COLEGIO
SAN AGUSTĪN
EST. 1966

ASESORÍA DE MATEMÁTICA Y FÍSICA M.A.E. NM

Guía de trabajo N.° 06: APLICACIONES DE LA DERIVADA

Nombre y Apellido: ____

Grado: 5.° de secundaria   Sección: "______"   Fecha: __ / 06 / 22

Jesús dijo: «Os aseguro que quien deje casa, o hermanos o hermanas, o madre o padre, o hijos o tierras, por mí y por el Evangelio, recibirá ahora, en este tiempo, cien veces más. (Mc 10, 28)

COMPETENCIA: Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio.

Desempeño:

- Evalúa si la expresión numérica (modelo) planteada reprodujo las condiciones de la situación, y la modifica y ajusta para solucionar problemas similares y sus variantes.
- Expresa con diversas representaciones y lenguaje matemático su comprensión sobre aplicaciones de la derivada y su interpretación geométrica.
- Combina y adapta estrategias heurísticas, recursos, métodos gráficos o procedimientos más óptimos para hallar la solución a problemas con derivadas, usando identidades algebraicas y propiedades.

1. Halle las coordenadas y la naturaleza de los puntos estacionarios para las siguientes funciones

$a)\ f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+8, -6\le x\le 6$

$b)\ f(x)=3+9x-3x^2-x^3$

$c)\ f(x)=x-2\sqrt{x}, x\ge 0$

$d)\ y=x\sqrt{x}-x, x\ge 0$

2. Una función f está definida por $f: x\mapsto e^x Sen\, x$, donde $0\le x\le 2\pi$

a) Halle i. $f'(x)$ ii. $f''(x)$

b) Halle los valores de x para los cuales

i. $f'(x)=0$ ii. $f''(x)=0$

c) Utilizando las partes (a) y (b), halle los puntos de inflexión y estacionarios para f

d) Luego dibuje el gráfico de f

3. Una función f está definida por $f: x\mapsto xe^{-x}$, donde $x>0$

a) Halle i. $f'(x)$ ii. $f''(x)$

b) Halle los valores de x para los cuales

i. $f'(x)=0$ ii. $f''(x)=0$

c) Utilizando las partes (a)(b), halle los puntos de inflexión y estacionarios para f

d) Luego dibuje el gráfico de f

4. Si $g(x)=\frac{\ln x}{x^2}$, para $x>0$.

(a) Use la regla del cociente para probar que: $g'(x)=\frac{1-2\ln x}{x^3}$.

(b) La gráfica de g tiene un punto máximo en A Halle la coordenada x.

5. Si $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$.

(a) Escribe la ecuación de la asíntota horizontal de la gráfica de f.

(b) Halle $f'(x)$.

(c) Pruebe que: $f''(x)=\frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$.

Sea A el punto de la gráfica de f donde la pendiente de la tangente es un máximo. Halle la abscisa de A.

6. La función f está definida por $f(x)=[\ln\ x-2\ ]^2$. Halle las coordenadas del punto de inflexión de f.

PROBLEMAS APLICADOS A MÁXIMOS Y MÍNIMOS

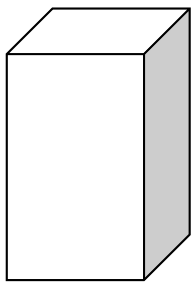
1. **(a)** Halle el mayor valor de la función
$$y = 2 + x - 3x^2$$
(b) Halle el mayor valor de la función $y = xe^{-x}$

2. **(a)** Halle el menor valor de la función
$$y = 8 - 3x + 2x^2$$
(b) Halle el menor valor de la función
$$y = x - \log_e x$$
(c) Halle el menor valor de la función
$$y = 4 - \frac{2}{1 + x^2}$$

3. Se desea hacer una caja rectangular cerrada de sección cuadrada de tal manera que su superficie total sea de 400 cm2. Sea x la longitud de lados del extremo cuadrado e y la altura de la caja:

(a) Obtenga una expresión para y en términos de x, señalando cualquier restricción sobre x.

(b) Determine mayor volumen posible para la caja.



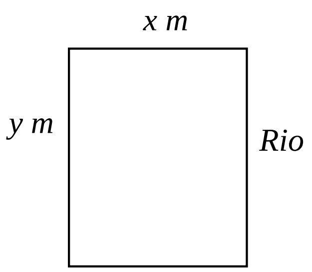
4. Un agricultor quiere cercar un potrero rectangular usando el límite con un río como uno de los lados. Dispone de un total de 100 metros de malla de alambre.

Si x e y son el largo y el ancho en metro del potrero rectangular, y A es su superficie en metros cuadrados:

(a) Obtenga una expresión para y en términos de x.

(b) Halle una expresión para A en términos de x, señalando cualquier restricción sobre x

(c) Determine las dimensiones que maximizan la superficie del potrero rectangular.



