Guía de trabajo N.° 03: LA INTEGRAL INDEFINIDA (ANTIDERIVACIÓN)

Nombre y Apellido: ____

Grado: 5.° de secundaria Sección: "______" Fecha: __ / 08 / 19

"Es verdad que tú debes ser "compañero" de tu hijo, pero sin olvidar que tú eres el padre" Papa **Francisco**

ANTIDERIVACIÓN

Como el nombre lo sugiere la antiderivación es el proceso inverso a derivar. Realmente preguntamos por una expresión $f(x)$ que al derivarse da como resultado $f'(x)$.

Por ejemplo si $f'(x)=2x$ entonces $f(x)=x^2$ es una posible expresión para la función original, realmente hay infinitas expresiones que podrían ser la original, tenemos entonces una familia de funciones que cumplen con esto y que llamamos función primitiva $y=x^2+c$.

DEFINICIÓN: Dada $\frac{dy}{dx}=f'(x)$, entonces decimos que $y=f(x)+c,\ c\in IR$ es la antiderivada o Integral Indefinida de $f'(x)$.

El conjunto de todas las derivadas de la función $h(x)$ es llamado la integral indefinida de $h(x)$, y se denota por $\int h(x)dx$.

El símbolo $\int$ es llamado signo de integración, la función $h(x)$ es el integrando y el diferencial dx indica la variable de integración x.

Una vez que se halle la integral de $h(x)$, que llamaremos $H(x)$, podemos entonces escribir que:

$\int h(x)dx=H(x)+c$, donde c es la llamada constante de integración.

FÓRMULAS DE INTEGRACIÓN:

Por una simple deducción podemos ver que $\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$, donde $n\neq -1$.

Esta restricción se debe a que como recordamos $\frac{d(Lnx)}{dx}=\frac{1}{x}=x^{-1}$, por lo tanto tenemos otra fórmula de integración $\int \frac{1}{x}dx=\int x^{-1}dx=Lnx+c$.

Otra fórmula que podemos agregar es $\int ax^n dx=a\int x^n dx=\frac{ax^{n+1}}{n+1}+c$, donde $n\neq -1$, $a\in IR$

EJERCICIOS 1: Halle las siguientes integrales indefinidas:

1. $\int 4x^2dx=$
2. $\int \frac{2}{x^3}dx=$
3. $\int 5\sqrt{x}dx=$
4. $\int \sqrt[5]{x^3}dx=$

PROPIEDADES DE LAS INTEGRALES:

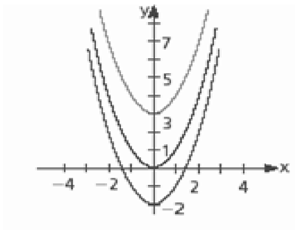
1. $\int h'(x)dx = h(x) + c$
2. $\frac{d}{dx}\left(\int h(x)dx\right) = h(x)$
3. $\int [h(x) \pm f(x)]dx = \int h(x)dx \pm \int f(x)dx$

EJERCICIOS 2: Halle las siguientes integrales indefinidas:

1. $\int \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{3}x^2 \right) dx =$
2. $\int x^2 \left(3 - \frac{2}{3x} \right) dx =$
3. $\int (x-3)^3 dx =$
4. $\int \left(\frac{4u^3 + 5u^2 - 1}{u} \right) du =$
5. $\int \left(\frac{u^3 + 6u^2 + 12u + 8}{u+2} \right) du =$

RESOLVIENDO PARA C.

Ya vimos la razón de agregar c lo cual constituye una solución general, pero sin embargo en algunos ejercicios debemos dar la solución específica. Por ejemplo como sabemos $\int 2xdx = x^2 + c$ y esto representa una familia de funciones como las que se muestran en la gráfica.



Para determinar específicamente a cuál de las funciones nos referimos debemos dar alguna información extra.

EJERCICIOS 3.

1. Determine $f(x)$ dado que $f'(x) = 2x$ y al curva pasa por el punto $(2,9)$. $R = x^2 + 5$
2. Determine $f(x)$ dado que $f''(x) = 6x - 2$ y el gradiente en el punto $(1,5)$ es 2. $R = x^3 - x^2 + x + 4$
3. La razón de cambio de la presión, p unidades, a una profundidad de $x\,cm$ de la superficie del líquido viene dada por $p'(x) = 0.03x^2$. Si la presión en la superficie es 10 unidades, determine la presión a $5cm$ de profundidad. $R =$ 11.25 unidades.
4. La razón de crecimiento de la población de una ciudad ha sido modelada por la ecuación $\frac{dN}{dt} = 400t^{1.05}, t \geq 0$ donde t es el tiempo en años después de 1995 y N es el tamaño de la población. En el año 2000 la población era de 32,000 habitantes. ¿Cuál debió ser la población en el año 2010? $R =$ 76,981

5. La aceleración, $a\,m.s^{-2}$, de una partícula en el tiempo t segundos está dado por:

$$a=\frac{1}{t}+3\sin(2t) \quad para\ \ t\geq 1$$

La partícula está en reposos cuando $t=1$.

Halle la velocidad de la partícula cuando $t=5$.

