ÉCOLE CENTRALE LYON

Unité d'Enseignement Génie Mécanique

Technologie Mécanique

Mécanique Générale et Analytique

Résistance des Matériaux

Responsable : Bertrand HOUX

Présentation de l'UE Génie Mécanique

L'Unité d'Enseignement Génie Mécanique recouvre un ensemble de connaissances et de savoir-faire pour la conception, la fabrication et l'analyse des performances d'un système mécanique.

Un système technique est un ensemble structuré de constituants et de composants dont le but est la réalisation de fonctions permettant d'assister l'homme dans son activité quotidienne. On distingue généralement la partie commande du système technique (non abordée dans ce document) et la partie opérative (basée sur la mécanique) que l'on appelle "système mécanique". Un système mécanique est un ensemble organisé de pièces reliées par des liaisons.

Lorsque la fonction du système mécanique est de supporter une charge à partir d'un ensemble de pièces immobiles entres elles, on parle généralement de structures (exemples : charpentes, échafaudages, bâtiments, ponts, bâtis de machines …)

Lorsque la fonction du système mécanique est de générer ou de transmettre à la fois un mouvement et un effort et que l'une des pièces au moins est mobile par rapport aux autres, on parle de mécanisme (exemples : moteurs, transmissions, système mécanique articulé des êtres vivants…).

Le vocable "système mécanique" englobe les 2 notions précédentes (mécanisme et structure).

L'Unité d'Enseignement Génie Mécanique est organisé en différentes actions de formation décrites ci-dessous.

GMTC1 : TECHNOLOGIE - MECANIQUE GENERALE - RESISTANCE DES MATERIAUX

Cette action de formation permet de présenter et de s'approprier les notions de base de l'Unité d'Enseignement, à travers un ensemble de Cours Magistraux (18h) et de Travaux Dirigés (20h).

Le programme abordé se décompose en 3 parties :

Partie 1 : Technologie Mécanique (6h CM, 8h TD)

- Efforts et liaisons dans les systèmes mécaniques
- Spécifications fonctionnelles et définition de produit

Partie 2 : Mécanique générale et analytique des systèmes de solides rigides (6h CM, 6h TD)

- Description du mouvement, principe fondamental, principe des puissances virtuelles (PPV), hypothèses du modèle
- PPV pour un solide unique, définition des différents torseurs, théorème de l'énergie cinétique
- PPV pour un système de solides, schématisation des liaisons, équations de Lagrange
- Discussion sur les limites du modèle

Partie 3 : Résistance Des Matériaux des solides déformables (Eléments structuraux élancés) (6h CM, 6h TD)

- Définition, schématisation d'une poutre et hypothèses du modèle, actions mécaniques extérieures (charges et efforts de liaison – équilibre global) et intérieures (efforts intérieurs – équilibre local)
- Dimensionnement élastique en contraintes
- Loi de comportement, théorèmes énergétiques et applications : levée d'hyperstatisme et dimensionnement en déplacement.

Le 1er objectif est de présenter l'architecture du système mécanique et sa description géométrique à partir des dessins techniques (plan d'ensemble et dessins de définition). L'analyse des mouvements et des efforts transmis entre les pièces via les liaisons conduit à la définition de la géométrie nominale. L'analyse des conditions de bon fonctionnement et de montage conduit à la définition géométrique tolérancée des surfaces fonctionnelles des pièces. Les moyens de production qui permettent de générer ces surfaces (on se limitera ici à l'usinage par outils coupants) seront présentés dans le document de cours (Partie 1, Chapitre 3) et seront abordés lors de l'action de formation GMtc2.

Le 2nd objectif est de présenter les méthodes permettant de déterminer les équations de mouvement et les efforts de liaison d'un mécanisme composé d'un ensemble de solides rigides. L'analyse du comportement dynamique du système s'appuie sur l'approche Newtonienne et sur l'introduction du principe des puissances virtuelles qui permet d'aboutir à un formalisme énergétique associé aux équations de Lagrange.

Le 3ème objectif est de dimensionner des structures déformables élancées, à partir des efforts intérieurs induits par le chargement et les réactions aux liaisons. On cherche notamment à identifier la distribution spatiale des contraintes, des déformations et des déplacements, afin d'appliquer des critères de dimensionnement.

GMTC2 : ACTIVITES PRATIQUES DE GENIE MECANIQUE

Cette action de formation a pour objectif de mettre en pratique les compétences de l'Unité d'Enseignement.

Les étapes de conception, de fabrication et de contrôle de la conformité géométrique d'un système mécanique sont notamment mises en œuvre à travers un projet technologique de développement de produit.

Les autres TP ont pour objectif d'analyser l'architecture d'un système mécanique réel, de réaliser un diagnostic des performances, en fonction des sollicitations extérieures et des éléments technologiques utilisés pour réaliser les liaisons entre solides ou mettre en action le système.

Le programme abordé se décompose en 8 Travaux Pratiques et Bureaux d'Etudes, effectués dans un ordre chronologique qui permet d'assurer la cohérence entre les différentes activités.

1- TP découverte - Analyse technologique (Outillage électroportatif ou Robot industriel)
2- Projet technologique - BE dessin
3- Projet technologique - BE cotation
4- Projet technologique - BE fabrication
5- Projet technologique - TP usinage
6- Projet technologique - TP métrologie
7- TP dynamique
8- TP dimensionnement en RdM

La fin du semestre consacré à l'Unité d'Enseignement Génie Mécanique permet à chaque étudiant de choisir une action de formation parmi les deux parcours ci-dessous.

GMTC3 : MODELISATION ET CONCEPTION

L'objectif de l'action de formation est de donner des notions plus avancées sur la mécanique des solides, ayant un lien direct avec des applications.

GMTC4 : CONCEPTION DE MECANISMES

L'objectif de l'action de formation est de connaître et dimensionner les éléments de transmission de puissance, notamment ceux utilisés dans le monde du transport terrestre, maitriser leur fonctionnement et analyser leurs performances.

Dans les deux cas, le parcours est organisé sous la forme de 2 cours, 2 Travaux Dirigés et d'un ensemble de Bureaux d'Etudes permettant d'aborder les concepts étudiés à travers des applications.

EVALUATION

Calcul de la note d'UE GM :

UE GM = 0.5 x GMtc1 + 0.3 x GMtc2 + 0.2 x (GMtc3 ou GMtc4)

La note GMtc1 correspond à un test écrit (durée 4h) effectué à la fin du semestre qui aborde les 3 parties suivantes :

Partie 1 : Technologie Mécanique (1h20)

Partie 2 : Mécanique générale et analytique (1h20)

Partie 3 : Résistance des Matériaux (1h20)

La note GMtc2 correspond à des micro-tests effectués pendant le Projet technologique (75%) et aux notes des comptes rendus des TP dynamique et dimensionnement en RdM (25%). Elle peut être pondérée par la participation pendant les séances et les absences non justifiées.

La note GMtc3 ou GMtc4 correspond à la note des comptes rendus des activités de Bureaux d'Etudes, pondérée par la participation pendant les séances et les absences non justifiées.

Prérequis

1- REFERENTIEL

L'étude du mouvement d'un système mécanique nécessite un référentiel constitué de :

- un repère associé à l'espace, généralement orthonormé direct, $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$,
- une base de temps (origine + horloge telle que, en mécanique classique, 2 observateurs liés à des référentiels en mouvement relatif voient s'écouler le temps au même rythme.

Le mouvement d'un point *P* est défini par rapport au référentiel *R*.

La position du point *P* à l'instant t est donnée par : $\overrightarrow{OP} = x(t)\vec{x} + y(t)\,\vec{y} + z(t)\vec{z}$

La vitesse du point *P* est : $\overrightarrow{V_{/R}}(P) = \frac{dx}{dt}\vec{x} + \frac{dy}{dt}\,\vec{y} + \frac{dz}{dt}\vec{z}$

L'accélération du point *P* est : $\overrightarrow{\gamma_{/R}}(P) = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{x} + \frac{d^2y}{dt^2}\,\vec{y} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{z}$

2- VECTEURS

2.1 Produit scalaire, produit vectoriel

Soit deux vecteurs dont les coordonnées dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ sont :

$$\vec{V}_1 \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad \vec{V}_2 \begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix}$$

Le produit scalaire des deux vecteurs est égal à :

$$\vec{V}_1 . \vec{V}_2 = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2$$

Le produit vectoriel des deux vecteurs est égal à :

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1Z_2 - Y_2Z_1 \\ Z_1X_2 - Z_2Y_1 \\ X_1Y_2 - X_2Y_1 \end{bmatrix}$$

Cas particulier pour les vecteurs unitaires du repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:

$$\vec{x} \wedge \vec{y} = \vec{z} \qquad \vec{y} \wedge \vec{x} = -\vec{z}$$

$$\vec{y} \wedge \vec{z} = \vec{x} \qquad \vec{z} \wedge \vec{y} = -\vec{x}$$

$$\vec{z} \wedge \vec{x} = \vec{y} \qquad \vec{x} \wedge \vec{z} = -\vec{y}$$

2.2 Composition des vitesses et dérivation temporelle d'un vecteur mobile

Soit un référentiel mobile $R'(O, \vec{x}', \vec{y}', \vec{z}')$ défini à partir d'un référentiel $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ par un vecteur vitesse de rotation $\vec{\Omega}_{R'/R}$ et un référentiel mobile $R''(O, \vec{x}'', \vec{y}'', \vec{z}'')$ défini à partir du référentiel $R'(O, \vec{x}', \vec{y}', \vec{z}')$ par un vecteur vitesse de rotation $\vec{\Omega}_{R''/R'}$.

$$\vec{\Omega}_{R''/R} = \vec{\Omega}_{R''/R'} + \vec{\Omega}_{R'/R}$$

La vitesse du point *P* dans le référentiel *R* peut être définie à partir de la vitesse relative du point *P* dans le référentiel *R'* et la vitesse d'entraînement du point *P*, correspondant à la vitesse dans le référentiel *R* d'un point situé en *P* à l'instant *t* et qui serait fixe dans le référentiel *R'*.

$$\vec{V}_{/\mathrm{R}}(P) = \vec{V}_{/\mathrm{R}'}(P) + \vec{V}_{\mathrm{R}'/\mathrm{R}}(P)$$

Par ailleurs, la dérivée par rapport au temps d'un vecteur $\vec{V}$, défini dans R', dans le référentiel R est :

$$\left(d\vec{V}/_{dt}\right)_{\mathrm{R}} = \left(d\vec{V}/_{dt}\right)_{\mathrm{R}'} + \vec{\Omega}_{\mathrm{R}'/\mathrm{R}} \wedge \vec{V} \qquad \text{(Formule de Bour)}$$

Exemple :

Soit un référentiel mobile $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_{0,1})$ défini à partir du référentiel $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_{0,1})$ par une rotation d'un angle θ autour du vecteur unitaire $\vec{z}_{0,1}$, la dérivée temporelle des vecteurs unitaires mobiles $\vec{x}_1$ et $\vec{y}_1$ est :

$$d\vec{x}_1/_{dt} = \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{x}_1 = \dot{\theta}\vec{z}_{0,1} \wedge \vec{x}_1 = \dot{\theta}\vec{y}_1$$

$$d\vec{y}_1/_{dt} = \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{y}_1 = \dot{\theta}\vec{z}_{0,1} \wedge \vec{y}_1 = -\dot{\theta}\vec{x}_1$$

3- TORSEURS

3.1 Définition

Un torseur est un outil mathématique utilisé pour décrire, entre autres, les mouvements des solides rigides et les actions mécaniques qu'ils subissent. Un torseur décrit un champ de vecteurs équiprojectif dans un espace Euclidien de dimension 3. Il est constitué de 2 vecteurs nommés respectivement **résultante** et **moment**.

$$\{T\}_A \begin{cases} \vec{R} = X\vec{x} + Y\vec{y} + Z\vec{z} \\ \vec{M}(A) = L\vec{x} + M\vec{y} + N\vec{z} \end{cases}$$

La résultante $\vec{R}$ est indépendante du point où est exprimé le torseur.

Le moment $\vec{M}$ peut être calculé en tout point grâce à la relation du transport (relation de Varignon) :

$$\vec{M}(B) = \vec{M}(A) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R}$$

3.2 Propriétés des torseurs

Si $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{R}$ sont colinéaires : $\vec{M}(B) = \vec{M}(A)$.

Si $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{x}$ sont colinéaires, la composante suivant $\vec{x}$ du moment reste inchangée (de même pour $\vec{y}$ et $\vec{z}$).

Soit deux torseurs $\{T_1\}_A$ et $\{T_1\}_A$ exprimés au point A tels que :

$$\{\mathcal{T}_1\}_A \begin{cases} \overrightarrow{R_1} = X_1\vec{x} + Y_1\vec{y} + Z_1\vec{z} \\ \overrightarrow{M_1}(A) = L_1\vec{x} + M_1\vec{y} + N_1\vec{z} \end{cases}$$

$$\{\mathcal{T}_2\}_A \begin{cases} \overrightarrow{R_2} = X_2\vec{x} + Y_2\vec{y} + Z_2\vec{z} \\ \overrightarrow{M_2}(A) = L_2\vec{x} + M_2\vec{y} + N_2\vec{z} \end{cases}$$

La somme de deux torseurs exprimés au point *A* est égale à :

$$\{\mathcal{T}\}_A = \{\mathcal{T}_1\}_A + \{\mathcal{T}_2\}_A$$

$$\{\mathcal{T}\}_A \begin{cases} \vec{R} = \overrightarrow{R_1} + \overrightarrow{R_2} \\ \vec{M}(A) = \overrightarrow{M_1}(A) + \overrightarrow{M_2}(A) \end{cases}$$

Le produit (co-moment) de deux torseurs exprimés au point *A* est égal à :

$$\{\mathcal{T}_1\}_A \otimes \{\mathcal{T}_2\}_A = \overrightarrow{R_1}.\overrightarrow{M_2}(A) + \overrightarrow{M_1}(A).\overrightarrow{R_2}$$

$$\{\mathcal{T}_1\}_A \otimes \{\mathcal{T}_2\}_A = X_1L_2 + Y_1M_2 + Z_1N_2 + L_1X_2 + M_1Y_2 + N_1Z_2$$

Le co-moment de deux torseurs est indépendant du point *A* où sont exprimés les torseurs.

4- Solide rigide

4.1 Définition

Un solide rigide (*S*) est un solide possédant une masse constante et un volume dont les limites sont invariantes dans le temps. Il est composé d'une infinité de points matériels tel que, pour tous points *A* et *B* appartenant au solide :

$$AB = constante \ \forall \ A \in S, \forall \ B \in S$$

4.2 Torseur des efforts extérieurs appliqués sur un solide rigide

On peut caractériser le système des efforts appliqués sur un solide rigide par un torseur.

$$\{\mathcal{F}_{ext\to S}\}_A \begin{cases} \vec{R}_{ext\to S} \\ \vec{M}_{ext\to S}(A) \end{cases}$$

Le moment $\vec{M}_{ext\to S}(A)$ du torseur des efforts extérieurs vérifie la relation du transport. Pour tous points A et B appartenant au solide :

$$\vec{M}_{ext\to S}(B) = \vec{M}_{ext\to S}(A) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R}_{ext\to S}$$

4.3 Torseur cinématique d'un solide rigide

Le champ des vecteurs vitesses d'un solide rigide est équiprojectif :

$$AB = constante \ \forall A \in S, \forall B \in S$$

$$AB^2 = constante$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = constante$$

$$\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}\right) = 0$$

$$2\overrightarrow{AB}\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{AB}\right) = 0$$

$$\overrightarrow{AB}\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)=0$$

$$\overrightarrow{AB}(\vec{V}(B)-\vec{V}(A))=0$$

$$\overrightarrow{AB}.\vec{V}(B)=\overrightarrow{AB}.\vec{V}(A)$$

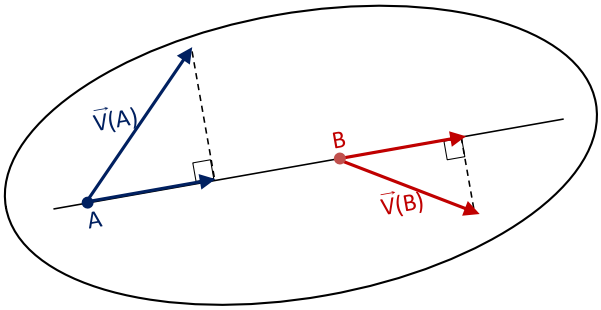


Fig. 1 : équiprojectivité du champ des vecteurs vitesses.

Le champ des vecteurs équiprojectif peut être représenté par un **torseur cinématique** constitué de 2 vecteurs.

$$\{\mathcal{V}_{\mathrm{S/R_0}}\}_A\begin{cases}\overrightarrow{\Omega}_{\mathrm{S/R_0}}\\ \vec{V}_{\mathrm{S/R_0}}(A)\end{cases}$$

Le vecteur vitesse de rotation $\overrightarrow{\Omega}_{\mathrm{S/R_0}}$ correspond à la résultante du torseur cinématique (il est indépendant du point où est exprimé le torseur).

Le vecteur vitesse $\vec{V}_{\mathrm{S/R_0}}(A)$ correspond au moment du torseur cinématique. Il vérifie la relation du transport. Pour tous points A et B appartenant au solide :

$$\vec{V}_{\mathrm{S/R_0}}(B)=\vec{V}_{\mathrm{S/R_0}}(A)+\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{\Omega}_{\mathrm{S/R_0}}$$

4.4 Puissance développée par les efforts extérieurs appliqués sur un solide rigide

La puissance développée par les efforts extérieurs appliqués sur un solide rigide est égale au co-moment entre le torseur des efforts extérieurs appliqués sur le solide et le torseur cinématique du solide :

$$\{\mathcal{F}_{ext\to S}\}_A\otimes\{\mathcal{V}_{\mathrm{S/R_0}}\}_A=\vec{R}_{ext\to S}.\vec{V}_{\mathrm{S/R_0}}(A)+\vec{M}_{ext\to S}(A).\overrightarrow{\Omega}_{\mathrm{S/R_0}}$$

Génie Mécanique - 1ère partie
Technologie Mécanique

(D. Constant, B. Houx, D. Lacour, E. Rigaud)

GMtc1 : Technologie - Mécanique Générale - Résistance des Matériaux....1
GMtc2 : Activités pratiques de Génie Mécanique....2
GMtc3 : Modélisation et conception....3
GMtc4 : Conception de mécanismes....3
Evaluation....3
1- référentiel....5
2- Vecteurs....5
3- Torseurs....6
4- Solide rigide....7

Chapitre 1 : Efforts et liaisons dans les systèmes mécaniques.... 4

1. Modélisation d'un système mécanique....4
1.1 Modèles possibles....4
1.2 Association d'un graphe de liaisons à un système mécanique....5
2. Les liaisons dans un système mécanique....6
2.1 Repère local....6
2.2 Torseur cinématique associé à une liaison....6
2.3 Torseur des efforts de liaison....6
2.4 Dualité entre torseur cinématique et torseur des efforts de liaison....7
2.5 Les liaisons mécaniques élémentaires - Schéma cinématique....7
2.6 Les surfaces de contact....9
2.7 Composition de liaisons en parallèle....10
2.8 Composition en série de liaisons....11
3. Etude des efforts dans un système mécanique....12
3.1 Précisions....12
3.2 Exemple de système isostatique....12
3.3 Notion de cheminement d'efforts....14
3.4 Exemple de Système hyperstatique....15
3.5 Calcul du degré d'hyperstatisme....18
3.6 Conséquences de l'hyperstatisme....18
3.7 Réduction du degré d'hyperstatisme....19

3.8 Application à la machine à vapeur 21

Chapitre 2 : Spécifications fonctionnelles et définition de produit 22

1. Les étapes de la spécification 22

1.1 Recherche des Conditions fonctionnelles 22

1.2 analyse des Conditions fonctionnelles 23

1.3 Réalisation d'un dessin de définition 23

2. Tolérancement dimensionnel 25

2.1 Indications dimensionnelles 25

2.2 Tolérances 26

2.3 Ajustements 28

2.4 Chaînes de cotes 30

3. Tolérancement géométrique 33

3.1 Les différents types de tolérances 33

3.2 Cadre de tolérances 33

3.3 Nature de l'élément tolérancé 34

3.4 Dimensions de référence 34

3.5 Zone de tolérance 34

3.6 Les différents types de référence 36

3.7 Tolérances Générales 37

3.8 Tolérances compatibles avec les procédés d'obtention 38

Chapitre 3 : GUIDAGE EN ROTATION PAR ROULEMENTS 39

1. Préambule 39

2. Les Roulements 40

2.1 Angle de rotulage d'un roulement à billes 40

2.2 Liaisons réalisées par l'intermédiaire d'un roulement à billes 40

2.3 Réalisation d'une liaison pivot 40

2.4 Disposition des arrêts en translation des bagues 41

2.5 Règles de montage des bagues d'un roulement 42

Chapitre 4 : Obtention de pièces par usinage par outils coupants 43

1. Préambule 43

2. Les Procédés et Machines-Outils 43

2.1 Système d'axes normalisés 43

2.2 Le tournage 44

2.3 Le Fraisage 46
3. Les principes de génération d'une surface 47
3.1 Travail d'enveloppe 48
3.2 Travail de forme 48
3.3 Travail mixte 48
3.4 Exemples d'opérations 48
3.4 Opérations axiales 49
4. Les paramètres de coupe 50
4.1 Paramètres de coupe en tournage 50
4.2 Paramètres de coupe en fraisage 51
5. Montage d'usinage 52
5.1 Fonctions et contraintes du montage d'usinage 52
5.2 Mise en position isostatique - Elimination des degrés de liberté 53
5.3 Montage d'usinage en tournage 54
5.4 Montage d'usinage en fraisage 56
5.5 Limitations 58
6. Les gammes de fabrication 58
6.1 Présentation 58
6.2 Dossier de fabrication 59
6.3 élaboration d'un processus de fabrication 59
7. Bibliographie 64

CHAPITRE 1 :
EFFORTS ET LIAISONS
DANS LES SYSTEMES MECANIQUES

Ce chapitre est consacré à l'analyse des liaisons et des efforts dans les systèmes mécaniques. On considère généralement le système mécanique dans une situation figée. Cette première approche est une base suffisante pour un début d'étude des **technologies de construction** et des **technologies de fabrication** abordées dans les chapitres suivants.

1. Modélisation d'un système mécanique

1.1 MODELES POSSIBLES

Pour modéliser un système mécanique, on doit décrire à la fois les pièces et les liaisons qui le composent. Les systèmes mécaniques réels étant dans la plupart des cas très complexes, ils ne peuvent être appréhendés qu'à partir de modèles simplifiés. La modélisation des systèmes mécaniques s'appuie donc sur de nombreuses hypothèses simplificatrices.

Modèles de pièces :

- rigides,
- déformables.

La déformation des pièces a lieu dans le volume de la matière. Le comportement est alors le plus souvent élastique linéaire, notamment pour des petites déformations (l'amplitude de celles-ci est alors proportionnelle à l'amplitude des efforts appliqués).

Modèles de liaisons :

- avec ou sans jeu,
- avec ou sans frottements,
- déformables ou indéformables.

La déformation des liaisons a lieu au niveau des surfaces en contact. Le comportement est alors le plus souvent non linéaire (pression de hertz, ...).

Dans ce chapitre, on considère une modélisation simplifiée des systèmes mécaniques en supposant que :

- les pièces sont rigides (notion de solide indéformable),
- les liaisons sont parfaites (géométrie sans défaut, pas de jeu, pas de frottement et indéformables).

Cette modélisation est adaptée à l'étude de mécanismes comme celui représenté ci-dessous (qui permettra d'illustrer les notions abordées dans les différentes parties du cours).

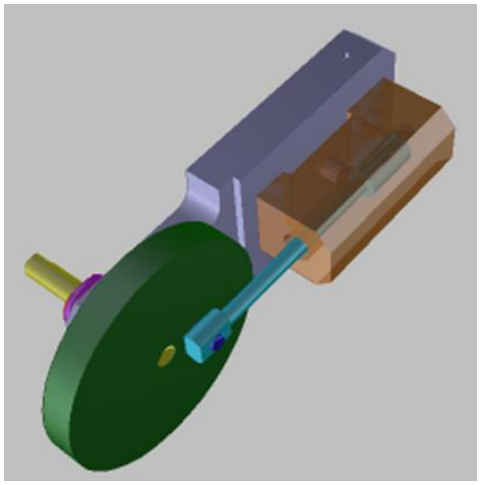


Fig. 1.1 : Modèle 3D d'une machine à vapeur miniature.

La modélisation simplifiée adoptée est abusive dans la plupart des cas. L'analyse des résultats issus de la théorie des systèmes mécaniques doit se faire en gardant constamment à l'esprit les hypothèses simplificatrices utilisées.

1.2 Association d'un graphe de liaisons a un systeme mecanique

Pour une modélisation du système mécanique orientée liaisons, on peut regrouper en un seul **solide rigide** les différentes pièces solidaires entre elles, c'est-à-dire l'ensemble des pièces ayant forcément le même mouvement, les pièces étant encastrées l'une avec l'autre.

Après cette phase de regroupement, le système mécanique est constitué de p solides et q liaisons. Le **graphe de liaisons** d'un système mécanique est alors construit de la façon suivante :

- on affecte un sommet à tous les solides $(S_1, S_2, ..., S_p)$,
- on affecte un arc orienté $(i \rightarrow j)$ à toutes les liaisons.

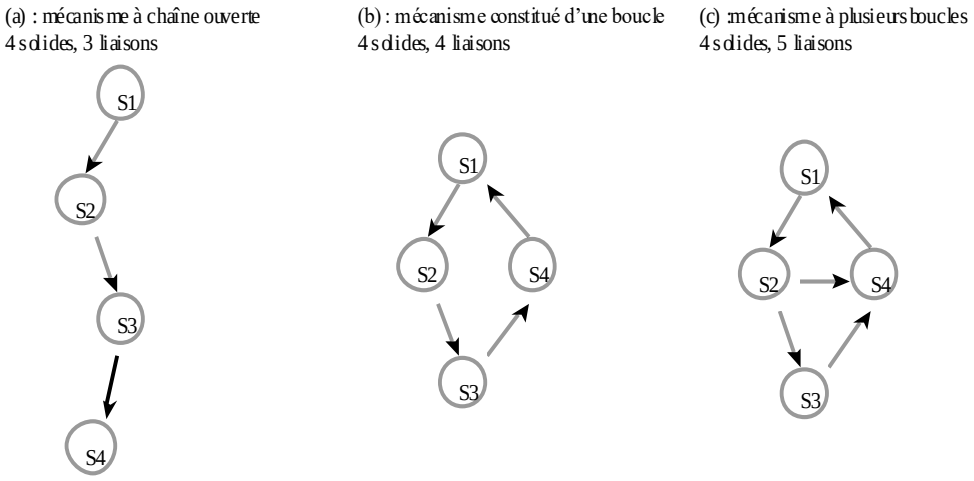


Fig. 1.2 : Exemple de graphes de liaisons.
(a) mécanisme à chaîne ouverte.
(b) mécanisme à chaîne fermée (une seule boucle cinématique).
(c) mécanisme constitué de plusieurs chaînes fermées.

On peut extraire du graphe (c) trois cycles *(S_1, S_2, S_3, S_4, S_1)*, *(S_1, S_2, S_4, S_1)*, *(S_2, S_3, S_4, S_2)*. Mais, deux cycles suffisent à décrire la totalité du mécanisme. On dit alors que le système est constitué de deux cycles indépendants.

Remarque **:** En se référant à la théorie des graphes, on peut montrer que le nombre de cycles indépendants μ est directement calculable à partir du nombre de sommets et du nombre d'arcs.

$$\mu = q - p + 1$$

avec q le nombre d'arcs et p le nombre de sommets.

2. Les liaisons dans un système mécanique

2.1 Repere local

On associe à chaque liaison un repère local qu'on appelle aussi repère idéal. Ce repère facilite l'écriture des torseurs cinématiques et des torseurs d'efforts de liaison. L'origine *A* du repère idéal est le centre géométrique de la liaison. La notion de centre géométrique désigne en fait un lieu des centres admissibles, ce lieu est défini pour chaque type de liaison dans le tableau du paragraphe 2.5.

2.2 Torseur cinematique associe a une liaison

Le champ des vitesses du solide (S_2) par rapport au solide (S_1) peut être décrit par un **torseur cinématique**. Son expression est la suivante :

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\}_A \begin{cases} \vec{\Omega}_{2/1} = p_{21}\vec{x} + q_{21}\vec{y} + r_{21}\vec{z} \\ \vec{V}_{2/1}(A) = u_{21}\vec{x} + v_{21}\vec{y} + w_{21}\vec{z} \end{cases}$$

Remarques :

Pour une liaison orientée de (S_i) vers (S_j), on considère le torseur cinématique modélisant les mouvements de (S_j) par rapport à (S_i).

Suivant les liaisons, certaines composantes de ce torseur sont nulles ou liées les unes aux autres. On appelle **degré de liberté de la liaison** (ou nombre d'inconnues cinématiques n_C) le nombre de composantes **indépendantes** du torseur cinématique.

2.3 Torseur des efforts de liaison

Le champ des actions exercées par le solide (S_1) sur le solide (S_2) au travers de la liaison entre 1 et 2 peut être décrit par un **torseur des efforts de liaison**. Son expression est la suivante :

$$\{\mathcal{F}_{1\to2}\}_A \begin{cases} \vec{R}_{1\to2} = X_{12}\vec{x} + Y_{12}\vec{y} + Z_{12}\vec{z} \\ \vec{M}_{1\to2}(A) = L_{12}\vec{x} + M_{12}\vec{y} + N_{12}\vec{z} \end{cases}$$

Remarques :

Pour une liaison orientée de (S_i) vers (S_j), on considère le torseur modélisant les actions de contact de (S_i) sur (S_j).

Suivant les liaisons, certaines composantes de ce torseur sont nulles ou liées les unes aux autres. On appelle **degré de la liaison** (ou nombre d'inconnues statiques n_S) le nombre de composantes **indépendantes** du torseur d'efforts de liaison.

2.4 DUALITE ENTRE TORSEUR CINEMATIQUE ET TORSEUR DES EFFORTS DE LIAISON

Si on suppose que la liaison est parfaite (sans frottement, sans déformation), elle ne stocke ni ne dissipe aucune énergie. Par conséquent, **la puissance des efforts d'une liaison parfaite est nulle pour tout mouvement cinématiquement admissible** (mouvement qui respecte la liaison).

La puissance des efforts de liaison est égale au co-moment entre le torseur des efforts de liaison et le torseur cinématique.

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\}_A \begin{cases} \vec{\Omega}_{2/1} = p_{21}\vec{x} + q_{21}\vec{y} + r_{21}\vec{z} \\ \vec{V}_{2/1}(A) = u_{21}\vec{x} + v_{21}\vec{y} + w_{21}\vec{z} \end{cases}$$

$$\{\mathcal{F}_{1\to2}\}_A \begin{cases} \vec{R}_{1\to2} = X_{12}\vec{x} + Y_{12}\vec{y} + Z_{12}\vec{z} \\ \vec{M}_{1\to2}(A) = L_{12}\vec{x} + M_{12}\vec{y} + N_{12}\vec{z} \end{cases}$$

$$P = \{\mathcal{F}_{1\to2}\}_A \otimes \{\mathcal{V}_{2/1}\}_A = 0$$

$$P = \vec{R}_{1\to2}.\vec{V}_{2/1}(A) + \vec{\Omega}_{2/1}.\vec{M}_{1\to2} = 0$$

$$X_{12}.u_{21} + Y_{12}.v_{21} + Z_{12}.w_{21} + L_{12}.p_{21} + M_{12}.q_{21} + N_{12}.r_{21} = 0$$

Ceci est vérifié quelle que soit la valeur des composantes du torseur d'efforts transmissibles et du torseur cinématique. Chaque monôme doit donc être nul (sauf cas particulier de la liaison hélicoïdale).

Par ailleurs, les deux termes d'un même monôme ne peuvent pas être tous les deux nuls. Cela voudrait dire qu'on peut s'opposer à un mouvement sans fournir d'efforts !

En définitive, il n'y a qu'un terme nul par monôme. En conséquence, pour toute liaison parfaite :

$$n_c + n_s = 6$$

2.5 LES LIAISONS MECANIQUES ELEMENTAIRES - SCHEMA CINEMATIQUE

La norme NF-E 04.015 définit onze liaisons normalisées correspondant aux liaisons mécaniques élémentaires. Le tableau page suivante présente leur schématisation 3D, les torseurs des mouvements cinématiquement admissibles, et les torseurs des efforts transmissibles dans leur repère idéal, pour une liaison parfaite.

Nom des Liaisons et schéma 3D	Point A considéré	n_c	Torseur cinématique	Torseur des efforts transmissibles
Encastrement	En tout point de l'espace	0	$\begin{cases} \vec{\Omega}_{2/1} = \vec{0} \\ \vec{V}_{2/1}(A) = \vec{0} \end{cases}$	$\begin{cases} \vec{R}_{1\to2} = X_{12}\vec{x} + Y_{12}\vec{y} + Z_{12}\vec{z} \\ \vec{M}_{1\to2}(A) = L_{12}\vec{x} + M_{12}\vec{y} + N_{12}\vec{z} \end{cases}$
Pivot d'axe $(A, \vec{z})$	En tout point de l'axe	1	$\begin{cases} \vec{\Omega}_{2/1} = r_{21}\vec{z} \\ \vec{V}_{2/1}(A) = \vec{0} \end{cases}$	$\begin{cases} \vec{R}_{1\to2} = X_{12}\vec{x} + Y_{12}\vec{y} + Z_{12}\vec{z} \\ \vec{M}_{1\to2}(A) = L_{12}\vec{x} + M_{12}\vec{y} \end{cases}$
Glissière //x	En tout point de l'espace	1	$\begin{cases} \vec{\Omega}_{2/1} = \vec{0} \\ \vec{V}_{2/1}(A) = u_{21}\vec{x} \end{cases}$	$\begin{cases} \vec{R}_{1\to2} = Y_{12}\vec{y} + Z_{12}\vec{z} \\ \vec{M}_{1\to2}(A) = L_{12}\vec{x} + M_{12}\vec{y} + N_{12}\vec{z} \end{cases}$
Hélicoïdale d'axe $(A, \vec{z})$	En tout point de l'axe z	1	$\begin{cases} \vec{\Omega}_{2/1} = r_{21}\vec{z} \\ \vec{V}_{2/1}(A) = w_{21}\vec{z} \end{cases}$ $avec\ w_{21} = k.r_{21}$	$\begin{cases} \vec{R}_{1\to2} = X_{12}\vec{x} + Y_{12}\vec{y} + Z_{12}\vec{z} \\ \vec{M}_{1\to2}(A) = L_{12}\vec{x} + M_{12}\vec{y} + N_{12}\vec{z} \end{cases}$ $avec\ N_{12} = -k.Z_{12}$
Pivot glissant d'axe $\vec{z}$	En tout point de l'axe z	2	$\begin{cases} \vec{\Omega}_{2/1} = r_{21}\vec{z} \\ \vec{V}_{2/1}(A) = w_{21}\vec{z} \end{cases}$	$\begin{cases} \vec{R}_{1\to2} = X_{12}\vec{x} + Y_{12}\vec{y} \\ \vec{M}_{1\to2}(A) = L_{12}\vec{x} + M_{12}\vec{y} \end{cases}$
Rotule à doigt de centre *A* bloquée en $\vec{z}$	Au centre de la liaison	2	$\begin{cases} \vec{\Omega}_{2/1} = p_{21}\vec{x} + q_{21}\vec{y} \\ \vec{V}_{2/1}(A) = \vec{0} \end{cases}$	$\begin{cases} \vec{R}_{1\to2} = X_{12}\vec{x} + Y_{12}\vec{y} + Z_{12}\vec{z} \\ \vec{M}_{1\to2}(A) = N_{12}\vec{z} \end{cases}$
Rotule de centre A	Au centre de la liaison	3	$\begin{cases} \vec{\Omega}_{2/1} = p_{21}\vec{x} + q_{21}\vec{y} + r_{21} \\ \vec{V}_{2/1}(A) = \vec{0} \end{cases}$	$\begin{cases} \vec{R}_{1\to2} = X_{12}\vec{x} + Y_{12}\vec{y} + Z_{12}\vec{z} \\ \vec{M}_{1\to2}(A) = \vec{0} \end{cases}$
Appui-plan $\perp \vec{z}$	En tout point de l'espace	3	$\begin{cases} \vec{\Omega}_{2/1} = r_{21}\vec{z} \\ \vec{V}_{2/1}(A) = u_{21}\vec{x} + v_{21}\vec{y} \end{cases}$	$\begin{cases} \vec{R}_{1\to2} = Z_{12}\vec{z} \\ \vec{M}_{1\to2}(A) = L_{12}\vec{x} + M_{12}\vec{y} \end{cases}$
Linéaire annulaire en *A* d'axe $(A, \vec{x})$	Au centre de la liaison	4	$\begin{cases} \vec{\Omega}_{2/1} = p_{21}\vec{x} + q_{21}\vec{y} + r_{21} \\ \vec{V}_{2/1}(A) = u_{21}\vec{x} \end{cases}$	$\begin{cases} \vec{R}_{1\to2} = Y_{12}\vec{y} + Z_{12}\vec{z} \\ \vec{M}_{1\to2}(A) = \vec{0} \end{cases}$
Linéaire rectiligne ligne $(A, \vec{y})) \perp \vec{z}$	En tout point du plan (A, y, z)	4	$\begin{cases} \vec{\Omega}_{2/1} = q_{21}\vec{y} + r_{21}\vec{z} \\ \vec{V}_{2/1}(A) = u_{21}\vec{x} + v_{21}\vec{y} \end{cases}$	$\begin{cases} \vec{R}_{1\to2} = Z_{12}\vec{z} \\ \vec{M}_{1\to2}(A) = L_{12}\vec{x} \end{cases}$
Ponctuelle en *A* suivant $\vec{z}$	En tout point de la normale de contact dont A	5	$\begin{cases} \vec{\Omega}_{2/1} = p_{21}\vec{x} + q_{21}\vec{y} + r_{21} \\ \vec{V}_{2/1}(A) = u_{21}\vec{x} + v_{21}\vec{y} \end{cases}$	$\begin{cases} \vec{R}_{1\to2} = Z_{12}\vec{z} \\ \vec{M}_{1\to2}(A) = \vec{0} \end{cases}$

Une schématisation spatiale ou plane est associée à chacune de ces liaisons élémentaires. On appelle **schéma cinématique** la description du système mécanique à l'aide de cette schématisation normalisée des liaisons élémentaires. Le schéma cinématique n'est là que pour décrire, à un instant donné, les mouvements possibles entre pièces. Il est indépendant des solutions technologiques utilisées pour réaliser les liaisons.

Remarques :

Les hypothèses faites sur les liaisons parfaites sont très limitatives sur le type de mécanisme modélisable. Pour représenter des éléments déformables (ressort) ou des liaisons avec frottements (frein, embrayage), on utilise des symboles supplémentaires décris dans la norme NF-E 04.016

La norme NF-E 04.016, permet la représentation d'éléments technologiques. On peut, par exemple, représenter des engrenages, des poulies, des courroies... On s'éloigne alors du schéma purement cinématique pour s'orienter vers un schéma plus technologique.

2.6 Les surfaces de contact

Les liaisons mécaniques élémentaires peuvent être obtenues par le contact entre surfaces (sauf la liaison rotule à doigt qui ne devrait pas être considérée comme une liaison élémentaire). On peut caractériser les surfaces devant être en contact, par le groupe de déplacements les laissant globalement invariantes. Ainsi, on différencie 7 classes de surfaces :

1- sphérique : invariante pour toute rotation autour du centre de la sphère,

2- cylindrique (de révolution) : invariante pour toute rotation ou translation suivant l'axe du cylindre,

3- planes : invariante pour toute translation dans le plan et toute rotation autour d'un axe perpendiculaire au plan,

4- de révolution : invariante pour toute rotation autour de l'axe de la surface,

5- prismatique : invariante pour toute translation suivant la directrice du prisme,

6- hélicoïdale : invariante pour tout déplacement hélicoïdal suivant une hélice de la surface,

7- quelconque : surface qu'aucun déplacement ne laisse globalement invariante.

Type de contact	Liaison assurée	Surfaces en contacts	Remarque
Surfacique	Rotule	Sphère/Sphère	Ajustement glissant. On peut se limiter à des portions de sphère.
	Pivot glissant	Cylindre/Cylindre	Ajustement glissant
	Appui-plan	Plan/Plan	
	Pivot	Révolution/Révolution	Contact conique par exemple
	Glissière	Prismatique/Prismatique	Tiroir par exemple
	Hélicoïdale	Hélicoïdale/Hélicoïdale	Système vis-écrou
	Encastrement	Quelconque/Quelconque	Souvent combinaison de surfaces simples
Linéique	Linéaire rectiligne Linéaire annulaire	Cylindre/Cylindre Cylindre/Plan … Sphère/Cylindre	D'une façon générale, entre deux surfaces réglées Ajustement glissant
Ponctuel	Ponctuelle	Sphère/Plan ou autre	

Remarque :

Lorsque les efforts à transmettre sont importants, il est préférable de mettre en place des contacts surfaciques pour que la pression de contact soit admissible par les matériaux.

2.7 Composition de liaisons en parallele

L'association de deux surfaces génère une surface ayant des propriétés d'invariance. Quelques exemples sont donnés ci-dessous.

Une surface de révolution peut être obtenue par association :

1. de deux surfaces sphériques,
2. d'une surface plane et d'une surface sphérique,
3. d'une surface cylindrique et d'une surface sphérique avec le centre de la sphère sur l'axe du cylindre,
4. d'une surface cylindrique et d'une surface plane avec le plan perpendiculaire à l'axe du cylindre,

Une surface prismatique peut être obtenue par association :

1. de deux surfaces cylindriques d'axes parallèles,
2. de deux surfaces planes non parallèles,
3. d'une surface cylindrique et d'une surface plane parallèle à l'axe du cylindre.

Une surface quelconque est presque toujours obtenue par associations de surfaces simples à réaliser, de type cylindrique, prismatique, plan ou de révolution.

Etant donné qu'on peut associer une liaison cinématique à chaque surface de contact, il en découle des règles de composition de liaisons en parallèle.

2.8 COMPOSITION EN SERIE DE LIAISONS

On peut réaliser une liaison à partir de deux liaisons en série séparées par une pièce intermédiaire. Par exemple, une liaison ponctuelle peut être obtenue par la mise en série d'une liaison rotule et d'une liaison appui-plan. On a alors un contact sphérique et un contact plan. Cette solution est souvent utilisée, car elle permet de diminuer la pression de contact entre les pièces.

Le montage de liaisons en série permet également de réaliser des cinématiques intéressantes :

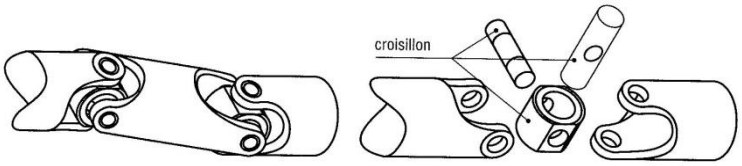


Fig. 1.3 : Joint de cardan réalisé à partir de deux liaisons pivot d'axes concourants en série.

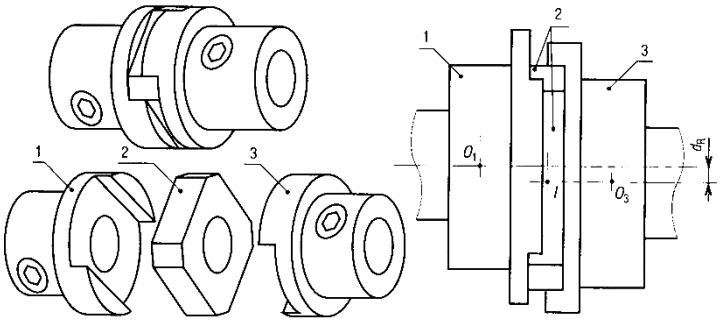


Fig. 1.4 : Joint d'Oldham réalisé à partir de deux liaisons glissière en série.

3. Etude des efforts dans un système mécanique

3.1 Precisions

L'étude des efforts dans un système mécanique consiste à déterminer les composantes des torseurs des efforts de liaison à partir des efforts extérieurs appliqués sur le système.

On suppose que le poids des pièces est négligé. Le mécanisme est considéré à l'arrêt (étude statique). Il n'y pas d'efforts d'inertie. Les seuls efforts pris en compte sont alors les efforts de liaisons et les efforts extérieurs autres que ceux induits par la gravité.

On appelle bâti, le solide qui est relié à l'environnement du système mécanique. En général, le bâti est le solide qui est fixé au sol. Il ne sert à rien d'essayer d'isoler le bâti, car les efforts dans la liaison encastrement située entre le bâti et l'environnement sont inconnus.

3.2 Exemple de systeme isostatique

Le serre-joint schématisé ci-dessous permet d'illustrer l'étude des efforts dans un système mécanique. La mise en équations est simple, car le repère général peut être considéré comme le repère local pour chaque liaison. En conséquence, tous les moments sont définis au même point (O, le centre du repère). On cherche à calculer les efforts dans les liaisons, en fonction du couple C exercé sur le solide (S_1) autour de l'axe $\vec{x}$.

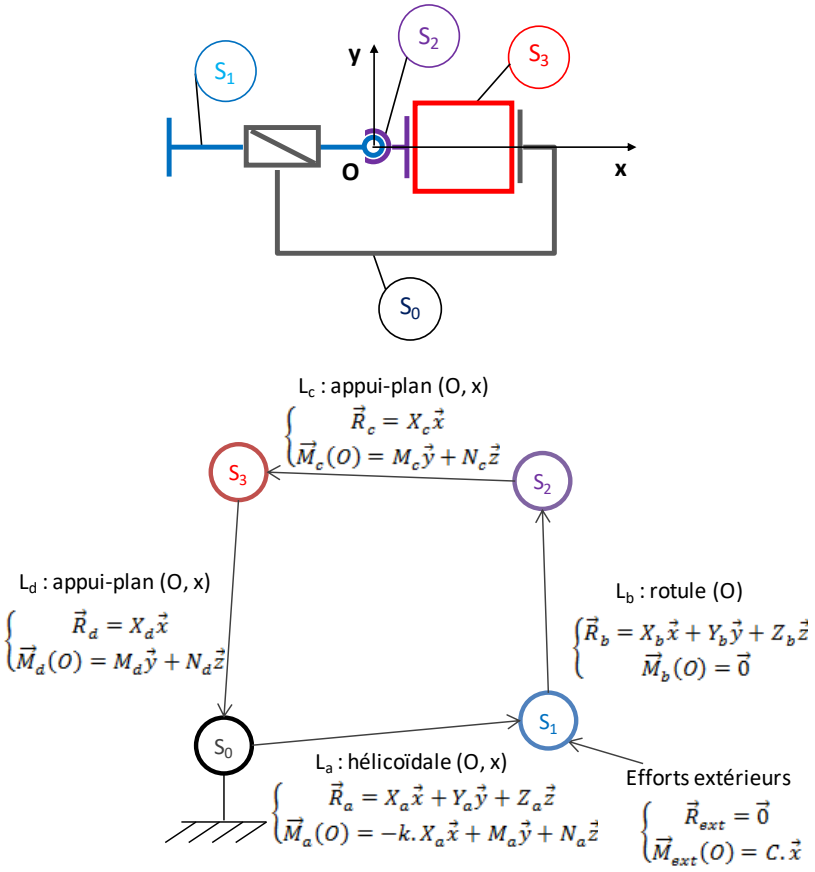


Fig. 1.5 : Schéma cinématique et graphe de liaison du serre-joint.

Le graphe de liaisons est créé à partir du schéma cinématique. Les efforts extérieurs appliqués (couple suivant (O, x) sur le solide (S_1)) sont indiqués sur celui-ci, de même que les composantes inconnues des torseurs des efforts de liaison.

Sur cet exemple, le nombre d'inconnues de liaisons est égal à :

$$N_s = 5 + 3 + 3 + 3 = 14$$

Le mécanisme est composé de 4 solides. En appliquant le principe fondamental de la statique aux 3 solides autres que le bâti, on obtient 6 (3x2) équations vectorielles, soit 18 équations scalaires.

Parmi les 18 équations, 4 équations sont de la forme $(0 = 0)$. Seules les 14 autres équations apportent des informations pour la résolution du problème.

Il reste 14 équations pour 14 inconnues à déterminer. Le problème peut être complètement résolu. Le système mécanique est dit **isostatique**.

	Somme des forces		**Somme des moments**	
	Equation vectorielle	Equations scalaires	Equation vectorielle	Equations scalaires
Equilibre de (S_1)	$\vec{R}_a - \vec{R}_b + \vec{R}_{ext} = \vec{0}$	$X_a - X_b = 0$ $Y_a - Y_b = 0$ $Z_a - Z_b = 0$	$\vec{M}_a(O) - \vec{M}_b(O) + \vec{M}_{ext}(O) = \vec{0}$	$-k.X_a + C = 0$ $M_a = 0$ $N_a = 0$
Equilibre de (S_2)	$\vec{R}_b - \vec{R}_c = \vec{0}$	$X_b - X_c = 0$ $Y_b = 0$ $Z_b = 0$	$\vec{M}_b(O) - \vec{M}_c(O) = \vec{0}$	$0 = 0$ $M_c = 0$ $N_c = 0$
Equilibre de (S_3)	$\vec{R}_c - \vec{R}_d = \vec{0}$	$X_c - X_d = 0$ $0 = 0$ $0 = 0$	$\vec{M}_c(O) - \vec{M}_d(O) = \vec{0}$	$0 = 0$ $M_c - M_d = 0$ $N_c - N_d = 0$

<u>Remarque</u> :

Le nombre d'équations de la statique que l'on ne peut pas exploiter est égal au nombre de mobilités dans le mécanisme. Ici, du fait de la modélisation sans frottements :

- la pièce (S_3) est libre en translation suivant $\vec{y}$,

- la pièce (S_3) est libre en translation suivant $\vec{z}$,

- la pièce (S_3) est libre en rotation autour de l'axe $(0, \vec{x})$,

- la pièce (S_2) est libre en rotation autour de l'axe $(0, \vec{x})$.

3.3 Notion de cheminement d'efforts

On peut comparer la résolution de l'équilibre statique du système à l'écriture de lois aux nœuds du graphe de liaisons. On peut aussi analyser le système en étudiant le cheminement des efforts dans le système, comme on étudie la circulation du courant dans un circuit électrique. Les cheminements d'efforts sont toujours bouclés. En électricité, un courant circule dans un circuit fermé. En mécanique, un effort chemine dans une boucle cinématique.

Après résolution du système d'équations, on peut interpréter le résultat sur le graphe de liaisons.

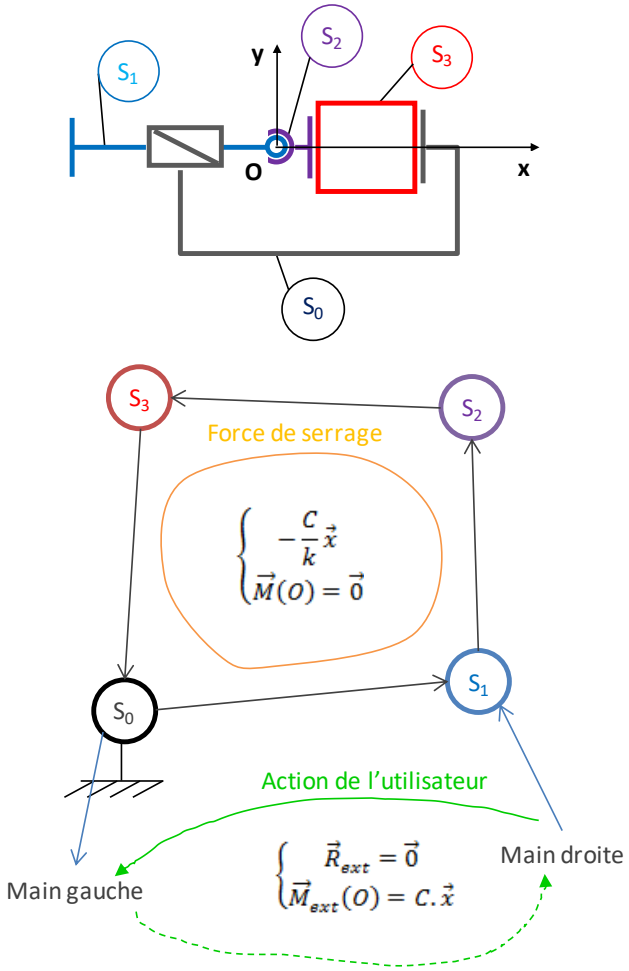


Fig. 1.6 : Schéma cinématique et graphe de liaison du serre-joint.

On identifie les cheminements de deux efforts dans le système :

- Un cheminement de moment : le couple extérieur C est transmis de la main droite de l'utilisateur à la vis (S_1), puis à l'étrier (S_0), puis à la main gauche, et enfin à nouveau à sa main droite à travers l'utilisateur.

- Un cheminement de force : La force de serrage est transmise de la vis (S_1) au patin (S_2), puis à la pièce (S_3), puis à l'étrier (S_0), et à enfin à nouveau à la vis.

3.4 EXEMPLE DE SYSTEME HYPERSTATIQUE

3.4.1 Surabondance d'orientation

Le serre-joint précédent est modifié de la façon suivante : La rotule entre les solides (S_1) et (S_2) est supprimée. Ces deux solides constituent maintenant un seul solide nommé (S_{1-2}).

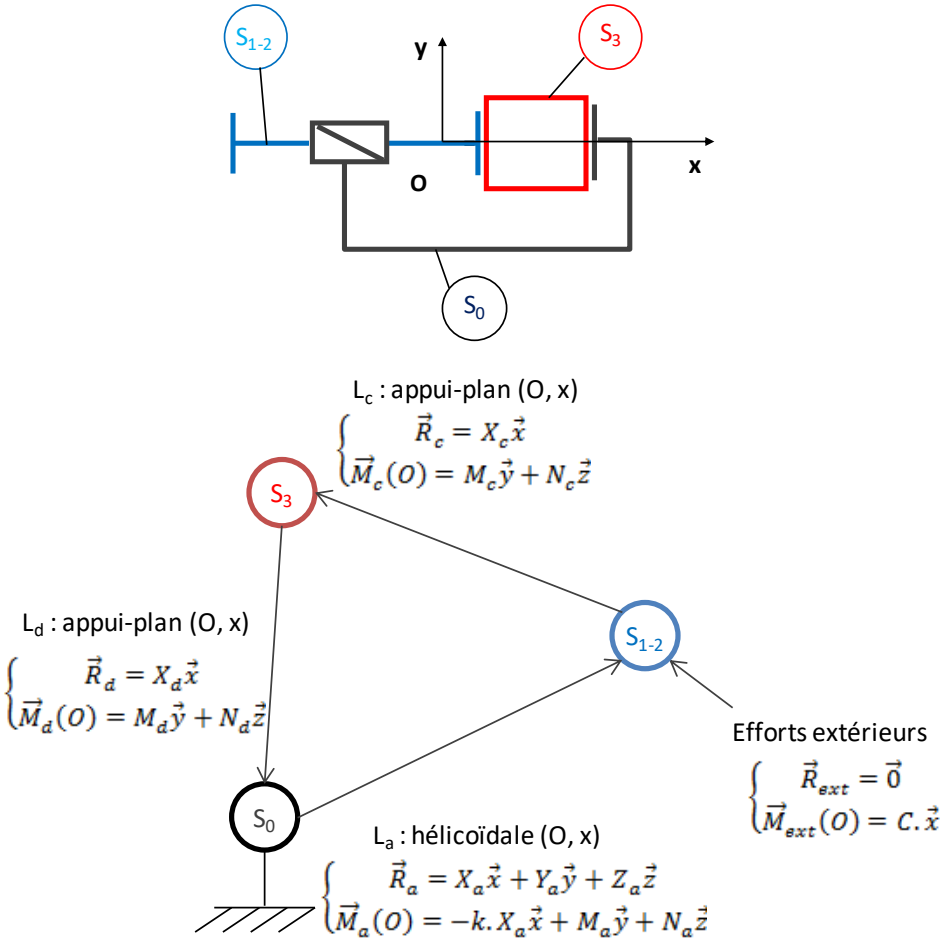


Fig. 1.7 : Schéma cinématique et graphe de liaison du serre-joint (version 2).

	Somme des forces		**Somme des moments**	
	Equation vectorielle	Equations scalaires	Equation vectorielle	Equations scalaires
Equilibre de (S_{1-2})	$\vec{R}_a - \vec{R}_c + \vec{R}_{ext} = \vec{0}$	$X_a - X_c = 0$ $Y_a = 0$ $Z_a = 0$	$\vec{M}_a(O) - \vec{M}_c(O) + \vec{M}_{ext}(O) = \vec{0}$	$-k.X_a = C\ M_a - M_c = 0$ $N_a - N_c = 0$
Equilibre de (S_3)	$\vec{R}_c - \vec{R}_d = \vec{0}$	$X_c - X_d = 0$ $0 = 0$ $0 = 0$	$\vec{M}_c(O) - \vec{M}_d(O) = \vec{0}$	$0 = 0$ $M_c - M_d = 0$ $N_c - N_d = 0$

Sur cet exemple, le nombre d'inconnues de liaisons est égal à :

$$N_s = 5 + 3 + 3 = 11$$

Le mécanisme est composé de 3 solides. En appliquant le principe fondamental de la statique aux 2 solides autres que le bâti, on obtient 4 (2x2) équations vectorielles, soit 12 équations scalaires.

Parmi les 12 équations, 3 équations sont de la forme (0 = 0). Seules les 9 autres équations apportent des informations pour la résolution du problème.

Il reste 9 équations pour 11 inconnues à déterminer. Le problème ne peut être complètement résolu. Le système mécanique est dit **hyperstatique**.

On peut visualiser le résultat de la résolution sur un graphe de liaisons.

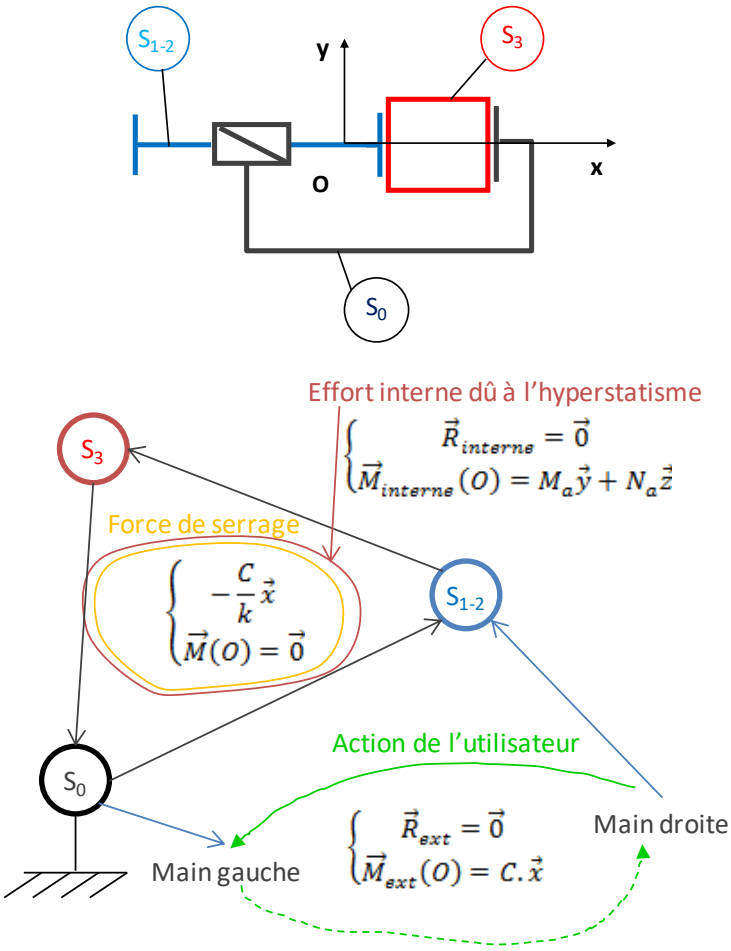


Fig. 1.8 : Cheminement des efforts (version 2).

Par rapport au cas précédent, il y un cheminement d'effort supplémentaire dans la boucle (S_0)-(S_{1-2})-(S_3).

Cet effort reste inconnu en intensité. Il dépend des composantes de moment suivant y et z de la liaison L_a (M_a et N_a). Ces deux composantes sont appelées **inconnues hyperstatiques**.

On peut relier cet hyperstatisme à une surabondance d'orientation entre la pièce (S_3) et l'étrier (S_0). Cette orientation autour des axes $\vec{y}$ et $\vec{z}$, est assurée d'une part par la liaison appui-plan (L_d), et d'autre part par les liaisons hélicoïdale (L_a) et appui-plan (L_c) en série.

3.4.2 Surabondance de positionnement

Le serre-joint initial est à nouveau modifié de la façon suivante : La liaison hélicoïdale entre le solide (S_0) et (S_1) est supprimée. Ces deux solides constituent maintenant un seul solide nommé ($S_{0\text{-}1}$). On supprime l'action de l'utilisateur.

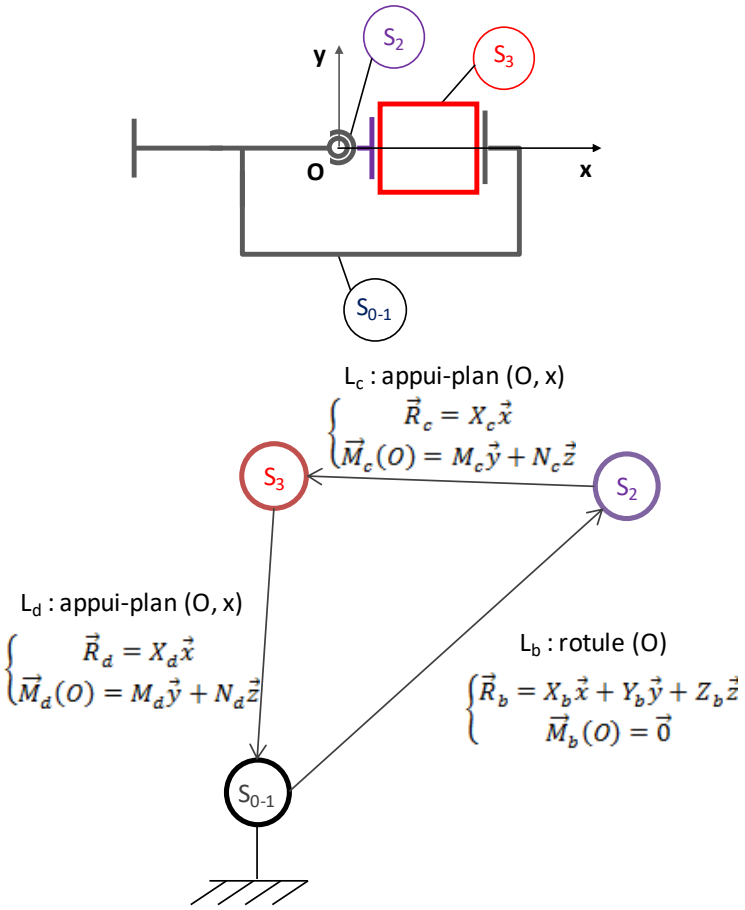


Fig. 1.9 : Schéma cinématique et graphe de liaison du serre-joint (version 3).

Sur cet exemple, le nombre d'inconnues de liaisons est égal à :

$$N_s = 3 + 3 + 3 = 9$$

Le mécanisme est composé de 3 solides. En appliquant le principe fondamental de la statique aux 2 solides autres que le bâti, on obtient 4 (2x2) équations vectorielles, soit 12 équations scalaires.

Parmi les 12 équations, 4 équations sont de la forme (0 = 0). Seules les 8 autres équations apportent des informations pour la résolution du problème.

