COLEGIO
SAN AGUSTĪN
EST. 1966

Guía de trabajo N.° 04: Función inversa

Nombre y apellidos: ____

Grado: 4.° de secundaria Sección: “______” Fecha: ___ / 06 / 21

«En verdad les digo, Si el grano de trigo no cae en tierra y muere, queda solo; pero si muere, da mucho fruto» (Jn 12, 24).

COMPETENCIA: Resuelve problemas de Regularidad, equivalencia y cambio.

Desempeño: Combina y adapta estrategias heurísticas, recursos, métodos gráficos, procedimientos y propiedades algebraicas más óptimas para determinar la función inversa a partir de la regla de correspondencia y de su gráfica, usando expresiones algebraicas y propiedades.

<u>Definición</u>: Se llama función identidad a la función que le hace corresponder a cada número real el propio número. Se representa por $I : x \mapsto x \quad o \quad I(x) = x$

Definición

Una función f se dice inyectiva o función uno a uno si verifica que dos puntos distintos no pueden tener la misma imagen. De otra forma:

$f \text{ es inyectiva} \Leftrightarrow \forall x_1 ; x_2 \,/\, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

AHORA:

$f^{-1} = \{(1;4),(3;6),(5;8),(7;10),(9;12)\}$

Si intercambiamos las componentes de los pares ordenados, en este ejemplo, se obtiene la función inversa de f, que se representa por f^{-1}:

$$f^{-1} = \{(4;1),(6;3),(8;5),(10;7),(12;9)\}$$

Si componemos estas funciones se tiene: $f \circ f^{-1} = \{(4;4),(6;6),(8;8),(10;10),(12;12)\}$

que es la función identidad para el dominio de f^{-1}

<u>Definición:</u> Sea $y = f(x)$ una función. Llamamos función inversa (en caso de que exista) a una función notada $y = f^{-1}(x)$ que verifica que $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f) = I(x)$ la función identidad. Para que exista la función inversa de f es necesario que la función f sea inyectiva.

Si (x, y) se encuentra en f, entonces (y, x) se encuentra en f^{-1}.

Sea la función

$f=\{(-2;8),(-1;2),(0;0),(1;2),(2;8)\}$

Si intercambiamos las componentes de los pares ordenados, en este ejemplo, no se obtiene una función, sino solo una relación, y por lo tanto la función no tiene función inversa.

$\{(8;-2),(2;-1),(0;0),(2;1),(8;2)\}$

No es función. Es decir, **no toda** función tiene función inversa.

Ejemplos

1. Halle la inversa de la función $f(x)=5x+2$

   Sol:

   Probamos que f es inyectiva, es decir, $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$

   $$f(x_1)=5x_1+2$$
   $$f(x_2)=5x_2+2$$

   de donde igualando tenemos:

   $$5x_1+\cancel{2}=5x_2+\cancel{2}$$
   $$5x_1=5x_2$$
   $$x_1=x_2$$

   $\therefore\ f$ es inyectiva

   Con esto queda probado que la función f es inyectiva y por tanto existe f^{-1}. Calculémosla:

   Hacemos: $y=5x+2$.

   Despejamos $"x"$ en función de $"y"$, entonces tenemos:

   $$y-2=5x$$

   $\dfrac{y-2}{5}=x$. Finalmente cambiamos las $"x"$ por $"y"$

   $$\frac{x-2}{5}=y$$

   $$\therefore f^{-1}(x)=\frac{x-2}{5}$$

2. Calcule si es posible la función inversa de: $f(x)=\dfrac{x-2}{x+1}$

   Sol:

   $$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow\frac{x_1-2}{x_1+1}=\frac{x_2-2}{x_2+1}\Rightarrow(x_1-2)(x_2+1)=(x_2-2)(x_1+1)$$

luego:

$$x_1x_2 + x_1 - 2x_2 - 2 = x_1x_2 - 2x_1 + x_2 - 2 \Rightarrow 3x_1 = 3x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

En primer lugar debemos estudiar si la función en cuestión es inyectiva o no:

Con esto queda probado que la función f es inyectiva y por tanto existe f^{-1}. Calculémosla:

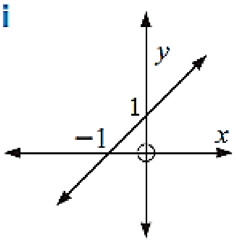
$$y = \frac{x-2}{x+1} \Rightarrow y(x+1) = x-2$$
$$\Rightarrow yx + y = x - 2 \Rightarrow x(y-1) = -y-2$$
$$\Rightarrow x = \frac{-y-2}{y-1} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-x-2}{x-1}$$

PRACTICAMOS

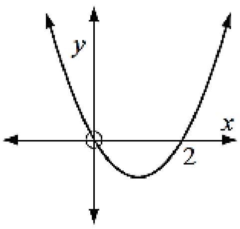
01. La “**Prueba de la línea horizontal**” dice: “para una función que tiene una función inversa, ninguna línea horizontal puede cortarla más de una vez”

   a) Explique porque esta prueba es válida para la existencia de la función inversa.
   b) ¿Cuáles de las siguientes funciones tienen una función inversa?

