COLEGIO
SAN AGUSTĪN
EST. 1966

2022 – II BIMESTRE

ASESORÍA DE MATEMÁTICA Y FÍSICA MAE NM

Guía de trabajo N.°03: LA DERIVADA

Nombre y Apellidos: ____

Grado: 5.° de secundaria Sección: "______" Fecha: ___ / 06 / 22

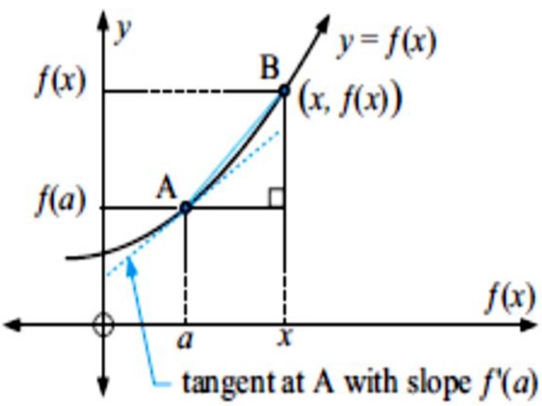
"Simón, hijo de Juan, ¿me amas? Señor, tú que conoces todo, tú sabes que te Amo"
(Juan 21, 18)

COMPETENCIA: Resuelve problemas regularidad, equivalencia y cambio.

Las derivadas aparecieron, aunque de una forma un tanto obscura en el siglo XVIII, como consecuencia del estudio de velocidades, hechos por el matemático y físico inglés NEWTON y el estudio sobre tangentes de curvas hecho por el matemático y filósofo alemán LEIBNIZ.

Definición:

Considere una función general $y = f(x)$, un punto fijo $A\ a, f(a)$ y un punto variable $B\ x, f(x)$.



La pendiente del segmento AB es: $AB = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

Ahora como $B \to A$, $x \to a$

Y la pendiente del segmento $AB \to$ a la pendiente de la recta tangente en A.

Entonces $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Por lo tanto: $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ es la pendiente de la recta tangente en $x = a$ y es llamada la derivada en $x = a$.

Nota: La pendiente de la tangente en $x = a$ se define como la pendiente de la curva en el el punto donde $x = a$, y es la razón instantánea de cambio de y con respecto a x en ese punto.

La derivada de la función $y = f(x)$, denotada por $f'(x)$, y se lee "f prima de x" también está definida por:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \qquad h \neq 0$$

Determinar la derivada de una función utilizando este enfoque se denomina ***hallar la derivada de*** f ***a partir de principios básicos***.

Lenguaje y Notación:

Si f es una función que depende de los valores de la variable independiente x entonces a la derivada de f denotaremos por:

$$\boxed{y = f(x) \Rightarrow y' = f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx} = D_x f}$$

Ejemplo 1. Halle la derivada (la función de la pendiente) de $f(x) = x^3 + 1$.

Solución:

Comenzamos simplificando la expresión $f(x+h) - f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= (x+h)^3 + 1 - (x^3+1) \\ &= x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 + 1 - x^3 - 1 \\ &= 3x^2h + 3xh^2 + h^3 \\ &= h(3x^2 + 3xh + h^2) \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad h \neq 0$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h}, \quad h \neq 0$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}(3x^2 + 3xh + h^2), \quad h \neq 0$$

$$f'(x) = 3x^2.$$

Ejercicios:

1. Use un proceso de límites para determinar las pendientes de las siguientes curvas en los puntos indicados.

   $(a)\ f : x \mapsto x^3,\ x = 1$

   $(b)\ f : x \mapsto \dfrac{1}{x},\ x = 3$

   $(c)\ v = 2t^2 - 1,\ t = 2$

2. Un objeto se deja caer desde un edificio alto. La distancia d en metros que el objeto ha caído t segundos después de soltarlo está dado por la fórmula.

   $$d = 4.9t^2, \quad 0 \leq t \leq 3$$

   (a) Halle la distancia recorrida en el primer segundo.
   (b) Halle la distancia recorrida entre $t = 1$ y $t = 1 + h$ segundos.
   (c) De ahí, halle la velocidad del objeto 1 segundo después

3. Halle a partir de principios básicos, la función de la pendiente, f', de las siguientes funciones:

   $(a)\ f : x \mapsto 4x^2$ $\qquad (d)\ f : x \mapsto 5x^2$

   $(b)\ f : x \mapsto 4x^3$ $\qquad (e)\ f : x \mapsto 5x^3$

   $(c)\ f : x \mapsto 4x^4$ $\qquad (f)\ f : x \mapsto 5x^4$

   ¿Puede ver un esquema en sus resultados?

4. Halle a partir de principios básicos, la función f' de las siguientes funciones:

   $(a)\ f : x \mapsto 2x^2 - 5$ $\qquad (b)\ f(x) = \sqrt{x}$

   $(c)\ g(x) = \dfrac{2}{x+1}$

Nota: La función $y = k$ es una recta horizontal, por lo que su pendiente siempre será 0.
Por lo tanto, tenemos la regla de las potencias:
Para la función $f : x \mapsto x^n, \quad (n \in \mathbb{Q})$
Su derivada está dada por:

$$f'(x) = nx^{n-1} \qquad \text{o} \qquad \frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$$

Ejemplo:

Use la regla de las potencias para calcular la derivada de las siguientes funciones:

$(a)\ f(x) = x^6 \qquad (b)\ y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Solución:

(a) Sea $f(x) = x^6 \Rightarrow f'(x) = 6x^{6-1} = 6x^5$

(b) Función: $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Paso 1: Reescribir: $y = x^{-\frac{1}{2}}$

Paso 2: Usar la regla de las potencias:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1}$$

Paso 3: Simplificar: $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = -\dfrac{1}{2\sqrt{x^3}}$

LA DERIVADA DE UNA SUMA O DIFERENCIA

Esta regla establece que la derivada de una suma (o una diferencia) es igual a la suma (o la diferencia) de las derivadas. Es decir:

Si: $y = f(x) \pm g(x)$, entonces:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \pm g'(x)$$

Ejemplo:

Derive las siguientes funciones:

$(a)\ f(x) = 2x^3 + 5x - 9$

$(b)\ y = \sqrt{x} - \dfrac{5}{x^3} + x$

Solución:

(a) Sea $y = 2x^3 + 5x - 9$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(2x^3 + 5x - 9) = \frac{d}{dx}(2x^3) + \frac{d}{dx}(5x) - \frac{d}{dx}(9)$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx} = 6x^2 + 5$$

Ejercicios:

1. Halle la derivada de las siguientes funciones:

$(a)\ f : x \mapsto -4x^7$

$(b)\ g : x \mapsto \dfrac{1}{4}x^8$

$(c)\ f(x) = x^2 + 8$

$(d)\ g(x) = 5x^4 + 2x - 1$

$(e)\ f(x) = 3x - 1 + \dfrac{x^2}{5} + x^4$

$(f)\ f : x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$

$(g)\ g : x \mapsto 6\sqrt[3]{x}$

$(h)\ f(x) = 2\sqrt{x} - \dfrac{3}{x} + 12$

$(i)\ g(x) = x\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} + 2$

$(j)\ f(x) = \sqrt{x}(x+2)$

$(k)\ f : x \mapsto (x+1)(x^3 - 1)$

$(l)\ g : x \mapsto \dfrac{2x-1}{x},\ \ x \neq 0$

$(m)\ f(x) = \dfrac{x^2 - x + \sqrt{x}}{2x},\ \ x \neq 0$

$(n)\ g(x) = \left(x + \dfrac{1}{x^2}\right)^2,\ \ x \neq 0$

$(p)\ f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^3}} - \dfrac{2}{x}\sqrt{x^3} + \dfrac{1}{3}x^3$

2. Demuestre que sí $f(x) = x^2 - x,$, entonces

$$f'(x) = 1 + \frac{2f(x)}{x}.$$

3. Determine la pendiente de la curva cuya ecuación es $y = 9x - x^3$ en el punto $(2, 10)$.

4. Determine las coordenadas de la curva $f : x \mapsto x^3 - x + 2$ en que la pendiente es 11.

5. Halle la pendiente de la función en el punto indicado:

$(a)\ f : x \mapsto x^3 - 2$; en $(1, -1)$

$(b)\ f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$; en $\left(2; \dfrac{1}{2}\right)$

$(c)\ f : x \mapsto (2x-1)^2$; en $(2, 9)$

$(d)\ f : x \mapsto x^2 - \dfrac{1}{x^2} + 2$; en $(1, 2)$

$(e)\ y = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x} + x$; en $(1, 1)$

6. Para la curva cuya ecuación es $y = x^2 - 12x$, halle:

(a) $\dfrac{dy}{dx}$

(b) La pendiente cuando $x = -3$

(c) Las coordenadas del punto en que la pendiente es 4.

7. Para la curva cuya ecuación es $y = -x^3 + 3x$, halle:
   (a) $\dfrac{dy}{dx}$
   (b) La pendiente cuando $x = 1$
   (c) Las coordenadas del punto en que la pendiente es -3.

8. Para la curva cuya ecuación es $y = \dfrac{1}{4}x^2(x^2 - 1)$, halle:
   (a) Las coordenadas en que su pendiente es cero.
   (b) El conjunto de valores de x para los cuales su pendiente es positiva.

DERIVACIÓN CON VARIABLES DISTINTAS DE x E y

En efecto, muchas fórmulas que empleamos suelen escribirse en términos de variables distintas de x e y. Por ejemplo, el volumen de una esfera está dado por $\mathrm{V} = \dfrac{4}{3}\pi \mathrm{r}^3$, el desplazamiento de una partícula que se mueve con aceleración constante está dado por $s = ut + \dfrac{1}{2}at^2$. Sin embargo, es tranquilo saber que las reglas siguen siendo las mismas sin importar las variables involucradas.

Ejemplo:

Derive las siguientes funciones con respecto a la variable apropiada:

$(a)\ \mathrm{V} = \dfrac{4}{3}\pi \mathrm{r}^3 \quad (b)\ p = 3w^3 - 2w + 20$

Solución:

a) Para esta expresión tenemos que V es una función de r, por lo que necesitamos derivar con respecto a r:

$$V = \frac{4}{3}\pi \mathrm{r}^3 \Rightarrow \frac{dV}{dr} = \frac{4}{3}\pi(3r^2) = 4\pi \mathrm{r}^2$$

b) $p = 3w^3 - 2w + 20 \Rightarrow \dfrac{dp}{dw} = 9w^2 - 2$

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

- Cirrito, F. (2002), *Métodos Matemáticos* (Primera edición), Australia: IBID Pess
- Urban, P.; Owen, J.; Martin, D.; Haese, R.; Haese, S. & Bruce, M. (2008), *Mathemathics for the international student* (tercera edición), Australia , Haese y Harris.
- ***Mathemathics standard level (2012) IBO.***