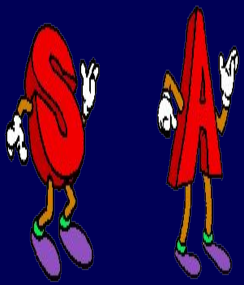
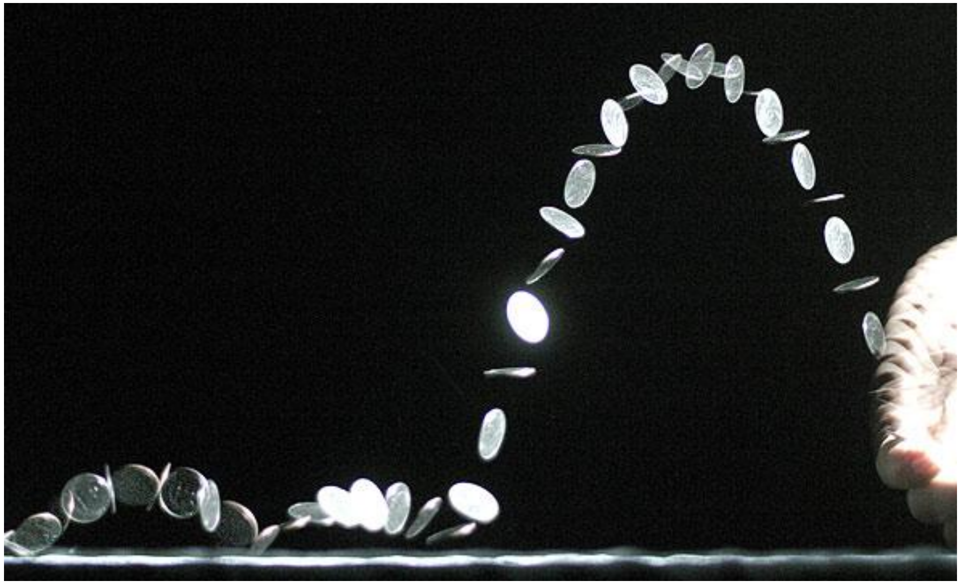
DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDADES



COLEGIO
SAN AGUSTIN
EST. 1966

Variable aleatoria discreta



El mismo Doob explicaba el origen del término **variable aleatoria** (***random variable***): "Cuando estaba escribiendo mi libro [*Stochastic Processes*] tuve una discusión con William Feller. Él aseguraba que todo el mundo decía "variable aleatoria" (*random variable*), mientras que yo sostenía que se usaba "variable al azar" (*chance variable*).
Obviamente, debíamos usar el mismo nombre en nuestros libros, así que optamos por tomar la decisión mediante un procedimiento aleatorio: lanzamos una moneda y el ganó".

Variable aleatoria

Una **variable aleatoria** *X* es una **función** que asocia a cada suceso del espacio muestral *E* de un experimento aleatorio un valor numérico real:

$$X : E \to \Re$$

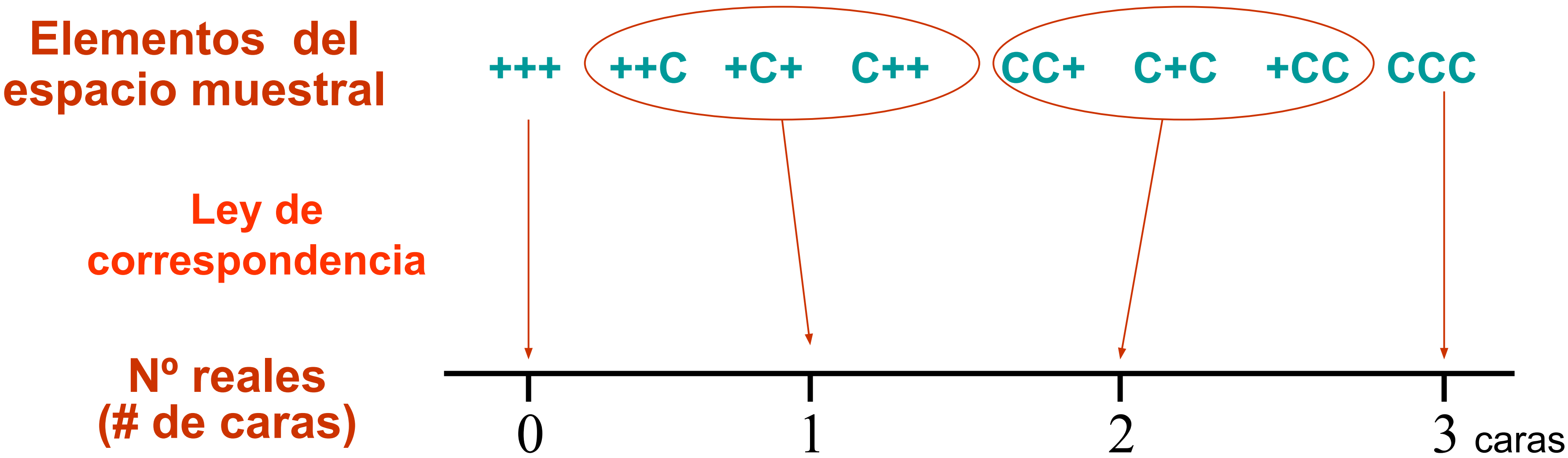
$$w \to X(w)$$

Llamar variable a una función resulta algo confuso, por ello hay que insistir en que *es una función*.

