Guía de trabajo N.° 04: Razones trigonométricas de ángulos en posición normal.

Nombre y apellido: ____

Grado: 4.° de secundaria Sección: “______” Fecha: ___ / 09 / 21

Dijo Jesús a sus discípulos: «No contéis a nadie lo que habéis visto, hasta que el hijo del hombre resucite de entre los muertos, esto se les quedo grabado y discutían que quería decir aquello de resucitar entre los muertos.» (Mc 9, 2-10)

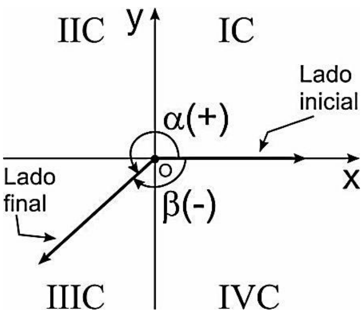
COMPETENCIA: Resuelve problemas de forma, movimiento y localización.

DESEMPEÑO: Describe la ubicación o los movimientos de un objeto real o imaginario, y los representa utilizando razones trigonométricas de ángulos en posición normal. Describe las posibles secuencias de transformaciones sucesivas que dieron origen a una forma bidimensional.
Combina y adapta estrategias heurísticas, recursos o procedimientos para determinar las razones trigonométricas de un un ángulo en posición normal.

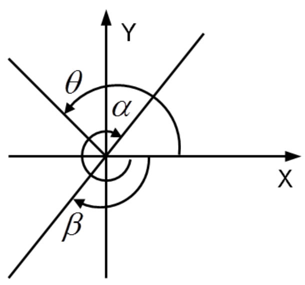
ÁNGULO EN POSICIÓN NORMAL

Ángulo trigonométrico cuyo vértice coincide con el origen de coordenadas del sistema cartesiano y su lado inicial coincide con la parte positiva del eje de abscisas. Si se mide en sentido antihorario su medida se considera positiva y si se mide en sentido horario su medida se considera negativa.

Según su medida, su lado final se ubicará en cualquier región del plano; siendo esta ubicación la que determina a qué cuadrante pertenece el ángulo (en el gráfico siguiente α y β pertenecen al IIIC).

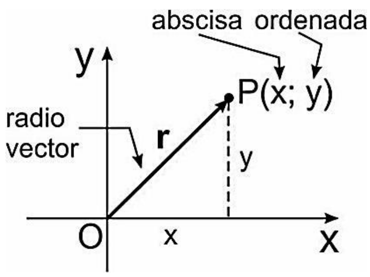


En el siguiente gráfico α , β y θ son ejemplos de ángulos en posición normal. $\alpha \in IC$, $\beta \in$ IIIC y $\theta \in$ IIC.



RADIO VECTOR DE UN PUNTO

Es el segmento orientado que va del origen del sistema cartesiano al punto dado. Su medida se considera positiva.

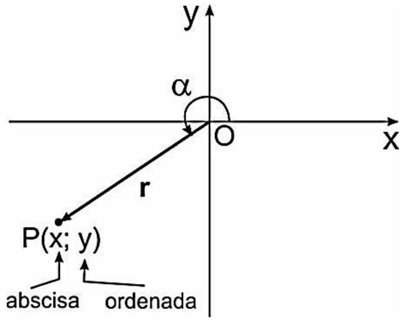


$\overrightarrow{OP}$: Radio vector de P

$$r^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Para determinar las razones trigonométricas de un ángulo en posición normal α solo se necesita conocer un punto P(x; y) de su lado final o terminal.



$$sen\alpha = \frac{ordenada}{radio\ vector} \Rightarrow sen\alpha = \frac{y}{r}$$

$$\cos\alpha = \frac{abscisa}{radio\ vector} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{x}{r}$$

$$\tan\alpha = \frac{ordenada}{abscisa} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{y}{x}$$

$$ctg\alpha = \frac{abscisa}{ordenada} \Rightarrow ctg\alpha = \frac{x}{y}$$

$$\sec\alpha = \frac{radio\ vector}{abscisa} \Rightarrow \sec\alpha = \frac{r}{x}$$

$$\csc\alpha = \frac{radio\ vector}{ordenada} \Rightarrow \csc\alpha = \frac{r}{y}$$

SIGNOS DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Signos de las R.T.

