COLEGIO
SAN AGUSTĪN
EST. 1966

Guía de trabajo N.° 02: Función Especiales

Nombre y apellido: ____

Grado: 4.° de secundaria   Sección: "______"   Fecha: ___ / 05 / 21

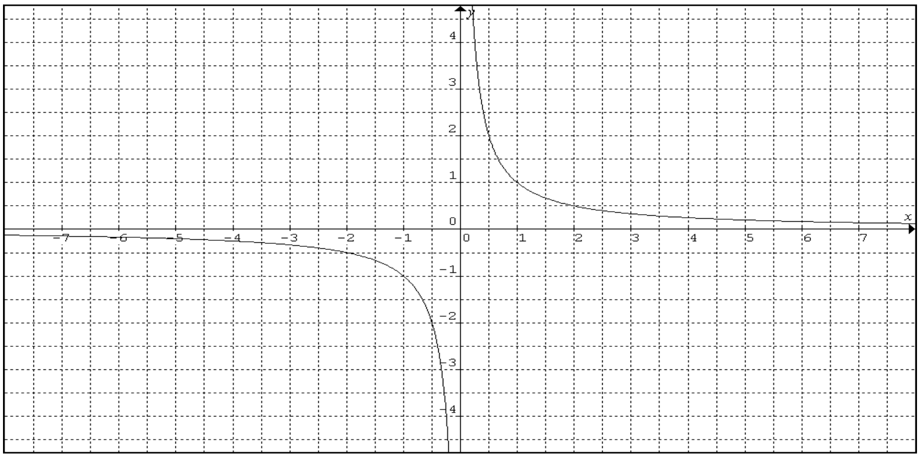
Jesús dijo: «Os aseguro que quien deje casa, o hermanos o hermanas, o madre o padre, o hijos o tierras, por mí y por el Evangelio, recibirá ahora, en este tiempo, cien veces más.   (Mc 10, 28)

COMPETENCIA: Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio.
DESEMPEÑOS:

- Expresa, con diversas representaciones gráficas, tabulares y simbólicas y con lenguaje algebraico, su comprensión sobre el dominio y rango de una función, los cambios que se observan en su representación gráfica, para interpretar un problema en su contexto y estableciendo relaciones entre dichas representaciones.
- Combina y adapta estrategias heurísticas, recursos, métodos gráficos, procedimientos y propiedades algebraicas más óptimas para resolver problemas de funciones que involucran situaciones reales.

FUNCIÓN RECÍPROCA

Si $p(x)=1$ y $q(x)=x$, se tiene la función recíproca, es decir: $f: x \mapsto \dfrac{1}{x}, x \neq 0$, cuya gráfica es:



Analizando la gráfica tememos que:

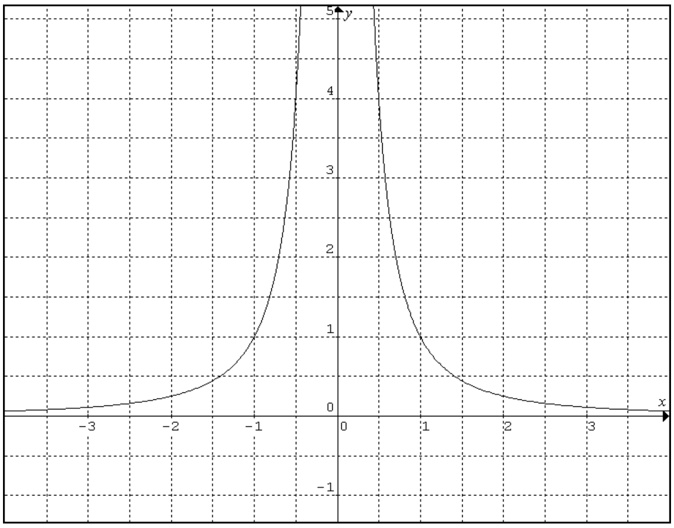
$$Dom\ f = IR - \{\quad\}$$

La función f es __________________

Cuando $x \to \infty$, los valores de $f(x)$ se acercan a __________.

Cuando $x \to$ ______ , los valores de $f(x) \to \infty$.

Ej: Gráfica de $y = \dfrac{1}{x^2}$



Analizando la gráfica tememos que:

$Dom\ f = IR - \{\quad\}$

La función f es ___________________

Cuando $x \to \infty$, los valores de $f(x)$ se acercan a ___________.

