Guía de trabajo N.° 04: Potenciación y Logaritmos

Nombre y apellidos: ____

Grado: 4.° de secundaria Sección: "______" Fecha: ___ / 03 / 21

«En verdad les digo, Si el grano de trigo no cae en tierra y muere, queda solo; pero si muere, da mucho fruto» (Jn 12, 24)

COMPETENCIA: Resuelve problemas de **regularidad, equivalencia y cambio.**

DESEMPEÑO: Combina y adapta estrategias heurísticas, recursos, métodos gráficos, procedimientos y propiedades algebraicas más óptimas para determinar términos desconocidos al simplificar expresiones exponenciales y logarítmicas, usando propiedades de los logaritmos y exponenciales.

POTENCIACIÓN

1. Resuelve la siguiente ecuación: $\dfrac{15^{2x+1}}{5^{x+3}} = 3^{x+3}$

2. Resolver la ecuación: $9^{x-1} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x}$ y explica que propiedades utilizaste.

3. Se tienen 4 varillas cuyas longitudes, en dm, están dadas por las soluciones de las siguientes ecuaciones exponenciales:
$2^x + 4^x = 72$; $16^{z-2} = 4^{z+1}$;
$\sqrt[(w+1)^2]{16} = w+1$; $\left(\dfrac{9}{4}\right)^{y}\left(\dfrac{8}{27}\right)^{y-1} = \dfrac{2}{3}$
   a. Halla el valor de la longitud de cada varilla.
   b. Elige 3 de ellas para formar un triángulo. (Justifica tu elección)
   c. Uno de los posibles triángulos formados es un triángulo rectángulo. Explica por qué lo es.

4. Resolver la ecuación: $2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} + \ldots\ldots + 2^{x+10} = 65472$

5. Si: $4^{x} - 4^{x-1} = 24$. Calcula el valor de: $N = (2x)^{2x}$

6. Encuentra la solución exacta de la ecuación: $5(3^n) - 54(3^{-n}) = 39$

7. Halla el valor de la variable en: $(2x-1)^{2x} = \dfrac{1024}{2^7 . x - 8^2}$ si sabemos qué $x \neq \dfrac{1}{2}$; y luego calcula $\sqrt[3]{2x+5}$

8. La masa m kg de una sustancia radiactiva en el tiempo t está dada por horas
$m(t) = 4e^{-0{,}2t}$
   a) Escribe la masa inicial
   b) Si la masa se reduce a 1,5 kg. ¿Cuánto tiempo ha pasado?

9. Un grupo de diez leopardos se introduce en un parque de juego. Después de "t" años el número de leopardos, N es modelado por $N(t) = 10\, e^{0{,}4t}$
   a) ¿Cuántos leopardos están allí después de 2 años?
   b) ¿Cuánto tiempo tomará para que el número de leopardos para llegar a 100? Dé a sus respuestas a un nivel de precisión adecuado.

LOGARITMOS

1. DEFINICIÓN:

Se denomina logaritmo de un número real positivo "a", en base "b" (b > 0 y b ≠ 1) al exponente "n" al cual se debe elevar la base "b" para obtener "a":

Siendo: $a > 0 \wedge b > 0 \wedge b \neq 1$:

$$\log_b a = n \leftrightarrow b^n = a$$

Donde:

b = base

a = argumento, número o antilogaritmo

n = logaritmo o exponente

Ejemplos:

A. $\log_3 243 = x \Rightarrow 3^x = 243 \Rightarrow 3^x = 3^5 \Rightarrow x = 5$

B. $\log_5 N = 3 \Rightarrow 5^3 = N \Rightarrow N = 125$

2. CASOS PARTICULARES:

A. El logaritmo de un número igual a la base es uno:

$$\log_b b = 1$$

Así: $\log_5 5 = 1$, $\log_{\frac{2}{7}} \left(\frac{2}{7}\right) = 1$, $\log_{\sqrt{3}} \sqrt{3} = 1$

B. El logaritmo de uno en cualquier base es igual a cero

$$\log_b 1 = 0$$

Así: $\log_5 1 = 0$, $\log_{\frac{2}{11}} 1 = 0$, $\log_{\sqrt{2}} 1 = 0$

C. El logaritmo del inverso de la base es igual al opuesto de uno

$$\log_b \frac{1}{b} = -1$$

Así: $\log_{\frac{1}{8}} (8) = -1$, $\log_{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -1$

