Guía de trabajo N.° 03: Funciones trigonométricas

Nombre y apellido: ____

Grado: 4.° de secundaria   Sección: “______”   Fecha: ___ / 10 / 21

«Os aseguro que, si no volvéis a ser como niños, no entraréis en el reino de los cielos. Por tanto, el que se haga pequeño como este niño, ése es el más grande en el reino de los cielos. El que acoge a un niño como éste en mi nombre me acoge a mí.» (Lucas 18,1-5.10,12-14)

COMPETENCIA: Resuelve problemas de forma, movimiento y localización.

FORMA BÁSICA DE LA FUNCIÓN SENO:

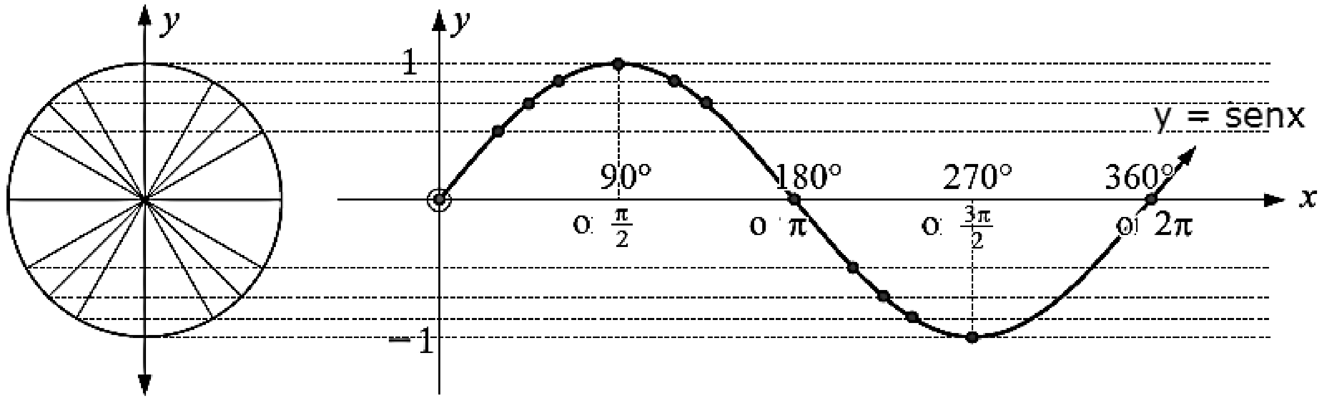
$$Seno = \{(x; y) \in R^2 \; / \; y = Sen\; x\}$$

Donde x es el valor del ángulo o argumento al que se le hace corresponder el valor de la razón $Sen\; x$.

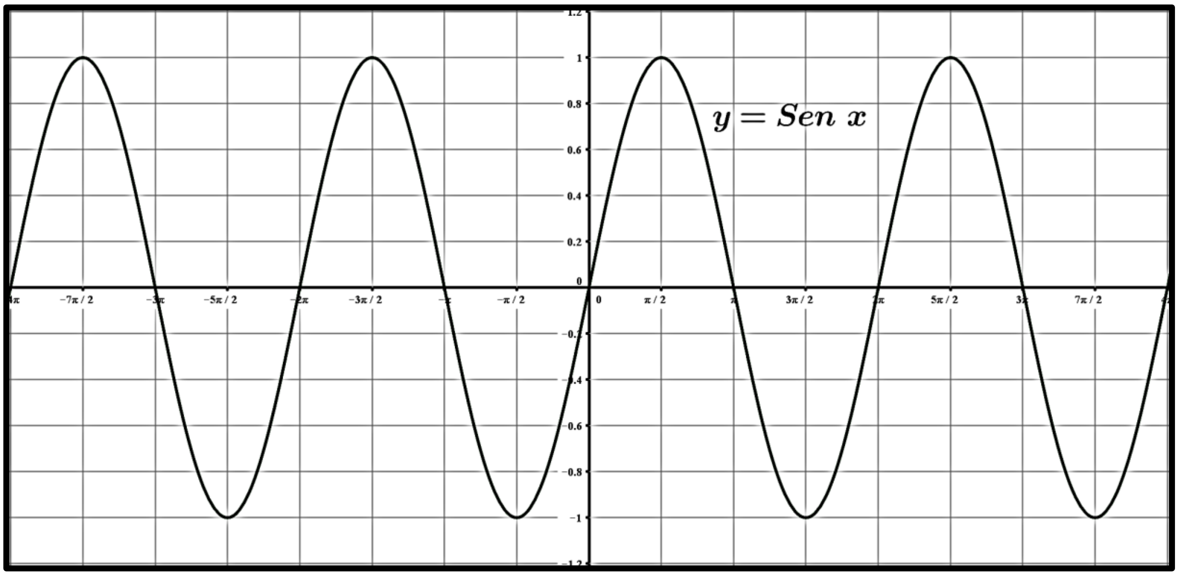
Algunos puntos de la función se dan en la siguiente tabla:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
$Sen\; x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

Si proyectamos los valores del $Sen\; x$ en la circunferencia trigonométrica al sistema de ejes coordenados de la derecha se obtiene la gráfica de $y = Sen\; x$.



La gráfica puede continuarse a la derecha e izquierda del intervalo $[0; 2\pi]$



Los valores en la gráfica se repiten cada 2π o $360°$, por ello se dice que tiene un periodo igual a $T = 2\pi$.