La variable aleatoria puede ser discreta o continua. Veremos en este capítulo el caso discreto.

Ejemplo de **variable aleatoria discreta**:

Número de caras al lanzar 3 monedas.



Establecer una variable aleatoria para un experimento aleatorio no es más que una manera de asignar de "manera natural" números a los eventos.

$$X : E \to \Re$$

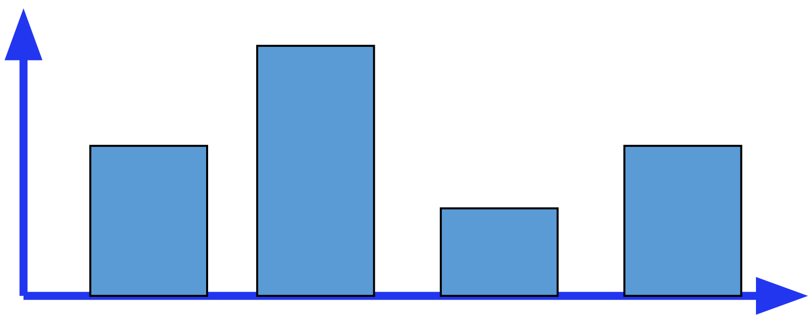
$$w \to X(w)$$

DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDADES

- En el cuadro de distribución de frecuencias, ¿qué significa la frecuencia relativa?
- Representan la probabilidad.
- Al graficar un histograma con las frecuencias relativas tenemos una gráfica de distribución de probabilidades.

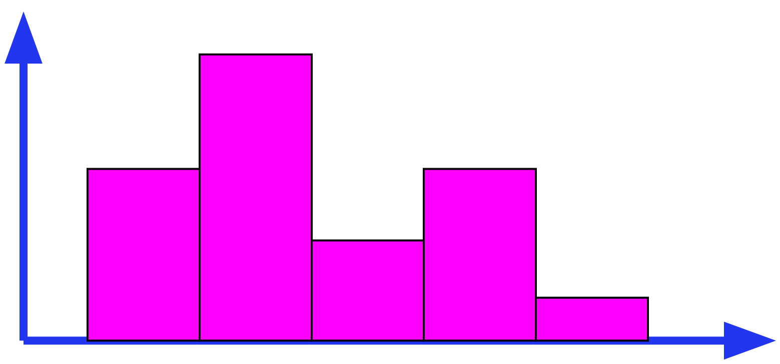
DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDADES

- Tendríamos gráficas como las siguientes:



Para datos discretos.

La suma de las áreas es 1.