Il reste 8 équations pour 9 inconnues à déterminer. Le problème ne peut être complètement résolu. Le système mécanique est **hyperstatique**.

Une inconnue ne peut donc pas être déterminée en fonction des efforts extérieurs. Il s'agit de la composante de force suivant l'axe $\vec{x}$ dans les liaisons du système. Toutes les autres composantes sont nulles.

On peut relier cet hyperstatisme à une surabondance de positionnement entre la pièce (S_3) et l'étrier ($S_{0\text{-}1}$). Ce positionnement suivant l'axe $\vec{x}$, est assuré d'une part par la liaison appui-plan (L_d), et d'autre part par les liaisons rotule (L_b) et appui-plan (L_c) en série.

3.5 CALCUL DU DEGRE D'HYPERSTATISME

D'une façon générale, pour un système composé de p solides et q liaisons :

Chaque liaison L_X introduit n_{SX} inconnues statiques indépendantes. On a un nombre total d'inconnues statiques N_S :

$$N_s = \sum_{i=1}^{q} n_{si}$$

On peut appliquer le principe fondamental de la statique à chacun des $(p-1)$ solides du mécanisme. On obtient alors $6(p-1)$ équations scalaires.

Parmi ces équations, certaines n'apportent rien pour la résolution du problème. On détermine le nombre d'équations utiles en calculant le rang du système d'équations. On note alors r_S le rang de ce système (nombre d'équations linéairement indépendantes).

$$r_s < 6(p-1)$$

Si $r_s = N_s$ (autant d'équations que d'inconnues), le mécanisme est dit **isostatique,** on peut donc résoudre le système d'équations et déterminer toutes les inconnues statiques.

Si $r_s < N_s$, le mécanisme est dit **hyperstatique.** Le degré d'hyperstatisme, noté H, est alors :

$$H = N_s - r_s$$

<u>Remarque</u> :

Par une étude cinématique, on peut montrer que le nombre total de mobilités (m_c) (mobilités internes et relations d'entrée-sortie) du mécanisme est égal au nombre d'équations statiques inutiles (linéairement dépendantes) pour la résolution du système.

Par conséquent, on peut connaître le degré d'hyperstatisme sur des mécanismes simples, en trouvant d'une façon intuitive les mobilités, sans calculer le rang du système d'équations :

$$H = N_s - [6(p-1) - m_c]$$

3.6 CONSEQUENCES DE L'HYPERSTATISME

Lorsqu'un système est hyperstatique, certaines composantes d'efforts dans des liaisons, ne dépendent pas seulement des efforts extérieurs appliqués sur le système, mais aussi d'un effort interne localisé dans une boucle cinématique du mécanisme. Celui-ci peut avoir deux causes :

1. La fabrication des pièces introduit des défauts dimensionnels et géométriques. Les distances et orientations entre surfaces de liaisons ne sont pas parfaitement maîtrisées.
2. Une variation de température lors du fonctionnement peut engendrer des dilatations thermiques différentes pour chacune des pièces.

Les écarts dimensionnels et géométriques peuvent alors être compensés par une déformation élastique (introduite volontairement pour permettre l'assemblage ou apparaissant lors du fonctionnement). C'est cet effort de déformation que l'on retrouve localisé dans la boucle cinématique.

Sur l'exemple ci-dessous (figure 1.10), la pièce 2 est en appui-plan des deux côtés avec l'étrier 1 après montage (figure 1.10b). Ce système est hyperstatique : on retrouve les surabondances de positionnement et d'orientation vues dans les exemples précédents. Il existe alors un effort interne dans la boucle du système après montage qui sollicite l'étrier en traction (et aussi en flexion) et la pièce en compression. Cet effort est égal, à l'effort qu'il a fallu exercer pour déformer élastiquement la pièce 2 afin de réaliser l'assemblage. Dans ce cas, on parle de **précontrainte** de montage.

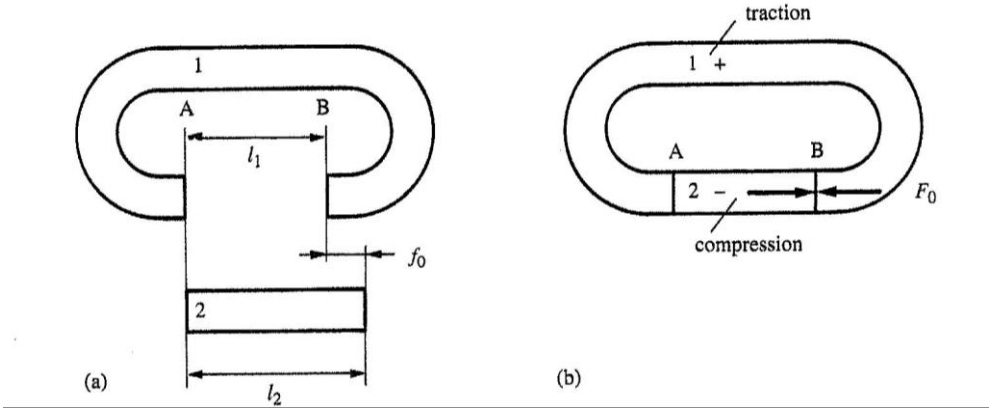


Fig. 1.10 : Montage de la pièce 2 avec précontrainte.

D'une façon générale, les efforts internes ne sont pas souhaitables, car ils ne participent pas à la réalisation d'une fonction du produit. De plus, ils augmentent les sollicitations mécaniques sur les pièces et donc les risques de ruptures.

3.7 REDUCTION DU DEGRE D'HYPERSTATISME

3.7.1 Prise en compte du jeu dans le modèle

Les exemples précédents montrent que les hypothèses retenues pour la modélisation des liaisons (sans jeu) peuvent conduire à un système hyperstatique. Dans la pratique, il y a souvent du jeu dans les liaisons. Ce jeu permet de rendre possibles les mouvements entre les pièces.

Dans une boucle cinématique où il y a de l'hyperstatisme, si la somme des jeux est supérieure à la somme des écarts de fabrication des pièces, celles-ci se montent sans avoir à se déformer.

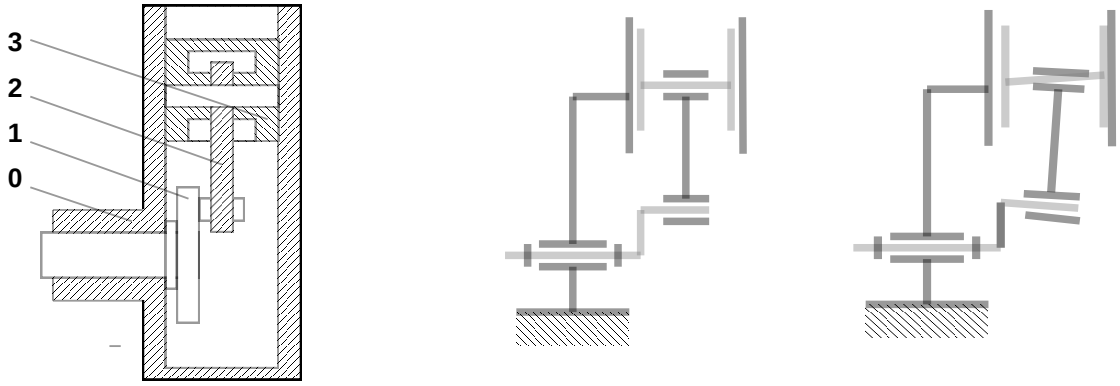


Fig. 1.11 : Montage d'un système hyperstatique sans déformation grâce au jeu de fonctionnement.

La détermination du jeu nécessaire au bon fonctionnement du mécanisme (et fonction des tolérances de fabrication des pièces) est un problème de cotation fonctionnelle traitée dans le chapitre 2.

Le jeu peut être pris en compte dès la phase de modélisation. Dans ce cas, l'hyperstatisme n'apparaît pas dans les équations. Par exemple, il est courant de modéliser :

- un contact cylindrique sur une faible longueur par une liaison linéaire annulaire,

- la liaison assurée par un roulement à billes par une liaison rotule ou linéaire annulaire,

- un contact entre des dents d'engrenages par une liaison ponctuelle.

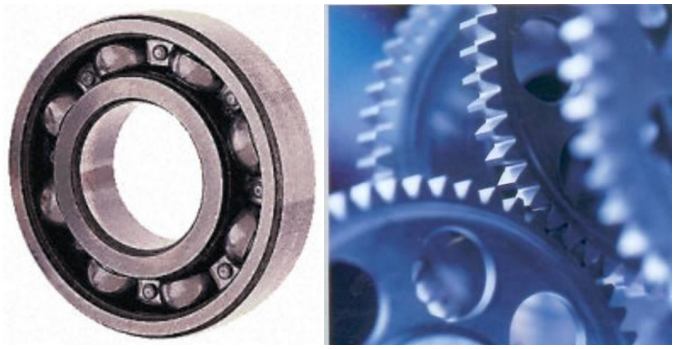


Fig. 1.12 : Roulements à billes (de faible largeur) modélisable par une liaison rotule et contact entre dentures (de faible largeur) modélisable par une liaison ponctuelle.

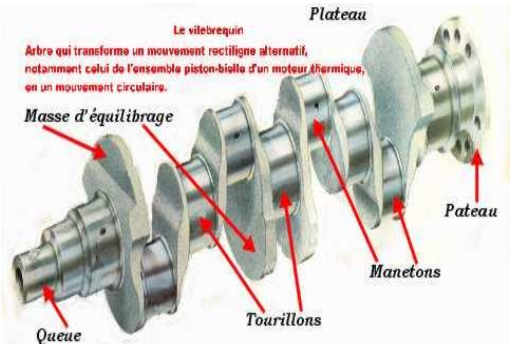


Fig. 1.13 : vilebrequin d'un moteur à quatre cylindres monté sur 5 paliers.

Ces modélisations ne sont correctes que si les pièces se positionnent dans la limite des jeux possibles lors de l'assemblage, ou, une fois cette limite dépassée, que si la déformation dans la liaison est possible en introduisant un effort de déformation négligeable par rapport aux autres efforts étudiés dans le système.

3.7.2 Prise en compte des déformations

Ajouter des lois de comportements :

Dans une boucle cinématique où est localisé l'hyperstatisme, on peut introduire les lois de comportement élastique des pièces et des liaisons les moins rigides. L'ajout d'équations dans le système permet alors de calculer les inconnues hyperstatiques.

Négliger certains termes :

Quand des pièces sont très peu rigides, elles peuvent se déformer sous l'effet d'efforts négligeables devant les autres efforts étudiés. On peut alors négliger ces efforts pour réduire le nombre d'inconnues hyperstatiques.

<u>Remarque</u> :

Lorsque les pièces se déforment sous l'action des efforts extérieurs, il peut être intéressant de concevoir un système hyperstatique pour limiter les déformations. Par exemple, le vilebrequin d'un moteur à quatre cylindres est monté sur 5 paliers (voir figure 1.13). Chaque palier est modélisé par une liaison linéaire annulaire. Le système est hyperstatique d'ordre 6. L'objectif de la surabondance de position et d'orientation introduite est de limiter les vibrations du vilebrequin.

3.8 APPLICATION A LA MACHINE A VAPEUR

La figure 1.14 présente 3 vues en plan d'une machine à vapeur miniature, ainsi que la nomenclature des pièces du mécanisme.

1. Regrouper les pièces solidaires entre elles (p solides).
2. Tracer un graphe de liaisons (q liaisons).
3. Proposer un modèle pour chaque liaison et calculer le nombre d'inconnues statique N_s.
4. Déterminer intuitivement le nombre $\mathbf{m_c}$ de mobilités.
5. Calculer le degré d'hyperstatisme.
6. Déterminer les causes et conséquences de chaque degré d'hyperstatisme.

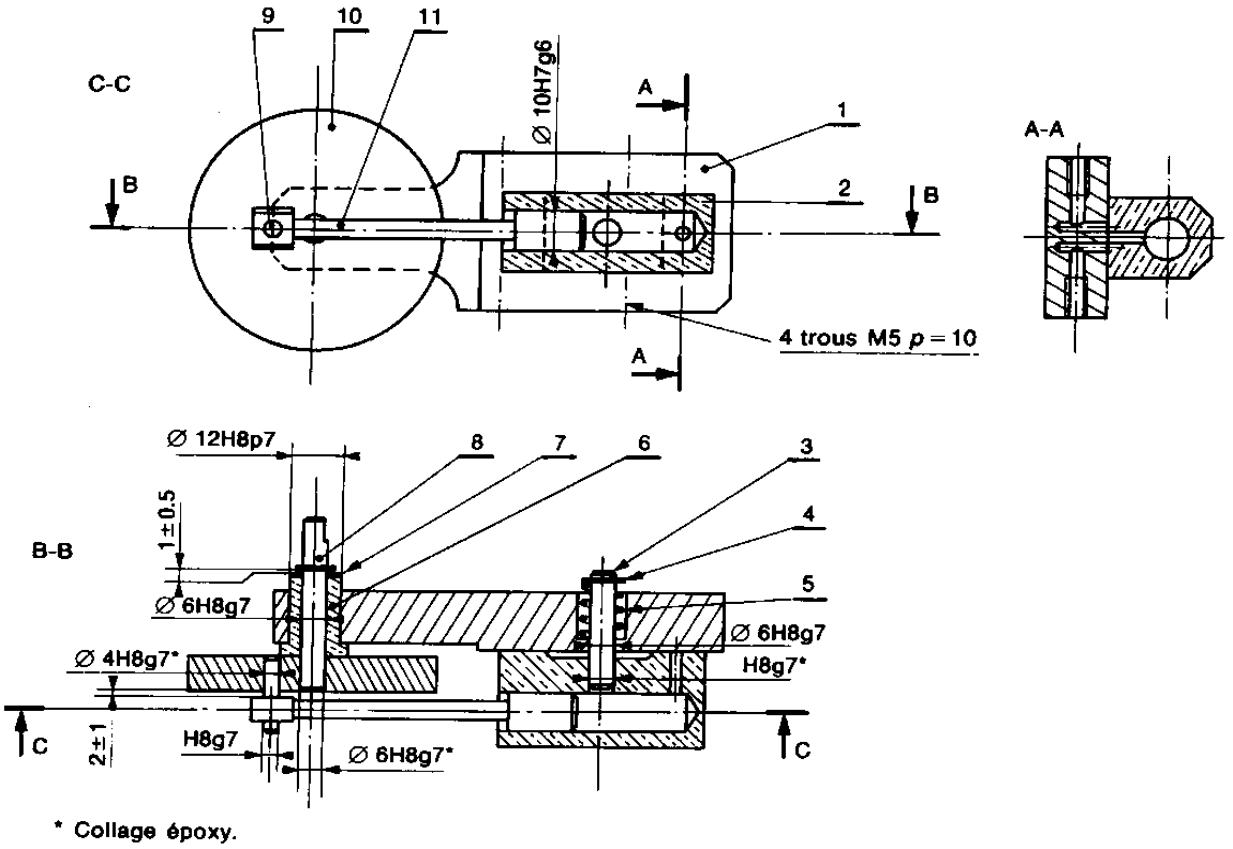


Fig. 1.14 : Dessin de définition et nomenclature de la machine à vapeur.

Rp	Nb	Désignation	Matière	Obs.
11	1	Piston	XC 42	Chromé
10	1	Volant	E 24	Chromé
9	1	Téton	XC 42	Chromé
8	1	Arbre	XC 42	Chromé
7	1	Rondelle M 6	Polyamide	
6	1	Palier	UE 9 P	
5	1	Ressort (Ø fil = 0,8)		
4	2	Anneau Truarc « E »		
3	1	Pivot	XC 42	
2	1	Cylindre	UE 9 P	Polissage
1	1	Bâti	E 24	Nickelé noir

CHAPITRE 2 : SPECIFICATIONS FONCTIONNELLES ET DEFINITION DE PRODUIT

1. Les étapes de la spécification

1.1 Recherche des Conditions fonctionnelles

Dans une démarche de conception, une fois le plan d'ensemble d'un système mécanique réalisé, les conditions garantissant son montage et son bon fonctionnement sont recherchées.

Sur l'exemple de la machine à vapeur présenté à la fin du chapitre 1, voici quelques exemples de ces conditions :

Condition de montage sans effort

Le modèle du système mécanique est hyperstatique. Pour que le montage soit possible sans effort, il faut alors que les défauts de parallélisme ou de perpendicularité entre les différents axes des cylindres ci-dessous soient faibles et que le jeu dans la liaison téton/piston soit suffisant.

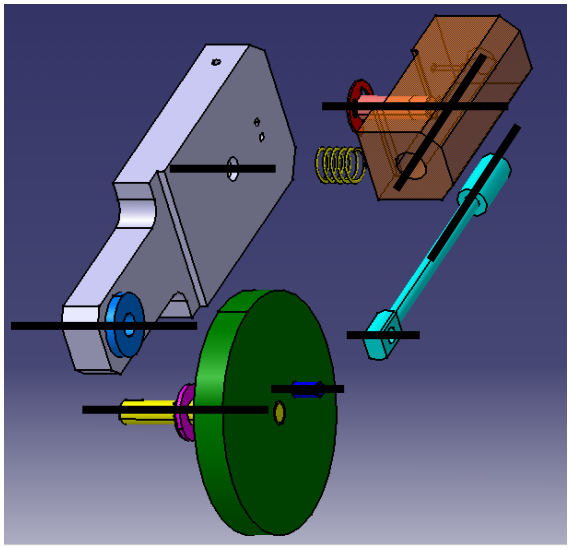


Fig. 2.1 : Modèle 3D éclaté de la machine à vapeur miniature.

Non collision entre pièces

Sur la vue en coupe ci-dessous, quelques dimensions minimales à respecter sont représentées, afin que certaines pièces ne viennent pas en contact lors du fonctionnement. On parle alors de jeu fonctionnel.

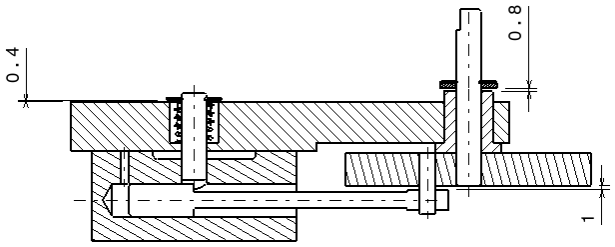


Fig. 2.2 : Vue en coupe de la machine à vapeur miniature.

Etanchéité entre le Cylindre et le Bâti

La vapeur est introduite dans le cylindre par l'intermédiaire d'un trou venant se placer lors de l'admission en face d'un trou dans le bâti. Pour garantir un bon fonctionnement, il faut que les trous soient bien localisés sur les faces et que les faces soient planes.

1.2 ANALYSE DES CONDITIONS FONCTIONNELLES

Une fois identifiée et quantifiée, chaque condition fonctionnelle peut être analysée. On cherche à déterminer les défauts maximum admissibles en fabrication pour chacune des pièces, en fonction du jeu minimal et du jeu maximal à respecter.

Par exemple, les surfaces du bâti qui sont fonctionnelles sont :
- l'alésage permettant le montage du palier,
- l'alésage permettant la réalisation du pivot avec le cylindre,
- la face d'appui avec le cylindre,
- les trous d'admission et d'échappement.

Pour chacune de ces surfaces, on cherche les conditions en termes de forme, orientation, position et dimension qui permettent à la surface de remplir son rôle. Selon les cas, le chiffrage des défauts maximum admissibles peut être simple ou complexe. Dans ce chapitre, on n'abordera que des cas simples : choix d'ajustement et calcul de chaînes de cotes.

1.3 REALISATION D'UN DESSIN DE DEFINITION

Une fois les conditions fonctionnelles analysées, la phase suivante de la conception consiste à réaliser un dessin de définition de chacune des pièces à fabriquer.

Sur ce document, la caractérisation des surfaces de la pièce est décrite d'une façon rigoureuse par des indications précisant :
- leurs dimensions,
- leur forme,
- leur orientation,
- leur position relative,

ainsi que les limites acceptables pour ces différentes spécifications.

On utilise un langage normalisé qui permet de communiquer avec les structures chargées de la fabrication de la pièce.

La figure 2.3 présente quelques éléments du dessin de définition du bâti relatifs aux cotes (dimensions avec des tolérances) et aux spécifications géométriques (planéité, localisation, perpendicularité...).

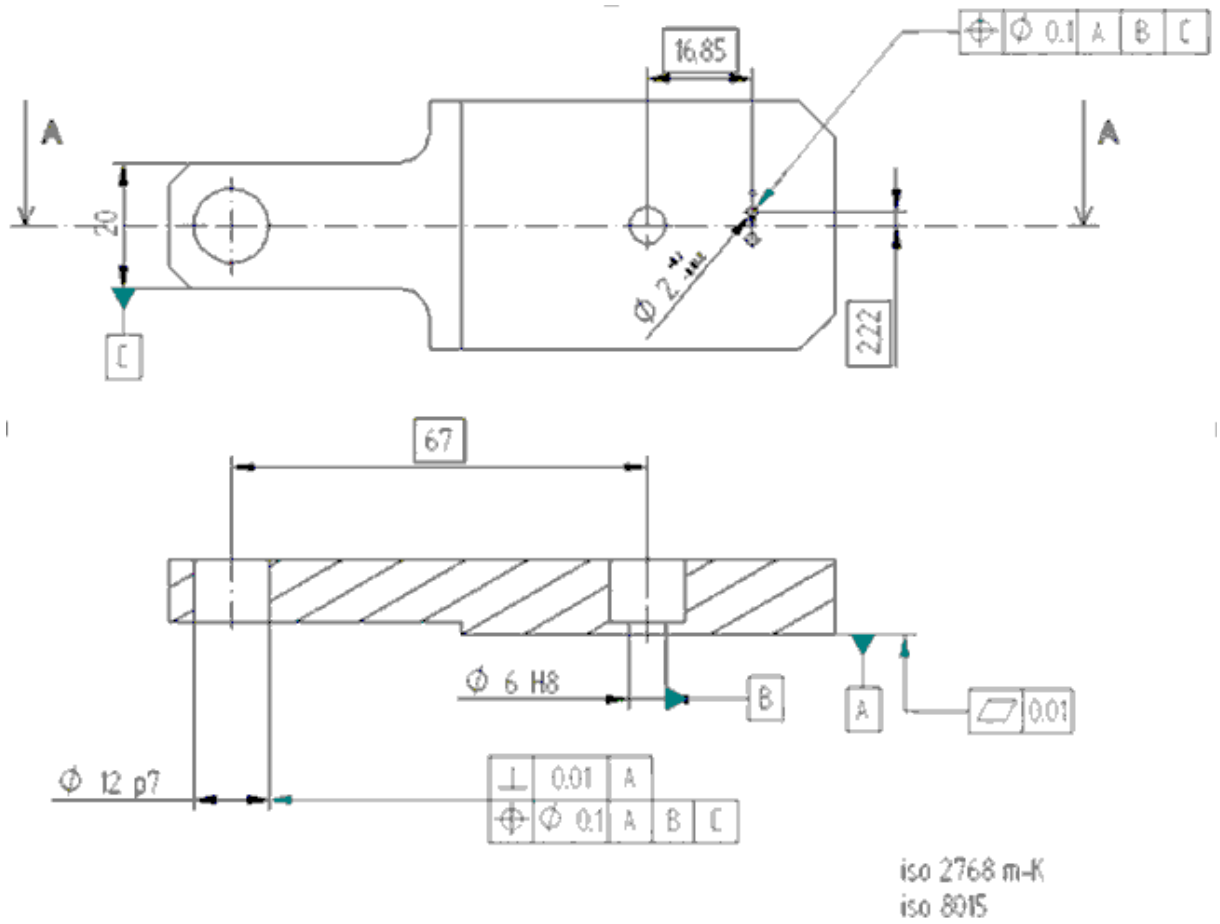


Fig. 2.3 : Dessin de définition du bâti (partiel).

Les principaux objectifs du cours sont d'être capable :

- de comprendre tous les éléments inscrits sur un dessin de définition (voir figure 2.3 ci-dessus),
- de déterminer certaines cotes exprimées en tolérancement dimensionnel (calcul par chaine de cotes),
- d'exprimer les spécifications géométriques (tolérancement géométrique).

2. Tolérancement dimensionnel

2.1 INDICATIONS DIMENSIONNELLES

Pour prendre en compte les défauts liés aux procédés de fabrication, tout en garantissant le montage et le bon fonctionnement du système, on doit décrire l'intervalle acceptable pour chaque dimension.

2.1.1 Signification d'une cote

On utilise le mot ''cote'' pour définir une dimension indiquée sur un dessin de définition. La cote associe une valeur numérique à un graphisme composé de lignes de rappels et d'une ligne de cote.

La valeur numérique d'une cote correspond à la distance séparant deux points dans la direction définie par la ligne de cote. Une tolérance est associée à cette valeur numérique. Sur la figure 2.4, l'indication 100±0,2 signifie que toutes les distances A_iB_i sont comprises entre 99,8 et 100,2 mm.

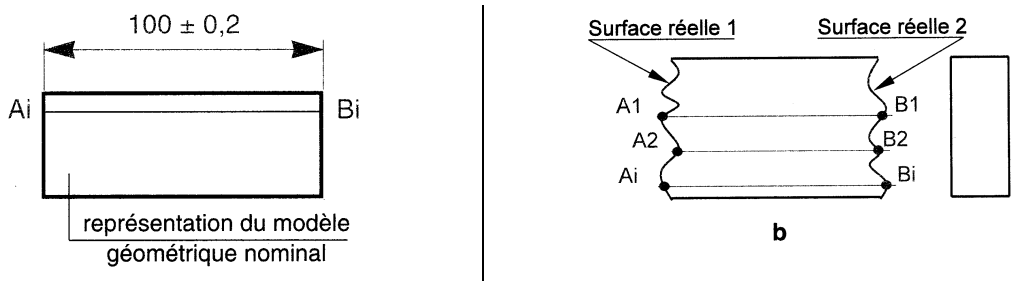


Fig. 2.4 : Principe de cotation d'une dimension.

2.1.2 Principe de l'indépendance

L'ensemble des indications dimensionnelles est insuffisant pour garantir la définition géométrique d'une pièce. Sur l'exemple ci-dessus, la cote peut être respectée même si les surfaces ne sont pas planes. Cela est dû au principe de l'indépendance.

De manière générale, la définition d'une cote par la distance entre deux points ne permet pas de préjuger de la forme des surfaces limites. On dit qu'il y a indépendance entre l'indication de la dimension et la forme des surfaces d'extrémité.

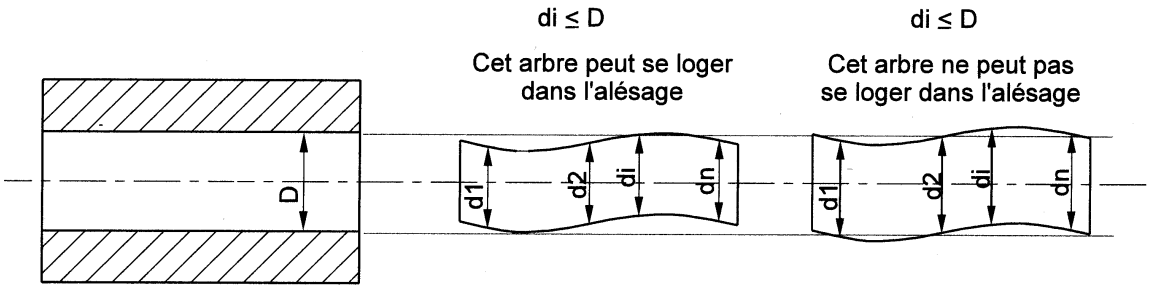


Fig. 2.5 : Illustration du principe de l'indépendance.

Sur l'exemple ci-dessus, le diamètre d'un arbre dont est défini par une cote $\emptyset 30^{0}_{-0.1}$. Toutes les valeurs de diamètre mesurées le long de l'arbre doivent être comprises entre 29,9 et 30 mm. On montre que cette cotation est insuffisante pour garantir que l'arbre puisse rentrer dans un alésage de diamètre 30 mm.

Pour spécifier le principe d'indépendance, on fait référence à la norme ISO 8015 près du cartouche du dessin de définition.

2.1.3 Principe de l'enveloppe

Pour pallier partiellement les limites du tolérancement dimensionnel, la norme introduit le principe de l'enveloppe (ou exigence de l'enveloppe). Ce principe s'applique pour la cotation des cylindres de révolution ou pour celle de distances entre plans parallèles.

Enoncé

1. L'élément réel ne dépasse pas l'enveloppe de forme parfaite dont la dimension est la dimension au maximum de matière définie par la cote.

2. Aucune dimension n'est inférieure à la valeur minimale admise.

Notation

On utilise le symbole Ⓔ.

Sur l'exemple de la figure 2.5, on spécifie l'exigence de l'enveloppe par l'inscription suivante :

$$\emptyset 30^{0}_{-0.1}\,Ⓔ$$

L'arbre réel est à l'intérieur d'un cylindre parfait de diamètre 30 mm et chacune des mesures de diamètre le long de l'arbre est supérieur à 29,9 mm.

Si le symbole Ⓔ est présent près du cartouche, le principe de l'enveloppe s'applique à toute la cotation du dessin.

2.2 TOLERANCES

Plusieurs notations existent pour décrire les intervalles de tolérance :
- Celles des cotes présentées sur les figures précédentes : 100±0,2 et $\emptyset 30^{0}_{-0.1}$
- Une désignation normalisée qui associe une lettre (précisant la position de l'intervalle de tolérance) et un chiffre correspondant à une classe de qualité (précisant la valeur de l'intervalle de tolérance).

La désignation normalisée permet, entre autres, de standardiser l'outillage de contrôle (calibres, jauges...).

2.2.1 Position de l'intervalle de tolérance

La figure 2.6 décrit la position de l'intervalle de tolérance en fonction de la lettre utilisée :
- les lettres majuscules sont utilisées pour tolérancer les alésages (contenant au sens large),
- les lettres minuscules sont utilisées pour tolérancer les arbres (contenu au sens large).

On observe qu'un alésage tolérancé **H** a un diamètre minimal égal à la valeur nominale et qu'un arbre tolérancé **h** a un diamètre maximale égal à la valeur nominale :
- ϕ30H8 : le diamètre de l'alésage est au moins égal à 30 mm,
- ϕ30h8 : le diamètre de l'arbre est au plus égal à 30 mm.

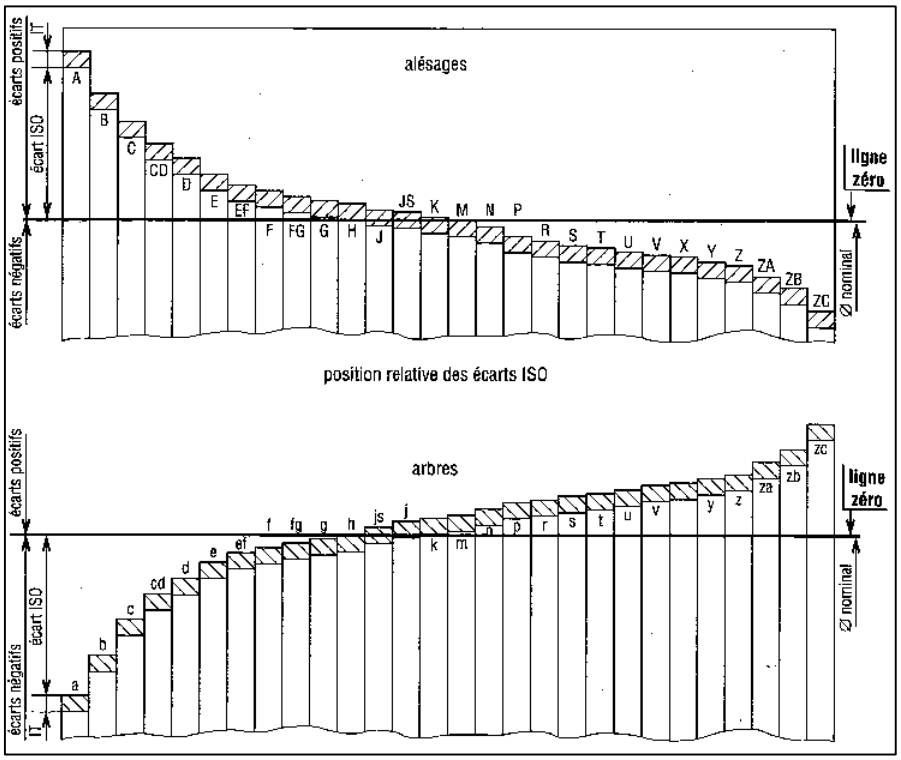


Fig. 2.6 : Position de l'intervalle de tolérance.

2.2.2 Classe de qualité

Relation entre classe de qualité et intervalle de tolérance

La désignation normalisée prévoit 18 classes de qualité, numérotées de 01 à 18 et correspondant à 18 intervalles de tolérance pour une même dimension nominale. Le tableau ci-dessous précise la valeur de l'intervalle de tolérance en fonction de la dimension nominale et de la classe de qualité.

	dimensions nominales en mm												
au-delà de ⟶	1	3	6	10	18	30	50	80	120	180	250	315	400
à (inclus) ⟶	3	6	10	18	30	50	80	120	180	250	315	400	500
IT5	4	5	6	8	9	11	13	15	18	20	23	25	27
IT6	6	8	9	11	13	16	19	22	25	29	32	36	40
IT7	10	12	15	18	21	25	30	35	40	46	52	57	63
IT8	14	18	22	27	33	39	46	54	63	72	81	89	97
IT9	25	30	36	43	52	62	74	87	100	115	130	140	155
IT10	40	48	58	70	84	100	120	140	160	185	210	230	250
IT11	60	75	90	110	130	160	190	220	250	290	320	360	400
IT12	100	120	150	180	210	250	300	350	400	460	520	570	630
IT13	140	180	220	270	330	390	460	540	630	720	810	890	970

Fig. 2.7 : Valeur de l'intervalle de tolérance (IT en µm) en fonction de la classe de qualité et de la dimension nominale (en mm).

Les valeurs des intervalles de tolérance peuvent être obtenues par l'approximation du résultat de la formule suivante :

$$IT_q \approx k_q \sqrt[3]{D}$$

q : classe de qualité
k_q : indice de classe de qualité (mm/(mm)$^{1/3}$) décrit ci-dessous :

q	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
k_q	2	3,3	4,6	7,5	11,5	18,5	30,5	47	74	115

Intérêt des classes de qualité

La notion de qualité est basée sur le fait qu'il est aussi difficile de réaliser une dimension nominale de 2 mm à plus ou moins 7 µm, qu'une dimension de 200 mm à plus ou moins 36 µm. Dans les deux cas, la classe de qualité correspondante est la classe 8. La classe de qualité que l'on peut obtenir dépend du procédé d'obtention retenu (Voir quelques exemples en annexe).

Le prix de revient d'une dimension est décroissant en fonction de la classe de qualité. En effet, une pièce de fonderie présente au mieux une classe de qualité 11. Si l'on souhaite obtenir une classe de qualité 6 pour certaines dimensions ou surfaces fonctionnelles, il faut prévoir, dans la gamme de fabrication, des phases de parachèvement réalisées par des procédés de fabrication plus performants (usinage par outil coupant, rectification…) que le procédé initial d'obtention de la pièce.

2.3 AJUSTEMENTS

Lorsque des pièces s'emboîtent l'une dans l'autre suivant un contact cylindrique ou prismatique, on peut préciser la tolérance de l'assemblage par un ajustement, ce qui se traduit par des cotes sur les deux pièces à assembler. Un ajustement normalisé est spécifié de la façon suivante :

Ø 30 H7g6 ou 40 H7f6

- le symbole Ø permet d'identifier une forme cylindrique,
- les valeurs 30 ou 40 sont les dimensions nominales,
- les lettres indiquent la position de l'intervalle de tolérances par rapport à la ligne zéro,
- la lettre majuscule se rapporte à l'alésage (contenant), celle en minuscule se rapporte à l'arbre (contenu),
- les chiffres indiquent la ou les classes de qualité, c'est à dire l'étendu de l'intervalle de tolérance.

Système de l'alésage normal

Dans le but de réduire le nombre d'ajustements possibles et le nombre d'outillage de réalisation et de contrôle, le système de l'alésage normal **H** est préconisé. L'ajustement souhaité (serré ou glissant) est obtenu en faisant varier la position de l'intervalle sur le contenu (l'arbre).

Système de l'arbre normal

Ce système est retenu uniquement lorsque le contenu est acheté avec une tolérance h (axes en acier étirés, bagues extérieures de roulements...). L'ajustement souhaité (serré ou glissant) ne peut être obtenu qu'en faisant varier la position de l'intervalle sur le contenant (l'alésage).

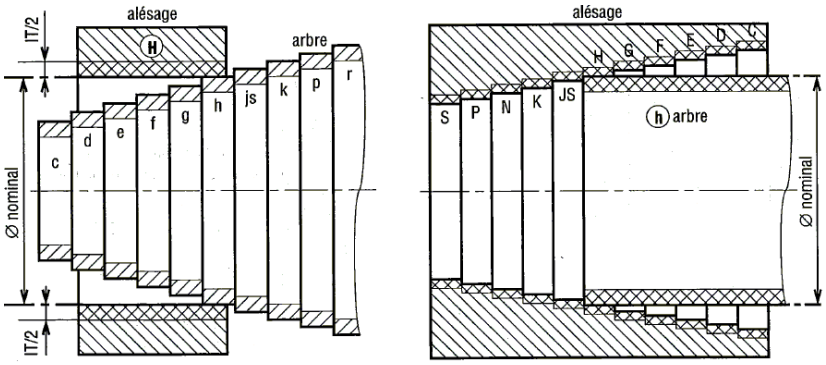


Fig. 2.8 : Systèmes de l'alésage normal et de l'arbre normal.

Choix d'un ajustement

Principaux ajustements NF R 91-011 (Les cases colorées correspondent aux valeurs à privilégier)				Arbres	H6	H7	H8	H9	H10
Pièces mobiles l'une par rapport à l'autre	Pièces dont le fonctionnement nécessite un grand jeu (dilatation, mauvais alignement, portée très longue, etc.)			c				9	11
				d				9	11
	Cas ordinaire des pièces tournant ou glissant dans une bague ou palier (bon graissage assuré)			e		7	8	9	
				f	6	6-7	7		
	Pièces avec guidage précis pour mouvements de faible amplitude			g	5	6			
Pièces immobiles l'une par rapport à l'autre	Démontage et remontage possibles sans détérioration des pièces	L'assemblage ne peut pas transmettre d'effort	Mise en place possible à la main	h	5	6	7	8	
				js	5	6			
			Mise en place au maillet	k	5				
				m		6			
	Démontage impossible sans détérioration des pièces	L'assemblage peut transmettre des efforts	Mise en place à la presse	p		6			
			Mise en place à la presse ou par dilatation	s			7		
				u			7		
				x			7		

Fig. 2.9 : Ajustements utilisés en mécanique avec le système de l'alésage normal.

<u>Remarques</u> :

- Pour les ajustements glissants, il est logique associer l'exigence de l'enveloppe à la cote tolérancée.

- Pour les ajustements serrés, le tableau ci-dessus ne donne que des valeurs retenues pour des emmanchements entre pièces en acier. Les déformations élastiques nécessaires au montage génèrent des efforts normaux au contact. Le frottement est alors important et s'oppose à tout glissement lors de la transmission de charge axiale ou de couple. Le calcul du couple ou de l'effort axial transmissible par l'emmanchement est possible par résolution analytique du problème d'élasticité (abordé dans l'UE MSS).

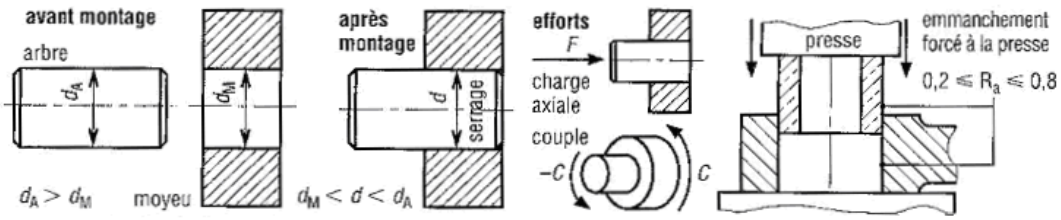


Fig. 2.10 : Ajustements serré.

2.4 CHAINES DE COTES

2.4.1 Exemple introductif

L'assemblage de la figure 2.11 réalise une liaison pivot entre les pièces 1 et 3, à l'aide de deux coussinets (2 et 4), et d'un écrou (5) qui assure l'arrêt en translation. Pour un bon fonctionnement, un jeu est nécessaire entre les pièces 4 et 5. On admet que la valeur moyenne du jeu nécessaire au bon fonctionnement est égale à 1 mm et que l'intervalle de tolérance correspondant est égal à ±0.25 mm.

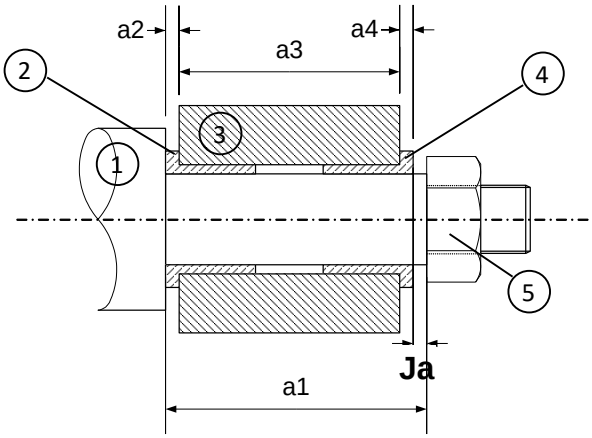


Fig. 2.11 : Assemblage réalisant une liaison pivot entre un arbre (1) et la pièce (3).

2.4.2 Tracé de la chaîne de cotes

- La condition à satisfaire est notée J_a.

- La cote condition relie 2 surfaces appartenant à 2 pièces différentes.

- Partant de l'une des surfaces pointées par la cote condition, on recherche successivement les surfaces de contact entre pièces, de telle façon à construire, de contact en contact, une chaîne de maillons qui se ferme sur l'autre extrémité de la cote condition.

- A l'exception de la cote condition, tous les autres maillons relient 2 surfaces appartenant à la même pièce.

- La chaîne de cote doit être minimale. Pour cela, il faut qu'un seul maillon par pièce intervienne dans la chaîne.

- Les maillons de la chaîne respectent le principe de l'enveloppe.

Détermination des cotes

On peut donner une relation entre la cote condition et les cotes des différentes pièces intervenant dans la chaîne.

$$J_a = a_1 - a_2 - a_3 - a_4 \qquad IT(J_a) = J_{a\,maxi} - J_{a\,mini}$$

En faisant la différence entre la valeur maximale et la valeur minimale de la cote condition, on trouve la relation entre l'intervalle de tolérance de la cote condition et les autres intervalles de tolérance :

$$J_{a\,maxi} = a_{1\,maxi} - a_{2\,mini} - a_{3\,mini} - a_{4\,mini}$$

$$J_{a\,mini} = a_{1\,mini} - a_{2\,maxi} - a_{3\,maxi} - a_{4\,maxi}$$

Finalement, $$IT(J_a) = IT(a_1) + IT(a_2) + IT(a_3) + IT(a_4)$$

Tous les IT associés aux cotes des différentes pièces intervenant dans la chaîne sont inférieurs à l'IT de la condition. Si l'IT sur la condition est très faible, on obtient des petits IT sur les différentes cotes, ce qui peut poser des problèmes en fabrication.

Les IT des cotes correspondant à des composants achetés sont imposés par le fournisseur. Il reste alors à répartir la différence entre l'IT de la condition et la somme des IT des composants achetés sur les cotes restantes.

Lorsqu'on ne peut pas trouver de solutions compatibles avec les moyens de fabrication et qu'il est impossible d'augmenter l'IT de la cote condition, on peut introduire un maillon réglable dans la chaîne de cotes (cale d'épaisseur, ...).

Lorsqu'il reste à répartir un IT sur plusieurs maillons :
- on essaie de prendre en compte la difficulté de réalisation des différentes surfaces,
- on adopte la même classe de qualité pour les maillons restants.

2.4.3 Calcul

Les données

La condition à satisfaire est : $$J_a = 1 \pm 0.25$$

D'après la documentation du fournisseur des coussinets, l'épaisseur de la tête des coussinets est égale à :

$$a_2 = a_4 = 3js12$$

On en déduit : $$a_{2\,moy} = a_{4\,moy} = 3\,mm$$

$$IT(a_4) = IT(a_2) = 0.1\,mm$$

D'autre part, la longueur moyenne de la pièce 3 est définie :

$$a_{3\,moy} = 38\,mm$$

Calcul de la valeur moyenne des cotes inconnues

$$J_{a\,moy} = a_{1\,moy} - a_{2\,moy} - a_{3\,moy} - a_{4\,moy}$$

On en déduit : $$a_{1\,moy} = 45\,mm$$

Calcul des intervalles de tolérance inconnus

$$IT(J_a) = IT(a_1) + IT(a_2) + IT(a_3) + IT(a_4)$$

$$0.5 = IT(a_1) + 0.1 + IT(a_3) + 0.1$$

On en déduit : $$IT(a_1) + IT(a_3) = 0.3\,mm$$

Répartition des intervalles de tolérance

Pour répartir les 0.3 mm disponibles entre les 2 IT, on peut envisager plusieurs solutions :

1. Répartition équitable

$$IT(a_1) = IT(a_3) = 0.15\,mm$$

2. Répartition correspondant à une qualité équivalente

On souhaite avoir la même classe de qualité entre les 2 maillons. L'IT d'une classe de qualité est égale à un facteur k_q fois la racine cubique de la cote moyenne. Soit :

$$0.3 = IT(a_1) + IT(a_3) = k_q \sqrt[3]{a_{1\,moy}} + k_q \sqrt[3]{a_{3\,moy}}$$

$$k_q = \frac{0.3}{\sqrt[3]{45} + \sqrt[3]{38}} = 0.0434$$

$$IT(a_1) = k_q . \sqrt[3]{45} = 0.154 \quad \text{et} \quad IT(a_3) = k_q . \sqrt[3]{38} = 0.146$$

3. Répartition en prenant en compte la difficulté de réalisation des différentes surfaces

Cela nécessité la connaissance des moyens de réalisation (non abordée dans ce chapitre).

2.4.4 Approche statistique

L'approche précédente est dite au pire cas. L'assemblage est possible même dans le pire des cas, c'est-à-dire si la longueur de l'arbre 1 est maximale et les dimensions des autres pièces sont minimales. Or, ce cas est très peu probable. Dans l'industrie, on utilise une approche statistique. On suppose que les dimensions des pièces fabriquées présentent une distribution gaussienne.

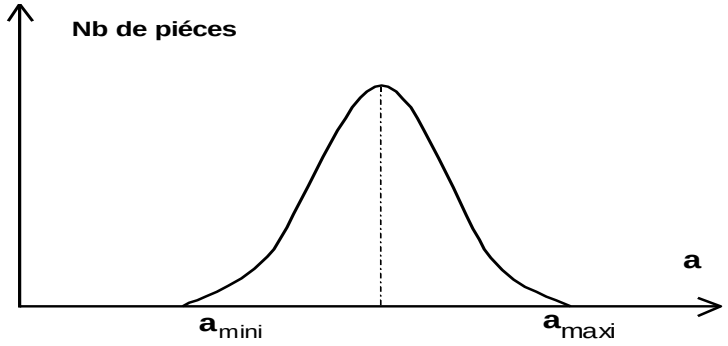


Fig. 2.12 : Distribution gaussienne des dimensions des pièces fabriquées.

Le principe de la cotation statistique repose sur le théorème suivant : "la variance de la somme de variables aléatoires indépendantes est égale à la somme des variances des composantes".

Les intervalles de tolérance sont liés par la même relation :

$$(0.5)^2 = IT(a_1)^2 + (0.1)^2 + IT(a_3)^2 + (0.1)^2$$

$$IT(a_1)^2 + IT(a_3)^2 = 0.339\ mm^2$$

En prenant une répartition équitable, il vient :

$$IT(a_1) = IT(a_3) = 0.339\ mm$$

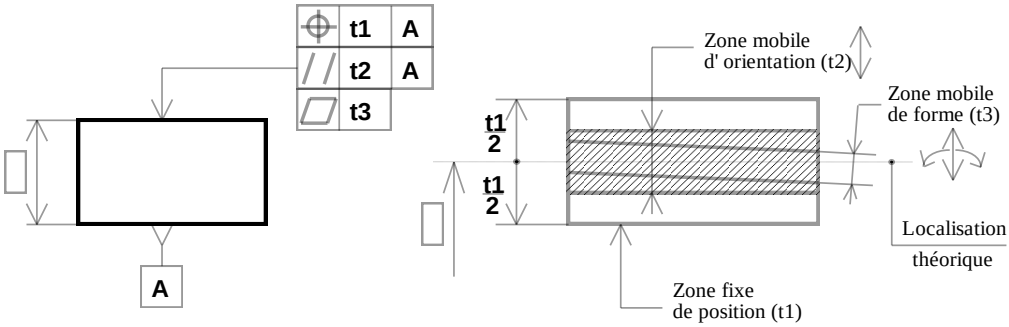
Dans cet exemple, l'approche statistique conduit à des tolérances 2 fois supérieures à celles déduites de l'approche "au pire cas". Il en résulte des coûts de production réduits.

3. Tolérancement géométrique

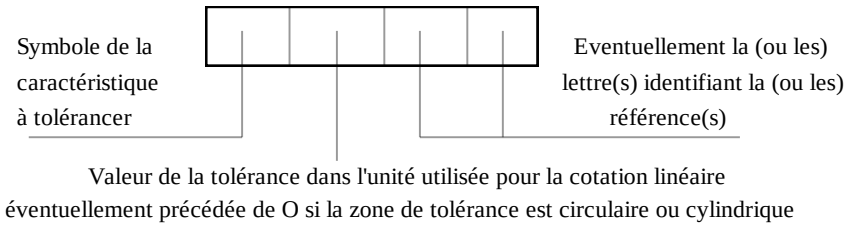
3.1 Les differents types de tolerances

Tolérances	Caractéristiques tolérancées - Symboles			
	Cas général		Cas particulier	
Tolérances de forme	Forme d'une ligne quelconque	⌒	Rectitude	—
			Circularité	○
	Forme d'une surface quelconque	⌓	Planéité	▱
			Cylindricité	⌭
Tolérances d'orientation	Inclinaison	∠	Parallélisme	//
			Perpendicularité	⊥
Tolérances de position	Localisation	⊕	Concentricité	◎
			Coaxialité	
			Symétrie	⌯

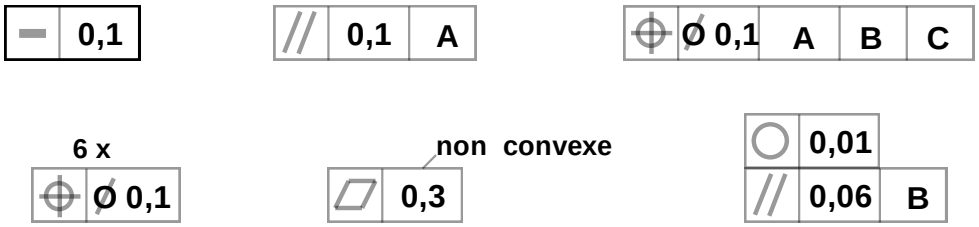
La tolérance de forme est comprise dans la tolérance d'orientation qui est elle-même contenue dans la tolérance de position.



3.2 Cadre de tolerances



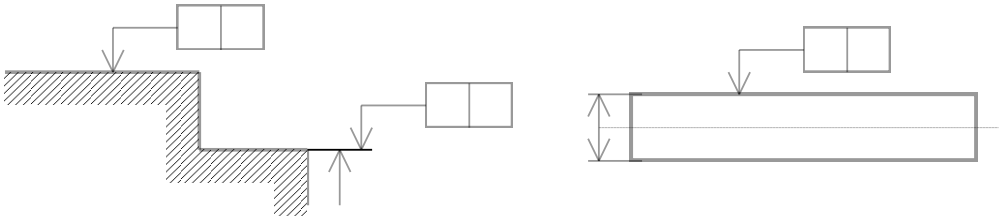
Exemples :



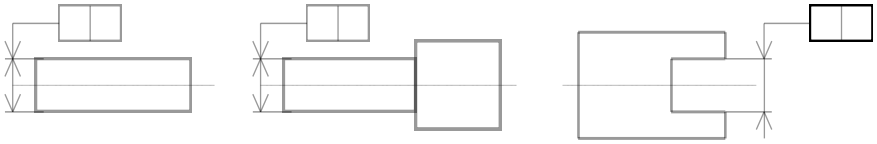
3.3 NATURE DE L'ELEMENT TOLERANCE

Suivant l'endroit où aboutit la flèche du cadre de tolérance, l'élément tolérancé est :

- la ligne ou la surface, si la flèche indique le contour de l'élément ou le prolongement de celui-ci (clairement séparé de la ligne de cote),

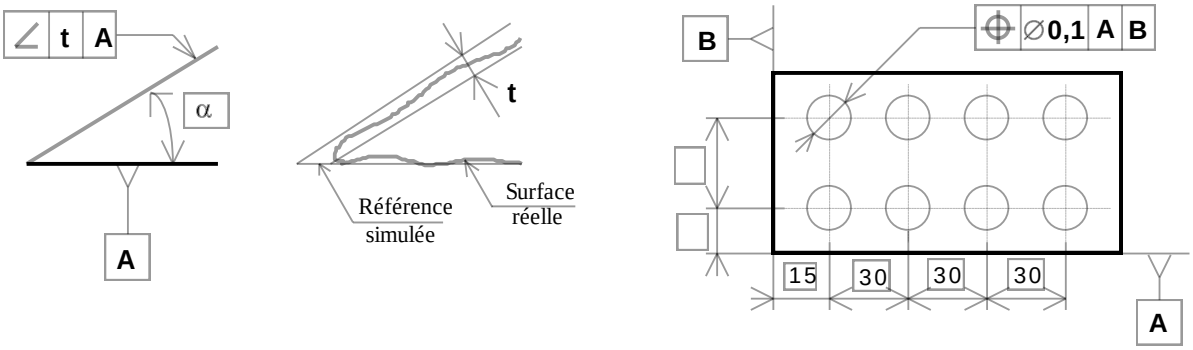


- l'axe ou le plan médian de l'élément, si la flèche aboutit dans le prolongement de la ligne de cote,



3.4 DIMENSIONS DE REFERENCE

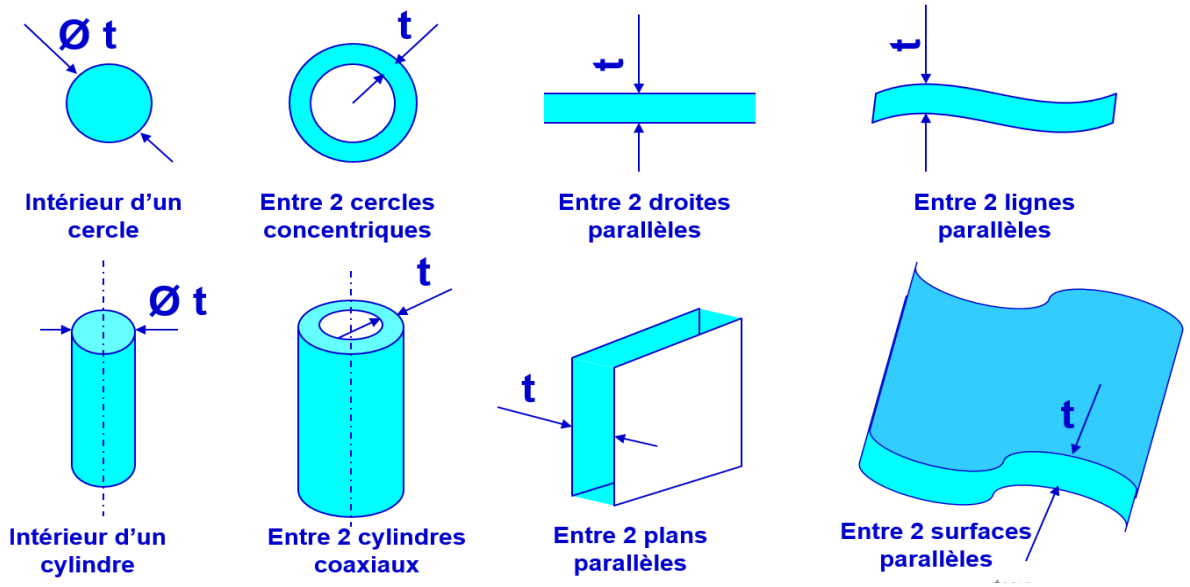
Une dimension de référence est associée à une tolérance géométrique. Cette dimension est tolérancée par l'intermédiaire de la spécification géométrique s'y rapportant.



3.5 ZONE DE TOLERANCE

Une tolérance géométrique appliquée à un élément définit la zone de tolérance à l'intérieur de laquelle l'élément (surface, axe ou plan médian) doit être compris.

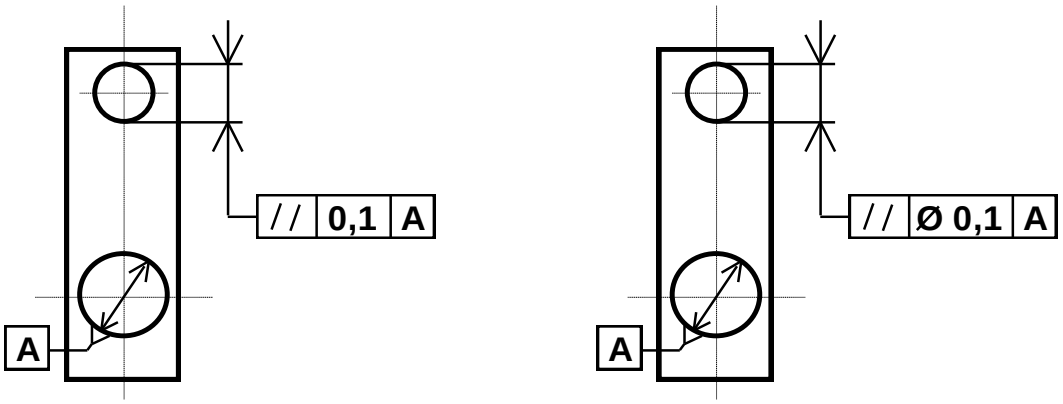
La zone de tolérance est, suivant la caractéristique tolérancée et la manière dont celle-ci est cotée :
- soit la surface à l'intérieur d'un cercle,
- soit la surface entre deux cercles concentriques,
- soit la surface entre deux lignes ou deux droites parallèles,
- soit l'espace à l'intérieur d'un cylindre,
- soit l'espace entre deux cylindres coaxiaux,
- soit l'espace entre deux plans équidistants ou parallèles,
- soit l'espace à l'intérieur d'un parallélépipède.



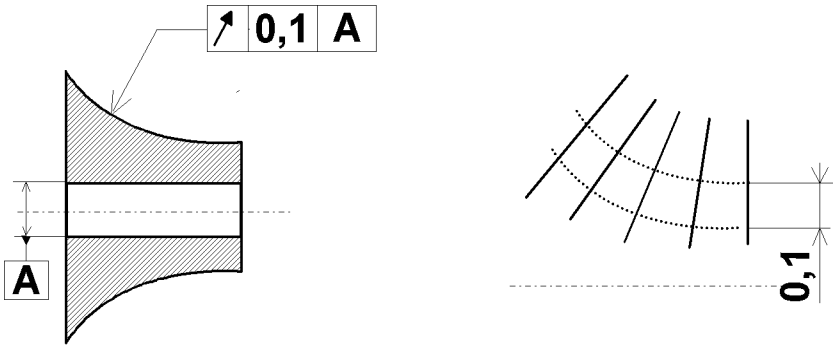
La forme ou l'orientation de l'élément tolérancé peut être quelconque à l'intérieur de la zone de tolérance, sauf indication plus restrictive exprimée en clair par une note.

Sauf indication contraire, la tolérance s'applique à toute la longueur ou toute la surface de l'élément tolérancé.

La largeur de la zone de tolérance est dans la direction de la flèche, sauf si la valeur est précédée du signe Ø :



La direction de la largeur de la zone de tolérance est normale à la géométrie.



3.6 LES DIFFERENTS TYPES DE REFERENCE

La spécification d'une référence ou d'un système de référence nécessite :

- d'identifier le ou les éléments géométriques participant à cette référence ou à ce système,

- d'indiquer dans le cadre de tolérance l'élément géométrique concerné ou les éléments géométriques et leur relation.

Indication	Nom	Exemple	Interprétation
A	Référence Simple	// 0,1 A A	Plan tangent à la surface réelle
A-B	Référence commune	A B A-B	Cylindres coaxiaux Axe de référence Axes réels Axe des deux cylindres coaxiaux circonscrits aux surfaces cylindriques réelles
A B	Système de référence ordonné	B A B A	B A Les éléments du système de référence sont en position exacte les uns par rapport aux autres
A A1,2,3 A1 A2 A3	Références partielles	A1 A2 A3 ⊥ A A A1,2,3	

3.7 TOLERANCES GENERALES

Les dimensions non tolérancées sur le dessin de définition peuvent-être régies par les normes ISO 2768-1 et 2768-2.

Les valeurs par défaut de ces tolérances sont alors données par les tableaux ci-dessous en fonction des classes de précisions.

ISO 2768-1

NF EN 22768 ISO 2768	Dimensions linéaires					Angles cassés (rayons, chanfreins)			Dimensions angulaires (dimension du côté le plus court)			
Classe de précision	**0,5 à 3 inclus**	**3 à 6**	**6 à 30**	**30 à 120**	**120 à 400**	**0,5 à 3 inclus**	**3 à 6**	**> 6**	**Jusqu'à 10**	**10 à 50 inclus**	**50 à 120**	**120 à 400**
f (fin)	± 0,05	± 0,05	± 0,1	± 0,15	± 0,2	± 0,2	± 0,5	± 1	± 1°	± 30'	± 20'	± 10'
m (moyen)	± 0,1	± 0,1	± 0,2	± 0,3	± 0,5	± 0,2	± 0,5	± 1				
c (large)	± 0,2	± 0,3	± 0,3	± 0,8	± 1,2	± 0,4	± 1	± 2	± 1°30'	± 1°	± 30'	± 15'
v (très large)	–	± 0,5	± 1	± 1,5	± 2,5	± 0,4	± 1	± 2	± 3°	± 2°	± 1°	± 30'

ISO 2768-2

NF EN 22768 ISO 2768	—			▱		⊥			⫽			Axial Radial
Classe de précision	**Jusqu'à 10**	**10 à 30 inclus**	**30 à 100**	**100 à 300**	**300 à 1 000**	**Jusqu'à 100**	**100 à 300**	**300 à 1 000**	**Jusqu'à 100**	**100 à 300**	**300 à 1 000**	**Toutes dimensions**
H (fin)	± 0,05	± 0,05	± 0,1	± 0,15	± 0,2	0,2	0,3	0,4	0,5	0,5	0,5	0,1
K (moyen)	± 0,1	± 0,1	± 0,2	± 0,3	± 0,5	0,4	0,6	0,8	0,6	0,6	0,8	0,2
L (large)	± 0,2	± 0,3	± 0,3	± 0,8	± 1,2	0,6	1	1,5	0,6	1	1,5	0,5
//				○					◎			
Même valeur que la tolérance dimensionnelle ou de rectitude ou de planéité si elles sont supérieures				Même valeur que la tolérance diamétrale mais à condition de rester inférieure à la tolérance de battement					Les écarts de coaxialité sont limités par les tolérances de battement			
Règles générales : • Si plusieurs tolérances géométriques s'appliquent à un même élément, retenir la tolérance la plus large. • Choisir comme référence le plus long des deux éléments. Si les deux éléments ont la même dimension nominale, chacun d'eux peut être pris comme référence.												

Il faut alors indiquer près du cartouche, par exemple "Tolérances Générales ISO 2768 -- mK'' pour signifier l'utilisation de cette norme avec les classes de précisions m (moyen) pour les spécifications dimensionnelles (longueurs et angles) et K (moyen) pour les spécifications géométriques.