Es decir: $Sen\, x = Sen\,(x+2\pi) = Sen\,(x-2\pi) = Sen\,(x+2\pi k)$, siendo $k \in Z$.

El máximo valor de la función es 1 y el mínimo es -1, por ello se dice que su amplitud es A = 1.

El dominio de la función es $Dom \quad Seno \ = IR$ y el rango de la función es $Ran \quad Seno \ = \ -1, 1$.

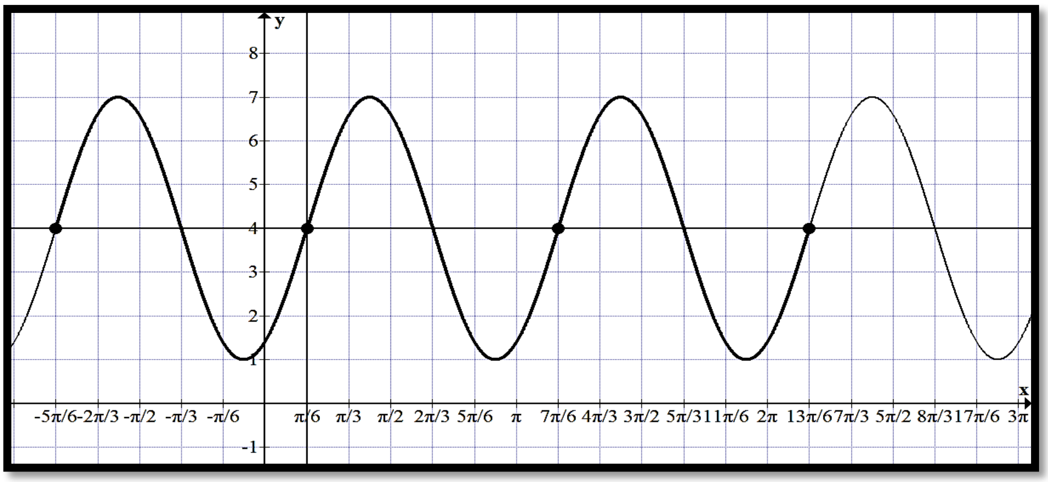
FORMA GENERAL DE LA FUNCIÓN SENO:

$$y = ASen\ B(x-C)+D$$

Donde:

- A es la amplitud: $A = \dfrac{y_{máx} - y_{mín}}{2}$
- B afecta al periodo: $T = \dfrac{2\pi}{B}$
- C indica el desplazamiento horizontal.
- D indica el desplazamiento vertical: $D = \dfrac{y_{máx} + y_{mín}}{2}$

Ejemplo: $y = 3Sen\left[2\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)\right] + 4$



FORMA BÁSICA DE LA FUNCIÓN COSENO:

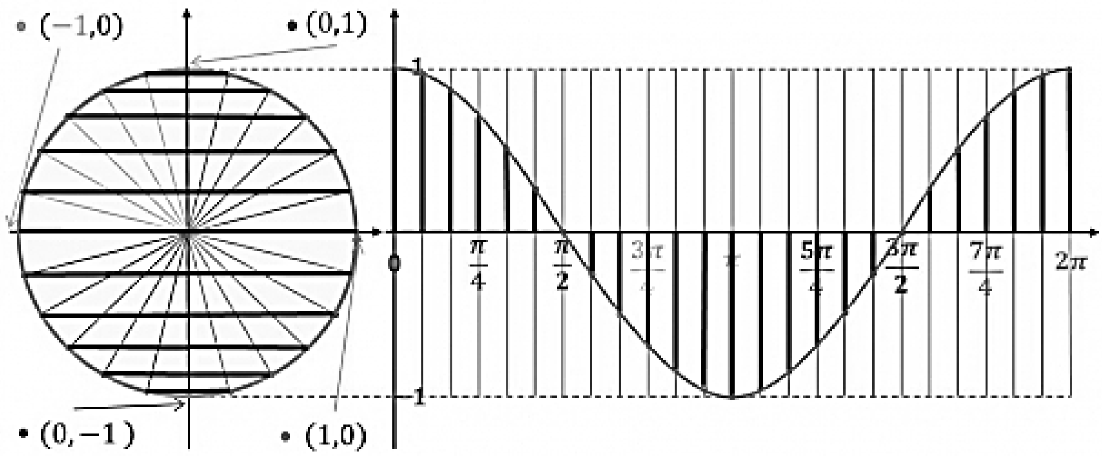
$$Coseno = \{(x;y) \in R^2 \,/\, y = Cos\ x\}$$

Donde x es el valor del ángulo o argumento al que se le hace corresponder el valor de la razón $Cos\ x$.