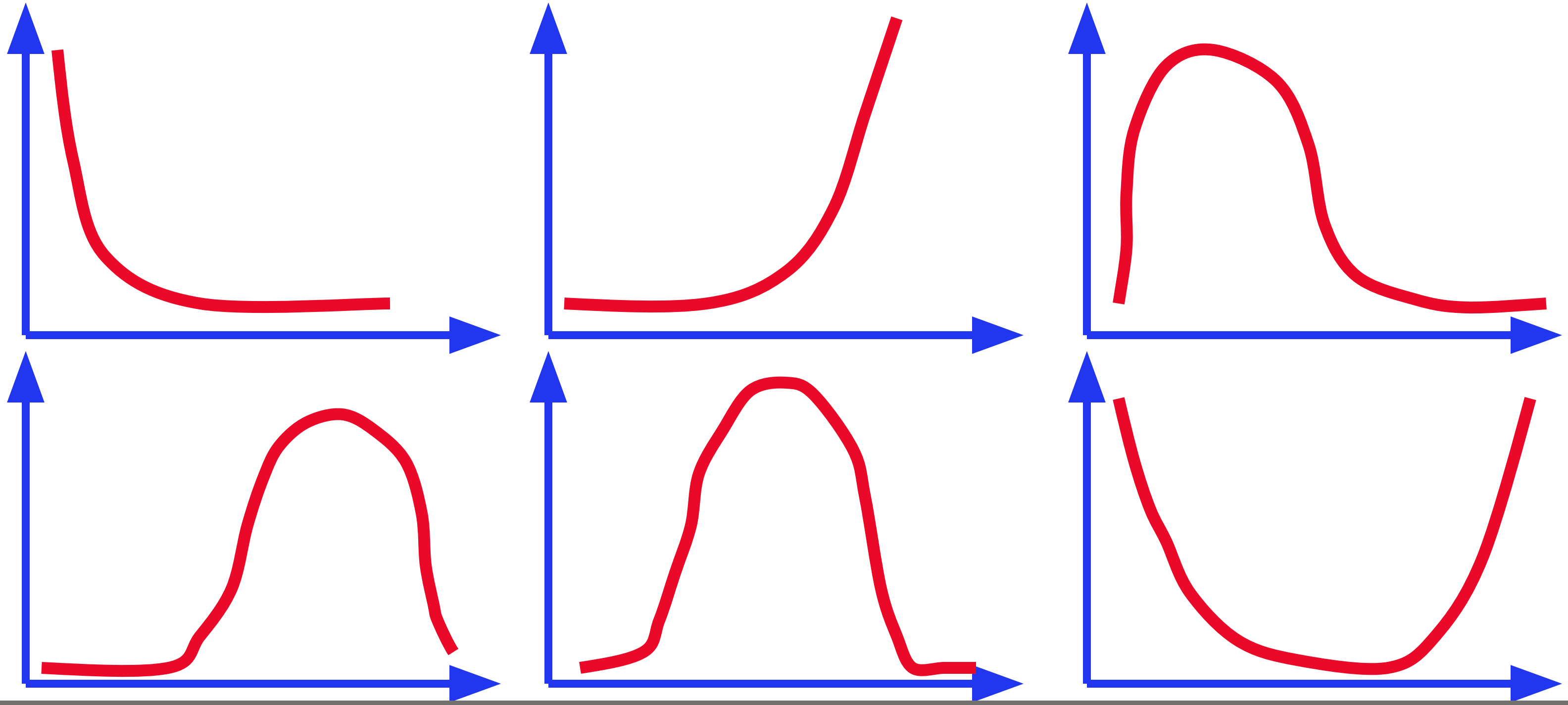


Para datos continuos agrupados.

La suma de las áreas es 1.

DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS

- Para datos contínuos no agrupados.
- En cada caso el área del gráfico es 1.



Función de probabilidad o distribución

Una vez definida una variable aleatoria *X*, podemos definir una **función de probabilidad** o **distribución** de probabilidad asociada a *X*, de la siguiente forma:

$$p : \Re \to [0,1]$$

$$x \to p(x) = P(X = x)$$

La función de probabilidad debe cumplir:

$$(i)\, 0 \leq p(x) \leq 1 \quad \forall x \in \Re$$

$$(ii) \sum_{x} p(x) = 1$$

(Suma sobre todos los posibles valores que puede tomar la variable aleatoria).