IIC	**IC**
$\left.\begin{matrix} Sen \\ Csc \end{matrix}\right\}(+)$	Todas (+)
IIIC	**IVC**
$\left.\begin{matrix} Tg \\ Cot \end{matrix}\right\}(+)$	$\left.\begin{matrix} \text{Cos} \\ \text{Sec} \end{matrix}\right\}(+)$

IC: *O°< α <90°*

IIC: *90°< α <180°*

IIIC: *180°< α <270°*

IVC: *270°< α <360°*

REDUCCIÓN AL PRIMER CUADRANTE

IC : α

IIC : *180° - α*

IIIC : *α - 180°*

IV : *360° - α*

Valores que toman las R.T.

R.T. DE ÁNGULOS CUADRANTALES

A.C. / *F.T.*	*0° y 360°*	*90°*	*180°*	*270°*
Sen	*0*	*1*	*0*	*-1*
Cos	*1*	*0*	*-1*	*0*
Tan	*0*	*N*	*0*	*N*
Cot	*N*	*0*	*N*	*0*
Sec	*1*	*N*	*-1*	*N*
Cosec	*N*	*1*	*N*	*-1*

N: No existe = no determinado

R.T. DE ÁNGULOS NEGATIVOS

$Sen\ (-\alpha) = -Sen\ (\alpha)$

$\text{Cos}\ (-\alpha) = \text{Cos}\ (\alpha)$

$Tg\ (-\alpha) = -Tg\ (\alpha)$

$Ctg\ (-\alpha) = -Ctg\ (\alpha)$

$\text{Sec}\ (-\alpha) = \text{Sec}\ (\alpha)$

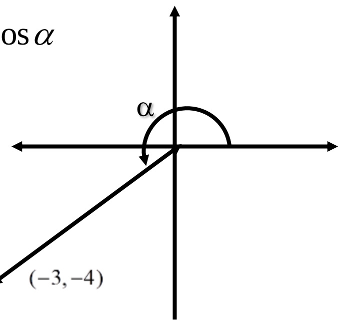
$\text{Csc}\ (-\alpha) = -\text{Csc}\ (\alpha)$

PRACTICAMOS

01. Dado el gráfico, calcule:

$M = 25 Sen\alpha.\text{Cos}\alpha$

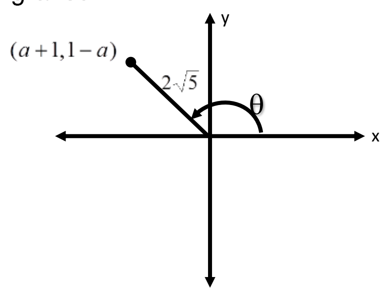
a) 6
b) 8
c) 10
d) 12
e) 16



02. Siendo: $P(\sqrt{5},-2)$ un punto del lado final del ángulo "θ" en posición normal, calcula el valor de: $S = \text{Csc}\theta - \sqrt{5}.Tg\theta$

a) 1/2 b) –1/2 c) 7/2 d) –7/2 e) 5

03. Del gráfico:



Calcule: $E = Tg\theta + Ctg\theta$

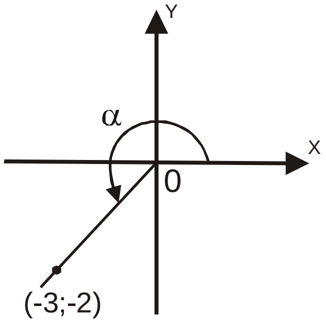
a) 5/2 b) –5/2 c) 3/2 d) ¾ e) 2

04. Si $Ctg\alpha = \frac{-6}{8}$; y sabiendo que $\alpha \in IVC.$

Halle: $R = Sen\alpha - \text{Cos}\alpha$

05. De la figura calcular el valor de:

$$\sqrt{13}\left(Sen\alpha - \text{Cos}\,\alpha\right)$$



06. Calcule el signo:

$$E = \frac{Sen\theta.\text{Cos}\,\theta.Tg\alpha}{\text{Csc}\,\alpha + C\,\text{tg}\,\alpha}$$

