1}$ *miles*

    a) ¿Cuál será la población de la comunidad dentro de 9 años?
    b) ¿Cuánto crecerá la población durante el noveno año?
    c) ¿Qué le sucederá al tamaño de la población a largo plazo? Interpretar el resultado.

17. Para estudiar la tasa a la que aprenden los animales, un estudiante de psicología realizó un experimento en el que de modo repartido se enviaba una rata blanca a través de un laberinto en la n-ésima prueba era aproximadamente.

$$f(n) = 3 + \frac{12}{n}$$

a) ¿Cuál es el dominio de la función f?
b) ¿Para qué valores de n tiene significado f(n) en el contexto del experimento de psicología?
c) ¿Cuánto tiempo se tomó la rata para atravesar el laberinto en la tercera prueba?
d) ¿En qué prueba atravesó la rata por primera vez el laberinto en 4 minutos o menos?
e) Según la función f, ¿qué le sucederá al tiempo requerido para que la rata atraviese el laberinto cuando aumenta el número de pruebas?. ¿Podrá la rata atravesar alguna vez el laberinto en menos de 3 minutos?

18. Por cada pedido de materia prima, un fabricante debe pagar unos gastos de envío para cubrir manejo y transporte. Después de recibir las materias primas, éstas deben guardarse hasta que se necesiten; así se generan los costos de almacenamiento. Si cada pedido de materia prima es grande, los costos de envío serán bajos, puesto que se requieren pocos pedidos, pero los costos de almacenamiento serán altos. Si cada pedido es pequeño, los costos de envío serán altos porque se requerirán muchos pedidos, pero los costos de almacenamiento bajarán. Un fabricante estima que cada pedido contiene x unidades, el costo total de adquirir y almacenar el suministro anual de materia primas será:

$$C(x) = x + \frac{160000}{x} \ dólares$$

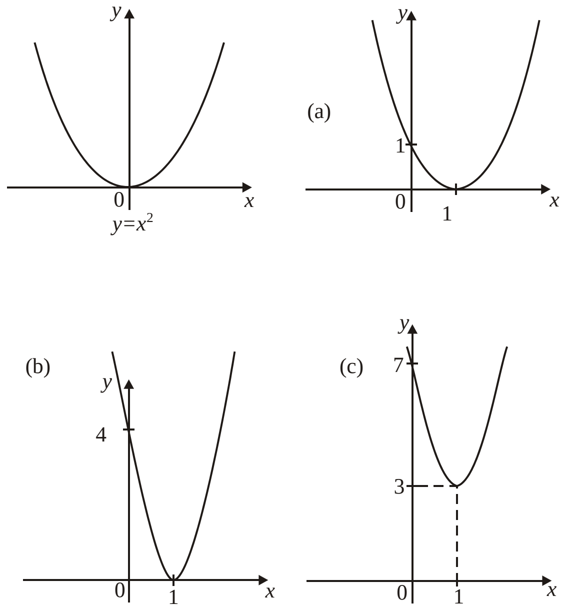
Trazar la gráfica de la parte pertinente de esta función de costo y estimar el tamaño del pedido que minimice el costo total.

PREGUNTAS TIPO IB

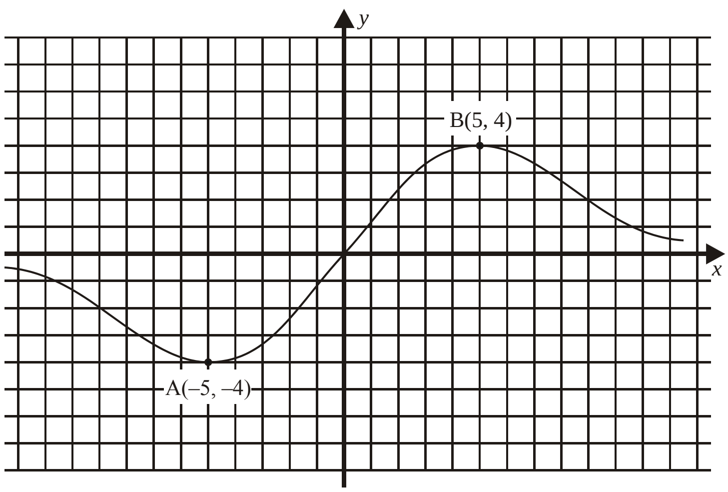
1. The function *f* is given by *f* (x) = $\sqrt{\ln(x-2)}$. Find the domain of the function.

2. The diagrams show how the graph of *y* = x^2 is transformed to the graph of *y* = *f* (x) in three steps.

   For each diagram give the equation of the curve.



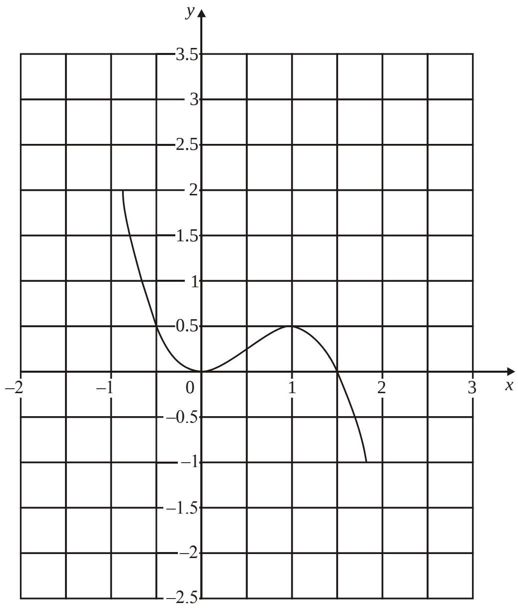
3. The diagram shows the graph of $y = f(x)$, with the x-axis as an asymptote.



(a) On the same axes, draw the graph of $y = f(x + 2) - 3$, indicating the coordinates of the images of the points A and B.

(b) Write down the equation of the asymptote to the graph of $y = f(x + 2) - 3$.

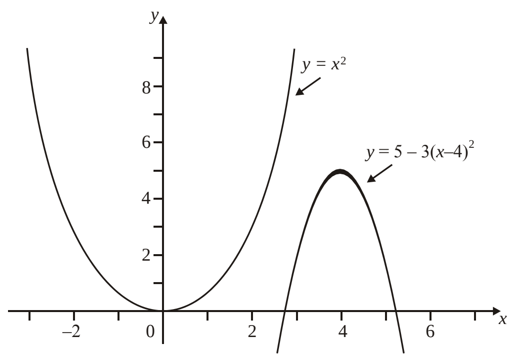
4. The following diagram shows the graph of $y = f(x)$. It has minimum and maximum points at (0, 0) and $\left(1, \frac{1}{2}\right)$.



(a) On the same diagram, draw the graph of $y = f(x-1) + \frac{3}{2}$.

(b) What are the coordinates of the minimum and maximum points of $y = f(x-1) + \frac{3}{2}$?

5. The diagram shows parts of the graphs of $y = x^2$ and $y = 5 - 3(x - 4)^2$.



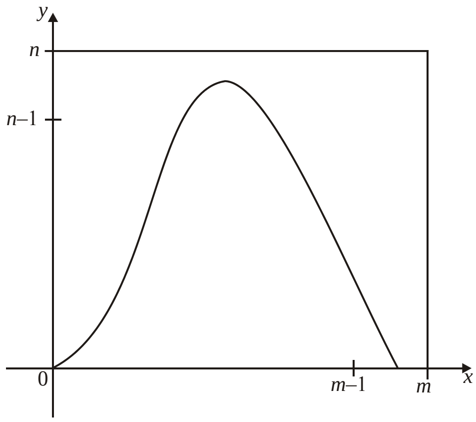
The graph of $y = x^2$ may be transformed into the graph of $y = 5 - 3(x - 4)^2$ by these transformations.

A reflection in the line $y = 0$ **followed by**
a vertical stretch with scale factor k **followed by**
a horizontal translation of p units **followed by**
a vertical translation of q units.

Write down the value of

(a) k; (b) p; (c) q.

6. The diagram below shows the graph of $y = x \sin\left(\frac{x}{3}\right)$, for $0 \le x < m$, and $0 \le y < n$, where x is in radians and m and n are integers.

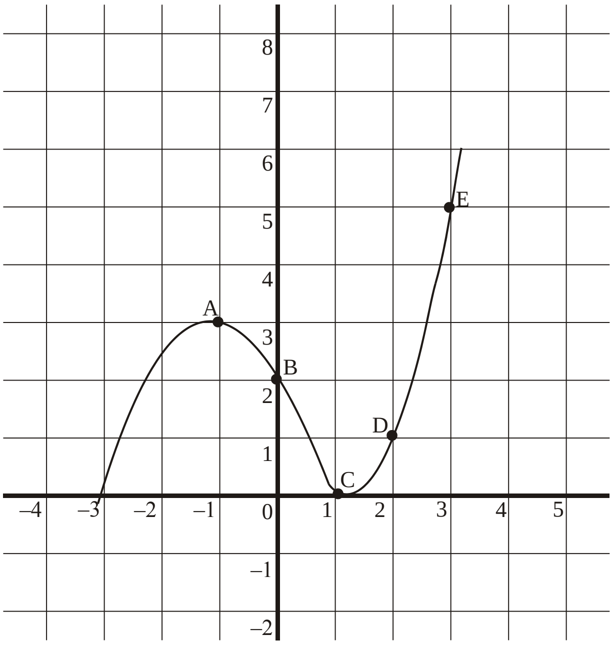


Find the value of

(a) m;

(b) n.

7. He sketch shows part of the graph of $y = f(x)$ which passes through the points A(–1, 3), B(0, 2), C(l, 0), D(2, 1) and E(3, 5).



A second function is defined by $g(x) = 2f(x - 1)$.

(a) Calculate $g(0)$, $g(1)$, $g(2)$ and $g(3)$.

(b) On the same axes, sketch the graph of the function $g(x)$.

8. Consider the following relations between two variables x and *y*.

A. *y* = sin x

B. *y* is directly proportional to x

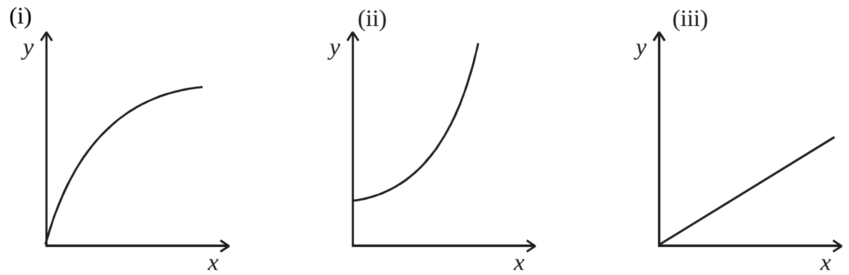
C. *y* = 1 + tan x

D. speed *y* as a function of time x, constant acceleration

E. *y* = 2^x

F. distance *y* as a function of time x, velocity decreasing

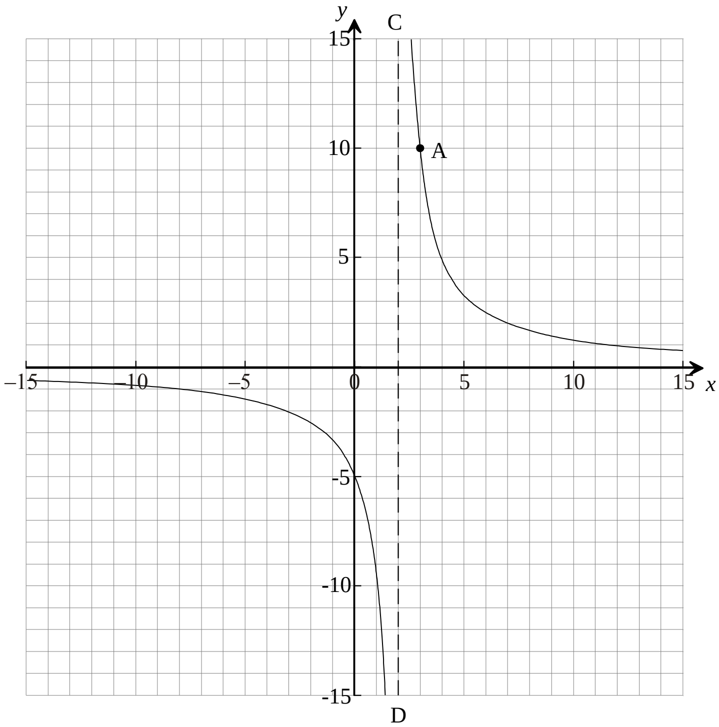
Each sketch below could represent **exactly** two of the above relations on a certain interval.



Complete the table below, by writing the letter for the two relations that each sketch could represent.

sketch	relation letters	
(i)		
(ii)		
(iii)		

9. (a) The diagram shows part of the graph of the function $f(x) = \frac{q}{x-p}$. The curve passes through the point A (3, 10). The line (CD) is an asymptote.

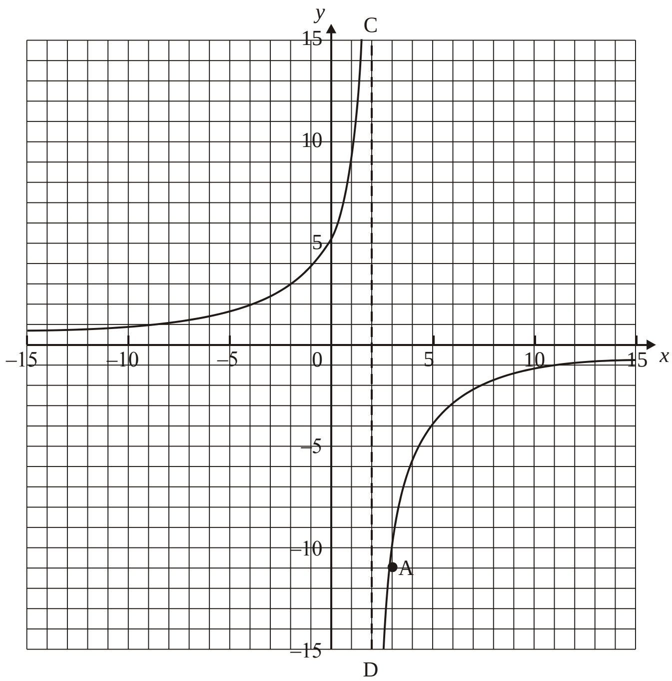


Find the value of

(i) p;

(ii) q.