6. Si $f'(x)=Cos\,(x)$ y $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-2$. Halle $f(x)$.

7. Se da la $\dfrac{dy}{dx}=x^3+2x-1$ y que $y=13$ cuando $x=2$ Halle y en términos de x.

8. La curva $y=f(x)$ pasa por el punto (2, 6). Se da la $\dfrac{dy}{dx}=3x^2-5$, halle y en términos de x.

9. Si $f'(x)=12x^2-2$. Dado que $f(-1)=1$, halle $f(x)$.

MÁS FÓRMULAS DE INTEGRACIÓN: En la siguiente tabla se muestran las que podemos llamar integrales inmediatas:

$\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C;\quad n\neq -1$	$\int [f(x)]^n f'(x)\,dx=\frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}+C\quad n\neq -1$
$\int \frac{1}{x}dx=\ln\lvert x\rvert+C$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln\lvert f(x)\rvert+C$
$\int \sin(x)dx=-\cos(x)+C$	$\int f'(x)\sin f(x)dx=-\cos f(x)+C$
$\int \cos(x)dx=\sin(x)+C$	$\int f'(x)\cos f(x)dx=sin\,f(x)+C$
$\int \frac{1}{\cos^2(x)}dx=\tan(x)+C$	$\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}dx=\tan\ f(x)+C$
$\int \frac{1}{sin^2(x)}dx=-\cot(x)+C$	$\int \frac{f'(x)}{sin^2 f(x)}dx=-\cot\ f(x)+C$
$\int \frac{1}{1+x^2}dx=\arctan(x)+C$	$\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx=\arctan\ f(x)+C$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin(x)+C$	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}dx=\arcsin f(x)+C$
$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arccos(x)+C$	$\int \frac{-f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}dx=\arccos f(x)+C$
$\int e^x dx=e^x+C$	$\int f'(x)\,e^{f(x)}dx=e^{f(x)}+C$
$\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$	$\int f'(x)\,a^{f(x)}dx=\frac{a^{f(x)}}{\ln a}+C$

INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN

Las integrales de funciones compuestas se pueden determinar utilizando el llamado método de sustitución el cual consiste en hacer un cambio de variable. Los pasos que se sugieren son los siguientes:

1. Defina u (esta u debe ser una función que es parte del integrando, de tal manera que al derivarse exprese parcial o totalmente la parte restante del integrando).
2. Exprese la integral en términos de la nueva variable (esto significa que debes también convertir dx en términos de du, si la variable original es x).
3. Integre y reescriba la respuesta en términos de x (sustituya de vuelta).

EJERCICIOS 4. Utilice el método de sustitución para determinar las siguientes integrales:

1. $\int (2x+1)^4 dx$ R= $\frac{1}{10}(2x+1)^5 + c$
2. $\int 2x(x^2+1)^3 dx$ R= $\frac{1}{4}(x^2+1)^4 + c$
3. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3-4}} dx$ R= $\frac{2}{3}\sqrt{x^3-4} + c$
4. $\int x\sqrt{x+1}\, dx$ R= $\frac{2}{5}\sqrt{(x+1)^5} - \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} + c$
5. El gradiente en cualquier punto de la curva $y = f(x)$ está dado por la ecuación $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$, la curva pasa por el punto $(2,3)$. Halle la ecuación de esta curva. $R = f(x) = 2\sqrt{x+2} - 1$
6. $\int x^2 e^{x^3+4} dx$ $R = \frac{1}{3}e^{x^3+4} + c$
7. $\int e^x \cos(e^x) dx$ $R = sen(e^x) + c$
8. $\int \frac{3x}{x^2+4} dx$ $R = \frac{3}{2}\ln(x^2+4) + c$
9. $\int x^2\sqrt{x+1}\, dx$ $R = \frac{2}{7}(x+1)^{7/2} - \frac{4}{5}(x+1)^{5/2} + \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + c$
10. $\int sen(3x)\cos^2(3x) dx$ $R = -\frac{1}{9}\cos^3(3x) + c$
11. $\int \frac{sen(2x)}{5+\cos(2x)} dx$ $R = -\frac{1}{2}\ln[5+\cos(2x)] + c$
12. $\int \frac{\arctan x}{x^2+1} dx$ $R = \frac{1}{2}(\arctan x)^2 + c$
13. Halle: (a) $\int \sin(3x+7)\mathrm{d}x$; (b) $\int e^{-4x}\mathrm{d}x$.
14. Si $f'(x) = 1 - x^2$. Dado que $f(3) = 0$ y halle $f(x)$
15. La función f está dada por $f(x) = 2\sin(5x-3)$

   (a) Halle $f''(x)$ (b) Determine $\int f(x)\mathrm{d}x$.

LA INTEGRAL DEFINIDA

Contrario a lo visto anteriormente que la integral indefinida de una expresión da como resultado otra expresión, la integral definida da como resultado un valor numérico. Las integrales definidas son muy importantes porque se pueden utilizar para calcular áreas, volúmenes, longitudes, etc.…

Lenguaje y Notación:

Si la función $f(x)$ es continua en el intervalo $[a,b]$ y $F(x)$ es la antiderivada de $f(x)$ en el mismo intervalo, entonces $\int_a^b f(x)dx$ es llamada la integral definida y es igual a $F(b)-F(a)$. Por lo tanto $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$. Usualmente tenemos un paso intermedio al evaluar integrales definidas como se muestra a continuación:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$$

En la expresión anterior los valores a y b son llamados el límite superior y el límite inferior respectivamente. A esta expresión también se le conoce como el teorema fundamental del cálculo.

EJERCICIOS: Evaluar las siguientes expresiones:

1. $\int_3^5 \frac{1}{x}dx$ $\qquad R \approx 0.511$
2. $\int_2^4 \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 dx$ $\qquad R = \frac{275}{12} \approx 22.92$
3. $\int_0^1 \left(e^{2x}+\frac{3}{x+1}\right)dx$ $\qquad R \approx 5.27$
4. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} sen(3x)dx$ $\qquad R = 0$
5. $\int_2^5 (3x-4)^4 dx$ $\qquad R = 10734.6$
6. $\int_{-2}^0 \left(x-e^{-x}\right)dx$ $\qquad R \approx -8.39$
7. La razón de producción de radios para un trabajador promedio en una compañía t después de comenzar su turno a las 7:00 AM, está dada por la expresión $N'(t) = -2t^2+8t+10,\ 0 \le t \le 4$. Cuántas unidades puede ensamblar un trabajador promedio en la segunda hora de producción. $R = \frac{52}{3}$