Si: θ ∈ III c ∧ α ∈ IV C

a) + b) - c) + ó –

d) - ó + e) Absurdo

07. Hallar el valor numérico de:

$$M = \frac{3Sen90° - 2\,\text{Cos}\,180° + Sen270°}{4\,\text{Cos}\,360° - 5\,\text{Cos}\,180° - 2Sen90°}$$

a) 3/7 b) 4/7 c) 5/7

d) 6/7 e) 1/7

08. Calcule:

$$M = \frac{\text{Cos}\,360° + Sen90° \div 0.5Sen270°}{Sen270° - \cos 270° + 4\,\text{Cos}\,90°}$$

a) 2/5 b) 1 c) –2/5

d) –5/2 e) 5

09. Si θ ∈ IV C además:

$$8^{Tg\theta} = \left(\text{Sec}\,45^{\circ}\right)^{2Tg\theta-3}$$

Calcule: $\text{Sec}\,\theta - Tg\,\theta$

a) 1/3 b) 2 c) -3

d)-2 e) 0

10. Reduce al primer cuadrante:

a) $\text{Cos}150°$ b) $Tg\,200°$

c) $Sen320°$ d) $\text{Sec}115°$

e) $\text{Csc}\,240°$ f) $Ctg\,345°$

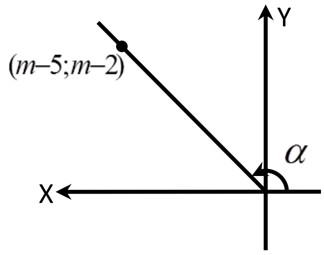
11. Si el punto $Q = (-5;-12)$ pertenece al lado final del ángulo en posición normal "β"

Calcular : $E = Sec\,\beta + Tan\,\beta$

a) 0,5 b) -0,5 c) 0,2

d) -0,2 e) 1

12. Si : $Ctg\,\alpha = -2$. Calcular el valor de "m"



a) -5 b)-4 c) -3 d) -2 e) 3

13. Del gráfico, hallar $Cos\,\theta$

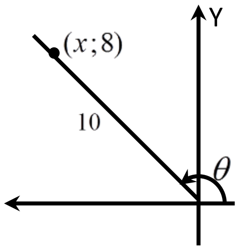
a. 0,6

b. -0,6

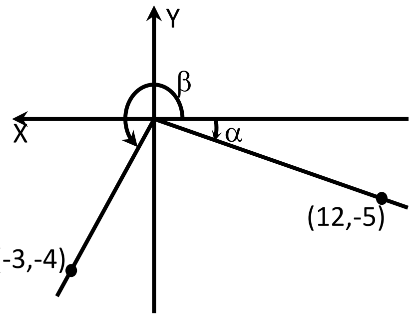
c. 0,8

d. -0,8

e. -0,3



14. De la figura, hallar : $E = 5\,Sen\,\beta + 13\,Cos\,\alpha$



15. Determine el signo de $A; B; C$ si :

$$A = \frac{Sec\,250^{o}\,.\,Tg\,350^{o}\,.\,Sen150^{o}}{Cos100^{o}}$$

$$B = \frac{Sen\,220^{o} - Cos\,320^{o}}{Sec120^{o}}$$

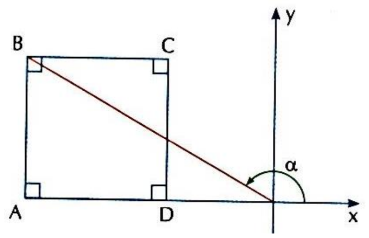
$$C = \frac{Tg110^{o} + Sec\,210^{o}}{Sen310^{o}}$$