D. El logaritmo de una potencia de la base es igual al exponente

$$\log_b b^n = n$$

Así: $\log_3 3^4 = 4$, $\log_{\frac{4}{9}} \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$,

E. El logaritmo de la potencia de un número, si la base es otra potencia del mismo número es igual al cociente de los exponentes

$$\log_{b^n} b^m = \frac{m}{n}$$

Así: $\log_{7^2} 7^3 = \frac{3}{2}$,

$\log_{\sqrt{2}^7} \sqrt{2}^{12} = \frac{12}{7}$

3. PRINCIPIO FUNDAMENTAL DE LOS LOGARITMOS

$\log_b N = n \Rightarrow b^n = N$, entonces remplazando "n" se tiene:

$$b^{\log_b N} = N$$

Así:

$$36^{\log_6 4} = \left(6^2\right)^{\log_6 4} = \left(6^{\log_6 4}\right)^2 = 4^2 = 16$$

4. PROPIEDADES GENERALES DE LOS LOGARITMOS

A. Logaritmo de un producto: El logaritmo del producto de dos números reales positivos es igual a la suma de los logaritmos de los factores, en la misma base:

$$\log_b (M \times N) = \log_b M + \log_b N$$

Ejemplos:

- $\log_2 (16.64) = \log_2 16 + \log_2 64 = 4 + 6 = 10$
- $\log_3 27.81 = \log_3 27 + \log_3 81 = 3 + 4 = 7$

B. Logaritmo de un cociente: El logaritmo del cociente de dos números reales positivos es igual a la diferencia de los logaritmos del dividendo y del divisor, en la misma base:

$$\log_b \left(\frac{M}{N}\right) = \log_b M - \log_b N$$

Ejemplos:

- $\log_5 \left(\frac{125}{3125}\right) = \log_5 125 - \log_5 3125 = 3 - 5 = -2$
- $\log_2 \frac{256}{8} = \log_2 256 - \log_2 8 = 8 - 3 = 5$

C. **Logaritmo de una potencia:** El logaritmo de la potencia de un número real positivo es igual a valor del exponente por el logaritmo de la base de la potencia, en la misma base del logaritmo.

$$\log_b (M)^p = p.\log_b M$$

Ejemplos:

- $\log_5 125^6 = 6.\log_5 125 = 6(3) = 18$
- $\log_2 64^7 = 7.\log_2 64 = 7(6) = 42$

D. **Logaritmo de una raíz:** El logaritmo de la raíz de un número real positivo es igual al inverso del índice por el logaritmo de la cantidad subradical, en la misma base del logaritmo.

$$\log_b \sqrt[n]{N} = \frac{1}{n}\log_b N$$

Ejemplos:

- $\log_2 \sqrt[5]{128} = \frac{\log_2 128}{5} = \frac{7}{5} = 1{,}4$
- $\log_6 \sqrt[8]{216} = \frac{\log_6 216}{8} = \frac{3}{8} = 0{,}375$

5. **PROPIEDADES ESPECIALES DE LOS LOGARITMOS**

A. **Inverso de un logaritmo:** Si se permutan el argumento y la base de un logaritmo, se obtiene un valor inverso

$$\log_b N = \frac{1}{\log_N b}$$

Ejemplos:

- $\log_{625} 5 = \frac{1}{\log_5 625} = \frac{1}{4}$
- $\log_{216} 6 = \frac{1}{\log_6 216} = \frac{1}{3}$

B. **Transformación base – argumento:** Si la base y el argumento de un logaritmo se elevan al mismo exponente o se afectan del mismo índice de raíz, entonces el valor no se altera.

$$\log_b N = \log_{b^n} N^n$$

$$\log_b N = \log_{\sqrt[n]{b}} \sqrt[n]{N}$$

Ejemplos:

- $\log_{\sqrt[5]{3}} 9 = \log_{\sqrt[5]{3}^5} 9^5 = \log_3 9^5 = 5\log_3 9$
  $= 5(2) = 10$
- $\log_{16} 128 = \log_{\sqrt[4]{16}} \sqrt[4]{128} = \log_2 \sqrt[4]{128}$
  $= \frac{1}{4}\log_2 128 = \frac{1}{4}(7) = 1{,}75$

C. **Regla de la cadena:** El producto de logaritmos donde el primer argumento es igual a la segunda base, el segundo argumento es igual a la tercera base, y así sucesivamente, es igual al logaritmo del último argumento en la primera base.