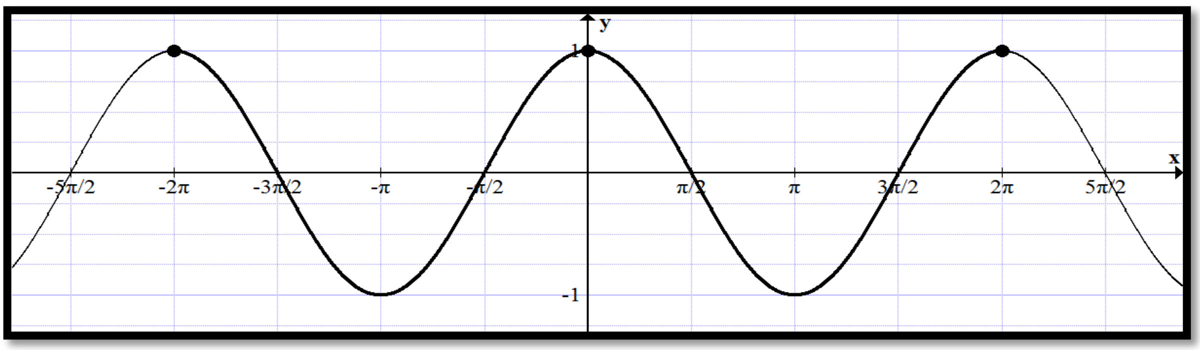
Algunos puntos de la función se dan en la siguiente tabla:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	135°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
$Cos\ x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	1

Si proyectamos los valores del $Cos\ x$ en la circunferencia trigonométrica al sistema de ejes coordenados de la derecha se obtiene la gráfica de $y = Cos\ x$.



La gráfica puede continuarse a la derecha e izquierda del intervalo $[0;2\pi]$



Los valores en la gráfica se repiten cada 2π o $360°$, por ello se dice que tiene un periodo igual a $T = 2\pi$.

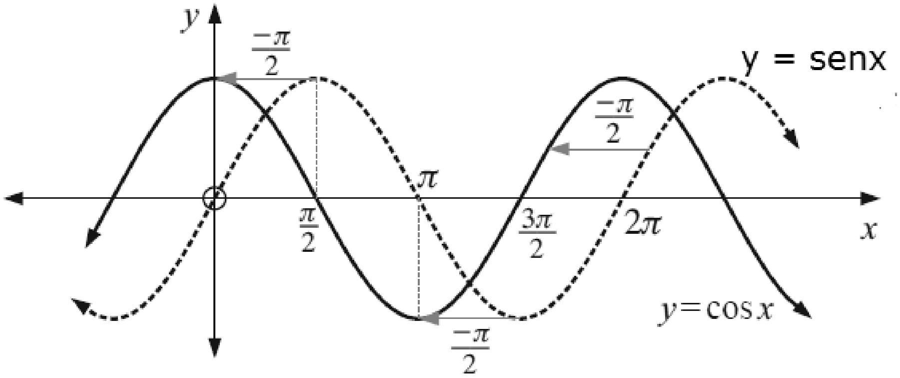
Es decir: $Cos\ x = Cos\ (x + 2\pi) = Cos\ (x - 2\pi) = Cos\ (x + 2\pi k)$, siendo k $\in$ Z.

El máximo valor de la función es 1 y el mínimo es -1, por ello se dice que su amplitud es A = 1.

El dominio de la función es $Dom\ \ Coseno\ = IR$ y el rango de la función es $Ran\ \ Coseno\ = \ -1, 1$.

RELACIÓN ENTRE LA FUNCIÓN SENO Y LA FUNCIÓN COSENO

Si se superponen las gráficas de las funciones seno y coseno se tiene:



Donde puede apreciarse que la gráfica del coseno se obtiene desplazando la gráfica de la función seno $\frac{\pi}{2}$ hacia la izquierda, es decir: $Cos\ x = Sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

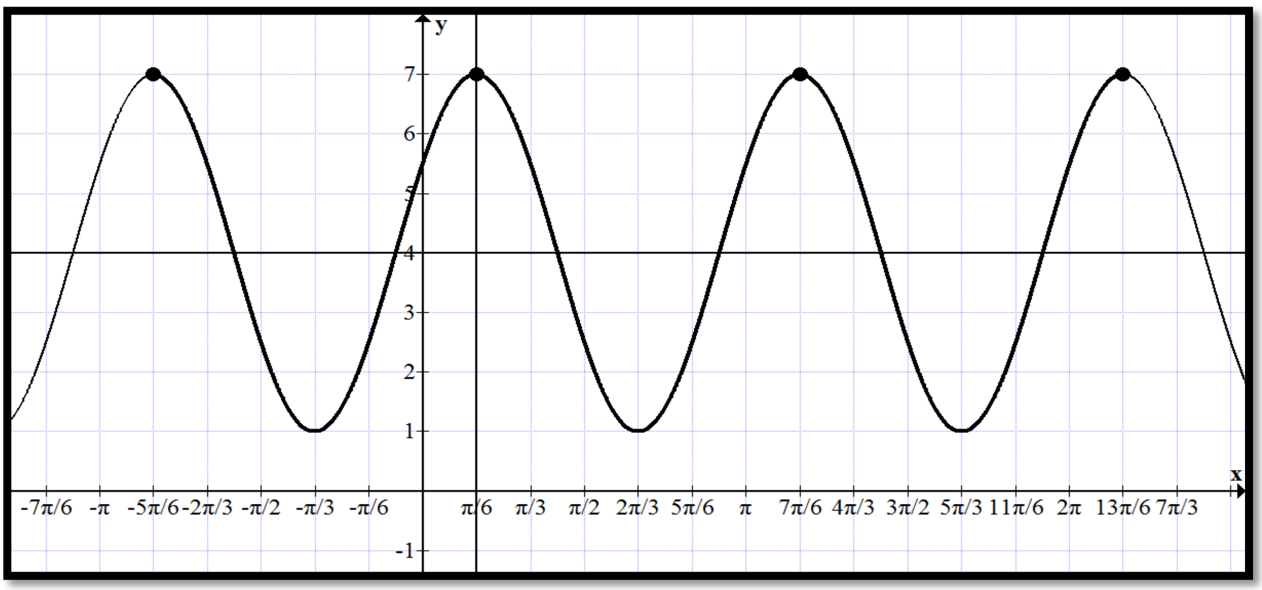
FORMA GENERAL DE LA FUNCIÓN COSENO:

$$y = A.CosB(x - C) + D$$

Donde:

- A es la amplitud: $A = \frac{y_{máx} - y_{mín}}{2}$
- B afecta al periodo: $T = \frac{2\pi}{B}$
- C indica el desplazamiento horizontal.
- D indica el desplazamiento vertical: $D = \frac{y_{máx} + y_{mín}}{2}$

Ejemplo: $y = 3\cos\left[2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right] + 4$



FORMA BÁSICA DE LA FUNCIÓN TANGENTE:

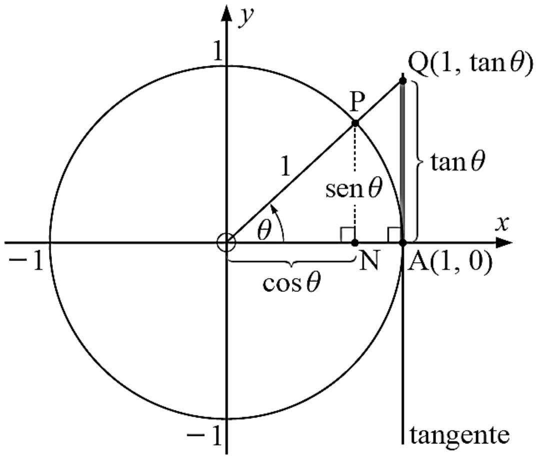
$$Tangente=\{(x;y)\in IR^2 \,/\, y=Tan\,x\}$$

Donde x es el valor del ángulo o argumento al que se le hace corresponder el valor de la razón $Tan\,x$.

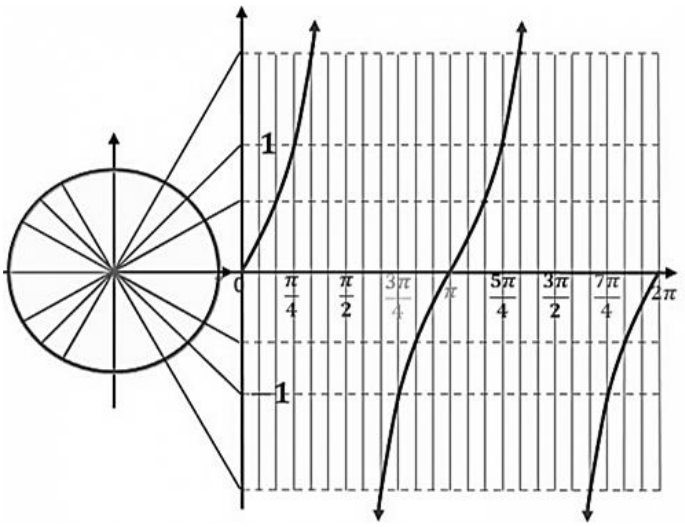
Algunos puntos de la función se dan en la siguiente tabla:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	180°	210°	225°	240°	270°	315°	360°
$Tan\,x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

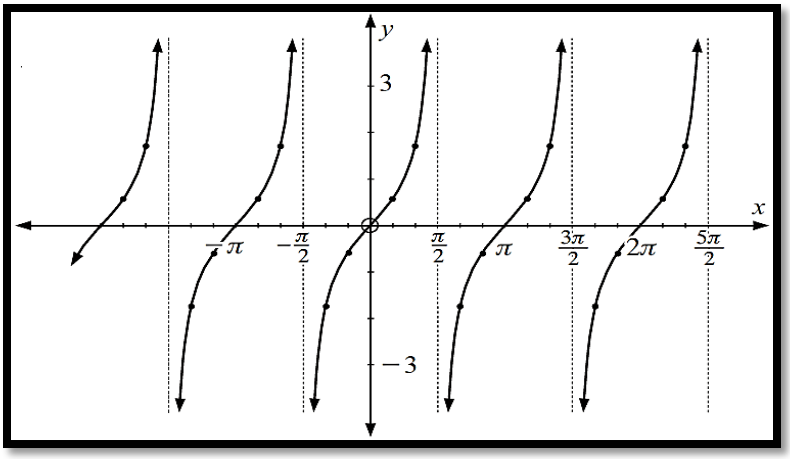
En la circunferencia trigonométrica el valor de la tangente está dado por la medida del segmento tangente a la circunferencia en el punto (1; 0) que se muestra en la gráfica:



Si proyectamos los valores de $Tan\,x$ en la circunferencia trigonométrica al sistema de ejes coordenados de la derecha se obtiene la gráfica de $y=Tan\,x$.



La gráfica puede continuarse a la derecha e izquierda del intervalo $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$



Los valores en la gráfica se repiten cada π o $180°$, por ello se dice que tiene un periodo igual a $T=\pi$.

Es decir: $Tan\,x = Tan\,(x+\pi) = Tan\,(x-\pi) = Tan\,(x+\pi k)$, siendo k $\in$ Z.

