Guía de trabajo N.° 01: Identidades trigonométricas

Nombre y apellido: ____

Grado: 4.° de secundaria   Sección: "______"   Fecha: ___ / 10 / 21

Dijo Jesús a sus discípulos: «No juzguéis y no os juzgarán; porque os van a juzgar como juzguéis vosotros, y la medida que uséis, la usarán con vosotros. ¿Por qué te fijas en la mota que tiene tu hermano en el ojo y no reparas en la viga que llevas en el tuyo? Hipócrita; sácate primero la viga del ojo; entonces verás claro y podrás sacar la mota del ojo de tu hermano.» (Mt. 7, 1-5)

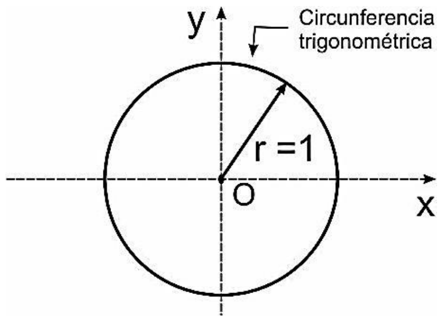
COMPETENCIA: Resuelve problemas de forma, movimiento y localización.

DESEMPEÑO: Combina y adapta estrategias heurísticas, recursos y procedimientos más convenientes para desarrollar las identidades trigonométricas en expresiones dadas, además, determina si se cumplen las equivalencias dadas.

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

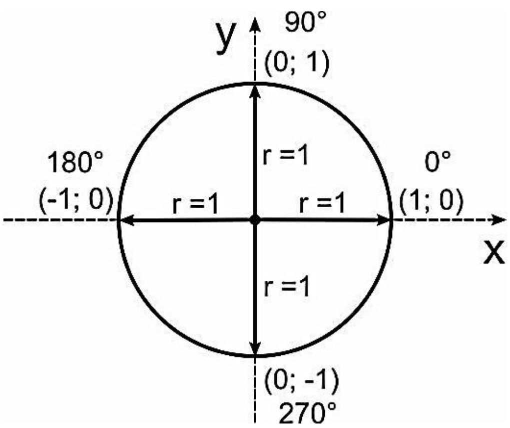
CIRCUNFERENCIA TRIGONOMÉTRICA

Es la circunferencia que tiene como centro el origen del sistema de coordenadas cartesianas, y cuyo radio tiene medida igual a uno.



RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS CUADRANTALES

Considerando una circunferencia trigonométrica y el punto extremo del radio vector, se tiene:



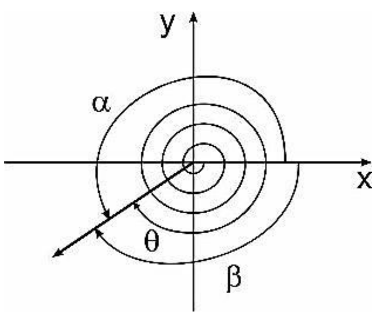
	0°	90°	180°	270°	360°
Seno	0	1	0	-1	0
Coseno	1	0	-1	0	1
Tangente	0	∞	0	∞	0
Cotangente	∞	0	∞	0	∞
Secante	1	∞	-1	∞	1
Cosecante	∞	1	∞	-1	∞

ÁNGULOS COTERMINALES

Son aquellos ángulos en posición normal que tienen el mismo lado terminal.

Sus medidas se diferencian en un número entero de vueltas: $\alpha - \beta = 360°n\,;\, n \in Z$.

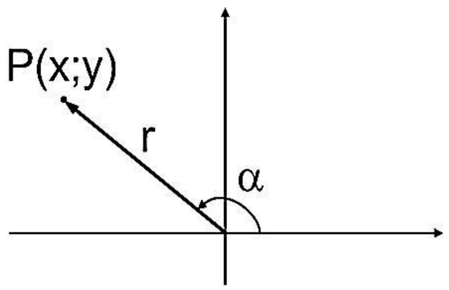
Tienen los mismos valores para sus razones trigonométricas: $RT(\alpha) = RT(\beta)$.



α, β y θ son ángulos coterminales.

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS. Una identidad trigonométrica es una igualdad que se verifica para todo valor permitido de la variable angular.