3.8 TOLERANCES COMPATIBLES AVEC LES PROCEDES D'OBTENTION

PIÈCES MOULÉES EN SABLE	Plus grande dimension de la pièce	NF A 32-011 Paliers de dimensions en mm						
		⩽ 25	25 à 63	63 à 100	100 à 160	160 à 250	250 à 400	400 à 630
Tolérances pour pièces en fonte grise non alliée (tolérances larges L)	jusqu'à 250	± 1	± 1,5	± 2	± 2,5	± 3		
	de 250 à 630	± 1,5	± 2	± 2	± 2,5	± 3	± 4	± 4,5
	de 630 à 1 600	± 2	± 2,5	± 3	± 3,5	± 4	± 4,5	± 5,5

PROCÉDÉS SPÉCIAUX	Tolérances en % pour dimensions inférieure à 250 mm
Procédé au sable auto-siccatif	± 0,5 % avec une tolérance minimale de ± 0,5 mm
Procédé Schaw	± 0,3 % avec une tolérance minimale de ± 0,1 mm
Procédé à la cire perdue	± 0,2 % avec une tolérance minimale de ± 0,05 mm
En coquille, par gravité	± 0,5 % avec une tolérance minimale de ± 0,2 mm
En coquille, sous pression	± 0,3 % avec une tolérance minimale de ± 0,1 mm

PIÈCES OBTENUES PAR DÉFORMATION	Paliers de dimensions en mm						
	⩽ 50	50 à 80	80 à 200	200 à 315	315 à 400	400 à 500	500 à 630
Forgeage	± 3	± 3	± 4	± 6	± 8	± 9	± 10
Matriçage	± 0,5	± 1	± 1	± 1,5	± 2	± 2,5	± 2,5

PIÈCES OBTENUES A PARTIR DE TÔLES				
Assemblage par soudage	± 2 millimètres par mètre avec une tolérance minimale de ± 1 mm		Sciage	± 1 millimètre par mètre avec une tolérance minimale de ± 0,5 mm
Découpage (à la presse)	Précis	IT 7 à IT 8	Tolerie Chaudronnerie	± 0,5 millimètre par mètre avec une tolérance minimale de ± 0,3 mm
	ordinaire	IT 9 à IT 10		

PIÈCES OBTENUES PAR ENLÈVEMENT DE MATIÈRE					
Alésage	Précis	IT 5 à IT 7	Perçage	Moyen	IT 10 à IT 11
	Moyen	IT 8		Ordinaire	IT 12
Brochage	Précis	IT 5 à IT 7	Rabotage	Précis	IT 8 à IT 9
	Moyen	IT 8 à IT 9		Moyen	IT 10
Électro-érosion	Précis	0,05	Rectification	Précis	IT 5 à IT 7
	Moyen	0,10		Moyen	IT 8
Fraisage	Précis	IT 6 à IT 7	Tournage	Précis	IT 6 à IT 7
	Moyen	IT 8 à IT 9		Moyen	IT 8 à IT 9
	Ordinaire	IT 10		Ordinaire	IT 10

CHAPITRE 3 :
GUIDAGE EN ROTATION PAR ROULEMENTS

1. Préambule

La solution constructive qui réalise une liaison pivot est appelée guidage en rotation. Le guidage en rotation est nécessaire dans de nombreux cas (moteurs, roues de véhicules, hélices d'avion ou de turbine, …).

Ce guidage en rotation, en phase d'utilisation, doit assurer les fonctions suivantes :

- positionner l'arbre et le logement,
- permettre un mouvement relatif (rotation),
- transmettre les efforts,
- résister au milieu environnant,
- être d'un encombrement adapté,
- minimiser les niveaux de bruit et de vibrations.

Il existe 4 solutions principales permettant de réaliser un guidage en rotation :
- par contact direct,
- par interposition d'une bague de frottement,
- par interposition d'éléments roulants,
- par interposition d'un film d'huile.

Remarque : dans ce chapitre seule la solution où le guidage en rotation par interposition d'éléments roulants est abordée.

En remplaçant le frottement de glissement par du frottement de roulement, on diminue la puissance absorbée par le guidage en rotation. Le rendement de ce type de guidage est donc meilleur.

On place alors des éléments de roulement (billes, rouleaux ou aiguilles) entre deux bagues. L'une (la bague intérieure) est ajustée sur l'arbre, l'autre (la bague extérieure) est ajustée dans l'alésage.

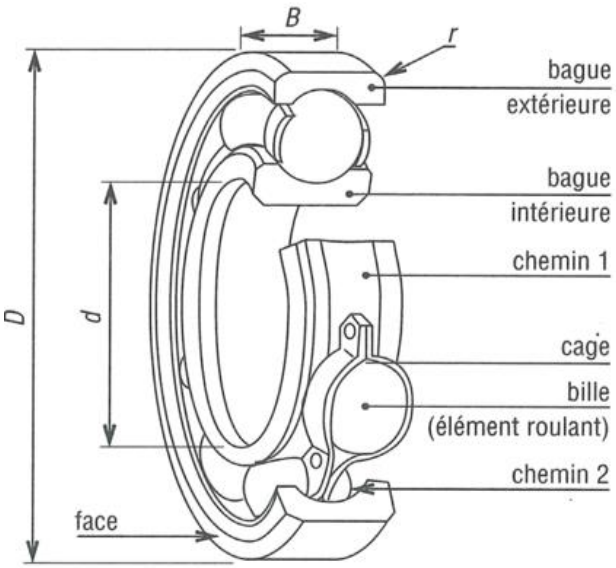


Figure 3.1 : Constitution d'un roulement à billes.

2. Les Roulements

2.1 Angle de rotulage d'un roulement a billes

Il existe toujours un jeu, aussi minime soit-il, entre les billes et leur chemin de roulement. Ce jeu a pour conséquence de permettre une rotation relative des bagues du roulement, autour des axes perpendiculaires à l'axe principal du roulement. L'amplitude de cette rotation est appelée angle de rotulage. Par conséquent, un unique roulement à billes ne réalise pas une liaison pivot.

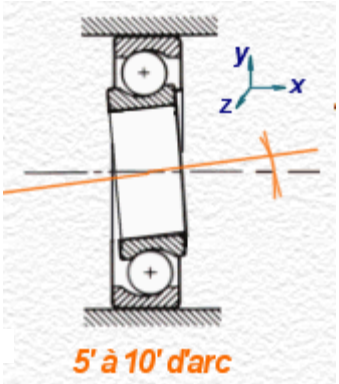


Figure 3.2 : Rotulage roulement à billes

Afin d'assurer une liaison pivot par roulements, il faut nécessairement deux roulements qui peuvent être associés suivant différentes configurations.

2.2 Liaisons realisees par l'intermediaire d'un roulement a billes

Afin de positionner axialement le roulement et lui permettre de transmettre des efforts axiaux, il est nécessaire de placer des arrêts axiaux sur ses bagues intérieure ou extérieure.
Ces arrêts axiaux sont placés entre les bagues du roulement et l'arbre ou l'alésage. La liaison ainsi réalisée est assimilable à :

- une liaison linéaire annulaire → Arrêts axiaux sur une seule bague (figure 3.3).
- une liaison rotule → Arrêts axiaux sur les deux bagues (figure 3.4).

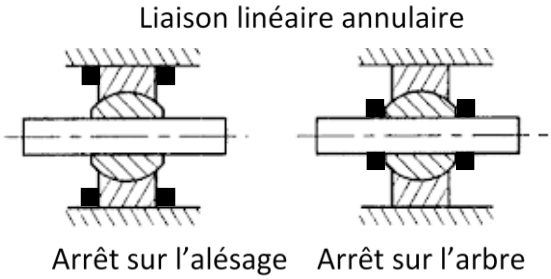


Figure 3.3 : Arrêts axiaux – Liaison linéaire annulaire.

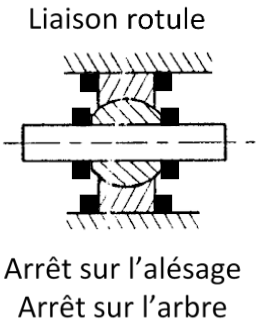


Figure 3.4 : Arrêts axiaux – Liaison rotule.

2.3 Realisation d'une liaison pivot

La réalisation d'une liaison pivot à l'aide de roulements à une rangée de billes n'est donc possible que par l'association de deux roulements. On cherche autant que possible à mettre en position l'arbre par rapport à l'alésage en bloquant de manière isostatique tous les degrés de liberté exceptée la rotation autour de l'axe de la liaison.

La modélisation d'une liaison pivot est alors réalisée par l'intermédiaire d'une liaison rotule et d'une liaison linéaire annulaire.

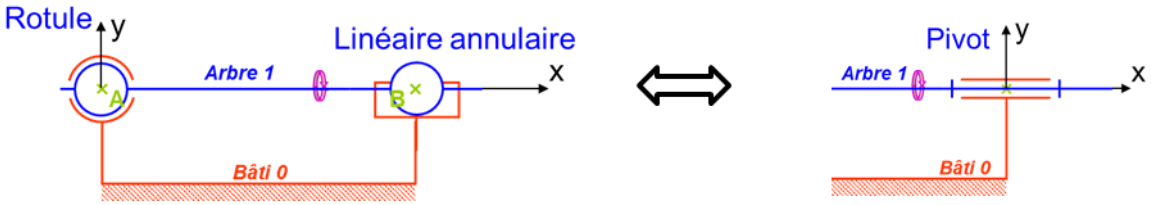


Figure 3.5 : Modélisation isostatique du guidage en rotation par roulements à billes.

Il est également possible de réaliser un guidage en rotation en associant deux liaisons rotule. Cette association engendre une mise en position axiale hyperstatique (H=1).

Dans ce cas, il faudra prévoir un dispositif de réglage du jeu axial.

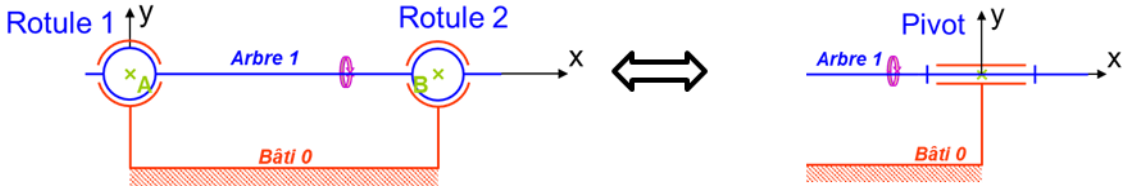


Figure 3.6 : Modélisation hyperstatique du guidage en rotation par roulements à billes.

2.4 Disposition des arrets en translation des bagues

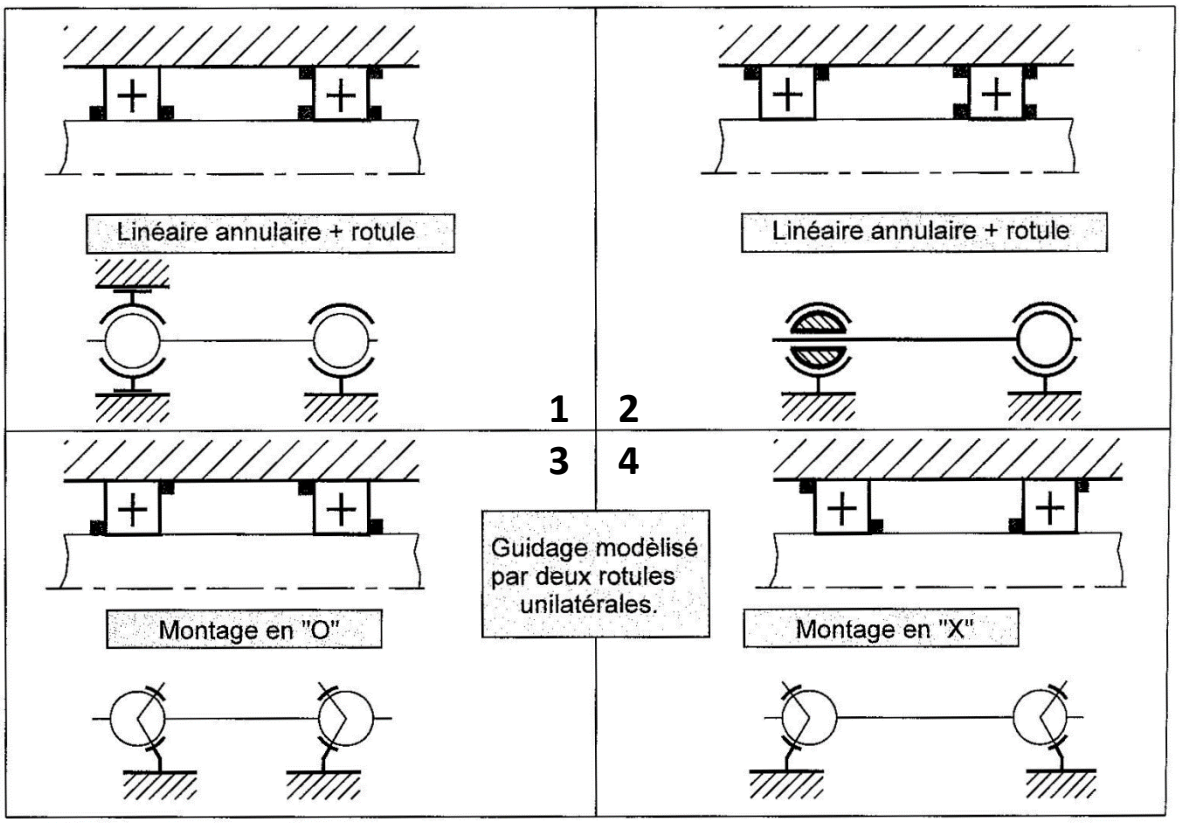


Figure 3.7 : Positionnement des arrêts axiaux

Le tableau figure 3.7 illustre les différentes positions des arrêts en translation pour les modélisations isostatiques et hyperstatiques d'un montage de roulements.

1. le montage est isostatique. A utiliser lorsque la charge est tournante par rapport à la bague intérieure.
2. le montage est isostatique. A utiliser lorsque la charge est tournante par rapport à la bague extérieure.
3. le montage est hyperstatique. Réglage du jeu par déplacement de la bague intérieure, dans le cas où la charge est tournante par rapport à la bague extérieure.
4. le montage est hyperstatique. Réglage du jeu par déplacement d'une bague extérieure, dans le cas où la charge est tournante par rapport à la bague intérieure.

Remarques :

Les arrêts en translation peuvent être réalisés par des épaulements, des anneaux élastiques, des écrous ou des pièces rapportées.

Les montages hyperstatiques 3 et 4 sont nécessaires dans le cas où on utilise des roulements à billes à contacts obliques, ou des roulements à rouleaux coniques. Il faut alors déterminer la précontrainte de montage nécessaire au fonctionnement sans jeu des roulements.

2.5 Regles de montage des bagues d'un roulement

S'il existe un jeu entre la bague de roulement qui tourne par rapport à la direction de la charge et l'arbre ou l'alésage sur ou dans lequel cette bague est positionnée, un mouvement relatif apparaît. Lorsque le roulement est mis en charge, ce mouvement relatif entraine un décollement de la couche d'oxydation des surfaces en contact. Les particules d'oxydes, très abrasives, viennent user prématurément l'arbre ou l'alésage. Le jeu initial est amplifié ce qui provoque la destruction rapide des éléments participant au guidage en rotation.

Pour éviter cette dégradation, il est nécessaire de prévoir un ajustement serré entre la bague qui tourne par rapport à la direction de la charge et l'arbre ou l'alésage.

Règles :

1. La bague qui tourne par rapport à la direction de la charge appliquée sur le roulement est ajustée avec serrage,
2. La bague fixe par rapport à la direction de la charge appliquée sur le roulement est ajustée avec jeu.

Remarque : On trouvera les ajustements recommandés dans les catalogues de fournisseurs.

CHAPITRE 4 :
OBTENTION DE PIECES PAR USINAGE PAR OUTILS COUPANTS

1. Préambule

Usiner consiste à enlever de la matière à une pièce à l'aide d'un outil. Il existe différents procédés d'usinage :

- la rectification, où la matière est enlevée par les grains abrasifs d'une meule,
- l'électroérosion, où la matière est désintégrée par une électrode,
- l'usinage par outils coupants : un copeau provenant de la pièce usinée est créé au contact de l'outil. Les vitesses de déplacement et les trajectoires des outils utilisés ainsi que les caractéristiques des matériaux usinés influent sur les dimensions et la forme du copeau.

L'usinage par outils coupants fait partie des grands procédés d'obtention de pièces finies. Il est essentiellement retenu pour les matériaux métalliques. Il permet également l'usinage des matériaux plastiques ou composites.

Les pièces usinées trouvent leur application dans un grand nombre de secteurs industriels (automobile, aéronautique, armement, spatial…). Leur forme peut être cylindrique, prismatique (arbres de roue, chapes de vérin) ou plus complexes (matrices d'estampage, empreintes de moules). Les volumes de production varient entre l'unitaire et la très grande série (plusieurs centaines de milliers d'unités). Les temps d'usinage varient de quelques secondes à plusieurs heures. Les surfaces réalisées peuvent être obtenues avec de très grandes précisions. Les opérations d'ébauche sont suivies d'opérations de finition si nécessaire.

2. Les Procédés et Machines-Outils

2.1 Systeme d'axes normalises

Générer une surface par usinage par outils coupants oblige à coordonner les déplacements relatifs entre la partie active de l'outil et la surface de la pièce usinée, qui résultent de la composition :

- d'un mouvement de coupe M_c généré par la rotation de la broche sur laquelle est fixée la pièce à usiner (tournage) ou l'outil (fraisage).
- d'un mouvement d'avance M_a généré par le déplacement de l'outil par rapport à la pièce à usiner.

On définit les déplacements par rapport à un système d'axes normalisés (norme AFNOR NF Z68-020) :

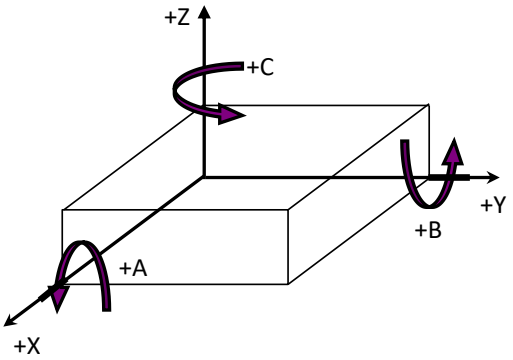


Fig. 4.1 : référentiel pièce.

Le trièdre de référence, appelé référentiel pièce, est lié à la pièce considérée comme fixe. Lorsque la pièce est sur la machine, tous les déplacements sont définis par rapport à ce référentiel. La norme précise que l'axe $\vec{z}$ du référentiel est parallèle à l'axe de la broche principale de la machine.

2.2 Le tournage

Le tournage permet d'obtenir des surfaces de révolution (cylindres, cônes …) ou des plans perpendiculaires à l'axe de rotation de la broche. Quelle que soit la forme de la pièce, l'axe de la surface de révolution engendrée est confondu avec celui de la broche (axe $\vec{z}$). Une opération de tournage est réalisée sur un tour. La pièce est mise et maintenue en position dans la broche qui l'entraine en rotation. L'outil est placé sur la tourelle, il peut se translater suivant les directions $\vec{x}$ et $\vec{z}$ de la machine.

Les machines que l'on rencontre communément sont les tours horizontaux. Ces machines peuvent se retrouver en micromécanique comme en mécanique lourde et avoir des longueurs de banc de plus de 10 mètres.

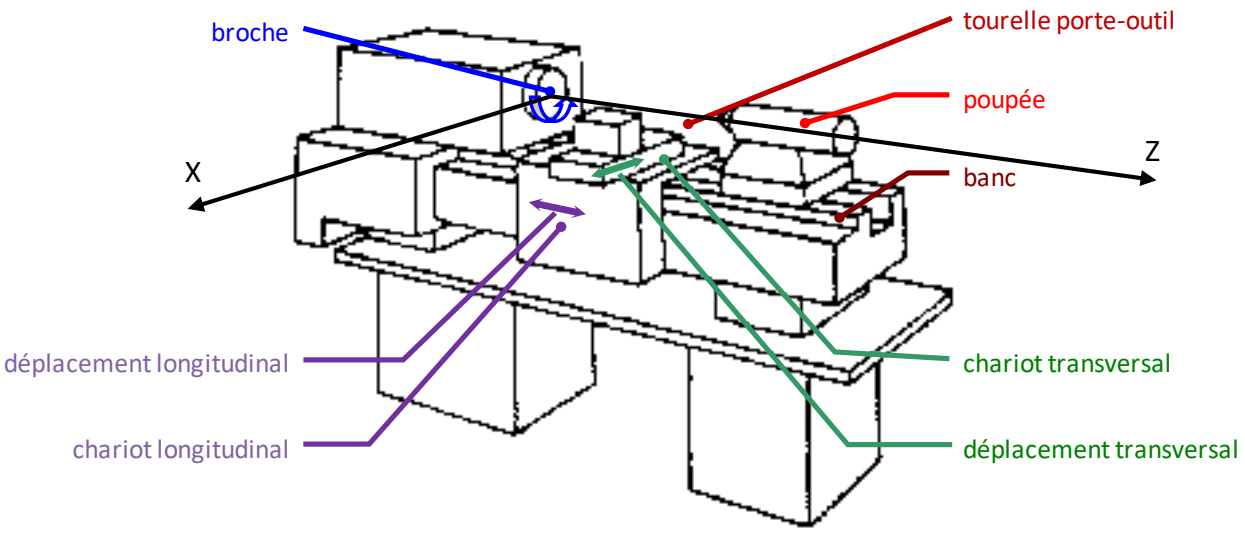


Fig. 4.2 : Schéma d'un tour horizontal.

Fig. 4.3 : Tour horizontal.

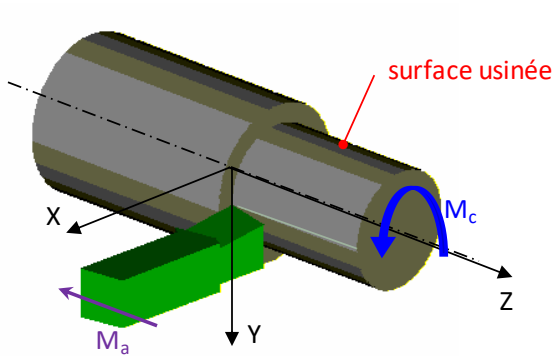


Fig. 4.4 : Génération de copeaux par combinaison des mouvements de coupe et d'avance.

Le mouvement de coupe (M_c : rotation autour de $\vec{z}$) est générée par la mise en rotation de la broche qui supporte la pièce. Le mouvement d'avance (M_a) est appliqué à l'outil soit par l'intermédiaire du chariot longitudinal (parallèle à $\vec{z}$), soit par l'intermédiaire du chariot transversal (parallèle à $\vec{x}$)

La combinaison du mouvement de coupe et du mouvement d'avance génère le phénomène de coupe de la matière (figure 4.4).

Le **chariotage** correspond à un mouvement d'avance M_a parallèle à $\vec{z}$. La surface obtenue est un cylindre.

Le **dressage** correspond à un mouvement d'avance M_a parallèle à $\vec{x}$. La surface obtenue est un plan perpendiculaire à l'axe de la broche.

Sur un tour conventionnel, le mouvement d'avance s'effectue soit selon l'axe $\vec{z}$ (chariotage), soit selon l'axe $\vec{x}$ (dressage). Sur un tour à commande numérique, il est possible de piloter l'outil pour qu'il suive une trajectoire quelconque dans le plan $(\vec{x}, \vec{z})$. On peut ainsi réaliser tout type de surface de révolution. Par exemple, lorsque le mouvement d'avance M_a est oblique, la surface obtenue est un cône.

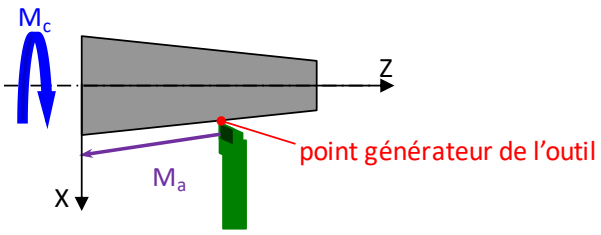


Fig. 4.5 : Génération d'un cône par combinaison des déplacements selon $\vec{z}$ et $\vec{x}$ sur un tour à commande numérique.

2.3 Le Fraisage

Le fraisage sur machine conventionnelle est un procédé d'usinage par outils coupants qui permet d'obtenir des surfaces planes où des surfaces associées au procédé de perçage (trous, alésages, trous de centre, trous lamés, taraudages…).

Une opération de fraisage est réalisée sur une fraiseuse. La pièce est mise et maintenue en position sur un porte-pièce (étau, montage d'usinage dédié ou montage d'usinage modulaire…) fixé sur la table de la fraiseuse. L'outil est fixé dans un porte-outil. Cet ensemble est placé dans la broche de la machine.

Le mouvement de coupe (M_c : rotation autour de l'axe Z) est généré par la mise en rotation de la broche supportant l'ensemble outil/porte-outil.

La figure 4.6 présente le schéma d'une fraiseuse conventionnelle. Le mouvement d'avance (M_a) peut être appliqué à la pièce par l'intermédiaire du chariot longitudinal (parallèle à $\vec{x}$), ou par l'intermédiaire du chariot transversal (parallèle à $\vec{y}$). Il peut également être appliqué à l'outil par l'intermédiaire du chariot vertical (parallèle à $\vec{z}$). La combinaison du mouvement de coupe et du mouvement d'avance génère le phénomène de coupe de la matière (voir figure 4.8).

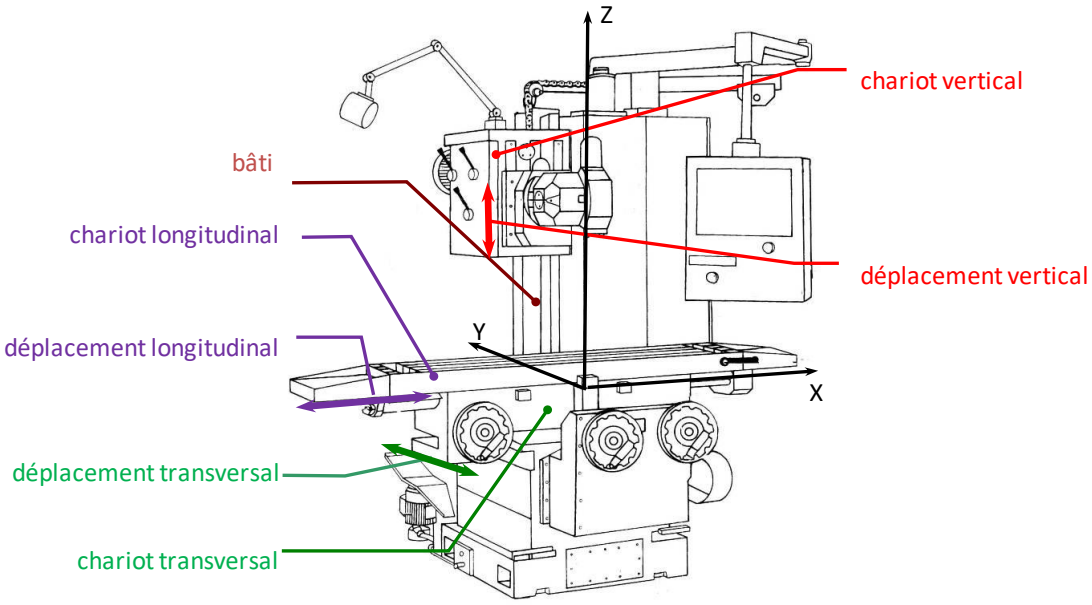


Fig. 4.6 : Schéma d'une fraiseuse.

La figure 3.7 présente un centre d'usinage vertical 3 axes à commande numérique. Sur cette machine, L'axe de l'outil est coaxial à celui de la broche (axe Z), orienté verticalement. Le mouvement de coupe est donné par la broche qui entraîne en rotation l'ensemble outil/porte-outil.

La table supporte l'ensemble pièce/porte-pièce. Le mouvement d'avance est donné par le déplacement relatif de l'ensemble outil/porte-outil par rapport à l'ensemble pièce/porte-pièce. Les déplacements de la table, dans les directions des axes X et Y, et le déplacement de l'outil dans la direction de l'axe Z peuvent être gérés simultanément.

Sur une fraiseuse à commande numérique, il est donc possible de piloter le mouvement relatif entre l'outil et la pièce pour que l'outil suive une trajectoire quelconque. On peut ainsi réaliser des surfaces de géométries complexes.

Fig. 4.7 : Centre d'usinage vertical 3 axes.

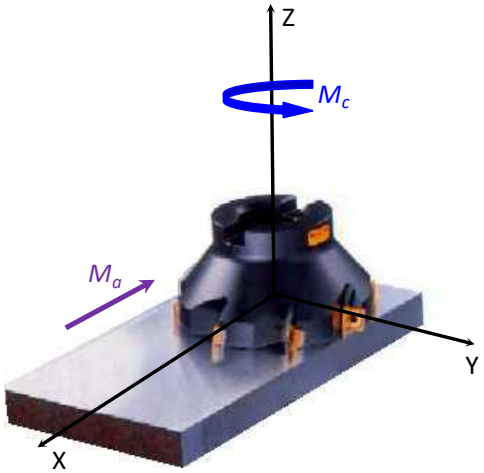


Fig. 4.8 : Génération de copeaux par combinaison des mouvements de coupe et d'avance.

Remarques :

La majeure partie des outils utilisés en fraisage possèdent plusieurs parties actives à la différence des outils utilisés en tournage qui ne disposent que d'une seule zone de coupe (en dehors des outils utilisés pour les opérations axiales).

3. Les principes de génération d'une surface

Les deux principes de génération d'une surface usinée par outils coupants sont :

- l'usinage par travail d'enveloppe,

- l'usinage par travail de forme.

Ces deux principes peuvent parfois être utilisés de façon mixte.

On peut aussi réaliser sur tour et fraiseuse des opérations axiales assimilables à ce qu'on peut réaliser sur une perceuse à colonne.

3.1 TRAVAIL D'ENVELOPPE

Le travail d'enveloppe est obtenu en combinant le mouvement d'avance et le mouvement de coupe. Le profil de la surface obtenue est celui de la trajectoire suivie par le point générateur de l'outil, il est parallèle à la direction du mouvement d'avance.

3.2 TRAVAIL DE FORME

La surface obtenue par travail de forme possède un profil équivalent à celui de l'arête de coupe de l'outil. La qualité de la surface obtenue dépend, d'une part, de la génératrice (forme et position) et, d'autre part, de la précision des déplacements et des conditions de coupe.

3.3 TRAVAIL MIXTE

Il est possible de combiner travail d'enveloppe et travail de forme. C'est le cas lorsque l'on réalise une opération de filetage. L'hélicoïde définissant le filet est obtenu par travail d'enveloppe et le profil du filet est obtenu par travail de forme.

La qualité géométrique du filet dépend de la forme de l'outil. Le pas du filet dépend de la qualité du déplacement (voir figure 4.11).

3.4 EXEMPLES D'OPERATIONS

Le travail d'enveloppe correspond par exemple :

- au chariotage et dressage réalisés sur un tour conventionnel,
- à la génération de la surface conique sur un tour à commande numérique (voir figure 4.5),
- au surfaçage par fraisage en bout (voir figure 4.8).

<u>Remarques</u> : La qualité de la surface obtenue ne dépend que de la précision des déplacements et des conditions de coupe.

La forme de l'élément générateur (outil) n'a pas d'influence sur la qualité de la surface.

Le travail de forme correspond par exemple :

- à la réalisation d'une gorge sur un tour conventionnel (voir figure 4.9),
- à la réalisation d'un chanfrein sur un tour conventionnel,
- au fraisage en roulant sur une fraiseuse (voir figure 4.10).

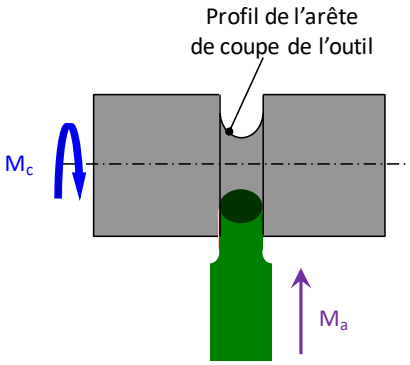


Fig.4.9 : Réalisation d'une gorge.

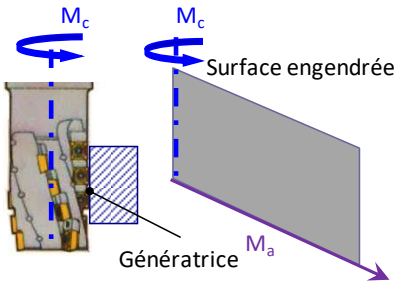


Fig.4.10 : Fraisage en roulant.

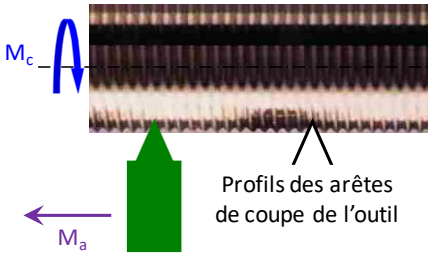


Fig.4.11 : Filetage.

Quelques exemples d'usinages réalisés en tournage et fraisage sont présentés sur le figures 4.12 et 4.13 ci-dessous.

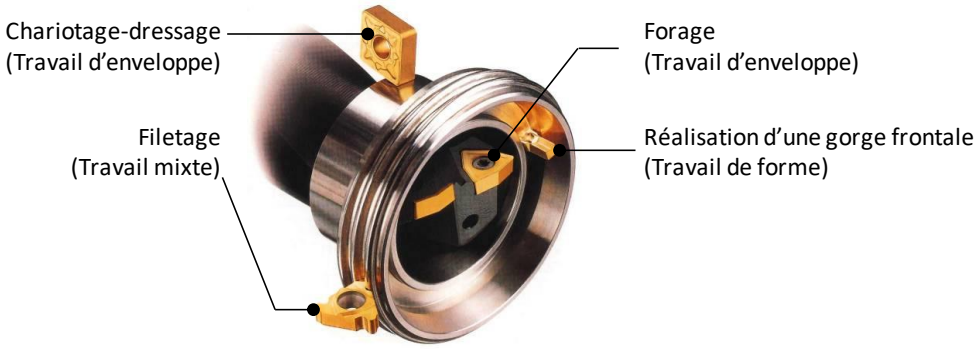
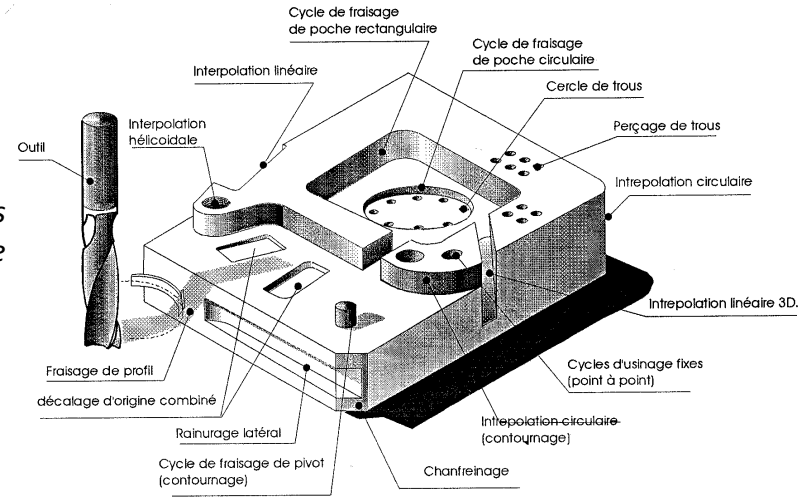


Fig. 4.12 : Pièce de tournage réalisée par travail d'enveloppe (chariotage et dressage, forage), travail de forme (réalisation de la gorge frontale) et travail mixte (filetage). (Seules les plaquettes des outils sont représentées).

Figure 4.13 : Différents types d'usinage réalisables sur une fraiseuse à commande numérique.



3.4 OPERATIONS AXIALES

Les opérations axiales (centrage, perçage, alésage, lamage…) correspondent à un mouvement d'avance coaxial à celui de la broche.

En tournage, les outils sont placés dans des porte-outils positionnés dans la poupée (mobile) du tour. Le déplacement de l'outil est obtenu en déplaçant le fourreau de cette poupée. Ce déplacement ne peut se faire que manuellement. Les opérations correspondantes permettent de réaliser des surfaces intérieures (centrage, perçage, alésage, lamage…). Toutes ces opérations sont issues du procédé d'usinage perçage.

Fig.4.14 : Opération axiale en tournage.

Fig.4.15 : Opération axiale en fraisage.

4. Les paramètres de coupe

4.1 PARAMETRES DE COUPE EN TOURNAGE

En tournage conventionnel, les paramètres affichés sur la machine sont :

- N : vitesse de rotation de la broche (tr/min),
- f : avance par tour (mm/tr),
- a_p : profondeur de passe (mm).

On définit la vitesse de rotation de la broche de la machine par :

$$N = \frac{1000.V_c}{\pi D}$$

avec :
- N vitesse de rotation de la broche (en tour/min),
- V_c vitesse de coupe (en m/min),
- D diamètre usiné de la pièce (en mm).

Le facteur 1000 est dû aux unités utilisées.

La vitesse de coupe est la vitesse tangentielle au point générateur de l'arête de coupe de l'outil, à laquelle la matière est découpée. La vitesse de coupe adéquate dépend principalement de la matière usinée, du matériau et de la durée de vie l'outil.

Dans le cas d'une surface générée par enveloppe, la surface est engendrée par la pointe de l'outil qui décrit une hélice autour de l'axe de la machine. Le pas de cette hélice est appelé avance par tour (notée f). C'est, la distance parcourue suivant la direction d'avance par l'arête de coupe de l'outil pendant une rotation de la broche (pièce).

On calcule la vitesse d'avance V_f (vitesse de déplacement de l'outil) à partir de l'avance par tour f et de la vitesse de rotation de la broche par :

$$V_f = f.N$$

avec :
- N vitesse de rotation de la broche (tr/min),
- f avance par tour (mm/tr).

La vitesse d'avance adéquate dépend principalement de la matière usinée et du matériau de l'outil. La profondeur de passe a_p correspond à la profondeur d'engagement de l'arête de coupe dans la matière.

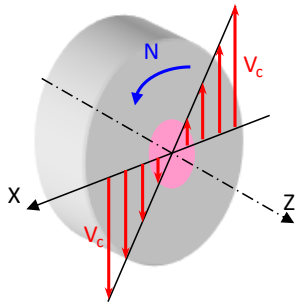


Fig. 4.16. Paramètres de coupe.

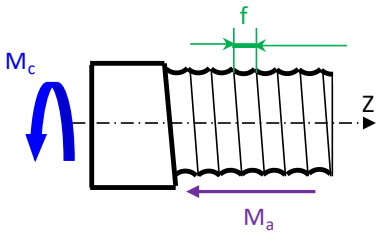


Fig. 4.17. Avance par tour f.

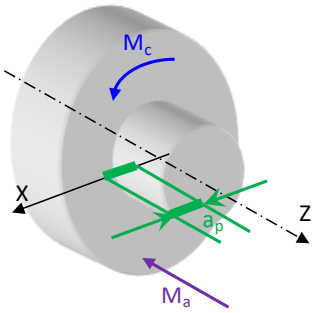


Fig. 4.18. Profondeur de passe a_p.

4.2 PARAMETRES DE COUPE EN FRAISAGE

En fraisage conventionnel, les paramètres affichés sur la machine sont :

- N : vitesse de rotation de la broche (tr/min),
- V_f : Vitesse d'avance (mm/min),
- a_p : profondeur de passe (mm).

Les paramètres de coupe sont les mêmes qu'en tournage.

On définit la vitesse de rotation de la broche de la machine par (figure 4.19) :

$$N = \frac{1000.V_c}{\pi D}$$

avec :
- N vitesse de rotation de la broche (tr/min),
- V_c vitesse de coupe (en m/min),
- D diamètre de l'outil (en mm).

Dans le cas d'une surface générée par fraisage en bout (travail d'enveloppe), la surface est engendrée par la pointe des dents de l'outil (figure 4.20). Chaque dent décrit une trajectoire de type cycloïde. Le pas de cette cycloïde est appelé avance par dent et est noté f_z. La vitesse d'avance V_f (vitesse de déplacement de la pièce ou de l'outil) est calculée à partir de f_Z par :

$$V_f = f_z.Z.N$$

avec :
- Z nombre de dents de la fraise,
- f_z avance par dent sur un tour,
- f avance par tour (mm/tr) ($f = f_z.Z$)
- N vitesse de rotation de la broche (tr/min).

Dans le cas d'une surface générée par fraisage en roulant (travail de forme), la surface engendrée est constituée de "vagues" dont le pas correspond à l'avance par dent (figure 4.21).

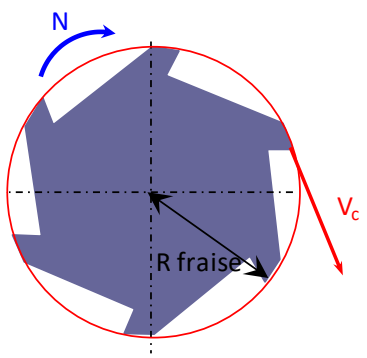


Fig. 4.19. Vitesse de coupe en fraisage.

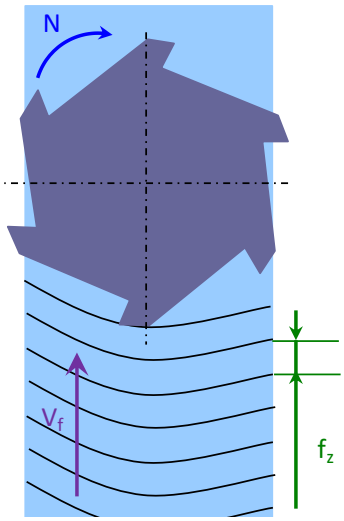


Fig. 4.20. Vitesse d'avance en fraisage en bout.

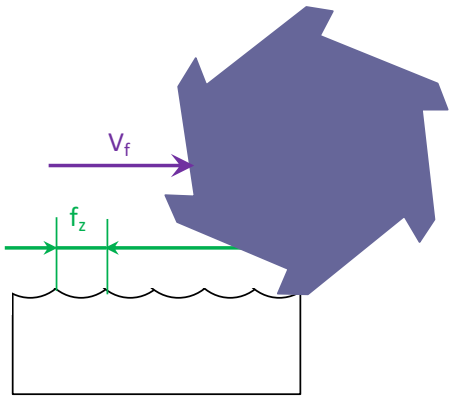


Fig. 4.21. Vitesse d'avance en fraisage en roulant.

La profondeur de passe a_p est la profondeur d'engagement de l'arête de coupe dans la matière.

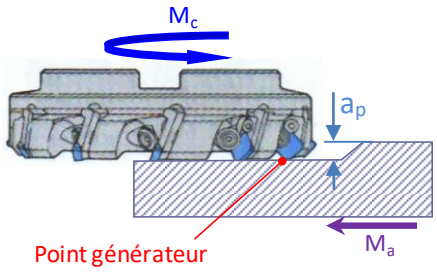


Fig. 4.22. Profondeur de passe a_p en fraisage.

On distingue deux modes de travail en fraisage, fonctions des sens des mouvements de coupe et d'avance :

- le travail en opposition : la dent attaque la pièce par la plus faible épaisseur de copeau,

- le travail en avalant (ou en concordance) : la dent attaque la pièce par la plus grande épaisseur de copeau.

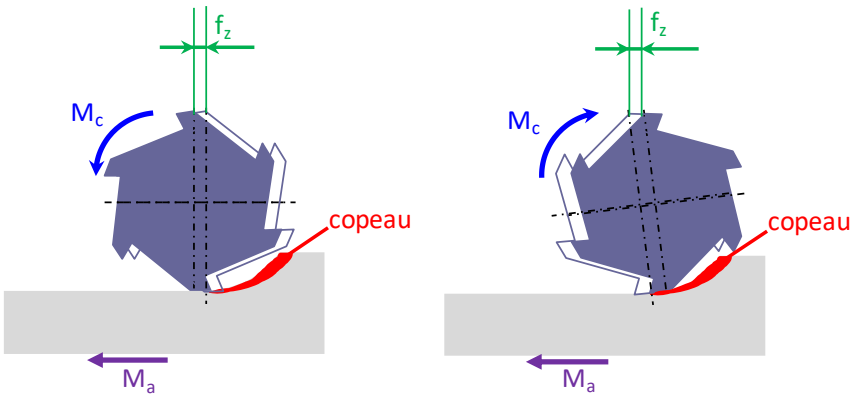


Fig. 4.23. Travail en opposition et travail en avalant.

5. Montage d'usinage

5.1 Fonctions et contraintes du montage d'usinage

La pièce doit être montée sur la machine-outil et maintenue en position pendant l'usinage. Elle est soumise à des efforts de coupe importants.

Le montage d'usinage doit respecter un grand nombre de règles parmi lesquelles :

- assurer une mise en position isostatique de la pièce sur la machine en éliminant les 6 degrés de liberté décrivant les mouvements possibles de la pièce dans l'espace,

- permettre une bonne répétabilité de la mise en position pour toutes les pièces identiques fabriquées en série,

- maintenir la pièce en position pendant l'usinage par l'application d'un effort de serrage adapté,

- éviter les interférences avec l'outil pendant l'usinage, notamment en laissant les surfaces à usiner libres d'accès.

5.2 MISE EN POSITION ISOSTATIQUE - ELIMINATION DES DEGRES DE LIBERTE

5.2.1 d.d.l. éliminés selon la forme et l'étendue de la surface

On oppose un contact ponctuel unilatéral, représenté par une normale de repérage, à chaque possibilité de mouvement, afin d'éliminer les différents degrés de liberté.

Selon la forme et l'étendue des surfaces géométriques, on peut associer un nombre variable de normales de repérage. La figure ci-dessous présente les possibilités d'implantation des normales en fonction des principales surfaces géométriques rencontrées sur une pièce mécanique.

Surface plane			**Surface cylindrique** *L = longueur D = diamètre*			+	
Petite	**Moyenne**	**Grande**		**Courte (L<D)**	**Longue (L>1,5 D)**	**Longue (L>1,5 D)**	**Courte (L<D)**
1 normale	2	3	1	2	4	5 (4 + 1)	5 (3 + 2)
Ponctuelle	Linéaire rectiligne	Appui plan	Ponctuelle	Centrage court	Centrage long		
1°	2°	3°	1°	2°	4°	5° (4° + 1°)	5° (3° + 2°)
Degrés de liberté éliminés							

Fig. 4.24 : d.d.l. éliminés par la mise en position, selon la nature de la surface de contact.

5.2.2 Symbole de base de mise et de maintien en position

On modélise la mise et le maintien en position de la pièce sur la machine utilisée à partir de symboles spécifiés dans la norme **NF E 04-013.**

Le symbole de mise en position est représenté (figure 4.25) :

- de profil, par une flèche à pointe noircie,
- en projection, par une zone hachurée.

Fig. 4.25

Il est normal à l'appui considéré. Il est placé sur la surface ou sur une ligne d'attache, du côté libre de la matière (figure 4.26).

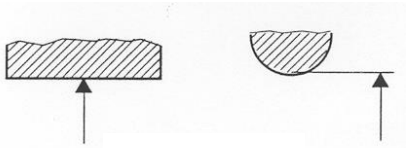


Fig. 4.26

Le symbole de maintien en position est représenté (figure 4.27) :

- de profil, par une flèche à pointe blanche,
- en projection, par une croix cerclée.

Fig. 4.27

5.3 MONTAGE D'USINAGE EN TOURNAGE

La pièce peut être et mise et maintenue en position de différentes manières sur le tour.

La mise en position consiste à proposer des appuis permettant d'éliminer 5 d.d.l. L'orientation autour de l'axe Z (6ème d.d.l.) n'a pas d'importance lorsque la pièce présente une symétrie de révolution.

5.3.1 Montage en l'air (en mandrin)

L'utilisation de mors montés sur un mandrin permet d'assurer un centrage long (4 d.d.l. éliminés) sur une surface cylindrique de grande longueur ou un centrage court (2 d.d.l. éliminés) sur une surface cylindrique de faible longueur.

Ce montage peut être complété par un appui simple (1 d.d.l. éliminé) ou un appui-plan (3 d.d.l. éliminés) sur la surface du mandrin perpendiculaire à l'axe de rotation (figures 4.24, 4.28 et 4.29).

Ce type de montage est choisi pour les usinages avec un faible porte-à-faux.

Le maintien en position est assuré par le serrage concentrique des mors.

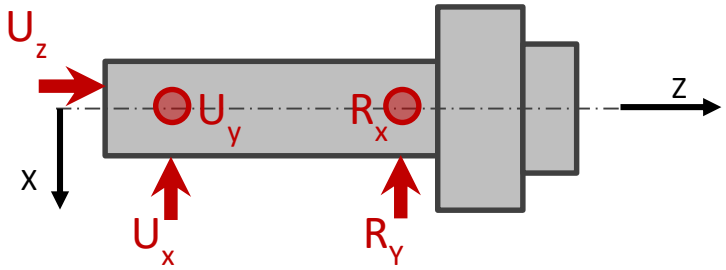


Fig. 4.28 : Montage en l'air : centrage long + appui axial sur le mandrin.

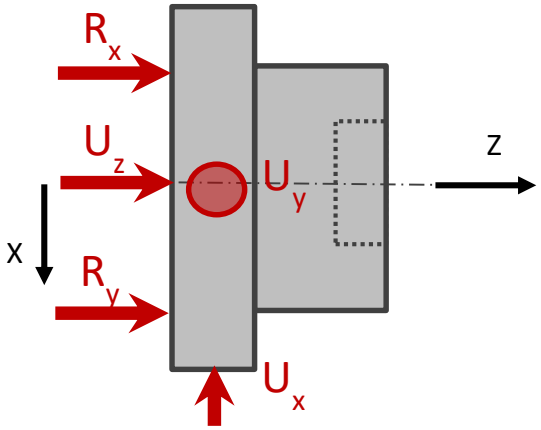


Fig. 4.29 : Montage en l'air : centrage court + appui-plan.

5.3.2 Montage mixte

Le centrage court (2 d.d.l. éliminés) sur une surface cylindrique de faible longueur et l'appui simple sur la surface du mandrin (1 d.d.l. éliminé) peuvent être complété par l'utilisation d'une contrepointe montée sur la poupée mobile (2 d.d.l. éliminés).

Ce type de montage est choisi pour les usinages avec un porte-à-faux important (figure 4.30).

Le maintien en position est assuré par le serrage concentrique des mors.

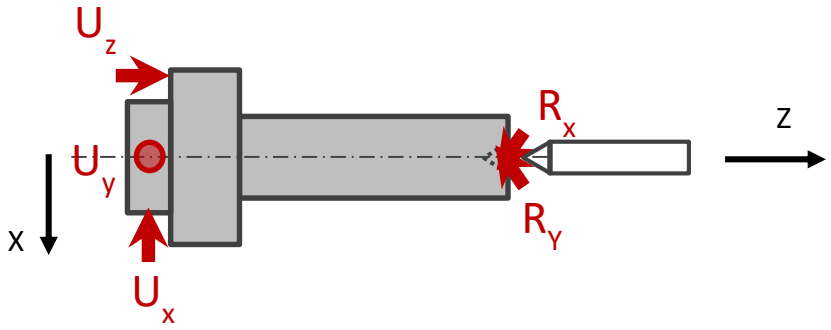


Fig. 4.30 : Montage mixte : centrage court + appui axial sur un mors + contrepointe.

5.3.3 Montage entre pointes

La pièce est mise en position uniquement sur ses surfaces latérales (figure 4.31).

Ce montage permet le dégagement de la pièce sur toute sa longueur.

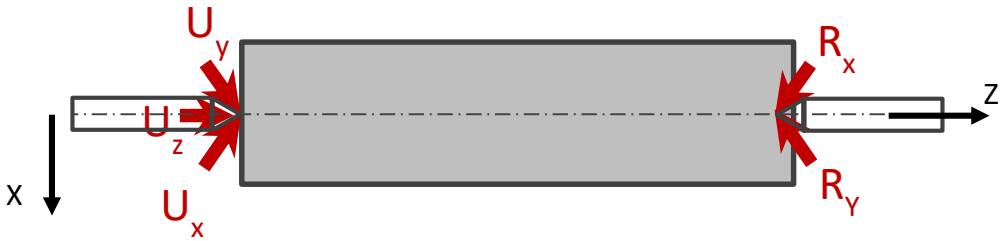
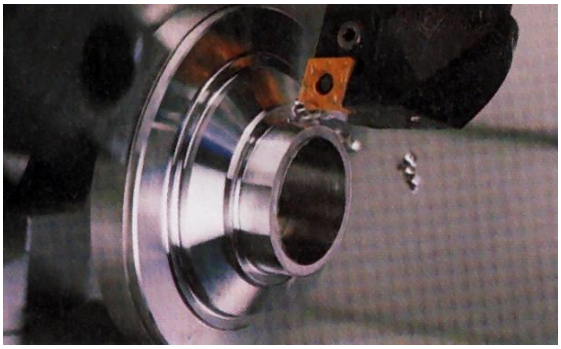
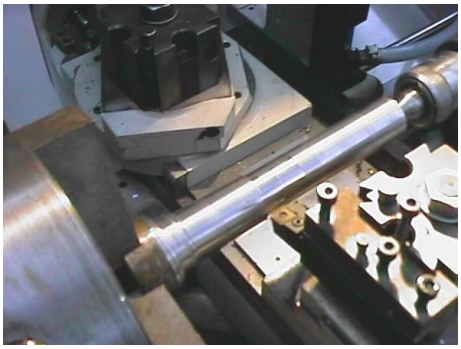


Fig. 4.31 : Montage entre pointes.

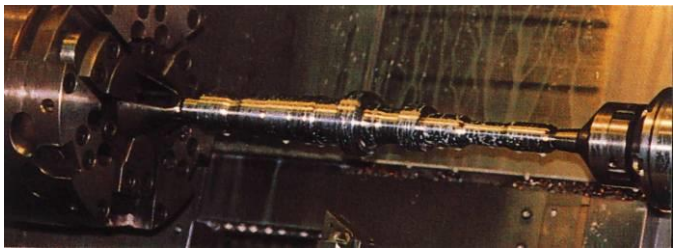
5.3.4 Exemples



centrage court + appui-plan.



Centrage court + appui axial sur un mors + contrepointe.



Montage entre pointes.

Fig. 4.32. Montages d'usinage en tournage

5.4 MONTAGE D'USINAGE EN FRAISAGE

La mise en position consiste à proposer des appuis permettant d'éliminer les 6 d.d.l. de la pièce à fabriquer. La figure 4.33 présente la mise en position d'une pièce sur une fraiseuse, suivant 2 vues. L'axe Z représente l'axe de la broche de la fraiseuse :

- la pièce est en appui-plan sur la table de la machine à l'aide de 3 appuis (1, 2 et 3),
- les appuis 4 et 5 suppriment la translation de la pièce suivant X et la rotation suivant Z,
- le dernier appui supprime le dernier degré de liberté : la translation suivant Y.

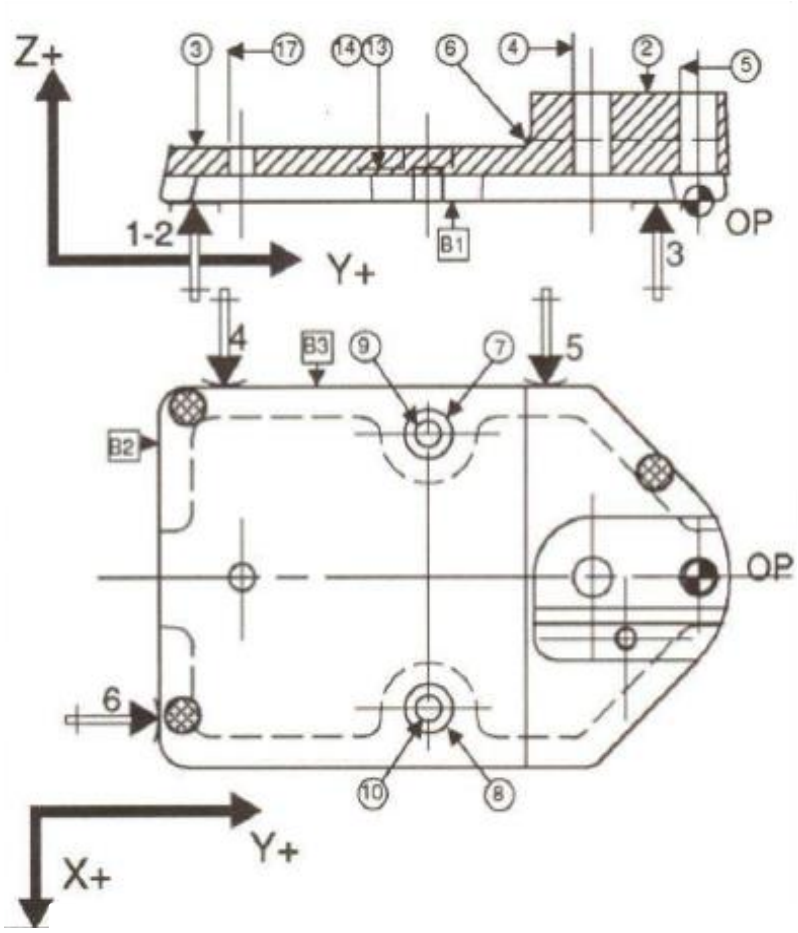
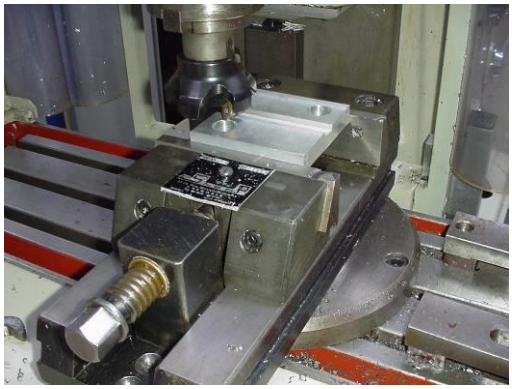


Fig. 4.33 : Exemple de modélisation de mise en position isostatique.

Une pièce usinée sur une fraiseuse peut être mise et maintenue en position grâce à différents dispositifs :

- dans un étau monté sur la table de la fraiseuse. C'est le porte-pièces standard qui permet de positionner et de maintenir très simplement les pièces de forme prismatique. Lorsque les pièces sont de grande dimension ce type de porte-pièces n'est plus utilisable.
- dans un porte-pièces spécifique monté sur la table de la fraiseuse. Ce type de porte-pièces est dédié à une ou plusieurs opérations de fraisage. On trouve des porte-pièces fabriqués ou constitués d'éléments modulaires.
- directement sur la table de la machine, par l'intermédiaire de brides et de cales (pièces de grande taille et travaux unitaires).



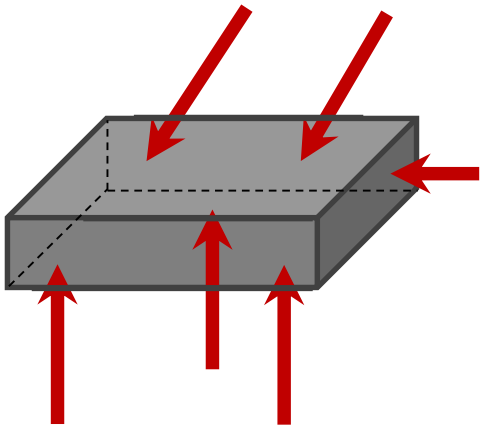


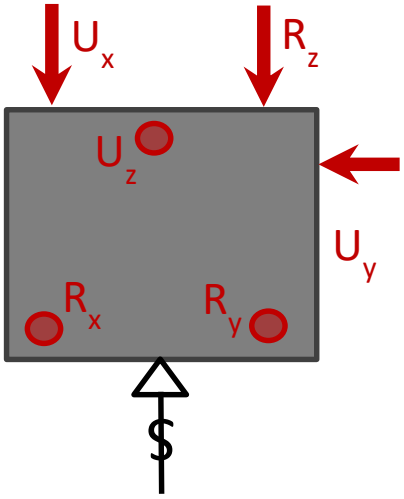
Fig. 4.34 : Montage dans un étau :

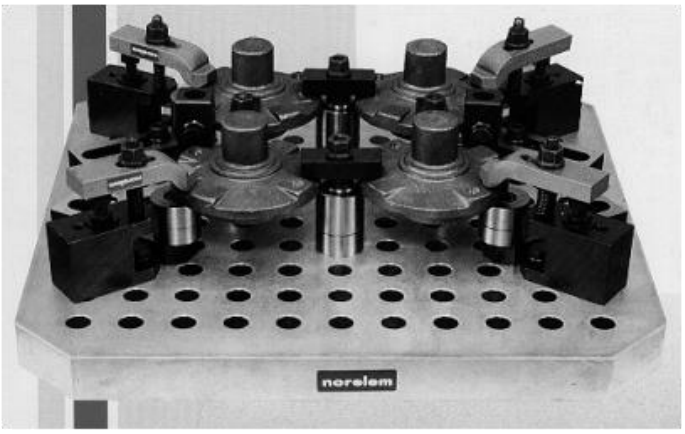
1 appui-plan sur la face inférieure de la pièce

+ 1 contact linéique sur le mors fixe

+- 1 contact ponctuel sur le côté.

Le maintien de la pièce sur ces appuis est assuré par le serrage du mors mobile.





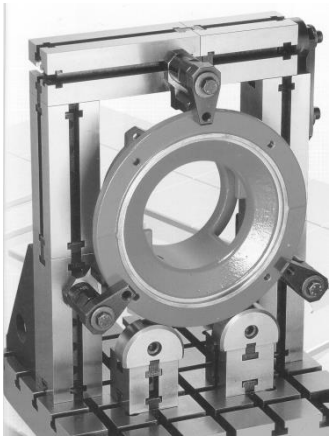


Fig. 4.35 : Montages d'usinage en fraisage : Montage dans un porte-pièces spécifique

5.5 LIMITATIONS

L'accès des outils peut être limité sur les faces de mise et de maintien en position.

La figure 4.36 illustre un maintien en position (serrage) sur la face supérieure d'une pièce. Les outils ne pourront usiner cette zone sans risque d'entrer en collision avec ce dispositif de maintien en position. L'accès aux faces latérales peut également être limité en raison du porte-à-faux des outils, des dispositifs de mise et de maintien en position… :

- pour le fraisage de profil,

- pour le rainurage latéral.

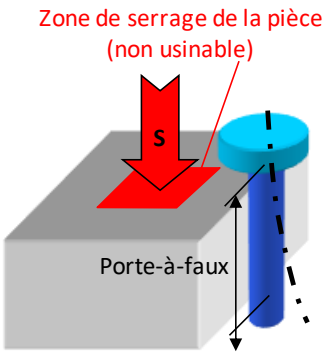


Fig. 4.36 : Limites d'accès liées au montage d'usinage.

6. Les gammes de fabrication

6.1 PRESENTATION

Toute pièce mécanique évolue d'un état initial, correspondant à la pièce brute, vers un état final, représentatif du contrat de départ (respect du dessin de définition). La valeur ajoutée représente l'ensemble des opérations (usinages, traitements, contrôles…) à effectuer.

La gamme de fabrication est un document d'archives dans lequel sont consignées, de manière chronologique et globale, les différentes phases de la transformation d'un produit.

Une **phase** représente l'ensemble des opérations effectuées à un même poste de travail. Durant une phase, la mise en position de la pièce sur la machine est figée.

Une **opération** d'usinage fait intervenir un outil sur la pièce. Dans une même phase, il y a changement d'opération lorsqu'il y a un changement d'outil.

La variété des modes d'obtention des bruts et la diversité des regroupements et enchaînements d'opérations sont telles que le processus de fabrication envisageable pour un même produit est loin d'être unique.