El dominio es $Dom\ \ Tangente\ = IR - \left\{ x \in IR / x = \frac{(2k-1)\pi}{2}, k \in Z \right\}$ y el rango es $Ran\ \ Tangente\ = IR$

FORMA GENERAL DE LA FUNCIÓN TANGENTE:

$$y = A\,Tan\,B(x-C)+D$$

Donde:

- A es el factor de estiramiento o compresión vertical.
- B afecta al periodo: $T=\frac{\pi}{B}$
- C indica el desplazamiento horizontal.
- D indica el desplazamiento vertical.

Ejemplo: $y = 3\,Tan\left[2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right]+4$

PRACTICAMOS

En los siguientes ejercicios, aplica correctamente las funciones seno y coseno según sea el caso.

1. Para cada conjunto de datos a continuación, dibuje un diagrama de dispersión y decida si los datos muestran un comportamiento aproximadamente periódico.

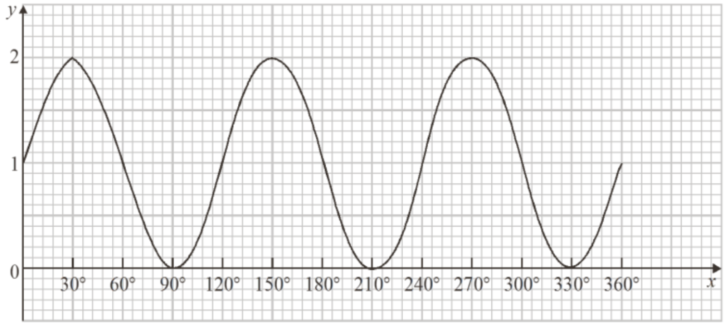
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y	0	1	1.4	1	0	−1	−1.4	−1	0	1	1.4	1	0

x	0	1	2	3	4
y	4	1	0	1	4

x	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5
y	0	1.9	3.5	4.5	4.7	4.3	3.4	2.4

x	0	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12
y	0	4.7	3.4	1.7	2.1	5.2	8.9	10.9	10.2	8.4	10.4

2. El diagrama muestra el gráfico de $y = Sen\,(a\,x) + b$

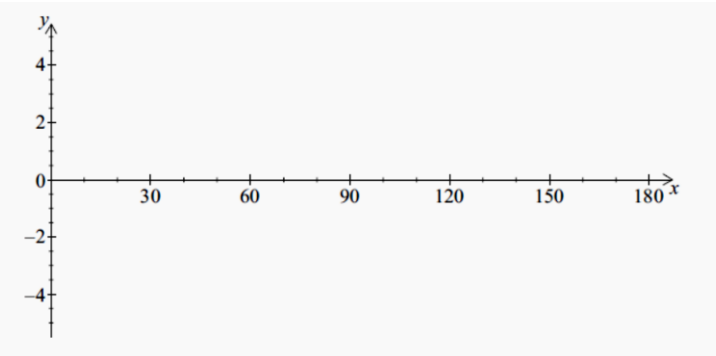


La utilización del gráfico, anote los valores siguientes

i. Calcular el valor de a.
ii. El período;
iii. La amplitud;
iv. b.

3. Considere la función $y = 3Cos(2x) + 1$.

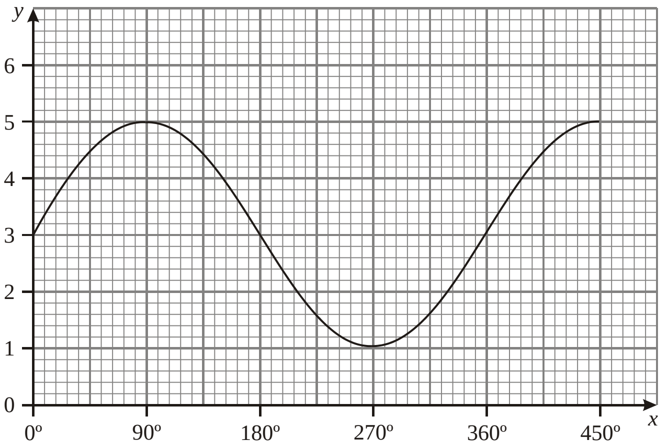
(a) Dibuje aproximadamente la gráfica de esta función para $0 \le x \le 180^{\circ}$.



(b) Escriba el período de la función.

(c) Utilizando la calculadora de pantalla gráfica, halle el **menor valor** de x, $0 \le x \le 180^{\circ}$, para el cual se cumple $3Cos(2x) + 1 = 2$.

