COLEGIO
SAN AGUSTÍN
EST. 1966

2022-II Bimestre
ASESORÍA DE MATEMÁTICA Y FÍSICA
MAE N.M.

Guía de trabajo N.° 02

Nombre y Apellido: ____

Grado: 5.° Sección: “______” Fecha: 23/05/22

"Al que mucho se le dio, mucho se le exigirá; al que mucho se le confió, más se le exigirá” (Lucas 12,48)

COMPETENCIA: Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio.

LÍMITES

Al buscar el límite de la razón de dos polinomios enteros respecto a x, cuando $x \to \infty$, es conveniente dividir previamente de la razón por x^n, donde “n” es la mayor potencia de estos polinomios. En muchos casos puede emplearse un procedimiento análogo, cuando se trata de fracciones que contienen expresiones irracionales.

Ejemplo 1. Halle:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{24x^3-32x^2-66x-90}{3x^3+x-1}$$

Resolución: La mayor potencia de los polinomios es 3, entonces es conveniente dividir ambos entre x^3

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{24x^3}{x^3}-\frac{32x^2}{x^3}-\frac{66x}{x^3}-\frac{90}{x^3}}{\frac{3x^3}{x^3}+\frac{x}{x^3}x-\frac{1}{x^3}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{24-\frac{32}{x}-\frac{66}{x^2}-\frac{90}{x^3}}{3+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}}$$

y considerando que: $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ entonces:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{24-\frac{32}{x}-\frac{66}{x^2}-\frac{90}{x^3}}{3+\frac{x}{x^2}-\frac{1}{x^3}}=\frac{24}{3}=8$$

Ejemplo 2. Halle: $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt[3]{x^3+10}}$

Resolución: Dividiendo entre x, numerador y denominador:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}}{\frac{\sqrt[3]{x^3+10}}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}}{\frac{\sqrt[3]{x^3+10}}{\sqrt[3]{x^3}}}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}}{\sqrt[3]{\frac{x^3}{x^3}+\frac{10}{x^3}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{10}{x^3}}}=\frac{1}{1}=1$$

Ejercicios:

a) $\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)^2}{x^2+1}$

b) $\lim_{x\to\infty}\frac{100x}{x^2+1}$

c) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-5x+1}{3x+7}$

d) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x+3}{x^3-8x+5}$

e) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3\,^{3}(3x-2)^2}{x^5+5}$

f) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{x+\sqrt[3]{x}}$

g) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x+1}$

h) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^4+1}}$

Respuestas:

a) 1 b) 0 c) ∞
d) 0 e) 72 f) 2
g) 0 h) 2

- **Si P(x) y Q(x) son polinomios enteros y P(a) ≠0 o Q(a) ≠ 0, el límite de la fracción racional.**

$\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}$ se halla directamente.

Si P(a) = Q(a) = 0, se recomienda simplificar $\frac{P(x)}{Q(x)}$, por el binomio $x \pm a$, una o varias veces.

Ejemplo: Halle $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}\right)$

Resolución: Si remplazamos x = 2, observamos que tenemos una expresión de la forma 0/0, por lo tanto habrá que hacer un poco de manipulación algebraica. (Levantar la indeterminación)

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)(x-1)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)}{(x-1)}=\frac{4}{1}=4$$

$$\therefore \lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}\right)$$

Ejercicios:

$a)\ \lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x^2+1}$

$b)\ \lim_{x\to 5}\frac{x^2+5x+10}{x^2-25}$

$c)\ \lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x^2+3x+2}$

$d)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$

$e)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$

$f)\ \lim_{x\to a}\frac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$

$g)\ \lim_{x\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}$

Respuestas:

a) 0 b) ∞ c) -2
d) ∞ e) 1/2 f) $\frac{a-1}{3a^2}$
g) $3x^2$

- **Las expresiones irracionales se reducen, en muchos casos, a una forma racional introduciendo una nueva variable.**

Ejemplo: $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$

Resolución: Suponiendo que: 1 + x = y^6, tenemos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{y^3-1}{y^2-1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(y-1)(y^2+y+1)}{(y-1)(y+1)}=\frac{1^2+1+1}{1+1}=\frac{3}{2}$$

Note que en: 1 + x = y^6, cuando $x\to 0$, entonces $y\to 1$.

Ejercicios:

$a)\ \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ $b)\ \lim_{x\to 64}\frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$

$c)\ \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$ $d)\ \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$

Respuestas:

a) ½ b) 3 c) 4/3 d) 1/9

- **Para hallar el límite de una expresión irracional, racionalizamos bien el numerador o el denominador o bien ambos.**

Ejemplo: Halle

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a},\quad a>0$$

Resolución: $\lim_{x\to a}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})}{(x-a)}\cdot\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{(\sqrt{x}+\sqrt{a})}$

$$\lim_{x\to a}\frac{(x-a)}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}=\lim_{x\to a}\frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{a})}=\frac{1}{2\sqrt{a}}$$

Ejercicios:

$a)\ \lim_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$ $b)\ \lim_{x\to 8}\frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$