Cuando $x \to$ ______ , los valores de $f(x) \to \infty$.

FUNCIÓN RACIONAL

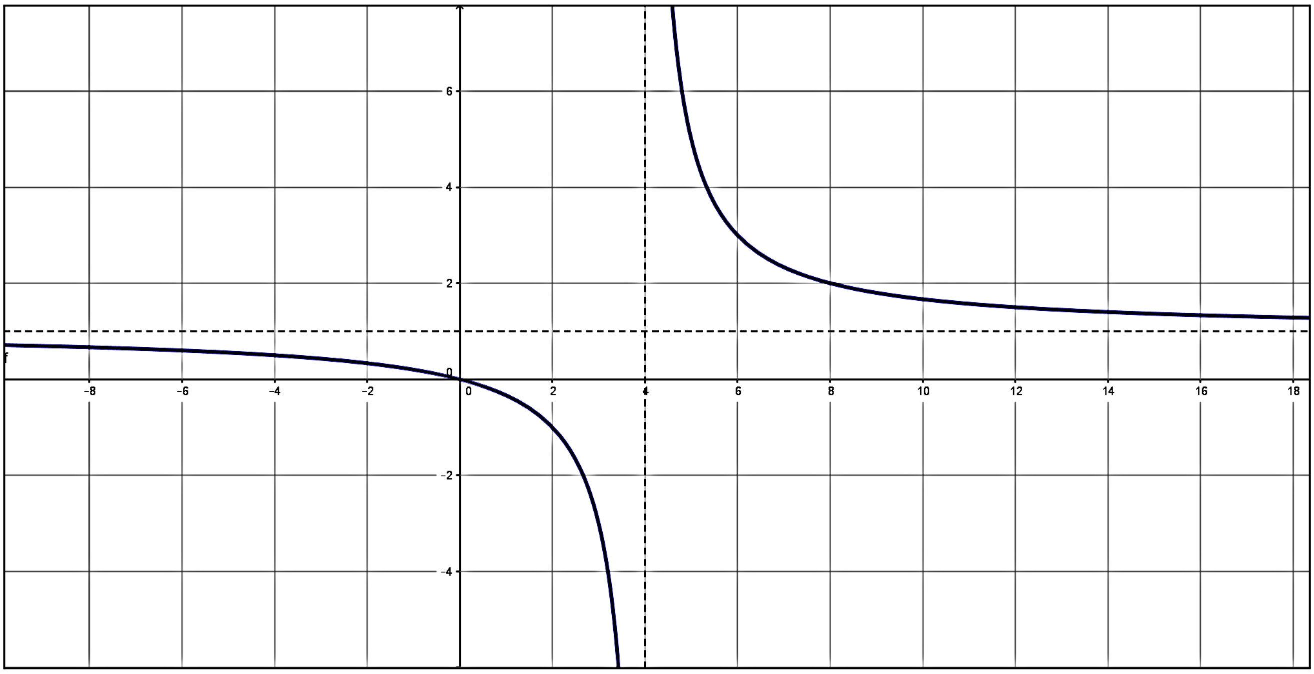
Una función racional es una función de la forma $f : x \mapsto \dfrac{p(x)}{q(x)}$, donde p y q son funciones polinomiales y q no es el polinomio cero. El dominio es el conjunto de todos los números reales excepto aquellos para los que el denominador q es 0.

Otra forma de expresarla es $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

SIN DOMINIO RESTRINGIDO	**CON DOMINIO RESTRINGIDO**
Para el cálculo del dominio: $cx + d \neq 0 \Rightarrow x \neq -\dfrac{d}{c}$ Para el cálculo del rango $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$	Se debe construir el rango utilizando las propiedades de desigualdades, a partir del dominio que lo tenemos como dato: Ejemplo: Sí ; $f(x) = \dfrac{x+5}{x+3}$; $x \in \left]4, 8\right]$ Se sabe que: $y = \dfrac{x+5}{x+3} \Rightarrow y = 1 + \dfrac{2}{x+3}$