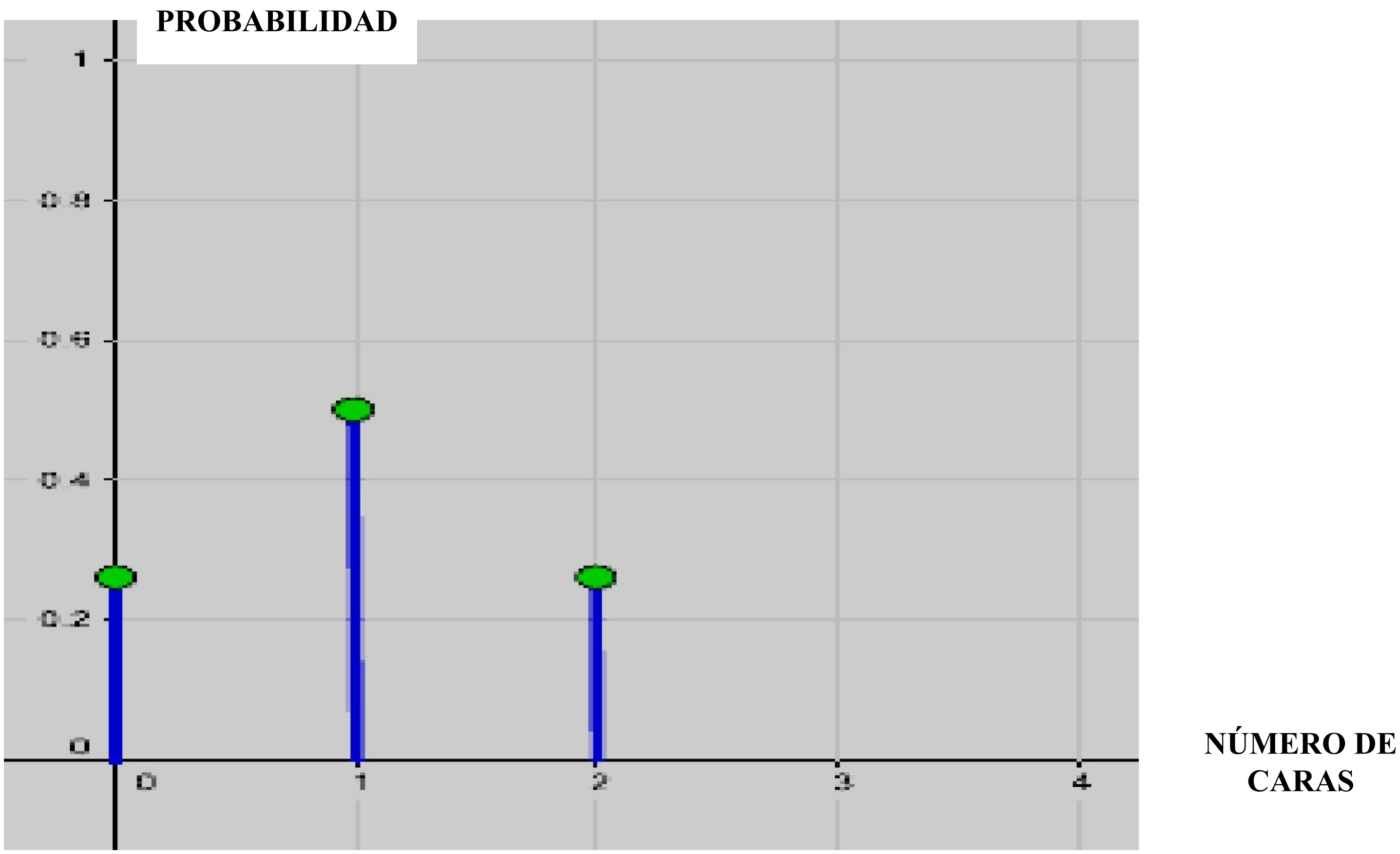
Función de probabilidad discreta

Valores	Probabilidad
0	1/4 = 0.25
1	2/4 = 0.50
2	1/4 = 0.25

$$X : E \to \Re$$
$$w \to X(w)$$

$$p : \Re \to [0,1]$$
$$x \to p(x) = P(X = x)$$

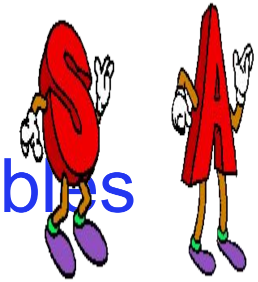
GRÁFICO DE ESPARRAGOS



DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES

- Se lanzan un par de dados y anotamos el valor máximo entre los números obtenidos.
- Determina el espacio muestral.
- Determina los posibles valores de la variable mencionada.
- Hallar la función de probabilidad y su representación
- Calcula la probabilidad para cada uno de estos valores.

DEFINICIONES



- VARIABLE ALEATORIA: agrupa a los posibles resultados obtenidos en un determinado experimento aleatorio.
- DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES: es un cuadro que muestra los valores de la variable aleatoria y sus respectivas probabilidades de ocurrencia.
- VALOR ESPERADO O MEDIA: es el valor que se esperaría obtener en un experimento aleatorio.

$$E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i . p(x_i)$$

Humildad, caridad y modestia, no pueden estar separadas la una de la otra. **Don Bosco**

Uno de los conceptos más importantes para la toma de decisiones en un juego de azar es la llamada *esperanza matemática.*

Ej 1: Se lanzan dos monedas al aire y si el resultado son dos caras se ganan 4€, si son dos cruces se gana 1€ y si sale una cara y una cruz se pierden 3€.¿Cuánto esperamos ganar o perder?

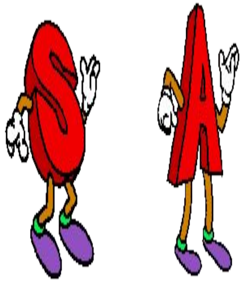
Ej 2: En un juego de apuestas que consiste en el lanzamiento de un dado, la banca paga 6 fichas si sale un 6, 4 fichas si sale un número impar y nada en los otros casos. ¿Qué debería apostarse en cada jugada para que el juego fuera equilibrado?

EJERCICIOS

- Se tiene una moneda cargada de modo que la probabilidad que salga cara es el doble que salga sello. Determinar la distribución de probabilidades y el valor esperado del número de cara obtenidas al lanzar dos veces esa moneda.
- Se selecciona al azar una muestra de tres artículos de una caja que contiene 12, de los cuales 3 son defectuosos. Hallar el valor esperado de los artículos defectuosos.

JUEGOS DE DINERO

- Un jugador lanza un dado, si sale un número primo, gana ese número de dólares, si no pierde esa cantidad de dólares. Determine el valor esperado de dinero obtenido.
- Para casos de juegos con dinero:
- Si E<0 es un JUEGO DESFAVORABLE.
- Si E>0 es un JUEGO FAVORABLE.
- Si E=0 es un JUEGO JUSTO.



EJERCICIOS

- Una distribución de probabilidades se ajusta al modelo:
- $P(X=x)=k(4+x)$ para $x \in \{1, 2, 3\}$
- Halla el valor de K y determina la distribución de probabilidades y calcula el valor esperado.

EJERCICIO

- Una variable aleatoria discreta X tiene una distribución de probabilidades dada por $P(X=x) = k(x+1)$, para $x = 0, 1, 2, 3, 4$.
- Muestra que $k = 1/15$.
- Hallar $E(x)$.

