

# LÍMITES



Nadie es bueno en su interior si actúa por la fuerza; aunque sea bueno lo que hace. (Conf XII,9)



# LÍMITES

- La noción de límite es una idea central en la matemática actual y es base de otras ideas fundamentales como la derivada o la integral.
- Su gestación a lo largo de la historia fue lenta y complicada. Hasta principios del siglo XIX los matemáticos trabajaban con los límites sin tener muy claro su verdadero significado.

Nadie es bueno en su interior si actúa por la fuerza; aunque sea bueno lo que hace. (Conf XII,9)

# LÍMITE



- Para la función  $f(x) = x+5$ , tabularemos los valores cercanos a 2.

Cuando  $x$  se acerca a 2, la función “tiende” a 7



$x$	$F(x)$	$x$	$F(x)$
1,0	6	3,0	8
1,5	6,5	2,5	7,5
1,9	6,9	2,15	7,15
1,95	6,95	2,1	7,1
1,99	6,99	2,05	7,05
1,995	6,995	2,01	7,01
1,999	6,999	2,001	7,001

Nadie es bueno en su interior si actúa por la fuerza; aunque sea bueno lo que hace. (Conf XII,9)

# LÍMITE



- Para la función  $f(x) = (x-1)/(x^2-1)$ , tabularemos los valores cercanos a 1.

Cuando  $x$  se acerca a 1, la función “tiende” al valor 0,5



$x$	$F(x)$	$x$	$F(x)$
0,5	0,667	2,0	0,333
0,9	0,526	1,5	0,400
0,95	0,513	1,15	0,465
0,98	0,505	1,1	0,476
0,99	0,503	1,05	0,488
0,995	0,501	1,01	0,498
0,999	0,500	1,001	0,499

Nadie es bueno en su interior si actúa por la fuerza; aunque sea bueno lo que hace. (Conf XII,9)

# LÍMITE



- Para la función  $f(x) = (\text{sen}x)/x$ , tabularemos los valores cercanos a 0.

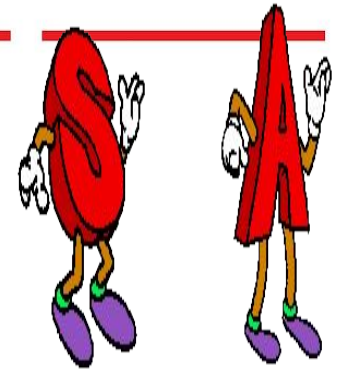
Cuando  $x$  se acerca a 0, la función “tiende” al valor 1



$x$	$F(x)$	$x$	$F(x)$
-1	0,842	1	0,842
-0,5	0,958	0,5	0,958
-0,3	0,985	0,3	0,985
-0,2	0,993	0,2	0,993
-0,1	0,998	0,1	0,998
-0,05	0,999	0,05	0,999
-0,01	0,999	0,01	0,999

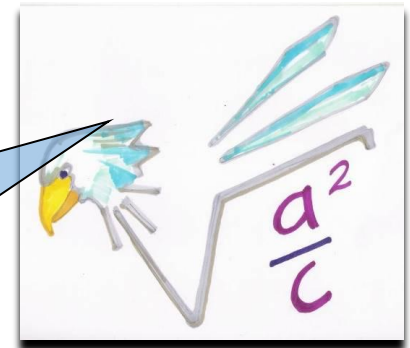
Nadie es bueno en su interior si actúa por la fuerza; aunque sea bueno lo que hace. (Conf XII,9)

# LÍMITE



- El límite de una función cuando su variable independiente se acerca a un valor dado es el valor al cual tiende la función en este acercamiento.
- NOTACIÓN:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$



Nadie es bueno en su interior si actúa por la fuerza; aunque sea bueno lo que hace. (Conf XII,9)

---

# LÍMITES

- De los ejemplos anteriores tenemos:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x + 5) = 7$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1} = 0,5$$