Les choix conduisant à l'élaboration d'un avant-projet sont basés sur des critères techniques et économiques. Ces deux approches sont parfois contradictoires et le choix définitif est le résultat d'un compromis qui intègre l'exigence de qualité demandée. Le problème, simple à poser mais difficile à résoudre, consiste donc à trouver rapidement le processus le plus économique, techniquement fiable et donnant le niveau de qualité souhaité.

6.2 DOSSIER DE FABRICATION

Dans une entreprise compétitive, une mise en fabrication ne peut commencer que si l'organisation du processus garantit la production avec un taux de rebut voisin de zéro (zéro défaut).

Plus les pièces ont un degré de complexité élevé et une valeur ajoutée conséquente, plus l'élaboration du processus doit être approfondie.

Le préparateur méthodes, charnière entre le concepteur et l'atelier de fabrication, fournit aux opérateurs et aux régleurs des machines-outils un dossier de fabrication complet, sûr et sans ambiguïté, validé par des expérimentations ou des simulations préventives.

Le dossier de fabrication comprend :
- le dessin de définition du produit,
- les données économiques,
- le dessin du brut,
- l'ordonnancement des phases,
- les contrats de phases,
- la définition des équipements,
- les fichiers de programmation des machines,
- les fiches de réglage,
- les fiches de suivi et de contrôle.

6.3 ELABORATION D'UN PROCESSUS DE FABRICATION

Dans ce qui suit, les règles proposées permettent **d'établir les avant-projets d'étude de fabrication.**

6.3.1 Exemple : Bâti de la machine à vapeur

Nous nous intéressons à la fabrication du bâti de la machine à vapeur.

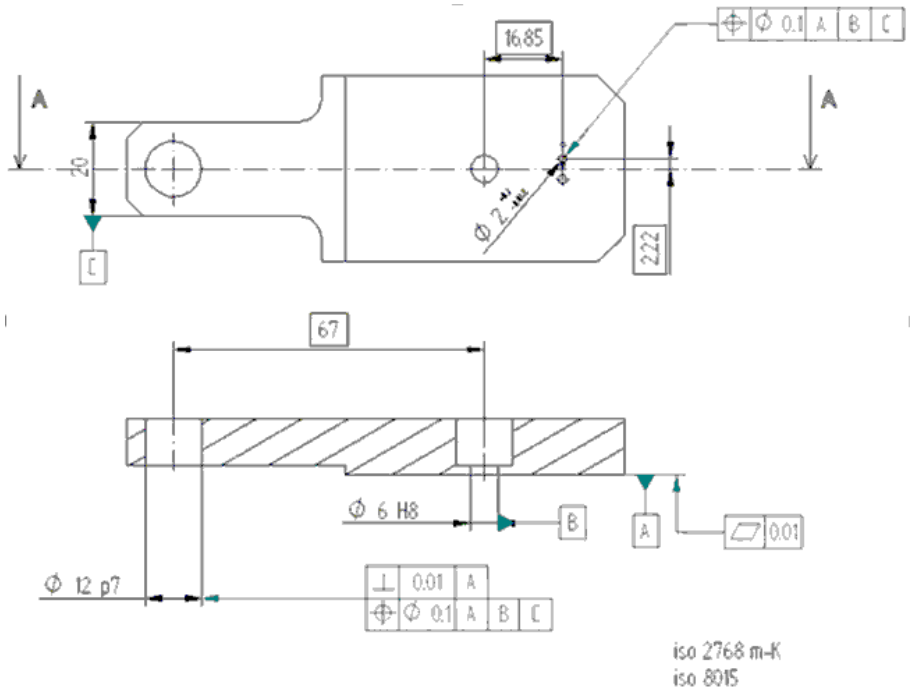


Fig. 4.37 : Dessin de définition du bâti (partiel).

La figure 4.38 présente un modèle 3D du brut et de la pièce finale. Les surfaces qui doivent être usinées sont représentées en couleur (en rouge les plans, en bleu les alésage).

Le brut a pu être obtenu par découpe dans une plaque d'aluminium de 15 mm d'épaisseur, découpe au jet d'eau ou sur fraiseuse à commande numérique.

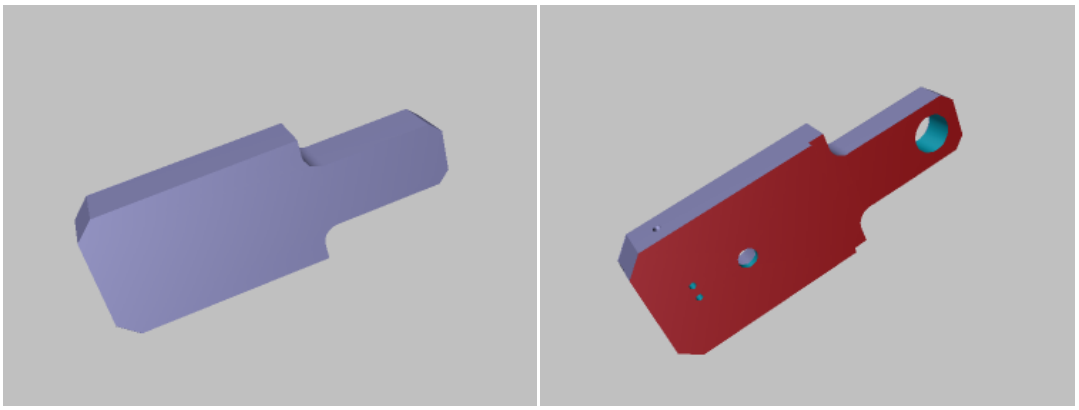


Fig. 4.38 : Brut et pièce finale du bâti de la machine à vapeur.

La pièce finale doit respecter l'ensemble des spécifications géométriques apparaissant sur le dessin de définition. Seules les spécifications fonctionnelles identifiées dans le chapitre 2 sont représentées.

Choix de la machine-outil

Toutes les surfaces à usiner peuvent être obtenues en fraisage. La figure 4.39 est une vue en coupe présentant les 7 surfaces à usiner et la matière à enlever. Les 2 petits trous d'admission et d'échappement de la vapeur ne sont pas représentés sur cette vue.

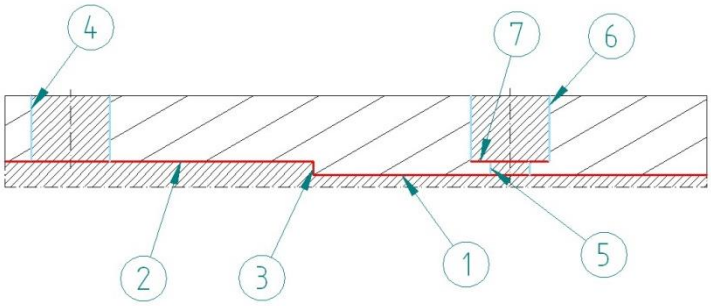


Fig. 4.39 : Identification des surfaces à usiner.

Analyse des spécifications géométriques et regroupement des opérations

Le plan 1 doit être réalisé avec une bonne planéité. Il peut être obtenu par fraisage en bout (travail d'enveloppe).

L'axe de l'alésage 4 doit être perpendiculaire au plan 1. Il est préférable de le réaliser dans la même phase que le plan 1.

L'axe de l'alésage 4 doit être bien positionné par rapport à l'axe de l'alésage 5. Il est donc préférable que ces 2 alésages soient réalisés dans la même phase.

De même, les 2 trous d'admission et d'échappement doivent être réalisés dans la même phase.

On peut finalement regrouper les usinages suivants dans la même phase (phase 10) :

- surfaçage de 1 (fraisage en bout – travail d'enveloppe),

- surfaçage de 2 (fraisage en bout – travail d'enveloppe),

- usinage du plan 3 (fraisage de profil),

- perçage puis alésage de 5 (travail axial),

- perçage et alésage de 4 (travail axial),

- perçage des 2 trous d'admission et d'échappement.

La réalisation des surfaces 6 et 7 ne peut pas être faite dans cette phase. L'accès de l'outil est impossible. Il faut donc envisager une deuxième phase (phase 20) où la pièce sera retournée sur la machine pour réaliser ces 2 surfaces.

Il restera encore à usiner les trous pour l'admission et l'échappement de la vapeur sur le dessus et le dessous du bâti. Les phases 30 et 40 de perçage nécessiteront des montages spécifiques sur une perceuse à colonne qui ne seront pas présentés ici.

Mise en position de la pièce

Phase 10 :

- 3 appuis sur la surface inférieure,

- 2 appuis sur les surfaces latérales,

- 1 appui sur l'extrémité pour supprimer la dernière translation.

Remarque : Le choix de ces surfaces de mise en position est conditionné par la cotation.

- Maintien par serrage sur les faces latérales opposées.

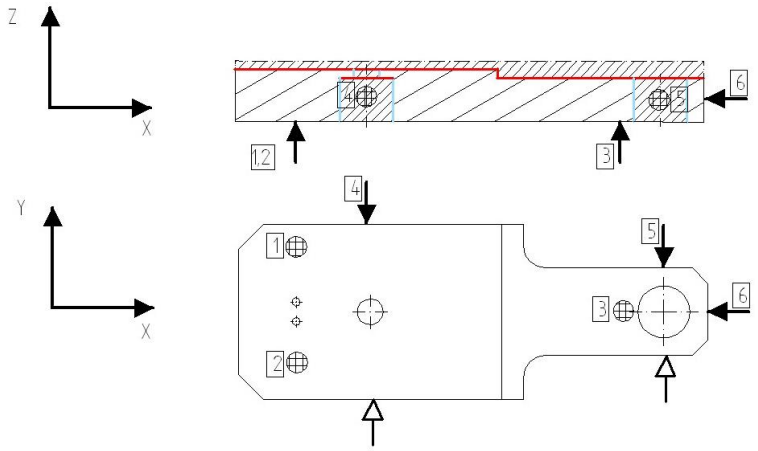


Fig. 4.40 : Mise et maintien en position de la pièce.

Phase 20 :

Le montage est quasi identique. La pièce est retournée sur le montage pour que l'outil puisse accéder à l'usinage des surfaces 6 et 7.

6.3.2 Règles à respecter dans l'élaboration du processus de fabrication

1. On essaye en priorité d'usiner la totalité des surfaces de la pièce en un seul et unique posage.
2. Le système de mise en position définissant le posage de la pièce sur le porte-pièce doit être isostatique.
3. Si plusieurs posages sont nécessaires lors de la première phase, on réalise les surfaces de dimensions maximales et de préférence planes, pour obtenir un système de reprise le plus stable et le plus précis possible.
4. Lors du 1er posage, la mise en position de la pièce doit permettre de répartir au mieux la matière (balançage du brut) par rapport aux surfaces qui seront usinées.
5. Le choix des surfaces de serrage ne doit pas empêcher l'exécution des cycles d'outils prévus dans la phase.
6. Les actions de serrage sont opposées aux appuis et ne doivent pas provoquer de déformations sur les pièces entraînant leur rebut (flexion, torsion, flambage, matage). On peut être amené à modifier l'intensité du serrage entre l'ébauche et la finition.
7. La mise et le maintien en position réalisent une liaison complète de la pièce sur le porte-pièce (encastrement).
8. Pour avoir un porte-à-faux minimal (distance liaison-effort), il faut que les points d'appui et de serrage soient le plus près possibles de l'usinage.
9. Le choix du porte-pièce doit s'orienter en priorité vers les moyens standards (mandrins 3 ou 4 mors, pointes, pinces, étaux, etc.).

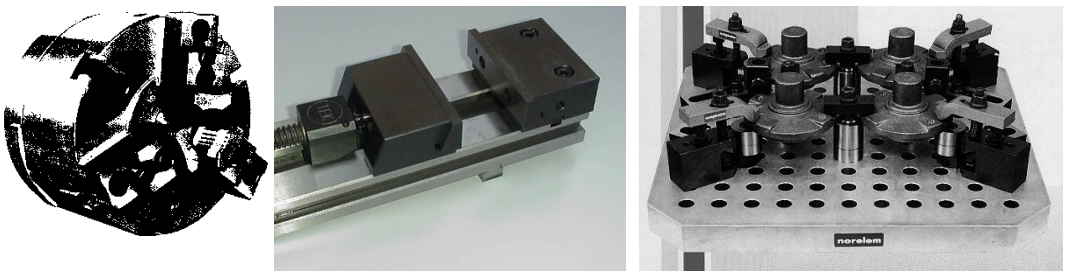


Fig. 4.41 : Mandrin 3 mors (tournage), Etau de précision (fraisage), montage modulaire (fraisage).

6.3.3 - Constitution d'un contrat de phase

Un contrat de phase est un document élaboré à partir de l'avant-projet de fabrication, décrivant de manière précise et chronologique les éléments permettant :

- de déterminer la cotation de fabrication,
- d'étudier les montages d'usinage à réaliser,
- d'élaborer le programme en CN,
- de mettre en place la phase d'usinage sur la machine,
- de prévoir les contrôles.

Un contrat de phase peut être décrit en 3 zones.

La partie supérieure donne les éléments descriptifs de la pièce et de son programme de fabrication, à savoir :

- son nom et celui de l'ensemble auquel elle appartient,
- la matière et le mode d'élaboration du brut,
- la désignation de la phase, la chronologie des opérations et la machine-outil utilisée,
- le nombre de pièces à fabriquer, la taille des lots, la cadence de production.

La zone centrale est réservée aux descriptions graphiques et comporte :

- la silhouette de la pièce représentée telle qu'elle sera usinée en fin de phase (il est également possible de faire ressortir les surfaces à usiner en les dessinant d'une couleur différente,
- l'indication de l'origine programme et des axes de la machine,
- la cotation de fabrication,
- le positionnement isostatique et éventuellement les indications de serrage.

La zone du bas est réservée :

- au descriptif des opérations d'usinage et à leur ordonnancement précis,
- à l'indication des outils utilisés,
- à l'indication des conditions de coupe.

La figure 4.42 présente un exemple de contrat de phase.

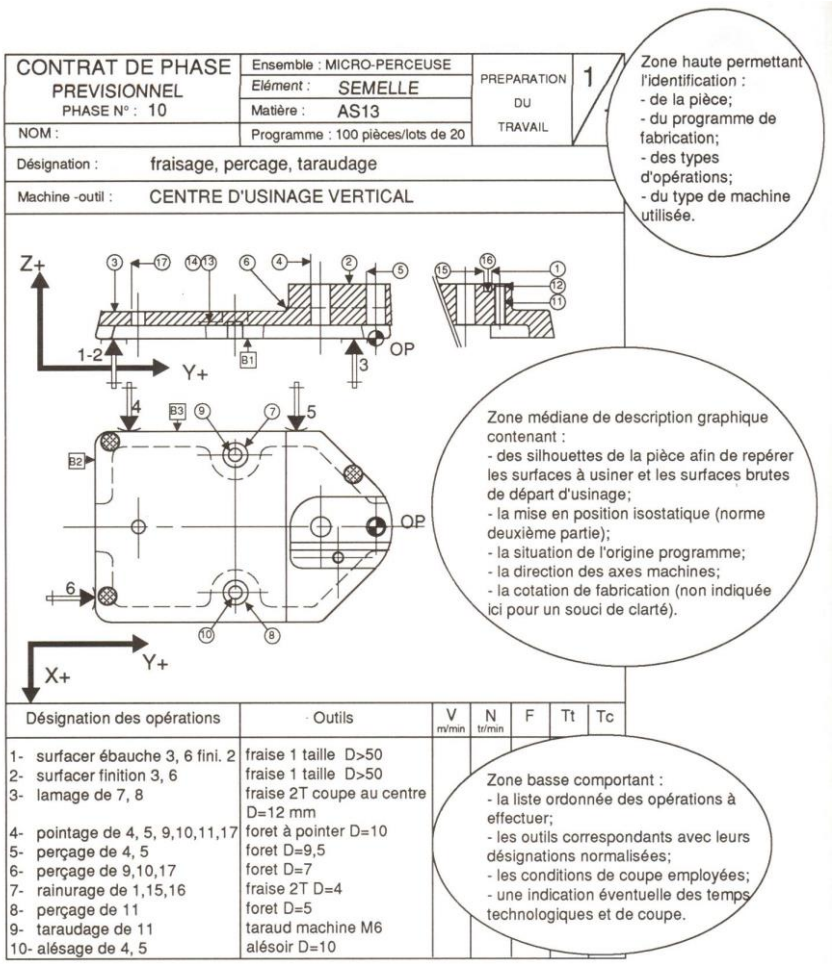


Fig. 4.42 : Exemple de contrat de phase.

7. Bibliographie

[1] Aublin M., Rage M., Taraud D. "*Productique Mécanique*". Dunod.

[2] Chevalier A. "*Guide du dessinateur industriel*". Hachette Technique.

[3] Fanchon J. L. "*Guide des sciences et technologies industrielles*" AFNOR – Nathan.

[4] Padilla P., Anselmetti B., Mathieu L., Raboyeau M. "*Production Mécanique*". Dunod – Génie mécanique.

Génie Mécanique - 2ème partie
Mécanique Générale et Analytique

(L. Blanc, O. Dessombz)

Notes préliminaires

Ce cours doit beaucoup aux transparents de M. Gilles Robert et en particulier aux nombreux exercices qu'ils contiennent, qu'il soit ici sincèrement remercié pour avoir permis ces emprunts.

Les lecteurs qui le souhaitent pourront s'exercer et approfondir les notions abordées ici à l'aide de différents ouvrages qui ont guidé les auteurs dans la rédaction :

- Pour travailler en priorité la modélisation du mouvement et des efforts par les torseurs, ainsi que la mise en œuvre du Principe Fondamental de la Dynamique, [1] contient des bases détaillées.

- Pour retrouver des présentations didactiques du Principe des Puissances Virtuelles et des équations de Lagrange, ainsi que de nombreux exercices de difficulté comparable à ceux du niveau visé dans ce cours, [5] et [10] sont recommandés, pour aller plus loin [3], [4] et [9] sont plus exhaustifs.

- Enfin, pour creuser la théorie et / ou saisir les liens qui unissent ce cours aux autres branches de la mécanique, les plus aventureux pourront lire [8], [6], [2], [7].

L'annexe A regroupe les règles du calcul de torseurs indispensables à la lecture des autres chapitres. Il convient de les lire en priorité pour en avoir une vision d'ensemble puis de s'y référer en détail au fur et à mesure de leur apparition dans les chapitres.

Table des matières

1 Introduction 1

1.1 Les principes fondamentaux de la mécanique classique (non relativiste) 1

1.2 Stratégie de construction de la théorie de la mécanique des solides rigides 1

2 Illustration des lois de la mécanique : système de points matériels . 3

2.1 Rappels de cinématique du point 3

2.1.1 Paramétrage de la position d'un point, vitesse et accélération par rapport à un référentiel 3

2.1.2 Composition des vecteurs rotation par rapport à plusieurs repères 3

2.1.3 Lien entre les dérivées d'un vecteur par rapport à 2 repères mobiles 4

2.2 Approche classique dans la description des efforts, expression des principes associés 4

2.2.1 Modélisation des forces par un "champ de vecteurs", torseur d'action mécanique 4

2.2.2 Propriétés liées à la masse (centre d'inertie, torseurs cinétique et dynamique) 5

2.2.3 Expression "classique" des principes de la mécanique 6

2.2.4 Illustration de la conservation de l'énergie, théorème de l'énergie cinétique 6

2.3 Approche énergétique de d'Alembert pour la description des efforts 7

2.3.1 Notions de mouvement virtuel et de puissance virtuelle 7

2.3.2 Le principe des puissances virtuelles (PPV) généralisation du principe de d'Alembert 8

2.3.3 Applications du PPV 9

3 Modélisation du mouvement d'un système de solides rigides 11

3.1 Cinématique d'un solide isolé, notion de paramétrage primitif 11

3.1.1 Définition du solide rigide, construction du torseur cinématique 11

3.1.2 Paramètres de rotation, l'exemple des angles d'Euler, autres exemples 11

3.1.3 Composition des torseurs cinématiques 13

3.1.4 Construction de champs de vitesses virtuelles rigidifiants, formalisme général 14

3.2 Cinématique des systèmes de solides, notion de liaison entre solides 16

3.2.1 Typologie des liaisons 16

3.2.2 Démarche d'identification des équations de liaison 17

3.2.3 Mouvements virtuels compatibles avec une liaison 18

4 Modélisation des efforts intérieurs et extérieurs 21

4.1 Vision énergétique de la modélisation des actions mécanique par un torseur 21

4.1.1 Puissance virtuelle des efforts extérieurs et dualité $\mathcal{V}^* \leftrightarrow \mathcal{F}_{\text{ext}\to\mathcal{S}}$ 21

4.1.2 Notion de force généralisée, associée aux actions mécaniques extérieures 22

4.1.3 Et les efforts intérieurs ? 22

4.1.4 Adaptation du formalisme energétique aux actions mécaniques de liaison 22

4.1.5 Fonctions de force et de dissipation 23

version du 30 mai 2016

4.2 Modélisation des actions mécaniques localisées au voisinage d'un point d'un solide 24
4.2.1 Cas d'une action à distance : la pesanteur, modélisée par une force volumique 24
4.2.2 Classification des liaisons ponctuelles en fonction de leur loi de comportement 25
4.2.3 Actions mécaniques exercées par les ressorts et les amortisseurs 26
4.3 Modélisation des actions mécaniques dans les liaisons usuelles 27
4.3.1 Liaisons usuelles parfaites 27
4.3.2 Liaisons non parfaites 27
4.4 Éléments de stratégie dans la modélisation des efforts de liaison 28
4.4.1 Sur le rôle des lois de comportement de liaison 28
4.4.2 Sur le lien entre le paramétrage cinématique (primitif ou réduit) et les efforts de liaison 28
4.4.3 Traitement d'inéquations éventuelles 28
4.5 Bilan intermédiaire 28

5 Conservation de la masse - Formules de cinétique pour les solides rigides 29
5.1 Expression du torseur cinétique exploitant la cinématique de corps rigide et la conservation de la masse 29
5.1.1 Pourquoi un torseur cinétique ? Noté $\mathcal{C}_{S/R}$ 29
5.1.2 Justification de la structure de torseur, héritée de celle de $\mathcal{V}_{S/R}$ 29
5.1.3 Comment la conservation de la masse conduit à une expression condensée de $\mathcal{C}_{S/R}$ s'appuyant sur de nouveaux concepts (centre de masse, opérateur d'inertie) 30
5.2 Description de la répartition de masse dans un solide 31
5.2.1 Centre d'inertie 31
5.2.2 Opérateur d'inertie d'un solide 31
5.3 Calcul du torseur dynamique à partir du torseur cinétique 32
5.3.1 Définition de $\mathcal{D}_{S/R}$ 32
5.3.2 Passage de $\mathcal{C}_{S/R}$ à $\mathcal{D}_{S/R}$ 32
5.4 Remarque générale 33
5.5 Bilan intermédiaire 33

6 Conservation de l'énergie 35
6.1 Théorème de l'énergie cinétique 35
6.1.1 Expression et démonstration 35
6.1.2 Exploitation 36
6.2 Intégrale première de l'énergie cinétique pour un système conservatif 36
6.2.1 Qu'est ce qu'une intégrale première ? 36
6.2.2 Cas des systèmes conservatifs 36
6.3 Lien entre l'énergie cinétique (réelle) et la puissance virtuelle des quantités . . . 36
6.4 Bilan intermédiaire 38

7 Conservation de la quantité de mouvement, PFD, PPV et équations de Lagrange 39
7.1 Expression classique, par champs de vecteurs, de la conservation de la quantité de mouvement 39
7.1.1 Le PFD pour un système de solides rigides 39
7.1.2 Illustration du lien PFD - conservation de la quantité de mouvement (QDM) 39
7.1.3 Aspects pratiques dans l'utilisation du PFD 40
7.2 Vision énergétique de la conservation de la QDM 40
7.2.1 Le PPV pour un système de solides rigides, forme générale 40
7.2.2 Les équations de Lagrange 41
7.2.3 Lien Lagrange - Hamilton 42

version du 30 mai 2016

8 Essai de méthode de mise en oeuvre des équations de Lagrange . . 43
8.1 Etablissement d'une stratégie 43
8.1.1 Rappel sur les hypothèses 43
8.1.2 Comment modéliser des liaisons ? 43
8.2 Mise en œuvre 44
8.2.1 Repérage 44
8.2.2 Schématisation des efforts de liaison 44
8.2.3 Établissement des équations de la dynamique 44

A Notion de torseur 47
A.1 Généralités sur les systèmes de vecteurs liés 47
A.1.1 Définition 47
A.1.2 Résultante d'un système de vecteurs liés 47
A.1.3 Champ de moments associés à S 47
A.1.4 Propriété fondamentale du champ $\mathscr{M}_3$. Relation de transport 48
A.1.5 Retour sur le cas particulier d'un vecteur lié simple 48
A.1.6 Équivalence de deux systèmes de vecteurs liés 48
A.2 Torseur 49
A.2.1 Définition 49
A.2.2 Éléments de réduction d'un torseur $\mathscr{T}$ en un point A 49
A.2.3 Égalité de deux torseurs 49
A.3 Comoment de deux torseurs 50
A.3.1 Définition 50
A.3.2 Invariant scalaire d'un torseur $\mathscr{T}$ 50

version du 30 mai 2016

version du 30 mai 2016

Chapitre 1

Introduction

1.1 *Les principes fondamentaux de la mécanique classique (non relativiste)*

- La mécanique étudie les mouvements des systèmes matériels et les forces qui provoquent ou modifient ces mouvements. Les systèmes matériels étant très variés, plusieurs "mécaniques" coexistent :
  - mécanique des **solides indéformables** (objet de ce cours) ;
  - mécanique des **milieux continus** (cf MSS TC1) ;
  - mécanique **statistique**, pour les milieux discrets à très grand nombre de composants ;
  - **acoustique**, **mécanique des fluides** ;
  - mécanique des **poutres** (cf fin du cours de GM TC1), des **plaques**, des **coques** ...

- Ces "mécaniques" s'appuient sur 4 principes fondamentaux :
  - conservation de la masse ;
  - principe fondamental de la dynamique (ou principe des puissances virtuelles, abrégé en PPV, ou conservation de la quantité de mouvement) ;
  - conservation de l'énergie (premier principe de la thermodynamique) ;
  - second principe de la thermodynamique.

- La construction d'une théorie mécanique passe par deux grandes étapes :
  - le choix d'un **modèle de mouvement** (cinématique) et d'une **schématisation des actions mécaniques** (efforts) en accord : la notion de **puissance virtuelle**, associée à celle de **mouvement virtuel** offre un formalisme général pour cette étape ;
  - l'expression des **principes fondamentaux**, qui permet de mettre en relation mouvements et efforts. Le **PPV** est un outil puissant pour obtenir ces équations. Certaines équations complémentaires, comme les relations de comportement, sont construites de manière à ce qu'elles vérifient le premier et le second principes de la thermodynamique.

1.2 *Stratégie de construction de la théorie de la mécanique des solides rigides*

- Dans le chapitre 2, la démarche est déclinée pour des **systèmes de masses ponctuelles**. Le PPV est présenté, ainsi que son mode d'emploi.

version du 30 mai 2016

- Chapitre 3, les **torseurs cinématiques** sont introduits pour décrire les mouvements de solides rigides en tenant compte ou pas de **liaisons**.

- Chapitre 4, les **torseurs d'actions mécaniques** sont introduits, en dualité avec les torseurs cinématiques. Certaines **lois de comportement** bien connues sont rappelées : modèle de **liaison parfaite**, **élastique** ou **visqueuse**, **loi de contact** (Coulomb) ...

- Chapitre 5, le **principe de conservation de la masse** permet, via une représentation **condensée** de la distribution de masse dans un solide (notions de centre d'inertie, de matrice d'inertie) d'exprimer les quantités intervenant dans les principes fondamentaux à l'échelle du solide plutôt qu'à l'échelle de l'élément de matière.

- Le chapitre 6 décrit une manière systématique d'exprimer **l'énergie cinétique** d'un système de solides rigides. Application du **théorème de l'énergie cinétique**.

- Chapitre 7, le lien entre **PPV**, **PFD** et **équations de Lagrange** est établi.

- Le dernier chapitre est une **synthèse sur la stratégie de formulation et l'exploitation** des équations (notions de linéarisation, d'équilibre, de stabilité ...).

version du 30 mai 2016

Chapitre 2

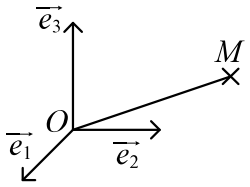
Illustration des lois de la mécanique sur un système de points matériels (solides dégénérés)

2.1 Rappels de cinématique du point

2.1.1 Paramétrage de la position d'un point, vitesse et accélération par rapport à un référentiel

- L'association d'un repère d'espace et d'une base de temps constitue un **référentiel**.

- Le **vecteur position** d'un point M lie M à l'origine O du repère R par la relation :



$$\overrightarrow{OM}(t) = x_1(t)\,\vec{e_1} + x_2(t)\,\vec{e_2} + x_3(t)\,\vec{e_3}. \tag{2.1}$$

- La **vitesse** et l'**accélération** de M par rapport à R sont définies par :

$$\boxed{\vec{V}(M/R) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right]_R = \dot{x}_1\,\vec{e_1} + \dot{x}_2\,\vec{e_2} + \dot{x}_3\,\vec{e_3}} \tag{2.2}$$

et

$$\boxed{\vec{\Gamma}(M/R) = \left.\frac{d\vec{V}}{dt}\right]_R.} \tag{2.3}$$

⚠ Calculer une vitesse par rapport à un repère ne veut PAS dire "projeter le vecteur vitesse dans la base liée à ce repère" !

2.1.2 Composition des vecteurs rotation par rapport à plusieurs repères

- C'est une relation de Chasles :

$$\boxed{\vec{\Omega}_{R_n/R_1} = \vec{\Omega}_{R_n/R_{n-1}} + \cdots + \vec{\Omega}_{R_2/R_1}.} \tag{2.4}$$

version du 30 mai 2016

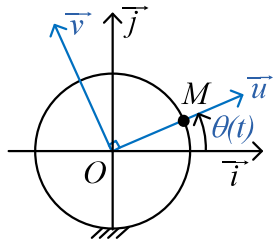
2.1.3 Lien entre les dérivées d'un vecteur par rapport à 2 repères mobiles

- La **"formule de la base mobile"** est à la base de toutes les relations cinématiques, d'où son grand intérêt pratique :

$$\boxed{\left.\frac{d\vec{U}}{dt}\right]_R = \left.\frac{d\vec{U}}{dt}\right]_{R'} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{U}.} \tag{2.5}$$

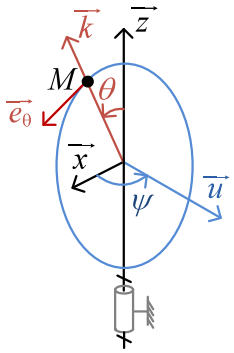
- Son utilisation efficace passe par la construction de **"figures de travail"**.

- **Exercice : étude d'un mouvement circulaire .**



M se déplace sur un cercle.
Calculer $\vec{V}(M/R)$ et $\vec{\Gamma}(M/R)$.

- **Exercice : particule sur un cerceau tournant.**



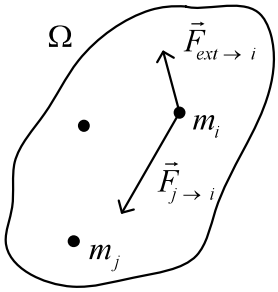
La position du cerceau est repérée par ψ, la position de la particule M sur le cerceau par θ. Tracer les figures de travail ; calculer $\vec{V}(M/R)$.

2.2 Approche classique dans la description des efforts, expression des principes associés

2.2.1 Modélisation des forces par un "champ de vecteurs", torseur d'action mécanique

- On appelle **"action mécanique"** tout phénomène physique susceptible de **mettre en mouvement ou de maintenir en place** un solide.

- Soit un système Ω de points matériels M_i, **on modélise par un vecteur** $\vec{F}_{\text{ext}\to i}$ **l'action d'une force** extérieure à Ω sur M_i et par $\vec{F}_{j\to i}$ l'action d'une force intérieure de M_j sur M_i.



version du 30 mai 2016

- On peut associer au vecteur $\vec{F}_{\text{ext}\to i}$ le torseur $\mathcal{F}_{\text{ext}\to i}$ dont le moment au point Q est noté :

$$\boxed{\vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}\to i}(Q) = \vec{F}_{\text{ext}\to i} \wedge \overrightarrow{M_iQ} \quad ,} \tag{2.6}$$

alors :

$$\boxed{\mathcal{F}_{\text{ext}\to i} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_{\text{ext}\to i} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{M_i} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_{\text{ext}\to i} \\ \vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}\to i}(Q) \end{array} \right\}_{Q} .} \tag{2.7}$$

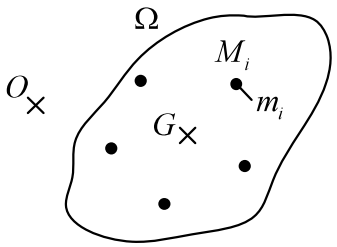
Le torseur $\mathcal{F}_{j\to i}$ associé à l'action de la force $\vec{F}_{j\to i}$ est construit de façon analogue.

2.2.2 Propriétés liées à la masse (centre d'inertie, torseurs cinétique et dynamique)

- Les principes de la mécanique (Newton, PFD) mettent en relation les forces exercées sur un système et ses mouvements par l'intermédiaire de quantités faisant intervenir sa répartition de masse.

- Le centre d'inertie G de Ω est défini par :

$$\boxed{m(\Omega)\,\overrightarrow{OG} = \sum_{\Omega} m_i\,\overrightarrow{OM_i}} \tag{2.8}$$

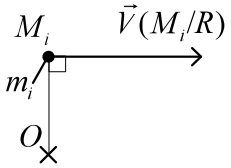


- La quantité de mouvement (= "de vitesse") est décrite par le torseur cinétique :

$$\boxed{\mathcal{C}_{M_i/R} = \left\{ \begin{array}{c} m_i\,\vec{V}(M_i/R) \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{M_i} = \left\{ \begin{array}{c} m_i\,\vec{V}(M_i/R) \\ m_i\,\vec{V}(M_i/R) \wedge \overrightarrow{M_iO} \end{array} \right\}_{O}} \tag{2.9}$$

On note $\vec{\sigma}_O(M_i/R)$ le moment cinétique développé par M_i en O, ce moment traduit une "quantité de mouvement de rotation" :

$$\boxed{\vec{\sigma}_O(M_i/R) = m_i\,\vec{V}(M_i/R) \wedge \overrightarrow{M_iO}} \tag{2.10}$$



- La quantité d'accélération est décrite par le torseur dynamique :

$$\boxed{\mathcal{D}_{M_i/R} = \left\{ \begin{array}{c} m_i\,\vec{\Gamma}(M_i/R) \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{M_i} = \left\{ \begin{array}{c} m_i\,\vec{\Gamma}(M_i/R) \\ m_i\,\vec{\Gamma}(M_i/R) \wedge \overrightarrow{M_iO} \end{array} \right\}_{O}} \tag{2.11}$$

On note $\vec{\delta}_O(M_i/R)$ le moment dynamique développé par M_i en O, ce moment traduit une "quantité d'accélération en rotation" :

$$\boxed{\vec{\delta}_O(M_i/R) = m_i\,\vec{\Gamma}(M_i/R) \wedge \overrightarrow{M_iO}} \tag{2.12}$$

version du 30 mai 2016

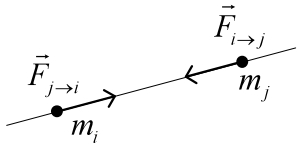
2.2.3 Expression "classique" des principes de la mécanique

- Les **lois de Newton** pour le système de points matériels Ω s'énoncent ainsi :

"il existe un référentiel R_g dit galiléen tel qu'à chaque instant sont vérifiés

1. le principe de l'action et de la réaction :

$$\forall i \neq j \quad \vec{F}_{i\to j} = -\vec{F}_{j\to i} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{M_iM_j} \wedge \vec{F}_{i\to j} = \vec{0}\ ; \tag{2.13}$$



2. le principe de l'inertie (encore appelé principe de composition des forces ou loi fondamentale de la dynamique) :

$$m_i\,\vec{\Gamma}(M_i/R_g) = \vec{F}_{\text{ext}\to i} + \sum_{i\neq j} \vec{F}_{j\to i}\text{".} \tag{2.14}$$

- Le **principe fondamental de la dynamique (PFD)** s'énonce ainsi :

"il existe un référentiel galiléen R_g tel que pour tout système matériel Ω, à chaque instant

$$\mathcal{D}_{\Omega/R_g} = \mathcal{F}_{\text{ext}\to\Omega}\text{".} \tag{2.15}$$

- **Les lois de Newton et le PFD sont équivalents.**

- **Exercice :**

1. montrer que Newton $\Rightarrow$ PDF (en sommant les contributions de toutes les particules du système) ;
2. montrer que PFD $\Rightarrow$ Newton (en isolant m_i, m_j puis $m_i + m_j$).

2.2.4 Illustration de la conservation de l'énergie, théorème de l'énergie cinétique

- Le théorème de l'énergie cinétique (TEC) se déduit du PFD en projetant, pour deux particules m_i et m_j, l'équilibre en résultante de m_i sur $\vec{V}(M_i/R_g)$:

$$\underbrace{m_i\,\vec{\Gamma}(M_i/R_g).\vec{V}_i}_{\frac{d}{dt}\left(m_i\frac{V_i^2}{2}\right)} = \underbrace{\vec{F}_{\text{ext}\to i}.\vec{V}_i}_{\text{puissance de }\vec{F}_{\text{ext}\to i}} + \underbrace{\vec{F}_{j\to i}.\vec{V}_i}_{\text{puissance de }\vec{F}_{j\to i}}\ , \tag{2.16}$$

en projetant celui de m_j sur $\vec{V}(M_j/R_g)$, puis en sommant les équations scalaires obtenues :

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\left(m_i\frac{V_i^2}{2} + m_j\frac{V_j^2}{2}\right)}_{\substack{\text{variation de l'énergie cinétique}\\ E_C \text{ du système}}} = \underbrace{\vec{F}_{\text{ext}\to i}.\vec{V}_i + \vec{F}_{\text{ext}\to j}.\vec{V}_j}_{\text{puissance des efforts extérieurs}} + \underbrace{\vec{F}_{j\to i}.\left(\vec{V}_i - \vec{V}_j\right)}_{\substack{\text{puissance des efforts intérieurs,}\\ \text{puissance mutuelle}}}, \tag{2.17}$$

il faut bien noter l'inversion des indices i et j entre $\vec{F}_{j\to i}$ et $\vec{V}_{i/j}$.

version du 30 mai 2016

- Le TEC est un bilan de puissance, il s'énonce ainsi :

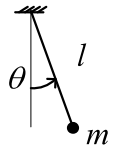
"la variation d'énergie cinétique d'un système matériel par rapport à un repère galiléen est égale, à tout instant, à la somme des puissances d'efforts intérieurs et extérieurs",

$$\left.\frac{dE_C}{dt}\right]_{R_g} = P_{ext} + P_{int}. \tag{2.18}$$

- Quelques commentaires sont nécessaires car ils introduisent des éléments qui seront repris dans les approches énergétiques qui vont suivre :

1. le TEC donne **1 équation scalaire** :
   — pour un problème 1D elle est équivalente au PDF mais on perd la notion de direction ;
   — plus tard, les équations de Lagrange pourront être vues, chacune, comme un TEC associé au degré de liberté relatif à l'équation.
2. P_{int} peut être interprétée comme associée à :
   — une déformation élastique, réversible (ressort interne) ;
   — une dissipation irréversible (frottement) ;
   — c'est la puissance développée par les efforts intérieurs au système.
3. P_{int} a deux propriétés intéressantes :
   — elle est **indépendante du référentiel** puisque seule $\vec{V}_{i/j}$ compte ;
   — **si le système est indéformable (rigidifiant),** $P_{int} = 0$.
4. Cette vision énergétique va inspirer d'Alembert : la présentation de son approche commence comme la démonstration du TEC.

- **Exercice : TEC appliqué à un pendule simple .**

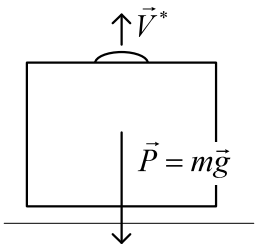


Exprimer l'équation du mouvement.

2.3 Approche énergétique de d'Alembert pour la description des efforts

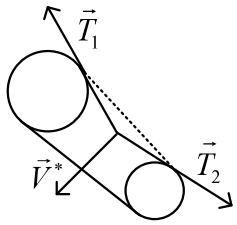
2.3.1 Notions de mouvement virtuel et de puissance virtuelle

- L'introduction de **mouvements virtuels pour évaluer des efforts** est assez naturelle : si on veut se rendre compte du **poids d'une valise** posée sur un plancher, on la soulève légèrement, ce qui représente son mouvement "virtuel" par opposition à son mouvement "naturel" qui est d'être posée sur le plancher. **Le mouvement virtuel introduit ici vise à évaluer le poids par le travail qu'on doit développer dans ce mouvement**.



version du 30 mai 2016

Si on veut apprécier la **tension d'une courroie d'alternateur** automobile, on l'éloigne avec le pouce de sa position d'équilibre, créant ainsi un **mouvement "virtuel" permettant de se rendre compte par le travail mis en jeu si la tension est correcte**. Comment traduire formellement cette expérience bien courante ?



▪ **La schématisation des efforts par le concept de puissance virtuelle repose sur une idée de d'Alembert (1750)**. Mathématiquement, il s'agit de relier une équation vectorielle et une relation fonctionnelle (scalaire) de la manière suivante :

$$\vec{A} = \vec{B} \Leftrightarrow \vec{A}.\vec{X} = \vec{B}.\vec{X} \quad \forall \vec{X}. \tag{2.19}$$

L'aspect variationnel de la formulation apparaît dans la nature quelconque de $\vec{X}$. Cette idée permet de passer de Newton à d'Alembert. Soit une particule matérielle M et une force $\vec{F}$ qui s'y applique :

— pour Newton, "il existe R_g tel que $\vec{F} = m\,\vec{\Gamma}(M/R_g)$" ;

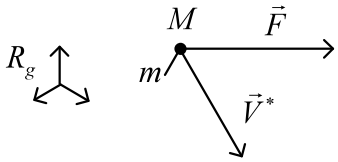
— pour d'Alembert on peut multiplier par $\vec{X}$ quelconque cette équation, si on assimile $\vec{X}$ à un mouvement virtuel $\vec{V}^\star$, on a $\vec{F}.\vec{V}^\star = m\,\vec{\Gamma}(M/R_g).\vec{V}^\star \quad \forall \vec{V}^\star$.

▪ Le principe de d'Alembert s'énonce ainsi : "il existe R_g tel que, pour tout mouvement virtuel, la puissance virtuelle des efforts extérieurs est égale à la puissance virtuelle de la quantité d'accélération de la particule", soit :

$$P^\star_{\text{ext}}(\overline{\Omega} \to \Omega) = P^\star_{\text{acc}}(M/R_g) \quad \forall \vec{V}^\star. \tag{2.20}$$

La puissance virtuelle associée à un mouvement virtuel donné est la fonction linéaire, à variables scalaires, de $\vec{V}^\star$ qui représente le travail mis en jeu par unité de temps dans les phénomènes excités par le mouvement considéré.

Les efforts sont ainsi parfaitement déterminés par la donnée de cette forme linéaire de type puissance sur l'espace vectoriel des mouvements virtuels constitué par les $\vec{V}^\star$.



2.3.2 Le principe des puissances virtuelles (PPV) généralisation du principe de d'Alembert

▪ **Le PPV est illustré ici sur un système de points matériels**. Pour chaque particule i, on applique le principe de d'Alembert puis on somme sur Ω les équations obtenues.

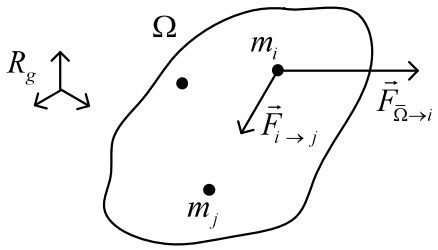
— La première étape donne :

$$P^\star_{\text{ext}}(\overline{M_i} \to M_i) = P^\star_{\text{acc}}(M_i/R_g) \quad \forall \vec{V_i}^\star. \tag{2.21}$$

— On sépare dans les efforts subis par M_i ceux exercés par l'extérieur de Ω de ceux exercés par les autres particules :

version du 30 mai 2016

$$\vec{F}(\overline{M_i} \to M_i) = \vec{F}(\overline{\Omega} \to M_i) + \sum_j \vec{F}(M_j \to M_i). \qquad (2.22)$$



— On développe l'expression de la puissance et on somme sur Ω :

$$\underbrace{\sum_i \vec{F}(\overline{\Omega} \to M_i).\vec{V_i}^\star}_{\text{puissance virtuelle des efforts ext. à }\Omega} + \underbrace{\sum_i \sum_j \vec{F}(M_j \to M_i).\vec{V_i}^\star}_{\text{puiss. virtuelle des intereffords dans }\Omega} = \underbrace{\sum_i m_i \vec{\Gamma}(M_i/R_g).\vec{V_i}^\star}_{\text{puiss. virtuelle des quantités d'accélération}} \quad \forall \vec{V_i}^\star \qquad (2.23)$$

— Soit :

$$P^\star_{\text{ext}}(\overline{\Omega} \to \Omega) + P^\star_{\text{int}}(\Omega) = P^\star_{\text{acc}}(\Omega/R_g) \quad \forall \vec{V_i}^\star \qquad (2.24)$$

▪ Ce qui précède illustre l'équivalence entre la loi fondamentale de la dynamique et le bilan de puissances virtuelles. mais dans les lois de Newton il y a aussi le principe de l'action et de la réaction : la partie du PPV qui y correspond est l'"axiome d'objectivité" (relation non montrée ici).

▪ **Enoncé du PPV :**

"il existe au moins un référentiel R_g, dit galiléen, tel qu'à chaque instant et pour tout système (ou sous-système) sont vérifiés

1. l'énoncé fondamental : dans tout mouvement virtuel la puissance virtuelle des quantités d'accélération est égale à la puissance virtuelle développée par tous les efforts, extérieurs et intérieurs, s'exerçant sur le système ;
2. l'axiome d'objectivité : dans tout mouvement virtuel rigidifiant, la puissance virtuelle des efforts intérieurs est nulle".

En abrégé :

$$\exists R_g \,/\, \forall \Omega \, \forall t \qquad (2.25)$$

$$P^\star_{\text{ext}} + P^\star_{\text{int}} = P^\star_{\text{acc}}(\Omega/R_g) \qquad \forall \vec{V}^\star \qquad (2.26)$$

$$P^\star_{\text{int}} = 0 \qquad \forall \vec{V}^\star \text{rigidifiant} \qquad (2.27)$$

Remarque : pour un mouvement rigidifiant, on a : $\vec{V_i}^\star = \vec{V_j}^\star + \vec{\Omega}^\star \wedge \overrightarrow{M_j M_i}$. La démonstration de cette relation sera donnée plus loin, dans le cadre de la cinématique du solide rigide.

2.3.3 Applications du PPV

▪ **Intérêt d'une représentation fonctionnelle des efforts**.

— En passant de Newton (ou du PFD) au PPV, on passe d'une formulation "forte" à une **formulation "faible"**. En effet, la fonctionnelle puissance virtuelle est nulle seulement sur un sous-espace : selon le **choix de l'espace vectoriel des mouvements virtuels**, on peut obtenir une **représentation mathématique plus ou moins fine de la réalité physique** qu'on veut représenter. Cela revient à ne retenir des composantes d'une équation vectorielle que celles qui nous intéressent selon le choix de $\vec{V}^\star$.

version du 30 mai 2016

— **Rapprochement :** dans la démonstration du TEC en 2.2.4, c'est comme si on projetait l'équation vectorielle d'équilibre sur les vecteurs d'une base bien choisie, successivement.

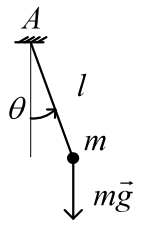
— **Exploitation du PPV dans la construction de théories :**

1. Si la description géométrique du mouvement est assez naturelle, la description des actions mécaniques est moins évidente. Grâce à la **dualité** mouvements-efforts contenue dans le PPV, la cohérence entre les deux descriptions est assurée. En mécanique du solide rigide, le lien entre torseur cinématique et torseur d'action mécanique est ainsi établi. En mécanique des milieux déformables, c'est le lien entre les structures mathématiques de $\underline{\underline{\epsilon}}$ et $\underline{\underline{\sigma}}$, en théorie des poutres (troisième partie de GMtc1), le lien entre torseur des efforts intérieurs et torseur des petits mouvements.
2. Le PPV permet de construire des **solutions approchées** : la méthode des **éléments finis** ou la méthode de **Rayleigh-Ritz** s'appuient sur un formalisme énergétique hérité du PPV.

- **La méthode des puissances virtuelles**, qui met en œuvre le PPV se décline en trois points :

1. choix de $\vec{V}^\star$;
2. calcul de $P^\star_{\text{int}}$, expression au besoin de l'axiome d'objectivité ;
3. Calcul de $P^\star_{\text{ext}}$ et $P^\star_{\text{acc}}$, expression de l'énoncé fondamental.

- **Exercice : choix de vitesses virtuelles adaptées à un objectif.**



Déterminer l'équation du mouvement et la réaction du fil par le PFD puis par le PPV.

version du 30 mai 2016

Chapitre 3

Modélisation du mouvement d'un système de solides rigides

3.1 *Cinématique d'un solide isolé, notion de paramétrage primitif*

3.1.1 *Définition du solide rigide, construction du torseur cinématique*

- Un solide rigide est un milieu continu **indéformable**.

- La relation entre la dérivée de $\overrightarrow{AB}$ dans R_S (base liée à S) et R est :

$$\left.\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_R = \left.\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{R_S} + \vec{\Omega}_{S/R} \wedge \overrightarrow{AB} \tag{3.1}$$

or $\left.\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right)_{R_S} = \vec{0}$ à cause de l'indéformabilité de S. On a donc :

$$\vec{V}(B, S/R) = \vec{V}(A, S/R) + \vec{\Omega}_{S/R} \wedge \overrightarrow{AB} \qquad \text{Formule de Varignon} \tag{3.2}$$

-

$$\boxed{\mathcal{V}_{S/R} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{S/R} \\ \vec{V}(A, S/R) \end{array} \right\} \qquad \text{est le } \textbf{torseur cinématique} \text{ de S dans son mouvement par rapport à R}} \tag{3.3}$$

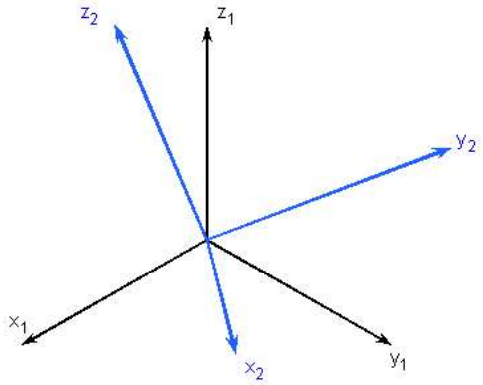
- Pour décrire le champ des vitesses d'un solide, **6 paramètres** suffisent :
  - 3 correspondant à la vitesse du solide,
  - 3 caractérisant son taux de rotation.

Ils définissent les **paramètres primitifs**. Ce sont les paramètres repérant S par rapport à R, sans tenir compte des liaisons (chaque solide est considéré comme libre).

3.1.2 *Paramètres de rotation, l'exemple des angles d'Euler, autres exemples*

- L'objectif est de passer d'une base de référence $R_0(\vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1})$ à une base $R_S(\vec{x_2}, \vec{y_2}, \vec{z_2})$ mobile liée à un solide. Les angles d'Euler constituent une possibilité classique de choix de paramètres.

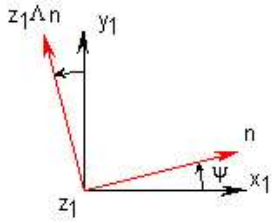
version du 30 mai 2016



Si $\vec{z_1}$ est différent de $\vec{z_2}$, le vecteur nodal se définit par exemple par :

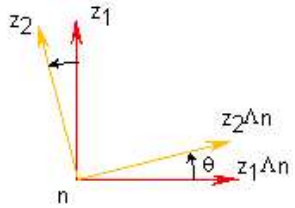
$$\vec{n} = \frac{\vec{z_1} \wedge \vec{z_2}}{\|\vec{z_1} \wedge \vec{z_2}\|} \tag{3.4}$$

Une première rotation autour de $\vec{z_1}$, la précession, permet de définir $\vec{n}$.



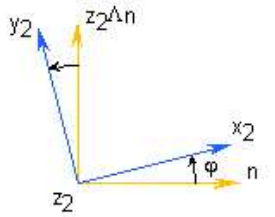
Précession ψ

Une rotation autour de $\vec{n}$, la nutation, permet de définir l'angle $(\vec{z_1}, \vec{z_2})$.



Nutation θ

Une rotation autour de $\vec{z_2}$, la rotation propre, permet de définir les positions de $\vec{x_2}$ et $\vec{y_2}$.



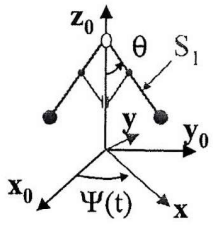
Rotation propre φ

$$\boxed{\vec{\Omega}_{S/R} = \dot{\phi}\vec{z_2} + \dot{\theta}\vec{n} + \dot{\psi}\vec{z_1}} \tag{3.5}$$

version du 30 mai 2016

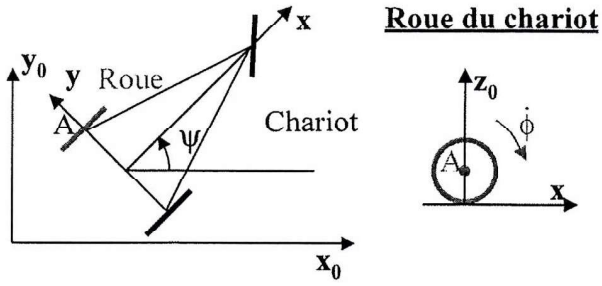
- On montre qu'à toute valeur de l'ensemble (ψ, θ, ϕ) correspond une orientation et une seule de S

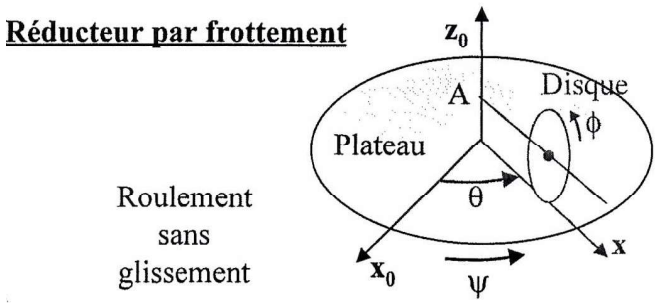
- Exercices : Construire le vecteur taux de rotation $\vec{\Omega}_{S/R}$



Le tachymètre de Watt.
S_1 est dans le plan $(\vec{y}, \vec{z_0})$

Chariot à 3 roues





3.1.3 Composition des torseurs cinématiques

- Dans le calcul du vecteur vitesse d'un point d'un solide par rapport à un repère, il est souvent plus facile de passer par l'intermédiaire d'autres repères dont les mouvements sont plus simples à caractériser

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{S/R_0} \\ \vec{V}(P, S/R_0) \end{array} \right\}_P = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{S/R} \\ \vec{V}(P, S/R) \end{array} \right\}_P + \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{R/R_0} \\ \vec{V}(P \in R/R_0) \end{array} \right\}_P} \tag{3.6}$$

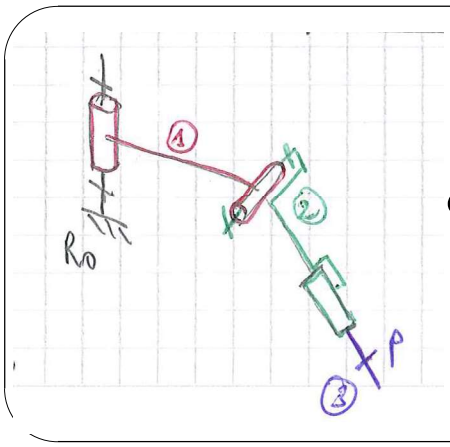
- La composition des taux de rotation pour les solides se pratique comme pour les bases associées à ces solides (cf 2.4)

- La composition des vitesses doit considérer un même point d'un solide comme mobile successivement par rapport à différentes bases.

version du 30 mai 2016

- $\vec{V}(P \in R/R_0)$ est la vitesse du point P coïncident dans R avec $P \in S$ à l'instant considéré : sa vitesse se calcule comme si P était fixe dans R (on adopte parfois des noms différents pour désigner chacun des points P selon le repère par rapport auquel on considère que ce point est fixe).

- Exercice : cinématique d'un bras de robot



Paramétrer la position de P
Calculer $\vec{V}(P,3/R)$ en utilisant les propriétés
de la composition de mouvement
Retrouver ce résultat par dérivation directe

3.1.4 *Construction de champs de vitesses virtuelles rigidifiants, formalisme général*

- Notons $q_i(t)$ les paramètres primitifs (ou coordonnées généralisées) définissant la position de S à l'instant t. Pour chaque point M de S on a

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}(q_i, t) \qquad \text{qui définit le } \textbf{mouvement réel i} \tag{3.7}$$

$$\vec{V}(M, S/R) = \sum_i \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial t} \tag{3.8}$$

- Dans l'espace des q_i (espace des configurations) la vitesse est resprésentée par **un vecteur $\vec{q}$ à 6 composantes tangent à la trajectoire** (à une petite correction près éventuelle, liée à la dépendance explicite de $\overrightarrow{OM}$ en temps). **Les q_i sont indépendants**.

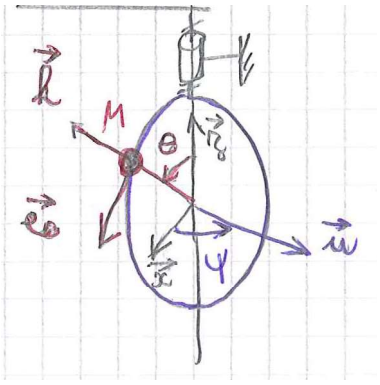
Dans un **mouvement virtuel quelconque**, le champ de vitesses virtuelles sera associé à un vecteur $\vec{q}^\star$ quelconque. Pratiquement, on calcule $\vec{V}(M, S/R)$ et on remplace les points $\dot{}$ par des $*$

$$\vec{V}^\star(M, S/R) = \sum_i \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_i} q_i^\star \tag{3.9}$$

On travaille à temps constant

- Illustration de l'intérêt de ce choix sur un cas de solide dégénéré :

version du 30 mai 2016



— Le cerceau est dans le plan $(\vec{u}, \vec{z})$

— On a montré que $\vec{V}(M/R_0) = a\dot{\theta}\vec{e_\theta} + a\dot{\psi}\sin\theta\,\vec{u}$
En règle générale, ces vitesses ne sont pas tangentes au cerceau, or la tangente en P au cerceau joue un rôle important dans l'identification des efforts s'exerçant sur M : il serait intéressant de former des vecteurs vitesse virtuelle ayant la direction de cette tangente.

— Dans le cas le plus général de vitesse virtuelle construite sur le paramétrage primitif, on a

$$\vec{V}^\star(M,S/R) = \frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial r}r^\star + \frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial\psi}\psi^\star + \frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial\theta}\theta^\star \tag{3.10}$$

expression adaptée au paramétrage retenu et qui permettra de découper les contributions de chaque paramètre aux puissances en jeu dans le PPV

▪ **Propriété fondamentale : le champ de vitesses ainsi contruit est rigidifiant, il a une structure de torseur**

— première étape pour le montrer : calculer $\dfrac{\partial\vec{V}}{\partial\dot{q}_i}$
Si les q_i sont indépendants et si $\dot{q}_i$ ne dépend pas des q_i (hypothèse) alors

$$\boxed{\frac{\partial\vec{V}}{\partial\dot{q}_i} = \frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial q_i}} \tag{3.11}$$

En effet les q_i et les $\dot{q}_i$ ne sont liés qu'une fois les conditions initiales posées : l'exemple du pendule l'illustre, à la verticale ($q_i = 0$) la vitesse $\dot{q}_i$ dépend de l'impulsion initiale seulement.

— deuxième étape : utiliser la formule de distribution des vitesses, dérivée. Soient M et N deux points du solide :

$$\frac{\partial\vec{V}(N,S/R)}{\partial\dot{q}_i} = \frac{\partial\vec{V}(M,S/R)}{\partial\dot{q}_i} + \frac{\partial}{\partial\dot{q}_i}\left(\vec{\Omega}_{S/R}\wedge\overrightarrow{MN}\right) \tag{3.12}$$

or $\overrightarrow{MN}$ ne dépend pas des $\dot{q}_i$, donc

$$\frac{\partial\vec{V}(N,S/R)}{\partial\dot{q}_i} = \frac{\partial\vec{V}(M,S/R)}{\partial\dot{q}_i} + \frac{\partial\vec{\Omega}_{S/R}}{\partial\dot{q}_i}\wedge\overrightarrow{MN} \tag{3.13}$$

d'où la forme générale de $\mathcal{V}^\star$:

$$\boxed{\mathcal{V}^\star = \sum_i \left\{\begin{array}{c}\frac{\partial\vec{\Omega}_{S/R}}{\partial\dot{q}_i}\\ \frac{\partial\vec{V}(M)}{\partial\dot{q}_i}\end{array}\right\}_M q_i^\star \quad = \sum_i \mathcal{V}_i q_i^\star} \tag{3.14}$$

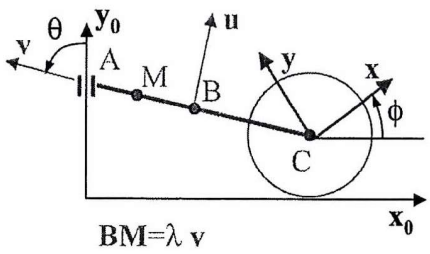
version du 30 mai 2016

On définit ainsi le vecteur taux de rotation virtuelle :

$$\boxed{\vec{\Omega}^\star = \frac{\partial \vec{\Omega}_{S/R}}{\partial \dot{q}_i} q_i^\star} \tag{3.15}$$

Les $\mathcal{V}_i$ sont appelés **torseurs de Lagrange**. Cette forme de la vitesse aura une grande utilité dans le calcul de $P^\star_{\text{acc}}$ à partir de l'énergie cinétique galiléenne réelle.

- Exemple : Construction de champs de vitesses virtuelles pour un système roulant



- proposer $\mathcal{V}^\star_{\text{tige}}$ en M
- proposer $\mathcal{V}^\star_{\text{roue}}$ en C

3.2 Cinématique des systèmes de solides, notion de liaison entre solides

3.2.1 Typologie des liaisons

- En général, le paramétrage primitif est surabondant, les paramètres étant liés par les **équations de liaison**.

- On distingue

— les **liaisons géométriques**, issues de l'interprétation de conditions géométriques de contact entre solides. Elles sont dites **holonomes** et se traduisent par des relations du type

$$\boxed{f(q_i, t) = 0} \tag{3.16}$$

— les **liaisons cinématiques**, issues de conditions portant sur les vitesses (non glissement par exemple). Elles sont dites **non-holonomes** et se traduisent par des relations non intégrables du type

$$\boxed{f(q_i, \dot{q}_i, t) = 0} \tag{3.17}$$

⚠ dans le cas où une équation de ce type est intégrable on la ramène à une équation holonome !