(b) The graph of $f\ (x)$ is transformed as shown in the following diagram. The point A is transformed to A´ (3, –10).

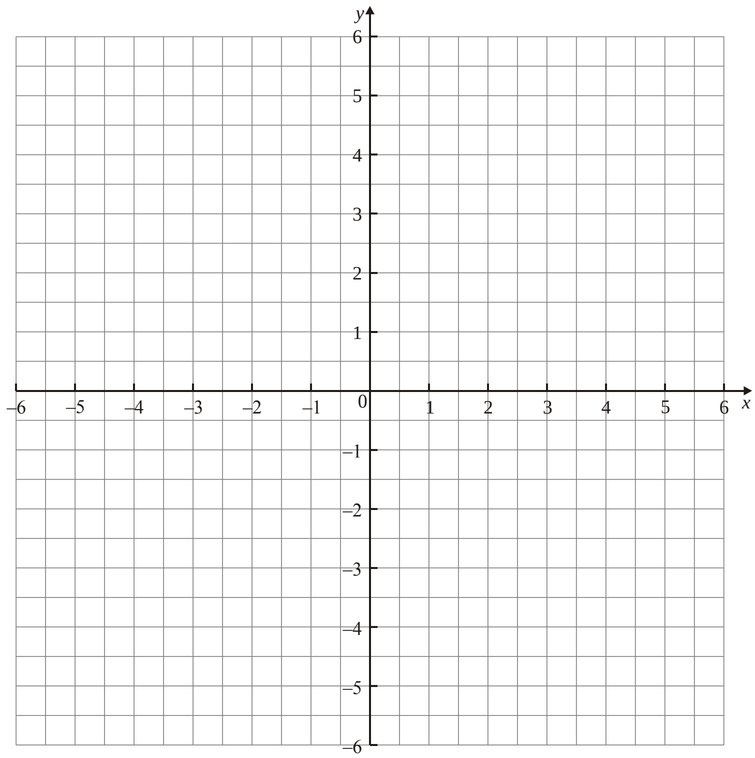


Give a full geometric description of the transformation.

10. Let $f(x) = 2x + 1$.

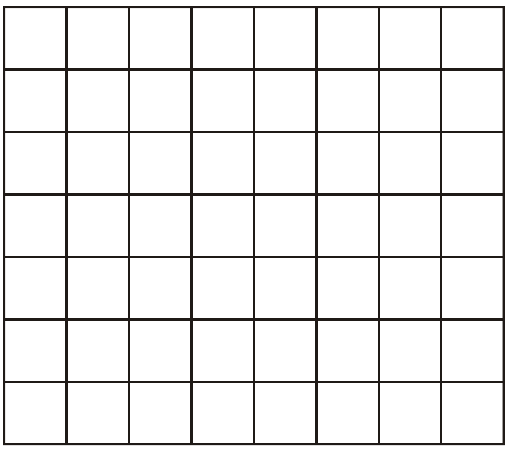
(a) On the grid below draw the graph of $f(x)$ for 0 □ x □ 2.

(b) Let $g(x) = f(x+3) - 2$. On the grid below draw the graph of $g(x)$ for $-3 \leq x \leq -1$.



11. The function f is defined by $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{9 - x^2}}$, for $-3 < x < 3$.

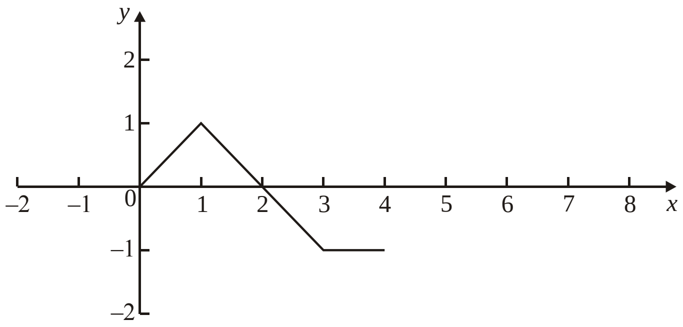
(a) On the grid below, sketch the graph of f.



(b) Write down the equation of each vertical asymptote.

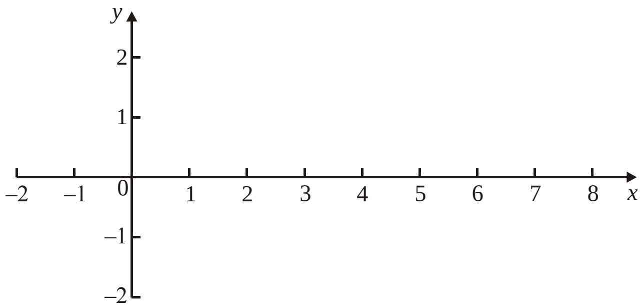
(c) Write down the range of the function f.

12. The graph of $y = f(x)$ is shown in the diagram.

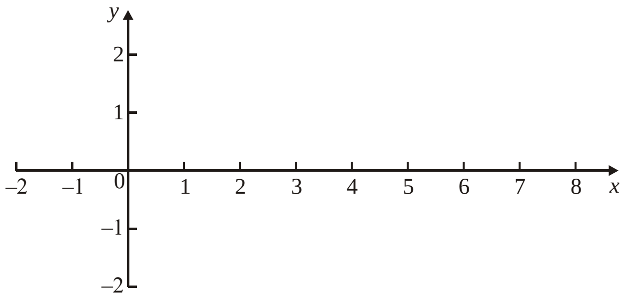


(a) On each of the following diagrams draw the required graph,

(i) $y = 2f(x)$;

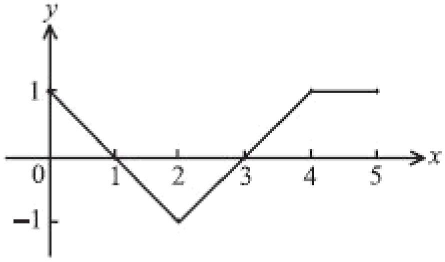


(ii) $y = f(x - 3)$.

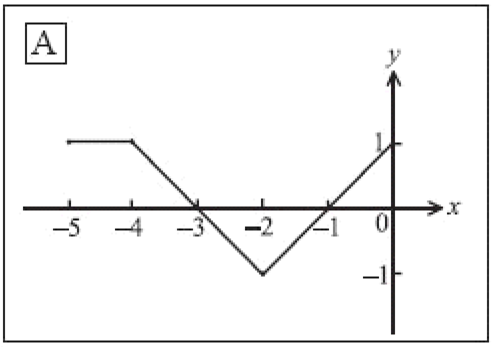


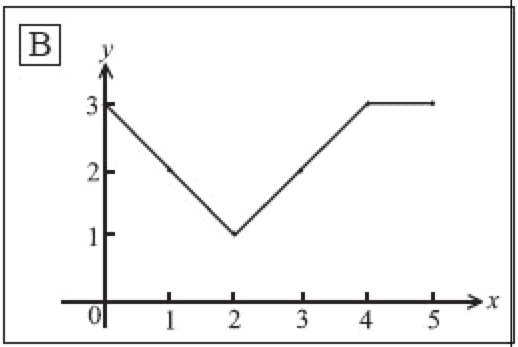
(b) The point A (3, –1) is on the graph of f. The point A´ is the corresponding point on the graph of $y = -f(x) + 1$. Find the coordinates of A´.

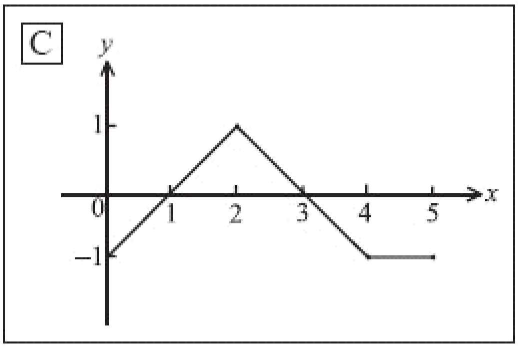
13. The following diagram shows part of the graph of $f(x)$.

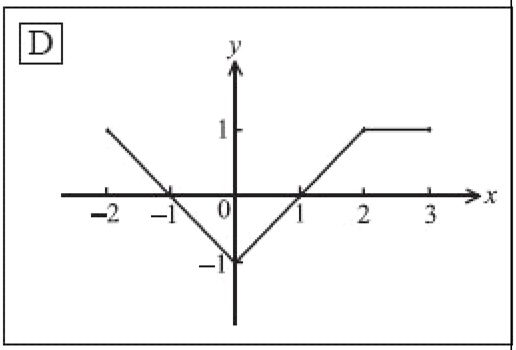


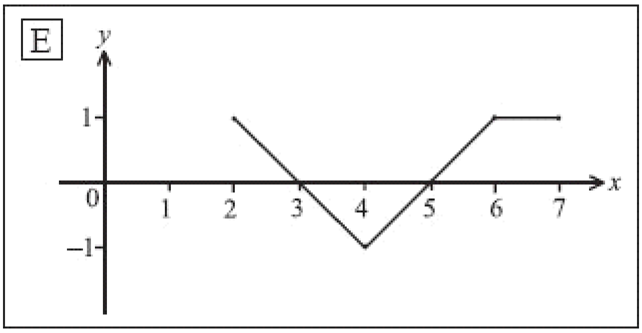
Consider the five graphs in the diagrams labelled A, B, C, D, E below.









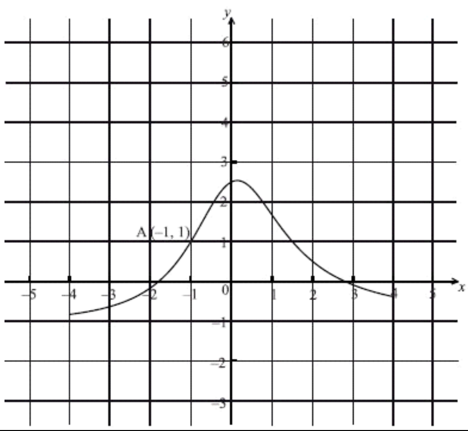


(a) Which diagram is the graph of *f* (x + 2)?

(b) Which diagram is the graph of – *f* (x)?

(c) Which diagram is the graph of *f* (–x)?

14. The graph of a function *f* is shown in the diagram below. The point A (–1, 1) is on the graph, and $y = -1$ is a horizontal asymptote.

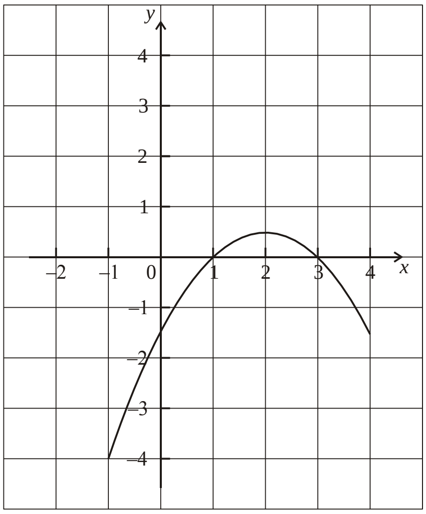


(a) Let $g(x) = f(x - 1) + 2$. On the diagram, sketch the graph of g.

(b) Write down the equation of the horizontal asymptote of g.

(c) Let A′ be the point on the graph of g corresponding to point A. Write down the coordinates of A′.

15. Part of the graph of a function f is shown in the diagram below.



(a) On the same diagram sketch the graph of $y = -f(x)$.

(b) Let $g(x) = f(x + 3)$.

(i) Find $g(-3)$.

(ii) Describe **fully** the transformation that maps the graph of f to the graph of g.

ITERACIONES

¿Qué es un fractal? ¿Cuál es su estructura?

Investiga los métodos iterativos de resolución de ecuaciones

Iteración es un vocablo que tiene su origen en el término latino *iteratio*. Se trata de una palabra que describe el acto y consecuencia de iterar, un verbo que se emplea como sinónimo de reiterar o repetir (entendidos como volver a desarrollar una acción o pronunciar de nuevo lo que ya se había dicho).

El concepto suele utilizarse para dar nombre al acto de reiterar varias veces determinados pasos. En el ámbito de la matemática, una función iterada es aquélla que se compone de sí misma. Una función compuesta, por otra parte, se logra a partir de la aplicación sucesiva de otras funciones. Esto quiere decir que la iteración de una función constituye la creación de una función compuesta a partir de la repetición de la propia función.

Las funciones iteradas son estudiadas en el ámbito de los sistemas dinámicos (aquellos sistemas complejos que presentan alteraciones de su estado según los límites, los elementos y las relaciones) y de los fractales (los objetos semigeométricos cuya estructura se repite a diferentes escalas).

La matemática también habla de métodos iterativos que resultan útiles para resolver problemas por medio de aproximaciones sucesivas a la solución, partiendo desde una estimación inicial. Este tipo de estrategias pueden ser más útiles que los métodos directos para resolver problemas con miles o millones de variables.

Para la programación, por su parte, la iteración consiste en reiterar un conjunto de instrucciones o acciones con uno o varios objetivos. Para citar un ejemplo, muchas páginas web están preparadas para adaptarse a cambios en su estructura, tales como alteraciones estéticas o del número de secciones accesibles, cuyos enlaces se muestran en forma de pestañas; en este último caso, si se utiliza una iteración para colocar una por una y se pide una verificación, los desarrolladores pueden activar y desactivar cada elemento de acuerdo a sus necesidades, sin provocar un error en el momento de carga.

Ahondando más en el caso anterior, es posible valerse de un bucle (estructura diseñada para establecer una iteración) e indicarle el número de la primera pestaña, así como el de la última, para que las recorra una a una. Dentro de él, se debería condicionar la muestra de los elementos, preguntando si se encuentran disponibles; en caso afirmativo, se pasaría a calcular su posición, la cual (en este modelo de página) será siempre relativa. Contrariamente, si dicha sección hubiera sido desactivada, se procedería a comprobar la siguiente, siempre que no se hubiera alcanzado

¿Cómo se aplica las iteraciones en los comandos de programación?

el límite máximo.