Propiedades de la Integral Definida:

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$

2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$ donde $a \le c \le b$

4. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

5. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

EJERCICIOS: Suponga que $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas en el intervalo [1,5] y $\int_1^3 f(x)dx = -2$, $\int_1^5 f(x)dx = 7$, $\int_1^3 g(x)dx = 3$ y $\int_1^5 g(x)dx = 5$ evaluar lo siguiente:

1. $\int_1^3 (3f(x) - g(x))dx$ $\quad R = -9$
2. $\int_5^1 (f(x) - g(x))dx$ $\quad R = -2$
3. $\int_1^3 (5 - 4f(x))dx$ $\quad R = 18$

Determine el valor o valores de m , donde:

1. $\int_0^m (2x-4)dx = -4$ $\quad m = 2$
2. $\int_0^m (2x-4)dx = 5$ $\quad m = 5$ o $m = -1$
3. Dado que $\int_1^3 g(x)\mathrm{d}x$ = 10, deduce el valor de:

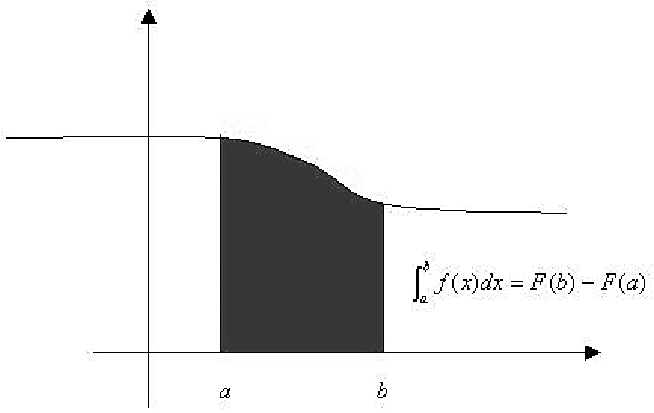
   (a) $\int_1^3 \frac{1}{2} g(x)\mathrm{d}x;$

   (b) $\int_1^3 (g(x)+4)\mathrm{d}x.$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA INTEGRAL DEFINIDA

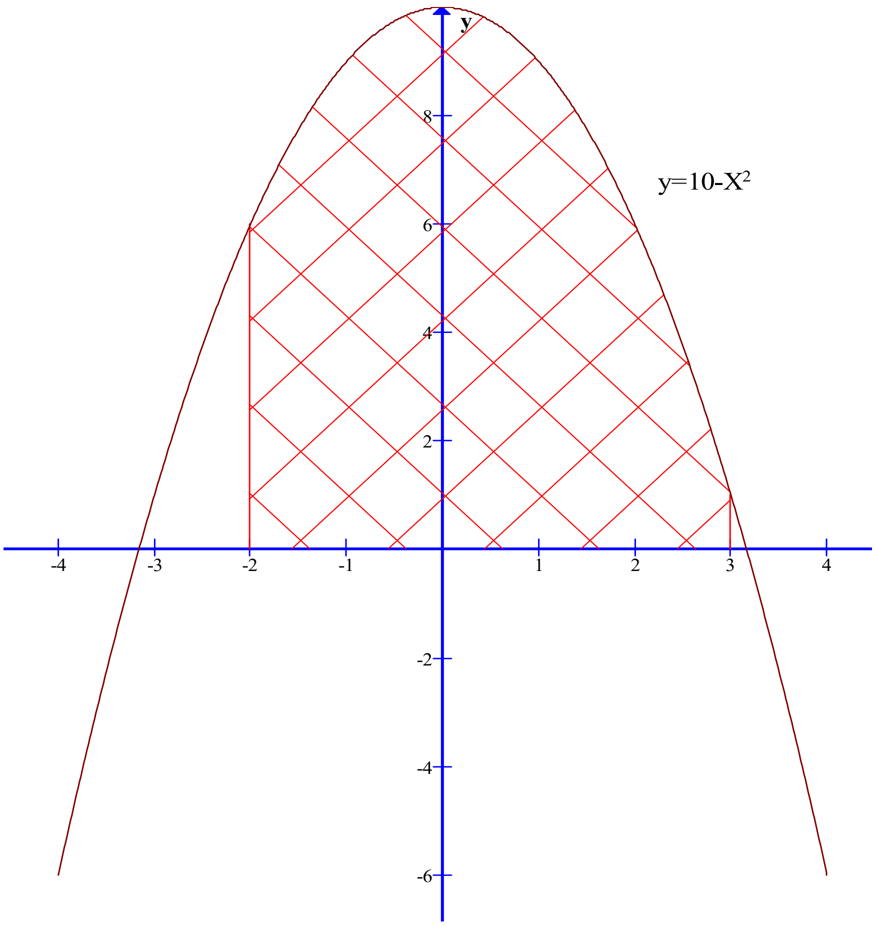
Geométricamente la integral representa un área como se describe a continuación:

Si $y = f(x)$ es positiva y continua en el intervalo $[a,b]$, la integral $\int_a^b f(x)dx$ representa el área, A unidades cuadradas, delimitada por $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$.