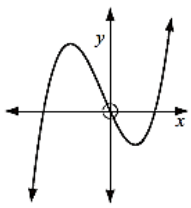
i



ii



iii



02. Considere: $f(x) = \frac{-}{x-1}$

   a) En un mismo diagrama cartesiano grafique f y su función inversa f^{-1}

   b) Halle f^{-1} de dos formas diferentes

03. Considere $f(x) = 3x + 6$

En un mismo diagrama cartesiano grafique f y su función inversa f^{-1}

Halle f^{-1} de dos formas diferentes

Considere $f(x) = 2x - 2$

En un mismo diagrama cartesiano grafique f y su función inversa f^{-1}

Halle f^{-1} de dos formas diferentes

04. Para la función $f(x)=\dfrac{7x+1}{x-7}$, halla el dominio de la función f^{-1}

05. Para cada una de las siguientes funciones f

a. $f(x)=3x+1$

b. $f(x)=\dfrac{x}{x+2}$

i. En un sistema de coordenadas grafique $y=x$, f y f^{-1}

ii. Halle f^{-1}

06. Para cada una de las siguiente funciones f

a. $f(x)=2x+5$

b. $f(x)=\dfrac{3-2x}{4}$

c. $f(x)=x+3$

i. En un sistema de coordenadas grafíque $y=x$, f y f^{-1}

ii. Halle f^{-1}

iii. Pruebe que $f\,o\,f^{-1}=f^{-1}\,o\,f=I$, la función identidad.

07. Dado $f(x)=(x+1)^2+3;\ donde\ x\geq -1$

a) Halle la ecuación definiendo f^{-1}

b) Grafique usando la tecnología $y=f(x)$, $y=x$ y $y=f^{-1}(x)$

c) Determine el dominio y rango de f y f^{-1}

08. Considere las funciones:

$f(x)=2x+5$ y $g(x)=\dfrac{8-x}{2}$ Calcule:

$a.\ g^{-1}(-1) \qquad b.\ \left(f \circ g^{-1}\right)(x) = 9$

09. Dadas $f(x) = 5^x$ y $g(x) = \sqrt{x}$

a) Halle

$i.\ f(2) \quad ii.\ g^{-1}(4)$

b) Calcule el valor de $"x"$ para que la ecuación se cumpla: $\left(g^{-1} \circ f\right)(x) = 25$

10. Dadas $f(x) = 2x$ y $g(x) = 4x - 3$, pruebe que: $\left(f^{-1} \circ g^{-1}\right)(x) = \left(g \circ f\right)^{-1}(x)$

11. Cuál de estas funciones es una función inversa de sí mismo, que es $f^{-1}(x) = f(x)$

a) $f(x) = 2x$ b) $f(x) = x$ c) $f(x) = -x$ b) $f(x) = \dfrac{2}{x}$ b) $f(x) = -\dfrac{6}{x}$

12. Determine las f^{-1} funciones f y g

$a.\ f\left(g(x)\right) = \sqrt{1 - x^2}$

$b.\ g\left(f(x)\right) = \left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^2$

13. Determine el dominio de las siguientes funciones:

a. $f(x) = x^2 - 2x$

b. $f(x) = \dfrac{3x}{x^2 - 2x + 1}$

c. $f(x) = \dfrac{2 + \sqrt{x-2}}{x^2 - 16}$

14. Determine si la función es creciente o decreciente y encuentre su dominio

a. $f(x) = \log\left(\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x + 3}\right)$

b. $g(x) = \log\left(\dfrac{x^2 - 8x + 15}{x^3 - 8}\right)$

Referencias:

i. Urban P., Martin R., Haese R., Haese S., Haese M. & Humphries M. (Segunda edición). (2008). Mathematics HL. Australia: Haese & Harris publications.

ii. Zill, D. & Dewar, J. (2012). Álgebra, trigonometría y geometría analítica. (3ª ed). México: McGraw-Hill Educación.

iii. Mathemathics standard level (2012) IBO