El ejemplo expuesto anteriormente describe el uso de una iteración para disponer pestañas en una página de forma dinámica, siempre que éstas se encuentren activas o disponibles; en cada vuelta, se realiza un control, que de dar positivo abre las puertas a una serie de acciones sencillas. Pero las posibilidades son infinitas, dado que la programación ofrece herramientas que cada desarrollador utiliza aplicando su propio ingenio, imaginación y conocimientos, pudiendo modificarlas, combinarlas e incluso crear nuevas.

Cabe mencionar que en informática se asocia una iteración con los términos bucle y estructura de control, que hacen referencia a las palabras reservadas while y for, entre otras. Básicamente, se suele establecer una condición que se debe cumplir para que las líneas de código dentro de dichos bucles se ejecuten. Sin embargo, en muchos casos es necesario realizar al menos una vez dichas acciones antes de la comprobación, para lo cual se usa un modelo diferente, contemplado en algunos lenguajes con estructuras como do while. En pocas palabras, y completando el ejemplo de las secciones, si los desarrolladores están seguros de que al menos una pestaña deberá mostrarse siempre, tiene la posibilidad de calcular su posición y *luego* pasar a comprobar (por medio de la iteración) si hay otras disponibles.

http://definicion.de/iteracion/#ixzz2rKPdzQ2X, recuperado el 24/01/14

OPERACIONES CON FUNCIONES

Las funciones son ____

____

Las operaciones que se pueden plantear, se deben desarrollar ____

Cuando hablamos de funciones, nos referimos ______________

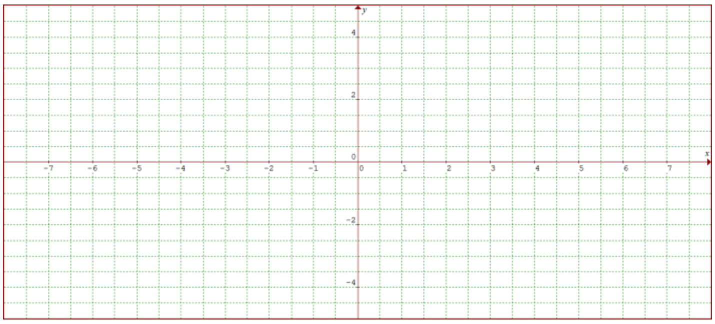
____

Para la función y=f(x):
x: variable independiente
y: variable dependiente

Las operaciones aritméticas siempre se desarrollan para un valor de x se opera y.

Ejercicio:

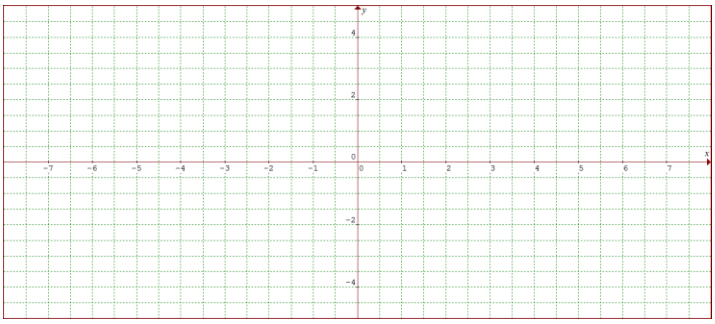
a) Sean las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = 2x$.
Graficarlas en el mismo plano y efectúa $f(x) + g(x)$



Podemos observar que ______________________________

____

b) Sean las funciones $f(x)=\sqrt{x}$ $g(x)=x$
Graficarlas en un mismo plano y efectúa $f(x) – g(x)$.



Podemos observar que ______________________________

____

¿Qué pasó con el dominio? __________________________

____

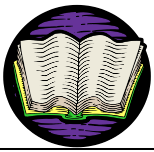
c) Sean las funciones: f={(0,1)(1,2)(2,3)(3,4)(4,5)(5,6)} y g={(0,3)(1,5)(2,7)(3,10)(6,20)}. Determinar:

a. f + g =

b. g – f =

c. g x f =

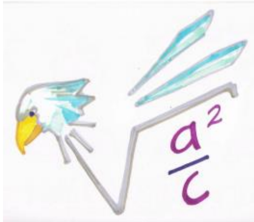
d. f / g =



Como las operaciones se desarrollan las y para las mismas x, entonces deben tener dominio comunes.

PARA CADA UNA DE LAS OPERACIONES:

SUMA:
Sean las funciones f(x), con D(f) y R(f), y g(x), con D(g) y R(g).

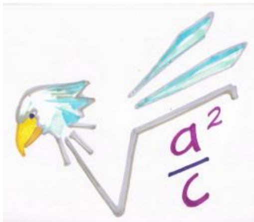


Operación:

Dominio:

Ejemplo
Sean las funciones f(x) = x y g(x) = ln(x); determina f(x) + g(x) y su dominio.

RESTA
Sean las funciones f(x), con D(f) y R(f), y g(x), con D(g) y R(g).

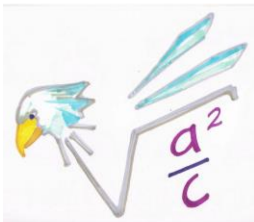


Operación:

Dominio:

Ejemplo
Sean las funciones f(x) = sen(x) y g(x) = ln(x); determina f(x) – g(x) y su dominio.

MULTIPLICACIÓN:
Sean las funciones f(x), con D(f) y R(f), y g(x), con D(g) y R(g).

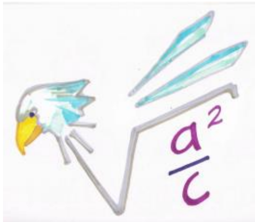


Operación:

Dominio:

Ejemplo
Sean las funciones f(x) = 1/x y g(x) = x^3 + 3x; determina f(x) . g(x) y su dominio.

DIVISIÓN:
Sean las funciones f(x), con D(f) y R(f), y g(x), con D(g) y R(g).



Operación:

Dominio:

Ejemplo
Sean las funciones $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = x - 1$; determina $f(x) / g(x)$ y su dominio.

Ejercicios:

a) Si: f = {(0,1), (1,2), (2,3), (4,3), (5,2), (6,1)} y g = {(6,7), (5,4), (2,4). (1,4), (0,7)}. Hallar $f + g$, $f - g$, $f \times g$ y f / g hallando el dominio en cada caso.

b) Si $f(x) = x^2 + 3x - 1$ y $g(x) = x+1$. Hallar: $f + g$, $f - g^2$, $f \times g$ y el dominio en cada caso.

c) Si $f(x) = (x-1)^{1/2}$ y $g(x) = (x+1)^{1/2}$. Hallar: $f - g$, $f \cdot g$, f / g^2 y el dominio en cada caso.

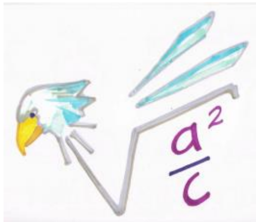
COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

CASO: Si el aceite de un barco petrolero se derrama, el área de la capa de aceite crecerá conforme transcurre el tiempo. Supongamos que la capa de aceite mantiene la forma de un círculo, por lo que su área será $A(r) = f(r) = \pi r^2$.
El radio va aumentando conforme transcurre el tiempo según $r = g(t) = 1+t$.

¿Cómo determinaríamos el área de la capa de aceite en función del tiempo?

En este caso decimos que A es una FUNCIÓN COMPUESTA o función de función.

Se expresa así: $\boxed{A = f(g(t)) = fog(t)}$



La composición de funciones es la base para los procesos iterativos

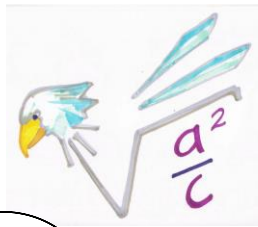
Ejercicios:
Exprese cada una de las siguientes funciones como la composición de dos funciones:

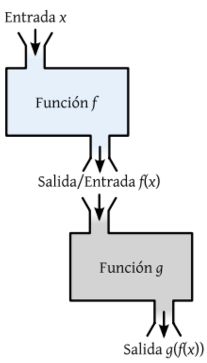
a) $h(t) = (2t - 4)^3$.

b) $k(t) = 2t^3 + 1$.

c) $l(x) = 3(x - 5)^2 + 4$

d) $m(s) = \sqrt{3s - 4}$





Sean las funciones h(x) y g(x)

Condición de existencia de la composición de funciones

____

Para determinar el dominio y el rango de la composición

____

Ejercicios:

a) Determinar fog y gof, así como sus respectivos dominios y rangos.
   a. f={(0,2)(1,5)(2,4)(6,6)(5,9)},g={(2,3)(5,3)(9,4)(7,6)(8,2)}

   b. f={(1,5)(7,2)(2,1)(5,5)(9,3)},g={(5,1)(1,8)(9,2)(8,8)(6,5)}

b) En cada caso determinar fog(x) y gof(x), así como sus respectivos dominios y rangos.
   a. $f(x)=x+1$, $g(x)=x^3$.

	b. $f(x)=1/x$, $g(x)=1/x$. c. $f(x)=x^2-1$, $g(x)=1/x$. d. $f(x)=(4-x)^{1/2}$ $g(x)=x^2$.

c) Un estudio ambiental en cierta comunidad suburbana revela que el nivel medio diario de monóxido de carbono en el aire será $c(p)=0,5p+1$ partes por millón, cuando la población sea de p miles de habitantes. Se estima que dentro de t años la población de la comunidad será $p(t)=10+0,1t^2$ miles.
Expresar el nivel de monóxido de carbono como función del tiempo.
¿Cuándo llegará a 6,8 partes por millón el CO?

d) En cierta industria, el costo total de fabricación de q unidades durante el proceso diario de producción es $c(q)=q^2+q+900$ dólares. En un dia normal de trabajo, se fabrican $q(t)=25t$ unidades durante las primeras t horas de un turno de producción.
Expresar el costo total de fabricación en función de t.
¿Cuánto se habrá gastado en producción al final de la tercera hora?
¿Cuándo alcanzará \$11000 el costo total de fabricación?

	e) Sean las funciones $f(x)=x+1$, $g(x)=3x+2$ y $h(x)=x+3$. Determinar: a. $((f o g) o h)(x)$ b. $(f o (h o g))(x)$ c. $((h o f) o g)(3)$ d. $(g o (f o h))(2)$ f) Si $f(x) = 2x - 3$ y $g(x) = x^2 + 1$. Hallar los valores de m si: $(f \circ g)(m) = (g \circ f)(m)$.

EJERCICIOS

1. Sean las funciones $f_1 = \{(0,1), (1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6)\}$ y $f_2 = \{(1,5), (2,4), (4,-1), (5,8), (7,6)\}$. Efectuar las siguientes operaciones, graficando e indicando dominio y rango en cada caso:
   a. $f_1 + f_2$ b. $2f_1 - 3f_2$ c. $3\,(f_1 \,.\, f_2)$ d. $4f_1 : f_2$

2. Sean las funciones: $f(x) = 3x - 5$, $g(x) = x^2 + 5$, $h(x) = \sqrt{2x+3}$ y $i(x) = \sqrt{2x-3}$. Efectuar las siguientes operaciones graficando e indicando dominio y rango en cada caso:
   a. $2f(x) – g(x)$ b. $g(x) + 2f(x)$ c. $h(x).i(x)$ d. $2i(x)/f(x)$

3. Hallar la función compuesta $g[h(x)]$

   a) $g(u) = u^2 + 4$, $h(x) = x-1$

   b) $g(u) = (u-1)^3 + 2u^2$, $h(x) = x+1$

   c) $g(u) = \dfrac{1}{u^2}$, $h(x) = x-1$

   d) $g(u) = \sqrt{u+1}$, $h(x) = x^2-1$

4. En los ejercicios siguientes, hallar la función compuesta indicada.

   a) $f(x-2)$ donde $f(x) = 2x^2-3x+1$

   b) $f(x-1)$ donde $f(x) = (x+1)^5 - 3x^2$

   c) $f(x^2+3x-1)$ donde $f(x) = \sqrt{x}$

   d) $f(x+1)$ donde $f(x) = \dfrac{x-1}{x}$

5. Hallar las funciones $h(x)$ y $g(x)$ tal que $f(x) = g[h(x)]$

   a) $f(x) = (x^2-3x^2+12)^3$

   b) $f(x) = (x-1)^2+2(x-1)+3$

   c) $f(x) = \sqrt{x+3} - \dfrac{1}{(x+4)^3}$

6. Dadas las funciones:

$$f : x \rightarrow 3x - 2$$
$$g : x \rightarrow \frac{x}{x-2}$$
$$h : x \rightarrow x(6-x)$$

Halle los valores de:

(a) $f \circ g(3)$ (b) $g \circ h(5)$

(c) $f \circ h(2)$ (d) $f \circ f(5)$

(e) $g \circ g(-4)$ (f) $h \circ g \circ f(2)$

(g) $h \circ g(1)$ (h) $g \circ h(1)$

7. (a) Dadas las funciones: $f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = 5x$, halle $f \circ g(x)$.

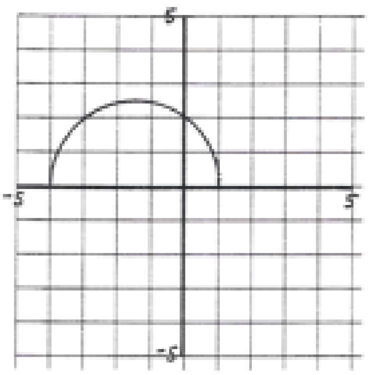
(b) Dadas las funciones: $f(x) = 1 - 3x$ y $g(x) = 2x + 7$, halle $g \circ f(x)$.

(c) Dadas las funciones: $f(x) = \frac{x}{2} + 1$ y $g(x) = 6 - 2x$, halle $f \circ g(x)$.

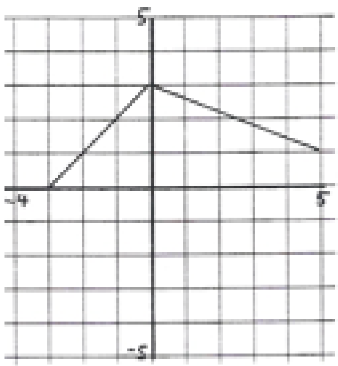
8. Un estudio ambiental de cierta comunidad revela que el nivel diario de monóxido de carbono en el aire será c(p) = 0,4 p+1 partes por millón cuando la población de la comunidad será p(t) = 8 + 0,2 t^2 miles.
   a. Expresar el nivel de monóxido de carbono en el aire como una función del tiempo.
   b. ¿Cuál será el nivel de monóxido de carbono dentro de 2 años?
   c. ¿Cuándo llegará a 6,2 partes por millón el nivel de monóxido de carbono?