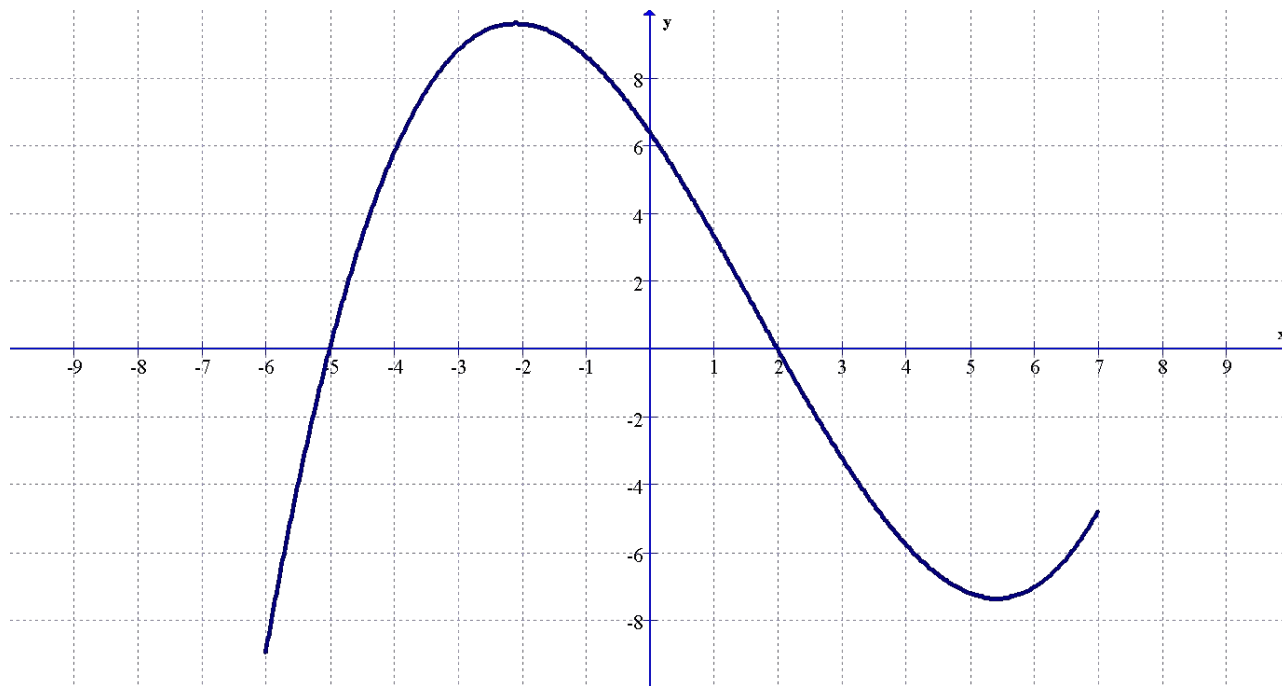
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen} x}{x} = 1$$



Nadie es bueno en su interior si actúa por la fuerza; aunque sea bueno lo que hace. (Conf XII,9)

# CÁLCULO DE LÍMITES GRAFICAMENTE

- En la gráfica determinar:



$$\lim_{x \rightarrow -4} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$$

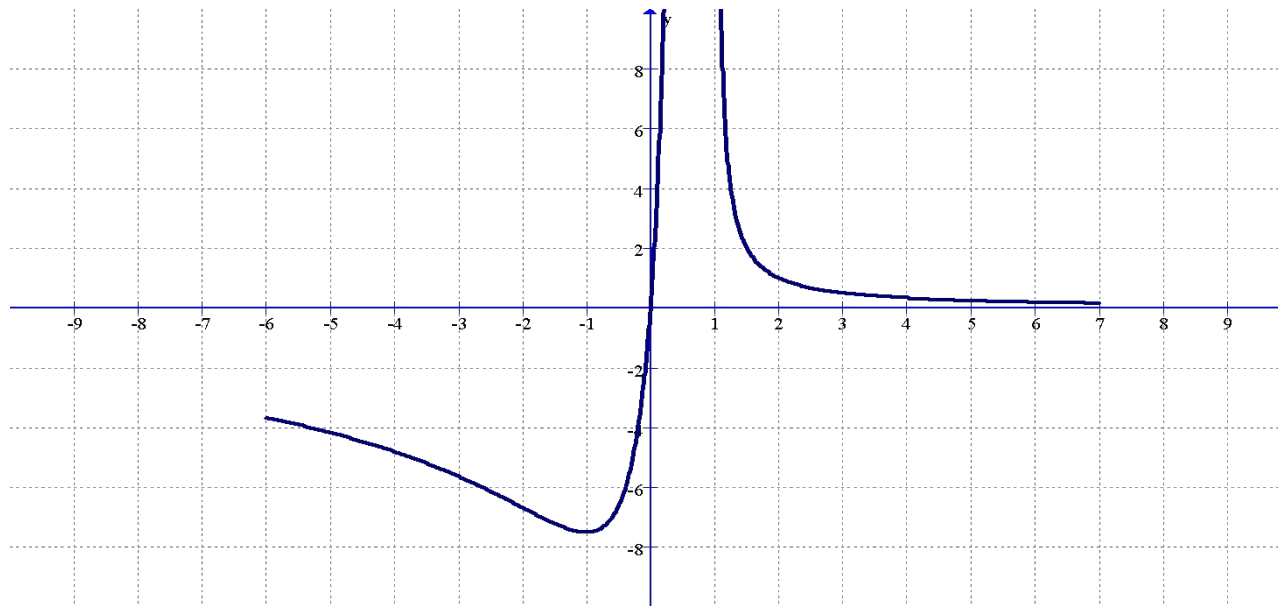
No hay que aplicar a todos la misma medicina ,aunque a todos se debe el mismo amor. (Cat Prim XV,23)