⚠ toutes ces liaisons peuvent être **unilatérales** ou **bilatérales**, les transitions entre états du système dans le cas de liaisons unilatérales sont gérées par des inéquations faisant intervenir les efforts de contact

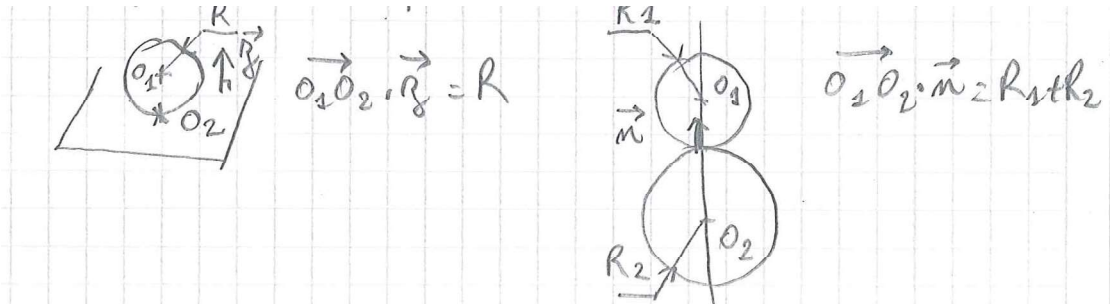
- Important : les équations de liaison holonomes permettent de **réduire le paramétrage** du système, c'est à dire de réduire le nombre d'inconnues de position ou d'orientation.

version du 30 mai 2016

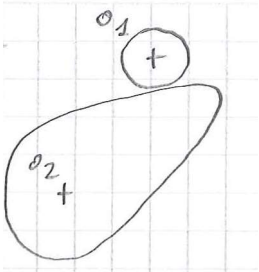
3.2.2 Démarche d'identification des équations de liaison

- Analyse des liaisons usuelles : la somme du nombre de degrés de liberté et du nombre d'équations de liaison vaut 6.

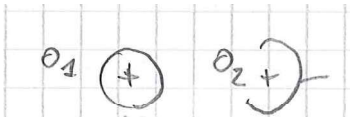
1. Exemples de liaisons ponctuelles



Cas plus compliqué : il faut connaître l'équation de la came



2. exemple de la liaison rotule



réalisée si $\overrightarrow{O_1O_2} = \vec{0}$

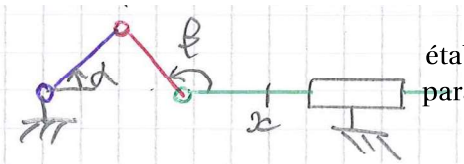
3. etc pour toutes les liaisons de la première partie du cours

- Équations de nature géométrique

— Si le mécanisme est en boucle ouverte (bras de robot), les paramètres cinématiques sont indépendants, et il n'y a PAS d'équation de liaison

— si le graphe de liaison présente des boucles, il faut recenser le nombre de boucles indépendantes (nombre cyclomatique = γ = nombre de liaisons - nombre de solides + 1) et pour chacune écrire les équations de fermeture de chaîne vectorielle et/ou angulaire (loi d'entrée-sortie)

Exercice : système bielle-manivelle



établir les relations géométriques entre les paramètres du système (on se place en 2D)

version du 30 mai 2016

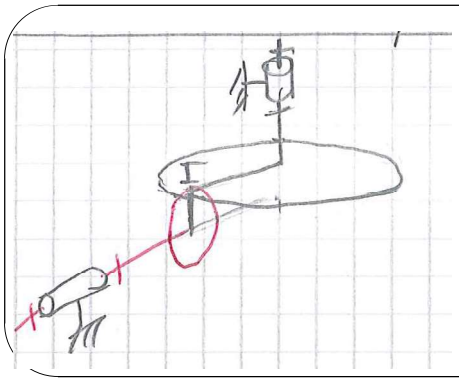
- Equations de nature cinématique

— le plus souvent, elles expriment une condition de roulement sans glissement au point de contact I de deux solides S_1 et S_2, on a alors :

$$\boxed{\vec{V}(I \in S_1/S_2) = \vec{0}} \tag{3.18}$$

⚠ dans l'expression des vitesses au point de contact, penser à exprimer la cinématique de chaque solide considéré au niveau d'un point dont le solide d'appartenance ne pose pas d'ambiguïté (point d'un axe par exemple) : c'est la problématique des points coïncidents

Exercice : variateur à plateau



déterminer la relation entre les vitesses angulaires des deux plateaux

3.2.3 Mouvements virtuels compatibles avec une liaison

- Définition : un mouvement virtuel est dit **licite**, ou **compatible**, s'il respecte les équations de liaison.

- Pour une liaison holonome :

$$f(q_i, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \tag{3.19}$$

$$\text{Les } q_i^\star \text{ doivent vérifier } \boxed{\frac{\partial f}{\partial q_i} q_i^\star = 0} \tag{3.20}$$

- Pour une liaison non holonome :
$f(q_i, \dot{q}_i, t) = 0$ se met souvent sous la forme

$$a_i(q_j, t)\dot{q}_i + b_i(q_j, t) = 0 \qquad \text{linéaire en } \dot{q}_i \tag{3.21}$$

les $q_i^\star$ doivent vérifier $a_i(q_j, t)q_i^\star = 0$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial \dot{q}_i} q_i^\star = 0$

- Remarque : si les équations de liaison dépendent du temps (cf $\frac{\partial f}{\partial t}, b$), on a des obstacles mobiles. La liaison est **rhéonome** ; si les obstacles sont fixes les liaisons sont **scléronomes**. Dans le cas d'obstacles mobiles, le mouvement réel n'est pas un mouvement virtuel particulier compatible avec la liaison...

version du 30 mai 2016

- Dans l'espace des q_i (espace des configurations) une liaison holonome est représentée par une surface d'équation $f(q_i, t) = 0$. Un point de cette surface (position du système respectant la liaison) est repéré par :
  - les q_i tels que $f(q_i, t) = 0$
  - des q'_i représentant un paramétrage réduit, interne à la surface, alors $\vec{V}^\star(M, S/R) = \dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q'_i} q'^\star_i$ respecte la liaison.

- Concrètement : après réduction du paramétrage par des liaisons holonomes, les mouvements virtuels construits sur les paramètres respectent les liaisons.

- Attention : restreindre le PPV aux mouvements licites limite l'accès à certaines informations, des inconnues de liaison par exemple.

version du 30 mai 2016

version du 30 mai 2016

Chapitre 4

Modélisation des efforts intérieurs et extérieurs s'exerçant sur un système de solides rigides

4.1 *Vision énergétique de la modélisation des actions mécanique par un torseur*

4.1.1 *Puissance virtuelle des efforts extérieurs et dualité $\mathcal{V}^* \leftrightarrow \mathcal{F}_{ext\to S}$*

- Soit un solide S : les efforts exercés par l'extérieur sur S peuvent être décrits par la forme linéaire P^*_{ext} définie sur l'espace des mouvements virtuels de S (cf 2.3.1), ainsi

$$\mathcal{V}^*_{S/R} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\omega}^*_{S/R} \\ \vec{V}^*(A,S/R) \end{array} \right\}_A \quad \text{est associée à } P^*_{\text{ext}} = \overrightarrow{R_A}.\vec{V}^*(A,S/R) + \overrightarrow{M_A}.\vec{\omega}^*_{S/R} \tag{4.1}$$

à ce stade, les quantités $\overrightarrow{R_A}$ et $\overrightarrow{M_A}$ sont de simples objets mathématiques dont on cherche à caractériser les propriétés.

- En supposant que P^*_{ext} est intrinsèque, c'est à dire qu'elle ne dépend pas du point où on l'exprime, on a :

$$\begin{aligned} P^*_{\text{ext}} &= \overrightarrow{R_B}.\vec{V}^*(B,S/R) + \overrightarrow{M_B}.\vec{\omega}^*_{S/R} && (4.2)\\ &= \overrightarrow{R_B}.(\vec{V}^*(A,S/R) + \vec{\omega}^*_{S/R} \wedge \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{M_B}.\vec{\omega}^*_{S/R} && (4.3)\\ &= \overrightarrow{R_A}.\vec{V}^*(A,S/R) + \overrightarrow{M_A}.\vec{\omega}^*_{S/R} && (4.4) \end{aligned}$$

quels que soient $\vec{V}^*(A,S/R)$ et $\vec{V}^*(B,S/R)$, donc

$$\overrightarrow{R_A} = \overrightarrow{R_B} \tag{4.5}$$

$$\overrightarrow{M_A} = \overrightarrow{M_B} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{R_A} \quad \text{(double permutation dans le produit mixte pour isoler } \vec{\omega}^*_{S/R}\text{)} \tag{4.6}$$

- La structure de torseur du torseur d'action mécanique est donc héritée, via le concept de puissance virtuelle de la cinématique choisie, on note :

$$\boxed{\mathcal{F}_{\text{ext}\to S} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{\text{ext}\to S} \\ \vec{M}(A,\text{ext}\to S) \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{\text{ext}\to S} \\ \vec{M}(A,\text{ext}\to S) + \vec{R}_{\text{ext}\to S} \wedge \overrightarrow{AB} \end{array} \right\}_B} \tag{4.7}$$

- Remarque : tout modèle plus raffiné est inutile, ce n'est pas le détail des efforts qui va compter pour l'équilibre, mais le torseur résultant.

version du 30 mai 2016

4.1.2 Notion de force généralisée, associée aux actions mécaniques extérieures

- Définition : la puissance virtuelle des efforts extérieurs apparaît comme le comoment du torseur des efforts et du torseur cinématique virtuel

$$\boxed{P^*_{\text{ext}} = \mathcal{F}_{S\to R} \otimes \mathcal{V}^*_{S/R} = \vec{R}_{\text{ext}\to S}.\vec{V}^*(A, S/R) + \vec{M}(A, ext \to S).\omega^*_{S/R}} \tag{4.8}$$

- En écrivant les vitesses virtuelles sous leur forme générique faisant intervenir les paramètres q_i^* (3.1.4), la puissance apparaît comme une forme linéaire des q_i^*. En effet, avec

$$\vec{V}^*(A, S/R) = \sum_i \frac{\partial \overrightarrow{OA}}{\partial q_i} q_i^* \tag{4.9}$$

et

$$\vec{\omega}^*_{S/R} = \sum_i \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial \dot{q}_i} q_i^* \tag{4.10}$$

P^*_{ext} devient

$$P^*_{\text{ext}} = \sum_i \left(\vec{R}_{\text{ext}\to S}.\frac{\partial \overrightarrow{OA}}{\partial q_i} + \vec{M}(A, ext \to S).\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial \dot{q}_i} \right) q_i^* \tag{4.11}$$

$$= \sum_i Q_i q_i * \tag{4.12}$$

- Les Q_i sont appelés "**coefficients énergétiques** associés à q_i^*", ou "**forces généralisées**". Les Q_i apparaissent comme une projection des efforts sur les fonctions $\overrightarrow{OA}$, adaptée au paramétrage retenu. Les contributions de chaque paramètre aux puissances d'efforts extérieurs sont ainsi découplées. **Les efforts extérieurs imposés se cachent dans les** Q_i.

4.1.3 Et les efforts intérieurs ?

- Les mouvements virtuels d'un solide étant rigidifiants, l'axiome d'objectivité (du PPV) impose que la puissance virtuelle associée aux efforts intérieurs soit nulle.

$$\boxed{P^*_{\text{int}} = 0} \tag{4.13}$$

- Les **efforts intérieurs au solide**, ou **efforts de cohésion**, n'apparaîtront pas dans les équations et resteront donc indéterminés dans ce cours consacré aux solides rigides.

  — Dans la partie "Théorie des poutres" du cours de GMtc1, des cinématiques de milieu déformable seront construites pour "faire travailler" et calculer les efforts assurant la résistance des poutres.

4.1.4 Adaptation du formalisme energétique aux actions mécaniques de liaison

- Le besoin : les liaisons introduisent une limitation du mouvement, ceci est pris en compte par les équations de liaison introduites au chapitre 3.2. Leur réalisation technologique va induire différents types d'efforts, dépendant :

  — des surfaces de contact (efforts de réaction entre les solides) ;

version du 30 mai 2016

— des matériaux en contact (frottements) ;
— des mouvements relatifs (frottement, traînée visqueuse, effet ressort...) ;
— ...

Les lois de comportement de liaison vont préciser ces dépendances
Le torseur de liaison le plus quelconque,

$$\mathcal{F}_{1\to 2} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{1\to 2} \\ \vec{M}(A, 1\to 2) \end{array} \right\}_A \qquad \text{qui a 6 composantes scalaires}$$

verra ainsi son nombre d'inconnues d'effort diminué du nombre de lois de comportement introduites (on fera le parallèle avec le passage du paramétrage cinématique primitif au paramétrage strict ou réduit)

- La puissance virtuelle des efforts de liaison, ou inter-efforts entre deux solides, s'exprime, quand on isole l'ensemble des deux solides 1 et 2, par

$$P^*_{1\leftrightarrow 2} = \mathcal{F}_{1\to 2} \otimes \mathcal{V}^*_{2/R} + \mathcal{F}_{2\to 1} \otimes \mathcal{V}^*_{1/R} \tag{4.14}$$

Le principe de l'action / réaction s'écrit, pour un système de solides (anticipation sur les chapitres suivants) par la relation entre torseurs suivante

$$\mathcal{F}_{1\to 2} = -\mathcal{F}_{2\to 1}$$

d'où

$$\boxed{P^*_{1\leftrightarrow 2} = \mathcal{F}_{1\to 2} \otimes \mathcal{V}^*_{2/1}} \tag{4.15}$$

- Propriété : la puissance mutuelle des actions de liaison est indépendante du référentiel

- Comme en 4.1.2 avec les efforts extérieurs, on définit des **forces généralisées de liaison**, ou **coefficients énergétiques de liaison**

$$\boxed{P^*_{1\leftrightarrow 2} = \sum_i L_i q^*_i} \tag{4.16}$$

C'est dans les L_i que se cachent ls inconnues d'efforts de liaison

4.1.5 Fonctions de force et de dissipation

- Pour **certains type d'efforts**, il existe une **façon simplifiée** de calculer P^*_{ext} ou $P^*_{1\leftrightarrow 2}$, en particulier les actions associées au **champ de pesanteur**, ou exercées par un **ressort** ou un **amortisseur**.

- Définition : un champ de forces donné **dérive de la fonction de force** $U(q_i, t)$ si la puissance virtuelle qu'il développe peut s'écrire

$$P^* = \sum_i \frac{\partial U(q_i, t)}{\partial q_i} q^*_i \tag{4.17}$$

$$\text{alors} \quad Q_i = \frac{\partial U(q_i, t)}{\partial q_i} \tag{4.18}$$

- Des exemples seront développés dans la partie 4.2

version du 30 mai 2016

4.2 Modélisation des actions mécaniques localisées au voisinage d'un point d'un solide

4.2.1 Cas d'une action à distance : la pesanteur, modélisée par une force volumique

- Sous certaines hypothèses (l'effet centrifuge de la rotation de la terre est négligeable, la vitesse des solides considérés reste "faible", les solides se déplacent peu par rapport au rayon de la terre...), l'effet de la pesanteur sur uneparticule de masse dm située en M est modélisable par

$$d\mathcal{F}_{pes\to dm} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{g}\,dm \\ \vec{0} \end{array} \right\}_M \tag{4.19}$$

- La somme des contributions de toutes les particules d'un solide s'écrit :

$$\mathcal{F}_{pes\to S} = \int_S d\mathcal{F}_{pes\to dm} = \left\{ \begin{array}{c} \int_S \vec{g}\,dm \\ \int_S \vec{g}\,dm \wedge \overrightarrow{MQ} \end{array} \right\}_Q \tag{4.20}$$

et puisque $\vec{g}$ est constant, il vient

$$\int_S \vec{g}\,dm = m\vec{g} \quad m \text{ masse totale de } S \tag{4.21}$$

$$\int_S \vec{g}\,dm \wedge \overrightarrow{MQ} = m\vec{g} \wedge \overrightarrow{GQ} \quad \text{avec } G \text{ défini en 2.2.2} \tag{4.22}$$

G est le centre de masse (ou centre d'inertie) de S, pour de "petits" objets G est confondu avec le centre de gravité, point d'application du poids.

- D'où la version utilisée en pratique :

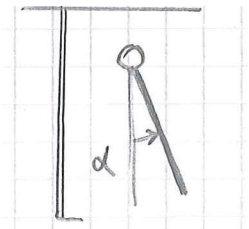
$$\boxed{\mathcal{F}_{pes\to S} = \left\{ \begin{array}{c} m\vec{g} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G} \tag{4.23}$$

- Le poids est associé à la fonction de force

$$\boxed{\begin{array}{ll} & U_{pes} = m\vec{g}.\overrightarrow{O_0G} + U_0 \\ O_0 & \text{point fixe du repère galiléen} \\ U_0 & \text{constante arbitraire} \end{array}} \begin{array}{l} (4.24) \\ (4.25) \\ (4.26) \end{array}$$

- Dans ce cas la fonction de force peut être identifiée à l'opposée de l'énergie potentielle (de pensanteur)

Exercice : Soit une tige de masse M en rotation dans le plan.



Calculer le coefficient énergétique associé au paramètre α

— directement par P^*_{ext}

— en utilisant la fonction de force

version du 30 mai 2016

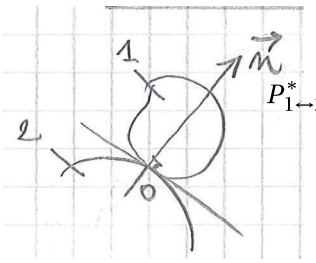
4.2.2 Classification des liaisons ponctuelles en fonction de leur loi de comportement

- **Liaisons parfaites**

Par définition une liaison parfaite entre deux solides 1 et 2 est telle que $P^*_{1\leftrightarrow 2} = 0$ pour tout mouvement virtuel compatible avec la liaison.

- Liaison ponctuelle parfaite

ici $\vec{V}^*(O,1/2)$ est compatible avec la liaison si
$\vec{V}^*(O,1/2).\vec{n} = 0$



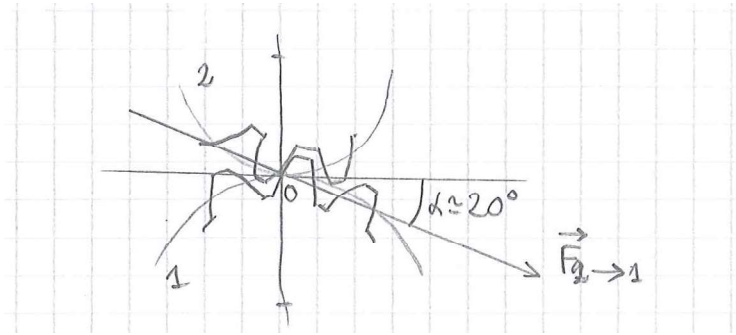
$$P^*_{1\leftrightarrow 2} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\mathbb{R}}_{2\to 1} \\ \vec{M}(O,2\to 1) \end{array} \right\}_O \otimes \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}^*_{1/2} \\ \vec{V}(O,1/2)^* \end{array} \right\}_O = 0 \quad \forall \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}^*_{1/2} \\ \vec{V}(O,1/2)^* \end{array} \right\}_O \text{ compatible} \tag{4.27}$$

entraîne $\vec{R}(2\to 1) = N(2\to 1)\vec{n}$ et $\vec{M}(O,2\to 1) = \vec{0}$

$$\boxed{\mathcal{F}_{2\to 1} = \left\{ \begin{array}{c} N(2\to 1)\vec{n} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_O} \tag{4.28}$$

La loi de comportement a permis d'éliminer cinq inconnues d'effort de liaison (il y a en fait ici 5 lois scalaires).

Exemple : le contact entre dents d'un engrenage est souvent modélisé par une liaison ponctuelle parfaite



- Liaison ponctuelle non parfaite, lois de frottement de Coulomb

Les lois de Coulomb établissent des relations entre la force de réaction normale au contact $N(2\to 1)\vec{n}$ et les autres composantes du torseur $\mathcal{F}_{2\to 1}$ en fonction des cinématiques de contact.

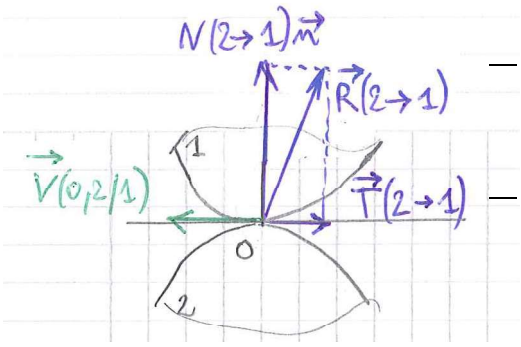
Différents cas sont envisageables :

— glissement / non glissement,

— roulement ($\vec{\Omega}(1/2)$ dans le plan tangent au contact),

— pivotement ($\vec{\Omega}(1/2)$ porté par $\vec{n}$)

version du 30 mai 2016



— s'il y a glissement $\vec{V}(O,2/1) \neq \vec{0}$ alors $\vec{T}(2 \rightarrow 1) = -f_{dyn}|N(2\rightarrow 1)|\frac{\vec{V}(O,2/1)}{\|\vec{V}(O,2/1)\|}$

— s'il n'y a pas glissement $\vec{V}(O,2/1) = \vec{0}$ alors $\left\|\vec{T}(2\rightarrow 1)\right\| \leqslant f_{stat}|N(2\rightarrow 1)|$

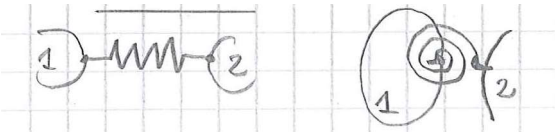
— dans le cas du roulement ou du pivotement, des lois analogues peuvent être définies

— ces lois sont à la base de la construction de lois plus complexes relatives à des contacts surfaciques frottants, on peut ainsi élaborer, selon la géométrie , des lois de comportement de rotules ou de pivots, etc, non parfaits

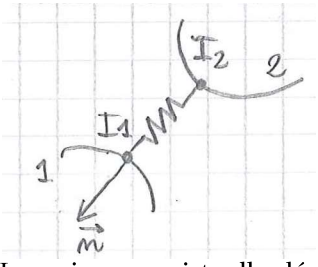
4.2.3 Actions mécaniques exercées par les ressorts et les amortisseurs

▪ Remarque : ce sont les **seuls éléments déformables** introduits dans cette partie du cours, néanmoins leur prise en compte est un pas vers une formulation couplée entre solides rigides et solides déformables (comme ceux issus du cours d'éléments finis ou de MMC).

▪ Restriction : les éléments agissant en traction compression sont les seuls traités ici, mais leur formulation peut être généralisée aux ressorts et amortisseurs de torsion.



▪ Ressort de traction compression



$$\boxed{\mathcal{F}_{ress\rightarrow 1} = \left\{ \begin{array}{c} -k(l-l_0)\vec{n} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{I_1} \quad \text{avec } l = I_1I_2 \text{ , } l_0 \text{ longueur à vide}} \tag{4.29}$$

$$\mathcal{F}_{ress\rightarrow 2} = -\mathcal{F}_{ress\rightarrow 1} \quad \text{(ressort non pesant)} \tag{4.30}$$

La puissance virtuelle développée par l'effort du ressort sur le système contenant 1 et 2 s'écrit

$$P^*_{1\leftrightarrow 2} = \mathcal{F}_{ress\rightarrow 1} \otimes \mathcal{V}^*_{1/0} + \mathcal{F}_{ress\rightarrow 2} \otimes \mathcal{V}^*_{2/0} \tag{4.31}$$

$$= -k(l-l_0)\vec{n}\sum_i \frac{\partial \overrightarrow{O_0I_1}}{\partial q_i} q_i^* + k(l-l_0)\vec{n}\sum_i \frac{\partial \overrightarrow{O_0I_2}}{\partial q_i} q_i^* \tag{4.32}$$

$$= \sum_i k(l-l_0)\vec{n}\sum_i \frac{\partial \overrightarrow{I_1I_2}}{\partial q_i} q_i^* \tag{4.33}$$

or $k(l-l_0)\vec{n}\frac{\partial \overrightarrow{I_1I_2}}{\partial q_i} = \frac{1}{2}k\frac{\partial}{\partial q_i}\left((l-l_0)\vec{n}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{\partial k(l-l_0)^2}{\partial q_i}$

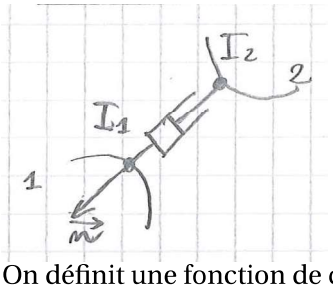
version du 30 mai 2016

ce qui permet d'identifier la fonction de force U_{ress}, opposée au potentiel élastique

$$\boxed{U_{ress} = -\frac{1}{2}k(l-l_0)^2 + U_0} \tag{4.34}$$

Généralisation à un ressort de torsion...

- Amortisseur de traction compression



$$\boxed{\mathcal{F}_{mor\to 1} = \left\{ \begin{array}{c} -d\dot{l}\vec{n} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{I_1}} \tag{4.35}$$

On définit une fonction de dissipation Φ_{am}, de "dissipation visqueuse" par

$$\boxed{\Phi_{am} = \frac{1}{2}d\dot{l}^2 + \Phi_0} \tag{4.36}$$

⚠attention, ici $Q_i = -\dfrac{\partial \Phi_{am}}{\partial \dot{q}_i}$

- Exemple d'application : en supposant la déformabilité localisée aux frontières d'un solide, on peut définir des modèles de suspensionsue "lit de ressorts". En génie civil, c'est le cas du modèle de fondation de Winckler.

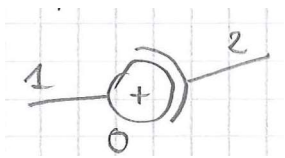
- Les lois de comportement élastiques (ou visqueuses) lient les forces de liaison à la cinématique (en déplacement ou en vitesse) selon des lois linéaires (dans le cas de l'élasticité linéaire)

4.3 Modélisation des actions mécaniques dans les liaisons usuelles

4.3.1 Liaisons usuelles parfaites

- Leurs torseurs d'actions transmissibles sont complémentaires du torseur cinématique au sens de la puissance virtuelle mutuelle.

Exemple de la liaison rotule



$$\mathcal{V}^*_{1/2} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}^*_{2/1} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_O \tag{4.37}$$

$$\mathcal{F}_{1\to 2} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{1\to 2} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_O \tag{4.38}$$

- Plus de détails dans le tableau de la première partie du cours de GMtc1

4.3.2 Liaisons non parfaites

- Attention ! Même si le mouvement est compatible avec la liaison, $P^\star_{1\leftrightarrow 2}$ est non nul car la liaison dissipe

Exemple vu en TD : toupie avec frottement visqueux

version du 30 mai 2016

4.4 Éléments de stratégie dans la modélisation des efforts de liaison

4.4.1 Sur le rôle des lois de comportement de liaison

- Ce lois permettent de **préciser une partie des inconnues de liaison**, qui deviennent en quelque sorte des efforts donnés (en fonction d'autres inconnues...)

- Le choix de ces lois fait **partie intégrante du modèle** du système.

4.4.2 Sur le lien entre le paramétrage cinématique (primitif ou réduit) et les efforts de liaison

- Il est inutile d'expliciter les efforts de liaison dont on sait d'avance qu'ils ne vont **pas travailler** : c'est le cas des **liaisons parfaites compatibles avec les champs virtuels retenus** ; c'est aussi le cas des **liaisons ponctuelles avec frottement de Coulomb** quand il y a **roulement sans glissement** dans le champ virtuel. Leur contribution aux coefficients énergétiques sera nulle.

- Au contraire, il faudra expliciter les efforts intervenant dans des liaisons non parfaites ou **brisées volontairement** par la cinématique virtuelle a**fin justement de les évaluer**.

4.4.3 Traitement d'inéquations éventuelles

- Elles peuvent être issues des lois de Coulomb par exemple. Elles servent à définir les domaines de validité du modèle après résolution : par exemple pour détecter la transition entre un régime de non glissement et un régime de glissement dans un contact frottant.

  Exemple (revu en TD) : Cylindre roulant sur un autre

4.5 Bilan intermédiaire

— on sait calculer $P^\star_{\text{ext}}$, $P^\star_{\text{int}}$, $P^\star_{\text{liaison}}$

— il faut maintenant tenir compte du lien entre masse et mouvement pour obtenir

  — le torseur dynamique

  — $P^\star_{\text{acc}}$

version du 30 mai 2016

Chapitre 5

Conservation de la masse - Formules de cinétique pour les solides rigides

5.1 Expression du torseur cinétique exploitant la cinématique de corps rigide et la conservation de la masse

5.1.1 Pourquoi un torseur cinétique ? Noté $\mathcal{C}_{S/R}$

- Dans le cas des systèmes de masses ponctuelles (2.2) on a vu que les torseurs d'action mécanique équilibraient un torseur représentatif de la quantité d'accélération. Il est donc intéressant de construire un torseur analogue pour les solides rigides, par intégration des contributions de chaque particule du solide. Une étape vers la construction de ce torseur est la construction d'un **torseur associé aux quantités de mouvement**.

- Par ailleurs, l'énergie cinétique peut être vue comme le produit pour chaque particule matérielle de sa vitesse par sa quantité de mouvement : le torseur cinétique sera **construit pour que son comoment avec le torseur cinématique donne l'énergie cinétique** du solide considéé, d'où son nom.

5.1.2 Justification de la structure de torseur, héritée de celle de $\mathcal{V}_{S/R}$

- On cherche à caractériser $\vec{\sigma}_A(S/R)$ moment cinétique en A de S/R sachant que la qualtité de mouvement de S vaut

$$\vec{p}(S/R) = \int_S \vec{V}(M/R)dm \tag{5.1}$$

-

$$Ec(S/R) = \frac{1}{2}\left\{\begin{array}{c}\vec{p}(S/R)\\ \vec{\sigma}(S/R)\end{array}\right\}_A \otimes \left\{\begin{array}{c}\vec{\Omega}(S/R)\\ \vec{V}(A,S/R)\end{array}\right\}_A \quad \text{est imposé} \tag{5.2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\vec{p}(S/R)\vec{V}(A,S/R) + \vec{\sigma}(S/R)\vec{\Omega}(S/R)\right) \tag{5.3}$$

-

$$Ec(S/R) = \frac{1}{2}\int_S \vec{V}(M,S/R)\vec{V}(M,S/R)dm \quad \text{par définition} \tag{5.4}$$

version du 30 mai 2016

- Or comme S est un solide, : $\vec{V}(M,S/R) = \vec{V}(A,S/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{AM}$

En injectant cette expression dans 5.4 et en égalant les seconds termes de 5.3 et la nouvelle 5.4, on a, vu que l'égalité doit être valable pour tout $\vec{\Omega}(S/R)$:

$$\boxed{\vec{\sigma}_A(S/R) = \int_S \vec{V}(M,S/R) \wedge \overrightarrow{MA} dm} \tag{5.5}$$

- La relation de transport vers un point B se démontre en posant $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA}$ dans la définition de $\vec{\sigma}_A(S/R)$

5.1.3 Comment la conservation de la masse conduit à une expression condensée de $\mathcal{C}_{S/R}$ s'appuyant sur de nouveaux concepts (centre de masse, opérateur d'inertie)

- Définition de principe : la masse d'un système matériel S que l'on suit dans son mouvement est constante au cours du temps, avec $m(S,t) = \int_S \rho dV = \text{cte}$, ρ densité volumique

$\frac{dm}{dt} = 0$ implique $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}\rho\vec{V} = 0$, équation de continuité

- Conséquence pour l'intégration de fonction génériques $h(M,t)$ relativement à la densité volumique :

$$H(t) = \int_S h(M,t)\rho dv \tag{5.6}$$

alors $\frac{dH}{dt} = \int_S \frac{\partial h\rho}{\partial t} + \text{div}h\rho\vec{V}$

en développant pour faire apparaître l'équation de continuité, il vient

$$\frac{dH}{dt} = \frac{d}{dt}\int_S h\rho dv = \int_S \frac{\partial h}{\partial t}\rho dv \tag{5.7}$$

Cette formule de dérivation sous le signe comme est très utile pour simplifier les quantités élémentaires intégrées sur S : énergie cinétique, quantité de mouvement, moment cinétique etc. En bref, la conservation de la masse est cachée dans toutes les expressions condensées associées à un solide.

- Forme condensée de la résultante du torseur cinétique

$$\int_S \vec{V}(M/R)dm = \int_S \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_R dm = \frac{d}{dt}\int_S \overrightarrow{OM}dm \tag{5.8}$$

or le centre d d'inertie G de S est défini par

$$\int_S \overrightarrow{OM}dm = m\overrightarrow{OG} \tag{5.9}$$

d'où

$$\boxed{\int_S \vec{V}(M/R)dm = m\vec{V}(G/R)} \tag{5.10}$$

- Connaissant la masse de S et la vitesse de son centre d'inertie, on a facilement la résultante de $\mathcal{C}_{S/R}$

version du 30 mai 2016

- Forme condensée du moment cinétique

$$\vec{\sigma}_A(S/R) = \int_S \vec{V}(M,S/R) \wedge \overrightarrow{MA} dm \tag{5.11}$$

$$= \int_S \left(\vec{V}(A,S/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{AM}\right) \wedge \overrightarrow{MA} dm \tag{5.12}$$

$$= \int_S \vec{V}(A,S/R) \wedge \overrightarrow{MA} dm + \int_S \left(\vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{AM}\right) \wedge \overrightarrow{MA} dm \tag{5.13}$$

$$= \left(\int_S \overrightarrow{AM} dm\right) \wedge \vec{V}(A,S/R) + \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \left(\vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{AM}\right) dm \tag{5.14}$$

$$\boxed{\vec{\sigma}_A(S/R) = m\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}(A,S/R) + \mathbb{I}_S(A)\vec{\Omega}(S/R)} \tag{5.15}$$

avec $\mathbb{I}_S(A)$ l'opérateur d'inertie de S exprimé au point A, introduit sous forme matricielle car le second membre de 5.14 est une fonction linéaire de $\vec{\Omega}(S/R)$

Pratiquement on calculera $\vec{\sigma}_A(S/R)$ soit en un **point fixe**, soit au **centre d'inertie** pour simplifier les calculs. $\mathbb{I}_S(A)$ étant intrinsèque au solide sera calculé par ailleurs (en 5.2). Pour avoir le moment cinétique au point souhaité on utilisera alors la **formule de transport** du torseur cinétique.

5.2 Description de la répartition de masse dans un solide

5.2.1 Centre d'inertie

- L'obtention de la position de G fait intervenir des intégrales de volume (formule de Fubini), les théorèmes de Guldin ainsi que les propriétés liées à l'additivité ou aux symétries.

- Plus de détail dans
  - le formulaire technique Gieck
  - Mécanique du solide - P. Agati, Y. Brémont, G. Delville
  - dans le menu "propriétés du solide" de votre logiciel de CAO préféré

5.2.2 Opérateur d'inertie d'un solide

- L'interprétation de la matrice $\mathbb{I}_S(A)$ se fait en disposant dans les colonnes de $\mathbb{I}_S(A)$ les transformées des vecteurs de base
  - notons $\vec{J}_A(S,\vec{u})$ l'opérateur qui à tout vecteur $\vec{u}$ fait correspondre $\mathbb{I}_S(A)\vec{u} = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{AM}\right) dm$
  - $\overrightarrow{AM} = x\vec{x} + y\vec{y} + z\vec{z}$
  - alors

$$\vec{J}_A(S,\vec{x}) = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \left(\vec{x} \wedge \overrightarrow{AM}\right) dm \tag{5.16}$$

$$= \int_S \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) dm \tag{5.17}$$

$$= \int_S \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ y \end{pmatrix} dm = \int_S \begin{pmatrix} y^2+z^2 \\ -xy \\ -xz \end{pmatrix} dm \tag{5.18}$$

version du 30 mai 2016

d'où

$$\boxed{\mathbb{I}_S(A) = \begin{pmatrix} \int_S (y^2+z^2)\,dm & \int_S (-yx)\,dm & \int_S (-zx)\,dm \\ \int_S (-xy)\,dm & \int_S (x^2+z^2)\,dm & \int_S (-zy)\,dm \\ \int_S (-xz)\,dm & \int_S (-yz)\,dm & \int_S (x^2+y^2)\,dm \end{pmatrix}_A} \tag{5.19}$$

- Les termes diagonaux sont les moments d'inertie de S (par rapport à la droite $(A, \vec{x})$ par exemple pour le terme $\int_S (y^2+z^2)\,dm$).

On note $\boxed{I_\Delta = \vec{\delta}.\left(\mathbb{I}_S(A)\,\vec{\delta}\right)}$ le moment d'inertie de S par rapport à la droite $\Delta(A, \vec{\delta})$ avec $\vec{\delta}$ unitaire quelconque. I_Δ caractérise la répartition des masses de S autour de Δ et la difficulté à le mettre en rotation.

- Les opposés des termes extra diagonaux sont les produits d'inertie caractérisant l'absence de symétrie dans la répartition des masses et les effets de balourd : la rotation autour de $\vec{x}$ engendre ainsi des effets selon $\vec{y}$ caractérisés par $\int_S xy dm$, ainsi que selon $\vec{z}$.

- Des nombreux outils existent pour passer de $\mathbb{I}_S(A)$ à $\mathbb{I}_S(P)$ (théorèmes de Huygens), changer de base ou jouer des symétries matérielles pour simplifier les calculs. Pour plus de détails, on pourra se reporter
  - au cours d' H. Magoariec.
  - dans CATIA, qui donne l'opérateur dans les propriétés du solide sélectionné.

5.3 Calcul du torseur dynamique à partir du torseur cinétique

5.3.1 Définition de $\mathcal{D}_{S/R}$

- Le torseur dynamique hérite sa structure de $\mathcal{V}_{S/R}$. On peut le montrer via la puissance des quantités d'accélération. On obtient :

$$\boxed{\mathcal{D}_{S/R}\left\{\begin{array}{c} \int_S \vec{\Gamma}(M/R)dm \\ \int_S \vec{\Gamma}(M/R) \wedge \overrightarrow{MA}dm \end{array}\right\}_A} \tag{5.20}$$

5.3.2 Passage de $\mathcal{C}_{S/R}$ à $\mathcal{D}_{S/R}$

- La résultante de $\mathcal{D}_{S/R}$ est la dérivée de celle de $\mathcal{C}_{S/R}$

$$\boxed{\int_S \vec{\Gamma}(M/R)dm = m\vec{\Gamma}(G/R) = \frac{d}{dt} m\vec{V}(G/R)} \tag{5.21}$$

- Pour les moments, on montre en dérivant $\vec{\sigma}_A(S/R)$ qu'un terme complémentaire à $\dfrac{d\vec{\sigma}_A}{dt}$ est nécessaire pour obtenir $\vec{\delta}_A(S/R)$

$$\boxed{\vec{\delta}_A(S/R) = \int_S \vec{\Gamma}(M/R) \wedge \overrightarrow{MA}dm = \left.\frac{d\vec{\sigma}_A}{dt}\right)_R + m\vec{V}(A,S/R) \wedge \vec{V}(G,S/R)} \tag{5.22}$$

Pratiquement, on obtiendra une **expression simplifiée** de $\vec{\delta}_A(S/R)$ en se plaçant en un **point fixe** ou au **centre d'inertie** avant d'utiliser la formule de transport pour se placer au point souhaité.

version du 30 mai 2016

5.4 Remarque générale

Les torseurs cinétique et dynamique d'un système de solides s'obtiennent **par addition EN UN MÊME POINT** des torseurs de chaque solide

5.5 Bilan intermédiaire

- On peut maintenant calculer
  - $Ec = \frac{1}{2}\mathcal{V}_{S/R} \otimes \mathcal{C}_{S/R}$
  - $P^{\star}_{\text{acc}} = \mathcal{D}_{S/R} \otimes \mathcal{V}^{\star}_{S/R}$
- Et utiliser le PFD pour un système de solides
  - $\mathcal{D}_{S/R} = \mathcal{F}_{ext \to S}$

version du 30 mai 2016

version du 30 mai 2016

Chapitre 6

Conservation de l'énergie

6.1 Théorème de l'énergie cinétique

6.1.1 Expression et démonstration

- L'expression de l'énergie cinétique pour un solide S est donnée en 5.1

$$\boxed{Ec = \frac{1}{2}\mathcal{V}_{S/R} \otimes \mathcal{C}_{S/R}} \tag{6.1}$$

- Le théorème de l'énergie cinétique pour un système Ω constitué de solides S_i s'écrit :

$$\boxed{\frac{dEc(\Omega/R_g)}{dt} = P_{ext\to\Omega} + \sum_{i,j} P_{i\leftrightarrow j}} \tag{6.2}$$

- Le terme de droite correspond à la puissance des efforts extérieurs exercés sur Ω dans son mouvement par rapport à R_g à laquelle on ajoute la puissance des interefforts entre solides (remarque : la puissance des efforts interieurs à chaque solide est nulle car on a une cinématique rigidifiante pour chaque solide).

- Le terme de gauche correspond à la puissance développée par les quantités d'accélération dans le mouvement réel, en effet :

La puissance virtuelle des quantités d'accélération est définie pour un solide S par

$$P^*_{acc} = \mathcal{D}_{S/R} \otimes \mathcal{V}^*_{S/R} \tag{6.3}$$

Dans le mouvement réel :

$$\begin{aligned}
P_{acc} &= \mathcal{D}_{S/R} \otimes \mathcal{V}_{S/R} && (6.4)\\
&= \vec{V}(A,S/R).\int_S \rho\vec{\Gamma}(M,S/R)dV + \vec{\Omega}(S/R)\int_S \rho\vec{\Gamma}(M,S/R)\wedge\overrightarrow{MA}dV && (6.5)\\
&= \int_S \left(\vec{V}(A,S/R) + \vec{\Omega}(S/R)\wedge\overrightarrow{AM}\right)\vec{\Gamma}(M,S/R)\rho dV && (6.6)\\
&= \int_S \vec{V}(M,S/R)\left.\frac{d\vec{V}(M,S/R)}{dt}\right)_R \rho dV && (6.7)\\
&= \frac{1}{2}\int_S \frac{d\vec{V}^2(M,S/R)}{dt}\rho dV && (6.8)
\end{aligned}$$

version du 30 mai 2016

Comme le système est à masse conservative, on peut permuter dérivation et intégration, d'où

$$P_{acc} = \frac{dEc(S/R)}{dt} \tag{6.9}$$

- Conclusion : le théorème de l'énergie cinétique traduit l'application du PPV à un système de solides rigides en choisissant comme mouvement virtuel le mouvement réel.

6.1.2 Exploitation

- Comme $\overrightarrow{OM}$ dépend de (q_i, t), le théorème de l'Energie Cinétique fournit une équation scalaire du second ordre en q_i :

— elle pourra **remplacer une des équations** du PFD (ou du PPV) (cf chapitre 7)
— si le système est repéré par un seul q_i, elle fournit l'équation du mouvement

6.2 Intégrale première de l'énergie cinétique pour un système conservatif

6.2.1 Qu'est ce qu'une intégrale première ?

- Une fonction scalaire ou vectorielle des variables $(q_i, \dot{q}_i, t)$ est intégrale première du mouvement de Ω si et seulement si elle reste constante pour toute solution des équations du mouvement.

- Intérêt : cette fonction traduit directement la conservation d'une quantité (ici l'énergie du système).

6.2.2 Cas des systèmes conservatifs

- Si les puissances des efforts intérieurs et extérieurs dérivent d'une fonction de force U (opposée de l'énergie potentielle de pesanteur ou du potentiel élastique par exemple), on a

$$\frac{dEc(\Omega/R)}{dt} = \frac{dU}{dt} \tag{6.10}$$

d'où $Ec - U = \text{cte}$ ou $\boxed{Ec - Ep = \text{cte}}$

- Il y a transformation de l'énergie cinétique en énergie potentielle et inversement

6.3 Lien entre l'énergie cinétique (réelle) et la puissance virtuelle des quantités d'accélération

- La formule $P_{acc} = \dfrac{dEc(S/R)}{dt}$ permet de calculer directement la puissance à partir de quantités de type vitesse, c'est-à-dire sans avoir besoin de $\mathcal{D}(S/R)$ et des accélérations qui le constituent, ce qui est très pratique. Un formalisme analogue peut être défini quand on cherche P^*_{acc}.

version du 30 mai 2016

- La démonstration est la suivante (en remontant à la définition du 2.3.1)

$$P^*_{acc} = \int_S \rho \vec{\Gamma}(M,S/R).\vec{V}^*(M,S/R)dV \tag{6.11}$$

or, avec le formalisme des torseurs de Lagrange (3.1.4)

$$\vec{V}^*(M,S/R) = \sum_i \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_i} q_i^* \tag{6.12}$$

d'où

$$P^*_{acc} = \sum_i q_i^* \int_S \vec{\Gamma}(M,S/R).\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_i} \rho dV \tag{6.13}$$

le terme sous l'intégrale est ensuite développé (en allégeant les notations, en utilisant la formule 3.11, et l'hypothèse de découplage entre $q_i$et $\dot{q}_i$, ainsi qu'en permutant les dérivations) :

$$\vec{\Gamma}(M,S/R).\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_i} = \left.\frac{d\vec{V}(M,S/R)}{dt}\right)_R \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_i} \tag{6.14}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\vec{V}\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_i}\right) - \vec{V}\frac{d}{dt}\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_i} \tag{6.15}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\vec{V}\frac{\partial \vec{V}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \vec{V}\frac{\partial \vec{V}}{\partial q_i} \tag{6.16}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\frac{\vec{V}^2}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\vec{V}^2}{2} \tag{6.17}$$

La conservation de la masse permet de permuter $\int \frac{d}{dt}$ d'où

$$P^*_{acc} = \sum_i q_i^* \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\int_S \frac{\vec{V}^2}{2}\rho dV - \frac{\partial}{\partial q_i}\int_S \frac{\vec{V}^2}{2}\rho dV\right) \tag{6.18}$$

$$P^*_{acc} = \sum_i q_i^* \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial Ec(S/R)}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial Ec(S/R)}{\partial q_i}\right) \tag{6.19}$$

$$P^*_{\text{acc}} = \sum_i (-I_i) q_i^* \tag{6.20}$$

$$\text{avec} \qquad -I_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial Ec(S/R)}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial Ec(S/R)}{\partial q_i} \quad \text{(formule de Lagrange)} \tag{6.21}$$

- I_i peut être interprété comme la **puissance des forces d'inertie travaillant dans le mouvement virtuel associé à** q_i^*

- Pratiquement, cette expression nécessite seulement des calculs de vitesses, et non d'accélérations, ce qui est un **moyen économique** de calculer les contributions de forces d'inertie.

- ⚠ Attention : pour appliquer la formule de Lagrange, on considère que les q_i sont indépendants des $\dot{q}_i$

version du 30 mai 2016

6.4 Bilan intermédiaire

— On peut maintenant calculer P^*_{acc} selon un formalisme efficace et élégant, reste à synthétiser les expressions de P^*_{acc}, P^*_{int} et P^*_{ext} dans le PPV, pour obtenir les équations de Lagrange

— Le moment est venu d'exprimer le principe, au choix, appelé

  — fondamental de la mécanique

  — PPV

  — conservation de la quantité de mouvement

  et d'expliciter les liens et les avantages / inconvénients de chaque formulation

version du 30 mai 2016

Chapitre 7

Conservation de la quantité de mouvement, PFD, PPV et équations de Lagrange

7.1 Expression classique, par champs de vecteurs, de la conservation de la quantité de mouvement

7.1.1 Le PFD pour un système de solides rigides

- Énoncé : il existe un référentiel galiléen Rg tel que pour tout système matériel Ω, à chaque instant :

$$\mathcal{D}_{\Omega/R} = \mathcal{F}_{ext\to\Omega} \tag{7.1}$$

- Remarque : cet énoncé est le même qu'en 2.2.3 mais avec les torseurs d'efforts construits au chapitre 4 et le torseur dynamique calculé en fin de chapitre 5.

7.1.2 Illustration du lien PFD - conservation de la quantité de mouvement (QDM)

- Le torseur cinétique $\mathcal{C}_{S/Rg}$ est appelé aussi torseur des quantités de mouvement

$$\mathcal{C}_{S/Rg} = \left\{ \begin{array}{c} m\vec{V}(G, S/Rg) \\ \vec{\sigma}_A(S/Rg) \end{array} \right\}_A \tag{7.2}$$

- Si $\left.\dfrac{d\mathcal{C}_{S/Rg}}{dt}\right)_{Rg}$ désigne le torseur dérivé de $\mathcal{C}_{S/Rg}$, c'est-à-dire le torseur dont les éléments de réduction en un point P fixe dans Rg sont les dérivées par rapport au temps des éléments de réduction de $\mathcal{C}_{S/Rg}$ en P, on a :

$$\left.\frac{d\mathcal{C}_{S/Rg}}{dt}\right)_{Rg} = \mathcal{D}_{S/Rg} \tag{7.3}$$

en effet, en un point fixe $\left.\dfrac{d\vec{\sigma}_A(S/Rg)}{dt}\right)_{Rg} = \vec{\delta}_A(S/Rg)$

- Le PFD apparaît comme un bilan de conservation de la QDM.

version du 30 mai 2016

7.1.3 Aspects pratiques dans l'utilisation du PFD

- Pour un système Ω choisi, le PFD fournit 6 équations différentielles scalaires (du second ordre en q_i)
  - le bilan vectoriel sur les forces est le **théorème de la résultante dynamique** (3 équations)
  - le bilan, vectoriel sur les moments est le **théorème du moment dynamique** (3 équations)

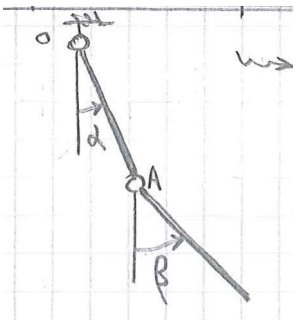
- La résolvabilité est assurée pour les systèmes isostatiques. Pour les autres, il faut ajouter des équations du type loi de comportement de liaison, traduisant par exemple une déformabilité (cf cours GMtc1 sur les poutres)

  Le PFD appliqué successivement à tous les solides du système fournit $6(p-1)$ équations (si p est le nombre de solides en comptant le bâti). Si le total des inconnues d'effort de liaison vaut N et que le total des mobilités (q_i) vaut m, il y a isostatisme si $H = 0$, avec (rappel) :

$$H = N - (6(p-1) - m) \tag{7.4}$$

- Il n'est cependant pas forcément utile de calculer toutes les inconnues de liaison (tout dépend de l'objectif...)
  - il est remarquable que les efforts intérieurs à un système (interefforts de liaison) n'apparaissent pas dans les calculs
  - une séquence d'isolements bien choisis permettra de simplifier les calculs : le graphe de liaisons est l'outil privilégié pour mener cette réflexion
  - de plus, le choix d'une direction de projection et des points de réduction se fait selon les objectifs

  Exemple : double pendule soumis aux efforts de pesanteur : déterminer la stratégie d'obtention des équations du mouvement



7.2 Vision énergétique de la conservation de la QDM

7.2.1 Le PPV pour un système de solides rigides, forme générale

- Si on utilise des champs virtuels rigidifiants pour chaque solide S_i du système Ω, le PPV dit :
  il existe Rg tel que

$$\sum_i \mathcal{D}_{S_i/Rg} \otimes \mathcal{V}^*_{S_i/Rg} = \sum_i P^*_{\bar{\Omega}\to S_i} + \sum_i P^*_{S_i \leftrightarrow S_j} \tag{7.5}$$

version du 30 mai 2016

- L'équivalence PPV-PFD se montre alors en prenant un champ $\mathcal{V}^*$ commun à tous les éléments du système, alors :

$$\mathcal{D}_{\Omega/Rg} \otimes \mathcal{V}^* = \mathcal{F}_{ext} \otimes \mathcal{V}^* \qquad \forall \mathcal{V}^* \tag{7.6}$$

$$\text{d'où} \quad \mathcal{D}_{\Omega/Rg} = \mathcal{F}_{ext} \tag{7.7}$$

- L'exploitation du PPV peut suivre alors deux voies :
  - Construction de champs virtuels rigidifiants "**sur mesure**", avec un cahier des charges ciblé pour obtenir une ou plusieurs inconnues d'effort (à faire travailler)
  - Construction de champs adaptés au paramétrage retenu à l'aide des **torseurs de Lagrange**, cette voie conduit aux équations de Lagrange

7.2.2 Les équations de Lagrange

- Soit un système Ω, dont la position est définie par les paramètres q_i et le temps. L'utilisation des champs virtuels définis en 3.1.4 conduit à exprimer P^*_{ext} et $P^*_{intereffforts}$ sous la forme :

$$\boxed{\begin{aligned} P^*_{ext} &= \sum_i Q_i q_i^* && (7.8)\\ P^*_{intereffforts} &= \sum_i L_i q_i^* && (7.9)\\ \text{de plus} \quad P^*_{acc} &= \sum_i (-I_i) q_i^* && (7.10)\end{aligned}}$$

- Si les S_i sont au nombre de N, on obtient N équations de Lagrange indépendantes : il existe Rg tel que

$$I_i + Q_i + L_i = 0 \qquad i = 1..N \tag{7.11}$$

- On peut interprêter ce résultat en disant que le vecteur $\vec{p}$ de composantes $p_i = I_i + Q_i + L_i$ est orthogonal au vecteur $\vec{q}^*$ de q_i^* :

$$\vec{p}\,\vec{q}^* = 0 \tag{7.12}$$

- Dans le cas où on veut imposer une liaison holonome entre les q_i^*, on a une relation du type $\boxed{\sum_i a_i q_i^* = 0}$ interprétable en disant que les vecteurs $\vec{a}$ de composantes a_i et $\vec{q}^*$ sont orthogonaux :

$$\vec{a}\,\vec{q}^* = 0 \tag{7.13}$$

Par conséquent $\vec{p}$ et $\vec{a}$ sont parallèles, et il existe un coefficient λ, appelé multiplicateur de Lagrange, tel que

$$\boxed{I_i + Q_i + L_i + \lambda a_i = 0 \qquad i = 1..N} \tag{7.14}$$

→ λ est une inconnue supplémentaire correpondant aux efforts de réaction dans la liaison qu'on ajoute. Le système est mathématiquement bouclé par l'ajout simultané de l'équation de liaison.

→ Ce formalisme se généralise à la prise en compte de plusieurs liaisons holonomes : il y a un nouveau multiplicateur pour chaque liaison.

→ Une solution équivalente consiste à paramétrer les efforts de liaison (efforts de réaction dans la liaison), à choisir un paramétrage qui les fasse travailler et à joindre les équations de liaison au système final

version du 30 mai 2016

7.2.3 Lien Lagrange - Hamilton

- Quand toutes les forces qui effectuent un travail virtuel dérivent d'une fonction de force, on définit le Lagrangien par :

$$\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) = Ec - U \tag{7.15}$$

- Les équations de Lagrange deviennent

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \tag{7.16}$$

- On reconnaît la condition de stationnarité du Hamiltonien pour un problème discret (cf cours MSStc1 partie 2)

version du 30 mai 2016

Chapitre 8

Essai de méthode de mise en oeuvre des équations de Lagrange

8.1 *Etablissement d'une stratégie*

8.1.1 *Rappel sur les hypothèses*

- Pour établir les équations de Lagrange, on applique le principe des puissances virtuelles ($P^*_{acc} = P^*_e + P^*_i$), avec des champs de vitesse virtuels particuliers. On doit aussi supposer que les paramètres q_i du mouvement sont indépendants. Cette hypothèse est cruciale car elle permet d'établir autant d'équations qu'il y a de q_i.

Cependant, dans le cas d'un système de solides, des équations de liaisons apparaissent : les paramètres ne sont plus indépendants.

8.1.2 *Comment modéliser des liaisons ?*

- Pour écrire les équations de Lagrange, on commence par faire l'hypothèse que les paramètres du mouvement sont indépendants ; l'équation de liaison peut ensuite être prise en compte de deux manières différentes. Le choix se fait en répondant à la question : que cherche-t-on ?

1. Si on cherche seulement l'équation du mouvement, l'équation de liaison est employée pour éliminer un paramètre du mouvement lié. On revient alors à un problème à paramètres indépendants. Le mouvement virtuel est choisi compatible avec les liaisons.

2. Si on a besoin de connaître une inconnue de liaison, il faut conserver tous les paramètres dans le calcul, ils ne seront liés qu'à la fin. Les équations de Lagrange sont donc écrites pour des mouvements non compatibles avec la liaison. Les mouvements virtuels font alors travailler la liaison en la cassant (P^*_i non nulle). L'inconnue de liaison peut être introduite directement ou comme un multiplicateur de Lagrange.
   L'équation de liaison est ensuite adjointe au système d'équation obtenu. Il s'ensuit qu'on travaille avec un système à paramètres liés. Naturellement, lorsqu'on ajoute une équation de liaison, il faut aussi qu'une inconnue ou un multiplicateur de Lagrange ait été ajoutés (pour assurer la résolvabilité du système d'équations). Cette inconnue est bien sûr l'action de liaison recherchée, associée au paramètre du mouvement contraint. Elle intervient dans l'expression du travail virtuel de la liaison cassée.

version du 30 mai 2016

8.2 Mise en œuvre

8.2.1 Repérage

a/ Introduction d'un paramétrage primitif

b/ Formulation des équations de liaison

C'est la vision cinématique des liaisons : il peut s'agir du blocage de certains ddl, de conditions de roulement sans glissement...

c/ Réduction éventuelle du paramétrage

Elle se fait en fonction de l'objectif : pour trouver les seules équations du mouvement, on réduit le plus possible pour aboutir au paramétrage strict ; si une inconnue de liaison doit être déterminée il faut prévoir de la faire travailler et renoncer - provisoirement - à exploiter l'équation de liaison correspondant à la liaison où elle intervient : les paramètres de mouvement sont alors conservés de manière à casser la liaison.

8.2.2 Schématisation des efforts de liaison

a/ Introduction des efforts de liaison

b/ Choix d'une loi de comportement de liaison

C'est la vision " actions mécaniques " des liaisons : c'est ici qu'est faite l'hypothèse de liaison parfaite ; les relations de frottement de Coulomb entre efforts normal et tangentiel peuvent être explicitées ici.

c/ Réduction des inconnues de liaison

d/ Remarque 1

Il est inutile d'expliciter les efforts de liaisons dont on sait d'avance qu'ils ne vont pas travailler ($P_i^* = 0$). C'est notamment le cas des liaisons parfaites compatibles avec les champs virtuels retenus ; c'est aussi le cas des liaisons ponctuelles avec frottement de Coulomb quand il y a roulement sans-glissement dans le champ virtuel. Leur contribution aux coefficients énergétiques sera nulle. Au contraire il faudra expliciter les efforts intervenant dans des liaisons non parfaites quand des actions de frottement travaillent dans le champ virtuel.

e/ Remarque 2

Si des inéquations interviennent, les mettre de côté : elles serviront à définir les domaines de validité du modèle après résolution (par exemple en détectant le passage d'un régime de non glissement à un régime de glissement dans un contact frottant).

8.2.3 Établissement des équations de la dynamique

a/ Construction des champs virtuels

Il suffit de se souvenir de leur définition : ils sont obtenus en " virtualisant " les q_i' dans l'expression de la vitesse réelle. Attention, cette vitesse est calculée pour les paramètres retenus dans le modèle après réduction : compte tenu du paragraphe 8.2.1 c, ces paramètres réduits peuvent éventuellement autoriser de casser une liaison !

b/ Calcul des coefficients énergétiques

Ce sont les coefficients qui apparaissent en facteur des $q_i'^*$ dans le calcul des puissances virtuelles générées dans le mouvement virtuel considéré par :

— les efforts extérieurs,

— les interefforts entre solides quand la liaison n'est pas parfaite (présence de frottements), quand elle comprend des ressorts ou qu'elle est animée par des actionneurs,

— les efforts de liaisons pour lesquelles le mouvement virtuel n'est pas compatible.

version du 30 mai 2016

Astuce : on peut shunter le calcul de ces puissances virtuelles quand l'action mécanique considérée " dérive d'une fonction de force U ". Alors, par définition de U, on peut écrire $P^* = \sum_i Q_i q_i'^*$. Concrètement, sont principalement concernés le poids et les ressorts :

— pour le poids $U = -Ep$. Où Ep est l'énergie potentielle de pesanteur ($Ep = -mg.OG$),

— pour les ressorts $U = -Ed$. Où Ed est l'énergie potentielle élastique, c'est-à-dire l'énergie de déformation ($Ed = k\frac{x^2}{2}$).

c/ Calcul de l'énergie cinétique

Remarque 1 : c'est le calcul des termes déduits de l'énergie cinétique qui remplace le fastidieux calcul des puissances virtuelles des quantités d'accélération qui serait nécessaire dans l'application directe du PPV brut.

Remarque 2 : rien n'est virtuel dans l'énergie cinétique.

Remarque 3 : le torseur cinématique est calculé avec tous les paramètres cinématiques retenus au 2.1.c.

d/ Écriture des équations de Lagrange

Attention à ne pas mélanger dérivées par rapport aux q'i et dérivées par rapport aux qi. Penser à adjoindre les équations de liaison qu'on aurait éventuellement mises de côté provisoirement au 2.1.c.

2.4/ Résoudre

Là, c'est des maths, ou de l'informatique. Penser à éventuellement délimiter les zones de validité du modèle à l'aide des conditions du 2.2.e.

version du 30 mai 2016

version du 30 mai 2016

Annexe A

Notion de torseur

A.1 Généralités sur les systèmes de vecteurs liés

A.1.1 Définition

Soit $\mathscr{E}_3$ l'espace Euclidien ponctuel de la géométrie et E_3 l'espace vectoriel de dimension 3 associé à $\mathscr{E}_3$.

Définition A.1.1 *On appelle vecteur lié l'ensemble constitué d'un point A de $\mathscr{E}_3$ et d'un vecteur $\vec{V}$ de E_3, noté $(A, \vec{V})$, représenté par*

$$A \xrightarrow[\vec{V}]{}$$

A est le point d'application
$\vec{V}$ donne l'intensité et la direction

On raisonnera soit avec un vecteur lié simple $(A, \vec{V})$, soit avec un système S de N vecteurs liés $S = \{(A_i, \vec{V}_i)\} \quad i = 1..N$

A.1.2 Résultante d'un système de vecteurs liés

Définition A.1.2 *La résultante du système $S = \{(A_i, \vec{V}_i)\}$ est le vecteur $\vec{R}$ de E_3 défini par*

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{N} \vec{V}_i$$

A.1.3 Champ de moments associés à S

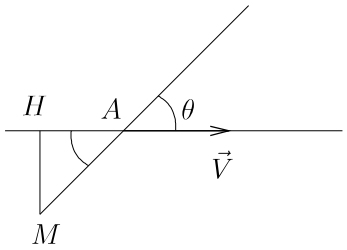
Étant donné $S = \{(A_i, \vec{V}_i)\}$, on appelle moment en M de S (étant donné un point M de $\mathscr{E}_3$) le vecteur $\overrightarrow{\mathscr{M}_S}(M)$ défini par :

$$\overrightarrow{\mathscr{M}_S}(M) = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{MA_i} \wedge \vec{V}_i$$

Cela définit un moment en chaque point M de $\mathscr{E}_3$.
$\overrightarrow{\mathscr{M}_S}(M)$: champ de moments de S sur $\mathscr{E}_3$.

Interprétation physique pour un vecteur lié simple :
Soit un vecteur lié simple $(A, \vec{V})$

version du 30 mai 2016



La résultante est $\vec{R} = \vec{V}$.
Le moment en M est $\overrightarrow{\mathscr{M}_S}(M) = \overrightarrow{MA} \wedge \vec{V}$.
On a alors les propriétés :

— $\overrightarrow{\mathscr{M}_S}(M)$ est orthogonal au plan $(\overrightarrow{MA}, \vec{V})$

— les vecteurs $\overrightarrow{MA}$, $\vec{V}$ et $\overrightarrow{\mathscr{M}_S}(M)$ constituent un trièdre direct.
$\|\overrightarrow{\mathscr{M}_S}(M)\| = \|\overrightarrow{MA}\|\|\vec{V}\|\sin\theta = MH\|\vec{V}\|$, produit du bras de levier par l'intensité de la force.