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS FUNDAMENTALES



A. Identidades Pitagóricas.

Se obtienen a partir del Teorema de Pitágoras:

$$x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow (Sen\,\alpha)^2 + (\mathrm{Cos}\,\alpha)^2 = 1$$

$$\boxed{(Sen\,\alpha)^2 + (\mathrm{Cos}\,\alpha)^2 = 1}$$

$$r^2 = y^2 + x^2 \Rightarrow \frac{r^2}{x^2} = \frac{y^2}{x^2} + \frac{x^2}{x^2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{r}{x}\right)^2 = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1$$

$$\Rightarrow (Sec\,\alpha)^2 = (Tg\,\alpha)^2 + 1$$

$$\boxed{(\mathrm{Sec}\,\alpha)^2 = (Tg\,\alpha)^2 + 1}$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow \frac{r^2}{y^2} = \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{y^2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{r}{y}\right)^2 = \left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1$$

$$\Rightarrow (\mathrm{Csc}\,\alpha)^2 = (Ctg\,\alpha)^2 + 1$$

$$\boxed{(\mathrm{Csc}\,\alpha)^2 = (Ctg\,\alpha)^2 + 1}$$

B. Identidades por división.

$$Tg\,\alpha = \frac{y}{x} \Rightarrow Tg\,\alpha = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} \Rightarrow \boxed{Tg\,\alpha = \frac{Sen\,\alpha}{\mathrm{Cos}\,\alpha}}$$

$$Ctg\,\alpha = \frac{x}{y} \Rightarrow Ctg\,\alpha = \frac{\frac{x}{r}}{\frac{y}{r}} \Rightarrow \boxed{Ctg\,\alpha = \frac{\mathrm{Cos}\,\alpha}{Sen\,\alpha}}$$

C. Identidades recíprocas o inversas.

$$Ctg\,\alpha = \frac{1}{Tg\,\alpha} \Rightarrow \boxed{Tg\alpha\,.\,Ctg\,\alpha = 1}$$

$$\mathrm{Sec}\,\alpha = \frac{1}{\mathrm{Cos}\,\alpha} \Rightarrow \boxed{\mathrm{Cos}\,\alpha\,.\,\mathrm{Sec}\,\alpha = 1}$$

$$\mathrm{Csc}\,\alpha = \frac{1}{Sen\,\alpha} \Rightarrow \boxed{Sen\,\alpha.\mathrm{Csc}\,\alpha = 1}$$

D. Identidades auxiliares

$$Tg\,\alpha + Ctg\,\alpha = \frac{Sen\alpha}{\mathrm{Cos}\,\alpha} + \frac{\mathrm{Cos}\,\alpha}{Sen\alpha}$$

$$Tg\,\alpha + Ctg\,\alpha = \frac{Sen^2\alpha + \mathrm{Cos}^2\,\alpha}{Sen\,\alpha.\mathrm{Cos}\,\alpha}$$

$$\boxed{Tg\,\alpha + Ctg\,\alpha = \frac{1}{Sen\,\alpha.\mathrm{Cos}\,\alpha}}$$

$$Sen^2\alpha + \mathrm{Cos}^2\,\alpha = 1 \Rightarrow \left(Sen^2\alpha + \mathrm{Cos}^2\,\alpha\right)^2 = 1^2$$

$$Sen^4\alpha + 2\,Sen^2\alpha\,.\,\mathrm{Cos}^2\,\alpha + \mathrm{Cos}^4\,\alpha = 1$$

$$\boxed{Sen^4\alpha + \mathrm{Cos}^4\,\alpha = 1 - 2\,Sen^2\alpha\,.\,\mathrm{Cos}^2\,\alpha}$$

$$Sen^2\alpha + \mathrm{Cos}^2\,\alpha = 1 \Rightarrow \left(Sen^2\alpha + \mathrm{Cos}^2\,\alpha\right)^3 = 1^3$$

$$Sen^6\alpha + Cos^6\alpha + 3Sen^2\alpha Cos^2\alpha\left(Sen^2\alpha\;Cos^2\alpha\right) = 1$$

$$\boxed{Sen^6\alpha + Cos^6\alpha = 1 - 3\,Sen^2\alpha\,.\,\mathrm{Cos}^2\,\alpha}$$