# CÁLCULO DE LÍMITES GRAFICAME



- En la gráfica determinar:



$$\lim_{x \rightarrow -4} f(x)$$

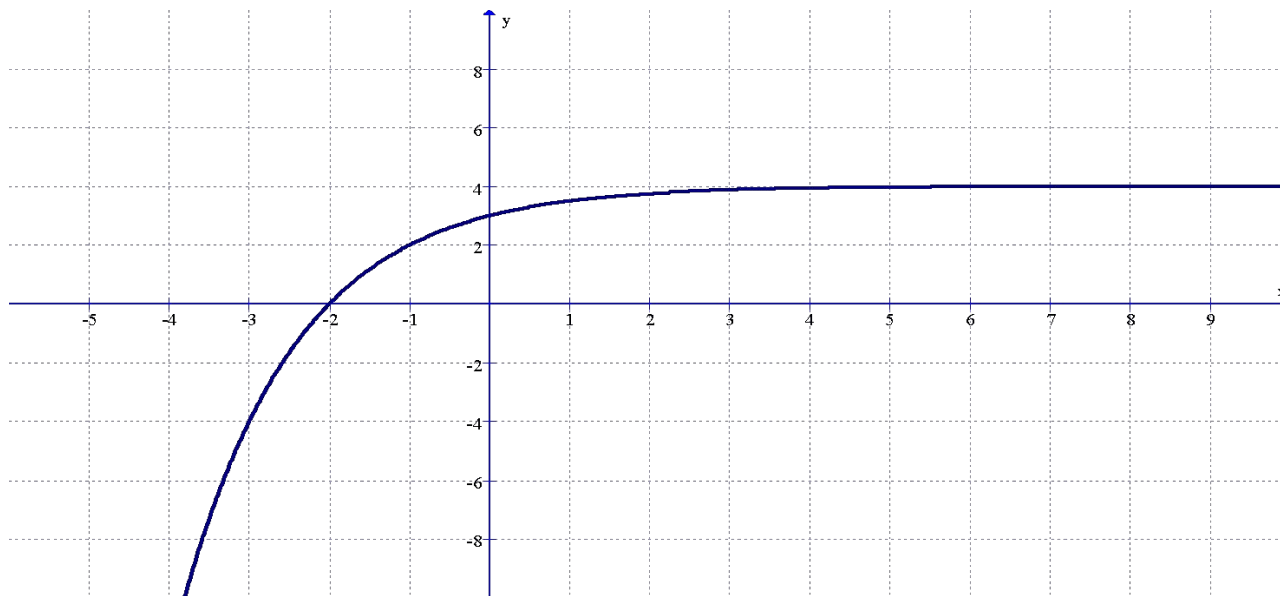
$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

No hay que aplicar a todos la misma medicina ,aunque a todos se debe el mismo amor. (Cat Prim XV,23)

# CÁLCULO DE LÍMITES GRAFICAMENTE



- En la gráfica determinar:



$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$$

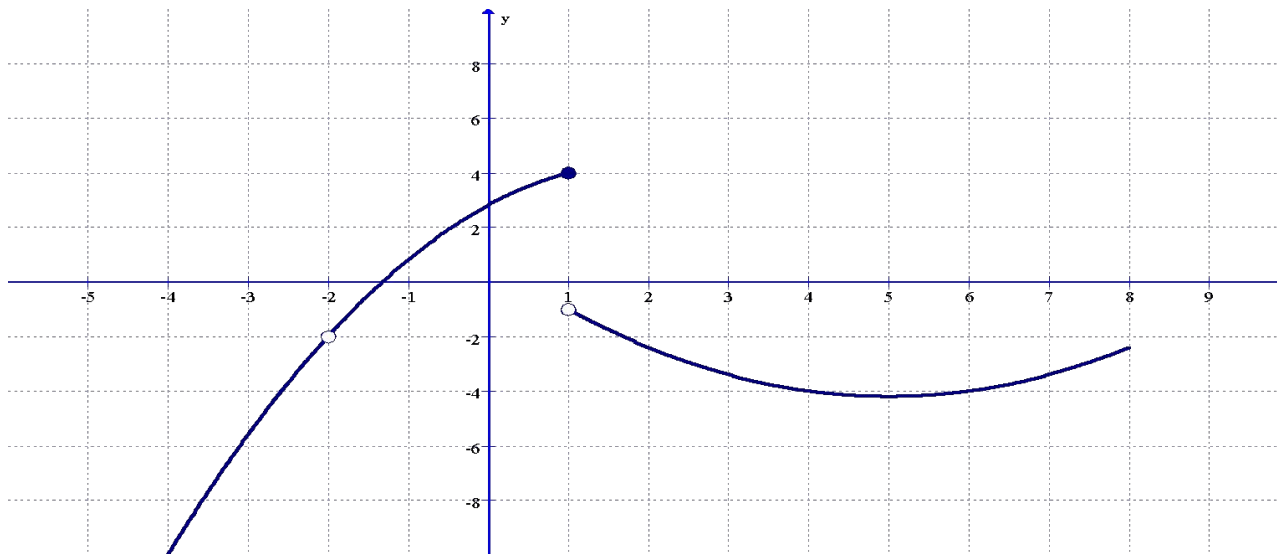
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

No hay que aplicar a todos la misma medicina ,aunque a todos se debe el mismo amor. (Cat Prim XV,23)

# CÁLCULO DE LÍMITES GRAFICAMENTE



- En la gráfica determinar:



$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$$

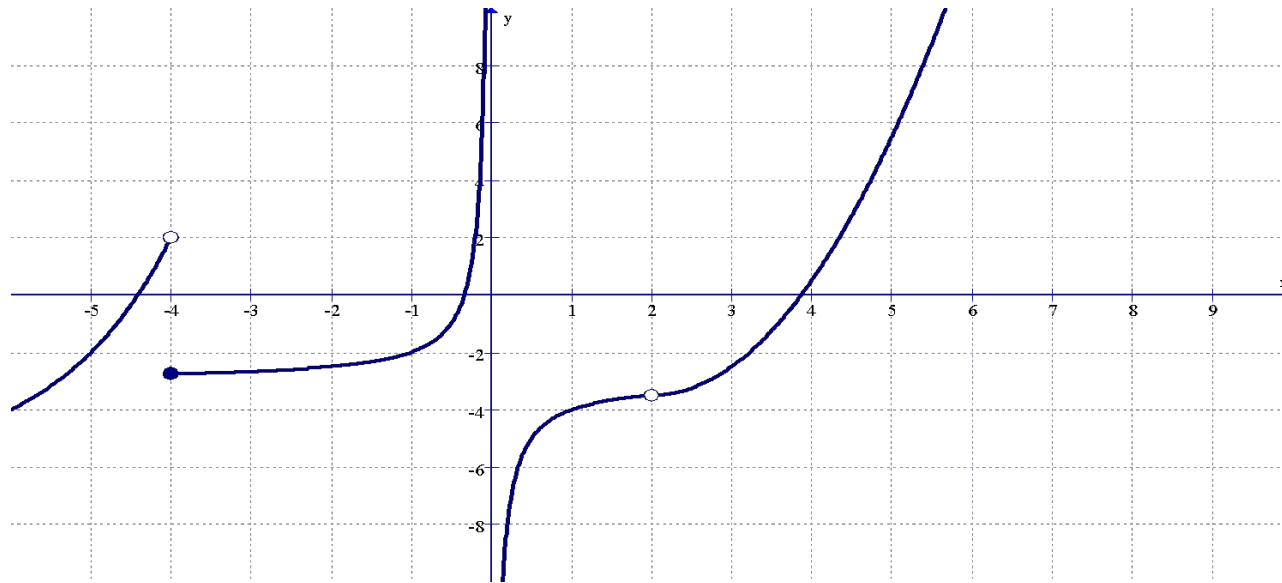
$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