$c)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

$d)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$

Respuestas:

a) -1/56 b) 12 c) 1 d) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

- **Para hallar el límite cuando f(x) o g(x) son funciones trigonométricas, hacemos uso de las identidades trigonométricas y del siguiente limite notable:**

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen\ x}{x}=1$$

Ejercicios:

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}\qquad b)\ \lim_{t\to 0}\frac{sen^2 t}{t}$$

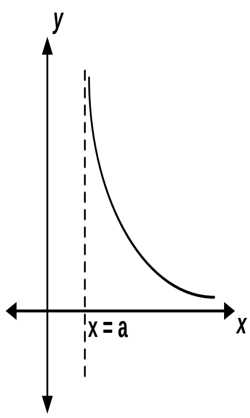
$$c)\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{2x}\qquad d)\ \lim_{t\to 0}\frac{sen\ t}{t}$$

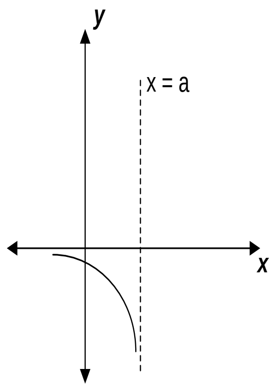
$$e)\ \lim_{x\to \pi}\frac{1+\cos x}{sen\ 2x}\qquad f)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x}\right)$$

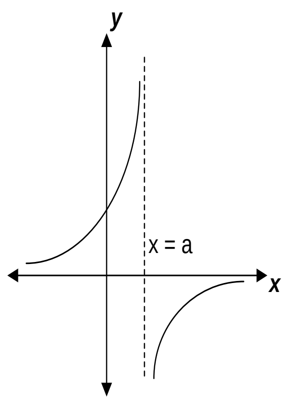
$$g)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)\qquad h)\ \lim_{x\to 0}\frac{sen\ 3x}{x}$$

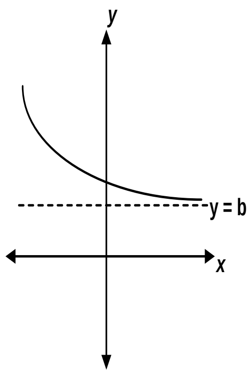
$$i)\ \lim_{x\to 0}\frac{sen\ 5x}{sen\ 2x}\qquad j)\ \lim_{x\to 0}\frac{sen\ \pi x}{sen\ 3\pi x}$$

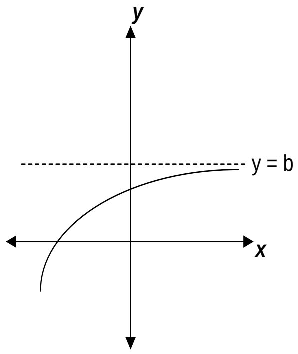
ASÍNTOTAS

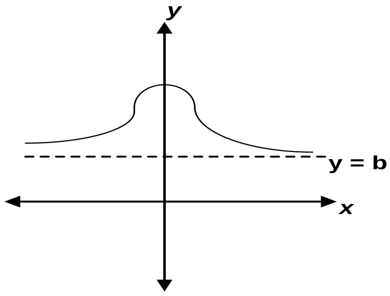


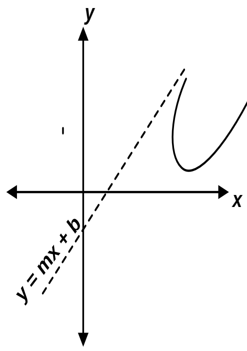


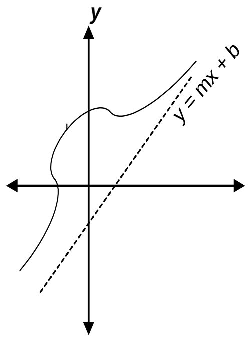












Asíntota Vertical: Decimos que la recta x = a es una asíntota vertical de la gráfica de la función *f*, si se cumple uno de los siguientes criterios:

$$a)\ \lim_{x\to a^+} f(x)=\infty\qquad b)\ \lim_{x\to a^-} f(x)=\infty$$

$$c)\ \lim_{x\to a} f(x)=\infty$$

Asíntota Horizontal: La recta y = b es una asíntota horizontal de la gráfica de la función *f*, si:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=b$$

Asíntota Oblicua: La recta y = mx + b es una asíntota oblicua de la gráfica de la función *f*, si m y b existen; esto es:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x},\ m\neq 0\qquad b=\lim_{x\to\infty}\ f(x)-mx$$

Ejercicios:
Calcule las asíntotas (si existen) de cada una de las siguientes funciones:

$$a)\ f(x)=\frac{x}{16-x^2}\qquad b)\ g(x)=\frac{x^2+5x+6}{x^2+4x+3}$$

$$c)\ h(x)=\frac{x^3+1}{x^2+1}$$

FUENTE: Lázaro M. (2001), *Cálculo Diferencial* (Tercera edición), Lima – Perú: San Marcos.