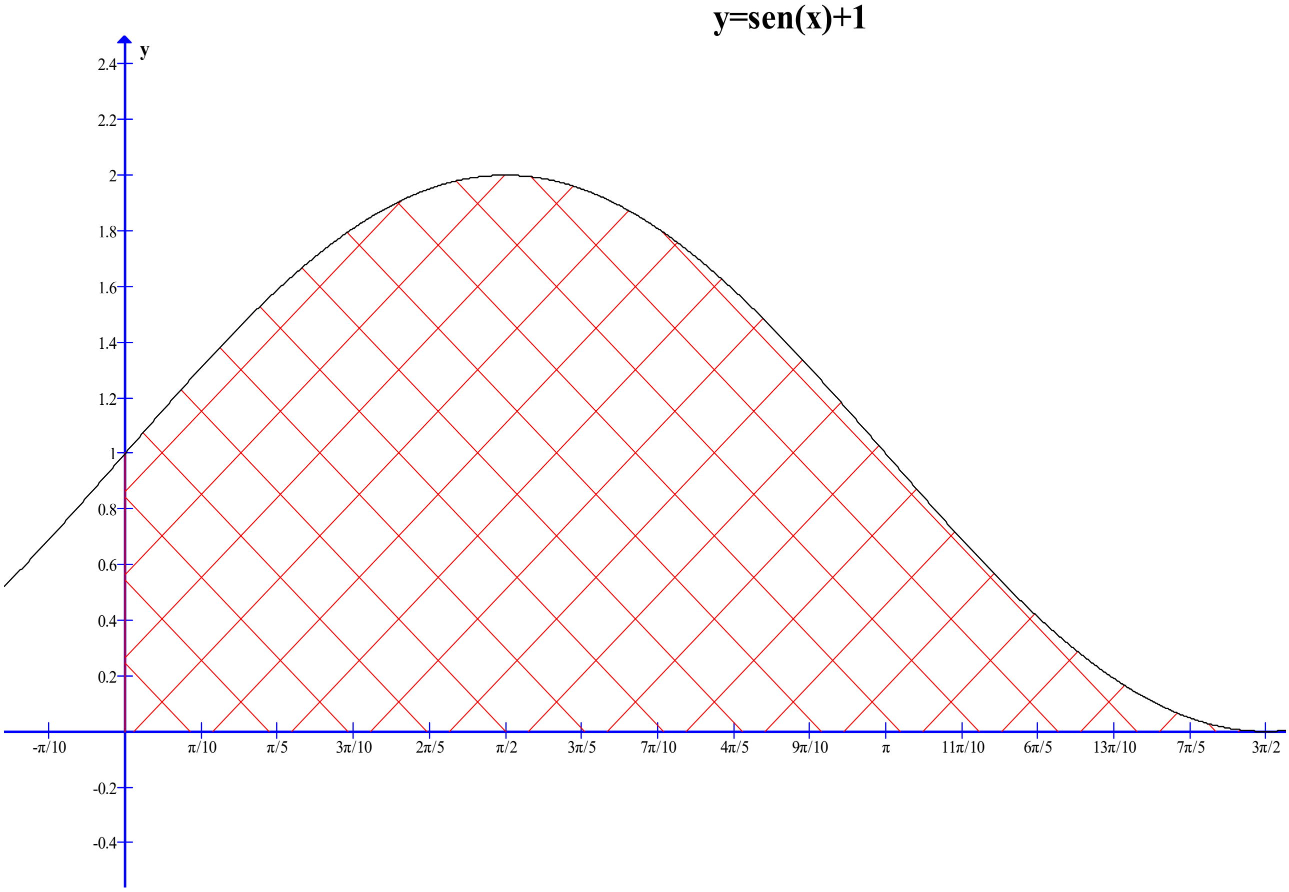


Ejemplo: Determine el área de la región sombreada que se muestra abajo:

1. Respuesta: $\dfrac{115}{3}$ unidades cuadradas.



2. Respuesta: $\dfrac{3\pi}{2}+1 \approx 5.71$ unidades cuadradas.



3. Determinar el área encerrada por la curva cuya ecuación es $f(x)=2+x^2$, el eje x y las líneas $x=1$ y $x=3$. R ≈ 12.67 unidades cuadradas.

4. El área encerrada por la curva cuya ecuación es $f(x)=4-e^{-0.5x}$, el eje x, el eje y y la línea $x=-2$, mide $k-2e$ unidades cuadradas. Determina el valor de k. R/ $k=10$.

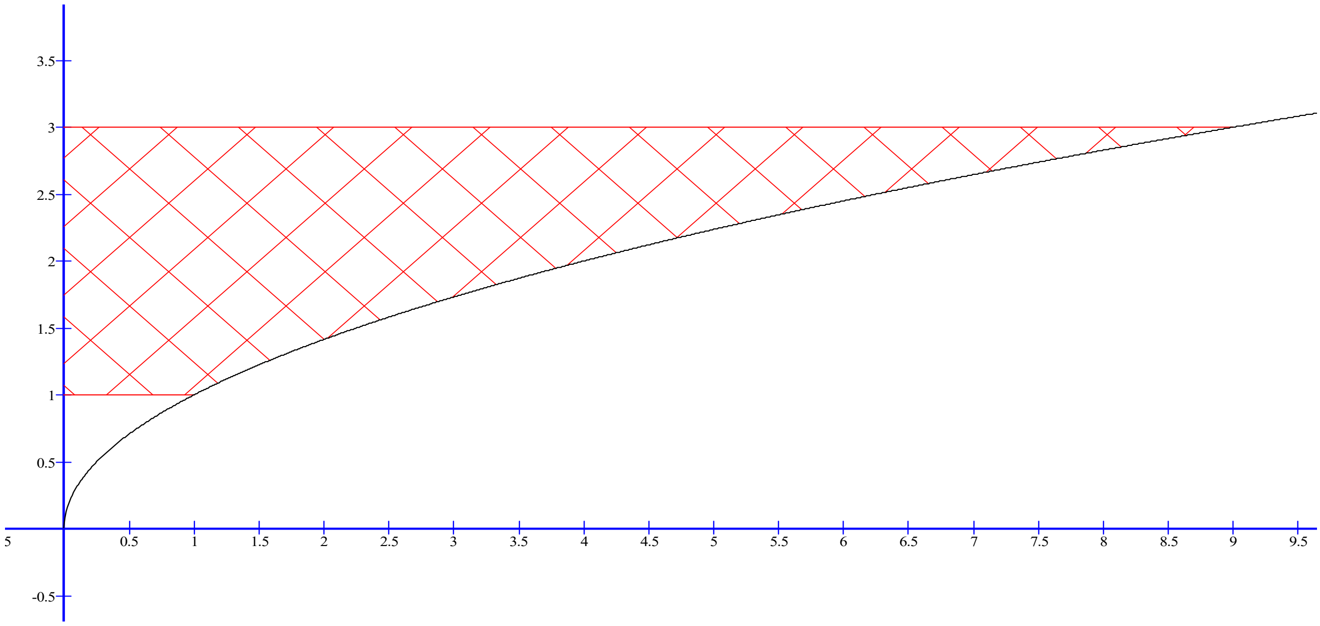
OTRAS OBSERVACIONES ACERCA DE ÁREAS:

1. Para determinar el área bordeada por $y=f(x)$, el eje y y las líneas $y=a$ y $y=b$, debemos hacer el siguiente proceso:

- Primero necesitamos hacer x el sujeto por ejemplo si $y=f(x)$ debemos obtener una nueva ecuación $x=g(y)$.
- Segundo obtener el resultado de la integral definida $\int_a^b x\,dy=\int_a^b g(y)\,dy$ unidades cuadradas. Lo cual corresponde al área pedida.

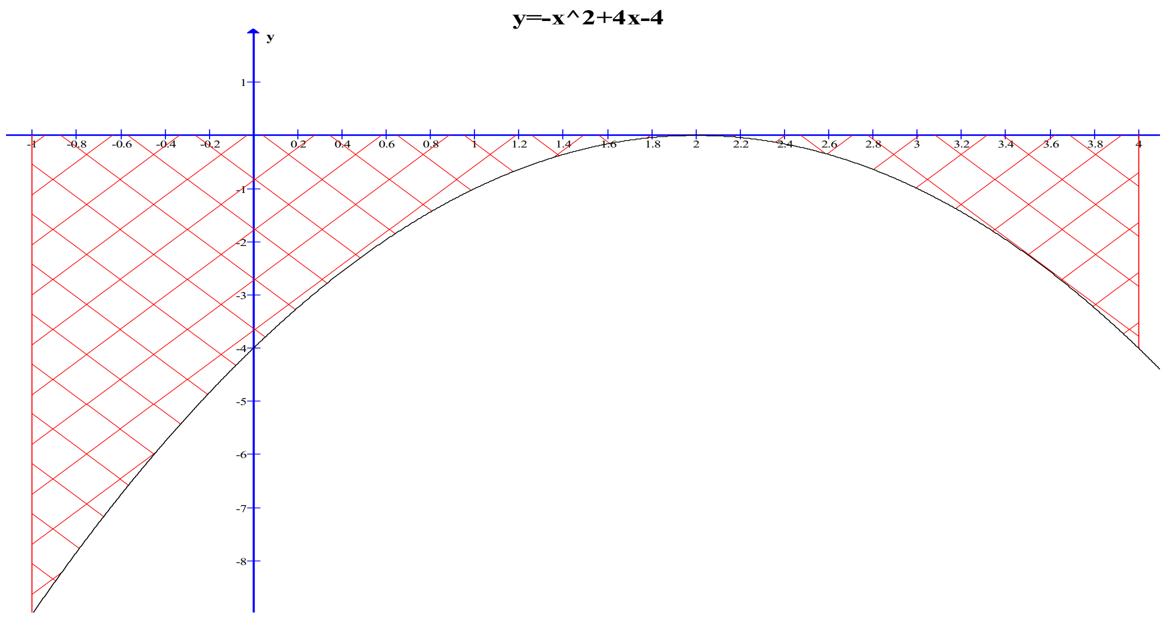
Por ejemplo. Determine el área encerrada por la curva $y = \sqrt{x}$, el eje x; las rectas $y = 1$, $y = 3$.

$$R = \frac{26}{3}u^2$$



2. Si f es negativa en el intervalo $[a,b]$, entonces la integral $\int_a^b f(x)dx$ es un número negativo. Si necesitamos escribir el área A debemos escribirla como $A = -\int_a^b f(x)dx$ o el valor absoluto de la integral $\left|\int_a^b f(x)dx\right|$.

Por ejemplo. Determine el área encerrada por la curva $f(x) = -x^2 + 4x - 4$, el eje x y las rectas $x = -1$ y $x = 4$. $R = \frac{35}{3}u^2$.



3. Es posible que para $f(x)$ se alternen valores positivos y negativos sobre el intervalo $[a,b]$, esto indica que hay por lo menos un punto $x=c$ donde la gráfica corta ala eje x y por ende $y=f(x)$ cambia de signo cuando cruza ese punto. La integral $\int_a^b f(x)dx$ nos da una SUMA ALGEBRAICA de A_1, A_2,..... A_n, de tal manera que debemos hacer unos cambios en los signos de algunas de estas áreas para poder obtener el área total pedida, en general debemos seguir estos pasos:

- Determine los puntos de intersección de la función dada con el eje x en el intervalo $[a,b]$.
- Integre $y=f(x)$ por separado sobre el intervalo $[a,b]$.
- Sume lo requerido (términos positivos, las integrales que resulten negativas deben escribirse positivas).

Por ejemplo:

A. Determine el área entre la gráfica de la función $f(x)=x^3-1$, el eje x y las rectas $x=0$ y $x=2$. $R=3.5u^2$. ¿Qué resultado se hubiese obtenido si hacemos la integral directamente sin tener en cuenta el punto de intersección con el eje x? $R=2u^2$. ¿Cómo interpreta este resultado?