4. El siguiente gráfico muestra parte de la función $y = a\,Sen\,(b\,x) + 3$.



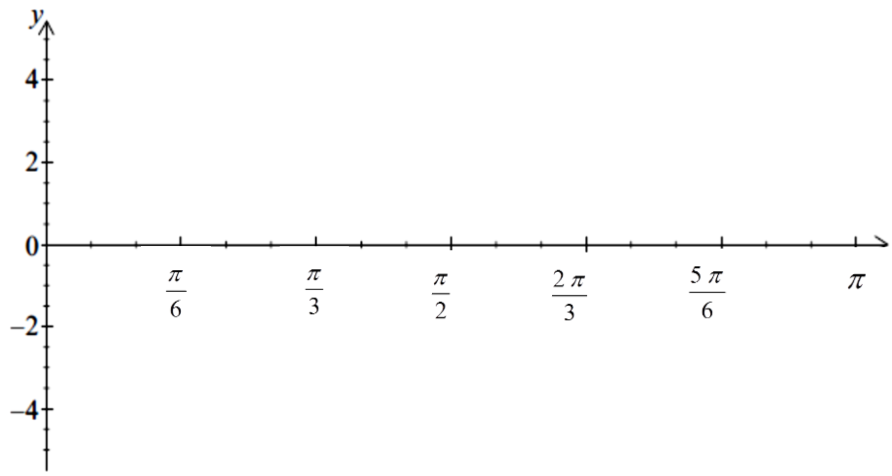
(a) Escriba el dominio en radianes de la parte de la función que se muestra en el gráfico.

(b) Escriba el rango de la parte de la función que se muestra en el gráfico.

(c) Calcule el valor de a y b (amplitud y periodo respectivamente)

5. Considere la función $y = 3\sin 3x + 1$, donde $0 \leq x \leq \pi$

(a) Dibuje aproximadamente la gráfica de esta función para su dominio.

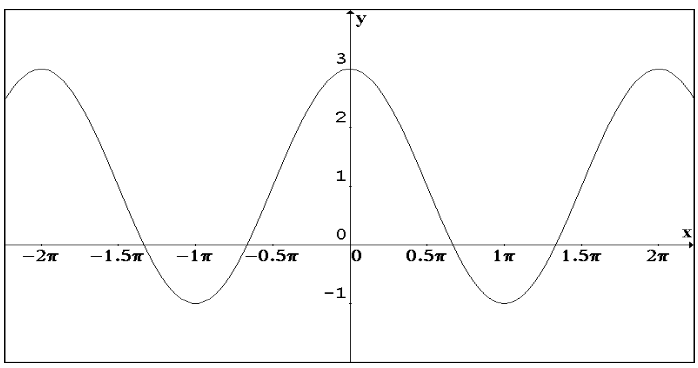


(b) Anote el período de la función.

(c) Encuentre el valor mínimo de la función.

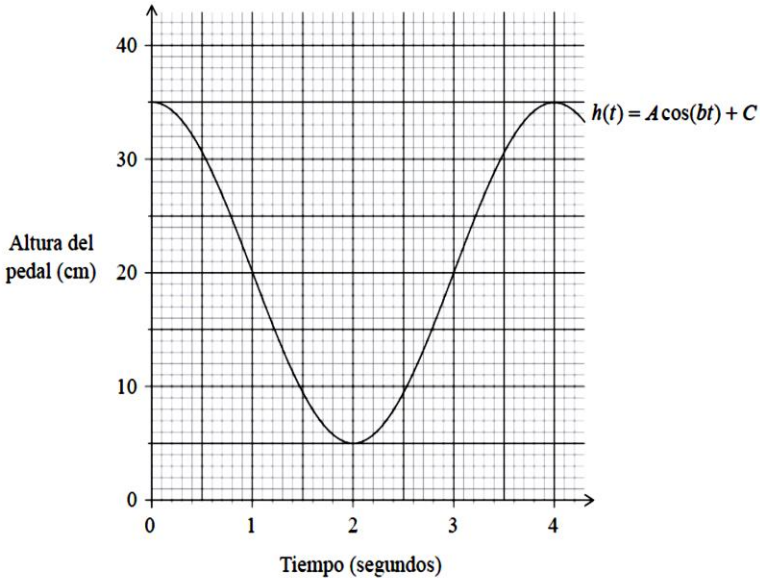
(d) Resuelva $f(x) = -1$.

6. Parte de la gráfica: $y = p + q\,Cos(x)$ aparece a continuación. La gráfica pasa por los puntos $(0, 3)$ y $(\pi, -1)$.Hallar " p y q "



7. La altura, $h(t)$, en centímetros, a la que se encuentra el pedal de una bicicleta respecto al suelo en el instante t segundos viene dada por una función coseno de la forma: $h(t) = ACos(Bt) + C$.

A continuación se muestra la gráfica de esta función, para $0 \le t \le 4.3$



(a) Escriba la altura máxima del pedal respecto al suelo.

(b) Escriba la altura mínima del pedal respecto al suelo.

(c) Halle la amplitud de la función.

(d) A partir de lo anterior o de cualquier otro modo, halle el valor de "A" y el de "C".

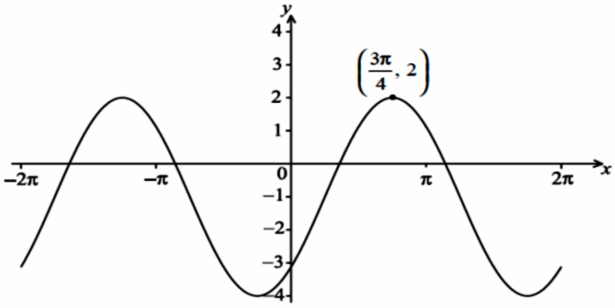
(e) (i) Escriba cuál es el período de la función $h(t)$.

(ii) A partir de lo anterior, halle el valor de "B".

(f) Utilice su calculadora de pantalla gráfica para determinar el primer valor de "t" para el cual la altura del pedal respecto al suelo es igual a $30\,cm$.

(g) Calcule cuántas vueltas da el pedal en un minuto.