A.1.4 Propriété fondamentale du champ $\mathscr{M}_3$. Relation de transport

Soit $S = \{(A_i, \vec{V}_i)\}$ et un champ de moments $\overrightarrow{\mathscr{M}_S}(M) = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{MA_i} \wedge \vec{V}_i \quad \forall M \in \mathscr{E}_3$.
Soit $P \neq M$, on a toujours :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathscr{M}_S}(M) = \sum_{i=1}^{N} \left(\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PA_i}\right) \wedge \vec{V}_i &= \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{PA_i} \wedge \vec{V}_i && + \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{MP} \wedge \vec{V}_i \\
&= \overrightarrow{\mathscr{M}_S}(P) && + \overrightarrow{MP} \wedge \sum_{i=1}^{N} \vec{V}_i \\
&= \overrightarrow{\mathscr{M}_S}(P) && + \overrightarrow{MP} \wedge \vec{R}
\end{aligned}$$

$$\forall M, P \in \mathscr{E}_3, \quad \overrightarrow{\mathscr{M}_S}(M) = \overrightarrow{\mathscr{M}_S}(P) + \overrightarrow{MP} \wedge \vec{R} \tag{A.1}$$

Relation de transport du champ de moments

Intérêt :
Pour connaître $\overrightarrow{\mathscr{M}_S}(M)$, il suffit de se donner la résultante $\vec{R}$ et le moment en un point P $\overrightarrow{\mathscr{M}_S}(P)$.

A.1.5 Retour sur le cas particulier d'un vecteur lié simple

Soit $(A, \vec{V})$ et Δ la droite passant par A et parallèle à $\vec{V}$ support du vecteur lié (ligne d'action pour une force).
La résultante est : $\vec{R} = \vec{V}$
Le moment en M : $\overrightarrow{\mathscr{M}_S}(M) = \overrightarrow{MA} \wedge \vec{V} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{\mathscr{M}_S}(M) = \vec{0} \text{ si } M \in \Delta \\ \overrightarrow{\mathscr{M}_S}(M) \perp \vec{V} \ \forall M \end{cases}$

A.1.6 Équivalence de deux systèmes de vecteurs liés

Deux systèmes S et S' sont équivalents s'ils ont même résultante et même champ de moments, c'est à dire

$$\vec{R} = \vec{R'}$$
$$\forall M \in \mathscr{E}_3, \ \overrightarrow{\mathscr{M}_S}(M) = \overrightarrow{\mathscr{M}_{S'}}(M)$$

version du 30 mai 2016

Cette relation est réflexive, symétrique et transitive. C'est une relation d'équivalence.
Les classes d'équivalence s'appellent des torseurs.

A.2 Torseur

L'équivalence mathématique de S_1 et S_2 :
S_1 et S_2 sont équivalents s'ils ont même résultante et même moment en O, donc même champ de moments.

A.2.1 Définition

Définition A.2.1 *Un torseur $\mathscr{T}$ est défini par la donnée*

1. *d'un vecteur libre $\vec{R} \in E_3$ (la résultante)*
2. *d'un champ de vecteur $\overrightarrow{\mathscr{M}_S}(M)$ satisfaisant*

$$\forall M, P \in \mathscr{E}_3, \quad \overrightarrow{\mathscr{M}_S}(M) = \overrightarrow{\mathscr{M}_S}(P) + \overrightarrow{MP} \wedge \vec{R}$$

A.2.2 Éléments de réduction d'un torseur $\mathscr{T}$ en un point A

Par définition de $\mathscr{T}$, il suffit de se donner $\vec{R}$ et, en un point A donné, $\overrightarrow{\mathscr{M}_{\mathscr{T}}}(A)$.
$\left(\vec{R}, \overrightarrow{\mathscr{M}_{\mathscr{T}}}(A)\right)$ sont les éléments de réduction de $\mathscr{T}$ en A

$$\mathscr{T}_{en\ A} \begin{cases} \vec{R} \\ \overrightarrow{\mathscr{M}_{\mathscr{T}}}(A) \end{cases} \tag{A.2}$$

Quand on connaît les éléments de réduction en A du torseur $\mathscr{T}$, on peut les calculer en $B \neq A$:

$$\mathscr{T}_{en\ B} \begin{cases} \vec{R} \\ \overrightarrow{\mathscr{M}_{\mathscr{T}}}(B) = \overrightarrow{\mathscr{M}_{\mathscr{T}}}(A) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R} \end{cases} \tag{A.3}$$

A.2.3 Égalité de deux torseurs

$\mathscr{T}$ et $\mathscr{T}'$ sont égaux s'ils représentent la même classe d'équivalence

Définition A.2.2 *$\mathscr{T}$ et $\mathscr{T}'$ sont égaux s'ils ont même résultante et même champ de moments*

1. $\vec{R} = \vec{R}'$
2. $\overrightarrow{\mathscr{M}_{\mathscr{T}}}(M) = \overrightarrow{\mathscr{M}_{\mathscr{T}'}}(M) \quad \forall M \in \mathscr{E}_3$

On démontre en fait

Théorème A.2.1 *Pour que deux torseurs soient égaux, il faut et il suffit qu'ils aient même champ de moments*

Démonstration : On va montrer que si ils ont même champ de moments, alors ils ont même résultante.
On suppose que $\forall M \in \mathscr{E}_3$, $\overrightarrow{\mathscr{M}_{\mathscr{T}}}(M) = \overrightarrow{\mathscr{M}_{\mathscr{T}'}}(M)$.
Or

$$\forall M, N \in \mathscr{E}_3, \ \overrightarrow{\mathscr{M}_{\mathscr{T}}}(M) = \overrightarrow{\mathscr{M}_{\mathscr{T}}}(N) + \overrightarrow{MN} \wedge \vec{R}$$
$$\forall M, N \in \mathscr{E}_3, \ \overrightarrow{\mathscr{M}_{\mathscr{T}'}}(M) = \overrightarrow{\mathscr{M}_{\mathscr{T}'}}(N) + \overrightarrow{MN} \wedge \vec{R}'$$

version du 30 mai 2016

et en soustrayant ces deux équation, on obtient

$$\forall M,N \in \mathscr{E}_3,\ \overrightarrow{MN} \wedge \left(\vec{R} - \vec{R}'\right) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{R} = \vec{R}'$$

■

On préfère encore

Théorème A.2.2 *Une CNS pour que $\mathscr{T} = \mathscr{T}'$ est que $\mathscr{T}$ et $\mathscr{T}'$ possèdent les mêmes éléments de réduction en un point A donné.*

A.3 Comoment de deux torseurs

Soient $\mathscr{T}$ et $\mathscr{T}'$ donnés par leurs éléments de réduction en un point M

$$\mathscr{T}_{en\ M}\begin{cases}\vec{R}\\ \overrightarrow{\mathscr{M}_{\mathscr{T}}}(M)\end{cases} \qquad \mathscr{T}'_{en\ M}\begin{cases}\vec{R}'\\ \overrightarrow{\mathscr{M}_{\mathscr{T}'}}(M)\end{cases}$$

considérons le scalaire

$$\vec{R}' \cdot \overrightarrow{\mathscr{M}_{\mathscr{T}}}(M) + \vec{R} \cdot \overrightarrow{\mathscr{M}_{\mathscr{T}'}}(M) = f(M)$$

qui a priori dépend de M.
On va montrer que cette quantité ne dépend pas de M, donc a un caractère intrinsèque.

$$\forall M,N \in \mathscr{E}_3, \overrightarrow{\mathscr{M}_{\mathscr{T}}}(M) = \overrightarrow{\mathscr{M}_{\mathscr{T}}}(N) + \overrightarrow{MN} \wedge \vec{R}$$
$$\overrightarrow{\mathscr{M}_{\mathscr{T}'}}(M) = \overrightarrow{\mathscr{M}_{\mathscr{T}'}}(N) + \overrightarrow{MN} \wedge \vec{R}'$$

En faisant le produit scalaire respectivement par $\vec{R}$ et $\vec{R}'$, on obtient

$$f(M) = f(N) + \left(\overrightarrow{MN} \wedge \vec{R}\right) \cdot \vec{R}' + \left(\overrightarrow{MN} \wedge \vec{R}'\right) \cdot \vec{R}$$

d'où, en reconnaissant les produits mixtes,

$$\forall M,N \in \mathscr{E}_3,\ f(M) = f(N) \quad \text{indépendant du point } M \text{ choisi}$$

A.3.1 Définition

Définition A.3.1 *On appelle comoment de $\mathscr{T}$ et $\mathscr{T}'$ le scalaire indépendant de M défini par*

$$\vec{R}' \cdot \overrightarrow{\mathscr{M}_{\mathscr{T}}}(M) + \vec{R} \cdot \overrightarrow{\mathscr{M}_{\mathscr{T}'}}(M) = f(M) \tag{A.4}$$

noté $\mathscr{T} \cdot \mathscr{T}'$

A.3.2 Invariant scalaire d'un torseur $\mathscr{T}$

On peut considérer le comoment de $\mathscr{T}$ par lui même.

$$\mathscr{T} \cdot \mathscr{T} = 2\vec{R} \cdot \overrightarrow{\mathscr{M}_{\mathscr{T}}}(M) \quad \text{indépendant de } M$$

Définition A.3.2 *L'invariant scalaire d'un torseur $\mathscr{T}$ est le scalaire indépendant de M*

$$h = \frac{1}{2}\mathscr{T} \cdot \mathscr{T} = \vec{R} \cdot \overrightarrow{\mathscr{M}_{\mathscr{T}}}(M) \tag{A.5}$$

Si l'on connaît $\mathscr{T}$ par ses éléments de réduction en A,

$$\mathscr{T}_{en\ A}\begin{cases}\vec{R}\\ \overrightarrow{\mathscr{M}_{\mathscr{T}}}(A)\end{cases} \quad \Rightarrow h = \vec{R} \cdot \overrightarrow{\mathscr{M}_{\mathscr{T}}}(A)$$

version du 30 mai 2016

Bibliographie

[1] P. AGATI, Y. BRÉMONT et G. DELVILLE : *Mécanique du solide. Applications industrielles.* Dunod, 1986.

[2] M. BAUSSET : *Dynamiques. Principes classiques et relativistes. Milieux solides et déformables.* Hermann, 1982.

[3] J.-C. BÔNE, J. MOREL et M. BOUCHER : *Mécanique générale, cours et applications.* Dunod, 1994.

[4] P. BROUSSE : *Mécanique analytique, puissances virtuelles, équations de Lagrange, applications.* Vuibert, 1981.

[5] L. CHEVALIER : *Mécanique des systèmes et des milieux déformables.* Ellipses, 2004.

[6] P. GERMAIN : *Mécanique, tome 1.* Ecole Polytechnique. Ellipses, 1986.

[7] C. GIGNOUX et B. SYLVESTRE-BRAC : *Mécanique. De la formulation lagrangienne au chaos hamiltonien.* EDP Sciences, 2002.

[8] L. LANDAU et E. LIFCHITZ : *Physique théorique. Mécanique.* Ellipses, 1994.

[9] M. OUISSE et S. MALET : *Mécanique générale, cinématique et dynamique des mécanismes.* Hermès-Lavoisier, 2010.

[10] S. POMMIER et Y. BERTHAUD : *Mécanique générale.* Dunod, 2010.

version du 30 mai 2016

Génie Mécanique - 3ème partie
Résistance des Matériaux

Cette 3ème partie du polycopié de l'Unité d'Enseignement Génie Mécanique est en grande partie extraite du document *"Mécanique des solides : tome 2"* rédigé par François SIDOROFF, Professeur de Mécanique à l'Ecole Centrale de Lyon entre 1978 et 2008.

Le document a été remis en forme et synthétisé, afin suivre la structure du programme abordé dans l'action de formation GMtc1. La version initiale complète est disponible à l'adresse suivante :

http://perso.ec-lyon.fr/francois.sidoroff/poly/tome1.html : *François SIDOROFF, "Mécanique des solides : tome 1", 194 p., 1981.*

http://perso.ec-lyon.fr/francois.sidoroff/poly/tome2.html : *François SIDOROFF, "Mécanique des solides : tome 2", 201 p., 1981.*

Le Tome 1 concerne la Mécanique des Milieux Continus (abordée dans l'Unité d'Enseignement Mécanique des Solides et des Structures). Le Tome 2 concerne la Résistance des Matériaux (abordée dans l'Unité d'Enseignement Génie Mécanique).

Par ailleurs, la plateforme d'auto-évaluation https://didactest.ec-lyon.fr/ propose un grand nombre d'exercices associés à cette 3ème partie du cours de Génie Mécanique. Chaque exercice fait référence spécifiquement à l'un des cours ou l'un des TDs de RdM, et permet de tester ses compétences, de s'auto-évaluer et de cibler les parties des cours à retravailler.

1er Cours et TD de RdM :

- savoir déterminer l'état d'un système,
- savoir calculer les efforts de liaison,
- savoir calculer les efforts intérieurs.

2ème Cours et TD de RdM :

- savoir dimensionner en contraintes.

3ème Cours et TD de RdM :

- savoir dimensionner en déplacements,
- savoir lever l'hyperstaticité.

Table des matières

1 La résistance des matériaux 1

1.1 Introduction au calcul des structures 1

1.1.1 MMC et RDM 1

1.1.2 Poutres, plaques et coques 2

1.2 Schématisation des efforts extérieurs 3

1.2.1 Efforts extérieurs donnés 3

1.2.2 Efforts de liaison 4

1.2.3 Equations d'équilibre statique 5

1.2.4 Isostatisme, hyperstatisme, système instable 6

1.3 Exemples de calcul des efforts de liaison 7

1.3.1 Poutres droites 7

1.3.2 Structures planes 9

2 Efforts intérieurs en RDM 13

2.1 Torseur des efforts intérieurs 13

2.1.1 Définition des efforts intérieurs 13

2.1.2 Relation entre efforts intérieurs et contraintes 14

2.1.3 Calcul des efforts intérieurs 14

2.1.4 Equations d'équilibre 16

2.2 Exemples de calcul des efforts intérieurs 18

2.2.1 Poutres droites 18

2.2.2 Structures Planes 20

3 Travaux virtuels - Déformations 23

3.1 Dérivée d'un torseur 23

3.2 Torseur déplacement d'un milieu curviligne 24

3.3 Principe des travaux virtuels 25

3.4 Torseur déformation d'un milieu curviligne 25

3.5 Interprétation physique 26

4 Contraintes - Dimensionnement élastique. 29

4.1 Répartition des contraintes 29

4.1.1 Problème de Saint-Venant 29

4.1.2 L'approximation RDM 30

4.1.3 Dimensionnement élastique 31

4.2 Répartition des contraintes de cisaillement 34

4.2.1 Théorème de la coupure 34

4.2.2 Théorie approchée de l'effort tranchant 35

4.2.3 Section en profil mince 37

5 Milieux curvilignes élastiques 39
5.1 Loi de comportement 39
5.1.1 Comportement élastique 39
5.1.2 Identification directe de la loi élastique 40
5.1.3 Identification énergétique de la loi élastique 42
5.1.4 Expression de la loi élastique 44
5.1.5 Formules de Navier-Bresse 44
5.2 Méthodes énergétiques 46
5.2.1 Problème de RDM 46
5.2.2 Théorème de Menabrea 47
5.2.3 Théorème de réciprocité 48
5.2.4 Théorème de Castigliano 49

6 Exemples de poutres droites 51
6.1 Poutres isostatiques 51
6.1.1 Poutre encastrée-libre soumise à un effort réparti uniforme 51
6.1.2 Poutre encastrée-libre soumise à un effort concentré 52
6.1.3 Poutre sur deux appuis soumise à un effort réparti uniforme 54
6.1.4 Poutre sur deux appuis soumise à un effort concentré 54
6.1.5 Poutre sur deux appuis soumise à un moment terminal 56
6.2 Poutres hyperstatiques 56
6.2.1 Exemples - Dimensionnement 56
6.2.2 Méthode énergétique 58
6.2.3 Compatibilité des déformations 58
6.2.4 Méthode de superposition 60
6.2.5 Problèmes non classiques 61

7 Exemples de structures planes 63
7.1 Console coudée isostatique 63
7.2 Portique isostatique 65
7.3 Structure hyperstatique 67
7.3.1 Statique - Dimensionnement 67
7.3.2 Méthodes énergétiques 68
7.3.3 Compatibilité des déformations 70
7.4 Portique hyperstatique 71

Chapitre 1

La résistance des matériaux

1.1 Introduction au calcul des structures

1.1.1 MMC et RDM

En principe, la mécanique des milieux continus (MMC), et en particulier la théorie de l'élasticité, permet de formuler et de résoudre un problème de calcul.

> ***Problème de calcul***
> *Déterminer la répartition des contraintes et des déformations dans une pièce donnée (géométrie, matériau), soumise à une sollicitation donnée.*

Le problème est alors décrit sous la forme d'un système d'équations aux dérivées partielles avec conditions aux limites. Sa résolution répond à un double souci de prévision des performances et de sécurité (critère de limite d'élasticité pour un calcul élastique, charge limite pour un calcul plastique). Elle ne peut se faire que par un calcul numérique, long et coûteux, qui ne se justifie pas toujours en construction courante.

Cette résolution ne permet pas de répondre au problème type de l'ingénieur :

> ***Problème de conception***
> *Concevoir une pièce (forme, dimensions, matériau, etc.) pour qu'elle puisse supporter une sollicitation donnée ou remplir une fonction donnée, dans les meilleures conditions de sécurité et d'économie.*

De plus, la résolution du problème exige sa formulation correcte sous forme de problème régulier, avec écriture des conditions aux limites sur toute la surface du corps, alors que l'on ne connaît souvent les efforts appliqués que globalement et non dans leur détail. Il apparaît donc nécessaire de disposer de théories plus simples à résoudre que la MMC. Ces théories simplifiées font l'objet de ce que l'on appelle la Résistance des Matériaux - RDM.

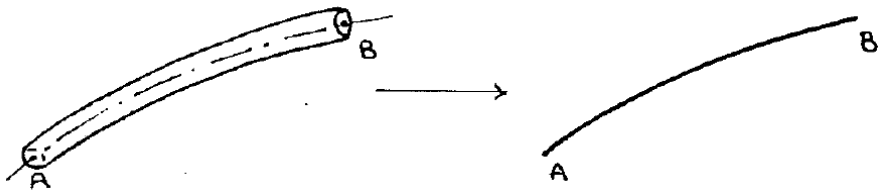
La démarche utilisée pour ces théories "simplifiées" est calquée sur celle de la MMC, car leurs structures sont identiques :

> 1. *Description des efforts intérieurs*
> 2. *Description des déformations*
> 3. *Loi de comportement élastique*
> 4. *Formulation, étude et résolution des problèmes aux limites correspondants*

1.1.2 Poutres, plaques et coques

La simplification de la RDM est basée sur la géométrie des solides que l'on considère. On a en effet rarement affaire à des solides réellement tridimensionnels, mais plutôt à des solides mono ou bi-dimensionnels pour lesquels une ou plusieurs dimensions sont petites devant les autres, ce qui autorise certaines approximations.

La première classe de milieux continus pour laquelle on peut construire une théorie approchée est constituée par les milieux curvilignes pour lesquels deux dimensions sont petites par rapport à la troisième. On peut donc assimiler un tel milieu à une courbe matérielle, d'où l'appellation "milieux curvilignes". On parle aussi de "poutres".



On introduit alors diverses définitions :

— la fibre moyenne est le lieu des centres de gravité des sections,

— la section droite est la section du solide par un plan perpendiculaire à la fibre moyenne.

La philosophie de l'approximation RDM d'une poutre consiste donc à assimiler le solide tridimensionnel à un milieu continu monodimensionnel et à concentrer chaque section droite en un point. On perd de l'information, mais on gagne deux dimensions et les équations aux dérivées partielles deviennent des équations différentielles ordinaires que l'on peut résoudre simplement.

On parle de poutre droite, plane ou gauche, suivant que la fibre moyenne est rectiligne, située dans un plan ou quelconque. On parle de poutre à section variable ou de poutre à section constante, suivant que la section droite varie ou non le long de la poutre.

D'un point de vue géométrique, une poutre est une courbe définie par son équation paramétrique :

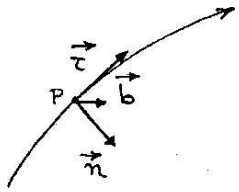
$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{x}(s) \tag{1.1}$$

où s est l'abscisse curviligne, seule variable d'espace. On note ' la dérivée par rapport à s et on introduit le vecteur unitaire tangent à la courbe par :

$$\overrightarrow{\tau} = \frac{d\overrightarrow{OP}}{ds} = \overrightarrow{x}'(s) \tag{1.2}$$

Plus généralement, on introduit le trièdre de Frenet $(\overrightarrow{\tau}, \overrightarrow{n}, \overrightarrow{b})$:

$$\begin{array}{lllll} \frac{d\overrightarrow{\tau}}{ds} & = & \overrightarrow{\tau}' & = & \frac{\overrightarrow{n}}{R} \\ \frac{d\overrightarrow{n}}{ds} & = & \overrightarrow{n}' & = & -\frac{\overrightarrow{\tau}}{R} - \frac{\overrightarrow{b}}{T} \\ \frac{d\overrightarrow{b}}{ds} & = & \overrightarrow{b}' & = & \frac{\overrightarrow{n}}{T} \end{array} \tag{1.3}$$



La théorie des milieux curvilignes, qui forme l'essentiel de la RDM classique, est basée sur trois hypothèses :

> ***Hypothèse des petites perturbations***
> *La poutre s'écarte peu de la configuration naturelle de référence.*

Cette hypothèse permet d'écrire les conditions d'équilibre dans la configuration non déformée. De plus, on peut linéariser toutes les quantités et toutes les équations par rapport aux grandeurs de perturbation. Ainsi, si le comportement n'introduit pas de non linéarité (comme par exemple la plasticité), on obtient une théorie linéaire permettant d'introduire un principe de superposition. Hormis quelques cas spécifiques (comme par exemple le flambement), cette hypothèse est justifiée.

> ***Hypothèse de Saint-Venant***
> *Tous les efforts qui interviennent dans la théorie des milieux curvilignes peuvent être schématisés par leur torseur résultant.*

Cette hypothèse est l'hypothèse de base de la RDM, qui permet de ramener la MMC tridimensionnelle à une théorie monodimensionnelle. Elle est à la base de la description des efforts extérieurs (voir paragraphe 1.2.1) et des efforts intérieurs (voir chapitre 2) en RDM. Elle est justifiée par le principe de Saint-Venant qui affirme que, dans une poutre, l'état de contrainte et de déformation ne dépend que du torseur des efforts appliqués, et non de la manière précise dont ces efforts étaient appliqués. Il en résulte que la RDM ne peut pas donner d'informations précises au voisinage des extrémités, ou plus généralement des sections remarquables où il se passe quelque chose (effort appliqué, variation brusque de section, coude, etc.). L'étude locale du voisinage de ces sections est du ressort de la MMC, tandis que la RDM ne donne que des informations globales ou des informations locales loin des sections remarquables.

> ***Hypothèse de Navier-Bernoulli***
> *Les sections droites restent planes et normales à la fibre moyenne.*

Cette hypothèse, de nature cinématique, est surabondante. En effet, les contraintes et les déformations sont en dualité. Une fois choisie la schématisation des efforts, qui résulte de l'hypothèse de Saint-Venant, cette dualité impose la schématisation des déformations.

La deuxième classe de milieux continus, pour laquelle la géométrie du problème autorise des approximations et qui conduit à la construction d'une théorie approchée facilitant le calcul de la solution, est constitué des plaques et coques. On appelle coque un solide pour lequel une dimension est petite par rapport aux deux autres (mur, plafond, carter, carrosserie, etc.). On peut donc le considérer comme un milieu surfacique en ramenant tout sur la surface moyenne. On parle alors de plaque si cette surface est plane, et de coque dans le cas contraire.

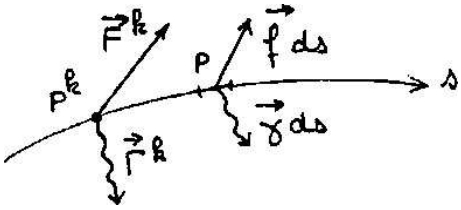
1.2 Schématisation des efforts extérieurs

1.2.1 Efforts extérieurs donnés

Une structure doit être correctement dimensionnée pour supporter les efforts extérieurs appliqués. Ceux-ci peuvent être réels (poids d'un plafond reposant sur une poutre) ou réglementaires (poids de la neige ou action du vent sur un bâtiment, convoi type pour un pont). Dans les deux cas, ces efforts extérieurs sont donnés dans le cahier des charges et sont donc supposés connus.

les efforts extérieurs appliqués peuvent être concentrés en un certain nombre de points $P^k(s = s^k)$. Ils sont alors caractérisés par leur torseur résultant $[\Phi^k]$, c'est-à-dire par leur résultante $\overrightarrow{F}^k$ et leur moment $\overrightarrow{\Gamma}^k$ au point P^k.

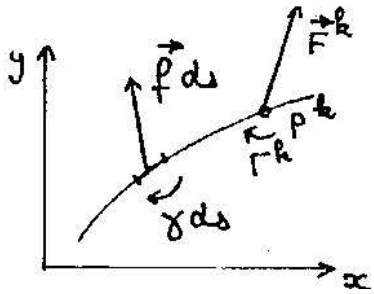
Ils peuvent également être répartis, avec une densité donnée par unité de longueur (exemple : poids propre d'une structure). Ils sont alors caractérisés par leur torseur résultant $[\varphi(s)]$, c'est-à-dire par leur résultante $\overrightarrow{f}(s)$ et leur moment $\overrightarrow{\gamma}(s)$ au point P.



Un cas particulier important est celui des structures planes chargées dans leur plan.

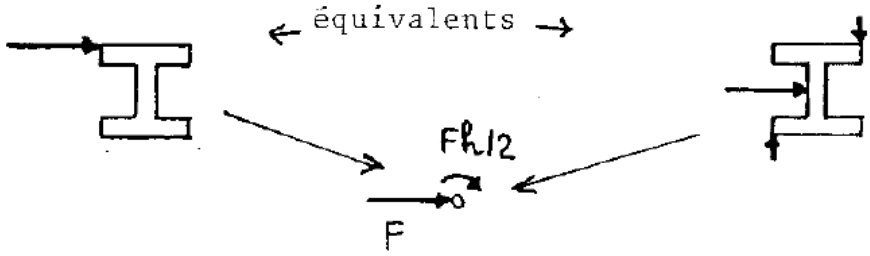
$$\overrightarrow{x}(s) = \begin{bmatrix} x(s) \\ y(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

La courbe est alors située dans le plan xy, les efforts $\overrightarrow{F}^k$ et $\overrightarrow{f}(s)$ ont deux composantes (sur $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$), tandis que les moments $\overrightarrow{\Gamma}^k$ et $\overrightarrow{\gamma}^k$ n'ont qu'une composante (sur la troisième direction $\overrightarrow{z}$).



$$\overrightarrow{F}(s) = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{f}(s) = \begin{bmatrix} f_x(s) \\ f_y(s) \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{\Gamma}(s) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Gamma \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{\gamma}(s) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

L'exemple de la figure ci-dessous montre que la description des efforts extérieurs par un torseur ramené sur la fibre moyenne conduit à une perte d'information : la RDM ne permet pas de distinguer deux systèmes d'efforts appliqués différents ayant un même torseur résultant. Le principe de Saint-Venant justifie cette approximation en affirmant que ces deux systèmes d'efforts produisent le même effet, sauf au voisinage immédiat de la section concernée.



1.2.2 Efforts de liaison

Une poutre est reliée au monde extérieur par un certain nombre de liaisons qui introduisent des conditions cinématiques. Les efforts de liaison, qui permettent de maintenir ces liaisons, sont des inconnues du problème. On rencontre parfois en RDM des liaisons non parfaites (appuis élastiques par exemple), mais cela reste exceptionnel. La plupart du temps, les liaisons sont parfaites (la puissance

des efforts de liaison est nulle pour tout mouvement virtuel compatible avec la liaison). La dualité entre le torseur cinématique de la liaison et le torseur des efforts de liaison permet alors d'identifier les composantes non nulles de ce dernier.

Dans le cas général, on note $[\Psi](A)$ le torseur des efforts de la liaison en A, $\overrightarrow{R}$ sa résultante et $\overrightarrow{M}(A)$ son moment résultant au point A. De même, pour un mouvement de solide virtuel, on note $\overrightarrow{\Omega}^*$ la rotation et $\overrightarrow{V}^*(A)$ la vitesse du point A. La puissance virtuelle des efforts de liaison est alors :

$$P_l^* = \overrightarrow{R}.\overrightarrow{V}^*(A) + \overrightarrow{M}(A).\overrightarrow{\Omega}^* = 0 \tag{1.5}$$

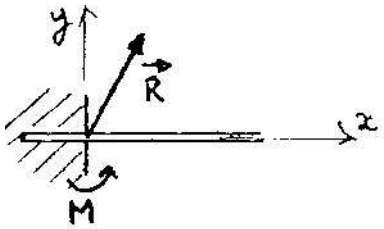
Dans le cas particulier des structures chargées dans leur plan, la relation (1.5) devient :

$$R_x V_x^*(A) + R_y V_y^*(A) + M(A)\Omega^* = 0 \tag{1.6}$$

$\overrightarrow{R}$ et $\overrightarrow{V}^*$ sont dans le plan. M et Ω^* sont perpendiculaires au plan. On rencontre alors 3 types de liaison :

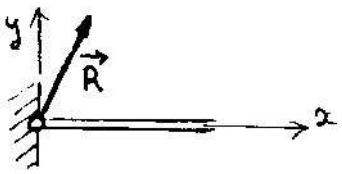
<u>Encastrement</u>

$$\begin{array}{lcll} \overrightarrow{V}^*(A) & = & \overrightarrow{0} & \Omega^* = 0 \\ \overrightarrow{R} & = & R_x\overrightarrow{x} + R_y\overrightarrow{y} & M quelconque \end{array} \tag{1.7}$$



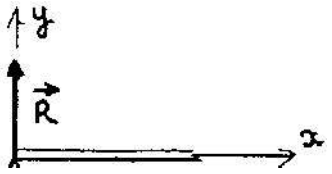
<u>Pivot</u> (articulation)

$$\begin{array}{lcll} \overrightarrow{V}^*(A) & = & \overrightarrow{0} & \Omega^* quelconque \\ \overrightarrow{R} & = & R_x\overrightarrow{x} + R_y\overrightarrow{y} & M = 0 \end{array} \tag{1.8}$$



<u>Appui simple</u>

$$\begin{array}{lcll} \overrightarrow{V}^*(A) & = & V_x^*\overrightarrow{x} & \Omega^* quelconque \\ \overrightarrow{R} & = & R_y\overrightarrow{y} & M = 0 \end{array} \tag{1.9}$$



1.2.3 Equations d'équilibre statique

Les efforts de liaison inconnus (liaisons de la structure avec l'extérieur ou bien liaisons entre les poutres d'une même structure) sont déterminés à partir des conditions d'équilibre pour chaque élément de la structure.

> ***Loi d'équilibre statique***
> *Un système matériel est en équilibre si et seulement si le torseur de tous les efforts extérieurs exercés sur le système est nul.*

Dans le cas général, la loi d'équilibre statique fournit une équation de résultante et une équation de moment, soit 6 équations scalaires, pour chaque système, c'est-à-dire pour chaque solide constituant la structure. Si la poutre est soumise à des efforts concentrés $[\Phi^k]$, des efforts répartis $[\phi(s)]$, et des efforts de liaisons $[\Psi^k]$.

	Point d'application	Torseur	Résultante	Moment
Efforts concentrés	P^k	$[\Phi^k]$	$\overrightarrow{F}^k$	$\overrightarrow{\Gamma}^k$
Efforts répartis	$P(s)$	$[\varphi(s)]$	$\overrightarrow{f}(s)$	$\overrightarrow{\gamma}(s)$
Efforts de liaison	A^K	$[\Psi^K]$	$\overrightarrow{R}^K$	$\overrightarrow{M}^K$

Alors l'équation de résultante et l'équation de moment s'écrivent :

$$\sum_k \overrightarrow{F}^k + \int_{s_0}^{s_1} \overrightarrow{f}(s)ds + \sum_k \overrightarrow{R}^k = \overrightarrow{0} \tag{1.10}$$

$$\sum_k (\overrightarrow{\Gamma}^k + \overrightarrow{OP}^k \wedge \overrightarrow{F}^k) + \int_{s_0}^{s_1} \overrightarrow{\gamma}(s) + \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{f}(s)ds + \sum_K (\overrightarrow{M}^K + \overrightarrow{OA}^K \wedge \overrightarrow{R}^K) = 0 \tag{1.11}$$

Dans le cas d'une structure plane chargée dans son plan, les équations d'équilibre statique se réduisent à deux équations de résultante et une équation de moment :

$$\begin{array}{ccccccc} \sum_k F_x^k & + & \int_{s_0}^{s_1} f_x(s)ds & + & \sum_K R_x^K & = & 0 \\ \sum_k F_y^k & + & \int_{s_0}^{s_1} f_y(s)ds & + & \sum_K R_y^K & = & 0 \end{array} \tag{1.12}$$

$$\sum_k (\Gamma^k + x^k F_y^k - y^k F_x^k) + \int_{s_0}^{s_1} \gamma + x f_y - y f_x ds + \sum_K (M^K + x^K R_y^K - y^K R_x^K) = 0 \tag{1.13}$$

En notant x^k, y^k les coordonnées des points P^k où sont exercés les efforts concentrés, et x^K, y^K les coordonnées des liaisons A^K.

1.2.4 Isostatisme, hyperstatisme, système instable

Définition
*Un système est **instable** s'il est impossible de vérifier les équations d'équilibre statique.*
*Un système est **isostatique** si les équations d'équilibre statique permettent de déterminer complètement les efforts de liaison.*
*Un système est **hyperstatique** si ces équations ne suffisent pas.*

Les équations d'équilibre statique (1.10), (1.11), ou (1.12), (1.13), appliquées à chaque sous-système, fournissent un certain nombre n_e d'équations indépendantes entre les efforts extérieurs (donnés) et les efforts de liaison (n_s inconnues du problème). En règle générale, c'est-à-dire sauf pour certaines géométries singulières, on a la situation suivante :

— Si $n_s < n_e$, les efforts extérieurs génèrent un mouvement du système. Celui-ci est instable et son équilibre ne peut être traité dans le cadre de la statique.

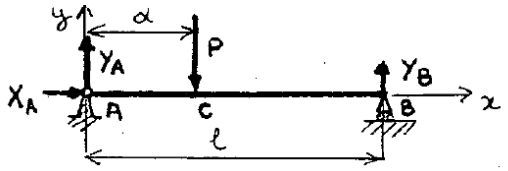
— Si $n_s = n_e$, le système est isostatique. On peut calculer toutes les inconnues de liaison à partir des seules équations de la statique.

— Si $n_s > n_e$, le système est hyperstatique de degré $h = n_s - n_e$. On peut calculer les efforts de liaison en fonction de h inconnues hyperstatiques, qu'il s'agira ensuite de déterminer pour lever l'hyperstatisme du système. C'est un des problèmes de base de la RDM.

1.3 Exemples de calcul des efforts de liaison

1.3.1 Poutres droites

Exemple 1 : poutre articulée - appuyée soumise à un effort concentré



$$\begin{cases} n_s = 3 : X_A, \quad Y_A, \quad Y_B \\ n_e = 3 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Isostatique

On a 3 inconnues de liaison (2 composantes X_A , Y_A de la réaction en A, 1 réaction verticale Y_B en B, et 3 équations de la statique. Le système est donc isostatique.

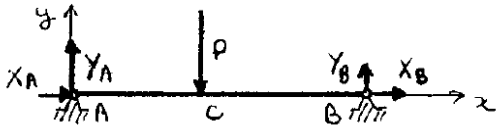
Les équations d'équilibre statique (1.12) et (1.13) donnent :

$$X_A = 0 \tag{1.14}$$

$$\begin{cases} Y_A + Y_B - P = 0 \\ -P\alpha + Y_B l = 0 \end{cases} \tag{1.15}$$

$$Y_B = \frac{P\alpha}{l} \qquad Y_A = \frac{P(l-\alpha)}{l} \tag{1.16}$$

Exemple 1 bis : poutre articulée - articulée soumise à un effort concentré



$$\begin{cases} n_s = 4 : X_A, \quad Y_A, \quad X_B \quad Y_B \\ n_e = 3 \end{cases}$$

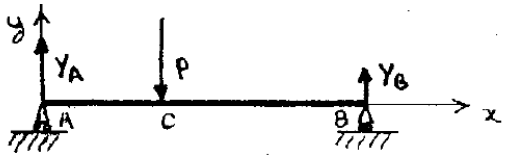
$\Rightarrow$ Hyperstatique de degré 1

On a 4 inconnues de liaison. (1.14) devient :

$$X_A + X_B = 0 \tag{1.17}$$

(1.15) est inchangée et permet d'écrire (1.16). Ainsi, le système est hyperstatique de degré 1, car on ne peut pas calculer X_A et X_B. Néanmoins, on peut ignorer les efforts de liaison longitudinaux pour calculer la réponse en statique d'une poutre droite chargée transversalement (car la déformée et les contraintes ne dépendent que des efforts transversaux).

Exemple 1 ter : poutre appuyée - appuyée soumise à un effort concentré

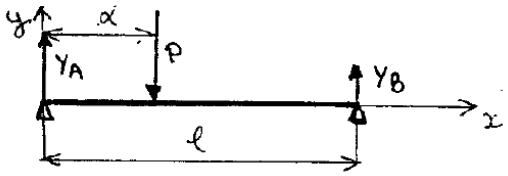


$$\begin{cases} n_s = 2 : Y_A, \quad Y_B \\ n_e = 3 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Instable

On a 2 inconnues de liaison, et (1.14) devient $0 = 0$. (1.15) et (1.16) restent inchangés. La poutre semble instable, car elle ne peut supporter aucun effort extérieur longitudinal. Celui-ci conduirait à une translation de la poutre selon $\overrightarrow{x}$. Néanmoins, cette mobilité n'est pas activée si la poutre droite est soumise uniquement à des chargements transversaux.

Les trois exemples précédents de poutres droites chargées transversalement peuvent donc être considérées comme une seule et même poutre supportée par deux appuis.



$$\begin{cases} n_s = 2 : Y_A, \quad Y_B \\ n_e = 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Isostatique

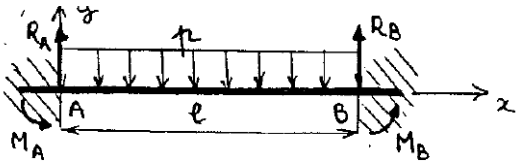
Par conséquent, on ne considère plus que les efforts transversaux et les 3 équations d'équilibre (1.12) et (1.13) se réduisent à 2 :

$$\sum_k F^k \quad + \quad \sum_K R^K \quad + \quad \int_{s_0}^{l} f(x)dx \quad = \quad 0 \tag{1.18}$$

$$\sum_k (\Gamma^k + x^k F^k) + \int_0^l x f(x)dx + \sum_k (M^k + x^k R^k) = 0 \tag{1.19}$$

où l'on a noté $F^k = F_y^k$ ($F_x^k = 0$) etc.

Exemple 2 : poutre encastrée - encastrée soumise à un effort réparti uniforme



$$\begin{cases} n_s = 4 : R_A, \quad M_A, \quad R_B, \quad M_B \\ n_e = 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Hyperstatique de degré 2

Les équations d'équilibre statique (1.18) et (1.19) donnent directement :

$$R_A + R_B - pl = 0 \qquad \textit{Résultante} \tag{1.20}$$

$$M_A + M_B + R_B l - \frac{pl^2}{2} = 0 \qquad Moment/A \tag{1.21}$$

Si on choisit comme inconnues hyperstatiques R_A et M_A, on obtient :

$$\begin{array}{lllllll} R_B & = & pl & - & R_A & = & 0 \\ M_B & = & -M_A & + & R_A l & - & \frac{pl^2}{2} \quad = \quad 0 \end{array} \tag{1.22}$$

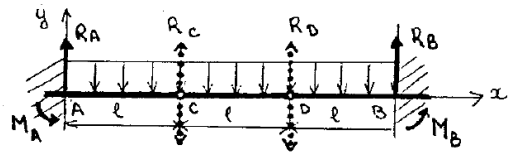
Le système est hyperstatique de degré 2.

On peut utiliser la symétrie du problème pour réduire le degré d'hyperstatisme à 1.

$$R_A = R_B = \frac{pl}{2} \qquad M_A = -M_B \tag{1.23}$$

Il ne subsiste qu'une inconnue hyperstatique M_A.

Exemple 3 : système de poutres articulées, encastré aux extrémités

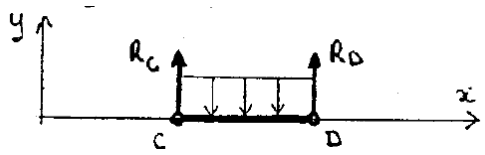


$$\begin{cases} n_s = 6 : R_A, R_B, R_C, R_D, M_A, M_B \\ n_e = 6 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Isostatique

On a 6 inconnues de liaison (les deux encastrements donnent 4 inconnues et les deux articulations intermédiaires en donnent 2). L'équilibre des 3 poutres AC, CD et BD fournit 6 équations. Le système est donc isostatique.

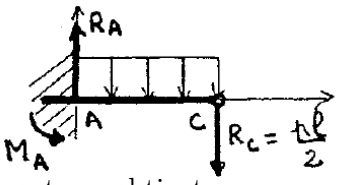
L'équilibre de la poutre CD donne (en notant R_C et R_D la valeur algébrique des efforts exercés par AC et BD sur CD, et donc $-R_C$ et $-R_D$ les efforts exercés par CD sur AC et BD) :



$$\begin{cases} R_C + R_D - pl = 0 \\ R_D l - \frac{Pl^2}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad R_C = R_D = \frac{pl}{2}$$

DL'équilibre de AC donne :



$$\begin{cases} R_A = pl + R_C = \frac{3pl}{2} \\ M_A + R_C l + \frac{pl^2}{2} = pl^2 \end{cases}$$

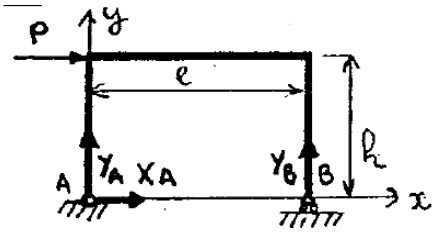
L'équilibre de BD donne R_B et M_B.

Finalement, on obtient :

$$R_A = R_B = \frac{3pl}{2} \qquad R_C = R_D = \frac{pl}{2} \qquad M_A = -M_B = pl^2 \tag{1.24}$$

1.3.2 Structures planes

Exemple 1 : portique articulé-appuyé



$$\begin{cases} n_s = 3 : X_A, \ Y_A, \ Y_B \\ n_e = 3 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Isostatique

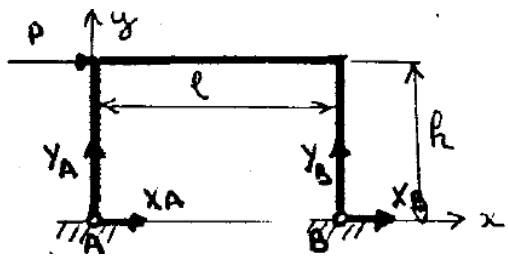
On a 3 inconnues de liaison (2 pour l'articulation en A, 1 pour l'appui simple en B). Les 3 trois équations d'équilibre statique s'écrivent :

$$\begin{cases} X_A + P = 0 & \textit{Résultante}/x \\ Y_A + Y_B = 0 & \textit{Résultante}/y \\ Y_B l - Ph = 0 & \textit{Moment}/A \end{cases} \tag{1.25}$$

Le système est isostatique.

$$X_A = -P \quad , \quad Y_B = -Y_A = \frac{Ph}{l} \tag{1.26}$$

Exemple 2 : portique articulé-articulé



$$\begin{cases} n_s = 4 : X_A, \ Y_A, \ X_B, \ Y_B \\ n_e = 3 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Hyperstatique de degré 1

On a 4 inconnues de liaison. Les équations (1.25) deviennent :

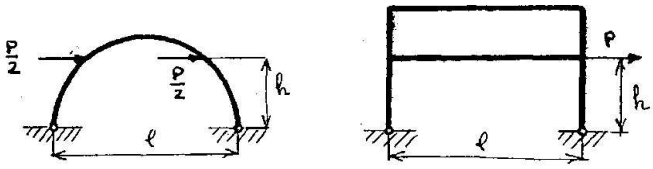
$$\begin{cases} X_A + X_B + P = 0 & \textit{Résultante}/x \\ Y_A + Y_B = 0 & \textit{Résultante}/y \\ Y_B l - Ph = 0 & \textit{Moment}/A \end{cases} \tag{1.27}$$

Le système est hyperstatique de degré 1. O prend comme inconnue hyperstatique X_A.

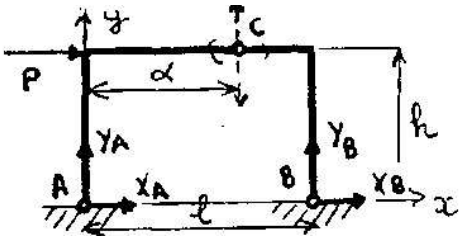
$$X_B = -P - X_A \quad , \quad Y_B = -Y_A = \frac{Ph}{l} \tag{1.28}$$

Remarque 1 : le caractère isostatique ou hyperstatique dépend uniquement de la structure et non du chargement.

Remarque 2 : les résultats de l'application de la statique dépendent de la géométrie et la nature des appuis d'une part, et du torseur des efforts extérieurs appliqués d'autre part. Ils ne dépendent pas de la forme de la structure et de la manière précise dont sont appliquées les efforts extérieurs. Par exemple, les résultats (1.28) restent valables pour les deux structures suivantes :



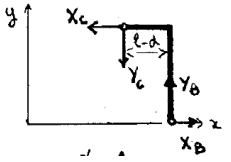
Exemple 3 : Portique à 3 articulations



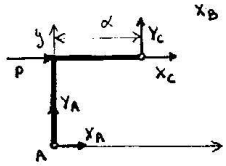
$$\begin{cases} n_s = 6 \ : \ X_A, \ Y_A, \ X_B, \ Y_B, \ X_C, \ Y_C \\ n_e = 6 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Isostatique

On a 6 inconnues de liaison (2 pour chaque articulation). Les équations d'équilibre des 2 solides fournissent 6 équations statiques. Le système est isostatique. Pour calculer les inconnues de liaison $\overrightarrow{R_A}$, $\overrightarrow{R_B}$ et $\overrightarrow{R_C}$, action de BC sur AC, on peut procéder analytiquement en écrivant l'équilibre de BC, puis de AC :



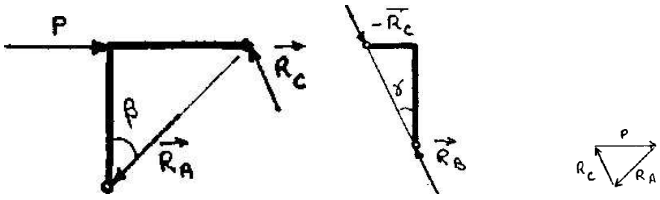
$$\begin{cases} X_C - X_B = 0 \\ Y_C - Y_B = 0 \\ X_C h + Y_C(l-\alpha) = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} Y_A + Y_C = 0 \\ X_A + X_C + P = 0 \\ (P + X_C)h - Y_C\alpha = 0 \end{cases}$$

$$Y_B = Y_C = -Y_A = \frac{Ph}{l} \qquad X_B = X_C = -\frac{P(l-\alpha)}{l} \qquad X_A = -\frac{P\alpha}{l} \tag{1.29}$$

Mais il est plus simple de procéder géométriquement.



$$\tan(\beta) = \frac{\alpha}{h} \quad , \quad \tan(\gamma) = \frac{l-\alpha}{h} \tag{1.30}$$

En effet, l'équilibre de BC soumis à deux efforts $\overrightarrow{R_B}$ et $-\overrightarrow{R_C}$ montre que $\overrightarrow{R_B} = \overrightarrow{R_C}$ est porté par BC. L'équilibre de AC, soumis à trois efforts $\overrightarrow{P}$, $\overrightarrow{R_C}$ et $\overrightarrow{R_A}$ montre que ces trois forces doivent être concourantes, c'est-à-dire que $\overrightarrow{R_A}$ est portée par AC. On détermine les valeurs de $\overrightarrow{R_A}$ et $\overrightarrow{R_C}$ en écrivant que la somme vectorielle de ces trois efforts est nulle, ce qui donne (1.29).

Chapitre 2

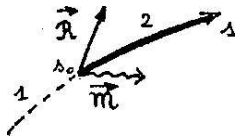
Efforts intérieurs en RDM

2.1 *Torseur des efforts intérieurs*

2.1.1 Définition des efforts intérieurs

Les efforts intérieurs correspondent aux efforts exercés sur une partie du solide par la partie complémentaire. L'introduction d'une coupure le long de la section droite en P, permet de caractériser les efforts intérieurs par les efforts exercés par la partie ① sur la partie ②. Conformément à l'hypothèse de Saint-Venant, ces efforts intérieurs sont caractérisés par leur torseur $[\mathcal{T}_{1\to 2}]$. D'après le principe de l'action et de la réaction, les efforts exercés par ① sur ② sont opposés aux efforts exercés par ② sur ①.

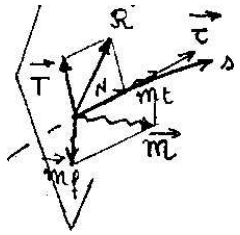
$$[\mathcal{T}_{1\to 2}] = -[\mathcal{T}_{2\to 1}] \tag{2.1}$$



Par convention, on prend comme parties ① et ② les parties orientées vers les s décroissants et croissants respectivement, et on appelle "torseur des efforts intérieurs" au point P d'abscisse curviligne s_0, le torseur $[\mathcal{T}(s_0)]$ des efforts exercés par la partie "gauche" ($s < s_0$) sur la partie "droite" ($s > s_0$). Le torseur des efforts intérieurs est caractérisé par ses éléments de réduction au point P : résultante $\overrightarrow{\mathcal{R}}(s)$ et moment $\overrightarrow{\mathcal{M}}(s)$. Ces deux vecteurs sont projetés sur la normale à la section droite, c'est-à-dire sur la tangente $\overrightarrow{\tau}$, et sur le plan normal à la courbe représentative.

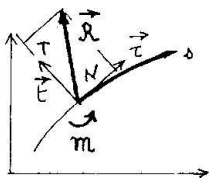
$$\overrightarrow{\mathcal{R}} = N\overrightarrow{\tau} + \overrightarrow{T} \quad , \quad \overrightarrow{\mathcal{M}} = \mathcal{M}_t\overrightarrow{\tau} + \overrightarrow{\mathcal{M}_f} \tag{2.2}$$

N est l'effort normal,
$\overrightarrow{T}$ est l'effort tranchant,
$\mathcal{M}_t$ est le moment de torsion,
$\overrightarrow{\mathcal{M}_f}$ est le moment fléchissant.



En particulier, il résulte des définitions précédentes que N est positif en compression et négatif en traction. Cette convention de signe n'est pas universelle et peut changer d'un ouvrage à l'autre. Il convient donc de choisir une convention et de s'y tenir.

Dans le cas des structures planes chargées dans leur plan, le torseur des efforts intérieurs ne fait intervenir que 3 composantes :
2 composantes pour la résultante $\overrightarrow{\mathcal{R}}$,
1 composante pour le moment $\mathcal{M}$ (moment de flexion).



En particulier, l'effort tranchant $\overrightarrow{T}$ devient une quantité algébrique. En choisissant par exemple de prendre la normale principale à la courbe $\overrightarrow{t}$ orientée à $+\frac{\pi}{2}$ de $\overrightarrow{\tau}$:

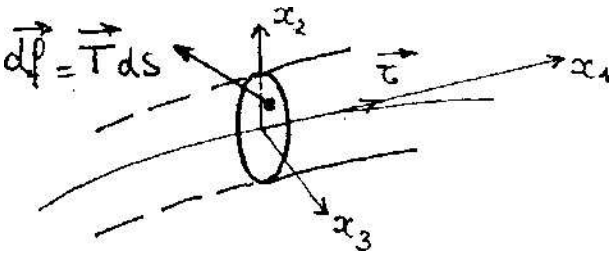
$$\overrightarrow{R} = N\overrightarrow{\tau} + T\overrightarrow{t} \qquad , \qquad \overrightarrow{M} = M\overrightarrow{z} \tag{2.3}$$

N est l'effort normal, T est l'effort tranchant, $\mathcal{M}$ est le moment fléchissant.

Dans le cas des poutres droites chargées transversalement, on peut ignorer les efforts longitudinaux, et donc l'effort normal. Par conséquent, les efforts intérieurs ne font donc plus intervenir que 2 composantes : l'effort tranchant et le moment fléchissant.

2.1.2 Relation entre efforts intérieurs et contraintes

Un point P du milieu curviligne représente une section droite. Le torseur des efforts intérieurs $[\tau(s)]$ est donc le torseur représentant tous les efforts élémentaires exercés à travers la section droite par la partie gauche sur la partie droite.



Les efforts intérieurs sont caractérisés à partir du tenseur des contraintes σ par le vecteur contrainte $\overrightarrow{T}$. Le torseur des efforts intérieurs s'obtient donc par intégration de ces efforts sur la section droite Σ.

$$\overrightarrow{\mathcal{R}} = \iint_\Sigma \overrightarrow{T} dS \qquad \overrightarrow{\mathcal{M}} = \iint_\Sigma \overrightarrow{PM} \wedge \overrightarrow{T} dS \tag{2.4}$$

Si on introduit le système d'axes local $(P, \overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{x}_2, \overrightarrow{x}_3)$ tel que $\overrightarrow{x}_1 estdansladirectionduvecteurtangent \overrightarrow{\tau}$ et que $\overrightarrow{x}_2 et \overrightarrow{x}_3)$ sont dans le plan de la section droite, alors le vecteur $\overrightarrow{T}$ a comme composantes $(-\sigma_{11}, -\sigma_{12}, -\sigma_{13})$ et les formules (2.4) s'expriment sous la forme suivante :

$$\mathcal{R}_1 = N = -\iint_\Sigma \sigma_{11}\ dx_2 dx_3 \quad \text{effort normal} \tag{2.5}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{R}_2 = T_2 = -\iint_\Sigma \sigma_{12}\ dx_2 dx_3 \\ \mathcal{R}_3 = T_3 = -\iint_\Sigma \sigma_{12}\ dx_2 dx_3 \end{array} \right\} \quad \text{effort tranchant} \tag{2.6}$$

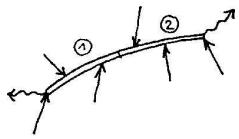
$$\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_t = -\iint_\Sigma (x_3\sigma_{12} - x_2\sigma_{13})\ dx_2 dx_3 \quad \text{moment de torsion} \tag{2.7}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_{f_2} = -\iint_\Sigma x_3\sigma_{11}\ dx_2 dx_3 \\ \mathcal{M}_3 = \mathcal{M}_{f_3} = +\iint_\Sigma x_2\sigma_{11}\ dx_2 dx_3 \end{array} \right\} \quad \text{moment de flexion} \tag{2.8}$$

2.1.3 Calcul des efforts intérieurs

Le torseur des efforts intérieurs a été défini par une coupure permettant de séparer la poutre en deux parties :

Partie droite ou partie ② ($s > s_0$),
Partie gauche ou partie ① ($s < s_0$).



On peut donc obtenir le torseur des efforts intérieurs en écrivant l'équilibre de l'une ou l'autre de ces deux parties.

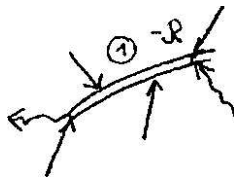
Les efforts extérieurs (efforts extérieurs donnés et efforts de liaison) se décomposent en deux parties : les efforts extérieurs appliqués sur la partie ① et les efforts extérieurs appliqués sur la partie ②. On note $[\mathcal{F}_{ext\to 1}]$ et $[\mathcal{F}_{ext\to 2}]$ les torseurs correspondants.
L'équilibre global de la poutre permet d'écrire la relation :

$$[\mathcal{F}_{ext}] = [\mathcal{F}_{ext\to 1}] + [\mathcal{F}_{ext\to 2}] = 0 \tag{2.9}$$

<u>Méthode 1</u> : on écrit l'équilibre de la partie gauche ①.

Les efforts appliqués à ① sont :

— les efforts extérieurs appliqués à ①,
— les efforts exercés par ② sur ①.



La condition d'équilibre est donc :

$$[\mathcal{T}_{2\to 1}] + [\mathcal{F}_{ext\to 1}] = 0 \tag{2.10}$$

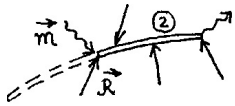
Compte-tenu de (2.1), on obtient :

$$[\mathcal{T}(s)] = [\mathcal{F}_{ext\to 1}] \tag{2.11}$$

Le torseur des efforts intérieurs est égal au torseur des efforts appliqués sur la partie gauche.

<u>Méthode 2</u> : on écrit l'équilibre de la partie droite ②.
Les efforts appliqués à ② sont :

— les efforts extérieurs appliqués à ②,
— les efforts exercés par ① sur ②.



La condition d'équilibre est donc :

$$[\mathcal{T}_{1\to 2}] + [\mathcal{F}_{ext\to 2}] = 0 \tag{2.12}$$

Compte-tenu de la convention de signe, on obtient :

$$[\mathcal{T}(s)] = -[\mathcal{F}_{ext\to 2}] \tag{2.13}$$

Le torseur des efforts intérieurs est opposé au torseur des efforts appliqués sur la partie droite.

Ces deux méthodes conduisent au même résultat. Pratiquement, on choisit celle qui conduit aux calculs les plus simples.

Pour les systèmes isostatiques, les équations d'équilibre statique permettent de calculer les efforts de liaison. On peut alors déterminer les efforts intérieurs par l'une des deux méthodes précédentes. En particulier, les efforts intérieurs sont indépendants de la loi de comportement.
Pour un système hyperstatique de degré h, on peut calculer les efforts de liaison, puis les efforts

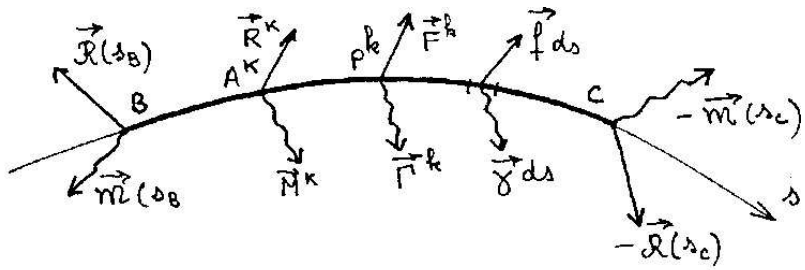
intérieurs, en fonction de h inconnues hyperstatiques. La loi de comportement intervient alors pour lever l'hyperstatisme, c'est-à-dire pour déterminer les inconnues hyperstatiques.
Finalement, l'espace des champs statiquement admissibles en RDM, c'est-à-dire l'espace des champs d'efforts intérieurs en équilibre avec un chargement donné, se réduit à un seul élément pour un système isostatique, alors que c'est un espace affine de dimension h pour un système hyperstatique de degré h.

2.1.4 Equations d'équilibre

Les conditions d'équilibre d'une partie quelconque de la structure ont déjà été exploitées au paragraphe 2.1.3. Néanmoins, il est intéressant de disposer des équations d'équilibre sous forme différentielle locale, qu'on obtient en écrivant l'équilibre d'une partie BC quelconque de la poutre.

En utilisant les notations des paragraphes 1.2.1 et 1.2.2, les efforts appliqués sur cette partie de poutre sont :

- les efforts extérieurs répartis $[\varphi(s)]$ ou $\overrightarrow{f}(s)$, $\overrightarrow{\gamma}(s)$,
- les efforts extérieurs concentrés $[\varphi^k]$ ou $\overrightarrow{F}^k$, Γ^k en P^k,
- les efforts de liaison $[\Psi^k]$ ou $\overrightarrow{R}^k$, M^k en A^k (en ne considérant que les points P^k et A^k situés entre B et C),
- les efforts intérieurs exercés par la partie située à gauche de B $[\mathcal{T}(s_B)]$ ou $\overrightarrow{\mathcal{R}}(s_B)$, $\overrightarrow{\mathcal{M}}(s_B)$,
- Les efforts intérieurs exercés par la partie située à droite de C $-[\mathcal{T}(s_C)]$ ou $-\overrightarrow{\mathcal{R}}(s_C)$, $-\overrightarrow{\mathcal{M}}(s_C)$.



La condition d'équilibre s'écrit alors :

$$[\mathcal{T}(s_B)] - [\mathcal{T}(s_C)] + \sum_k [\varphi^k] + \sum_k [\Psi^k] + \int_{s_B}^{s_C} [\varphi(s)]ds = 0 \tag{2.14}$$

soit, en séparant résultante et moment :

$$\overrightarrow{\mathcal{R}}(s_B) - \overrightarrow{\mathcal{R}}(s_C) + \sum_k \overrightarrow{F}^k + \sum_k \overrightarrow{R}^k + \int_{s_B}^{s_C} \overrightarrow{f}(s)ds = \overrightarrow{0} \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathcal{M}}(s_B) + \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{R}(s_B) - \overrightarrow{M}(s_C) - \overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{R}(s_C) + \sum_k \left(\overrightarrow{\Gamma}^k + \overrightarrow{OP}^k \wedge \overrightarrow{F}^k\right) \\ + \sum_k \left(\overrightarrow{M}^k + \overrightarrow{OA}^k \wedge \overrightarrow{R}^k\right) + \int_{s_B}^{s_C} \left(\overrightarrow{\gamma}(s) + \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{f}(s)\right) ds = \overrightarrow{0}\end{aligned} \tag{2.16}$$

Pour exploiter ces équations, on choisit différentes parties BC.

<u>1er cas</u> : pas d'effort concentré entre B et C
L'équation (2.15) devient :

$$\int_{s_B}^{s_C} \overrightarrow{f}(s)ds = \overrightarrow{\mathcal{R}}(s_B) - \overrightarrow{\mathcal{R}}(s_C) = \int_{s_B}^{s_C} \frac{d\overrightarrow{\mathcal{R}}}{ds} ds$$
$$\int_{s_B}^{s_C} \left[\frac{d\overrightarrow{\mathcal{R}}}{ds} - \overrightarrow{f}(s)\right] ds$$

Cette équation doit être vérifiée pour toute valeur de s_B et s_C. On en déduit :

$$\frac{d\overrightarrow{\mathcal{R}}}{ds} = \overrightarrow{f}(s) \tag{2.17}$$

De la même manière, l'équation de moment donne :

$$\begin{aligned}\int_{s_B}^{s_C} \left(\overrightarrow{\gamma}(s) + \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{f}(s)ds\right) &= \overrightarrow{\mathcal{M}}(s_C) + \overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{\mathcal{R}}(s_C) - \overrightarrow{\mathcal{M}}(s_B) - \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{\mathcal{R}}(s_B) \\ &= \left[\overrightarrow{\mathcal{M}} + \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{\mathcal{R}}\right]_{P=B}^{P=C} \\ &= \int_B^C \frac{d}{ds}\left[\overrightarrow{\mathcal{M}} + \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{\mathcal{R}}\right] ds \\ &= \int_B^C \left[\frac{d\overrightarrow{\mathcal{M}}}{ds} + \overrightarrow{\tau} \wedge \overrightarrow{\mathcal{R}} + \overrightarrow{OP} \wedge \frac{d\overrightarrow{\mathcal{R}}}{ds}\right] ds\end{aligned}$$

Compte-tenu de (2.17), on en déduit :

$$\int_{s_B}^{s_C} \left[\frac{d\overrightarrow{\mathcal{M}}}{ds} + \overrightarrow{\tau} \wedge \overrightarrow{\mathcal{R}} - \overrightarrow{\gamma}(s) + \overrightarrow{OP} \wedge \cancel{\left(\frac{d\overrightarrow{\mathcal{R}}}{ds} - \overrightarrow{f}(s)\right)}\right] ds = \overrightarrow{0}$$

$$\frac{d\overrightarrow{\mathcal{M}}}{ds} = \overrightarrow{\gamma}(s) - \overrightarrow{\tau} \wedge \overrightarrow{\mathcal{R}} \tag{2.18}$$

<u>2ème cas</u> : au passage d'un effort concentré en P^k

On fait alors tendre B vers P^k par la gauche et C vers P^k par la droite ($s_B \to s_k^-, s_C \to s_k^+$), ce qui revient à écrire l'équilibre d'un élément entourant P^k. (2.15) et (2.16) deviennent alors :

$$\overrightarrow{\mathcal{R}}(s_k^+) = \overrightarrow{\mathcal{R}}(s_k^-) + \overrightarrow{F}^k \tag{2.19}$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}(s_k^+) = \overrightarrow{\mathcal{M}}(s_k^-) + \overrightarrow{\Gamma}^k \tag{2.20}$$

La résultante et le moment des efforts intérieurs subissent une discontinuité égale à la résultante et au moment de l'effort extérieur appliqué.