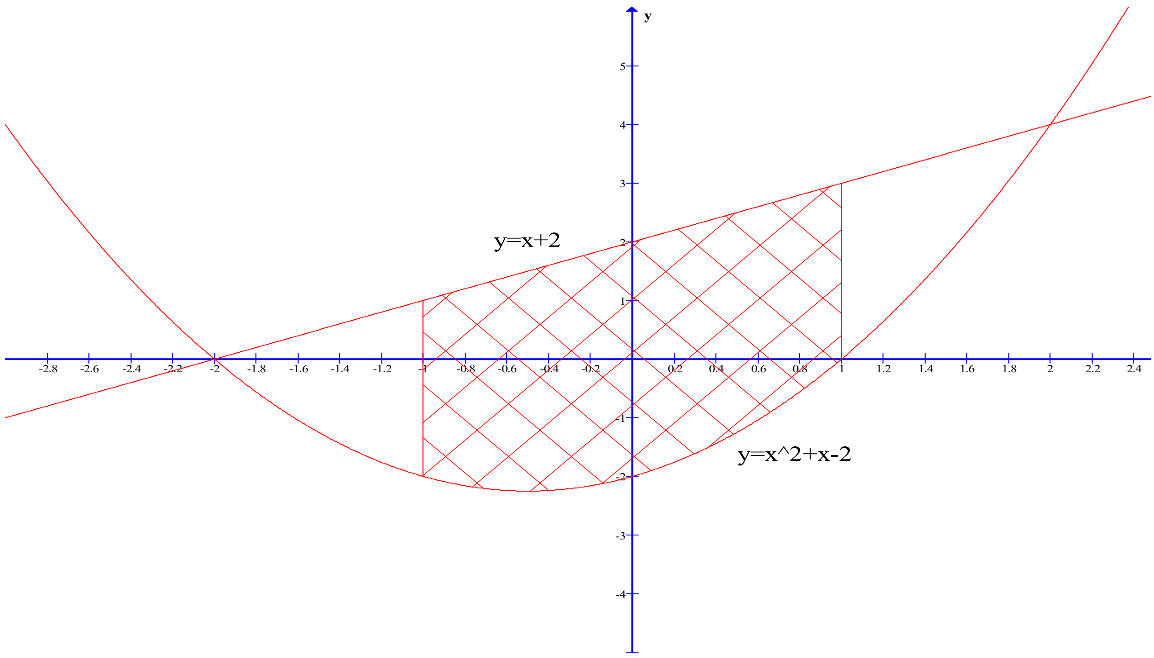
B. Determine el área entre la gráfica de la función $f(x)=x^3-3x^2+2x$, el eje x y las rectas $x=0$ y $x=3$. $R=\frac{11}{4}u^2$.

AREA ENTRE DOS CURVAS.

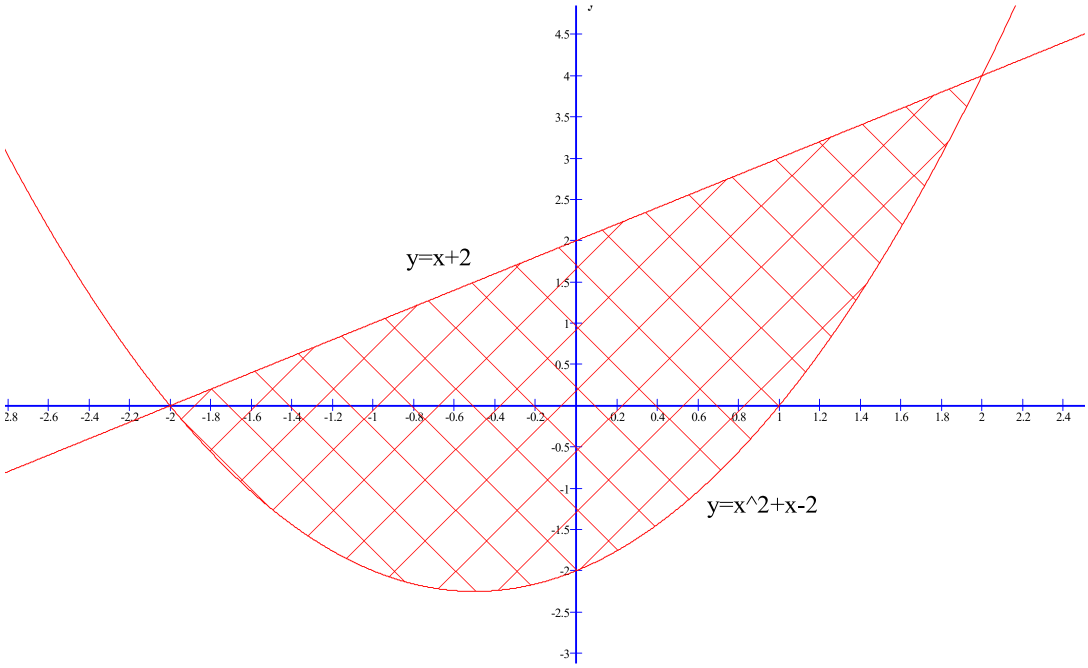
El uso de la integral indefinida también se puede utilizar para hallar el área encerrada entre dos curvas. Considere 2 funciones continuas, $f(x)$ y $g(x)$ en el intervalo $[a,b]$, de tal manera que sobre ese intervalo si $g(x)\geq f(x)$, entonces el área encerrada entre las dos curvas y las líneas rectas $x=a$ y $x=b$ está dada por la expresión: $A=\int_a^b g(x)dx-\int_a^b f(x)dx=\int_a^b [g(x)-f(x)]dx$

Por ejemplo:

A. Determine el área de la región encerrada por las gráficas de las funciones $g(x)=x+2$, $f(x)=x^2+x-2$ y las rectas $x=-1$ y $x=1$. $R=\frac{22}{3}u^2$.