DISTRIBUCIÓN DE VARIABLE DISCRETA

- Se tiene una moneda cargada de modo que la probabilidad de obtener cara es de 0,8. Se lanza la moneda 3 veces. Calcular la probabilidad de obtener:
- a) tres caras
- b) dos caras
- c) una cara
- ¿Qué pasará si se lanzan 6 veces

El secreto de la sabiduría, el poder y el conocimiento es la humildad. **Ernest Hemingway**

Ejercicio

- Una compañía de seguros estima que sus asegurados tienen accidentes según los montos siguientes: \$0, \$1000, \$5000 y \$10000, con probabilidades de ocurrencia de 0,8, 0,1, 0,08 y 0,02 respectivamente. Sabiendo que la compañía espera ganar \$100 y cobra un deducible de \$500. ¿Cuánto debe cobrar a sus asegurados?

CASO

- Se tiene una moneda en la que la probabilidad de obtener sello es 1/3. Desarrolla el cuadro de distribución de frecuencias del número de caras obtenidas al lanzar:
- a) tres veces la moneda.
- b) cuatro veces la moneda

Juegos

A un juego de azar podemos asignarle una **variable aleatoria *X***, cuyos valores son **las ganancias correspondientes a los posibles resultados**. La esperanza matemática de la variable aleatoria *X* representa el **beneficio medio o ganancia media** que se obtiene en cada jugada cuando se juega un número elevado de veces.

Si la esperanza matemática es 0 se dice que el **juego** es **justo.** Si es mayor que 0 se dice que el **juego** es **favorable** al jugador. Si es menor que 0 se dice que perjudica al jugador y **no** es **favorable**.

Sea el juego que consiste en sacar una bola de una urna que contiene 7 bolas rojas y 3 bolas negras. Ganamos 50 euros si la bola extraída es roja y pagamos 150 euros en el caso de que sea negra. ¿Qué podemos esperar si jugamos muchas veces?

Espacio muestral $E = \{R, N\}$. Consideramos las ganancias como positivas y las pérdidas negativas:

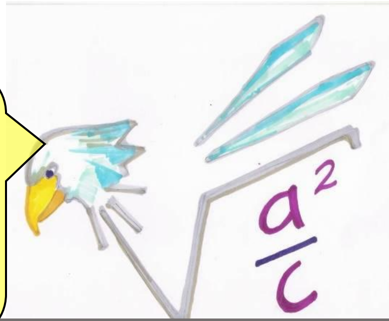
Variable aleatoria X		Función de probabilidad
R	$\longrightarrow$ 50	$\longrightarrow$ 0,7
N	$\longrightarrow$ -150	$\longrightarrow$ 0,3

$$\mu = 50 \cdot 0{,}7 + (-150) \cdot 0{,}3 = \underbrace{-10}_{\text{Ganancia media}}$$

DISTRIBUCION BINOMIAL

- En un experimento aleatorio, en donde sólo hay dos posibles resultados (éxito o fracaso), en la que se realizan varias repeticiones y estas son independientes, se dice que se DISTRIBUYEN BINOMIALMENTE.
- Esta distribución tiene dos parámetros: n número de repeticiones del experimento y p probabilidad de éxito.

$$x \propto B(n,p) \quad \rightarrow \quad P(X=x) = \binom{n}{x} p^{x}(1-p)^{n-x}$$



El secreto de la sabiduría, el poder y el conocimiento es la humildad. **Ernest Hemingway**

DISTRIBUCION BINOMIAL

- ¿Por qué se le denomina distribución binomial?
- La media o esperado de la distribución se calcula:

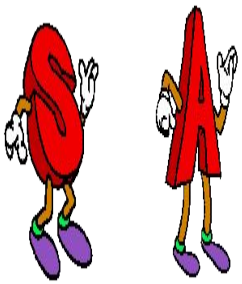
$$E = np$$

- La desviación estandar se calcula:

$$\sigma = n.p.q$$

- La varianza se calcula:

$$V = \sigma^2 = (n.p.q)^2$$



El secreto de la sabiduría, el poder y el conocimiento es la humildad. **Ernest Hemingway**

EJERCICIOS

- Una máquina fabrica una determinada pieza y se sabe que produce un 7 por 1000 de piezas defectuosas. Hallar la probabilidad de que al examinar 50 piezas sólo haya una defectuosa.
- Se lanza un dado 7 veces, llamamos un éxito si sale un 5 o un 6. Determinar la probabilidad que un 5 o un 6 salga exactamente 3 veces.