9. En cada diagrama se da la gráfica de la función y = f(x). Grafica las transformaciones indicadas entre corchetes.

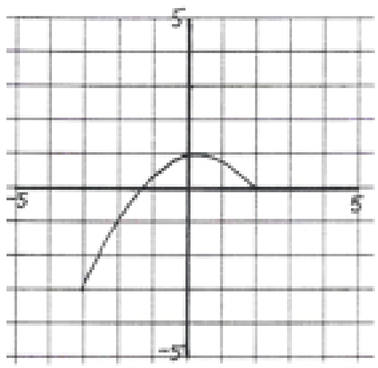
(a) $[y = f(x-2)]$



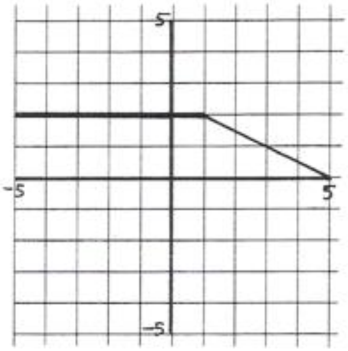
(b) $[y = f(x+1)]$



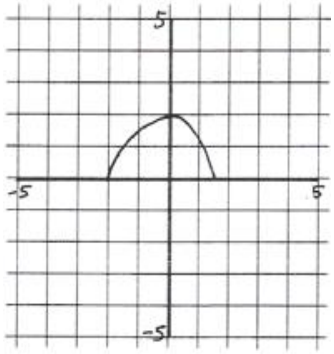
(c) $[y = f(x)+3]$



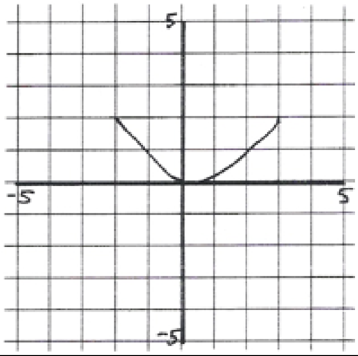
(d) $[y = 2f(x)]$



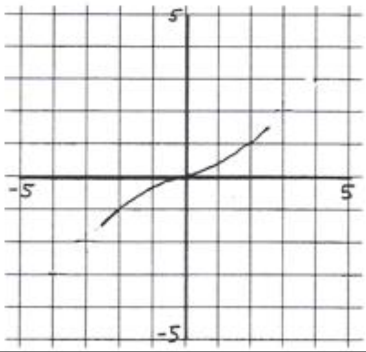
(e) $[y = f(2x)]$



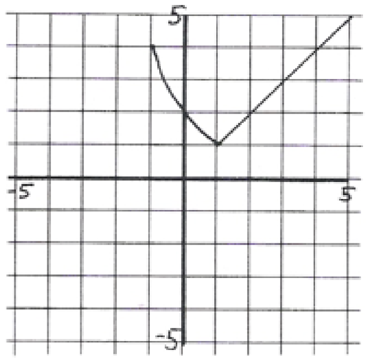
(f) $[y = f(x-1) - 3]$



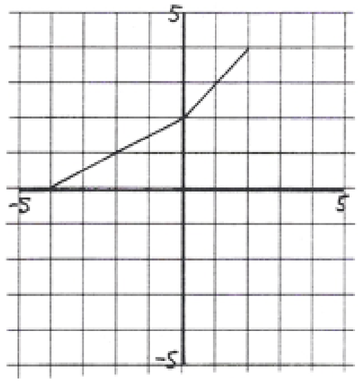
(g) $[y = f\left(\frac{x}{2}\right)]$



(h) $[y = \frac{f(x)}{2}]$

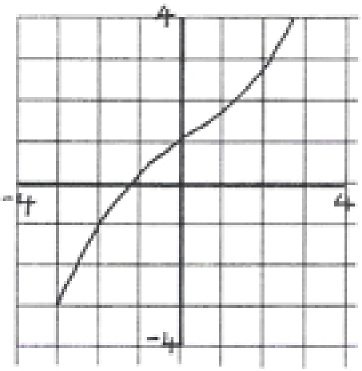


(i) $[y = f(2x) - 3]$

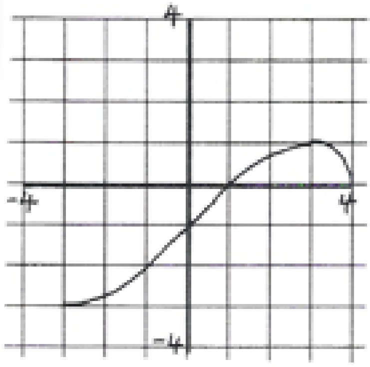


10. En cada diagrama se da la gráfica de la función y= f(x). Grafique la transformación que se indique entre corchetes:

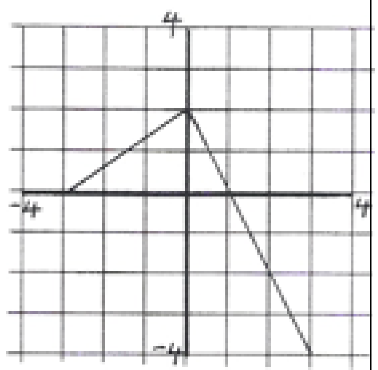
(a) $[y = -f(x)]$



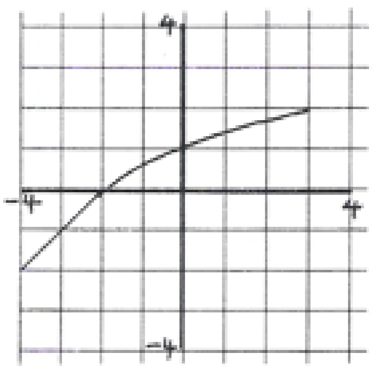
(b) $[y = f(-x)]$



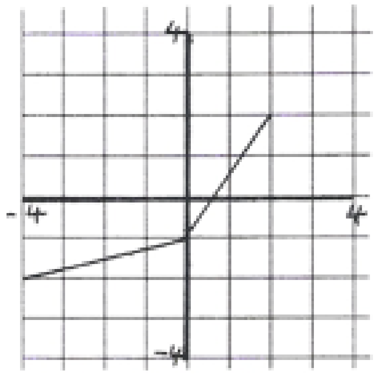
(c) $[y = -f(-x)]$



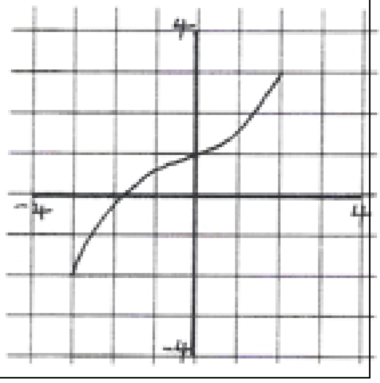
(d) $[y = -f(x) + 2]$



(e) $[y = -2f(x)]$



(f) $[y = f(-x) - 2]$



11. Escriba la transformación de $y = f(x)$ que se representan en las gráficas:

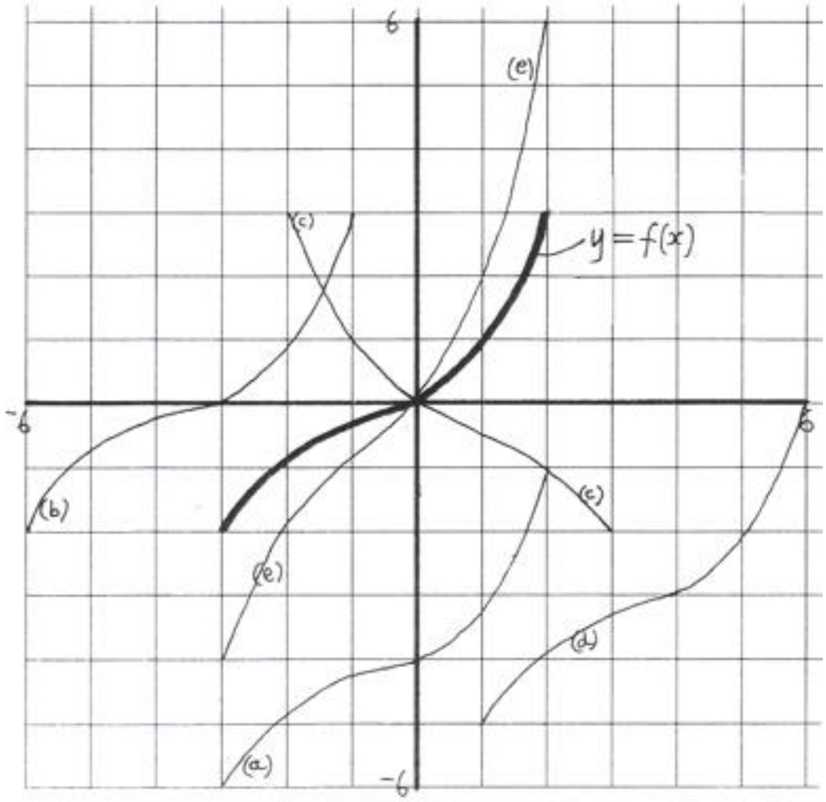
(a)

(b)

(c)

(d)

(e)



12. Dados $g(x) = 3x - 2$, $h(x) = \frac{5x}{x-4}$, $x \neq 4$.

(a) halla una expresión para $(h \circ g)(x)$. Simplifica su respuesta.

(b) Resuelve la ecuación $(h \circ g)(x) = 0$.

ARTES, ARQUITECTURA Y MATEMÁTICA

Las artes, la arquitectura y la matemática tienen intereses comunes, en cuanto a la forma y su estructura, en las representaciones, la geometría y la manera como los objetos encajan y se relacionan mutuamente, se proporcionan, se equilibran. Estas vinculaciones han conducido a que en las dos últimas décadas se haya convocado una variedad de seminarios y congresos internacionales, en diversos países, relacionando las artes, la arquitectura y la matemática.

A partir de 1992, en Québec, Canadá, se iniciaron los Congresos Internacionales sobre Educación Matemática (ICME por sus siglas en inglés), en los que se ha conformado, de manera permanente, un grupo temático sobre Arte y Matemática, lo cual puede considerarse un indicador de la importancia del tema relacionado con la enseñanza-aprendizaje de la matemática. Posteriormente se han continuado en Sevilla (1996), Tokio/Makuhari (2000) y Oslo (2004).

Igualmente, en 1992 se realizó en la Universidad de Albany-SUNY un congreso sobre esas áreas y sus relaciones, promovido por el matemático y escultor Nathaniel A. Friedman, en el que participaron matemáticos, docentes, artistas, arquitectos, ingenieros y científicos. Dicho congreso derivó en las hoy conocidas conferencias ISAMA (International Society of the Arts, Mathematics, and Architecture. http://www.isama.org/), la primera de las cuales se celebró en 1999 en la ciudad de San Sebastián-España. Posteriormente, a partir de 1998, el también profesor de matemática, Reza Sarhangi, creó la serie de conferencias BRIDGES: Mathematical Connections Between Art, Music and Science, habiendo realizado conjuntamente con ISAMA un encuentro en Granada-España (2003).

Trasladándonos a Europa es necesario nombrar a Michele Emmer de la Universidad de Roma "La Sapienza", quien ha promovido muchos encuentros sobre esta temática, además de que es considerado un pionero en la producción de videos y películas a tal respecto (26 a partir de 1979). De igual importancia son los Coloquios sobre Matemática y Artes iniciados en Francia en 1991 (Cerisy-la-Salle) y cuya última edición corresponde al año 2000. Estos ejemplos constituyen una pequeña muestra de la importancia que se le ha concedido a la relación entre las disciplinas consideradas, a lo cual se añade la creación de una serie de revistas especializadas entre las que destacan: *Nexus Network Journal: Architecture*

and Mathematics; Visual Mathematics; Geometry in Art and Architecture.
En América Latina es importante destacar que en el año 1995 nace la Internacional Mathematics & Design Association, siendo su presidenta actual la argentina Vera W. de Spinadel, profesora de la Universidad de Buenos Aires, Argentina, sitio donde también se edita el "Journal of Mathematics & Design" desde el año 2001. En el año de su creación se realiza una primera conferencia en dicha ciudad, habiéndose celebrado la cuarta en el mes de junio de 2004 en la ciudad de Mar del Plata, Argentina.
En el cuadro sinóptico que presentamos a continuación, se intenta, a través de la agrupación de algunos temas matemáticos que intervienen en las artes y la arquitectura, sintetizar parte de las relaciones entre estas disciplinas.

Componentes matemáticas en las artes y la arquitectura

Simetría en un plano
·Polígonos y mosaicos
· Teselaciones
· Mosaicos de Escher
· Grupos de Leonardo
· Frisos o bandas

Simetría en el espacio
· Poliedros
· Teselaciones
· Mas allá de la tercera dimensión (el hipercubo)

Fractales
· En dos dimensiones (2D)
· En tres dimensiones (3D)

Perspectiva
· El Renacimiento y la perspectiva

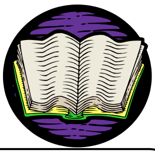
Proporción
· Número de oro
· Sucesión de Fibonacci
· Otras proporciones

Curvas y superficies
· Circunferencias y semicircunferencias, arcos, cónicas, espirales, catenaria, hélices
· Esferas y hemisferios
· Cuádricas

Aritmética, armónicos (Fourier) y música

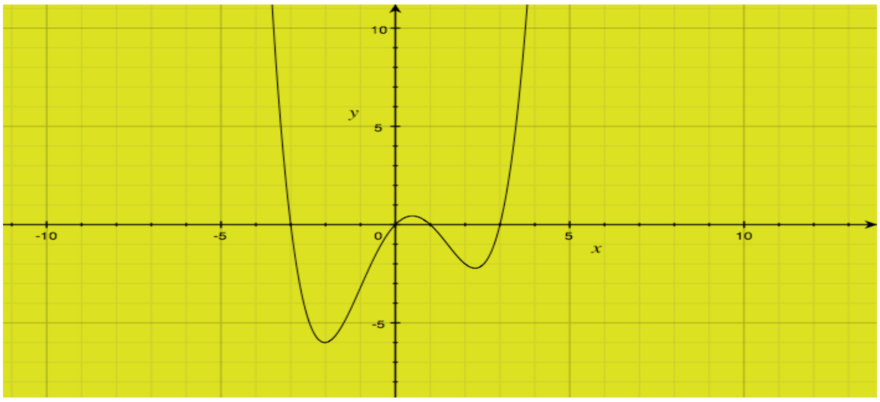
"Matemática Maravillosa", Fundación Polar, Fascículo 27, 2006

INTERSECCIÓN DE FUNCIONES



Un intercepto es la intersección de la gráfica de una función con un eje coordenado

En el gráfico siguiente se muestra la función y = f(x)



Identifica y determina las coordenadas de las intersecciones de f(x) con el eje x.