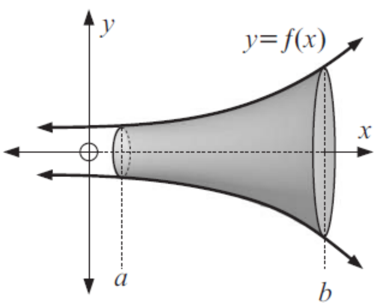
B. Si ahora se pregunta por el área encerrada entre las curvas $g(x)=x+2$ y $f(x)=x^2+x-2$, primero debemos hallar los puntos de intersección de estas rectas para determinar los límites de integración y luego aplicar la fórmula dada. $R=\dfrac{32}{3}u^2$.

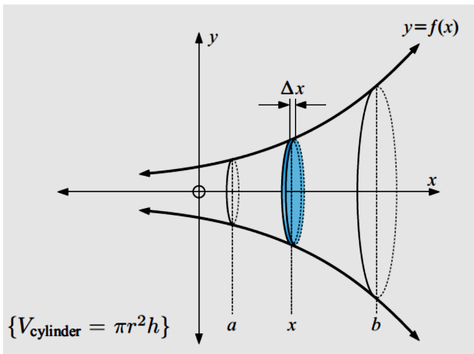


VOLUMENES O SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

Un sólido de revolución se forma por la rotación de una región plana alrededor de una línea llamada eje de revolución que por lo general es el eje x o el eje y. Es importante anotar que dependiendo del eje de rotación la forma varía. Como por ejemplo cuando rotamos de la gráfica de la función $y=x^2, 0\le x\le 2$ podemos obtener diferentes volúmenes cuando es rotada con relación al x o el eje y.

El volumen $V\ unidades$ de cada sólido puede ser cortado en un gran número de discos cilíndricos de espesor sumamente pequeño Δx y radio $f(x)$

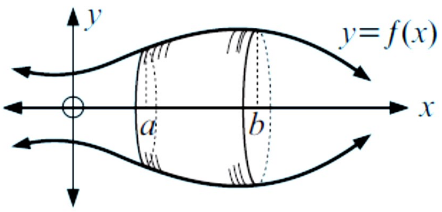




El volumen producido es la suma de los volúmenes de estos infinitesimales discos. De tal manera que el volumen lo podemos expresar como:

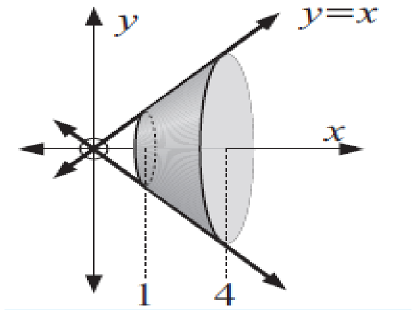
$$V=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{x=a}^{x=b}\pi\left[\mathrm{f}(\mathrm{x_i})\right]^2\Delta x$$

Lo que se traduce en términos de integrales como $V=\int_a^b \pi[f(x)]^2dx$. Por lo tanto el volumen al rotar el área encerrada por la gráfica de la función $f(x)$, el eje x y las rectas $x=a$ y $x=b$ se puede obtener con la expresión $V=\pi\int_a^b y^2dx$.

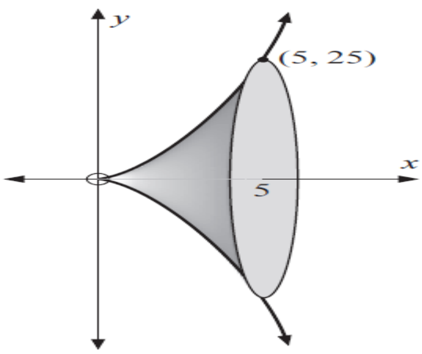


EJEMPLOS:

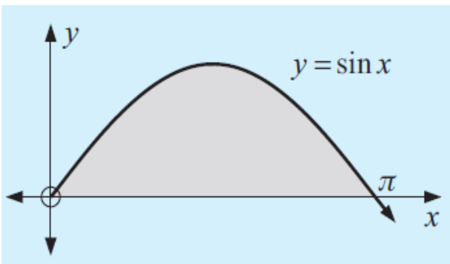
1. Determine el volumen del sólido generado al rotar el área encerrada por la función $f(x)=x$, el eje x y las rectas $x=1$ y $x=4$ cuando se rota alrededor del eje x. $R=21\pi u^3$.



2. Determine el volumen del sólido generado al rotar el área encerrada por la función $y=x^2$, $0\le x\le 5$ cuando se rota alrededor del eje x. $R=625\pi u^3$.



3. Un arco de la gráfica de la función $y=senx$ se rota alrededor del eje x. Determine el volumen del sólido de revolución generado.

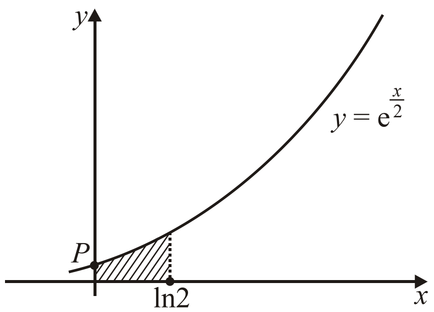


Sugerencia utilice identidades para llegar a la expresión $sen^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$. $R = \frac{\pi^2}{2}u^3$

De igual formar podemos determinar el volumen al rotar el área encerrada por la gráfica de la función $f(x)$, el eje y y las rectas $y = e$ y $y = f$ se puede obtener con la expresión $V = \pi \int_e^f x^2 dy$.