$Dom\ f = R - \left\{ -\dfrac{d}{c} \right\}$ $Ran\ f = R - \left\{ \dfrac{a}{c} \right\}$ Ejemplo: $f(x) = \dfrac{x+5}{x+3}$ $Dom\ f =$ …………………….. $Ran\ f =$ ………………………..	Construimos «y» a partir de $x \in \left]4, 8\right]$ $(4 < x \leq 8) + 3$ $(7 < x+3 \leq 11) inversa$ $\left(\dfrac{1}{11} < \dfrac{1}{x+3} \leq \dfrac{1}{7} \right) .2$ $\left(\dfrac{2}{11} \leq \dfrac{2}{x+3} < \dfrac{2}{7} \right) + 1$ $\left(\dfrac{13}{11} \leq 1 + \dfrac{1}{x+3} < \dfrac{9}{7} \right)$ $Ran\ f = \left[\dfrac{13}{11}; \dfrac{9}{7} \right[$

Ejemplo: Sea $f(x) = \dfrac{x}{x-4}$ de la cual su gráfica es:



Analizando la gráfica tememos que:

$$Dom\ f = IR - \{4\}$$

La función f es impar (investigar)

Cuando $x \to \infty$, los valores de $f(x)$ se acercan a 1.

Cuando $x \to 4$, los valores de $f(x) \to \infty$.

1. **Ahora tú:**

a) Representa la función $y = \dfrac{4x}{2x-4}$ y analiza su gráfica.

b) Representa la función $y = \dfrac{4x}{2x-4} + 1$ y analiza su gráfica.

c) Representa la función $y = -\dfrac{4x}{2x-4} - 2$ y analiza su gráfica.

d) Representa la función $y = \dfrac{4}{x^2-4}$ y analiza su gráfica.

e) Representa la función $y = -\dfrac{1}{x^2-4}$ y analiza su gráfica.

Asíntotas: Si un punto (x, y) se desplaza continuamente por una función $y = f(x)$ de tal forma que, por lo menos, una de sus coordenadas tienda al infinito, mientras que la distancia entre ese punto y una recta determinada tiende a cero, esta recta recibe el nombre de **ASÍNTOTA** de la función.
Las asíntotas se clasifican en: Horizontal, vertical y oblicua.

PRACTICAMOS

01. Dada la función $f(x) = \dfrac{4x+1}{x}$

a) Construye su gráfica
b) Indica sus asíntotas
c) Indica la intersección con el eje x

02. Dada la función $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$

a) Construye su gráfica
b) Indica sus asíntotas
c) Indica la intersección con el eje y

03. Dada la función $f(x) = \dfrac{x-4}{x-3}$

a) Construye su gráfica
b) Indica sus asíntotas
c) Indica las intersecciones con los ejes x e y

04. Dada la función $f(x) = \dfrac{ax-8}{b-x}$, que tiene asíntotas en x = 2 e y = -3

a) Indica el valor de b
b) Determina el valor de a
c) Construye la gráfica de la función

05. Dada las funciones $g(x) = \dfrac{12}{x} + 4$ y $h(x) = \dfrac{12}{x+3}$

a) En g determina el punto P de abscisa 2
b) En h determina el punto Q de ordenada 6
c) Determina la distancia entre P y Q
d) Interpreta los resultados en relación a la función $f(x) = \dfrac{12}{x}$

06. Dada la función $f(x) = \dfrac{a}{x-h} + k$

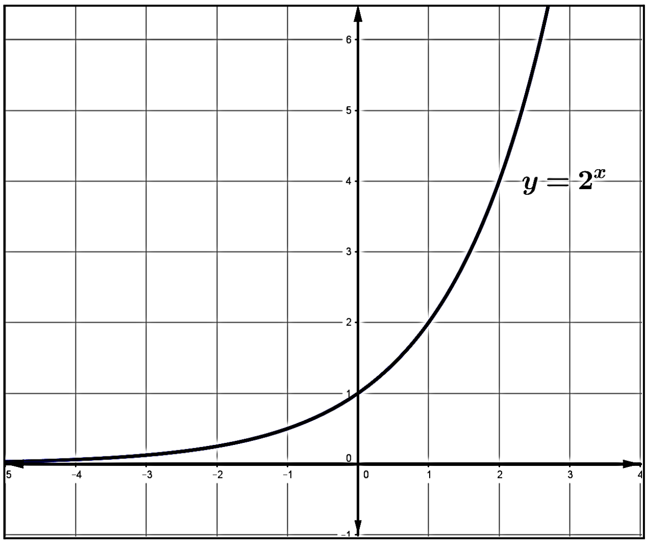
a) Indica el significado de h y k
b) Indica el significado geométrico de a
c) Construye la gráfica, considerando los casos $a > 0$ y $a < 0$