a) $(-)(-)(+)$ b) $(-)(+)(+)$

c) $(+)(-)(+)$ d) $(+)(+)(-)$

e) $(-)(-)(-)$

16. En el gráfico, calcular $Ctg\ \alpha$ Si $C\ (1;5)$



Y además $ABCD$ es un cuadrado

17. Reducir y calcular E.

$$E = Sen150°.\text{Cos}120° + \text{Sec}150°.\text{Csc}120°$$

a) 19/12 b) -19/12 c) 4/3

d) -3/4 e) – 3/2

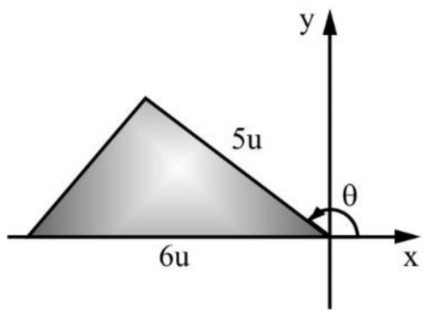
18. Indicar verdadero (V) o (F)

I. $Sen\,230° > Sen\,310°$

II. $\text{Cos}\,65° < \text{Cos}\,290°$

III. $\text{Cos}15° > Sen15°$

19. Del gráfico, calcula $\text{Csc}\,\theta$, si el área de la región sombreada es de 9 m^2.



20. Si 0 ≤ α ≤ 2π y $Sen\,\alpha.\sqrt{Tg\,\alpha} < 0$. Determina a qué cuadrante o cuadrantes pertenece $\dfrac{\alpha}{2}$.

21. Si θ es un ángulo positivo menor que un vuelta, tal que $\text{Cos}\,\theta > 0$ y $Sen\,\theta.\text{Cos}\,\theta < 0$, señala verdadero o falso para cada proposición

i. $Sen\dfrac{\theta}{2}.C\text{os}\dfrac{2\theta}{3} < 0$

ii. $Tg\dfrac{\theta}{4}.Sen\dfrac{2\theta}{5} < 0$

22. Siendo P(-3; 1) un punto del lado final del ángulo θ en posición normal, calcula el valor de:

$$D = Ctg\theta + \text{Csc}^2\,\theta - 3Tg\theta$$

23. Si: $\dfrac{1}{\text{Cos}\,\theta} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} + 2 = \dfrac{1}{15}$ y $\theta \in IIC$.

Halla x, si además: $Ctg\,\theta = \dfrac{Sen\,\theta + x}{\text{Cos}\,\theta + x}$

24. Reduce:

$$D = \frac{a^2\,\text{Cos}\,0° - 2ab.Sen270° + b^2 Sen\,90°}{a.Tg\,225° - b.\text{Cos}180°}$$

25. Siendo α, β, θ ángulos cuadrantales distintos, mayores o iguales que 0, pero menores o iguales que 3π/2. Además se cumple que:

$$\text{Cos}\,\beta = \sqrt{Sen\theta - \sqrt{Sen\alpha}}$$

Calcula: $W = \text{Cos}\ (\alpha + \beta + \theta)$

26. Siendo α un ángulo en posición normal del IIC, para el cual $\text{Cos}\,\alpha = -0,75$. Calcula el valor de: $E = 3Tg^2\alpha - 2.\text{Sec}\,\alpha$

27. Siendo θ un ángulo en posición estándar, para el cual se cumple que $Sen\ \theta = -\dfrac{2}{3}$ y $\theta \in IIIC$. Calcula: $L = \text{Csc}\,\theta + \text{Sec}\,\theta.Ctg\,\theta$

Nota: Resolver los ejercicios 10c.3 de la página 263 del libro de Paul Urban

Referencias:

i. Urban P., Martin R., Haese R., Haese S., Haese M. & Humphries M. (Segunda edición). (2008). Mathematics HL. Australia: Haese & Harris publications.

ii. Zill, D. & Dewar, J. (2012). Álgebra, trigonometría y geometría analítica. (3ª ed). México: McGraw-Hill Educación.