EJERCICIOS

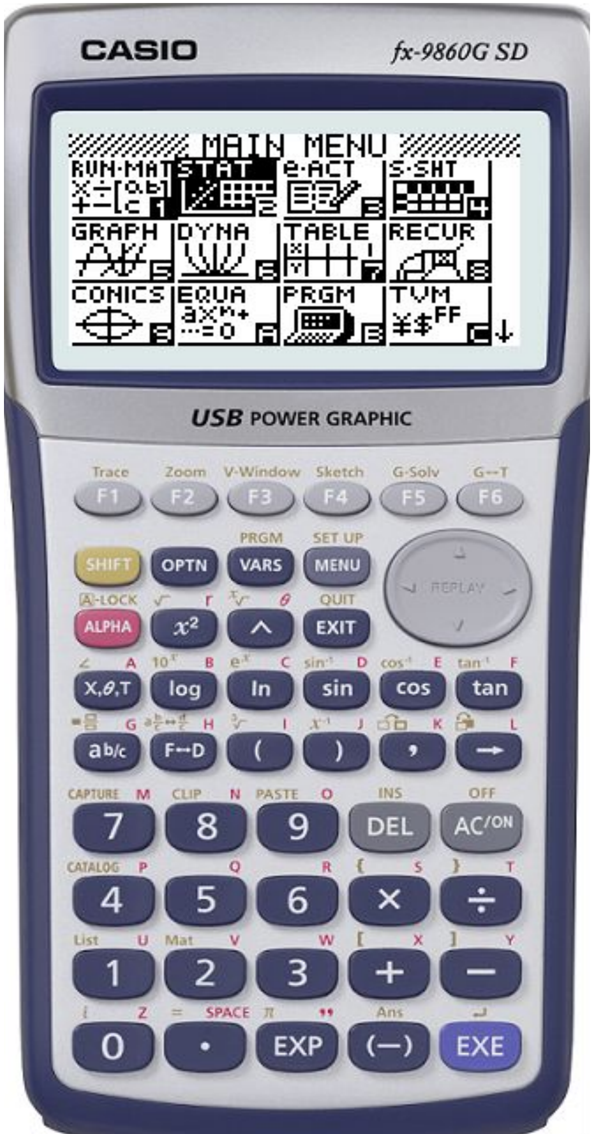
- La probabilidad de éxito de una determinada vacuna es 0,72. Calcula la probabilidad que una vez administrada a 15 pacientes:
- a) Ninguno sufra la enfermedad
- b) Todos sufran la enfermedad
- c) Dos de ellos contraigan la enfermedad
- d) Por lo menos uno contraiga la enfermedad.

EJERCICIOS

- La probabilidad de que el carburador de un coche salga de la fábrica defectuoso es del 4 por 100. Hallar:
- a) El número de carburadores defectuosos esperados en un lote de 1000
- b) La probabilidad que se obtengan 4 defectuosos en un lote de 450 carburadores.

EJERCICIOS

- Se tienen 100 artículos de los cuales 5 son defectuosos. Si se sacan 4 articulos con reposición. Hallar la distribución de frecuencias del número de artículos defectuosos



EN LA CALCULADORA

MENU 2: STAT

F5: DIST

F5:BINM

F1:Bpd para un valor de x

F2: Bcd para el acumulado hasta x

Data: F2 Var (valor fijo), list

X: nro. de éxitos

Numtrial: n, nro de intentos

P: probabilidad de éxito

El secreto de la sabiduría, el poder y el conocimiento es la humildad. **Ernest Hemingway**

CASO

- Si se tiene una variable que se distribuye binomialmente con probabilidad de éxito de 2/3 y se realizan 5 veces el experimento. Construye una tabla de distribución de probabilidades.
- Desarrolla, mediante el binomio de Newton, la siguiente expresión: $(2/3 + 1/3)^5$
- Conclusiones

DISTRIBUCIÓN NORMAL ESTÁNDAR

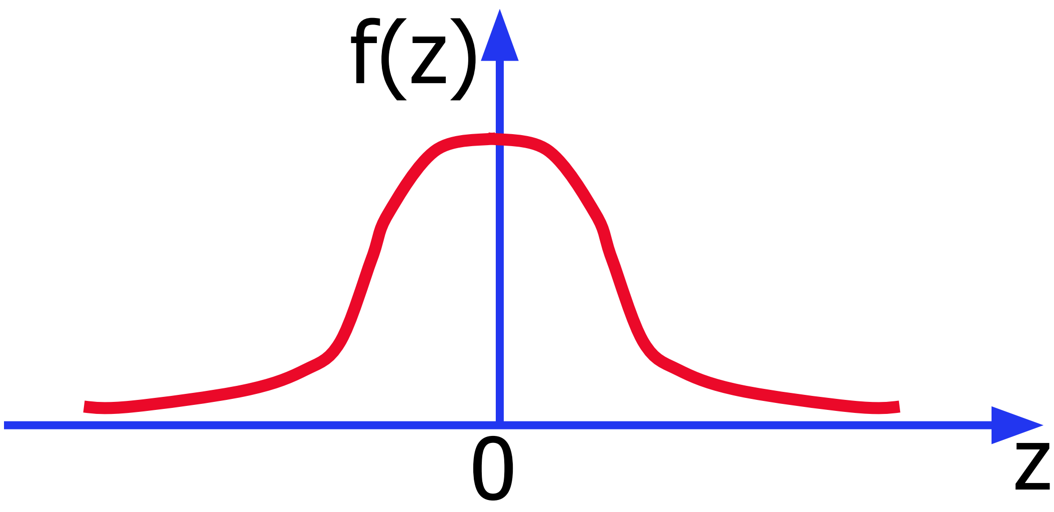
- Es una distribución de frecuencias simétrica cuya gráfica sigue la forma de la campana de Gauss, teniendo a la media, mediana y moda iguales a 0 y la desviación estándar 1.
- La gráfica tiene por ecuación:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{\left(-\frac{z^2}{2}\right)}$$