07. Dada la función $f(x) = \dfrac{2x^2 - 5x - 7}{x^2 - 3x - 4}$

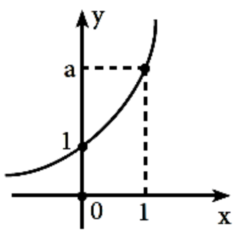
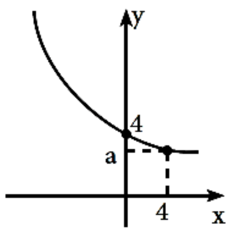
a) Si $f(x) = \dfrac{a}{x-h} + k$, calcula a, h y k
b) Indica las asíntotas de la gráfica
c) Construye la gráfica de f
d) Escribe el dominio y el rango de la función.

FUNCIÓN EXPONENCIAL

Sea $f(x) = a^x$; Donde: $a > 0;\ a \neq 1;\ x \in IR$



Gráfica de la función exponencial

$y = f(x) = a^x;\ a > 1$	$y = f(x) = a^x;\ 0 < a < 1$
	
◗ Domf = $\mathbb{R}$ ∧ Ranf = $\mathbb{R}^+$ ◗ La función es creciente ◗ No hay intersección con el eje de abscisas La intersección con el eje de ordenadas es (0; 1)	◗ Domf = $\mathbb{R}$ ∧ Ranf = $\mathbb{R}^+$ ◗ La función es decreciente ◗ No hay intersección con el eje de abscisas. La intersección con el eje de ordenadas es (0; 1)

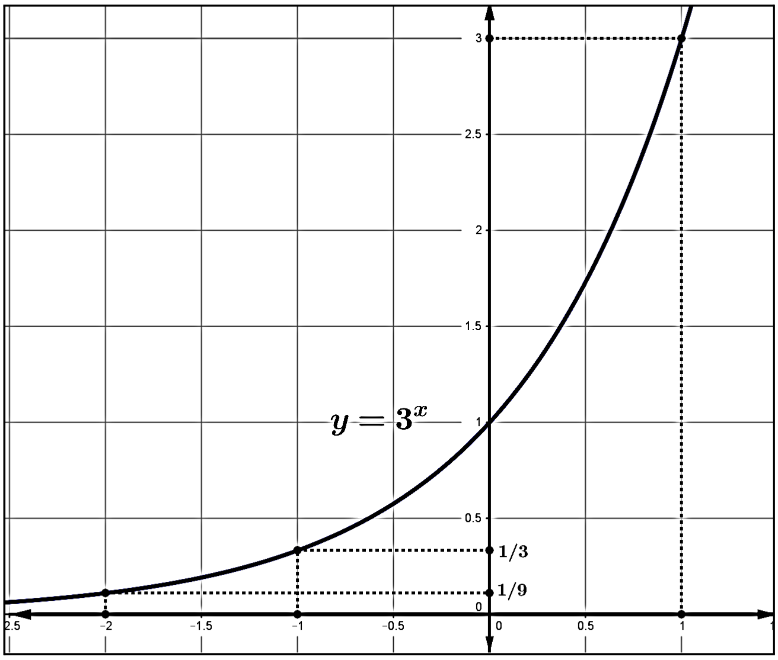
Ejemplo: Son funciones exponenciales:

a) $f(x) = 3^x$ b) $g(x) = (1,6)^x$ c) $h(x) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$