A estos interceptos se les llama ______________________

¿Qué observamos en común de todos estos puntos?

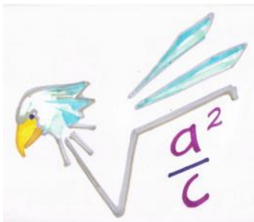
____

¿Qué significa la segunda componente?

____

Las primeras componentes son los valores de la variable ___

¿Qué obtenemos al desarrollar f(x) = 0?



¿Cómo podemos aplicar este concepto

Ejercicio:
Resolver: $x^4+3x^3-19x^2-27x+90=0$
Hacemos:

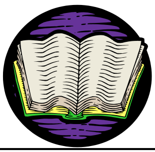
En la calculadora:

Ejercicios:
Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4 = 0$

b) $2^{x-1} - 3 = 0$

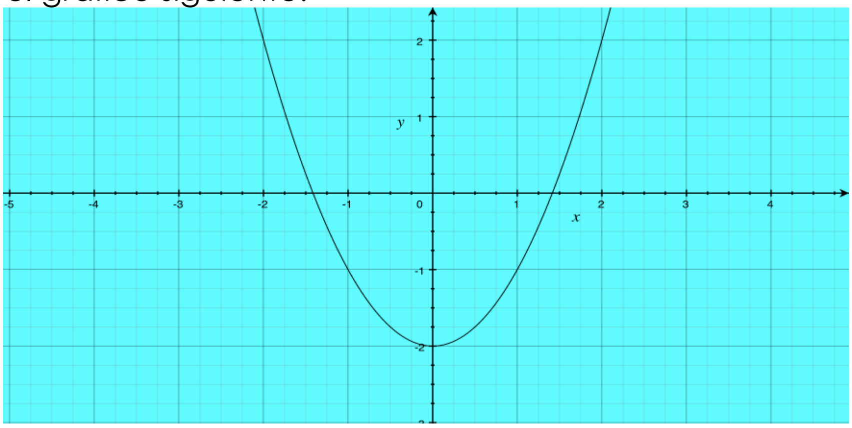
c) $2x - 4 = \ln(x)$



No te olvides de tener la calculadora en radianes

d) $x - 0{,}5 = \text{sen}(x)$

En el gráfico siguiente:



Identifica y determina las coordenadas de la intersección de f(x) con el eje y.

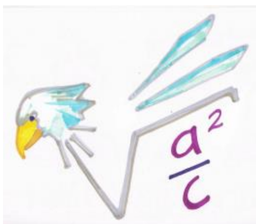
A este intercepto también se le llama ______________________

¿Cuál será el valor de x en todos estos interceptos?

____

¿Qué significa la ordenada en el origen?

____



Ejercicios:
Determinar la ordenada en el origen de las siguientes funciones:

a) $y = x^3 - 4x + 5$

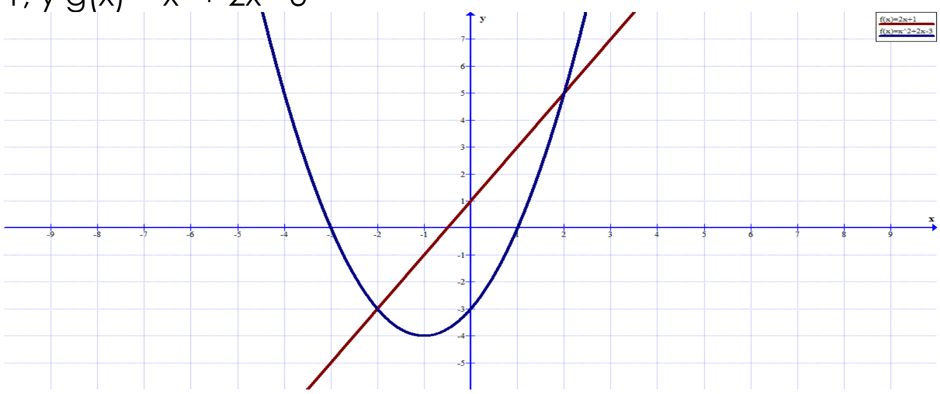
b) $f: x \rightarrow x^2 - 8x + 4 - 1/(x+1)$

c) $y = \log_2(x+2) - 1$

d) $f: x \rightarrow (x^2 - 3x + 1)^{1/2} + 3$

INTERSECCIONES

En el gráfico siguiente, se muestran las funciones $f(x) = 2x + 1$, y $g(x) = x^2 + 2x - 3$



Identifica y determina las coordenadas de la intersección de las gráficas.

¿Qué significan los puntos (-2,-3) y (2,5)?

____

Calcular: f(-2) = _________ g(-2) = _________

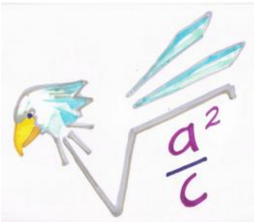
f(2) = ________ g(2) = ________

Resuelve algebraicamente el sistema:

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = x^2 + 2x - 3 \end{cases}$$

¿Hay alguna relación entre la gráfica mostrada y la solución del sistema?

____



Ejercicios:
Resolver algebraica y gráficamente los sistemas:

a) $\begin{cases} y = x + 1 \\ y = x^2 + 2x - 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ y = 4 - x^2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = -1/x \\ y = x - 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = 3x - 1 \\ y = 3x^2 - 2x - 3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} y = x^2 - 2x + 1 \\ y = -x^2 + 3x - 1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} y = x^3 - x^2 - 4x + 4 \\ y = x^2 + x - 2 \end{cases}$

Determinar la solución gráficamente, usando la intersección de dos funciones:

a) $x^2 - 6 = 3$

b) $3x-4=2x+5$

c) $2^x = x^2 - 1$

d) $\sqrt{3x+8} = 4 - x$

e) $\ln(3x-5) = x-3$

f) $x^2 - 4 = senx$

Problemas de aplicación:

a) Cuando se venden licuadoras a p dólares cada una, los fabricantes están en capacidad de suministrar $p^2/10$ licuadoras a los minoristas locales, aunque la demanda local es 60 – p licuadoras. ¿A qué precio de mercado la oferta de los fabricantes de licuadoras será igual a la demanda de los consumidores de éstas?. ¿Cuántas licuadoras se venderán a este precio?

b) La ecuación de oferta para un producto es O: $p - x = 20$, donde p es el precio unitario del producto y x es la cantidad de unidades del producto que se pone a la venta. La ecuación de la demanda del mismo producto es D: $2p + x = 70$, donde p es el precio unitario y x la cantidad de unidades del producto demandada. Determinar gráficamente el punto de equilibrio.

EJERCICIOS

1. Resolver las ecuaciones siguientes:
    a. $2^{x+2} = 3x + 5$
    b. $\log_2 (x-5) = x - 6$
    c. $x^5 - 4x^5 + 2x^2 - 5x + 3 = 0$
    d. $\sqrt{3x - 5} = 3^x$
    e. $(x-6)(x^2-3x-10) = (x^2-9)(x^2+3x+2)$

2. Mostrar la solución gráficamente en los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 2x + 5y = 7 \\ 4x - y = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 5y = 3 \\ 2x + y = -5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + y = 6 \\ 4x - 3y = -5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 3x + y = -1 \end{cases}$

3. Resolver los sistemas y mostrar gráficamente la solución:

a) $\begin{cases} x^2 - 4 = y \\ y = 4 - x^2 \end{cases}$

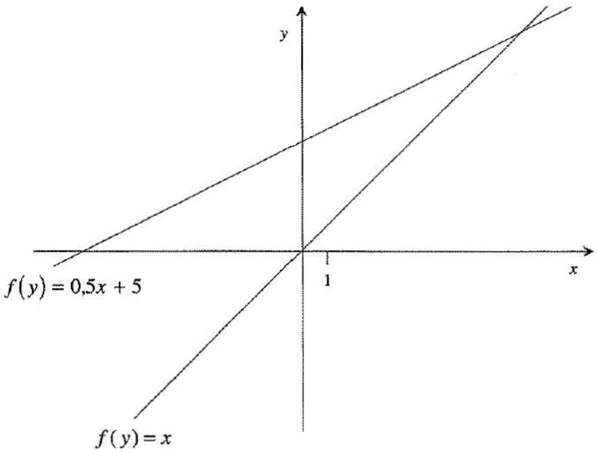
b) $\begin{cases} y = x^2 - 2x - 5 \\ y = -x^2 + 2x + 8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = 5x - 1 \\ y = x^2 - 4x - 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = 4x^2 - 5x + 8 \\ y = x^2 + 3x + 8 \end{cases}$

TELARAÑAS Y ESCALERAS: INVESTIGANDO LA ITERACIÓN DE PUNTO FIJO

1. La siguiente gráfica puede usarse para ilustrar una iteración con un punto fijo para la sucesión iterativa $x_n = 0{,}5x_{n-1} + 5$



a. Copie la gráfica y, comenzando en $x_0 = 1$, dibuje la escalera que corresponde a la iteración de punto fijo.

b. Copie y complete la siguiente tabla para los subsiguientes valores de x_n.

n	x_n
0	1
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

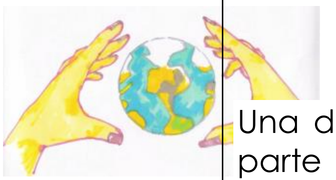
c. La iteración se acerca a un límite que es la solución de una ecuación. ¿Cuál es la ecuación? Compruebe que el límite es la solución de esta ecuación.

2. a. Considere la iteración $x_n = kx_{n-1} + 5$. Variando el valor de k de –2 a 2, $k \neq 0$, investigue la relación la relación entre k y la convergencia de la iteración.
Use la calculadora de pantalla gráfica como auxiliar en esta investigación pero incluya gráficas dibujadas a mano para k = -2, -1, -0,5 y 2.
Describa los resultados de la investigación. ¿Qué le parece que sucederá si k=1?

b. Formule una conjetura sobre la pendiente de la función generatriz y la convergencia (o divergencia) de la iteración. Aquí la función

generatriz es $f(x) = kx + 5$.
Proporcione otros ejemplos para apoyar su conjetura.

3. Repita la investigación usando la iteración $x_n = kx_{n-1}(1 - x_{n-1})$ con $0<k<4$. Describa el efecto que tiene k sobre la convergencia. Ilustre diferentes resultados con gráficas dibujadas a mano. Elija diferentes valores para x_0 y discuta cómo afecta a la convergencia la elección de x_0.



APLICACIONES LINEALES

Una de las realidades de la vida es la forma en que gran parte del mundo funciona mediante reglas matemáticas. Los sistemas lineales son una de las herramientas de las matemáticas que tienen múltiples usos en el mundo real. La vida está llena de situaciones en las que la salida de un sistema se duplica si la entrada se duplica y en donde la salida se corta a la mitad si la entrada hace lo mismo. Eso es lo que es un sistema lineal y cualquier sistema lineal puede describirse con una ecuación lineal.

En la cocina

Si alguna vez has duplicado tu receta favorita, es porque has aplicado una ecuación lineal. Si un pastel es igual a ½ taza de mantequilla, 2 tazas de harina, ¾ cdta. De polvo de hornear, tres huevos, 1 taza de azúcar y leche, entonces dos pasteles son iguales a 1 taza de mantequilla, 4 tazas de harina, 1 y ½ cdta. De polvo de hornear, seis huevos, 2 tazas de azúcar y leche. Para obtener el doble de la salida, tuviste que poner dos veces lo de la entrada. Quizá no sabías que estabas usando una ecuación lineal, pero eso es exactamente lo que hiciste.

Nieve derritiéndose

Imagina que un distrito hídrico quiere saber cuánta escorrentía de deshielo se puede esperar este año. La fusión viene de un gran valle y cada año el distrito mide la capa de nieve y el suministro de agua. Esto da 60 acres-pie (74,009 metros cúbicos) de cada 6 pulgadas (15 cm) de nieve acumulada. Este año los topógrafos miden 6 pies (15 cm) y 4 pulgadas (10 cm) de nieve. El distrito convierte eso en la expresión lineal (60 acres-pie / 6 pulgadas) * 76 pulgadas (74,009 m3/0.015 m) * 193,04 m). Los funcionarios del agua pueden esperar 760 acres-pie (937,446 m3) de deshielo.

Sólo por diversión

Es primavera e Irene quiere llenar su piscina. No quiere estar allí todo el día, pero tampoco quiere que el agua se desborde de la piscina. Ella ve que tarda 25 minutos para que suba 4 pulgadas (10 cm) el nivel de la piscina. Para llenar la piscina necesita una profundidad de 4 pies (120 cm), a ella le faltan 44 pulgadas más. Entonces se da cuenta de su ecuación lineal: 44

pulgadas (111,7 cm) * (25 minutos / 4 pulgadas (10 cm)) es de 275 minutos, por lo que sabe que tiene que esperar cuatro horas y 35 minutos para llenar su piscina.

Un césped perfecto

Ralph también se ha dado cuenta de que es primavera. La hierba ha crecido. Creció 2 pulgadas (5 cm) en dos semanas. No le gusta que la hierba crezca más de 2 y ½ pulgadas (6 cm), pero tampoco le gusta dejarla más corta de 1 y ¾ de pulgada (4,4 cm). ¿Con qué frecuencia necesita cortar el césped? Él ha puesto esos datos en una expresión lineal, donde el cálculo (14 días / 2 pulgadas (5 cm)) * ¾ de pulgada (1,9 cm) le dice que necesita cortar el césped cada 5 y ¼ días. Él hace caso omiso del ¼ y sabe que deberá cortar el césped cada cinco días.