$$\log_b A \cdot \log_A B \cdot \log_B C....\log_M N = \log_b N$$

Ejemplo:

- $\log_2 7.\log_5 a.\log_7 5.\log_a 16$
  $= \log_2 7.\log_7 5.\log_5 a.\log_a 16 = \log_2 16 = 4$

D. **Regla de Cambio de Base:** El logaritmo de un número en cierta base es igual al cociente del logaritmo del argumento y del logcaritmo de la base, considerados ambos en una nueva base.

$$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}$$

Ejemplos:

- $\log_{16} 64 = \frac{\log_4 64}{\log_4 16} = \frac{3}{2} = 1{,}5$
- $\log_{27} 81 = \frac{\log_3 81}{\log_3 27} = \frac{4}{3}$

E. **Potencia de Exponente Logarítmico:** si en una potencia de exponente logarítmico se permutan la base de la potencia y el argumento del logaritmo, entonces se obtiene el mismo valor.

$$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$$

Ejemplos:

- $16^{\log_4 3} = 3^{\log_4 16} = 3^2 = 9$
- $81^{\log_3 5} = 5^{\log_3 81} = 5^4 = 625$

PRACTICAMOS LOGARITMOS

01.Determina: $E = 10\log_{4\sqrt{2}} \log_{\sqrt{5}} \log_3 243$

02.Calcula: $\log_{0,0625} x = \dfrac{5}{4}$

03.Resuelve: $9^{\log_3 (x+2)} = 16$

04.Calcula el valor de "n", si se cumple que:

05. $\log\left(1-\frac{1}{3}\right)+\log\left(1-\frac{1}{4}\right)+\log\left(1-\frac{1}{5}\right)+...+\log\left(1-\frac{1}{n}\right)=-3$

Da el valor de: $K = \log_2 81.\log_3 25.\log_5 8$

06.Si $\log_3(2x+3)+\log_3(2x-3)=3$, calcula el valor de "$x$".

07.Halla el valor de "x":

$$\log x = 2 + \frac{1}{2}\left[\log 18 + \log 8 - 2\log 25\right]$$

08.Si $\log m = -2 \wedge \log n = 12$, calcula el valor de:

$$\log\left(\frac{\sqrt[4]{n}}{m}\right)$$

09.Si $x = 81.a$; $y = \dfrac{a}{81}$; Además: $(\log_a x)^2 + (\log_a y) - 7 = 0$; entonces halla los valores de "a"; "$\log_a y$" y "$\log_a x$"

10.Reducir la expresión:

$$N = \log_2 5^{\log_5 2^{\log_2 7^{\log_7 5^{\log_5 8}}}}$$

11.Resolver la ecuación

$$\log(2-x)+\log(3-x)=1+\log 2$$

12.Aplica propiedades y resuelve:

$$\log_x 5.\log_5 7.\log_7(x^2-6) = \log_{16} 16$$

13.Resuelve: $\log^2 x + x^{\log_x \log x} = 6$

14.Calcula el valor de:

$$2+\log_x(x-1)^2+\log_x\left(\frac{1}{x^2}\right)=\log_x x^2$$

15.Resuelve: $\log_2 x^{\log_2 x} - \log_2 x^7 = 18$

16.Encontrar la solución en:

$$\log x - 2 = \frac{1}{2}(\log 144 - 4\log 5)$$

17.Qué valor de "x" verifica:

$$\log_2 x + \log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x^2 = \frac{15}{2}$$

18.Resuelve:

$$\left(a^{\log_b \log_a x}\right)^{\log_a b} = \log_a(3x-8)$$

19.Determina el valor de x:

$$a^{\log_a(ax-b)} + b^{\log_b(bx-a)} = a+b$$

20.Resuelve:

$$\log_5 x^{\log_5 x} - \log_5 x - 12 = 0$$

Nota: Desarrollar los ejercicios de Urban P. pag 108 exercise 4c.1 (1-7)

Referencias:

i. Urban P., Martin R., Haese R., Haese S., Haese M. & Humphries M. (Segunda edición). (2008). Mathematics HL. Australia: Haese & Harris publications.

ii. Mathemathics standard level (2012) IBO.

iii. Zill, D. & Dewar, J. (2012). Álgebra, trigonometría y geometría analítica. (3ª ed). México: McGraw-Hill Educación.