5. Un tambor se está llenando con agua de tal manera que el volumen de agua, V mL, después de t segundos está dado por:
$$V(t) = \frac{2}{3}\left(20t^2 - \frac{1}{6}t^3\right), 0 \leq t \leq 120$$

6. EL costo total, C en dólares, para la producción de x unidades de un producto está dado por la relación lineal $C = 600 + 20x, 0 \leq x \leq 100$, mientras que el ingreso total, R dólares, está dado por $R = x(100 - x), 0 \leq x \leq 100$

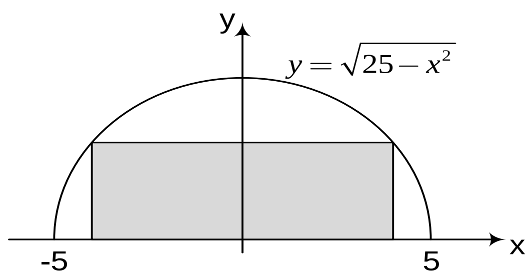
(a) Haga gráficos de la función del costo y de la función del ingreso en el mismo conjunto de coordenadas.

(b) Determine los puntos de equilibrio en su gráfico.

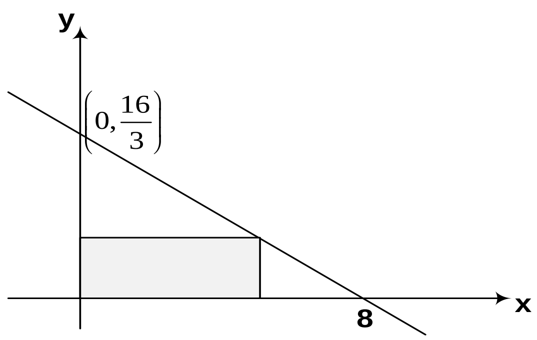
(c) ¿Para qué valores de x se van a obtener rentabilidades positivas?

(d) Halle una expresión que dé la ganancia obtenida al producir x unidades del producto, y luego determine la ganancia máxima.

7. Un rectángulo está inscrito en el espacio limitado por el eje x y un semicírculo cuya ecuación es $y = \sqrt{25 - x^2}, -5 \leq x \leq 5$. Halle las dimensiones del rectángulo que tiene la mayor superficie posible.



8. Un rectángulo está limitado por el eje x positivo, el eje y positivo y la línea cuya ecuación es $y = \frac{2}{3}(8 - x)$. Halle las dimensiones del rectángulo que tienen la mayor superficie posible.



9. Se tiene que imprimir un certificado en una página cuya superficie es de 340 cm^2. Los márgenes superior e inferior deben ser de 2cm, y los márgenes derecho e izquierdo deben ser de 1 cm.

(a) Si el ancho del papel es de x cm, demuestre que la superficie, A cm^2, que debe ir impresa está dada por

$$A = 348 - \frac{680}{x} - 4x$$

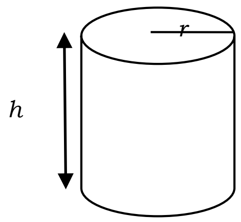
(b) Luego determine la superficie máxima de impresión.

10. Un cilindro recto de radio r cm y altura h cm debe tener un volumen fijo de 30 cm^3.

(a) Demuestre que la superficie A cm^2 de dicho cilindro está dada por

$$A = 2\pi r\left(r + \frac{30}{\pi r^2}\right)$$

(b) Determine el valor de r que dará la menor superficie posible.

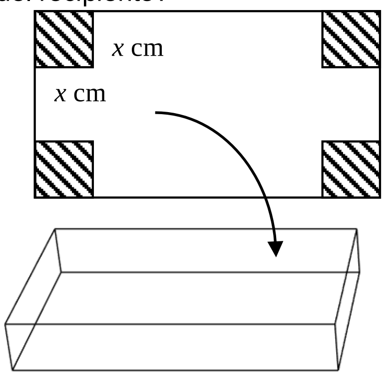


11. Se hace un recipiente rectangular recortando cuadrados de las esquinas de una plancha de metal de 25 cm por 40 cm y doblando los extremos de la plancha para formar el recipiente.

(a) Si los cuadrados recortados tienen x cm por lado, demuestre que el volumen, V cm^3, del recipiente está dado por:

$$V = x(25-2x)(40-2x), 0 \le x \le \frac{25}{2}$$

(b) ¿De qué tamaño deben recortarse los cuadrados con el fin de maximizar el volumen del recipiente?



12. Un cono circular recto de radio r contiene una esfera de radio 12cm.

(a) Si la altura del cono es h cm, exprese h en términos de r.

(b) Si el volumen del cono es V cm^3, halle una expresión para V en términos de r

(c) Halle las dimensiones del cono que tiene el menor volumen posible.