Ecuaciones en todas partes

No es difícil ver otras situaciones similares. Si quieres comprar gaseosas para la gran fiesta y tienes US$60 en el bolsillo, una ecuación lineal te indica la cantidad que puedes pagar. Si necesitas traer suficiente leña para el fuego para quemar durante la noche, calcular el dinero de tu bolsillo; si quieres saber cuánta pintura necesitas para repintar las habitaciones del piso de arriba o comprar suficiente gasolina para ir y venir de casa de tu tía Sylvia, las ecuaciones lineales proporcionan las respuestas. Los sistemas lineales están, literalmente, en todas partes.

¿Qué otras aplicaciones descubres de las funciones lineales?

En dónde no están las ecuaciones lineales

Una de las paradojas es que casi cada sistema lineal es también un sistema no lineal. Pensar en que puedes hacer un pastel gigante al cuadruplicar tu receta probablemente no funcionará. Si hay un año de nevadas realmente intensas y la nieve se empuja contra las paredes del valle, la estimación de agua disponible de la compañía de agua se irá. Después de que la piscina está llena y comienza a desbordarse, el agua no la hará más profunda. Así que la mayoría de sistemas lineales tienen un “régimen lineal”, una región sobre la cual se aplican las reglas lineales, y un “régimen no lineal” donde no lo hacen. Mientras estás en el régimen lineal, las ecuaciones lineales son válidas.

Imágenes de Comstock/Comstock/Getty Images
http://www.ehowenespanol.com/funciones-ecuaciones-lineales-vida-real-info_181622/ rescatado el 25/01/14

FUNCIONES LINEALES

Es una función polinómica de la forma: ________________

Recibe el nombre de función lineal, porque la gráfica es

____________________________.

Una función lineal expresa ya sea el incremento o el

decremento ____.

Ejemplos:
Graficar, hallando dominio, rango e interceptos de cada función:

a) $y = 2x + 1$

b) $y = 5 - 2x$

c) $y = x + 3, \quad -4 < x \leq 4$

El hecho de restringir el dominio o el rango de una función se llama “acotar”

d) $y = 5 - 3x, \ -1 \leq y < 6$

e) $y = 3x - 2 \ , \ -2 < x \leq 6, \ -6 \leq y \leq 20$

CASOS PARTICULARES

FUNCIÓN IDENTIDAD

Es la función cuya regla de correspondencia es ___________

Dom

Ran

FUNCIÓN CONSTANTE

Es la función cuya regla de correspondencia es __________

Graficar $y = 4$

Dom

Ran

¿Cómo se grafica la ecuación x = 3?

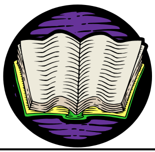
Dom

Ran

¿Es función?

¿Por qué?

FUNCIÓN DE DEFINICIÓN MÚLTIPLE



Cada definición se aplica SOLO al dominio que se indica para ella

a) Graficar indicando dominio, rango y si es continua.

$$y = \begin{cases} x+4 & x < -1 \\ 3 & x \geq -1 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} 2x-3 & x \leq -2 \\ 5-x & x > 2 \end{cases}$$

$$y=\begin{cases}2x+1 & x<-3\\ 4+3x & -3\le x<2\\ 8-x & x\ge 2\end{cases}$$

$$y=\begin{cases}x+3 & x<-2\\ 1 & -2\le x<2\\ 3-x & x\ge 2\end{cases}$$

b) Sea la función: $f(x) = (x-3)^2 - (x+1)(x-2)$. Hallar m para que f(m) = 5.

c) Sea la función: g(x) = (x-2)/5 + (x+1)/4 – (x+1)/8. Hallar a para que g(a) = 2.

d) Sea la función: h(x) = (4x+3)/(2x-5) – (3x+8)/(3x-7). Hallar w para que h(w)=1

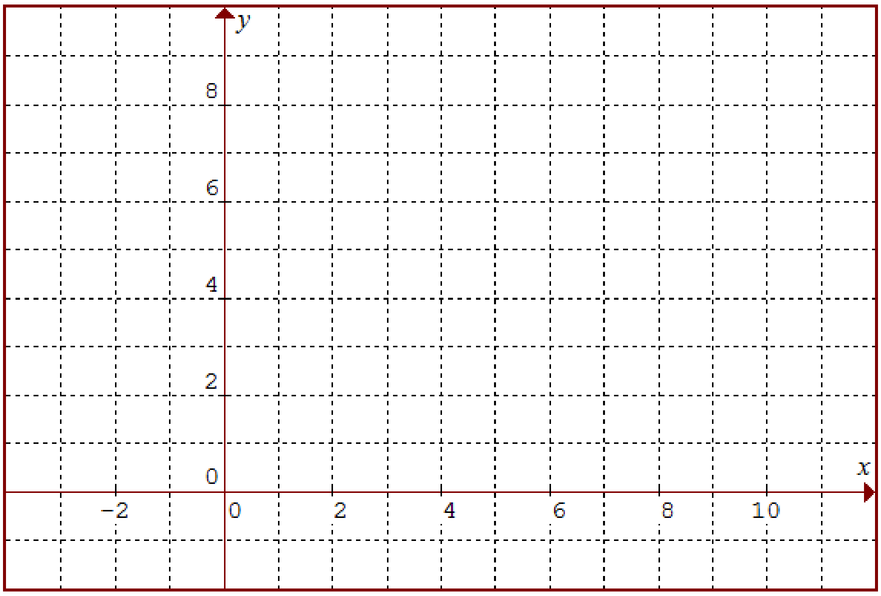
En la calculadora, reproducir el logotipo de Ciudad de Dios

LA LÍNEA RECTA

En el mismo plano graficar las funciones:

a) Y = 2x + 1
b) Y = x + 1
c) Y = 6x + 1

¿En qué medida las funciones lineales miden con exactitud un coeficiente intelecual?



¿Qué tienen en común estas rectas?

____

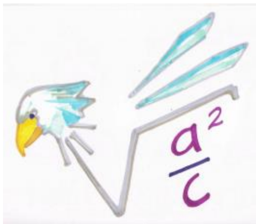
¿En qué se diferencian estas rectas?

____

¿Cómo podemos medir esta inclinación?

____

PENDIENTE ______________________________



Ejercicios

a) Graficar las rectas siguientes:

   a. Pasa por (1,2) y su ángulo de inclinación es 30°

   b. Pasa por (3,-2) y su ángulo de inclinación es 135°

   c. Pasa por (-1,-2) y pendiente 2

   d. Pasa por (-2,3) y pendiente -1/3

b) Determinar la pendiente de las rectas que pasan por los puntos:
   a. (2,4) y (5,-2)

   b. (-2,5) y (3,2)

   c. (-5,-3) y (4,-1)

   d. (3,1) y (5,-4)

c) Determinar la pendiente de las siguientes rectas:
   a. $y = 3x - 6$

   b. $y = 6 - x$

   c. $2x + y = 6$

   d. $2y - 3x = 12$

   e. $x + y = 3$

¿Qué relación podemos obtener de esto? ________________

____

d) Determinar la ecuación de la recta que pasa por (1,4) y tienen pendiente 3.

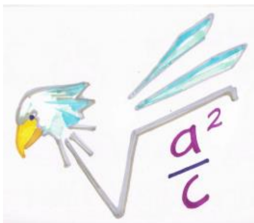
e) Determinar la ecuación de la recta que pasa por los puntos (2,5) y (-1,1).

f) Determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto (2,-3) y por el punto medio del segmento A(2,4) B(6,10)

g) Determinar la ecuación de la recta que pasa por el origen y por el punto de intersección de las rectas 2x-3y=5, x+2y=13

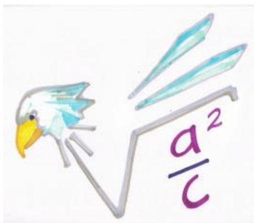
RELACIÓN ENTRE RECTAS

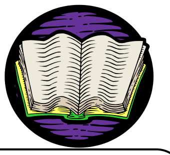
RECTAS PARALELAS ______________________________



RECTAS PERPENDICULARES ____________________________

____



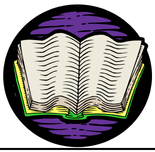


Dos rectas pueden ser paralelas (no se cortan) o secantes (se cortan), entre estas últimas destacan las perpendicular es por su ángulo de intersección.

Ejercicios:

a) Determinar la ecuación de la recta que pasa por (2,7) y es paralela a $2x + 3y = 1$

b) Determinar la ecuación de la recta que pasa por (-1,-5) y es perpendicular a la recta $5x – 3y = 4$



La mediatriz es la perpendicular trazada a un segmento por su punto medio

c) Determinar la ecuación de la mediatriz del segmento limitado por (2,9) y (8,1)

d) Se tiene el triángulo A(-2,1) B(4,7) C(6,-3).
   a. Hallar las ecuaciones de los lados.
   b. Hallar las ecuaciones de las mediatrices y determinar el circuncentro.

c. Hallar las ecuaciones de las alturas y determinar el ortocentro.

La altura es la perpendicular trazada a un lado desde el vértice opuesto

d. Hallar las ecuaciones de las medianas y determinar el baricentro.

La mediana es la recta trazada desde un vértice hasta el punto medio del lado opuesto.

e. Hallar el perímetro y el área del triángulo

e) Hallar el área del triángulo cuyos lados son el eje x y las rectas $x-2y+6=0$, $2x-y=0$

f) Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas 2x-3y=5, x+2y=13. La recta al cortar al eje x determina sobre él un segmento el doble del valor de su pendiente

PLANTEAMIENTO DE PROBLEMAS

a) Un obrero gasta diariamente las dos terceras partes del jornal para su manutención y la quinta parte en otras atenciones. En un mes de 30 días ha economizado $8500 y ha dejado de trabajar 2 días. ¿Cuál es el jornal del obrero?

b) Los ahorros de un niño constan de: (p+1), (3p-5) y (p+3) monedas de 5, 10 y 20 centavos respectivamente. ¿A cuánto ascienden sus ahorros, si al cambiarlo todo a monedas de 25 centavos, el número de monedas obtenidas es el doble del número de monedas de 5 centavos?

c) Se han comprado 70 p^3 de madera por $103,50. La madera comprada es cedro y caoba. Cada pie cúbico de cedro costó $1,20 y de caoba $1,85. ¿Cuántos pies cúbicos de cedro y de caoba se compró?

d) Un hacendado compró 35 caballos. Si hubiese comprado 5 caballos menos por el mismo precio, cada caballo le habría costado $2550 más. ¿Cuánto le costó cada caballo?.¿Cuántos caballos compró?

INECUACIONES DE PRIMER GRADO

Completar el siguiente cuadro

DESIGUALDAD	GRÁFICO	INTERVALO
$2 < x < 5$		
		[-1,8>
$-5 < x \leq 10$		
	-5 -1	
$4 < x$		
		[-6,+∞>
$X < 8$		
	-1	

La respuesta de una inecuación siempre es un intervalo

Ejercicios:
Desarrollar las siguientes inecuaciones:

a) $\frac{2x+7}{5}-\frac{3x-1}{4}>0$

b) $4-3x\leq 2x+1\leq 3-5x$

c) $x+\frac{1}{2}>\frac{x}{3}+5 \quad y \quad \frac{3x}{4}-6<\frac{x}{5}+1$

d) $\begin{cases} \frac{5}{12}-\frac{3(x-2)}{4}\geq \frac{5}{6}-\frac{2(x-1)}{3} \\ 3x+2<4x+7 \\ 5x-12\leq 3(5-2x) \end{cases}$

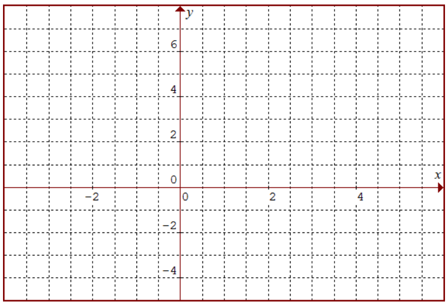
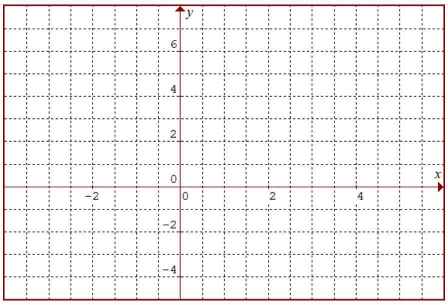
PROBLEMAS:

a) Todo estudiante cuyo promedio de rendimiento en 4 pruebas está entre 70 y 90 puntos, recibe una calificación de B. Dado que en las 3 primeras pruebas Jaime obtuvo 87, 91 y 73 puntos. ¿Qué puntajes puede obtener para que su rendimiento en promedio sea B?

b) Un vendedor de lámparas vende únicamente a mayoristas en su sala de exhibición. El gasto semanal total, incluyendo salarios, costos de planta y alquiler de la sala, es de $6000. Si cada lámpara es vendida en $168 y el material usado en la fabricación de cada lámpara cuesta $44, ¿cuántas lámparas deberá el fabricante construir y vender cada semana, si quiere asegurarse una ganancia no menor de $2000?

c) Se hace una inversión de $80000, una parte al 10% y el resto al 14%. ¿Qué monto mínimo debe invertirse al 14% para obtener, por lo menos, $8500 de intereses anuales considerando las dos inversiones?