4. La curva $y = \sqrt{x-1}, 1 \le x \le 5$ es rotada con respecto al eje x para formar un sólido de revolución. Dibuje este sólido y determine su volumen $\left(R = 8\pi \, unidades \;\; cúbicas\right)$. Si la misma curva es rotada con respecto al eje y forma un sólido diferente. Dibuje este sólido y determine su volumen $\left(R = 13\,{}^{11}\!/_{15}\,\pi \, unidades \, cúbicas\right)$.
5. Determine el volumen del sólido formado por la rotación de la región encerrada por la curva con ecuación $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ y la línea $y = 3$ con respecto al eje x. $\left(R = \frac{256}{3}\pi \, unidades \, cúbicas\right)$

6. El diagrama muestra parte de la gráfica de $y = e^{\frac{x}{2}}$.



(a) Halle las coordenadas del punto *P*, donde la gráfica corta al eje *y*.

La región encerrada entre la gráfica y el eje *x*, limitado por *x* = 0 y *x* = ln 2, se rota 360° alrededor del eje *x*.

(b) Escriba una integral que representa el volumen del sólido.

(c) Pruebe que el volumen es:

7. La función $f(x)$ está definida como $f(x) = 3 + \frac{1}{2x-5}$, $x \neq \frac{5}{2}$.

(a) Trace la curva de f para –5 ≤ *x* ≤ 5, mostrando las asíntotas.

(b) Usando tu gráfica, escribe:

(i) La ecuación de cada asíntota;

(ii) El valor del intercepto *x*;

(iii) El valor del intercepto y.

(c) La región encerrada por la curva de *f*, el eje *x*, y las rectas *x* = 3 y *x* = *a*, es rotada 360 grados alrededor del eje *x*. Si *V* es el volumen del solido formado.

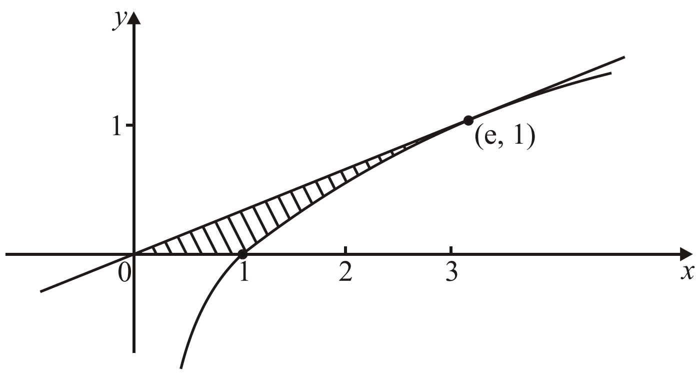
(i) Halle $\int \left(9 + \dfrac{6}{2x-5} + \dfrac{1}{(2x-5)^2} \right) \mathrm{d}x$.

(ii) Por lo tanto, dado que $V = \pi \left(\dfrac{28}{3} + 3\ln 3 \right)$, halle el valor a.

8. (a) Halle la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \ln x$ en el punto (e, 1), y verifique el origen está en esta recta.

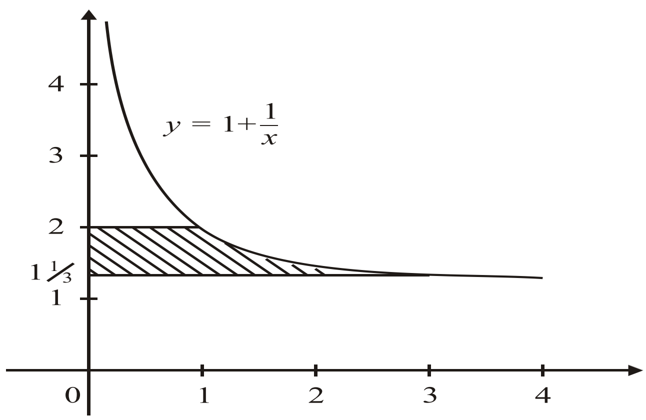
(b) Pruebe que $\dfrac{d}{dx}(x \ln x - x) = \ln x$.

(c) El diagrama muestra la región encerrada por la curva $y = \ln x$, la recta tangente en la parte (a), y la recta $y = 0$.



Use el resultado de la parte (b) para comprobar que el área de esta región es $\dfrac{1}{2}e - 1$.

9. El diagrama muestra la gráfica de la función $y = 1 + \dfrac{1}{x},\ 0 < x < 4$. . Halle el valor **exacto** del área de la región sombreada.



10. Si f es una función tal que $\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 8$.

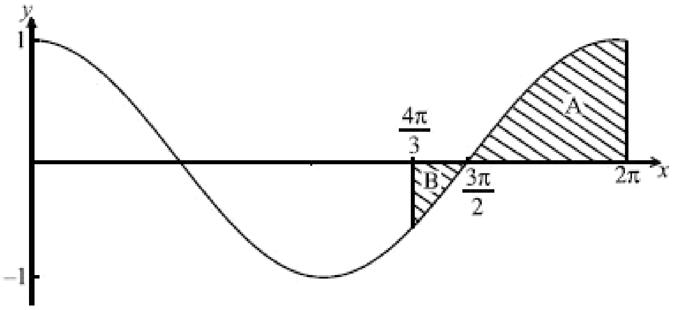
(a) Deduce el valor de:

(i) $\int_0^3 2f(x)\,\mathrm{d}x$;

(ii) $\int_0^3 (f(x)+2)\,\mathrm{d}x$.

(b) Si $\int_c^d f(x-2)\,\mathrm{d}x = 8$, escriba el valor de *c* y *d*.

11. El siguiente diagrama muestra parte de la gráfica de $y = \cos(x)$ para $0 \leq x \leq 2\pi$. Las regiones A y B están sombreadas.



(a) Escriba una expresión para el área de A.

(b) Calcula el área de A.

(c) Halle el área total de las regiones sombreadas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

- Cirrito, F. (2002), Métodos matemáticos (primera edición), Australia, IBID Press, Victoria.
- Mathemathics standard level (2012) IBO.