La humildad es una virtud tan poco apreciada en nuestro mundo precisamente porque facilita la vida. **Orhan Pamuk**

DISTRIBUCIÓN NORMAL ESTÁNDAR

- Tendremos la gráfica:



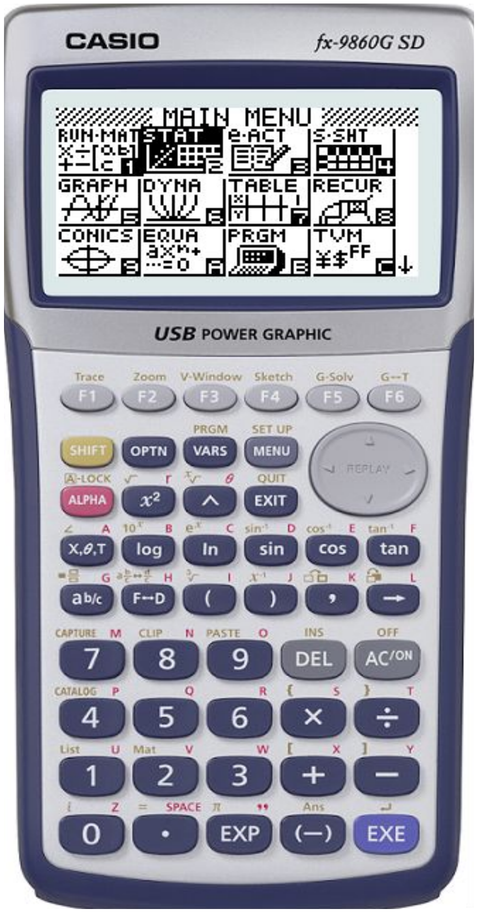
El área bajo la curva es 1

De manera que:

El 68,2% de los datos se encuentran en: [μ-s, μ +s]

El 95,4% de los datos se encuentran en: [μ -2s, μ +2s]

La humildad es una virtud tan poco apreciada en nuestro mundo precisamente porque facilita la vida. **Orhan Pamuk**



EN LA CALCULADORA

EL ÍCONO 2 DEL MENÚ

F5: DIST

F1: NORM

F2: NCD y llenar los datos pedidos (halla la prob.)

F3: INVN y llenar los datos (hallar el valor de z)

EXE

La humildad es una virtud tan poco apreciada en nuestro mundo precisamente porque facilita la vida. **Orhan Pamuk**

EJERCICIOS

- Hallar para la variable normal estándar:
  - $P(z<0{,}85)$
  - $P(z<1{,}01)$
  - $P(z>1)$
  - $P(z>2{,}04)$

La humildad es una virtud tan poco apreciada en nuestro mundo precisamente porque facilita la vida. **Orhan Pamuk**

EJERCICIOS

- Hallar para la variable normal estándar:
  - $P(z>-3{,}03)$
  - $P(z>-1{,}09)$
  - $P(z<-0{,}02)$
  - $P(z<-1{,}09)$

La humildad es una virtud tan poco apreciada en nuestro mundo precisamente porque facilita la vida. **Orhan Pamuk**

EJERCICIOS

- Hallar para la variable normal estándar:
  - $P(1,7<z<2,5)$
  - $P(0,31<z<2,86)$
  - $P(-0,96<z<3,32)$
  - $P(-2<z<3)$

La humildad es una virtud tan poco apreciada en nuestro mundo precisamente porque facilita la vida. **Orhan Pamuk**

EJERCICIOS

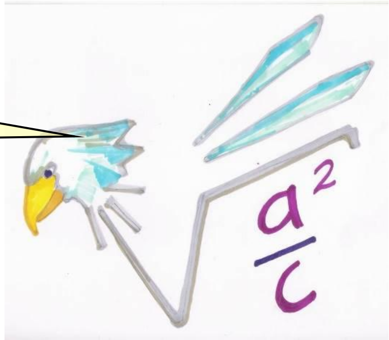
- Hallar el valor de a en cada caso:
- $P(z<a)=0,7389$
- $P(z<a)=0,\ 1491$
- $P(z>a)=0,3228$
- $P(z>a)=0,8577$
- $P(0,45<z<a)=0,2353$
- $P(-0,85<z<a)=0,5671$

La humildad es una virtud tan poco apreciada en nuestro mundo precisamente porque facilita la vida. **Orhan Pamuk**

DISTRIBUCIÓN NORMAL

- Para una variable normal x con media μ y desviación σ, la estandarizamos con la fórmula:

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$



- De modo que z tiene media 0 y desviación 1.