Gráfica: $f(x) = 3^x$

Tabulamos y trazamos la gráfica correspondiente

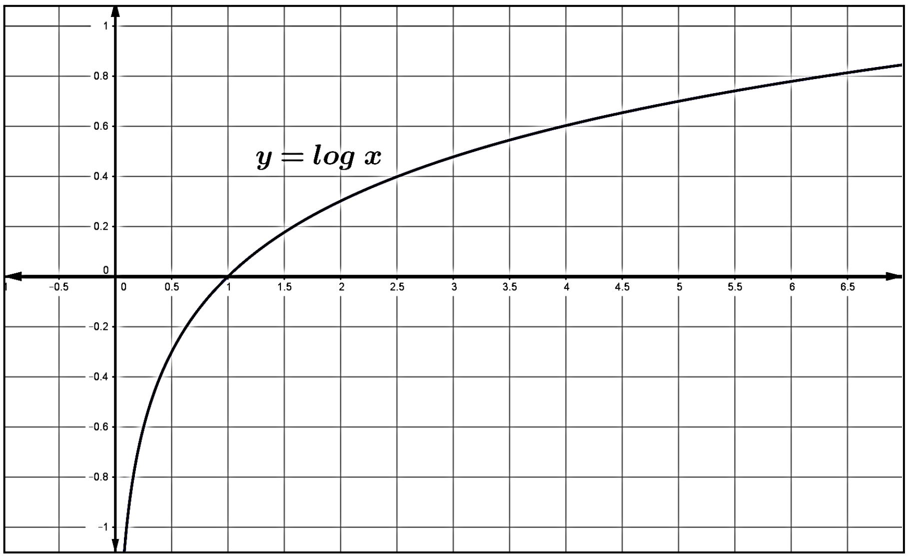
x	...	−2	−1	0	1	2	...
$f(x)=3^x$	...	1/9	1/3	1	3	9	...



Cuando «x» $\to \infty$, «y» crece con rapidez.
Cuando «x» $\to -\infty$, «y» se acerca a cero.

FUNCIÓN LOGARÍTMICA

Una función *logarítmica* es aquella que tiene la forma, o puede ser llevada a la forma: $f : x \mapsto \log_a x$ ó $f(x) = \log_a x,\ a > 0$



Es una función creciente si $a > 1$, además: $Dom\ f = R^{+};\quad Ran\ f = IR$

PRACTICAMOS

01. Gráfica cada una de las siguientes funciones:

a. $f(x) = 2^{x}$

b. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x}$

c. $y = \log_3(x-1)$

d. $f(x) = 7^{x-2} + 1$

02. Determina el dominio, el rango y la gráfica de cada una de las siguientes funciones:

a. $f(x) = 3^{x-1} - 2$

b. $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{x} + 1$

c. $g(x) = 2^{x+3} - 4$

d. $f(x) = 4^{-x} + 3$

e. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+6} + 5$

03. Determina el dominio, el rango y la gráfica de cada una de las siguientes funciones:

a. $f(x) = \log(x+4) + 2$

b. $f(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x) + 3$

c. $f(x) = 5 + \log_3(x-2)$

d. $f(x) = \log_{0,5}(x-3) + 1$

e. $f(x) = \ln_2(x-1) + 2$

04. Una sustancia radioactiva se desintegra siguiendo una función exponencial. La cantidad inicial es de 20 gramos; pero después de 200 años es de 5 gramos.

a) Calcular la constante de desintegración.

b) Calcular la cantidad que hubo después de 30 años.

05. Doña Julia tiene ahorrado 10 000 dólares, y tiene la intención de incrementar sus ahorros con el tiempo para ayudar a resolver el pago de la carrera de su hijo en la universidad. Para este propósito coloca su dinero en un banco que ofrece pagar cada año el 8% del total acumulado del año anterior.

a) ¿Cuánto tendrá doña Julia al finalizar el primer año, segundo y tercer año?
b) Hallar la función exponencial que expresa el ahorro de doña Julia.

06. La cantidad de miligramos de un medicamento que queda en el organismo de una persona luego de "t" horas de haber sido administrada está dada por $10.e^{-0,3t}$. Si la cantidad del medicamento no puede bajar de 2mg. ¿Cada cuánto tiempo en horas deberá tomar el medicamento?

07. Un cultivo de la bacteria Esherichia Coli crece en un medio de sales inorgánicas y glucosa.

La población inicial es de 10^6 bacterias por mm^3 crece exponencialmente con $k = 0,8$ y el tiempo se mide en horas.

a) Hallar una expresión matemática del comportamiento de esta población.

b) ¿En qué instante la población se triplica?

Nota: Resuelve los ejercicios de la página: 134 de la sección 5C (Todos) de Paul Urban

Referencias bibliográficas:

i. Urban P., Martin R., Haese R., Haese S., Haese M. & Humphries M. (Segunda edición). (2008). Mathematics HL. Australia: Haese & Harris publications.
ii. Zill, D. & Dewar, J. (2012). Álgebra, trigonometría y geometría analítica. (3ª ed). México: McGraw-Hill Educación.
iii. Mathemathics standard level (2012) IBO