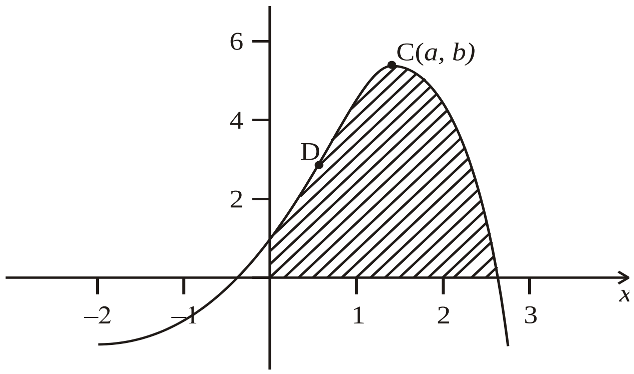
13. Para un cilindro cerrado de radio r y altura h, halle la razón $r:h$ que producirá la menor superficie para un volumen fijo.

14. Considere la función $f(x) = Cos\ x + Sen\ x$.

(a) (i) Pruebe que $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 0$.

(ii) Halle en términos de π, el menor valor positivo de x que satisface $f(x) = 0$.

(b) El diagrama muestra la gráfica de $y = e^{x}\ Cos\ x + Sen\ x$, $-2 \le x \le 3$. La gráfica tiene un punto máximo en $C(a, b)$ y un punto de inflexión D.



(c) Halle: $\dfrac{dx}{dy}$.

(d) Halle el valor de *a* y *b*.

(e) Pruebe que en D, $y = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}$.

(f) Halle el área de la región sombreada.

15. Si $g(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$.

(a) Halle dos valores de x en que la tangente a la gráfica de g es horizontal.

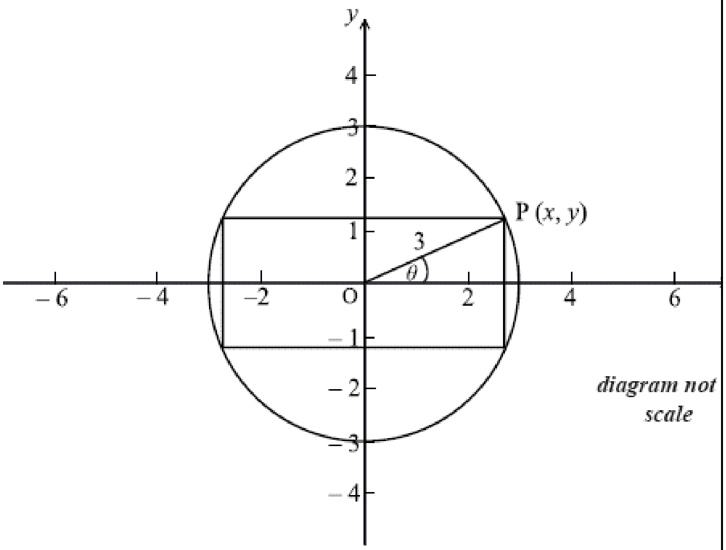
(b) Para cada uno de estos valores, determine si se trata de un máximo o mínimo.

16. Considere $f(x) = x^2 + \dfrac{p}{x}$, $x \neq 0$, donde *p* es una constante.

(a) Halle $f'(x)$.

(b) Hay un valor mínimo de $f(x)$ donde $x = -2$. Halle el valor de p.

17. Un rectángulo se inscribe en un círculo de radio 3 cm y centro O, se muestra a continuación.



El punto $P(x, y)$ está en un vértice del rectángulo y también pertenece al círculo. El ángulo entre OP y el eje x es θ radianes, donde $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$.

(a) Escribe una expresión en términos de θ para

(i) x;

(ii) y.

Si el área del rectángulo es A.

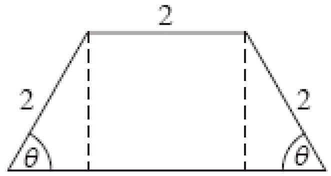
(b) Pruebe que $A = 18Sen\ 2\theta$.

(c) (i) Halle: $\dfrac{dA}{d\theta}$.

(ii) Por lo tanto, halle el valor de θ que maximiza el área del rectángulo.

(iii) Use la segunda derivada para justificar que este valor de θ tiene un máximo.

18. El diagrama que aparece a continuación muestra un plano para construir una ventana en forma de trapecio.



Tres de los lados de la ventana tienen una longitud de 2 m de longitud. El ángulo que forman los lados inclinados de la ventana con la base es igual a θ, donde $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$.

(a) Compruebe que el área de la ventana viene dada por:

$$f(\theta) = 4Sen\ \theta + 2Sen\ 2\theta .$$

(b) Zoe quiere una ventana que tenga una superficie de $5m^2$. Halle los dos posibles θ.

(c) John quiere dos ventanas que tengan la misma área *A* pero distinto valor de θ. Halle todos los posibles valores de *A*.

REFERENCIAS:

- Cirrito F. (2002), *Métodos Matemáticos* (Primera edición), Australia: IBID Pess
- Urban P. - Owen J. - Martin D. – Haese R. - Haese S. – Bruce M. (2008), *Mathemathics for the international student* (tercera edición), Australia , Haese y Harris publications.
- ***Mathemathics standard level (2012) IBO.***