GRÁFICAS DE INECUACIONES
Graficar $y \geq x + 3$

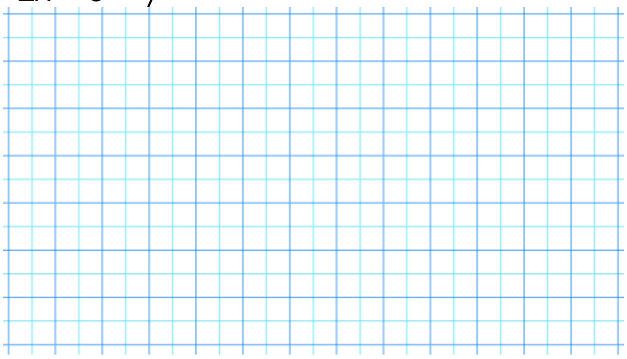
	Graficamos como si fuera una ecuación, teniendo en cuenta que la línea será contínua si hay $\leq$ o $\geq$ (los puntos están contenidos en la solución) o será punteada si hay $<$ o $>$ (los puntos no están incluidos)
	Esta línea divide al plano en dos zonas, tomo un punto arbitrario de una de estas. Tomamos por ejemplo el (0,0).
	Probamos este punto en la inecuación inicial, si es V aceptamos la zona, si es F aceptamos la otra

¿Esta gráfica es una función? ______________________________

¿Por qué? ____

Ejercicios:

a) Graficar las siguientes relaciones, indicando el dominio y rango:
   a. $2x + 5 < y$



b. $3x - 2y \geq 2$

c. $y > 8 - 3x$

d. $2x + y - 7 > 0$

e. $x - y + 1 \leq 0$

Al desarrollar un sistema de inecuaciones podemos optimizar una serie de condiciones, a este método se le llama programación lineal. http://descartes.cnice.mecd.es/Algebra/prog_lineal_lbc/sistema_pl.htm

b) Graficar las relaciones siguientes, determinando dominio, rango y área.

a. $x + 2y \leq 3, \quad x > -1, \quad y \geq 0$

b. $4x - 3y > 2, \quad x \leq 3, \quad y > -2$

c. $2x + y \leq 4, \quad 2x - y + 4 > 0, \quad y \geq -1$

d. $y - x - 4 < 0, \quad y + 3x - 8 \leq 0, \quad y \geq -2$

<table>
<tr>
<td></td>
<td>En la calculadora:

</td>
</tr>
</table>

EJERCICIOS DE TAREA

1. Graficar las siguientes funciones:
   a. y = 3x – 5 b. y = 4 – 2x c. y = 3 + x/2
   d. y = 7 – x/5 e. y = 2 + x/5 f. y = 3 - x

2. Graficar las siguientes funciones y determinar dominio, rango y si son continuas.

$$a.\begin{cases} 5-2x & x<-1 \\ 8+x & -1\le x\le 3 \\ 11 & 3<x \end{cases} \qquad b.\begin{cases} 4 & x\le -2 \\ 2-x & -2<x<4 \\ -2 & 4\le x<12 \end{cases}$$

$$c.\begin{cases} x+4 & -9\le x<-3 \\ 1 & -3\le x<4 \\ 5-x & 4<x\le 15 \end{cases} \qquad d.\begin{cases} 3-x & x<0 \\ x+1 & 0<x\le 3 \\ x-4 & 3<x<10 \end{cases}$$

3. Sea la función y = $\frac{2x-1}{2x-1}-\frac{x-4}{3x-2}$, hallar x si f(x) = 2/3

4. Sea la función y = $\frac{5x^2-27x}{5x+3}-\frac{1}{x}-x$, hallar x si f(x) = -6

5. Sea la función y = $\frac{x-2}{x^2+8x+7}-\frac{2x-5}{x^2-49}+\frac{x-2}{x^2-6x-7}$, hallar x si f(x) = 0

6. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (1,5) y tiene pendiente 2.

7. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (-6,-3) y tiene un ángulo de inclinación de 45°.

8. Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos (4,2) y (-5,7).

9. Hallar la ecuación de la recta cuya pendiente es –3 y cuya intersección con el eje y es –2.

10. Los vértices de un cuadrilátero son A(0,0) B(2,4) C(6,7) D(8,0). Hallar las ecuaciones de sus lados.

11. Los segmentos que una recta determina sobre los ejes x e y son 2 y –3 respectivamente. Hallar su ecuación.

12. Dado el triángulo cuyos vértices son A(-4,1) B(6,7) C(4,-3).
    a) Hallar las ecuaciones de los lados.
    b) Hallar la ecuación de la recta que pasa por el vértice A y es paralela al lado opuesto.
    c) Hallar las ecuaciones de las medianas y las coordenadas del baricentro.

d) Hallar las ecuaciones de las mediatrices y las coordenadas del circuncentro.
e) Hallar las ecuaciones de las alturas y las coordenadas del ortocentro.

13. Un triángulo tiene como vértices A(0,8) B(1,1) y C(5,3). Demostrar que el triángulo es isósceles y hallar las ecuaciones de sus lados.

14. Tres puntos tiene coordenadas A(2,9) B(4,3) y C(2,-5). La línea que pasa por C con pendiente ½ corta a la recta que pasa por AB en D.
    a) Calcular las coordenadas de D.
    b) Calcular la ecuación de la línea que pasa por D y es perpendicular a la línea $5y - 4x = 17$.

15. Dados los puntos (4,2) (1,6) y (5,k) que pertenecen a la misma línea recta, hallar k. Si la recta corta a los ejes x e y en A y B respectivamente y O es el origen. Calcular las dimensiones de OA y de OB y el área del triángulo AOB.

16. Hallar la ecuación de una recta que:
    a) pase por el punto A(1,-5) y tiene pendiente 2.
    b) tiene como pendiente –3 y su intersección con el eje y es 4.
    c) pasa por los puntos A(4,2) y B(-5,7).

17. Los vértices de un cuadrilátero son A(0,0), B(2,4), C(6,7) y D(8,0). Determinar las ecuaciones de los lados y de las diagonales.

18. Determinar la ecuación de la recta que tiene pendiente 3 y pasa por el punto de intersección de $2x + y - 8 = 0$ $3x - 2y + 9 = 0$.

19. Las ecuaciones de los lados de un cuadrilátero son: $3x - 8y + 36 = 0$, $x + y - 10 = 0$, $3x - 8y - 9 = 0$ y $x + y + 1 = 0$. Demostrar que es un paralelogramo, determinar las coordenadas de los vértices y las ecuaciones de las diagonales.

20. Determinar el valor de los coeficientes A y B de la ecuación: $Ax - By + 4 = 0$, si debe pasar por los puntos C(-3,1) y D(1,6).

21. Hallar el valor de k para que la recta $kx + (k - 1)y - 18 = 0$ sea paralela a la recta $4x + 3y + 7 = 0$.

22. Hallar el valor de k para que la recta $k^2x + (k + 1)y + 3 = 0$ sea perpendicular a la recta $3x - 2y - 11 = 0$.

23. Sean los vértices de un triángulo A(2,1) B(8,7) y C(6,-3), determinar las ecuaciones de:
    a) los lados del triángulo
    b) las medianas del triángulo
    c) las mediatrices del triángulo
    d) las alturas del triángulo.

24. Una recta pasa por el punto A(-6,7) y forma con los ejes coordenados un triángulo de área igual a 10 1/2. Hallar la ecuación de dicha recta.

25. La suma de los segmentos que una recta determina sobre los ejes coordenados es igual a 10. Hallar la ecuación de la recta si forma con los ejes coordenados un triángulo de área 12.

26. Determinar la ecuación de la recta que:
 a) pase por el punto (-2,5) y sea paralela a $2x - 5y + 3 = 0$
 b) pase por el punto $(2x + y - 5 = 0)$ y $(3x - 2y - 4 = 0)$ y sea perpendicular a la segunda recta.

27. Algunas temperaturas en Celsius y su equivalente en grados Fahrenheit son mostradas en la siguiente tabla.

Celsius (C)	50	60	75	95	100	120
Fahrenheit (F)	122	140	167	203	212	243

 a. Graficar la relación y mostrar que responde a una relación de la forma $F = a.\,C + b$.
 b. Encontrar las constantes a y b.
 c. Encontrar en grados Fahrenheit los valores de las siguientes temperaturas.
 i) 80°C ii) 40°C iii) -40°C

28. En un experimento para probar la ley de volumen-temperatura, para gases, una masa de gas fue calentada bajo una presión constante. El volumen del gas a varias temperaturas fue anotado y los resultados se muestran en la siguiente tabla.

Temperatura (T)	11	19	41	52	60	86
Volumen (V)	104	107	115	119	122	131,5

Graficando muestra que existe la relación de la forma $V = a\,T + b$ y encuentra los valores aproximados de las constantes a y b. Encontrar el volumen de esta masa de gas cuando la temperatura es:

 i) o°C ii) 30°C

29. Resolver las siguientes ecuaciones:
 a) $14x - (3x - 2) - [5x + 2 - (x - 1)] = 0$

 b) $2x + 3(-x^2 - 1) = -\{3x^2 + 2(x - 1) - 3(x + 2)\}$

 c) $3(2x + 1)(-x + 3) - (2x + 5)^2 = -[-\{-3(x + 5)\} + 10x^2]$

 d) $(x + 2)(x + 3)(x - 1) = (x + 4)(x + 4)(x - 4) + 7$

e) $3(x-2)^2(x+5)=3(x+1)^2(x-1)+3$

f) $\frac{1}{2}\left(x-\frac{7}{3}\right)-\frac{1}{3}\left(x-\frac{7}{4}\right)+\frac{1}{4}\left(x-\frac{7}{5}\right)=0$

g) $\frac{2x-3}{5}-\frac{x+1}{3}=\frac{x}{6}+\frac{3x-4}{2}$

h) $x+2-\frac{x^2-3}{2x-2}-\frac{x+1}{2}=3$

i) $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x}=\frac{2}{x^2+2x}$

j) $\frac{x-2}{x-3}-\frac{x+2}{x+3}=1-\frac{x-5}{x+3}$

k) $\sqrt{9x+\sqrt{x}}=3\sqrt{x}+\frac{1}{7}$

30. Un obrero gasta diariamente las dos terceras partes del jornal para su manutención y la quinta parte en otras atenciones. En un mes de 30 días ha economizado 8 500 soles y ha dejado de trabajar 2 días. ¿Cuál es el jornal del obrero?

31. Los ahorros de un niño constan de: (p + 1), (3p – 5) y (p + 3) monedas de 5, 10 y 20 centavos respectivamente. ¿A cuánto ascienden sus ahorros, si al cambiarlo a monedas de 25 centavos, el número de monedas obtenidas es el doble del número de monedas de 5 centavos?

32. Se han comprado 70 p^3 de madera por US$ 103,50. La madera comprada es cedro y caoba. Cada pie cúbico de cedro costo US$ 1,20 y de caoba US$1,85. ¿Cuántos pies cúbicos compró de cedro y caoba?

33. Un hombre deja una herencia de US$23 500 para repartir entre tres hijos y dos hijas y manda que cada hija reciba US$1 500 dólares más que cada hijo. Hallar la parte de cada hijo y cada hija.

34. Un hacendado compró 35 caballos. Si hubiese comprado 5 caballos menos por el mismo precio, cada caballo le habría costado US$ 2 550 más. ¿Cuánto le costó cada caballo?

35. La suma de cuatro números enteros consecutivos es 46. Hallar los números enteros.

36. Tengo S/. 155 en monedas de S/. 2 y de S/. 5, si en total tengo 40 monedas. ¿Cuántos son monedas de S/. 5?

37. Dividir 454 en tres partes sabiendo que la menor es 15 unidades menor que la del medio y 70 unidades menor que la mayor.

38. La edad de María es el triplo de la de Rosa mas 15 años y ambas edades suman 59 años. Hallar ambas edades.

39. Se ha comprado un traje, un bastón y un sombrero por $259. El traje costó 8 veces lo que el sombrero y el bastón $30 menos que el traje. Hallar los precios respectivos.

40. Preguntado a un hombre por su edad, responde: "si al doble de mi edad se quitan 17 años se tendría lo que me falta para tener 100 años". ¿Qué edad tiene el hombre?

41. Entre A y B tienen $84. Si A gana $80 y B gana $4, A tendrá el triplo de lo que tenga B. ¿Cuánto tiene cada uno?

42. Un muchacho compró triple número de lápices que de cuadernos. Cada lápiz le costó 5 ctvs. y cada cuaderno 6 ctvs. Si por todo pagó $1,47. ¿Cuántos lápices y cuántos cuadernos compró?

43. Una sala tiene doble largo que ancho. Si el largo se disminuye en 6m y el ancho se aumenta en 4m, la superficie de la sala no varía. Hallar las dimensiones de la sala.

44. Hallar tres números consecutivos tales que la suma de los 3/5 del menor con los 5/6 del mayor exceda en 31 al del medio.

45. Dividir 260 en dos partes tales que el duplo de la mayor dividido entre el triple de la menor dé 2 de cociente y 40 de residuo.

46. Un hombre viajó 9362 Km. por barco, tren y avión. Por tren recorrió los 4/9 de lo que recorrió en barco y en avión los 5/8 de lo que recorrió en tren. ¿Cuántos kilómetros recorrió de cada modo?

47. Los 4/5 de las aves de una granja son palomas, los 3/4 del resto pavos y las 4 aves restantes patos. ¿Cuántas aves hay en la granja?

48. Tenía cierta suma, gasté los 3/4 en trajes y los 2/3 de lo que me quedó en libros. Si lo que tengo ahora en $38 menos que los 2/5 de lo que tenía al principio. ¿Cuánto tenía al principio?

49. A y B empiezan a jugar con igual suma de dinero. Cuando B ha perdido los 3/4 del dinero con que empezó a jugar, lo que ha ganado A es $24 más que la tercera parte de lo que le queda a B. ¿Con cuánto empezaron a jugar?

50. Hallar dos números tales que 5 veces el mayor exceda a 1/5 del menor en 222 y 5 veces el menor exceda a 1/5 del mayor en 66.

51. Si el numerador de una fracción se aumenta en 2/5, el valor de la fracción es 4/5, y si el numerador se disminuye en 4/5, el valor de la fracción es 2/5. Hallar la fracción.

52. Antes de una batalla las fuerzas de dos ejércitos estaban en la relación de 7 a 9. El ejército menor perdió 15000 hombres en la batalla y el mayor 25000 hombres. Si la relación ahora es de 11 a 13. ¿Cuántos hombres tenía cada ejército antes de la batalla?

53. Si a un número de dos cifras se añade 9, las cifras se invierten, y si este número que resulta se divide entre 7, el cociente es 6 y el residuo 1. Hallar el número.

54. Un padre le dice a su hijo: Hace 6 años tu edad era 1/5 de la mía y dentro de 9 años será los 2/5. Hallar las edades actuales.

55. Una tripulación emplea 6 horas en recorrer 40 Km. río abajo y regresar. En remar 1 Km. río arriba emplea el mismo tiempo que en remar 2 Km. río abajo. Hallar el tiempo empleado en ir y el tiempo en volver.