PRACTICAMOS

01. Indica la expresión equivalente escribiendo la letra correspondiente en el paréntesis.

A. $2-2Cos^2\alpha$ ( ) -1

B. $Sen^2\alpha.Cos\alpha+Cos^3\alpha$ ( ) $Sen\alpha$

C. $\dfrac{Sen^2\alpha-1}{Cos^2\alpha}$ ( ) $2Sen^2\alpha$

D. $\dfrac{Cos^2\alpha-1}{-Sen\alpha}$ ( ) 1

E. $(Cos\alpha-Sen\alpha)^2+2Sen\alpha.Cos\alpha$ ( ) $Cos\alpha$

02. Simplifique las siguientes expresiones:

A. $\dfrac{2-2Cos^2x}{1+Cos\,x}+\dfrac{Cos^2x-Sen^2x}{Cos\,x-Senx}-Cos\,x.Tg\,x-2$

B. $(2Sen\,x+3Cos\,x)^2+(3Sen\,x-2Cos\,x)^2$

C. $(Sen\,x+Cos\,x)^2-(Sen\,x-Cos\,x)^2$

D. $\left(\dfrac{1-Cos\,x}{Tg\,x}\right)\left(1+\dfrac{1}{Cos\,x}\right)$

E. $\left(\dfrac{Sen\,x}{1+Cos\,x}+\dfrac{1+Cos\,x}{Sen\,x}\right).Tg\,x$

03. Mostrar que:

A. $(Sen\,x+Cos\,x)^2+(Sen\,x-Cos\,x)^2=2$

B. $\dfrac{Sen^3x+Cos^3x}{Sen\,x+Cos\,x}+\dfrac{Sen^3x-Cos^3x}{Sen\,x-Cos\,x}=2$

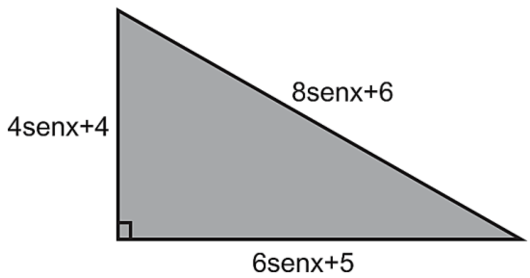
C. $\dfrac{1-Sen\,x}{Cos\,x}=\dfrac{Cos\,x}{1+Sen\,x}$

D. $\dfrac{Sen\,x}{1-Cos\,x}-\dfrac{Sen\,x}{1+Cosx}=\dfrac{2}{Tg\,x}$

E. $\dfrac{Sen\,x}{1-Cos\,x}+\dfrac{Sen\,x}{1+Cos\,x}=\dfrac{2}{Sen\,x}$

F. $Tg\,x+\dfrac{Cos\,x}{1+Sen\,x}=\dfrac{1}{Cos\,x}$

04. Calcula el área de la región triangular mostrada:



05. Si $Sen\,x\,.Cos\,x=\dfrac{1}{4}$, determina $Sen\,x+Cos\,x$

06. Si $Sen\,x+Cos\,x=n$, determina $Sen\,x-Cos\,x$

07. Dado que $Sen\,x=\dfrac{1}{3}$, donde "x" es un angulo agudo, encuentre el valor exacto de:

(a) $Cos\,x$;

(b) $Cos\,2x$.

08. Expresa $2Cos^2x+Sen\,x$ solo en términos de $Sen\,x$.

09. Si A es un ángulo obtuso en un triángulo y $Sen\,A=\dfrac{5}{13}$, calcula el valor exacto de $Sen\,(2A)$.

10. Resuelve las siguientes ecuaciones:

A. $3-Cos^2x-3Sen\,x=0$

B. $7Cos\,x+5=2Sen^2x$

C. $Cos^2x=5Sen\,x+7$

D. $6-Cos\,x=6Sen^2x+1$

E. $2Cos^2x+Sen\,x=2$

Fuentes:

i. Urban P., Martin R., Haese R., Haese S., Haese M. & Humphries M. (Segunda edición). (2008). Mathematics HL. Australia: Haese & Harris publications.

ii. Zill, D. & Dewar, J. (2012). Álgebra, trigonometría y geometría analítica. (3ª ed). México: McGraw-Hill Educación.