8. En la gráfica que se muestra a continuación se representa $y = a.Sin(x+b)+c$, donde $a; b; c$ son constantes.



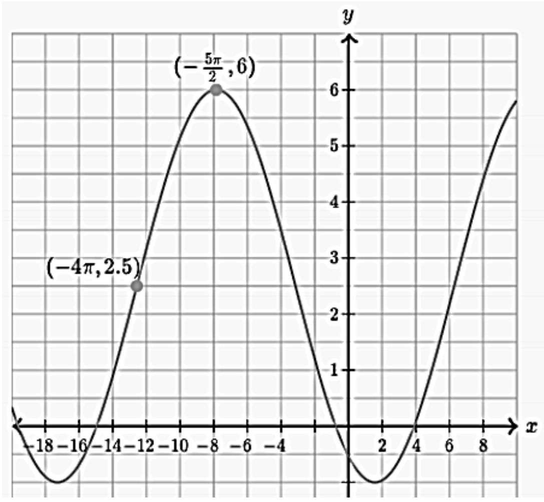
Halle los valores de $a; b\ y\ c$.

9. Sea $f(x) = Sen(2x+1)$, $0 \le x \le \pi$

a) Bosqueje la gráfica de la función $y = f(x)$.

b) Encuentre la coordenada en x del máximo y mínimo punto de $f(x)$, dé la respuesta con un decimal.

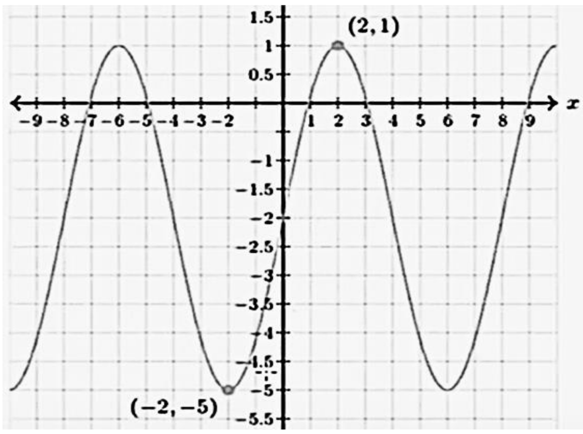
10. h es una función trigonométrica de la forma $h(x) = a.Sen[b(x+c)]+d$. A continuación, se muestra la gráfica de $h(x)$. La gráfica de la función intersecta a su línea media en $(-4\pi ; 2.5)$ y tiene un máximo en $\left(-\frac{5\pi}{2} ; 2,6\right)$



a) Determina la amplitud.
b) Determina el periodo.

c) Determina el primer punto más bajo de la gráfica, cuando $x > 0$.
d) Encuentra una fórmula para $h(x)$.
e) Describe las transformaciones a partir de $y = Sen\,x$ para obtener $h(x)$.

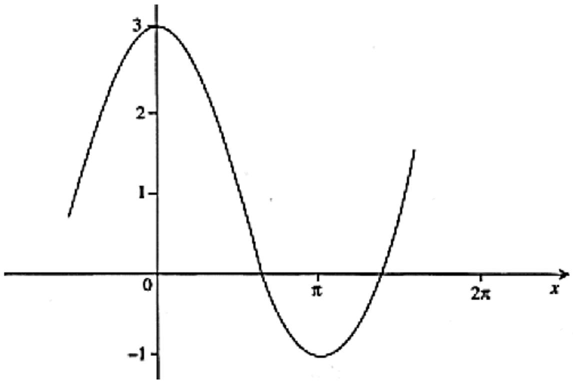
11. Para la gráfica dada:



a) Determina su ecuación como una función seno.
b) Determina su ecuación como una función coseno.

12. Sea $f(x) = Sen\,2x$ y $g(x) = Sen(0.5x)$.
a) Escriba
   i. El valor mínimo de la función f .
   ii. El período de la función g .
b) Considere la ecuación $f(x) = g(x)$. Encuentre el número de soluciones de la ecuación para $0 \le x \le \frac{3\pi}{2}$

13. Parte del gráfico de la función $y = p + q.Cosx$ es el que se muestra a continuación. El gráfico pasa por los puntos $(0;3)$ y $(\pi;-1)$.



a) Encuentre los valores de p y q.

b) Expresar la función como $y = a + b\,Sen(x + c) + d$

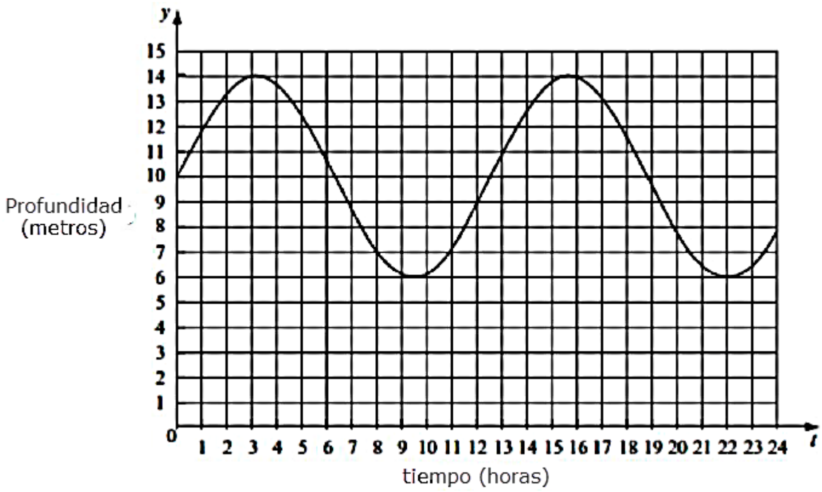
14. La profundidad y metros del agua en un puerto está dada por la ecuación: $y = 10 + 4Sen\left(\frac{t}{2}\right)$, donde t es el número de horas después de la medianoche.

a) Calcule la profundidad del agua.

   i) Cuando $t = 2$.

   ii) A las 21 horas.