<u>3ème cas</u> : au passage d'une liaison A^k

On obtient de la même manière :

$$\overrightarrow{\mathcal{R}}(s_k^+) = \overrightarrow{\mathcal{R}}(s_k^-) + \overrightarrow{R}^k \tag{2.21}$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}(s_k^+) = \overrightarrow{\mathcal{M}}(s_k^-) + \overrightarrow{M}^k \tag{2.22}$$

<u>4ème cas</u> : aux extrémités droite et gauche de la poutre

On peut écrire les relations (2.19), (2.20), (2.21), (2.22) avec :

$$\overrightarrow{\mathcal{R}}(s_0^-) = \overrightarrow{\mathcal{R}}(s_1^+) = 0 \qquad , \qquad \overrightarrow{\mathcal{M}}(s_0^-) = \overrightarrow{\mathcal{M}}(s_1^+) = 0 \tag{2.23}$$

pour une poutre $[s_0, s_1]$, où s_0 représente l'extrémité gauche et s_1 l'extrémité droite.

Ainsi, connaissant les efforts extérieurs, on peut calculer le torseur des efforts intérieurs par intégration de (2.17), (2.18), avec les relations de discontinuité (2.19), (2.20) et (2.21), (2.22) et les conditions aux limites (2.23). Ce calcul est équivalent au calcul global présenté au paragraphe 2.1.3. Il est généralement moins facile à mettre en oeuvre. Néanmoins, il peut être utile pour certaines applications.

2.2 Exemples de calcul des efforts intérieurs

2.2.1 Poutres droites

Dans le cas des poutres droites, les efforts intérieurs sont l'effort tranchant T et le moment fléchissant M. Si on suppose qu'il n'y a pas de moment réparti ($\gamma = 0$), les relations (2.17) et (2.18) s'écrivent :

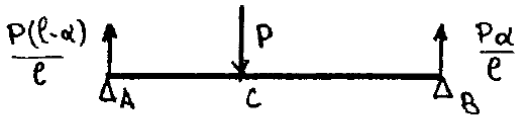
$$\frac{dT}{dx} = f(x) \tag{2.24}$$

$$\frac{d\mathcal{M}}{dx} = -T(x) \tag{2.25}$$

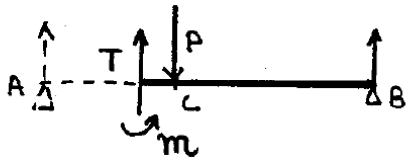
Les trois exemples ci-dessous correspondent à ceux du paragraphe 1.3.1.

Exemple 1 : poutre appuyée - appuyée soumise à un effort concentré

Pour calculer les efforts intérieurs T et $\mathcal{M}$, il faut considérer séparément les deux tronçons AC et BC.



Sur AC : $0 \leqslant x \leqslant \alpha$
On utilise la méthode 1 : le torseur des efforts intérieurs est égal au torseur des efforts appliqués sur la partie gauche (c'est-à-dire au torseur induit par la réaction en A). En prenant ses éléments de réduction au point d'abscisse x, on trouve :

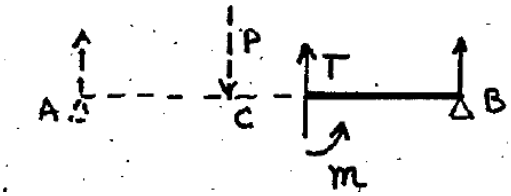


$$T = \frac{P(l-\alpha)}{l} \qquad , \qquad \mathcal{M} = -\frac{P(l-\alpha)}{l}x \tag{2.26}$$

On peut vérifier que l'on obtient le même résultat par la méthode 2, mais les calculs sont plus complexes.

Sur BC : $\alpha \leqslant x \leqslant l$
Il faut tenir compte de l'effort appliqué P, et il vient :

$$\begin{aligned} T &= \tfrac{P(l-\alpha)}{l} - P = \tfrac{P\alpha}{l} \\ \mathcal{M} &= -\tfrac{P(l-\alpha)}{l}x + P(x-\alpha) = -\tfrac{P\alpha}{l}(l-x) \end{aligned} \tag{2.27}$$



Ces résultats permettent de tracer les diagrammes de l'effort tranchant et du moment fléchissant, c'est-à-dire les courbes donnant T et $\mathcal{M}$ en fonction de x.

On peut également calculer T et $\mathcal{M}$ par intégration de (2.24) et (2.25). Partant de $x = 0$ et d'après (2.23), on a :

$$T(0^-) = M(0^-) = 0 \tag{2.28}$$

Le torseur des efforts de liaison en A se réduit à un effort Y_A. On obtient alors par (2.21) et (2.22) :

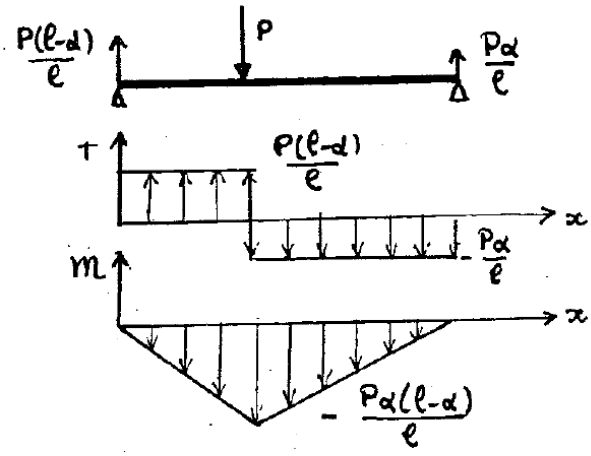
$$T(0^+) = Y_A = \frac{P(l-\alpha)}{l} \qquad , \qquad \mathcal{M}(0^+) = 0 \tag{2.29}$$

L'intégration de (2.24) et (2.25) entre 0 et α donne, avec les conditions aux limites (2.29) :

$$T(x) = \frac{P(l-\alpha)}{l} \qquad , \qquad \mathcal{M}(x) = -\frac{P(l-\alpha)}{l}x \tag{2.30}$$

Au passage de l'effort concentré, on obtient par (2.19) et (2.20) :

$$T(\alpha^+) = T(\alpha^-) - P = -\frac{P\alpha}{l} \qquad , \qquad \mathcal{M}(\alpha^+) = \mathcal{M}(\alpha^-) = -\frac{P(l-\alpha)\alpha}{l} \tag{2.31}$$



L'intégration de (2.24), (2.25) entre α et l donne :

$$T(x) = -\frac{P\alpha}{l} \qquad , \qquad \mathcal{M}(x) = -\frac{P(l-\alpha)\alpha}{l} + \frac{P\alpha}{l}(x-\alpha) \tag{2.32}$$

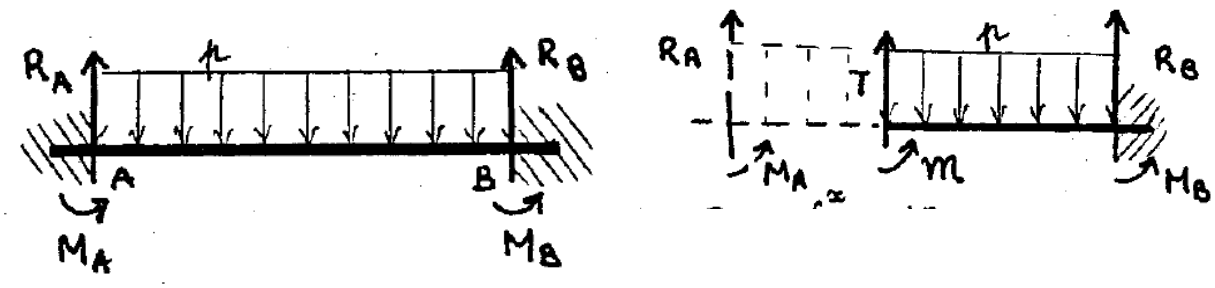
Pour $x = l$, il suffit d'écrire (2.21), (2.22) pour vérifier que :

$$T(l^+) = T(l^-) + Y_B = 0 \qquad , \qquad M(l^+) = M(l^-) = 0 \tag{2.33}$$

On peut donc calculer les efforts intérieurs par intégration des équations d'équilibre du paragraphe 2.1.4, mais, en général, on préfère utiliser les conditions d'équilibre global du paragraphe 2.1.3.

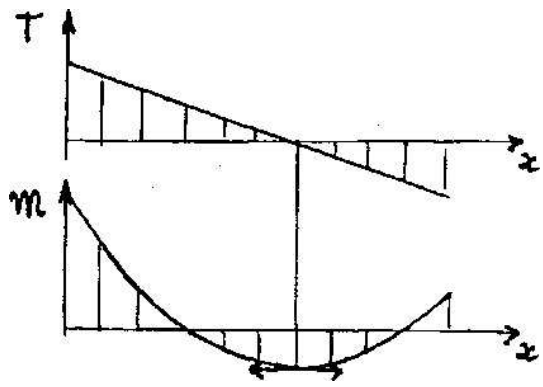
Exemple 2 : poutre encastrée - encastrée soumise à un effort réparti uniforme

On utilise la méthode 1.



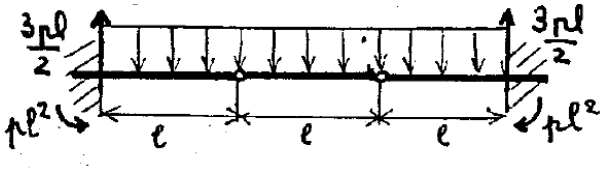
$$\begin{aligned} T &= R_A - \textstyle\int_0^x p\, d\xi = R_A - px \\ \mathcal{M} &= M_A - R_A x + \textstyle\int_0^x p(x-\xi)\, d\xi = M_A - R_A x + \frac{px^2}{2} \end{aligned} \tag{2.34}$$

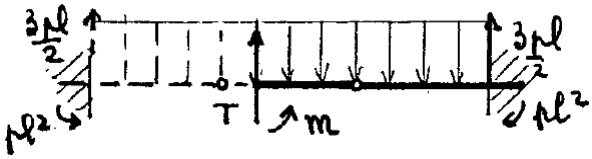
Les diagrammes de l'effort tranchant et du moment fléchissant dépendent des inconnues hyperstatiques. L'effort tranchant présente une variation linéaire. Le moment fléchissant présente une variation parabolique. En particulier, d'après (2.25), le moment fléchissant passe par un minimum au point où l'effort tranchant s'annule. Cette remarque est importante, car le dimensionnement d'une poutre résulte de la valeur absolue maximale du moment fléchissant. Cette valeur peut ici être atteinte aux extrémités $x = 0$ et $x = l$ ou bien au point où l'effort tranchant s'annule.



Exemple 3 : système de poutres articulées, encastré aux extrémités

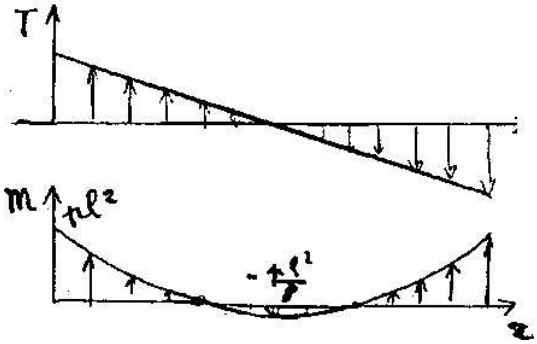
On utilise la méthode 1.





$$T = \frac{3pl}{2} - px \qquad , \qquad M = pl^2 - \frac{3plx}{2} + \frac{px^2}{2} \quad (2.35)$$

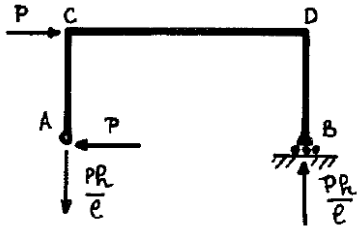
Comme précédemment, l'effort tranchant présente une variation linéaire et le moment fléchissant présente une variation parabolique. Le moment fléchissant s'annule automatiquement aux articulations. On aurait pu considérer chaque tronçon séparément, mais cela n'est pas nécessaire.



2.2.2 Structures Planes

Les exemples ci-dessous correspondent à ceux du paragraphe 1.3.2.

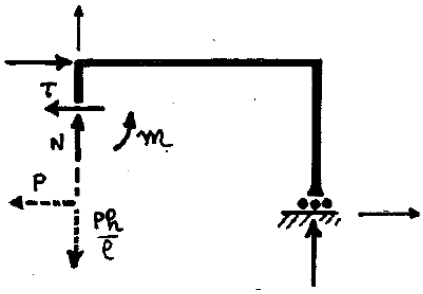
Exemple 1 : portique articulé-appuyé



On oriente le portique dans le sens ACDB.

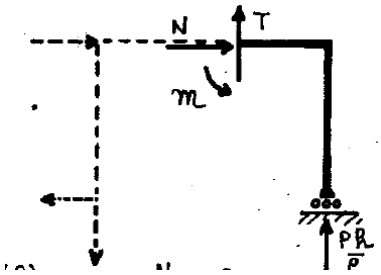
Sur AC, on utilise la méthode 1.
Compte-tenu des conventions de signe (N dans le sens de l'orientation, T à $+\frac{\pi}{2}$) :

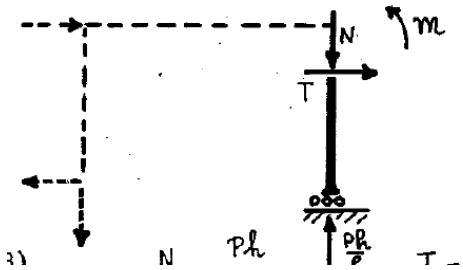
$$N = -\frac{Ph}{l}, T = P, \mathcal{M} = -Py \qquad (2.36)$$



Sur CD, on utilise la méthode 2.

$$N = 0, T = -\frac{Ph}{l}, \mathcal{M} = -\frac{Ph}{l}(l - x) \qquad (2.37)$$





Sur DB, on utilise la méthode 2.

$$N = \frac{Ph}{l}, T = 0, \mathcal{M} = 0 \tag{2.38}$$

Exemple 2 : portique articulé-articulé

Sur AC

$$N = -\frac{Ph}{l}, T = -X, \mathcal{M} = Xy \tag{2.39}$$

Sur CD

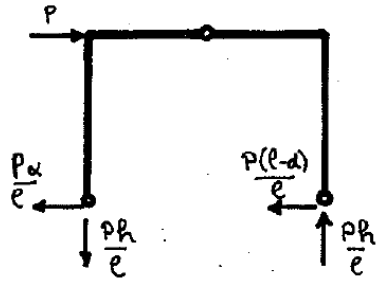
$$N = P + X, T = -\frac{Ph}{l}, \mathcal{M} = Xh + \frac{Ph}{l}x \tag{2.40}$$

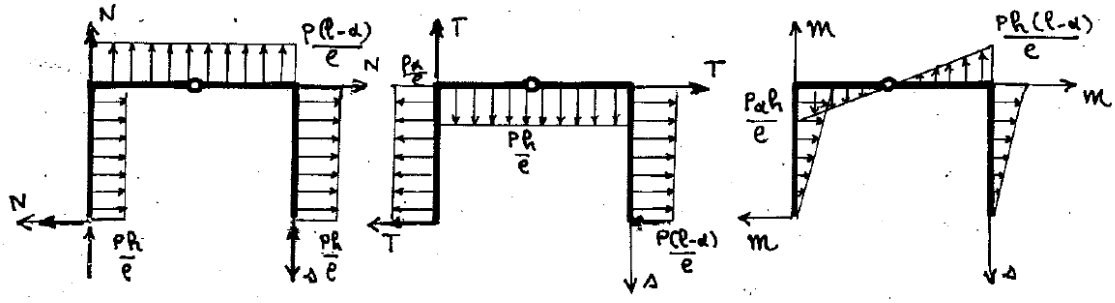
Sur DB

$$N = \frac{Ph}{l}, T = P + X, \mathcal{M} = (P + X)y \tag{2.41}$$

Exemple 3

C'est un cas particulier du précédent, avec $X = X_A$ donné par 1.29. Les figures ci-dessous présentent les diagrammes de l'effort normal, de l'effort tranchant et du moment fléchissant. Comme dans l'exemple du paragraphe précédent, on vérifie que $\mathcal{M}$ s'annule à l'articulation.





Dans tous ces exemples, on voit que :

— si le système est isostatique, on sait calculer les efforts intérieurs en tout point par utilisation des seules équations de la statique et ces résultats sont valables pour tout le milieu curviligne quels que soient son comportement et sa section droite,

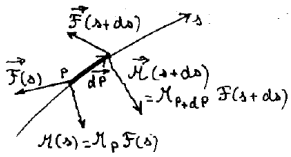
— si le système est hyperstatique, alors on ne peut calculer les efforts intérieurs qu'en fonction des inconnues hyperstatiques, qui sont fonctions de la nature et la loi de comportement du milieu curviligne.

Chapitre 3

Travaux virtuels - Déformations

3.1 *Dérivée d'un torseur*

Soit un torseur $[\mathcal{F}(s)]$ défini en tout point du milieu curviligne, comme par exemple le torseur des efforts intérieurs $[\mathcal{T}(s)]$ ou le torseur des efforts extérieurs répartis $[\varphi(s)]$.



On peut définir le torseur dérivée de $[\mathcal{F}]$ par :

$$\left[\frac{d\mathcal{F}}{ds}\right] = \lim_{ds\to 0} \frac{[\mathcal{F}(s+ds)] - [\mathcal{F}(s)]}{ds} \tag{3.1}$$

Si on caractérise le torseur par ses éléments de réduction au point P d'abscisse curviligne s :

$$\vec{\mathcal{F}}(s) \qquad , \qquad \vec{\mathcal{M}}(s) \tag{3.2}$$

Pour calculer la dérivée, on considère les éléments de réduction en un point O fixe.

$$\vec{\mathcal{F}}(s) \qquad , \qquad \vec{\mathcal{M}_O} = \vec{\mathcal{M}}(s) + \vec{OP} \wedge \vec{\mathcal{F}}(s) \tag{3.3}$$

Les éléments de réduction en O du torseur dérivée sont :

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{\mathcal{F}}}{ds} \\[2ex] \dfrac{d\vec{\mathcal{M}}}{ds} + \vec{OP} \wedge \dfrac{d\vec{\mathcal{F}}}{ds} + \vec{\tau} \wedge \vec{\mathcal{F}} \end{cases} \tag{3.4}$$

où $\vec{\tau}$ est le vecteur unitaire tangent à la courbe moyenne (normal à la section droite). Soit, en revenant au point P :

$$\frac{d\vec{\mathcal{F}}}{ds} \qquad , \qquad \frac{d\vec{\mathcal{M}}}{ds} + \vec{\tau} \wedge \vec{\mathcal{F}} \tag{3.5}$$

Ces formules définissent les éléments de réduction en P du torseur $\left[\dfrac{d\mathcal{F}}{ds}\right]$. En particulier, en comparant (3.5) à (2.17) et (2.18), les équations d'équilibre du paragraphe 2.1.4 peuvent s'écrire :

$$\left[\frac{d\tau}{ds}\right] = [\varphi(s)] \tag{3.6}$$

$$\left[\tau(s_k^+)\right] = \left[\tau(s_k^-)\right] + \left[\varphi^k\right] \qquad , \qquad \left[\tau(s_K^+)\right] = \left[\tau(s_K^-)\right] + \left[\Psi^k\right] \tag{3.7}$$

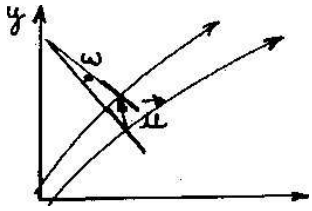
$$\left[\tau(s_0^-)\right] = \left[\tau(s_1^+)\right] = [0] \tag{3.8}$$

3.2 Torseur déplacement d'un milieu curviligne

Une poutre est un milieu curviligne dans lequel chaque point P de la courbe moyenne représente une section droite. Pour caractériser le déplacement de P, il faut se donner, non seulement le vecteur déplacement $\overrightarrow{u}$ de P, mais aussi la rotation $\overrightarrow{\omega}$ de la section droite. Le déplacement de P est donc défini par un torseur déplacement $[\mathcal{U}(s)]$, dont les éléments de réduction en P sont :

$$\overrightarrow{\omega}(s) \qquad , \qquad \overrightarrow{u}(s) \tag{3.9}$$

Dans le cas plan, la translation est contenue dans le plan (x, y) tandis que la rotation ω est perpendiculaire à ce plan. Le torseur déplacement fait donc intervenir 3 composantes u, v et ω.



$$\overrightarrow{u}(s) = \begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{\omega}(s) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega(s) \end{bmatrix}$$

Les conditions cinématiques de liaison introduites au 1.2.2 s'expriment à partir de $[\mathcal{U}]$.
Dans le cas général, on a :
<u>Encastrement</u>

$$\overrightarrow{u} = 0 \qquad , \qquad \overrightarrow{\omega} = 0 \tag{3.10}$$

<u>Rotule</u>

$$\overrightarrow{u} = 0 \tag{3.11}$$

Dans le cas plan, on a :

<u>Encastrement</u>

$$u = v = 0 \qquad , \qquad \omega = 0 \tag{3.12}$$

<u>Pivot</u> (articulation)

$$u = v = 0 \tag{3.13}$$

<u>Appui simple</u>

$$v = 0 \tag{3.14}$$

Si on applique au point P un effort généralisé de torseur $[\mathcal{F}]$, alors le travail de cet effort induit par le déplacement $[\mathcal{U}]$ est :

$$[\mathcal{F}] \,.\, [\mathcal{U}] = \overrightarrow{\mathcal{F}}(s).\overrightarrow{u}(s) + \overrightarrow{\mathcal{M}}(s).\overrightarrow{\omega}(s) \tag{3.15}$$

La terminologie torseur sous-entend que le mouvement d'une section droite est un mouvement de corps rigide, et que le déplacement d'un point M de la section droite est donné par :

$$\overrightarrow{u_M} = \overrightarrow{u_P} + \overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{PM} \tag{3.16}$$

En fait, ce n'est pas exact. Si la section droite reste effectivement plane en traction ou flexion simple, elle peut gauchir en torsion ou flexion composée. La description choisie ne donne que des informations moyennes sur le déplacement réel d'une section droite. La RDM est une théorie approchée et l'approximation sur les déplacements est duale de l'approximation sur les efforts. En fait, sitôt que l'on a choisi la schématisation des efforts extérieurs par leur torseur, la schématisation des déplacements est imposée par la dualité efforts extérieurs - déplacements, qui s'exprime par (3.15).

3.3 Principe des travaux virtuels

Principe des travaux virtuels
Pour tout champ de déplacements virtuels $\left[\overset{*}{\mathcal{U}}\right]$

$$-\int_{s_B}^{s_C} [\tau(s)] \,.\, \left[\frac{d\overset{*}{\mathcal{U}}}{ds}\right] ds = \int_{s_B}^{s_C} [\varphi(s)] \,.\, \left[\overset{*}{\mathcal{U}}(s)\right] ds + \sum_k \left[\varphi^k\right] . \left[\overset{*}{\mathcal{U}}(s_k)\right] + \sum_k \left[\Psi^K\right] . \left[\overset{*}{\mathcal{U}}(s_K)\right] \quad (3.17)$$

Le premier membre correspond au travail des efforts intérieurs induit par le déplacement virtuel $\left[\overset{*}{\mathcal{U}}(s)\right]$. Le second membre correspond au travail des efforts extérieurs (efforts extérieurs donnés répartis, efforts extérieurs donnés concentrés et efforts de liaison).

On introduit les 4 espaces suivants :

— espace des déplacements U : $u = [\mathcal{U}]$,
— espace des efforts extérieurs C : $\varphi = [\varphi] \,.\, \left[\varphi^k\right] . \left[\Psi^K\right]$,
— espace des efforts intérieurs S : $\sigma = [\tau]$,
— espace des déformations D : $\varepsilon = [\mathcal{D}]$.

Le travail des efforts extérieurs met en dualité S et D par :

$$\langle u, \varphi \rangle = \int_{s_0}^{s_1} [\varphi(s)] \,.\, [\mathcal{U}] \, ds + \sum_k \left[\varphi^k\right] . \left[\overset{*}{\mathcal{U}}(s_k)\right] + \sum_k \left[\Psi^K\right] . \left[\overset{*}{\mathcal{U}}(s_K)\right] \quad (3.18)$$

Le travail des efforts intérieurs met en dualité S et D par :

$$\langle\langle \varepsilon, \sigma \rangle\rangle = -\int_{s_0}^{s_1} [\tau(s)] \,.\, [\mathcal{D}(s)] \qquad , \qquad [\mathcal{D}(s)] = \left[\frac{d\mathcal{U}}{ds}\right] \quad (3.19)$$

Le principe des travaux virtuels (3.17) s'écrit alors sous la forme :

$$\langle\langle \overset{*}{\varepsilon}, \sigma \rangle\rangle = \langle \overset{*}{u}, \varphi \rangle \quad (3.20)$$

3.4 Torseur déformation d'un milieu curviligne

L'analyse précédente conduit à décrire les déformations d'un milieu curviligne par le torseur des déformations :

$$\mathcal{D}(s) = \left[\frac{d\mathcal{U}}{ds}\right] \quad (3.21)$$

Si l'on définit les éléments de réduction $\overrightarrow{\chi}$ et $\overrightarrow{\varepsilon}$ de $[\mathcal{D}(s)]$ en P :

$$\overrightarrow{\chi} = \frac{d\overrightarrow{\omega}}{ds} \qquad , \qquad \overrightarrow{\varepsilon} = \frac{d\overrightarrow{u}}{ds} + \tau \wedge \overrightarrow{\omega} \quad (3.22)$$

où $\overrightarrow{\tau}$ est le vecteur unitaire tangent à la courbe moyenne (normal à la section droite).

le problème de compatibilité des déformations ne se pose pas en RDM : quel que soit le champ de déformations $(\overrightarrow{\varepsilon}(s), \overrightarrow{\chi}(s))$, on peut toujours intégrer (3.22) pour en déduire un champ de déplacements.

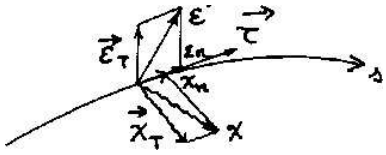
Une condition nécessaire et suffisante pour que le torseur de déformation soit identiquement nul est que le déplacement soit un déplacement de corps rigide :

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u_0} + \overrightarrow{\omega_0} \wedge \overrightarrow{x} \qquad , \qquad \overrightarrow{\omega} = \overrightarrow{\omega_0} \tag{3.23}$$

Le travail des efforts intérieurs par unité de longueur est donné d'après (3.19) par :

$$\overset{*}{W}_{int} = -\left[\tau\right].\left[\mathcal{D}\right] = -\overrightarrow{R}.\overrightarrow{\varepsilon} - \overrightarrow{M}.\overrightarrow{\chi} \tag{3.24}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{\varepsilon}$ et $\overrightarrow{\chi}$ sont respectivement duaux de $\overrightarrow{R}$ et $\overrightarrow{M}$. Comme pour $\overrightarrow{R}$ et $\overrightarrow{M}$, ces vecteurs peuvent être projetés sur la normale à la section droite et sur le plan de la section droite :



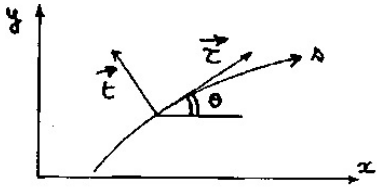
$$\overrightarrow{\varepsilon} = \varepsilon_n \overrightarrow{\tau} + \overrightarrow{\varepsilon_T} \qquad , \qquad \overrightarrow{\chi} = \chi_n \overrightarrow{\tau} + \overrightarrow{\chi_T} \tag{3.25}$$

de sorte que :

$$\overset{*}{W}_{int} = -\left(N\varepsilon_n + \overrightarrow{T}.\overrightarrow{\varepsilon_T} + M_t\chi_n + \overrightarrow{M_f}.\overrightarrow{\chi_T}\right) \tag{3.26}$$

dans le cas plan, le torseur des déformations ne fait intervenir que 3 composantes. En introduisant le vecteur $\overrightarrow{t}$ à $+\dfrac{\pi}{2}$ de $\overrightarrow{\tau}$, on peut écrire :

$$\overrightarrow{\varepsilon} = \varepsilon_n \overrightarrow{t} + \overrightarrow{\varepsilon_T} \qquad , \qquad \overrightarrow{\chi} = \chi \overrightarrow{e_z} \tag{3.27}$$



En notant d'un ' la dérivée par rapport à s, la formule (3.22) donne directement dans le repère x, y, z :

$$\overrightarrow{\varepsilon} = \begin{bmatrix} u' + \omega\sin\theta \\ v' - \omega\cos\theta \\ 0 \end{bmatrix} \overrightarrow{e_z} \qquad , \qquad \overrightarrow{\chi} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega' \end{bmatrix} \overrightarrow{e_z} \tag{3.28}$$

et avec (3.27), on obtient :

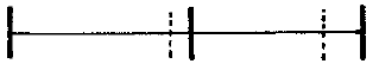
$$\begin{cases} \varepsilon_n = u'\cos\theta + v'\sin\theta \\ \varepsilon_T = v'\cos\theta - u'\sin\theta - \omega \\ \chi = \omega' \end{cases} \tag{3.29}$$

3.5 Interprétation physique

Pour dégager la signification physique des composantes ε_n, $\overrightarrow{\varepsilon_T}$, χ_n, $\overrightarrow{\chi_T}$, on considère une poutre droite orientée dans la direction x_1 ($\overrightarrow{\tau} = \overrightarrow{e_1}, s = x_1$) et on décrit les déformations correspondant à chacune des composantes supposées constantes.

Composante ε_n

$$\overrightarrow{\varepsilon} = (\varepsilon_0, 0, 0) \qquad , \qquad \overrightarrow{\omega} = 0 \tag{3.30}$$



A un déplacement de solide près (3.23), l'intégration de (3.22) donne :

$$\overrightarrow{u} = (\varepsilon_0 x_1, 0, 0) \qquad , \qquad \overrightarrow{\omega} = 0 \tag{3.31}$$

Par analogie avec la Mécanique des Milieux Continus, on retrouve la déformation obtenue en traction, avec $\varepsilon_0 = \frac{F}{ES}$. Le déplacement d'ensemble de la section droite est décrit, mais pas la contraction transversale de la section : c'est l'approximation RDM.

Composante χ_T

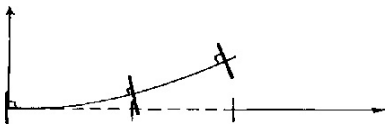
$$\overrightarrow{\varepsilon} = 0 \qquad , \qquad \overrightarrow{\chi} = (0, 0, \chi_0) \tag{3.32}$$

L'intégration de (3.22) donne :

$$\overrightarrow{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \chi_0 x_1 \end{bmatrix} \qquad , \qquad \frac{\overrightarrow{d\overrightarrow{u}}}{dx_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \chi_0 x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \chi_0 x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

soit finalement :

$$\overrightarrow{u} = (0, \frac{1}{2}\chi_0 x_1^2, 0) \qquad , \qquad \overrightarrow{\omega} = (0, 0, \chi_0 x_1) \tag{3.33}$$



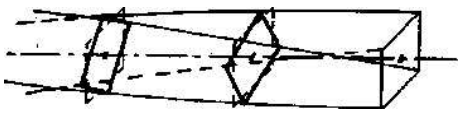
On retrouve la déformation obtenue en flexion simple, avec $\chi_0 = \dfrac{M}{EJ}$, toujours en se limitant au mouvement d'ensemble de la section droite. En particulier, on vérifie que la section droite reste normale à la fibre moyenne. L'hypothèse de Navier-Bernoulli est vérifiée.

Composante χ_n

$$\overrightarrow{\varepsilon} = 0 \qquad , \qquad \overrightarrow{\chi} = (\chi_0, 0, 0) \tag{3.34}$$

L'intégration de (3.22) donne :

$$\overrightarrow{u} = 0 \qquad , \qquad \overrightarrow{\omega} = (\chi_0 x_1, 0, 0) \tag{3.35}$$



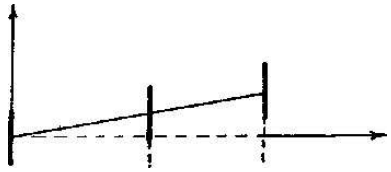
On retrouve la déformation obtenue en torsion avec $\chi_0 = \alpha = \dfrac{M}{GI}$. On constate cependant que l'approximation RDM ignore le gauchissement de la section. A ceci près, la section droite reste normale à la fibre moyenne. L'hypothèse de Navier-Bernoulli est vérifiée.

Composante ε_T

$$\overrightarrow{\varepsilon} = (0, \varepsilon_0, 0) \qquad , \qquad \overrightarrow{\chi} = 0 \tag{3.36}$$

L'intégration de (3.22) donne :

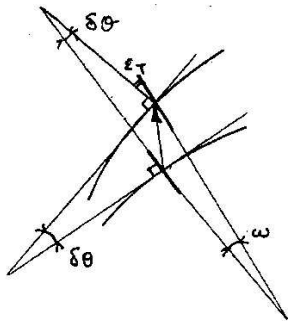
$$\overrightarrow{u} = (0, \varepsilon_0 x_1, 0) \qquad , \qquad \overrightarrow{\omega} = 0 \tag{3.37}$$



Ce cas ne correspond à aucun problème élastique. Néanmoins, cette déformation ressemble à un glissement simple. L'hypothèse de Navier-Bernoulli n'est plus vérifiée. De manière générale, on peut démontrer que l'hypothèse de Navier-Bernoulli est équivalente à la condition :

$$\overrightarrow{\varepsilon_T} = 0 \tag{3.38}$$

Dans le cas plan, on peut montrer que ε_T est l'angle entre la normale à la fibre moyenne déformée et la section droite déformée.



Chapitre 4

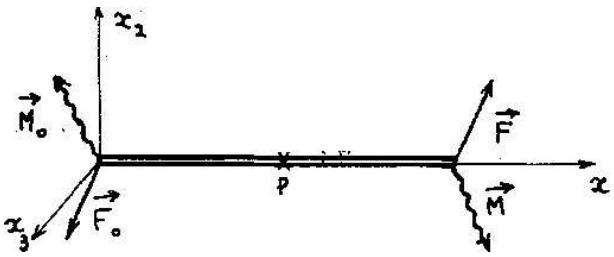
Contraintes - Dimensionnement élastique

La théorie générale des milieux curvilignes développée dans les premiers chapitres est indépendante du comportement du matériau. Il reste donc à caractériser le comportement du milieu curviligne en fonction de ses caractéristiques mécaniques (nature et comportement du matériau) et géométriques (forme et dimension de la section droite). On se limite au calcul élastique des structures présentant un comportement élastique. Ce chapitre est consacré au critère de limite d'élasticité, c'est-à-dire à la relation entre efforts intérieurs et contraintes et à la détermination des efforts maximaux supportables par une section droite et un matériau donnés. Ce critère permet le dimensionnement élastique des structures. Le chapitre suivant est consacré à la loi de comportement qui relient efforts intérieurs et déformations.

4.1 Répartition des contraintes

4.1.1 Problème de Saint-Venant

Pour pouvoir appliquer un critère d'élasticité comme ceux introduits en Mécanique des Milieux Continus, il faut pouvoir caractériser la répartition des contraintes dans une section droite en fonction des efforts intérieurs. Avant d'aborder le cas général, on envisage le cas du problème de Saint-Venant pour lequel la Mécanique des Milieux Continus fournit une solution élastique exacte.



Le problème de Saint-Venant correspond à une poutre cylindrique chargée à ses deux extrémités par deux torseurs $[\tau_0]$ et $[\tau_1]$ donnés. L'équilibre global de la poutre permet de calculer $\overrightarrow{F_0}$ et $\overrightarrow{M_0}$ en fonction de $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{M}$. Le calcul du torseur des efforts intérieurs en un point P d'abscisse x_1 donne directement, par application de la méthode 2 du paragraphe 2.1.3 :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathcal{R}} &= \left| \begin{array}{ll} -F_1 = N & effort\ normal \\ -F_2 = T_2 & effort\ tranchant \\ -F_3 = T_3 & effort\ tranchant \end{array} \right. \\
\overrightarrow{\mathcal{M}} &= \left| \begin{array}{ll} -M_1 = \mathcal{M}_t & moment\ de\ torsion \\ -M_2 + (l - x_1)F_3 = \mathcal{M}_{f_2} & moment\ de\ flexion \\ -M_3 - (l - x_1)F_2 = \mathcal{M}_{f_3} & moment\ de\ flexion \end{array} \right.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

En Mécanique des Milieux Continus, ce problème a été résolu par superposition de 6 problèmes élémentaires relatifs à chacune des trois composantes de $\overrightarrow{F}$ et de $\overrightarrow{M}$. Le tenseur des contraintes prend la forme suivante :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ \sigma_{13} & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

Les contraintes σ_{11}, σ_{12} et σ_{13} sont données par :

$$\sigma_{11} = \underbrace{\frac{F_1}{S}}_{Pb1} - \underbrace{\frac{M_3}{J_2}x_2}_{Pb6} + \underbrace{\frac{M_2}{J_3}x_3}_{Pb5} - \underbrace{\frac{(l-x_1)x_2F_2}{J_2}}_{Pb2} - \underbrace{\frac{(l-x_1)x_3F_3}{J_3}}_{Pb3} \tag{4.3}$$

$$\begin{cases} \sigma_{12} = \dfrac{M_1}{I}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_3} + \dfrac{F_2}{J_2}\alpha(x_2,x_3) + \dfrac{F_3}{J_3}\gamma(x_2,x_3) \\ \sigma_{13} = \underbrace{-\dfrac{M_1}{I}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2}}_{Pb4} + \underbrace{\dfrac{F_2}{J_2}\beta(x_2,x_3)}_{Pb2} + \underbrace{\dfrac{F_3}{J_3}\delta(x_2,x_3)}_{Pb3} \end{cases} \tag{4.4}$$

La fonction $\varphi(x_2,x_3)$ est la solution du problème de Dirichlet. Les fonctions $\alpha(x_2,x_3)$, $\beta(x_2,x_3)$, $\gamma(x_2,x_3)$ et $\delta(x_2,x_3)$ peuvent également être calculées.

La constante S est l'aire de la section droite, les constantes J_2 et J_3 sont les moments d'inertie de la section droite, et la constante I est le module de rigidité à la torsion.

$$J_2 = \iint_\Sigma x_2^2\, dS \quad , \quad J_3 = \iint_\Sigma x_3^2\, dS \quad , \quad I = 2\iint_\Sigma \varphi\, dS \tag{4.5}$$

Le repère local $(O, \overrightarrow{x}_2, \overrightarrow{x}_3)$ est choisi pour que l'origine soit au centre de gravité de la section droite Σ et pour que les axes $(O, \overrightarrow{x}_2)$, et $(O, \overrightarrow{x}_3)$ soient les axes principaux d'inertie.

(4.3) et (4.4) peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$\sigma_{11} = -\frac{N}{S} + \frac{\mathcal{M}_{f_3}}{J_2}x_2 - \frac{\mathcal{M}_{f_2}}{J_3}x_3 \tag{4.6}$$

De même, on introduit $\overrightarrow{\tau}$, vecteur des contraintes tangentielles associées à une facette de la section droite, $\overrightarrow{\tau} = (0, \sigma_{12}, \sigma_{13})$. $\overrightarrow{\tau}$ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\overrightarrow{\tau} = \frac{\mathcal{M}_t}{I}\overrightarrow{\Theta}^{(4)}(x_2,x_3) + \frac{T_2}{S}\overrightarrow{\Theta}^{(2)}(x_2,x_3) + \frac{T_3}{S}\overrightarrow{\Theta}^{(3)}(x_2,x_3) \tag{4.7}$$

Les fonctions vectorielles $\overrightarrow{\Theta}^{(2)}$, $\overrightarrow{\Theta}^{(3)}$, $\overrightarrow{\Theta}^{(4)}$ sont données par :

$$\overrightarrow{\Theta}^{(2)} = \left| \begin{array}{l} 0 \\ -\dfrac{S}{J_2}\alpha \\ -\dfrac{S}{J_2}\beta \end{array} \right. \quad \overrightarrow{\Theta}^{(3)} = \left| \begin{array}{l} 0 \\ -\dfrac{S}{J_3}\gamma \\ -\dfrac{S}{J_3}\delta \end{array} \right. \quad \overrightarrow{\Theta}^{(4)} = \left| \begin{array}{l} 0 \\ -\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2} \end{array} \right. \tag{4.8}$$

Les fonctions $\overrightarrow{\Theta}^{(2)}$ et $\overrightarrow{\Theta}^{(3)}$ sont sans dimension. $\overrightarrow{\Theta}^{(4)}$ est homogène à une longueur. Ces fonctions ne dépendent que de la section droite.

4.1.2 L'approximation RDM

Dans le cas général, on ne dispose pas d'une solution exacte et, dans la ligne de l'hypothèse de Saint-Venant, on s'appuie sur l'hypothèse suivante :

> ***Hypothèse fondamentale***
> *La répartition des contraintes dans une section droite ne dépend que du torseur des efforts intérieurs.*

Cette dépendance est établie en envisageant le cas particulier du problème de Saint-Venant, pour lequel les relations (4.6) et (4.7) donnent la répartition des contraintes en fonction du torseur de efforts intérieurs. Les résultats obtenus sont étendus au cas général à partir de l'hypothèse fondamentale. On suppose donc qu'ils restent valables pour une poutre droite ou courbe, de section constante ou variable, chargée de manière quelconque. Il s'agit d'une approximation, car le champ des contraintes construit à partir du torseur des efforts intérieurs $[\mathcal{T}(s)]$ n'est pas une solution exacte du problème d'élasticité tridimensionnelle. Néanmoins, les résultats obtenus sont globalement valables et suffisent pour la plupart des applications.

La répartition des contraintes dans une section droite est donc donnée par (4.2), (4.6) et (4.7) :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ \sigma_{13} & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

$$\sigma_{11} = -\frac{N}{S} + \frac{\mathcal{M}_{f_3}}{J_2} x_2 - \frac{\mathcal{M}_{f_2}}{J_3} x_3 \tag{4.10}$$

$$\overrightarrow{\tau} = \frac{\mathcal{M}_t}{I} \overrightarrow{\Theta}^{(4)}(x_2, x_3) + \frac{T_2}{S} \overrightarrow{\Theta}^{(2)}(x_2, x_3) + \frac{T_3}{S} \overrightarrow{\Theta}^{(3)}(x_2, x_3) \tag{4.11}$$

Pour un matériau élastique, les formules (4.9), (4.10) et (4.11) permettent de déterminer les contraintes σ_{ij} à partir des efforts intérieurs $[\tau(s)]$.

4.1.3 Dimensionnement élastique

De manière générale, pour une section droite donnée, le critère de limite d'élasticité en RDM s'écrit :

$$f\left([\mathcal{T}]\right) = f\left(N, \mathcal{M}_{f_2}, \mathcal{M}_{f_3}, T_2, T_3, \mathcal{M}_t\right) < 0 \tag{4.12}$$

Plus particulièrement, le critère de von Mises, utilisé habituellement pour les matériaux élastiques homogènes tels que les métaux, s'écrit :

$$\sigma_{11}^2 + 3\sigma_{12}^2 + 3\sigma_{13}^2 < \sigma_e^2 \tag{4.13}$$

D'un point de vue pratique, on écrit le critère de limite d'élasticité pour les points les plus sollicités de la section droite. Le cas des sollicitations simples est envisagé ci-dessous.

Traction-compression

$(N \neq 0, \overrightarrow{\mathcal{M}} = \overrightarrow{0}, \overrightarrow{T} = \overrightarrow{0})$.
On obtient :

$$|N| < S\sigma_e \tag{4.14}$$

Tous les points de la section sont sollicités de manière identique.

Flexion pure

$(\mathcal{M}_{f_3} \neq 0, \mathcal{M}_{f_2} = \mathcal{M}_t = 0, \overrightarrow{\mathcal{R}} = \overrightarrow{0})$.
On obtient :

$$|\mathcal{M}_{f_3}| < \frac{J_2}{\eta_2} \sigma_e \tag{4.15}$$

Le point le plus sollicité est le point le plus éloigné de l'axe Px_3.

Torsion

$(\mathcal{M}_t \neq 0, \overrightarrow{\mathcal{R}} = \overrightarrow{0}, \overrightarrow{\mathcal{M}_f} = \overrightarrow{0})$.
On obtient :

$$\frac{\mathcal{M}}{I/\rho} < \tau_e, \quad \rho = \left[\sup_{\Sigma} |\text{grad}\, \varphi|\right]^{-1} \tag{4.16}$$

Le point le plus sollicité est celui où $|grad\ \varphi|$ est maximum.

Le cas de quelques sollicitations composées est envisagé ci-dessous.

Traction - Torsion

$(N \neq 0, \mathcal{M}_t \neq 0, \overrightarrow{\mathcal{M}_f} = \overrightarrow{0}, \overrightarrow{T} = \overrightarrow{0})$

L'état des contraintes est donné par :

$$\sigma_{11} = \frac{N}{S} \qquad \sigma_{12} = -\frac{\mathcal{M}_t}{I}\varphi_{,3} \qquad \sigma_{13} = -\frac{\mathcal{M}_t}{I}\varphi_{,2} \tag{4.17}$$

Le critère de von Mises s'écrit :

$$\left(\frac{N}{S}\right)^2 + 3\left(\frac{\mathcal{M}_t}{I}\right)^2 |grad\ \varphi|^2 < \sigma_e^2 \tag{4.18}$$

Le point le plus sollicité est le point où $|grad\ \varphi|$ est maximum, c'est-à-dire le point le plus sollicité en torsion. Finalement, le critère de von Mises s'écrit :

$$\left(\frac{N}{S}\right)^2 + 3\left(\frac{\mathcal{M}_t}{I/\rho}\right)^2 < \sigma_e^2 \tag{4.19}$$

Flexion composée

$(\overrightarrow{\mathcal{M}_f} \neq \overrightarrow{0}, \overrightarrow{T} \neq \overrightarrow{0}, N = 0, \mathcal{M}_t = 0)$

L'analyse des ordres de grandeur des différents termes du critère de Von Mises montre que la contribution du moment fléchissant (σ_{11}) est d'ordre $O(F^2 l^2/d^6)$, où d est la dimension transversale de la poutre. La contribution de l'effort tranchant (σ_{12} et/ou σ_{13}) est d'ordre $O(F^2/d^4)$. On peut donc écrire le critère de Von Mises sous la forme :

$$\sigma_{11}^2\left(1 + O\left(\frac{d^2}{l^2}\right)\right) \leqslant \sigma_e^2 \tag{4.20}$$

Pour une poutre on a ($d << l$), par définition de l'approximation RDM. La contribution d'effort tranchant est donc infiniment petite par rapport à la contribution du moment fléchissant. Il est légitime de négliger l'effet de l'effort tranchant dans la condition de résistance, et d'écrire simplement le critère de limite d'élasticité sous la forme (4.15). Certains cas exigent néanmoins quelques précautions (voir 4.2).

Traction - Flexion

Il résulte de (4.10) et (4.11) que la contrainte normale σ_{11} est engendrée par l'effort normal et le moment fléchissant, tandis que les contraintes tangentielles σ_{12}, σ_{13} proviennent de l'effort tranchant et du moment de torsion. Une sollicitation composée de traction - flexion ($N \neq 0, \mathcal{M}_f = 0, \overrightarrow{\mathcal{M}_t} \neq 0, \overrightarrow{T} = 0$) provoque donc une contraire purement normale donnée par :

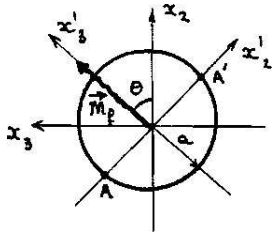
$$\sigma_{11} = -\frac{N}{S} + \frac{\mathcal{M}_{f_3}}{J_2}x_2 - \frac{\mathcal{M}_{f_2}}{J_3}x_3 \tag{4.21}$$

Le critère de limite d'élasticité s'écrit alors simplement :

$$\left|-\frac{N}{S}+\frac{\mathcal{M}_{f_3}}{J_2}x_2-\frac{\mathcal{M}_{f_2}}{J_3}x_3\right|\leqslant\sigma_e \tag{4.22}$$

Le critère de limite d'élasticité dépend de la forme de la section droite.

Section circulaire



$$J_2=J_3=\frac{\pi a^4}{4}=J$$

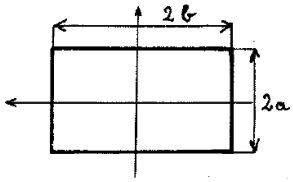
Toute direction du plan de la section droite est une direction principale d'inertie. On choisit alors un nouveau système d'axes $Ox'_2x'_3$ tel que l'axe Ox'_3 est dans la direction du moment fléchissant. Le critère de limite d'élasticité s'écrit alors :

$$\left|-\frac{N}{S}+\frac{\mathcal{M}_f}{J}x'_2-\right|\leqslant\sigma_e \qquad \mathcal{M}_f=\sqrt{\mathcal{M}_{f_2}^2+\mathcal{M}_{f_3}^2} \tag{4.23}$$

La contrainte normale maximale est atteinte au point A ($x'_2=-a$) ou au point A' ($x'_2=+a$) selon que N est positif ou négatif. Le critère de limite d'élasticité s'écrit :

$$\frac{|N|}{S}+\frac{\mathcal{M}_f}{J/a}=\frac{1}{\pi a^2}\left(|N|+\frac{4}{a}\sqrt{\mathcal{M}_{f_2}^2+\mathcal{M}_{f_3}^2}\right)\leqslant\sigma_e \tag{4.24}$$

Section rectangulaire



$$J_2=\frac{4a^3b}{3} \qquad J_3=\frac{4ab^3}{3}$$

La contrainte normale maximale est atteinte en $x_2=\pm a$ et $x_3=\pm b$, c'est-à-dire en l'un des 4 points A , B , C ou D, selon le signe de $N,\mathcal{M}_{f_2}$ et $\mathcal{M}_{f_3}$. Par exemple, si $N,\mathcal{M}_{f_2}$ et $\mathcal{M}_{f_3}$ sont positifs, ce maximum est atteint pour $x_2=-a$ et $x_3=b$, c'est-à-dire au point B. Le critère de limite d'élasticité s'écrit alors :

$$\frac{|N|}{S}+\frac{\mathcal{M}_{f_3}}{J_2/a}+\frac{\mathcal{M}_{f_2}}{J_3/b}=\frac{1}{ab}\left(|N|+\frac{3|\mathcal{M}_{f_3}|}{4a}+\frac{3|\mathcal{M}_{f_2}|}{4b}\right)\leqslant\sigma_e \tag{4.25}$$

Structures planes chargées dans leur plan

On considère le cas des structures planes chargées dans leur plan. Les efforts intérieurs ne font intervenir que 3 composantes N,T et $\mathcal{M}$ et les exemples du paragraphe 2.2.2 donnent les ordres de grandeur suivants :

$$\mathcal{M}=O(Fl) \quad , \quad T=O(F) \quad , \quad N=O(F) \tag{4.26}$$

La répartition des contraintes est alors donnée par :

$$\sigma_{11}=-\frac{N}{S}+\frac{\mathcal{M}}{J}x_2 \qquad \vec{\tau}=\frac{T}{S}\vec{\Theta}^{(2)}(x_2,x_3) \tag{4.27}$$

Le critère de Von Mises s'écrit alors :

$$\underbrace{\left(\frac{M}{J}x_2-\frac{N}{S}\right)^2}_{\left[O\left(\frac{Fl}{d^3}\right)+O\left(\frac{F}{d^2}\right)\right]^2}+3\underbrace{\left(\frac{T}{S}\vec{\Theta}^{(2)}(x_2,x_3)\right)^2}_{+\left[O\left(\frac{F}{d^2}\right)\right]^2}<\sigma_e^2 \tag{4.28}$$

Comme au paragraphe 4.1.3, le terme prépondérant provient du moment fléchissant. L'effort normal et l'effort tranchant apportent des corrections respectivement en $O(d/l)$ et $O((d/l)^2)$. En première approximation, on peut donc dimensionner la structure en flexion pure (4.15). En seconde approximation, il faut tenir compte de l'effort normal et écrire :

$$\left|\frac{\mathcal{M}}{J}x_2 - \frac{N}{S}\right| < \sigma_e \tag{4.29}$$

L'effort tranchant n'intervient qu'au troisième ordre. Tout ceci n'est cependant valable que pour des sections massives : Le paragraphe 4.2.3 montre que le dimensionnement à l'effort tranchant joue un rôle important pour des profils minces.

Dans le cas d'une section symétrique par rapport à l'axe des x_3, le critère de limite d'élasticité s'écrit :

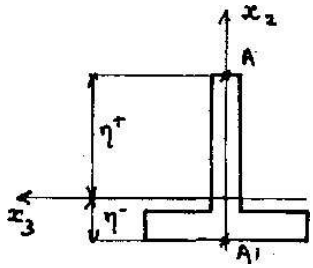
$$\frac{|\mathcal{M}|}{J/\eta} + \frac{|N|}{S} \leqslant \sigma_e \tag{4.30}$$

Dans le cas d'une section non symétrique (section droite en $\perp$ par exemple), on note η_+ et $-\eta_-$ les valeurs extrêmes de x_2 :

$$-\eta_- \leqslant x_2 \leqslant \eta_+ \qquad , \qquad \eta_+ > \eta_- \tag{4.31}$$

Le critère de limite d'élasticité est défini par 4 inégalités :

$$\begin{cases} -\sigma_e \leqslant \dfrac{\mathcal{M}}{J}\eta_+ - \dfrac{N}{S} \leqslant \sigma_e \\ -\sigma_e \leqslant \dfrac{\mathcal{M}}{J}\eta_- - \dfrac{N}{S} \leqslant \sigma_e \end{cases} \tag{4.32}$$



4.2 Répartition des contraintes de cisaillement

4.2.1 Théorème de la coupure

La répartition des contraintes de cisaillement est donnée par (4.11), mais elle fait intervenir les fonctions $\overrightarrow{\Theta}^{(2)}$, $\overrightarrow{\Theta}^{(3)}$, $\overrightarrow{\Theta}^{(4)}$. La résolution du problème s'avère trop compliqué pour les applications courantes. Dans le cadre de l'approximation RDM, diverses théories approchées ont été développées. Elles sont basées sur une propriété remarquable de la répartition des contraintes de cisaillement : le théorème de la coupure, qui permet de relier la répartition des contraintes de cisaillement à celle des contraintes normales.

On considère le problème de Saint-Venant correspondant à une poutre cylindrique chargée à ses deux extrémités :

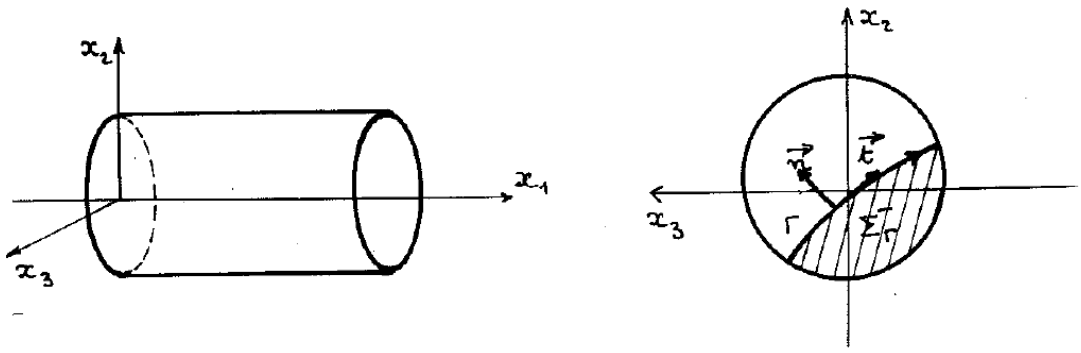
Soit une section droite quelconque. Dans le plan (x_2, x_3), on trace une courbe Γ qui introduit une "coupure" de la section droite Σ. On note Σ_Γ^- la partie de la section droite située en dessous de Γ.

Théorème de la coupure

$$\int_\Gamma (\sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3)\ ds = -\iint_{\Sigma_\Gamma^-} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1}\ dx_2\ dx_3 \tag{4.33}$$

Dans le cas élastique et du fait que la poutre a une section constante, la contrainte normale σ_{11} est une fonction de N et $\mathcal{M}_f$ donnée par (4.10). On a donc :

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} = -\frac{1}{S}\frac{dN}{dx_1} + \frac{1}{J_2}\frac{d\mathcal{M}_{f_3}}{dx_1}x_2 - \frac{1}{J_3}\frac{d\mathcal{M}_{f_2}}{dx_1}x_3 \tag{4.34}$$



On utilise les équations (2.17) et (2.18) avec $\vec{f} = \vec{\gamma} = 0$ qui donnent (problème de Saint-Venant) :

$$\frac{dN}{dx_1} = 0 \quad , \quad \frac{d\mathcal{M}_{f_3}}{dx_1} = -T_2 \quad , \quad \frac{d\mathcal{M}_{f_2}}{dx_1} = T_3 \tag{4.35}$$

Le théorème de la coupure s'écrit alors :

$$\int_\Gamma (\sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3)\ dx_1\ ds = \frac{T_2}{J_2}\mu_2(\Gamma) + \frac{T_3}{J_3}\mu_3(\Gamma) \tag{4.36}$$

$\mu_2(\Gamma)$ et $\mu_2(\Gamma)$ sont les moments statiques par rapport à x_2 et x_3 respectivement de la partie de section droite située en dessous de Γ :

$$\mu_2(\Gamma) = \iint_{\Sigma_\Gamma^-} x_2\ dx_2\ dx_3 \quad , \quad \mu_3(\Gamma) = \iint_{\Sigma_\Gamma^-} x_3\ dx_2\ dx_3 \tag{4.37}$$

Finalement,

Théorème de la coupure (2)

$$\int_\Gamma (\sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3)\ ds = \frac{T_2}{J_2}\iint_{\Sigma_\Gamma^-} x_2\ dx_2\ dx_3 + \frac{T_3}{J_3}\iint_{\Sigma_\Gamma^-} x_3\ dx_2\ dx_3 \tag{4.38}$$

(4.36) n'est valable que dans le cas élastique, alors que le théorème de la coupure sous sa forme (4.33) est valable de manière générale.

4.2.2 Théorie approchée de l'effort tranchant

La théorie approchée de l'effort tranchant permet un calcul simple et direct de fonctions $\vec{\Theta}^{(2)}$ et $\vec{\Theta}^{(3)}$ approchées.

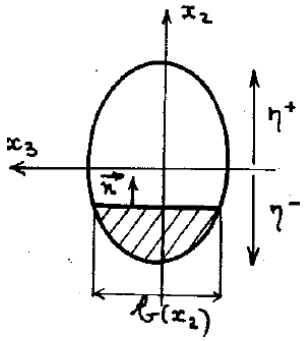
On considère l'effet de l'effort tranchant dans la direction x_2 ($T_3 = 0$), c'est-à-dire la fonction $\vec{\Theta}^{(2)}$. On postule :

Hypothèse
La contrainte de cisaillement $\vec{\Theta}^{(2)}$ due à T_2 est parallèle à l'axe $\vec{x_2}$ et ne dépend que de x_2.

$$\sigma_{12} = \sigma_{12}(x_2) \quad , \quad \sigma_{13} = 0 \tag{4.39}$$

Si on choisit pour Γ une droite x_2=constante, l'application du théorème de la coupure donne :

$$\int_\Gamma \sigma_{12}\ dx_1 = \frac{T_2}{J_2}\mu_2(x_2)$$



c'est-à-dire d'après (4.39) et en notant $b(x_2)$ la largeur de la section droite à la cote x_2 :

$$\sigma_{12}(x_2) = \frac{T_2}{J_2}\frac{\mu_2(x_2)}{b(x_2)} \tag{4.40}$$

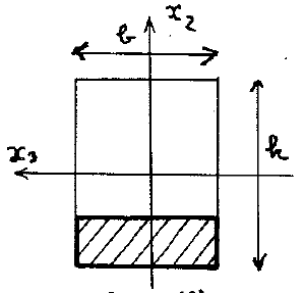
$$\mu_2(x_2) = \iint_{\Sigma_\Gamma^-} x_2\ dx_2\ dx_3 = \int_{-\eta_-}^{x_2} b(x_2)x_2\ dx_2 = \int_{x_2}^{\eta_+} b(x_2)x_2\ dx_2 \tag{4.41}$$

Exemple 1 : section rectangulaire

$$b(x_2) = b = constante$$

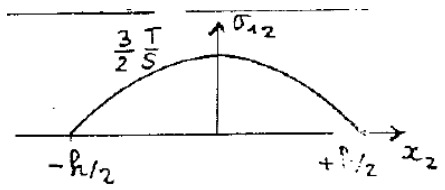
$$J_2 = bh$$

$$\mu(x_2) = -b\int_{x_2}^{h/2} ydx = -b\left(\frac{h^2}{8} - y^2\right) \tag{4.42}$$



On obtient :

$$\sigma_{12} = \frac{T_2}{S}\Theta_2^{(2)} = -\frac{3}{2}\frac{T_2}{S}\left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right) \quad , \quad \sigma_{13} = \frac{T_2}{S}\Theta_3^{(2)} = 0 \tag{4.43}$$



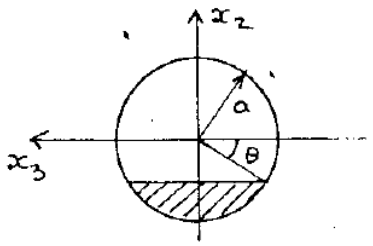
La contrainte de cisaillement présente une répartition parabolique.