No hay que aplicar a todos la misma medicina ,aunque a todos se debe el mismo amor. (Cat Prim XV,23)

# CÁLCULO DE LÍMITES GRAFICAMENTE



- En la gráfica determinar:

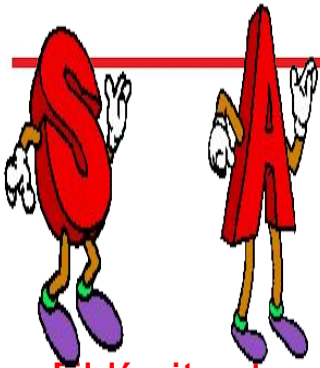


$$\lim_{x \rightarrow -4} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

No hay que aplicar a todos la misma medicina ,aunque a todos se debe el mismo amor. (Cat Prim XV,23)

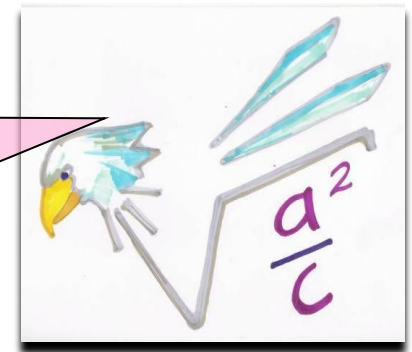


## EXISTENCIA DEL LÍMITE

- El límite de una función  $f(x)$  cuando su variable tiende a un valor “a” existe sólo si el acercamiento que se realiza por ambos lados (derecha e izquierda), la función tiende a un único valor.

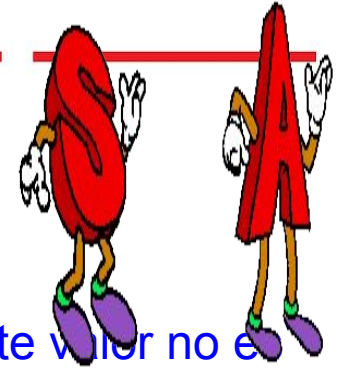
$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \iff$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$



No hay que aplicar a todos la misma medicina ,aunque a todos se debe el mismo amor. (Cat Prim XV,23)

# CÁLCULO ANALÍTICO DE LÍMITES



- Evaluamos en la función el valor al cual tiende la variable, si éste valor no es una indeterminación ( $0/0$ ,  $\infty/\infty$ ,  $0^0$ ), éste valor es la respuesta.

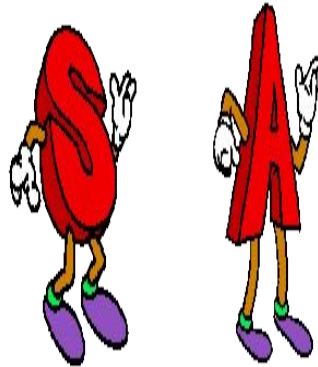
$$\begin{array}{lll} \lim_{x \rightarrow 4} (x^2 - 3x + 1) & \lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{6 - x} & \lim_{x \rightarrow -1} \sqrt[3]{\frac{3x^2 - 2x + 3}{x^5 + 2}} \\ \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 5}{x^2 - 9} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 10x - 6}{x^2 - 3x} & \lim_{x \rightarrow 3} \frac{5 - x}{x + 1} \end{array}$$

No hay que aplicar a todos la misma medicina ,aunque a todos se debe el mismo amor. (Cat Prim XV,23)

# CÁLCULO ANALÍTICO DE LÍMITES

- Cuando el valor es una indeterminación, se factoriza y se elimina la indeterminación.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$



$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - (a-1)x - a}{x^2 - (a-2)x - 2a}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 6x^2 + 9x}{x^3 + 5x^2 + 3x - 9}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 17x + 20}{4x^2 - 25x + 36}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^3 - 5x^2 - 2x - 3}{4x^3 - 13x^2 + 4x - 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{2x^2 - ax - a^2}$$

