COLEGIO
SAN AGUSTĪN
EST. 1966

2021 – III BIMESTRE
ASESORÍA DE MATEMÁTICA Y FÍSICA
M.A.E. NM

Guía de trabajo N.° 03: Razones trigonométricas de ángulos agudos

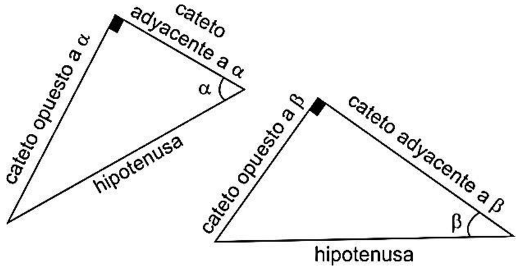
Nombre y apellido: ____

Grado: 4.° de secundaria   Sección: "______"   Fecha: ___ / 09 / 21

Dijo Jesús a sus discípulos: «No juzguéis y no os juzgarán; porque os van a juzgar como juzguéis vosotros, y la medida que uséis, la usarán con vosotros. ¿Por qué te fijas en la mota que tiene tu hermano en el ojo y no reparas en la viga que llevas en el tuyo? Hipócrita; sácate primero la viga del ojo; entonces verás claro y podrás sacar la mota del ojo de tu hermano.» (Mt. 7, 1-5)

COMPETENCIA: Resuelve problemas de forma, movimiento y localización.
DESEMPEÑO: Describe la ubicación o los movimientos de un objeto real o imaginario, y los representa utilizando razones trigonométricas. Describe las posibles secuencias de transformaciones sucesivas que dieron origen a una forma bidimensional.
Combina y adapta estrategias heurísticas, recursos o procedimientos para determinar las razones trigonométricas de un triángulo rectángulo.

Razón trigonométrica de un ángulo agudo es la razón o cociente entre las medidas de dos lados de un triángulo rectángulo.



Se definen 6 razones trigonométricas:

Seno de α:

$$sen\,\alpha = \frac{\text{cateto opuesto a }\alpha}{hipotenusa}$$

Coseno de α:

$$\cos\alpha = \frac{\text{cateto adyacente a }\alpha}{hipotenusa}$$

Tangente de α:

$$tg\ \alpha = \frac{\text{cateto opuesto a }\alpha}{\text{cateto adyacente a }\alpha}$$

Cotangente de α:

$$ctg\ \alpha = \frac{\text{cateto adyacente a }\alpha}{\text{cateto opuesto a }\alpha}$$

Secante de α:

$$\sec\alpha = \frac{hipotenusa}{\text{cateto adyacente a }\alpha}$$

Cosecante de α:

$$\csc\alpha = \frac{hipotenusa}{\text{cateto opuesto a }\alpha}$$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS:

De la definición de las razones trigonométricas:

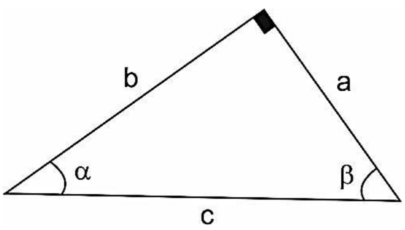
$$ctg\ \alpha = \frac{1}{tg\ \alpha}$$

$$\sec\ \alpha = \frac{1}{\cos\ \alpha}$$

$$\csc\ \alpha = \frac{1}{sen\ \alpha}$$

CO-RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Considerando los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo y sus razones trigonométricas se tiene:



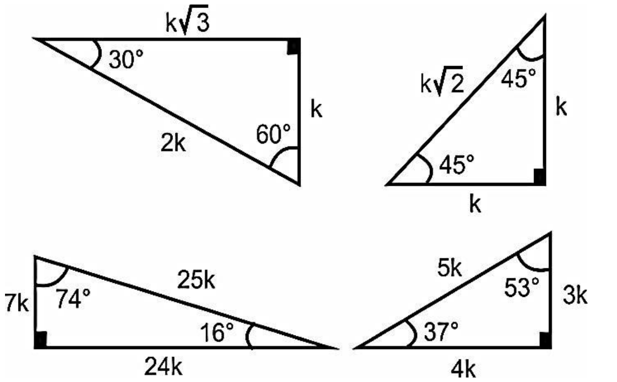
- a: cateto opuesto a α y cateto adyacente a β
- b: cateto adyacente a β y cateto opuesto a α
- c: hipotenusa

Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios y para sus razones trigonométricas se cumple:

$$\alpha + \beta = 90^\circ \begin{cases} \begin{cases} sen\ \alpha = \dfrac{a}{c} = \cos\beta \\ \cos\alpha = \dfrac{b}{c} = sen\beta \end{cases} \\ \begin{cases} \tan\alpha = \dfrac{a}{b} = ctg\beta \\ ctg\,\alpha = \dfrac{b}{a} = \tan\beta \end{cases} \\ \begin{cases} \sec\alpha = \dfrac{c}{b} = \csc\beta \\ \csc\alpha = \dfrac{c}{a} = \sec\beta \end{cases} \end{cases}$$

$$\beta = 90^\circ - \alpha \begin{cases} \begin{cases} sen\,\alpha = \cos(90^\circ - \alpha) \\ \cos\alpha = sen\ (90^\circ - \alpha) \end{cases} \\ \begin{cases} \tan\alpha = ctg\ (90^\circ - \alpha) \\ ctg\,\alpha = \tan\ (90^\circ - \alpha) \end{cases} \\ \begin{cases} \sec\alpha = \csc(90^\circ - \alpha) \\ \csc\alpha = \sec\ (90^\circ - \alpha) \end{cases} \end{cases}$$

TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS NOTABLES



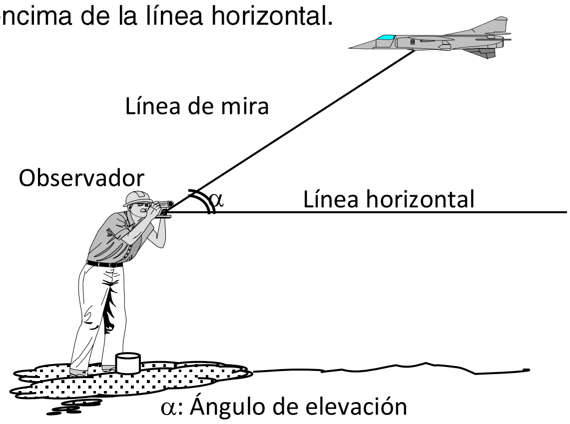
	sen	cos	tan
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
37°	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$
53°	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{3}$
16°	$\frac{7}{25}$	$\frac{24}{25}$	$\frac{7}{24}$
74°	$\frac{24}{25}$	$\frac{7}{25}$	$\frac{24}{7}$

ÁNGULOS VERTICALES

Son aquellos ángulos contenidos en un plano vertical. Los ángulos verticales que vamos a conocer son: el ángulo de elevación y el ángulo de depresión.

Ángulos de Elevación

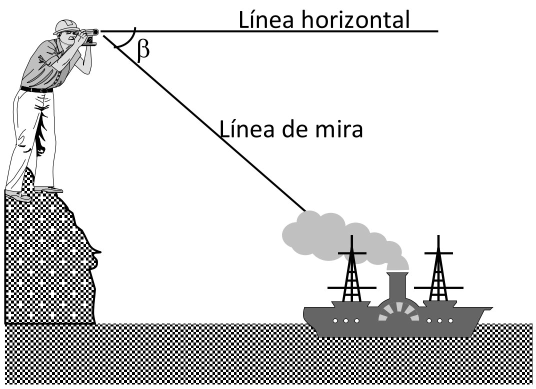
Es el ángulo formado por la línea horizontal y la línea de mira cuando el objeto se encuentra por encima de la línea horizontal.



α: Ángulo de elevación

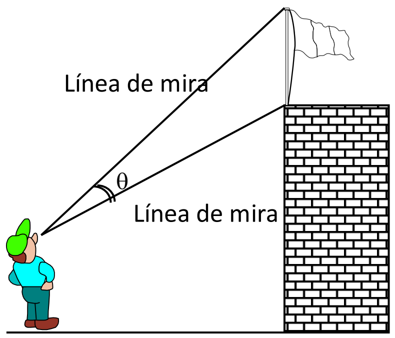
Ángulo de Depresión

Es aquel ángulo formado por la línea horizontal y la línea de mira cuando el objeto se encuentra por debajo de la línea horizontal.