56. Resolver las siguientes inecuaciones y presentar el intervalo solución:
   a. $5(x + 8) - 3(x - 1) \geq x + 5 - 2(x + 1)$

   b. $\frac{3+x}{2} - \frac{4-x}{4} \leq 6$

   c. $\frac{3x+1}{6} - \frac{2x+1}{3} \leq \frac{1}{2}$

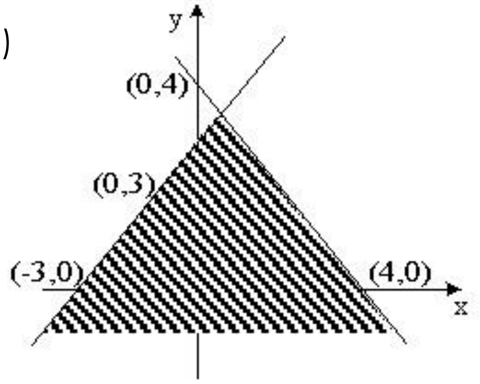
   d. $3x - 6(x + 2) \leq 3 + 2x + 1$

57. Graficar las siguientes relaciones y si es posible hallar el área.

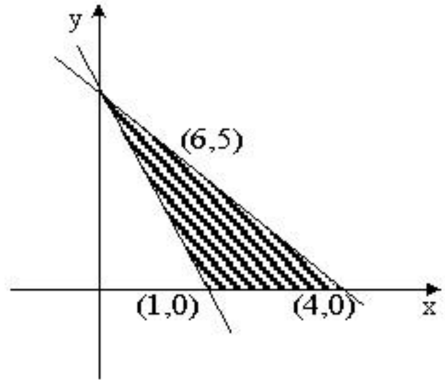
   a) $y > 0,\ y\ \ 3,\ y\ \ \leq x,\ x < 5$
   b) $y + x > 0,\ y \leq 5,\ x < 4$
   c) $x + y \leq 4,\ -x + y \leq 4,\ -x - y \leq 4,\ x - y \leq 4$
   d) $y \leq 3,\ y > x - 3,\ x > 0$

58. Los diagramas muestran el resultado del sistema de inecuaciones. Hallarlas para que determinen el área sombreada.

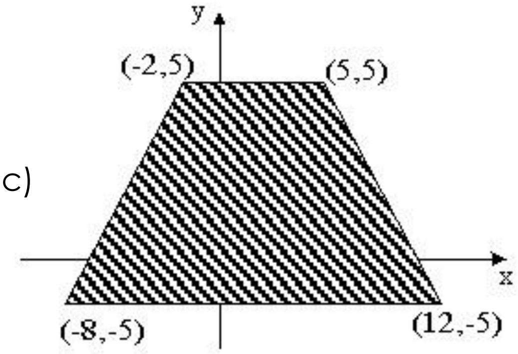
a)



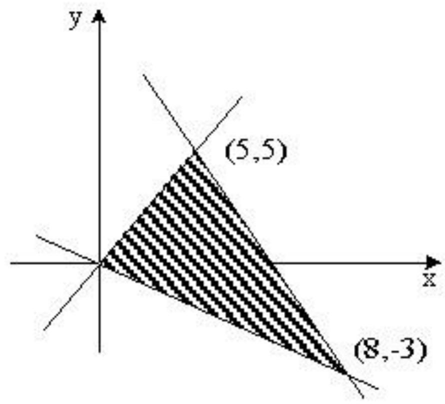
b)



c)



d)



59. Muestre la solución gráfica del sistema de inecuaciones.

a) $x + y \leq 4$
$2x - y > 4$

b) $x + 3y < 1$
$x - y > 2$

$x + y \geq 3$
$x \geq 0$

c) $y < 0$
$x > y$

$2y < x$
$2x + 3y \leq 6$

d) $x \geq 0$
$y \geq 0$

EJERCICIOS TIPO IB

1. Consider the line L with equation $y + 2x = 3$. The line L_1 is parallel to L and passes through the point $(6, -4)$.

(a) Find the gradient of L_1.

(b) Find the equation of L_1 in the form $y = mx + b$.

(c) Find the x-coordinate of the point where line L_1 crosses the x-axis.

2. Two weeks after its birth, an animal weighed 13 kg. At 10 weeks this animal weighed 53 kg. The increase in weight each week is constant.

   (a) Show that the relation between *y*, the weight in kg, and *x*, the time in weeks, can be written as $y = 5x + 3$

   (b) Write down the weight of the animal at birth.

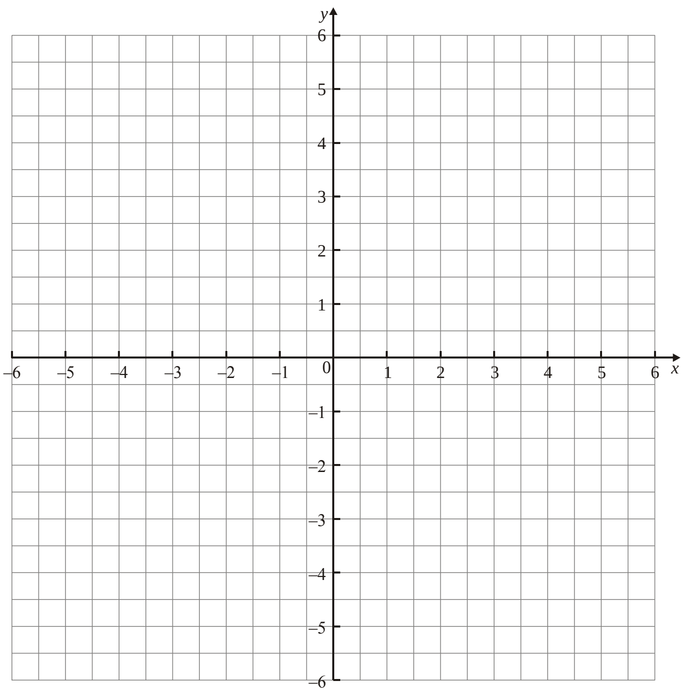
   (c) Write down the weekly increase in weight of the animal.

   (d) Calculate how many weeks it will take for the animal to reach 98 kg.

3. Let $f(x) = 2x + 1$.

   (a) On the grid below draw the graph of $f(x)$ for $0 < x < 2$.

   (b) Let $g(x) = f(x+3) - 2$. On the grid below draw the graph of $g(x)$ for $-3 < x < -1$.



4. Angela needs $4000 to pay for a car. She was given two options by the car seller.

   Option A: *Outright Loan*

   A loan of $4000 at a rate of 12% per annum compounded monthly.

   (a) Find

(i) the cost of this loan for one year;

(ii) the equivalent annual simple interest rate.

Option B: Friendly Credit Terms

A 25% deposit, followed by 12 equal monthly payments of $287.50.

(b) (i) How much is to be paid as a deposit under this option?

(ii) Find the cost of the loan under *Friendly Credit Terms*.

(c) Give a reason why Angela might choose

(i) **Option A**

(ii) **Option B**

To help Angela, her employer agrees to give her an interest free loan of $4000 to buy the car. The employer is to recover the money by making the following deductions from Angela's salary:

$x in the first month,

$*y* every subsequent month.

The total deductions after 20 months is $1540 and after 30 months it is $2140.

(d) Find x and *y*.

(e) How many months will it take for Angela to completely pay off the $4000 loan?

5. Vanessa wants to rent a place for her wedding reception. She obtains two quotations.

(a) The local council will charge her £30 for the use of the community hall plus £10 per guest.

(i) **Copy** and complete this table for charges made by the local council.

Number of guests (*N*)	10	30	50	70	90
Charges (C) in £					

(ii) On graph paper, using suitable scales, draw and label a graph showing the charges. Take the horizontal axis as the number of guests and the vertical axis as the charges.

(iii) Write a formula for C, in terms N, that can be used by the local council to calculate their charges.

(b) The local hotel calculates charges for their conference room using the formula:

$$C = \frac{5N}{2} + 500$$

where C is the charge in £ and N is the number of guests.

(i) Describe, **in words only**, what this formula means.

(ii) **Copy** and complete this table for the charges made by the hotel.

Number of guests (N)	0	20	40	80
Charges (C) in £				

(iii) On the same axes used in part (a)(ii), draw this graph of C. Label your graph clearly.

(c) Explain, briefly, what the two graphs tell you about the charges made.

(d) Using your graphs or otherwise, find

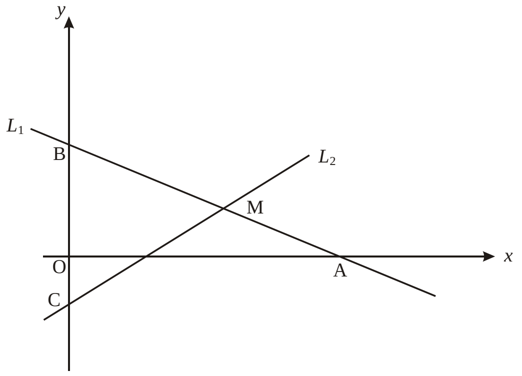
(i) the cost of renting the community hall if there are 87 guests;

(ii) the number of guests if the hotel charges £650;

(iii) the difference in charges between the council and the hotel if there are 82 guests at the reception.

6. The line L_1 shown on the set of axes below has equation $3x + 4y = 24$.
L_1 cuts the x-axis at A and cuts the y-axis at B.

Diagram not drawn to scale



(a) Write down the coordinates of A and B.

M is the midpoint of the line segment [AB].

(b) Write down the coordinates of M.

The line L_2 passes through the point M and the point C (0, –2).

(c) Write down the equation of L_2.

(d) Find the length of

(i) MC;

(ii) AC.

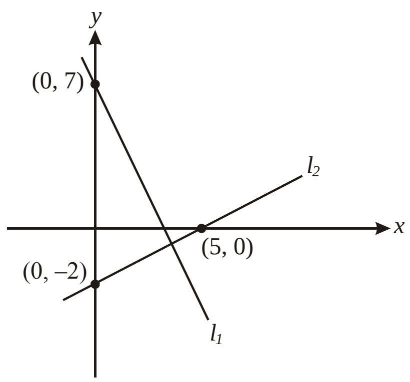
(e) The length of AM is 5. Find

(i) the size of angle CMA;

(ii) the area of the triangle with vertices C, M and A.

7. The following diagram shows the lines l_1 and l_2, which are perpendicular to each other.

Diagram not to scale



(a) Calculate the gradient of line l_1.

(b) Write the equation of line l_1 in the form $ax + by + d = 0$ where a, b and d are integers, and $a > 0$.

8. The cost c, in Australian dollars (AUD), of renting a bungalow for n weeks is given by the linear relationship $c = nr + s$, where s is the security deposit and r is the amount of rent per week.

Ana rented the bungalow for 12 weeks and paid a total of 2925 AUD.

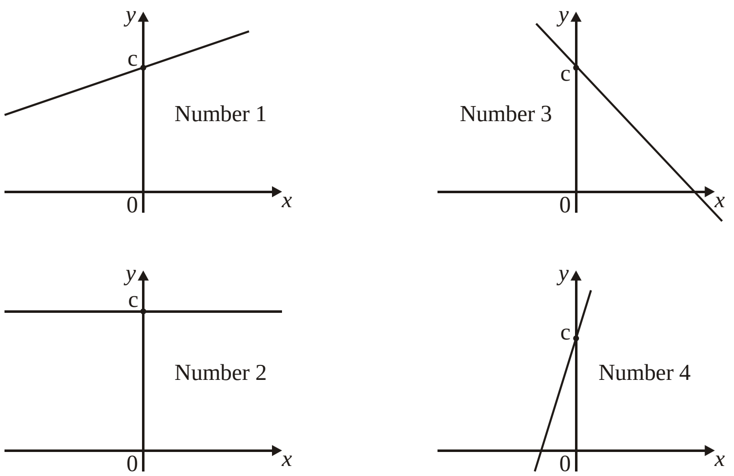
Raquel rented the same bungalow for 20 weeks and paid a total of 4525 AUD.

Find the value of

(a) r, the rent per week;

(b) s, the security deposit.

9. The four diagrams below show the graphs of four different straight lines, all drawn to the same scale. Each diagram is numbered and c is a positive constant.

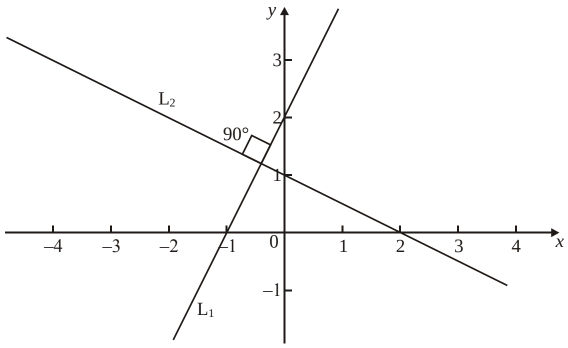


In the table below, write the number of the diagram whose straight line corresponds to the equation in the table.

Equation	Diagram number
$y = c$	
$y = -x + c$	
$y = 3x + c$	

$y = \frac{1}{3}x + c$	

10. A student has drawn the two straight line graphs L1 and L2 and marked in the angle between them as a right angle, as shown below. The student has drawn one of the lines incorrectly.



Consider L1 with equation $y = 2x + 2$ and L2 with equation $y = -\frac{1}{4}x + 1$.

(a) Write down the gradients of L1 and L2 **using the given equations**.

(b) Which of the two lines has the student drawn incorrectly?

(c) How can you tell from the answer to part (a) that the angle between L1 and L2 should not be 90°?

(d) Draw the correct version of the incorrectly drawn line on the diagram.

11. Two functions are defined as follows

$$f(x) = \begin{cases} 6 - x \text{ for } 0 \le x < 6 \\ x - 6 \text{ for } x \ge 6 \end{cases} \qquad g(x) = \frac{1}{2}x$$

(a) Draw the graphs of the functions f and g in the interval $0 \le x \le 14$, $0 \le y \le 8$ using a scale of 1 cm to represent 1 unit on both axes.

(b) (i) Mark the intersection points A and B of $f(x)$ and $g(x)$ on the graph.

(ii) Write down the coordinates of A and B.

(c) Calculate the midpoint M of the line AB.

(d) Find the equation of the straight line which joins the points M and N.