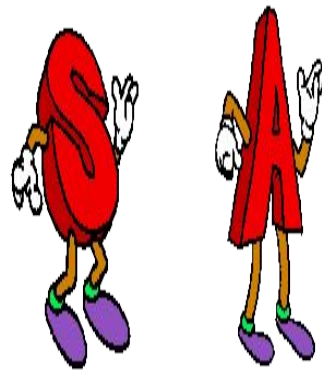
No hay que aplicar a todos la misma medicina ,aunque a todos se debe el mismo amor. (Cat Prim XV,23)

# CÁLCULO ANALÍTICO DE LÍMITES

- En el caso de existir radicales, primero se racionaliza, luego se factoriza y finalmente se simplifica.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x - 6}{1 - \sqrt{4x - 7}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{5 + x}}{1 - \sqrt{5 - x}}$$



$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x + 3}{\sqrt{x^2 + 7} - 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{b^2 - x} - \sqrt{b^2 - a}}{x - a}$$

No hay que aplicar a todos la misma medicina ,aunque a todos se debe el mismo amor. (Cat Prim XV,23)



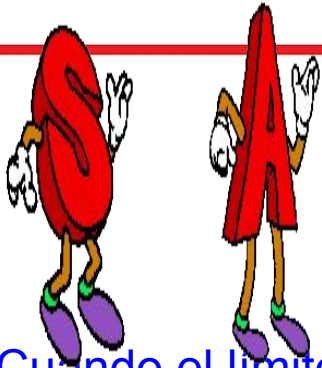


**X TIENDE A INFINITO**

En el fondo las matemáticas son simples

más en [cuantarazon.com](http://cuantarazon.com)

No hay que aplicar a todos la misma medicina ,aunque a todos se debe el mismo amor. (Cat Prim XV,23)



# CÁLCULO ANALÍTICO DE LÍMITES

- Cuando el límite es al infinito, se divide numerador y denominador entre la variable elevada al mayor grado entre numerador y denominador.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 6}{x^2 + 5}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^6 - 5x^3 + 6}{3x^6 - 3x^4 - 2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 5x + 4}{x^7 - 2x^5 + 1}$$

¿Podemos generalizar estos resultados?

# EJERCICIOS

- Calcular los siguientes límites:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & x < -2 \\ x^2 - 4 & x \geq -2 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow -2} f(x)$$



$$g(x) = \begin{cases} x - 5 & x < -3 \\ 1 - x^2 & -3 \leq x < 2 \\ 3 - 2^x & x \geq 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$$

---

## EJERCICIOS

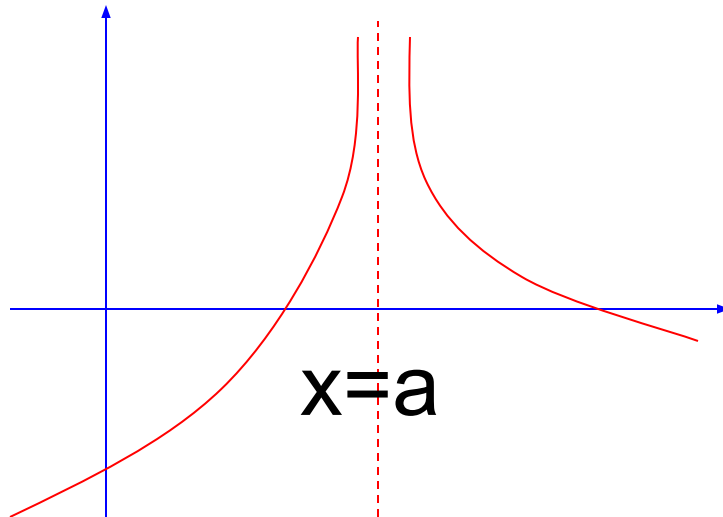
Sea la función :  $f(x) = \frac{x^2 - mx + 3x - 3m}{x - m}$