β: Ángulo de depresión

Cuando se observa la totalidad de un objeto se forma el ángulo de observación.



θ : Ángulo de observación

PRACTICAMOS

01.Se tiene un triángulo rectángulo ABC (recto en B).

a) Grafica el triángulo. Representa sus vértices y lados.

b) Completa la siguiente tabla para cada uno de los casos. Muestra tus cálculos.

a	b	c	*Sen A*	*Cos A*	*Tan C*
9		12			
	4		1/2		

c) Si se conoce la medida dos lados de un triángulo rectángulo ¿Es posible calcular las razones trigonométricas de uno de sus ángulos agudos? Justifica tu respuesta.

d) Si se conoce la medida de un lado del triángulo rectángulo y una razón trigonométrica de uno de los ángulo agudos ¿Es posible determinar las medidas de los otros dos lados? Justifica tu respuesta.

e) Si se conoce una razón trigonométrica de uno de los ángulos agudos ¿Es posible conocer las medidas de los lados? Justifica tu respuesta.

02. Simplifique la expresión:

$$E=\frac{Sen\,30^{o}+\text{Tan }45^{o}+2\,\text{Tan }37^{o}}{\left(Sen\ 37^{o}+\frac{2}{5}\right)^{Cos\,37^{o}}}$$

a) 1 b) 1/2 c) 1/3 d) 1/4 e) 3

03. Halle: $P=\dfrac{\text{Sen }30^{o}.\text{Cos }45^{o}\ .\text{Tan }45^{o}}{Cos\,37^{o}\ .\text{Sen }45^{o}\ .\text{Cosec}\,53^{o}}$

a) 1 b) 1/2 c) 1/3 d) 1/4 e) 3

04. Si se cumple que:

$\text{Cos}\,(3\alpha+12°)-Sen\ (\alpha+18°)=0$

a) Justifica que $\alpha=15°$.

b) Calcula el valor de:

$$E=\frac{6\,\text{Cos}\ (4\alpha)+10\,Sen\ (\alpha+22°)+5\,Tg\ (3\alpha)}{2\sqrt{3}.Tg(\alpha+15°)}$$

c) Halla el valor de tanα, a partir del triángulo notable para el ángulo de 30°.

05. Si: $Sen\,\theta=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

Calcular: $E=3\text{Sec}\,\theta-\sqrt{7}.Tg\,\theta$

a) 1/3 b) 2/3 c) 5/3 d) 7/3 e) 1

06. Si: $\text{Sen}\,(2\theta)=\dfrac{2}{3};\ 2\theta:\acute{a}ngulo\ agudo$

Calcule: $\text{Tan}\ \theta+Cot\ \theta$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

07. Halle "x" si :

$$\text{Sec}\ \ (x+30^{o}).\text{Cos}\ \ (2x\text{-}10^{o})=1$$

a) 10º b) 20º c) 30º d) 40º e) 50º

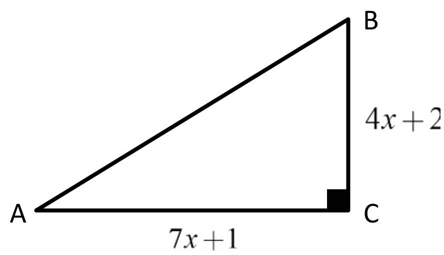
08. En un triángulo rectángulo ABC recto en B se cumple que: $E=2Tan\,A=Csc\,C$ Calcular:

$E=2SenA+\sqrt{3}.TgC$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

09. Del gráfico calcular "x". Si: $Tg\ B=\dfrac{3}{2}$

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5



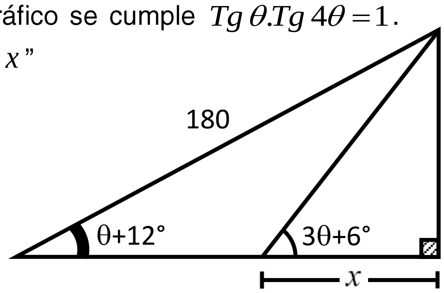
10. Si: $\text{Sec}\,x=\sqrt{7}$

Calcular: $E=Tg^{2}x+\sqrt{42}\,Sen\,x$

a) 10 b) 12 c) 14 d) 18 e) 20

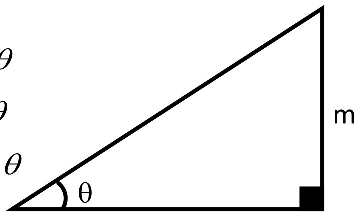
11. Si en el gráfico se cumple $Tg\,\theta.Tg\,4\theta=1$. Calcular : "x"

a) 90
b) 30
c) 90$\sqrt{3}$
d) 30$\sqrt{3}$



e) $10\sqrt{3}$

12. Determinar el área del triángulo mostrado.



a) 0,5 m $Tg\ \theta$

b) 0,5 m $Ctg\ \theta$

c) 0,5 m^2 $Tg\ \theta$

d) 0,5 m^2 $Ctg\ \theta$

e) 0,5 m^2

13. El ángulo de depresión desde el techo del edificio A, a los pies de un segundo edificio B, a través de la misma calle y 40 metros de distancia es de 65°. El ángulo de elevación del techo del edificio B a la azotea del edificio A es de 35°. ¿Qué altura tiene el edificio B?

14. Gonzalo observa la parte superior de una torre con un ángulo de elevación α. Si avanza 6 m hacia la torre, el nuevo ángulo de elevación es 45° y acercándose 4 m más el nuevo ángulo de elevación es 53°. Calcula $Tg\ \alpha$.

15. Un niño de 1,5 m de estatura divisa una piedra en el suelo con un ángulo de depresión de 37°. ¿A qué distancia del niño se encuentra la piedra?

a) 1 m   b) 2   c) 3   d) 2,5   e) 4

16. Desde lo alto de un faro, se observa a un mismo lado, dos barcos anclados, con ángulos de depresión de 53° y 37°. Si los barcos están separados una distancia de 14 m. ¿Cuál es la altura del faro?

a) 16 m   b) 12   c) 24   d) 32   e) 8

17. Desde lo alto y bajo de un muro se observa lo alto de un poste con ángulos de elevación de 37° y 45° respectivamente. Si la distancia entre el muro y poste es 8 m. Halle la suma de sus alturas.

a) 6 m   b) 8   c) 10   d) 12   e) 16

18. Desde un punto ubicado a 150 m del inicio de un camino inclinado "θ" respecto a la horizontal se ve su parte más alta con ángulo de elevación "α", si: $Ctg\alpha - Ctg\theta = \frac{1}{3}$. ¿Qué altura tiene el camino?

a) 150 m   b) 80   c) 450   d) 350   e) 240

19. A una distancia de 20 m de un poste se observa su parte alta con ángulo de elevación 37°. Determinar la visual.

a) 5 m   b) 15   c) 25   d) 35   e) 40

20. Una persona de "h" de estatura observa un edificio de "H" de altura con ángulo de elevación "α". Determine la distancia entre la persona y el edificio.

a) (H - h) $Tg\ \alpha$

b) (H - h) $Ctg\ \alpha$

c) (H - h) $Sec\ \alpha$

d) (H - h) $Csc\ \alpha$

e) H . h . $Sec\ \alpha$

21. Desde un punto de Tierra se ubica lo alto de un edificio con un ángulo de elevación "α", nos acercamos una distancia "d" y el ángulo de elevación sería "θ". Halle la altura del edificio.

a) $\dfrac{d}{tg\alpha + tg\theta}$

b) $\dfrac{d}{tg\alpha - tg\theta}$

c) $\dfrac{d}{ctg\alpha - ctg\theta}$

d) $\dfrac{d}{ctg\theta - ctg\alpha}$

e) $\dfrac{d}{sen\alpha + sen\theta}$

Referencias:

i. Urban P., Martin R., Haese R., Haese S., Haese M. & Humphries M. (Segunda edición). (2008). Mathematics HL. Australia: Haese & Harris publications.

ii. Zill, D. & Dewar, J. (2012). Álgebra, trigonometría y geometría analítica. (3ª ed). México: McGraw-Hill Educación.