La humildad es una virtud tan poco apreciada en nuestro mundo precisamente porque facilita la vida. **Orhan Pamuk**

EJERCICIO

- Si la variable x se distribuye normalmente con media 23 y desviación 5. Calcular:
- $P(20<x<24)$
- $P(x<25)$
- $P(19<x)$

La humildad es una virtud tan poco apreciada en nuestro mundo precisamente porque facilita la vida. **Orhan Pamuk**

EJERCICIO

- Una fábrica produce bolsas de arroz cuyo peso promedio es 5,01 Kg con una desviación normal de 0,02. Calcular:
  - ¿Qué proporción de bolsas tienen pesos menores que 5,03 Kg?.
  - ¿Qué porcentaje de bolsas tienen pesos mayores que 5,02 Kg?.
  - Si se tienen 500 bolsas, ¿cuántas tienen pesos entre 5 y 5,05 Kg?

EJERCICIO

- La estatura de los cadetes de la escuela naval está distribuida normalmente con media de 69 pulgadas y una desviación estándar de 2 pulg.
  - **Hallar la probabilidad que un cadete mida más de 72 pulgadas.**
  - **¿Cuál es el porcentaje de cadetes cuyas estaturas están entre 69 y 73 pulgadas?**
  - **Si la participación en una prueba atlética los cadetes deben estar en el 20% de los de mayor estatura, ¿cuál es la estatura mínima para participar en la prueba?**

EJERCICIO

- Una línea de producción de latas de gaseosa produce envases cuyos contenidos promedio es de 33,2 ml. El 65% de las latas contienen menos de 33,5 ml. Encuentre la desviación estándar del contenido de las latas.

EJERCICIO

- La longitud de una faja de distribución está normalmente distribuida con media de 292 cm y una desviación típica de 4 cm. Hallar el porcentaje de fajas que tienen una longitud de 291 a 294 cm.

EJERCICIO

- El diámetro interior de una muestra de 400 tubos producidos por una máquina es 0,502 pulg. y la desviación típica es 0,005 pulg. Para poder usar los tubos el diámetro permite una tolerancia entre 0,496 y 0,508 pulg, de otro modo se consideran defectuosos. Hallar el porcentaje de tubos defectuosos suponiendo que están normalmente distribuidos.

EJERCICIO

- El tiempo de máquina necesario para fabricar una unidad del producto A está distribuido normalmente con una media de 50 minutos y una desviación típica de 5 minutos. Se debe fabricar una partida de 400 unidades A.
  - ¿cuántas unidades requerirán de un tiempo de máquina de hasta 53 min?
  - ¿cuántas unidades requerirán de un tiempo de máquina comprendido entre 48 y 53 min?
  - Si el 50% de las unidades requieren de un tiempo de máquina comprendido entre x_1 y x_2 min. Determinar x_1 y x_2 si ellos son simétricos con respecto al tiempo medio.

EJERCICIOS

- Hallar el valor de a en cada caso:
- $P(x<a)=0,3452; \; x \sim N(23,2)$
- $P(15<x<a)=0,5671; \; x \sim N(17,4)$
- $P(a<x<0,345)=0,4451; \; x \sim N(0,25;0,2)$
- $P(|z|<a)=0,6642$

La humildad es una virtud tan poco apreciada en nuestro mundo precisamente porque facilita la vida. **Orhan Pamuk**

EJERCICIO

- Si x es una variable aleatoria normal con media de 650 y desviación de 25. Hallar c (c>0) talque: $P(|x-650| \leq c) = 0{,}9544$.

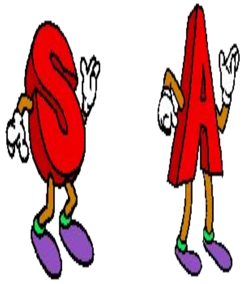
EJERCICIO

- Las estaturas de un grupo de alumnos se distribuye normalmente con media de 1,70m y desviación de 0,30m y las alumnas de igual manera con media de 1,65.
- Si la probabilidad de seleccionar aleatoriamente una alumna que mida más de 1,68 es de 0,185.
  - Calcular la desviación estándar de la distribución.
- Se selecciona una alumno al azar:
  - Calcula la probabilidad que la estatura del alumno sea mayor de 1,72.
- Se repite el experimento de seleccionar un alumno 10 veces.
- Calcular la probabilidad que por lo menos 7 de ellos midan más de 1,72.

LO QUE HEMOS APRENDIDO

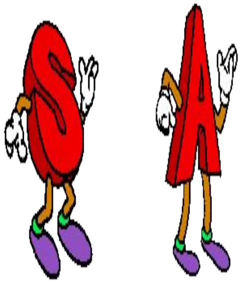
DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDADES

- TIPOS Y GENERALIDADES
- DISTRIBUCIÓN NORMAL
  - NORMAL ESTÁNDAR
  - NORMAL GENERAL



La humildad es una virtud tan poco apreciada en nuestro mundo precisamente porque facilita la vida. **Orhan Pamuk**

PRÁCTICA
AUTOEVALUACIÓN



La humildad es una virtud tan poco apreciada en nuestro mundo precisamente porque facilita la vida. **Orhan Pamuk**