Hallar  $m$  para que  $\lim_{x \rightarrow m} f(x) = m^2 - 17$

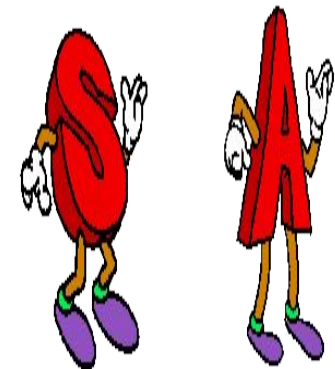


# ASÍNTOTAS

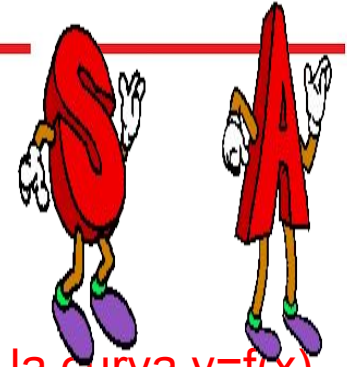
- Asíntota Vertical: La recta  $x=a$  es una asíntota vertical de la curva  $f(x)$ , si:



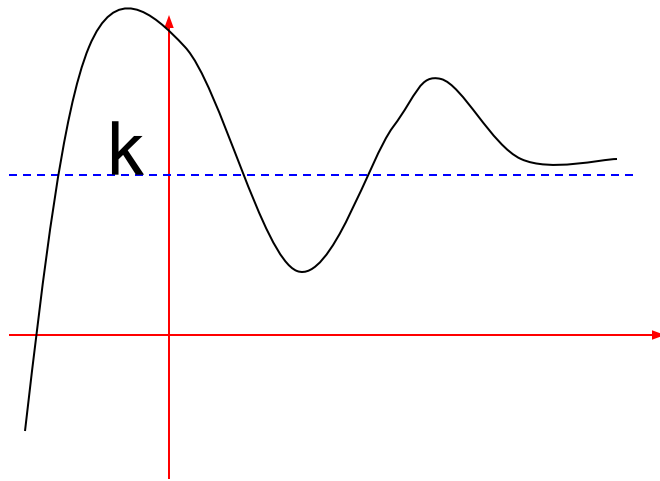
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$$



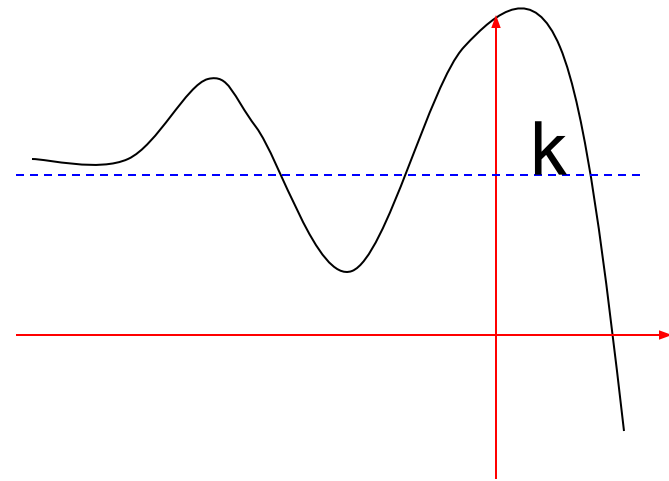
# ASÍNTOTAS



- Asíntota horizontal: La recta  $y=k$  es una asíntota horizontal de la curva  $y=f(x)$  si:



$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = k$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = k$$

---

# EJERCICIOS

- Determinar las asíntotas de cada función y esbozar su gráfica respectiva:

$$f(x) = \frac{x^2 + 9}{(x-3)^2}$$

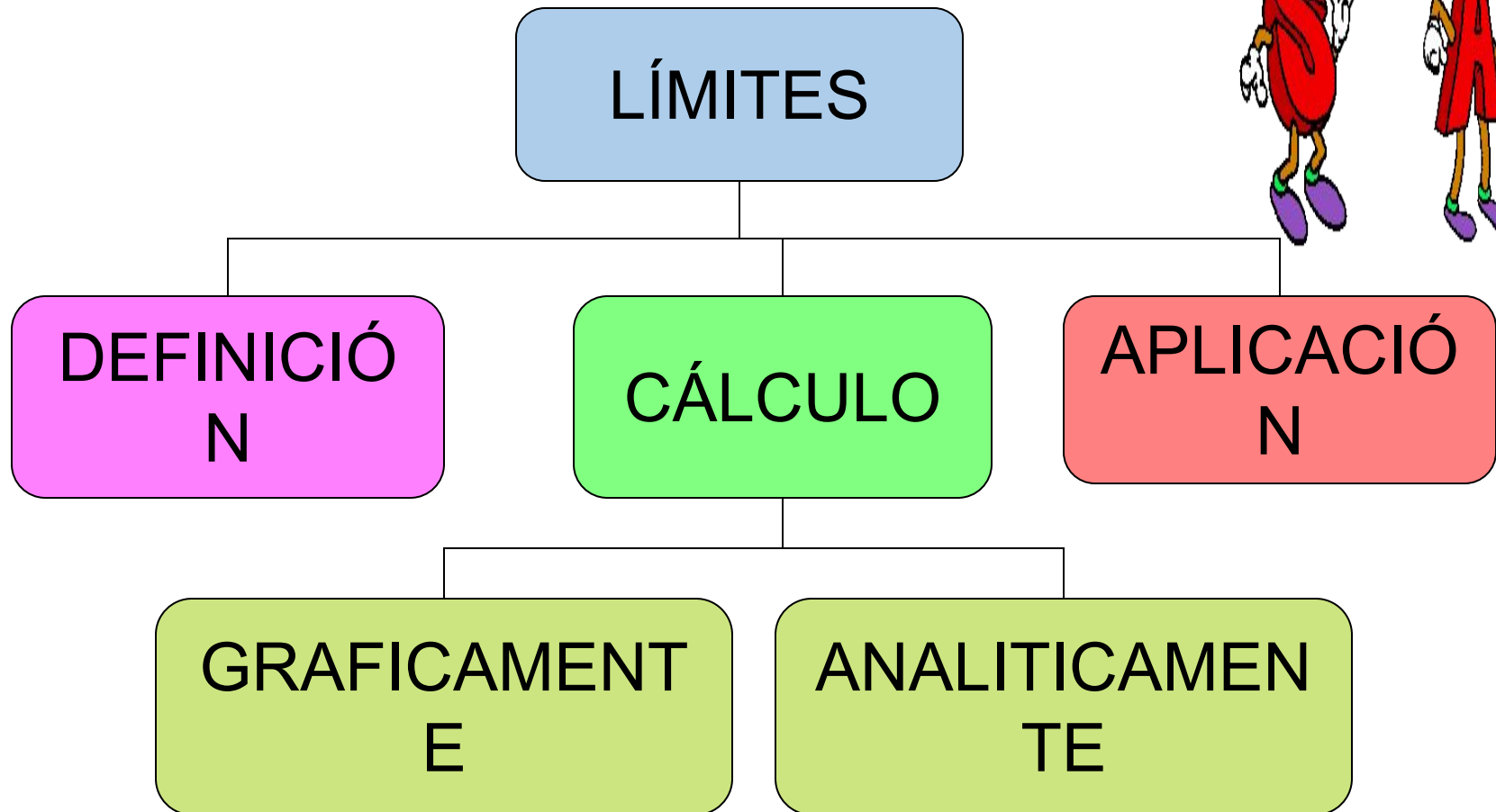
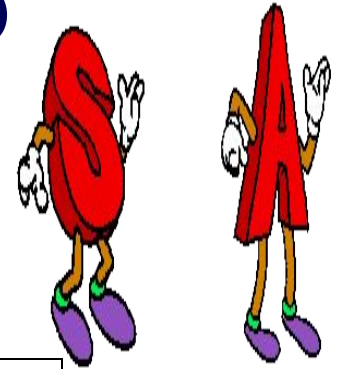


$$f(x) = \frac{1-x^2}{x^2-4}$$

$$f : x \rightarrow \frac{x-5}{x^2-7x+10}$$

$$f : x \rightarrow \frac{x^2 + 2x - 1}{x}$$

# LO QUE HEMOS APRENDIDO



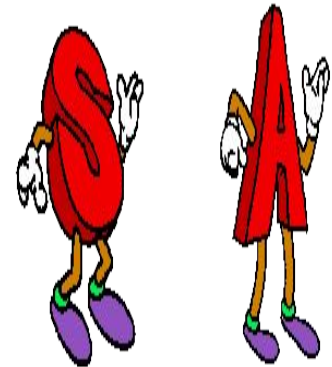
PROF. ALBERTO POOL

La tristeza seca el alma y quita a las palabras su frescura. (Cat prim 7,11)



---

# PRÁCTICA AUTOEVALUACIÓN



PROF. ALBERTO POOL

La tristeza seca el alma y quita a las palabras su frescura. (Cat prim 7,11)