El gráfico muestra la profundidad y del agua en el tiempo t, durante un día (24 horas).



b)

   i. Escriba el valor de la máxima profundidad del agua en el puerto.

   ii. Calcule el valor de t cuando el agua está por primera vez con una máxima profundidad durante el día.

Las puertas del puerto están cerradas cuando la profundidad del agua es menor a 7 metros. Una alarma suena cuando las puertas se abren o se cierran.

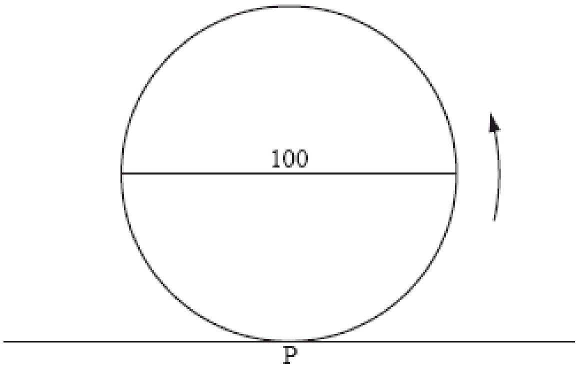
c)

   i. ¿Cuántas veces sonará la alarma en el día?

   ii. Encuentre el valor de "t" cuando la alarma suena por primera vez en el día.

   iii. Utilice el gráfico para encontrar la duración del tiempo en el que las puertas permanecen cerradas. Dé la respuesta en horas.

15. El siguiente diagrama representa una rueda grande de Ferris, con un diámetro de 100 metros.



Sea P un punto en la rueda. La rueda empieza con P en el punto más bajo, a nivel del suelo. La rueda gira a una velocidad constante, en sentido antihorario. Una revolución toma 20 minutos.

(a) Escriba la altura de P sobre el nivel del suelo después de

(i) 10 minutos;

(ii) 15 minutos.

Sea $h(t)$ metros la altura de P sobre el nivel del suelo después de t minutos. Algunos valores de $h(t)$ se dan en la tabla a continuación.

st	$h(t)$
0	0.0
1	2.4
2	9.5
3	20.6
4	34.5
5	50.0

(b) (i) Muestre que $h(8) = 90,5$

(ii) Halle $h(21)$

(c) Dibuje la grafica de h, para $0 \leq t \leq 40$

(d) Dado que h puede ser expresado en la forma $h(t) = a\,Cos(bt) + c$, encuentre a, b y c.

16. Un resorte se suspende del techo. Se tira hacia abajo y se suelta, y luego oscila hacia arriba y hacia abajo. Su longitud, l centímetros, es modelada por la función $l(t) = 33 + 5Cos\left[(720t)°\right]$, donde t es el tiempo en segundos después de la liberación.

(a) Encuentre la longitud del resorte después de 1 segundo.

(b) Encuentre la longitud mínima del resorte.

(c) Encuentre la primera vez en que la longitud es de 33 cm.

(d) ¿Cuál es el período de la moción?

TAREA: MODELOS PARA MAREAS

Descripción: Se cree que la Bahía de Fundy en Nueva Escocia (Canadá) tiene las mayores variaciones medias entre mareas del mundo. En la siguientes tabla se presentan los datos de las mareas correspondientes al 27 de diciembre de 2003 según la hora de la zona horaria AST (hora del Atlántico). Las mediciones se realizaron en la isla de Grindstone.

Hora (AST)	00.00	01.00	02.00	03.00	04.00	05.00	06.0	07.00	08.00	09.00	10.00	11.00
Altura (m)	7.5	10.2	11.8	12.0	10.9	8.9	6.3	3.6	1.6	0.9	1.8	4.0

Hora (AST)	12.00	13.00	14.00	15.00	16.00	17.00	18.00	19.00	20.00	21.00	22.00	23.00
Altura (m)	6.9	9.7	11.6	12.3	11.6	9.9	7.3	4.5	2.1	0.7	0.8	2.4

En esta tarea deberá desarrollar una función modelo para la relación entre la hora del día y la altura de la marea. Tenga en cuenta lo que se espera de una tarea de utilización de modelos a la hora de realizar el trabajo.

Nota: Resolver los ejercicios de la sección 12B.2 (pag. 293), 12C (pag. 295), y 12D (pag. 297)

Referencias bibliográficas:

i. Alva, R. (2005), Trigonometría Teoría y Práctica (Tercera edición), Lima –Perú, Editorial San Marcos.

ii. Salvador, T. Trigonometría Teoría y Práctica (Primera edición), Lima –Perú, Editorial Ingeniería.

iii. Cirrito, F. (2007), Mathematics, (Tercera edición), Australia, Shannon Books.