Exemple 2 : section circulaire

$$b(x_2) = 2\sqrt{a^2 - x_2^2} = 2a\cos\theta \tag{4.44}$$

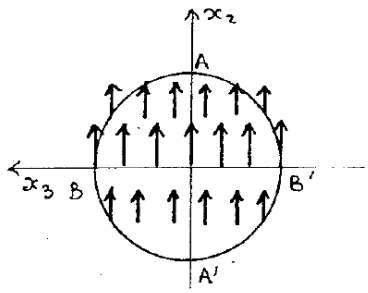
Un calcul direct donne :

$$\mu(x_2) = \frac{2a^3}{3}\cos^3\theta \tag{4.45}$$

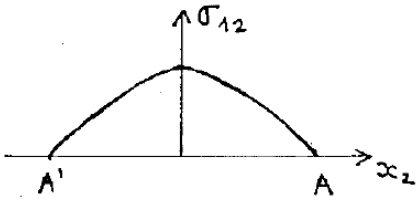


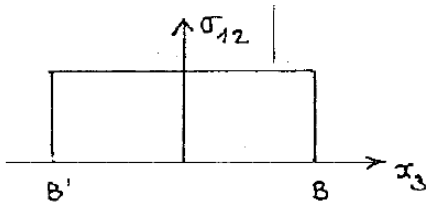
$$\sigma_{12} = \frac{4}{3}\frac{T_2}{S}\cos^2\theta = \frac{4}{3}\frac{T_2}{S}\left(1 - \frac{x_2^2}{a^2}\right) \quad , \quad \sigma_{13} = 0 \tag{4.46}$$

avec σ_{13} identiquement nul. La répartition des contraintes σ_{12} sur les diamètres AA' et BB' est représentée sur les diagrammes suivants :



$$sur\ BB' \qquad \sigma_{12} = \frac{4}{3}\frac{T_2}{S} = 1,33\frac{T_2}{S}$$





4.2.3 Section en profil mince

La théorie approchée présentée ci-dessus convient pour les sections massives. La situation est différente pour des sections en profil mince (section en I, en L, en T, en U, tubes, etc.). On postule :

> **Hypothèse**
> *Pour une section en profil mince, la contrainte de cisaillement $\vec{\tau}$ est constante dans l'épaisseur et tangente à la courbe squelette.*

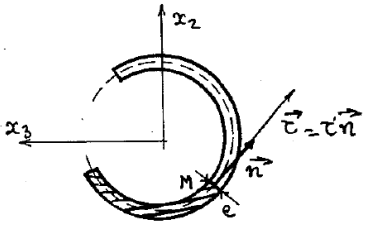
On utilise une coupure perpendiculaire au squelette pour déterminer la contrainte de cisaillement par le théorème de la coupure. Il faut distinguer deux cas : les profils ouverts et les profils fermés.

Profil ouvert

L'application du théorème de la coupure (4.36) donne directement la valeur de la contrainte de cisaillement :

$$\int_\Gamma (\sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3)\ ds = \tau e = \frac{T_2}{J_2}\mu_2(\Gamma) + \frac{T_3}{J_3}\mu_3(\Gamma)$$

$$\tau = \frac{T_2}{eJ_2}\mu_2(\Gamma) + \frac{T_3}{eJ_3}\mu_3(\Gamma) \tag{4.47}$$

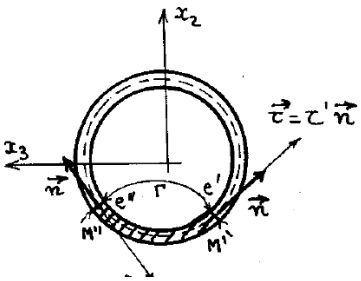


ce qui permet de calculer directement les fonctions $\vec{\Theta}^{(2)}$ et $\vec{\Theta}^{(3)}$. On peut donc caractériser l'effet de l'effort tranchant pour un profil mince ouvert. Par contre, on ne peut pas caractériser l'effet de la torsion, qui entraîne une variation rapide de la contrainte dans l'épaisseur.

Profil fermé

La coupure Γ coupe la courbe squelette en deux points M_1 et M_2. Le théorème de la coupure donne :

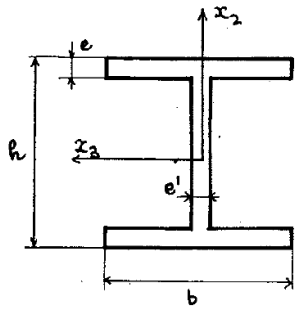
$$\tau' e' - \tau'' e'' = \frac{T_2}{J_2}\mu_2(\Gamma) + \frac{T_3}{J_3}\mu_3(\Gamma) \qquad \vec{\tau} = -\tau''\vec{n} \tag{4.48}$$



La contrainte de cisaillement τ peut être déterminée à une constante près (en effet, la formule (4.48) permet de calculer τ en tout point à partir de sa valeur en un point quelconque). Cette constante est déterminée à partir du moment de torsion.
Ainsi, pour un profil mince fermé, on peut calculer la répartition des contraintes tangentielles induite par l'effort tranchant et le moment de torsion.

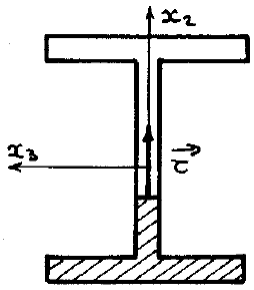
Exemple. Section en I

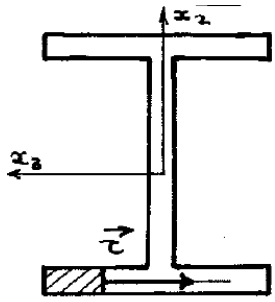
A titre d'application, on calcule la répartition des contraintes tangentielles engendrées dans une poutre en I par un effort tranchant dirigé dans la direction $x_2 (T_3 = 0)$. On suppose que e et e' sont très petits devant h et b. On a alors :



$$J = J_2 \simeq \frac{beh^2}{2} \quad , \quad S \simeq 2be + he' \tag{4.49}$$

L'application de (4.47) donne, dans l'âme et dans la semelle :



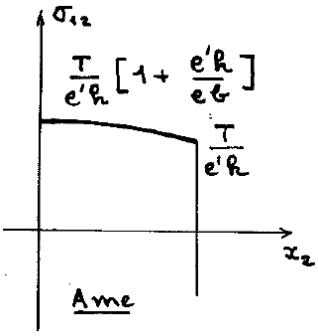


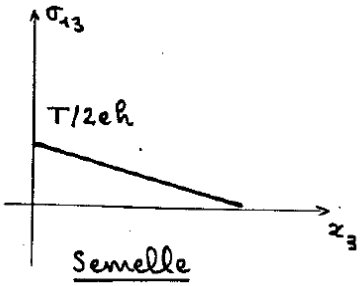
$$\begin{cases} \sigma_{12} = -\dfrac{T}{e'h}\left[1 + \dfrac{e'(h - x_2)(h + x_2)}{ebh}\right] \\ \sigma_{13} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \sigma_{12} = 0 \\ \sigma_{13} = \dfrac{T}{eh}\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{x_3}{b}\right) \end{cases}$$

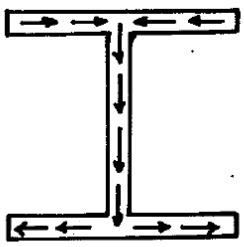
Ainsi, dans la semelle, la contrainte de cisaillement est négligeable devant la contrainte de traction :

$$\sigma_{11} = \frac{\mathcal{M}_{f_2}}{beh}$$

Par contre, dans l'âme, les contraintes de cisaillement peuvent devenir importantes si e' est petit devant e. Pratiquement, pour le dimensionnement de l'âme, le choix de e' est imposé par un calcul de résistance au cisaillement, car l'effort tranchant est supporté par l'âme seule.







Chapitre 5

Milieux curvilignes élastiques

5.1 *Loi de comportement*

5.1.1 Comportement élastique

Le comportement élastique se caractérise par une relation linéaire entre le torseur des efforts intérieurs et le torseur des déformations :

$$[\mathcal{D}(s)] = -\mathcal{L}\,[\mathcal{T}(s)] \qquad , \qquad [\mathcal{T}(s)] = -\mathcal{L}^{-1}\,[\mathcal{D}(s)] \tag{5.1}$$

où $\mathcal{L}$ est une application linéaire représenté par une matrice (6x6) dans un repère donné.

Hypothèse thermodynamique
L'application $\mathcal{L}$ est symétrique :

$$[\mathcal{T}_1]\,.\mathcal{L}\,[\mathcal{T}_2] = [\mathcal{T}_2]\,.\mathcal{L}\,[\mathcal{T}_1] \tag{5.2}$$

Hypothèse de stabilité
Pour tout torseur $[\mathcal{T}]$ non nul, l'application $\mathcal{L}$ est définie positive :

$$[\mathcal{T}]\,.\mathcal{L}\,[\mathcal{T}] > 0 \tag{5.3}$$

La loi de comportement (5.1) est locale et l'application $\mathcal{L}$ peut dépendre du point P considéré. Si on décrit les torseurs $[\mathcal{D}]$ et $[\mathcal{T}]$ par leurs éléments de réduction au point P, l'application $\mathcal{L}$ est caractérisée par 4 applications linéaires correspondant à par 4 tenseurs du second ordre :

$$\begin{cases} -\overrightarrow{\varepsilon} = \mathbb{A}\overrightarrow{\mathcal{R}} + \mathbb{B}\overrightarrow{\mathcal{M}} \\ -\overrightarrow{\chi} = \mathbb{D}\overrightarrow{\mathcal{R}} + \mathbb{C}\overrightarrow{\mathcal{M}} \end{cases} \qquad \begin{cases} -\varepsilon_i = A_{ij}\mathcal{R}_j + B_{ij}\mathcal{M}_j \\ -\chi_i = D_{ij}\mathcal{R}_j + C_{ij}\mathcal{M}_j \end{cases} \tag{5.4}$$

La condition de symétrie (5.2) donne :

$$A_{ij} = A_{ji} \qquad , \qquad B_{ij} = D_{ji} \qquad , \qquad C_{ij} = C_{ji} \tag{5.5}$$

En introduisant l'énergie de déformation ci-dessous :

$$\begin{aligned} \overset{*}{w}([\mathcal{T}]) = \; & \frac{1}{2}\,[\mathcal{T}]\,.\mathcal{L}\,[\mathcal{T}] = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\varepsilon}.\overrightarrow{\mathcal{R}} + \overrightarrow{\chi}.\overrightarrow{\mathcal{M}}\right) \\ & = \frac{1}{2}\left(A_{ij}\mathcal{R}_i\mathcal{R}_j + 2B_{ij}\mathcal{R}_i\mathcal{M}_j + C_{ij}\mathcal{M}_i\mathcal{M}_j\right) \end{aligned} \tag{5.6}$$

On peut réécrire (5.4) sous la forme :

$$\varepsilon_i = -\frac{\partial \overset{*}{w}}{\partial \mathcal{R}_i} \qquad \chi_i = -\frac{\partial \overset{*}{w}}{\partial \mathcal{M}_i} \tag{5.7}$$

On peut également exprimer l'énergie de déformation en fonction des déformations :

$$w\left([\mathcal{D}]\right) = \frac{1}{2}\left[\mathcal{D}\right].\mathcal{L}^{-1}\left[\mathcal{D}\right] = w(\overrightarrow{\varepsilon}, \overrightarrow{\chi}) \tag{5.8}$$

Ceci qui permet d'écrire :

$$\mathcal{R}_i = -\frac{\partial w}{\partial \varepsilon_i} \qquad \mathcal{M}_i = -\frac{\partial w}{\partial \chi_i} \tag{5.9}$$

On peut finalement écrire (5.7) et (5.9) sous une forme plus condensée :

$$[\mathcal{T}] = -\frac{\partial w}{d\left[\mathcal{D}\right]} \qquad [\mathcal{D}] = -\frac{\partial \overset{*}{w}}{\partial\left[\mathcal{T}\right]} \tag{5.10}$$

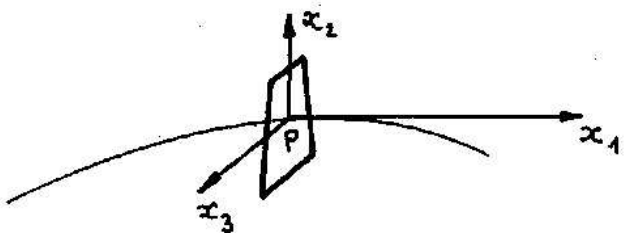
Ainsi, l'hypothèse de symétrie (5.2) permet d'écrire la loi de comportement à partir de l'énergie de déformation, cette énergie de déformation étant positive. On peut en déduire une interprétation énergétique du principe des travaux virtuels :

$$-\left[\mathcal{T}(s)\right].\left[\overset{*}{\mathcal{D}}(s)\right] = \left(\mathcal{L}^{-1}\left[\mathcal{D}(s)\right]\right).\delta\left[\mathcal{D}(s)\right] = \delta\left(\frac{1}{2}\left[\mathcal{D}(s)\right].\mathcal{L}^{-1}\left[\mathcal{D}(s)\right]\right) = \delta w \tag{5.11}$$

Le principe des travaux virtuels (3.17) montre donc que le travail virtuel des efforts induit par un déplacement virtuel $\delta\left[\mathcal{U}\right]$ est égal à l'accroissement d'énergie de déformation. Comme dans toute théorie élastique, le travail fourni au milieu curviligne est entièrement stocké sous forme d'énergie de déformation.

$$\delta W = \delta W_{ext} \qquad , \qquad W = \int_{s_0}^{s_1} w\ ds \tag{5.12}$$

5.1.2 Identification directe de la loi élastique



On choisit le système d'axes local $(P, \overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{x}_2, \overrightarrow{x}_3)$ tel que $\overrightarrow{x}_1 estdansladirectionduvecteurtangent \overrightarrow{\tau}$ et que $\overrightarrow{x}_2 et \overrightarrow{x}_3)$ sont dans les directions principales d'inertie de la section droite. Les composantes ε_1 et χ_1 sont donc les composantes normales ε_n et χ_n. Les composantes $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \chi_2$ et χ_3 sont les composantes des vecteurs $\overrightarrow{\varepsilon_T}$ et $\overrightarrow{\chi_T}$. L'application $\mathcal{L}$ est alors définie par une matrice (6x6) :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_n \\ \chi_2 \\ \chi_3 \\ \chi_n \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} A_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{11} & A_{12} & A_{13} \\ B_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{31} & B_{23} & B_{33} \\ B_{11} & C_{21} & C_{31} & C_{11} & B_{12} & B_{13} \\ A_{12} & B_{22} & B_{32} & B_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{13} & B_{23} & B_{33} & B_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ \mathcal{M}_2 \\ \mathcal{M}_3 \\ \mathcal{M}_t \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} \tag{5.13}$$

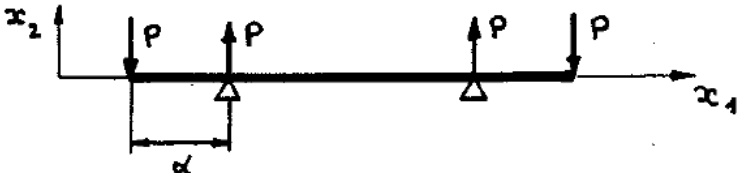
Une poutre à section constante constituée d'un matériau homogène présente une loi $\mathcal{L}$ constante. Dans les autres cas, les coefficients A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} dépendent du matériau et de la géométrie de la section droite.

Pour déterminer les coefficients de la matrice (5.13), on peut envisager des expériences simples correspondant à des états d'efforts intérieurs et de défomations homogènes.

Traction simple

$$N = P \quad , \quad \overrightarrow{T} = \overrightarrow{0} \quad , \quad \overrightarrow{\mathcal{M}} = \overrightarrow{0} \tag{5.14}$$

Flexion simple (flexion 4 points)

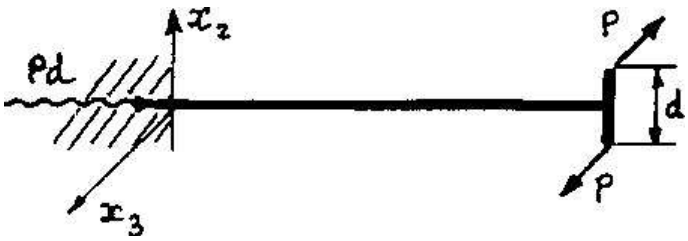


Entre A et B :

$$\overrightarrow{\mathcal{R}} = \overrightarrow{0} \quad , \quad \mathcal{M}_{f_3} = P\alpha \quad , \quad \mathcal{M}_{f_2} = \mathcal{M}_t = 0 \tag{5.15}$$

(+ problème similaire dans la direction x_2).

Torsion simple



$$\overrightarrow{\mathcal{R}} = \overrightarrow{0} \quad , \quad \overrightarrow{\mathcal{M}_f} = \overrightarrow{0} \quad , \quad \mathcal{M}_t = Pd \tag{5.16}$$

Ces essais fournissent les valeurs de certains coefficients, mais, en pratique, les mesures de déformations sont difficiles. D'autre part, il faudrait réaliser ces expériences pour toutes les formes de section droite utilisées. Enfin, pour pouvoir déterminer toute la matrice (5.13), il manque l'essai d'effort tranchant simple, inconcevable car, d'après (2.18), tout effort tranchant s'accompagne d'un moment de flexion. Cette approche expérimentale est donc inutilisable.

Une seconde approche consiste à utiliser les résultats du problème de Saint-Venant, pour les expériences (5.14), (5.15), (5.16). Ainsi, on obtient la première colonne de la matrice (5.13) en traction simple :

$$\varepsilon_n = -\frac{N}{ES} \quad , \quad \overrightarrow{\varepsilon_T} = 0 \quad , \quad \overrightarrow{\chi} = 0 \tag{5.17}$$

on obtient la deuxième et le troisième colonnes de la matrice (5.13) en flexion simple :

$$\overrightarrow{\varepsilon} = 0 \quad , \quad \chi_3 = -\frac{\mathcal{M}_3}{EJ_2} \quad , \quad \chi_1 = \chi_2 = 0 \tag{5.18}$$

On a donc obtenu :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_n \\ \chi_2 \\ \chi_3 \\ \chi_n \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{1}{ES} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{EJ_3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{EJ_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{11} & B_{12} & B_{13} \\ 0 & 0 & 0 & B_{12} & A_{22} & A_{23} \\ 0 & 0 & 0 & B_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ \mathcal{M}_2 \\ \mathcal{M}_3 \\ \mathcal{M}_t \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} \tag{5.19}$$

En torsion simple, on obtient :

$$\chi_n = -\frac{\mathcal{M}_t}{GI} = \alpha \qquad C_{11} = \frac{1}{GI} \tag{5.20}$$

Mais, le gauchissement des sections ne permet pas calculer ε_2 et ε_3 et, par conséquent, d'identifier B_{12} et B_{13}. De même, les 3 coefficients A_{22}, A_{23}, A_{33} ne sont pas identifiables.

5.1.3 Identification énergétique de la loi élastique

Partant des résultats du problème de Saint-Venant, on caractérise la densité d'énergie de déformation par unité de longueur (5.6). En identifiant les résultats obtenus avec l'énergie de déformation en RDM, issue de (5.12), on obtient :

$$W = \int_0^l \overset{*}{w}\left([\mathcal{T}(x_1)]\right)\ dx_1 = \frac{1}{2}\int_0^l \iint_\Sigma \Lambda_{ijkh}\sigma_{ij}\sigma_{kh}\ dx_1\ dx_2\ dx_3 \tag{5.21}$$

c'est-à-dire d'après (5.6) :

$$\overset{*}{w}\left([\mathcal{T}]\right) = \frac{1}{2}\left[\mathcal{T}\right].\mathcal{L}\left[\mathcal{T}\right] = \iint \overset{*}{w}(\sigma_{ij})\ dx_2\ dx_3 \tag{5.22}$$

Le chapitre précédent a permis de caractériser les contraintes à partir du torseur des efforts intérieurs. Il suffit donc de reporter (4.9), (4.10) et (4.11) dans (5.22) pour obtenir la matrice (6x6) représentant $\mathcal{L}$ dans la base choisie. On obtient :

$$\begin{aligned} \overset{*}{w}\left([\mathcal{T}]\right) &= \iint_\Sigma \left[\frac{1}{2E}\sigma_{11}^2 + \frac{1}{2G}\left(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2\right)\right]\ dx_2\ dx_3 \\ &= \frac{1}{2E}\iint_\Sigma \left(-\frac{N}{S} + \frac{\mathcal{M}_{f_3}}{J_2}x_2 - \frac{\mathcal{M}_{f_2}}{J_3}x_3\right)^2\ dx_2\ dx_3 + \frac{1}{2G}\iint_\Sigma |\overrightarrow{\tau}|^2\ dx_2\ dx_3 \end{aligned} \tag{5.23}$$

La première intégrale donne :

$$\frac{N^2}{2ES} + \frac{\left(\mathcal{M}_{f_3}\right)^2}{2EJ_2} + \frac{\left(\mathcal{M}_{f_2}\right)^2}{2EJ_3} \tag{5.24}$$

La seconde intégrale donne :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2G}\iint_\Sigma \left(\frac{\mathcal{M}_t}{I}\overrightarrow{\Theta}^{(4)} + \frac{T_2}{S}\overrightarrow{\Theta}^{(2)} + \frac{T_3}{S}\overrightarrow{\Theta}^{(3)}\right).\left(\frac{\mathcal{M}_t}{I}\overrightarrow{\Theta}^{(4)} + \frac{T_2}{S}\overrightarrow{\Theta}^{(2)} + \frac{T_3}{S}\overrightarrow{\Theta}^{(3)}\right)\ dx_2\ dx_3 \\ &= \frac{1}{2}\left(C_{11}\mathcal{M}_t^2 + A_{22}T_2^2 + A_{33}T_3^2 + 2A_{23}T_2T_3 + 2B_{12}\mathcal{M}_tT_2 + 2B_{13}\mathcal{M}_tT_3\right) \end{aligned} \tag{5.25}$$

avec

$$C_{11} = \frac{1}{GI^2}\iint_\Sigma |\overrightarrow{\Theta}^{(4)}|^2\ dx_2\ dx_3 \tag{5.26}$$

$$\begin{cases} A_{\alpha\beta} = \dfrac{1}{S^2} \iint_\Sigma \overrightarrow{\Theta}^{(\alpha)}.\overrightarrow{\Theta}^{(\beta)}\ dx_2\ dx_3 \\ \\ B_{1\alpha} = \dfrac{1}{S^2} \iint_\Sigma \overrightarrow{\Theta}^{(4)}.\overrightarrow{\Theta}^{(\alpha)}\ dx_2\ dx_3 \end{cases} \tag{5.27}$$

Compte tenu de (4.8), l'expression de C_{11} peut se réécrire sous la forme :

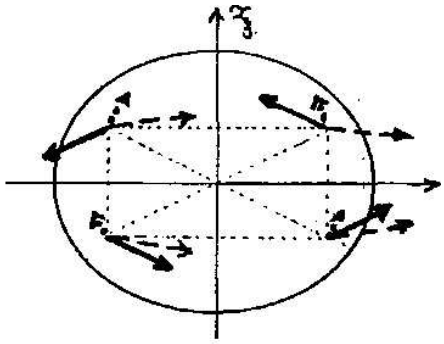
$$C_{11} = \frac{1}{GI^2} \iint_\Sigma \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)^2 \right]\ dx_2\ dx_3 \tag{5.28}$$

En utilisant la formule de Stokes, on obtient :

$$C_{11} = \frac{1}{GI^2} \left\{ \oint \left(\varphi \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} dx_3 - \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} dx_2 \right) - \iint_\Sigma \varphi \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3^2} \right)\ dx_2\ dx_3 \right\}$$
$$= \frac{1}{GI^2} \iint_\Sigma 2\varphi\ dx_2\ dx_3 = \frac{1}{GI} \tag{5.29}$$

Finalement :

$$C_{11} = \frac{1}{GI} \tag{5.30}$$



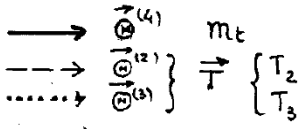
Dans le cas d'un profil avec deux plans de symétrie, il résulte de la symétrie des fonctions $\overrightarrow{\Theta}^{(2)}$, $\overrightarrow{\Theta}^{(3)}$, $\overrightarrow{\Theta}^{(4)}$ (voir schéma) que :

$$A_{23} = B_{12} = B_{13} = 0 \tag{5.31}$$

Seuls subsistent les termes A_{22} et A_{33}.
On pose :

$$A_{22} = \frac{1}{GS^2} \iint_\Sigma |\overrightarrow{\Theta}^{(2)}|^2\ dx_2\ dx_3 = \frac{1}{GS_2}$$

$$A_{33} = \frac{1}{GS^2} \iint_\Sigma |\overrightarrow{\Theta}^{(3)}|^2\ dx_2\ dx_3 = \frac{1}{GS_3} \tag{5.32}$$



S_2 et S_3 sont des quantités homogènes à une surface, appelées sections réduites d'effort tranchant. Leur calcul exige la connaissance des fonctions $\overrightarrow{\Theta}^{(2)}$ et $\overrightarrow{\Theta}^{(3)}$ mais on peut les remplacer par leurs approximations obtenues au paragraphe 4.2.2 ou 4.2.3. Par exemple, pour une section massive (paragraphe 4.2.2), il vient directement à partir de (4.40) :

$$\frac{1}{S_2} = \frac{1}{J_2^2} \int_{-\eta_-}^{\eta_+} \frac{\mu_2^2(x_2)}{b(x_2)}\ dx_2 \tag{5.33}$$

Un calcul direct donne alors :

Section rectangulaire (4.43)

$$S_2 = \frac{5}{6} S \tag{5.34}$$

Section circulaire (4.46)

$$S_2 = \frac{9}{10} S \tag{5.35}$$

La section réduite d'effort tranchant est voisine de la section S.

5.1.4 Expression de la loi élastique

Pour une section doublement symétrique, on obtient finalement :

$$\overset{*}{w}([\mathcal{T}]) = \frac{1}{2}\left[\frac{N^2}{ES} + \frac{(\mathcal{M}_{f_3})^2}{EJ_2} + \frac{(\mathcal{M}_{f_2})^2}{EJ_3} + \frac{\mathcal{M}_t^2}{GI} + \frac{T_2^2}{GS_2} + \frac{T_3^2}{GS_3}\right] \tag{5.36}$$

La matrice (6x6) représentative de $\mathcal{L}$ est diagonale dans le système d'axes $(P, \overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{x}_2, \overrightarrow{x}_3)$. L'identification énergétique a permis de préciser la valeur des coefficients $C_{11}, B_{1\alpha}$ et $A_{\alpha\beta}$.

Pour une section qui n'est pas doublement symétrique, les coefficients A_{23}, B_{12} et B_{13} calculés à partir de (5.27) ne sont pas nuls. Néanmoins, pour des effort tranchants petits, on ne s'en préoccupe pas et on exploite l'équation (5.36). Une exception notable est celle des profils minces pour lesquels l'analyse ébauchée au paragraphe 4.2.3 permet de prendre en compte les couplages entre torsion et effort tranchant.

De manière générale, on suppose donc que la loi élastique est la suivante :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_n \\ \chi_2 \\ \chi_3 \\ \chi_n \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \frac{1}{ES} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{EJ_3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{EJ_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{GI} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{GS_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{GS_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ \mathcal{M}_2 \\ \mathcal{M}_3 \\ \mathcal{M}_t \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} \tag{5.37}$$

Les coefficients font intervenir les caractéristiques élastiques du matériau (module d'Young E et module de Coulomb G) et les caractéristiques géométriques de la section (section S, moments d'inertie J_2 et J_3, module de rigidité à la torsion I, sections réduites S_2 et S_3).

Dans la plupart des applications, on néglige l'effet de l'effort tranchant, et on remplace (5.37) par :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_n \\ \chi_2 \\ \chi_3 \\ \chi_n \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \frac{1}{ES} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{EJ_3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{EJ_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{GI} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ \mathcal{M}_2 \\ \mathcal{M}_3 \\ \mathcal{M}_t \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} \tag{5.38}$$

Cette approximation revient donc à faire l'hypothèse de Navier-Bernoulli et à écrire :

$$\overrightarrow{\varepsilon}_T = 0 \tag{5.39}$$

Les lois de comportement (5.37) ou (5.38) permettent de calculer les déformations à partir des efforts intérieurs, puis, par intégration, de remonter aux déplacements.

5.1.5 Formules de Navier-Bresse

Dans le cas plan, les relations (5.37) et (5.38) donnent (suivant que l'on prend en compte ou que l'on néglige les effets de l'effort tranchant) :

$$\varepsilon_n = -\frac{N}{ES} \qquad \chi = -\frac{\mathcal{M}}{EJ} \qquad \varepsilon_T = -\frac{T}{GS_2} \text{ ou } 0 \tag{5.40}$$

Les efforts N, T et $\mathcal{M}$ étant connus, il suffit d'intégrer (5.40) pour obtenir les déplacements. Les relations (3.29) donnent :

$$\begin{cases} \varepsilon_n = u' \cos\theta + v' \sin\theta = -\dfrac{N}{ES} \\ \varepsilon_T = v' \cos\theta + u' \sin\theta - \omega = -\dfrac{T}{GS_2} \end{cases} \tag{5.41}$$

$$\chi = \omega' = -\frac{\mathcal{M}}{EJ} \tag{5.42}$$

L'intégration de la relation (5.42) donne :

$$\omega = \omega_0 - \int_{s_0}^{s} \frac{\mathcal{M}}{EJ}(\sigma) d\sigma \tag{5.43}$$

$\omega_0 = \omega(s_0)$ est une constante d'intégration identifiée à partir des conditions aux limites.
Le système linéaire (5.41) en u' et v' donne :

$$\begin{cases} u' = -\dfrac{N}{ES} \cos\theta + \dfrac{T}{GS_2} \sin\theta - \omega \sin\theta \\ v' = -\dfrac{N}{ES} \sin\theta - \dfrac{T}{GS_2} \cos\theta + \omega \cos\theta \end{cases} \tag{5.44}$$

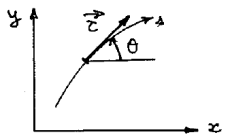
L'intégration des équations donne :

$$\begin{cases} u = u_0 - \int_{s_0}^{s} \dfrac{N}{ES}\, dx + \int_{s_0}^{s} \dfrac{T}{G_2}\, dy - \int_{s_0}^{s} \omega\, dy \\ v = v_0 - \int_{s_0}^{s} \dfrac{N}{ES}\, dy - \int_{s_0}^{s} \dfrac{T}{G_2}\, dx + \int_{s_0}^{s} \omega\, dx \end{cases} \tag{5.45}$$

avec :

$$dx = ds \cos\theta$$

$$dy = ds \sin\theta$$



En utilisant (5.42) et (5.43), l'intégration par partie de la dernière intégrale intervenant dans u donne :

$$\begin{aligned} \int_{s_0}^{s} \omega\, dy = [\omega y]_{s_0}^{s} - \int_{s_0}^{s} y\, d\omega &= \omega(s)y(s) - \omega_0 y_0 + \int_{s_0}^{s} y(\sigma) \frac{\mathcal{M}}{EJ}(\sigma)\, d\sigma \\ &= \omega_0(y - y_0) - \int_{s_0}^{s} \frac{\mathcal{M}}{EJ}(\sigma)\, [y - y(\sigma)]\, d\sigma \end{aligned}$$

On transforme de même le terme apparaissant dans v et on obtient :

$$\begin{cases} u = u_0 - \omega_0(y - y_0) - \int_{s_0}^{s} \dfrac{N}{ES}\, dx + \int_{s_0}^{s} \dfrac{T}{GS_2}\, dy + \int_{s_0}^{s} \dfrac{\mathcal{M}}{EJ}(\sigma)\, [y - y(\sigma)]\, d\sigma \\ v = v_0 + \omega_0(x - x_0) - \int_{s_0}^{s} \dfrac{N}{ES}\, dy - \int_{s_0}^{s} \dfrac{T}{GS_2}\, dx - \int_{s_0}^{s} \dfrac{\mathcal{M}}{EJ}(\sigma)\, [x - x(\sigma)]\, d\sigma \end{cases} \tag{5.46}$$

Les équations (5.43) et (5.46) sont les équations de Navier-Bresse qui permettent le calcul des déplacements d'un milieu curviligne. Ces équations sont la forme intégrée de (5.42) et (5.44). Dans le cas tridimensionnel, on peut également écrire des relations analogues mais plus compliquées.

Dans le cas d'une poutre droite, on a $(N = 0)$ et $(\theta = 0)$. Le système (5.41), (5.42) devient :

$$\begin{cases} u' = 0 \rightarrow u = 0 \\ v' = \omega - \dfrac{T}{GS_2} \qquad , \qquad \omega = -\dfrac{\mathcal{M}}{EJ} \end{cases} \tag{5.47}$$

La relation (5.43) reste inchangée. La relation(5.46) devient :

$$v = v_0 + \omega_0(x - x_0) - \int_{x_0}^{x} \frac{T}{GS_2}\, d\xi - \int_{x_0}^{x} \frac{\mathcal{M}}{EJ}\,[x - \xi]\;\, d\xi \tag{5.48}$$

Si on néglige les effets de l'effort tranchant :

$$v' = \omega \qquad , \qquad \omega' = -\frac{\mathcal{M}}{EJ}$$

$$EJv'' = -\mathcal{M} \tag{5.49}$$

La relation (5.49) correspond à l'équation différentielle de la déformée $v(x)$.

5.2 Méthodes énergétiques

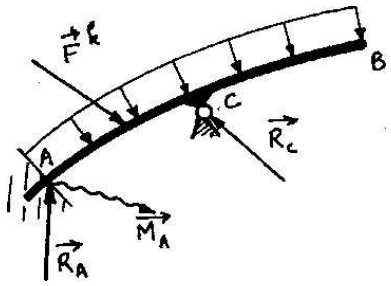
5.2.1 Problème de RDM

On considère un milieu curviligne astreint à des liaisons parfaites aux points A_k et soumis à un chargement connu.

Par exemple, on considère la poutre AB, encastrée en A, libre en B, appuyée en C et soumise à des efforts répartis et concentrés. Pour résoudre ce problème de RDM, il faut trouver, en fonction de l'abscisse curviligne s sur la poutre :

— le torseur déplacement $[\mathcal{U}(s)]$,

— le torseur des efforts intérieurs $[\mathcal{T}(s)]$.



Ces deux champs doivent vérifier :

<u>1- les équations d'équilibre</u>

$$[\mathcal{T}] = \left| \begin{array}{ll} [\varphi(s)]\, ds & \text{en général} \\ \left[\Phi^k\right] & \text{à travers } s_k \end{array} \right. \tag{5.50}$$

<u>2- les conditions statiques de liaison</u>

$$\begin{cases} \mathcal{M} & \text{continu en C } (M_C = 0) \\ [\mathcal{T}] = 0 & \text{en B } (\left[\Psi^B\right] = 0) \end{cases} \tag{5.51}$$

<u>3- les conditions cinématiques de liaison</u>

$$\overrightarrow{u_A} = \overrightarrow{\omega_A} = 0 \qquad , \qquad \overrightarrow{u_C} = 0 \tag{5.52}$$

4- la loi de comportement (5.37) ou (5.38)

On introduit :

[Définition] Un champ cinématiquement admissible (CCA) est un champ de torseurs déplacements $\left[\widetilde{\mathcal{U}}(s)\right]$ vérifiant les conditions cinématiques de liaison. [Définition] Un champ statiquement admissible (CSA) est un champ de torseurs des efforts intérieurs $\left[\hat{\mathcal{T}}(s)\right]$ vérifiant les équations d'équilibre et les conditions statiques de liaison.

Un champ statiquement admissible est donc un champ d'efforts intérieurs compatible avec les liaisons et en équilibre avec le chargement appliqué. En particulier, la donnée d'un champ statiquement admissible permet de déterminer les inconnues de liaison.

Dans l'exemple ci-dessus, les inconnues de liaison $\overrightarrow{R_A}, \overrightarrow{M_A}$ et $\overrightarrow{R_C}$ se calculent à partir de $\left[\hat{\mathcal{T}}\right]$ par :

$$\widehat{\overrightarrow{R_A}} = \widehat{\overrightarrow{\mathcal{R}}}(s_A^+) \qquad \widehat{\overrightarrow{M_A}} = \widehat{\overrightarrow{\mathcal{M}}}(s_A^+) \qquad \widehat{\overrightarrow{R_C}} = \widehat{\overrightarrow{\mathcal{R}}}(s_C^+) - \widehat{\overrightarrow{\mathcal{R}}}(s_C^-) \tag{5.53}$$

5.2.2 Théorème de Menabrea

L'énergie complémentaire d'un CSA $[\hat{\mathcal{T}}]$ est définie par :

$$H(\hat{\mathcal{T}}) = T_u^d(\hat{\mathcal{T}}) - W(\hat{\mathcal{T}}) \tag{5.54}$$

$W(\hat{\mathcal{T}})$ est l'énergie de déformation :

$$W(\hat{\mathcal{T}}) = \int_{s_A}^{s_B} \overset{*}{w}(\hat{\mathcal{T}})ds = \frac{1}{2}\int_{s_A}^{s_B} \left[\hat{\mathcal{T}}\right].\mathcal{L}\left[\hat{\mathcal{T}}\right]\ ds \tag{5.55}$$

$T_u^d(\hat{\mathcal{T}})$ est le travail du CSA $\hat{\mathcal{T}}$ induit par les déplacements donnés. Les déplacements imposés aux liaisons sont nuls. Il en résulte que T_u^d est nul.

$$T_u^d(\hat{\mathcal{T}}) = 0 \tag{5.56}$$

$$H(\hat{\mathcal{T}}) = -W(\hat{\mathcal{T}}) \tag{5.57}$$

Le théorème de l'énergie complémentaire s'écrit alors : [Théorème de l'énergie complémentaire] Parmi tous les CSA, la solution $[\mathcal{T}]$ maximise l'énergie complémentaire.

$$H(\mathcal{T}) \geqslant H(\hat{\mathcal{T}}) \qquad \forall \hat{\mathcal{T}}\ CSA \tag{5.58}$$

On peut exprimer ce théorème d'une façon plus naturelle.

Si le système est isostatique, on peut calculer les efforts intérieurs à partir des seules équations d'équilibre statique. Il existe un seul champ statiquement admissible qui est donc la solution du problème. Le théorème de l'énergie complémentaire est inutile.

Si le système est hyperstatique de degré h, on peut calculer les efforts intérieurs à partir de h inconnues hyperstatiques. L'espace des CSA est un espace affine de dimension h et les inconnues hyperstatiques définissent un paramétrage de cet espace.

Compte-tenu de (5.57), on peut reformuler le théorème de l'énergie complémentaire sous la forme du théorème de Menabrea.

Théorème de Menabrea
Pour un système hyperstatique, les inconnues hyperstatiques prennent la valeur qui minimise l'énergie de déformation du système.

Le théorème de Menabrea est le théorème qui permet de lever l'hyperstaticité d'un système en RDM : après avoir écrit les équations d'équilibre statique, on calcule l'énergie de déformation, et on obtient la valeur des inconnues hyperstatiques par minimisation de celle-ci. La dérivée de l'énergie de déformation par rapport à chacune des h inconnues hyperstatiques est nulle, ce qui permet d'écrire un système linéaire de h équation reliant les h inconnues hyperstatiques.

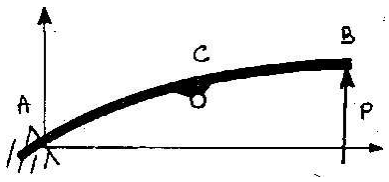
5.2.3 Théorème de réciprocité

Pour le théorème de réciprocité (ou de Maxwell-Betti) et le théorème de Castigliano, on envisage une même structure soumise à deux chargements différents :

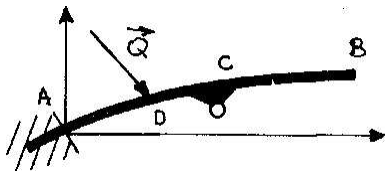
Chargement 1	$[\varphi^1(s)]$	$\begin{bmatrix}\Phi^{k1}\end{bmatrix}$
Chargement 2	$[\varphi^2(s)]$	$\begin{bmatrix}\Phi^{k2}\end{bmatrix}$

Théorème de la réciprocité (ou de Maxwell-Betti)
Le travail du chargement 1 induit par le déplacement $[\mathcal{U}^2]$ solution du problème 2 est égal au travail du chargement 2 induit par le déplacement $[\mathcal{U}^1]$ solution du problème 1.

$$\int \left[\varphi^1\right].\left[\mathcal{U}^2\right]\ ds + \sum \left[\Phi^{k1}\right].\left[\mathcal{U}_k^2\right] = \int \left[\varphi^2\right].\left[\mathcal{U}^1\right]\ ds + \sum \left[\Phi^{k2}\right].\left[\mathcal{U}_k^1\right] \tag{5.59}$$



Problème 1



Problème 2

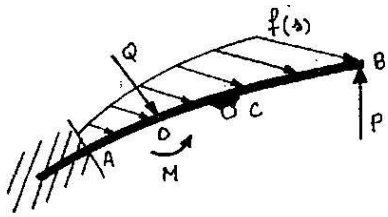
On considère par exemple les deux problèmes ci-dessus, et $[\mathcal{U}^1]$ et $[\mathcal{U}^2]$ les torseurs déplacements solutions de ces deux problèmes.

Travail du chargement 1 dans $[\mathcal{U}^2]$	Pv_B^2
Travail du chargement 2 dans $[\mathcal{U}^1]$	$\overrightarrow{Q}.\overrightarrow{u_D^1}$

Le théorème de réciprocité donne alors :

$$v_B^2 = \frac{1}{P}\overrightarrow{Q}.\overrightarrow{u_D^1} \tag{5.60}$$

Ainsi, une fois résolu le problème 1 et connu le déplacement $[\mathcal{U}^1]$ le long de AB, on obtient directement le déplacement vertical du point B lorsque la poutre est soumise à une force concentrée quelconque, puis, par superposition, lorsqu'elle est soumise à un chargement quelconque.



Par exemple, pour le problème 3 ci-contre, il vient :

$$v_B^3 = \frac{1}{P}\left(\overrightarrow{Q}.\overrightarrow{u_D^1} + M\omega_D^1 + \int_{s_A}^{s_B} \overrightarrow{f}(s).\overrightarrow{u^1}(s)\ ds\right) + v_B^1 \tag{5.61}$$

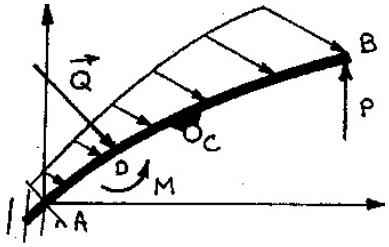
De même, la résolution des deux problèmes suivants permet de déterminer le déplacement horizontal et la rotation du point B pour un chargement quelconque.

5.2.4 Théorème de Castigliano

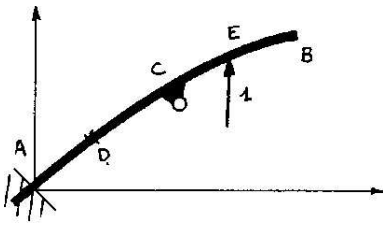
Théorème de Castigliano
Soit $[\hat{\mathcal{T}}^2]$ un CSA pour le problème 2. Le travail du chargement 2 dans le déplacement 1 est égal à la dérivée à l'origine de la fonction donnant l'énergie de déformation du champ $[\mathcal{T}^1 + \lambda\hat{\mathcal{T}}^2]$ en fonction de λ

$$\int \left[\varphi^2\right] . \left[\mathcal{U}^1\right] \; ds + \sum \left[\Phi^{k2}\right] . \left[\mathcal{U}^1_k\right] = \frac{d}{d\lambda} W(\mathcal{T}^1 + \lambda\hat{\mathcal{T}}^2)\Big|_{\lambda=0} \tag{5.62}$$

En prenant comme chargement 2 un effort (ou un moment) concentré, ce théorème permet de calculer le déplacement (ou la rotation) en un point donné sans avoir à intégrer le champ de déplacements.



Problème 1



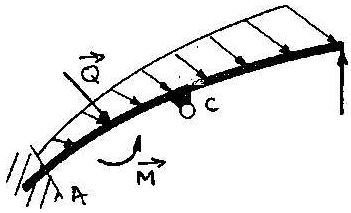
Problème 2

Par exemple, pour connaître le déplacement vertical du point E, on applique en ce point une force verticale unité fictive. Le travail du chargement 2 dans $[\mathcal{U}^1]$ est alors $1 \times v^1_E$ et le théorème de Castigliano donne directement :

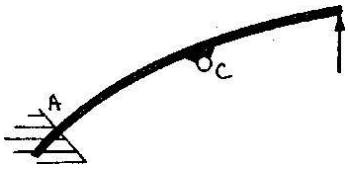
$$v^1_E = \frac{d}{d\lambda} W(\mathcal{T}^1 + \lambda\hat{\mathcal{T}}^2)\Big|_{\lambda=0} \tag{5.63}$$

D'un point de vue pratique, l'hyperstatisme a été levé à partir du théorème de Menabrea. On connait donc $[\mathcal{T}^1(s)]$. On construit alors un CSA $\hat{\mathcal{T}}^2$ pour le problème 2 en écrivant les équations d'équilibre statique et, par exemple, en supposant nulles les inconnues hyperstatiques. Ceci revient à rendre le problème 2 isostatique en supprimant des liaisons.

S'il y a déjà une force appliquée au point E dans le problème 1, alors la situation est encore plus simple. Si on cherche à déterminer le déplacement vertical du point B, il faut alors appliquer un effort fictif au point B.

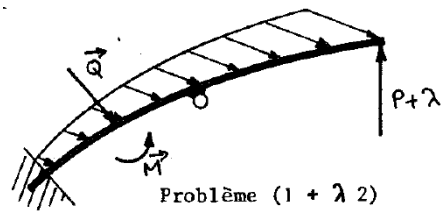


Problème 1



Problème 2

Par superposition, $[\mathcal{T}^1 + \lambda\mathcal{T}^2]$ est le champ d'efforts intérieurs associé au problème suivant :



Si on note $W(..., Q, M, P + \lambda)$ l'énergie de déformation pour le problème 1 (qui dépend des forces appliquées Q, M, P), son énergie de déformation est :

$$W(\mathcal{T}^1 + \lambda\hat{\mathcal{T}}^2) = W(..., Q, M, P + \lambda) \tag{5.64}$$

En prenant comme CSA le champ solution $[\mathcal{T}^2]$, l'application du théorème de Castigliano donne :

$$v_B^1 = \frac{d}{d\lambda} W(..., Q, M, P + \lambda)\Big|_{\lambda=0} = \frac{\partial W}{\partial P}(..., Q, M, P) \tag{5.65}$$

Il existe finalement une formulation du théorème de Castigliano qui permet de calculer très simplement les déplacements à partir de l'énergie de déformation (qui a déjà été calculée pour lever l'hyperstatisme) :

> ***Théorème de Castigliano (2)***
> *Si une structure est soumise à un effort (respectivement un couple) concentré, alors la dérivée partielle de l'énergie de déformation par rapport à cet effort (respectivement ce couple) donne le déplacement (respectivement la rotation) au point d'application et dans la direction de l'effort.*

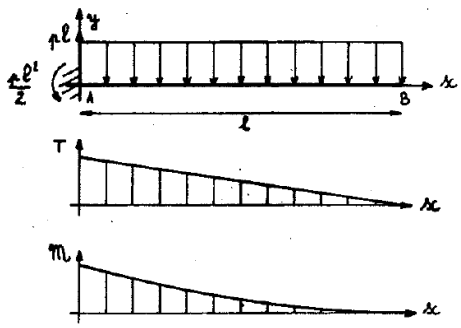
Chapitre 6

Exemples de poutres droites

6.1 *Poutres isostatiques*

Dans les poutres droites, les efforts extérieurs et intérieurs ne font intervenir que deux composantes (composantes de la résultante selon $\overrightarrow{y}$ et du moment autour de $\overrightarrow{z}$). Pour une poutre isostatique, la résolution des équations d'équilibre permet de calculer les efforts intérieurs en fonction des efforts extérieurs. Il reste à dimensionner la section de la poutre et à calculer ses déplacements.

6.1.1 Poutre encastrée-libre soumise à un effort réparti uniforme



On considère une poutre encastrée-libre soumise à un effort réparti uniforme de densité p. Les inconnues de liaison sont données par :

$$R_A = pl \qquad , \qquad M_A = \frac{pl^2}{2} \tag{6.1}$$

Les efforts intérieurs (effort tranchant et moment fléchissant) sont donnés par :

$$T(x) = p(l-x) \qquad , \qquad \mathcal{M}(x) = \frac{p(l-x)^2}{2} \tag{6.2}$$

Dans le cadre classique de la RDM, on peut négliger la contrainte de cisaillement. La condition de dimensionnement s'écrit donc :

$$\sigma_{11max} = \frac{\mathcal{M}_f}{J/\eta} \leqslant \sigma_e \tag{6.3}$$

soit :

$$\frac{J}{\eta} \geqslant \frac{\mathcal{M}_f}{\sigma_e} = \frac{p(l-x)^2}{2\sigma_e} \tag{6.4}$$

La section la plus sollicitée correspond à l'encastrement.

Pour une section rectangulaire (b, h) où h est la dimension dans la direction de $\overrightarrow{y}$, la condition de dimensionnement donne :

$$\frac{bh^2}{6} \geqslant \frac{p(l-x)^2}{2\sigma_e} \tag{6.5}$$

Le plus souvent, on construit une poutre à section constante, c'est-à-dire que l'on choisit les dimensions b et h telles que :

$$\frac{bh^2}{2} \geqslant \frac{\mathcal{M}_{f_{max}}}{\sigma_e} = \frac{pl^2}{2\sigma_e} \tag{6.6}$$

On peut aussi construire une poutre d'égale résistance, c'est-à-dire une poutre à section variable telle que la contrainte maximale est la même dans chaque section tout au long de la poutre, ce qui permet un gain de matière appréciable. On se fixe par exemple b et on calcule $h(x)$:

$$h(x) = s\sqrt{\frac{3p}{b\sigma_e}}(l - x) \tag{6.7}$$

où s est un coefficient de sécurité. La poutre présente donc un profil triangulaire.

Pour le calcul des déplacements, on utilise la loi de comportement. Pour les poutres droites, elle ne fait intervenir que les deux composantes correspondant au déplacement vertical v et la rotation ω. Elle s'écrit sous la forme (5.47) obtenue au paragraphe 5.1.5 :

$$\omega' = -\frac{\mathcal{M}}{EJ} = -\frac{p}{EJ}\left(\frac{x^2}{2} - lx + \frac{l^2}{2}\right) \tag{6.8}$$

$$v' = \omega - \frac{T}{GS_2} = \omega + \frac{p}{GS_2}(x - l) \tag{6.9}$$

Pour une poutre à section constante, J ne dépend pas de x. L'intégration de (6.8) donne :

$$\omega = -\frac{p}{6EJ}(x^3 - 3lx^2 + 3l^2x) + \cancel{\omega_A} \tag{6.10}$$

La constante d'intégration ($\omega_A = 0$) est identifiée à partir de la condition à l'encastrement en A. L'intégration de (6.9) donne :

$$v = -\frac{p}{24EJ}\left(x^4 - 4lx^3 + 6l^2x^2\right) + \frac{p}{2GS_2}\left(x^2 - 2lx\right) + \cancel{v_A} \tag{6.11}$$

La constante d'intégration ($v_A = 0$) est identifiée à partir de la condition à l'encastrement en A. En particulier, la flèche en B est donnée par :

$$v(l) = v_B = -\frac{pl^4}{8EJ} - \frac{pl^2}{2GS_2}$$

$$v_B = -\frac{pl^4}{8EJ}[\underbrace{1}_{\text{Flexion}} + \underbrace{\frac{4EJ}{GS_2l^2}}_{\text{Effort tranchant}}] \tag{6.12}$$

L'effet de l'effort tranchant est en $O(d^2/l^2)$ par rapport à l'effet du moment fléchissant. Dans les exemples suivants, sauf mention explicite du contraire, l'effort tranchant est négligé et les poutres droites sont dimensionnées en flexion pure, ce qui revient à écrire $1/GS_2 = 0$. En particulier, les équations (6.8) et (6.9) sont remplacées par :

$$EJv'' = -\mathcal{M} \tag{6.13}$$

avec les conditions aux limites correspondant à l'encastrement :

$$v_A = 0 \qquad\qquad v'_A = \omega_A = 0 \tag{6.14}$$

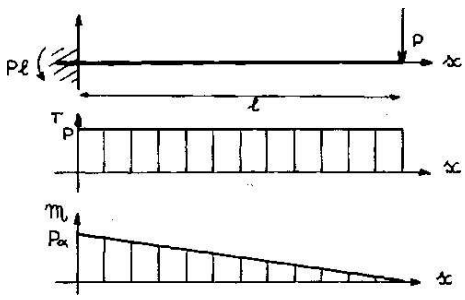
6.1.2 Poutre encastrée-libre soumise à un effort concentré

On considère une poutre de section constante, encastrée-libre et soumise à un effort concentré P. Les inconnues de liaison sont données par :

$$R_A = P, M_A = Pl \tag{6.15}$$

Les efforts intérieurs sont donnés par :

$$T = P, \mathcal{M} = P(l - x) \tag{6.16}$$



La section la plus sollicitée est l'encastrement. Le moment fléchissant maximal vaut Pl. Le dimensionnement est effectué à partir de (6.3).

Pour calculer les déplacements, on intègre (6.13) avec les conditions aux limites correspondant à l'encastrement :

$$\begin{cases} EJv'' = -\mathcal{M} = P(x-l) \\ EJv' = P\left(\dfrac{x^2}{2} - lx\right) + EJ\cancel{v'_A} \\ EJv = P\left(\dfrac{x^3}{6} - l\dfrac{x^2}{2}\right) + EJ\cancel{v_A} \end{cases} \tag{6.17}$$

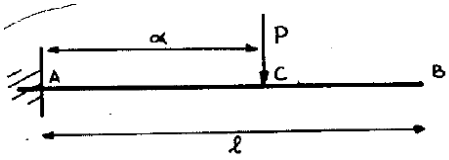
L'équation de la déformée est :

$$v = \frac{P}{6EJ}(x^3 - 3lx^2) = \frac{Px^2(x-3l)}{6EJ} \tag{6.18}$$

En particulier, la flèche au point B est donnée par :

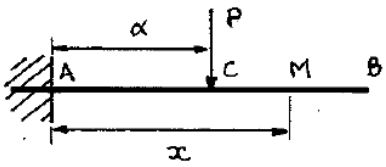
$$\delta = -v_B = \frac{Pl^3}{3EJ} \tag{6.19}$$

Si l'effort P n'est pas appliqué à l'extrémité B de la poutre mais à un point C intermédiaire, les résultats précédents restent valables entre A et C, en remplaçant l par α pour $(0 \leqslant x \leqslant \alpha)$:

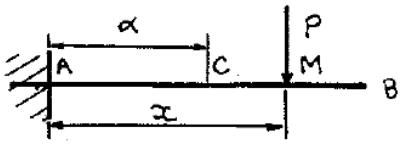


$$v = \frac{Px^2(x-3\alpha)}{6EJ} \tag{6.20}$$

Entre C et B, on peut procéder directement, mais il est plus simple d'appliquer le théorème de réciprocité du paragraphe 5.2.3. On considère les deux problèmes suivants :



Problème 1



Problème 2

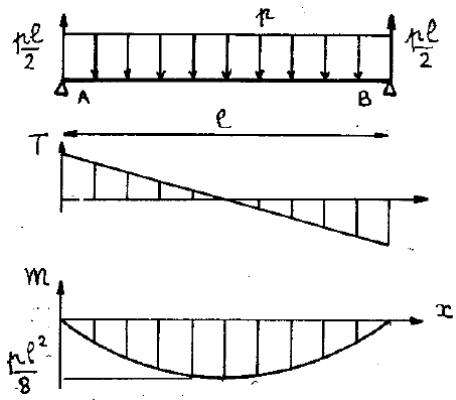
Le théorème de réciprocité donne alors :

$$Pv_M^1 = Pv_C^2 \qquad ou \qquad v_M^1 = v_C^2 \tag{6.21}$$

Ainsi, un effort P appliqué au point C génère un déplacement au point M égal à celui généré au point C par un effort P appliquée au point M. Pour calculer ce dernier, il suffit d'appliquer la formule (6.20) en échangeant x et α. On obtient pour $(\alpha \geqslant l)$:

$$v = -\frac{P\alpha^2(3x-\alpha)}{6EJ} \tag{6.22}$$

6.1.3 Poutre sur deux appuis soumise à un effort réparti uniforme



On considère une poutre de section constante sur deux appuis soumise à un effort réparti uniforme de densité p. Les inconnues de liaison sont données par :

$$R_A = R_B = pl/2 \tag{6.23}$$

Les efforts intérieurs sont donnés par :

$$T(x) = p\left(\frac{l}{2} - x\right), \mathcal{M}(x) = -\frac{plx}{2} + \frac{px^2}{2} \tag{6.24}$$

La section la plus sollicitée est située au milieu de la poutre. Le moment fléchissant maximal vaut $Pl/8$. Le dimensionnement est effectué à partir de (6.3).

Pour calculer les déplacements, on intègre (6.13) avec les conditions aux limites correspondant aux deux appuis en A et B :

$$\begin{aligned} EJv'' &= -\frac{px^2}{2} + \frac{plx}{2} \\ EJv' &= -\frac{px^3}{6} + \frac{plx^2}{4} + EJv'_A \\ EJv &= -\frac{px^4}{24} + \frac{plx^3}{12} + EJv'_A x + EJ\cancel{v_A} \end{aligned} \tag{6.25}$$

La constante d'intégration est identifiée à partir de la condition en B ($v_B = v(l) = 0$).

$$EJv'_A = -\frac{pl^3}{24} \tag{6.26}$$

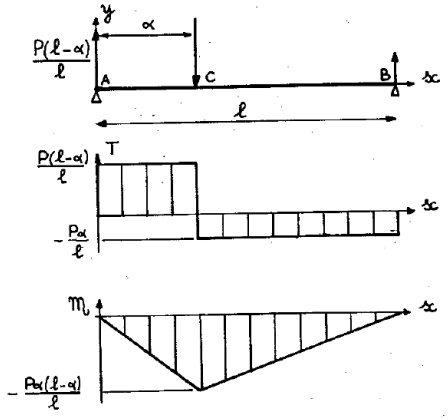
L'équation de la déformée est :

$$v = -\frac{p}{24EJ}(x^4 - 2lx^3 + l^3x) \tag{6.27}$$

En particulier, la flèche au milieu de la poutre est donnée par :

$$f = -v\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{5}{8}\frac{pl^4}{48EJ} \tag{6.28}$$

6.1.4 Poutre sur deux appuis soumise à un effort concentré



On considère une poutre de section constante sur deux appuis soumise à un effort concentré P (exemple 1 des paragraphes 1.3.1 et 2.2.1). Les inconnues de liaison sont données par :

$$R_A = \frac{P(l-\alpha)}{l} \quad , \quad R_B = \frac{P\alpha}{l} \tag{6.29}$$

Les efforts intérieurs sont donnés par :

$$0 \leqslant x \leqslant \alpha \qquad\qquad \alpha \leqslant x \leqslant l$$

$$T(x) = \frac{P(l-\alpha)}{l} \qquad\qquad T(x) = -\frac{P\alpha}{l} \tag{6.30}$$

$$\mathcal{M}(x) = -\frac{P(l-\alpha)}{l}x \qquad\qquad \mathcal{M}(x) = -\frac{P\alpha}{l}(l-x) \tag{6.31}$$

La section la plus sollicitée est la section en C où est appliqué l'effort P. La condition de dimensionnement (6.3) donne :

$$\frac{J}{\eta} \geqslant \frac{\mathcal{M}_{fmax}}{\sigma_e} = \frac{P\alpha(l-\alpha)}{l\sigma_e} \tag{6.32}$$

Pour calculer les déplacements, on intègre (6.13) avec les conditions aux limites correspondant aux deux appuis en A et B :

$$v_A = v(0) = 0 \qquad\qquad v_B = v(l) = 0 \tag{6.33}$$

$$0 \leqslant x \leqslant \alpha \qquad\qquad \alpha \leqslant x \leqslant l$$

$$EJv'' = \frac{P(l-\alpha)}{l}x \qquad\qquad EJv'' = -\frac{P\alpha}{l}(x-l)$$

$$EJv' = \frac{P(l-\alpha)}{l}\frac{x^2}{2} + A \qquad\qquad EJv'' = \frac{P\alpha}{l}\frac{(x-l)^2}{2} + B$$

$$EJv = \frac{P(l-\alpha)}{l}\frac{x^3}{6} + Ax + EJ\cancel{v_A} \qquad\qquad EJv = -\frac{P\alpha}{l}\frac{(x-l)^3}{6} + B(x-l) + EJ\cancel{v_B} \tag{6.34}$$

avec deux constantes d'intégration A et B, qui sont déterminées en raccordant les deux solutions, c'est-à-dire en écrivant la continuité de v et de $\omega = v'$ en C pour $x = \alpha$:

$$\begin{cases} \dfrac{P(l-\alpha)}{l}\dfrac{\alpha^2}{2} + A = -\dfrac{P\alpha}{l}\dfrac{(\alpha-l)^2}{2} + B \\ \dfrac{P(l-\alpha)}{l}\dfrac{\alpha^3}{6} + A\alpha = -\dfrac{P\alpha}{l}\dfrac{(\alpha-l)^3}{6} + B(\alpha-l) \end{cases} \tag{6.35}$$

On obtient ainsi un système de deux équations à deux inconnues qui permet de calculer A et B :

$$\begin{cases} A = -\dfrac{P\alpha(l-\alpha)(2l-\alpha)}{6l} = EJv'_A \\ B = \dfrac{P\alpha(l-\alpha)(l+\alpha)}{6l} = EJv'_B \end{cases} \tag{6.36}$$

L'équation de la déformée est :

$$v = \left| \begin{array}{ll} \dfrac{P(l-\alpha)}{6EJl}\left[x^3 - \alpha(2l-\alpha)x\right] & 0 \leqslant x \leqslant \alpha \\ \\ \dfrac{P\alpha}{6EJl}\left[(l-x)^3 - (l-\alpha)(l+\alpha)(l-x)\right] & \alpha \leqslant x \leqslant l \end{array} \right. \tag{6.37}$$

En particulier, la flèche au point C est donnée par $x = \alpha$:

$$\delta = -v_c = \frac{P\alpha^2(l-\alpha)^2}{3EJl} \tag{6.38}$$

Si l'effort est appliqué au milieu de la poutre, $\alpha = l/2$, il vient :

$$\delta = -v_c = \frac{Pl^3}{48EJ} \tag{6.39}$$

6.1.5 Poutre sur deux appuis soumise à un moment terminal

On considère une poutre de section constante sur deux appuis soumise à un un moment terminal M. Pour calculer les déplacements, on intègre (6.13) avec les conditions aux limites correspondant aux deux appuis en A et B :

$$\begin{aligned} EJv'' &= -\mathcal{M} = \frac{M}{l}(x-l) \\ EJv' &= \frac{M}{l}\left(\frac{x^2}{2} - lx\right) + EJv'_A \\ EJv &= \frac{M}{l}\left(\frac{x^3}{6} - \frac{lx^2}{2}\right) + EJv'_A + EJ\cancel{v_A} \end{aligned} \tag{6.40}$$

La constante d'intégration est identifiée à partir de la condition en B ($v_B = v(l) = 0$).

$$EJv'_A = \frac{Ml^2}{3} \tag{6.41}$$

L'équation de la déformée est :

$$v = \frac{M}{6EJl}(x^3 - 3lx^2 + 2lx) \tag{6.42}$$

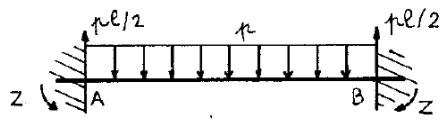
$$v'_B = v'(l) = -\frac{Ml^2}{6EJ} \qquad , \qquad v'_A = \frac{Ml^2}{3EJ} \tag{6.43}$$

6.2 Poutres hyperstatiques

6.2.1 Exemples - Dimensionnement

Pour une poutre hyperstatique, la résolution des équations d'équilibre permet de calculer les efforts intérieurs en fonction des efforts extérieurs et des inconnues hyperstatiques. Mais, il reste à lever l'hyperstatisme, c'est-à-dire calculer les inconnues hyperstatiques. Pour cela, il existe trois méthodes qu'on peut appliquer sur deux exemples : une poutre encastrée-encastrée et une poutre encastrée-appuyée, toutes les deux étant soumises à un efffort réparti uniforme . On se limite aux poutres à section constante. En effet, pour dimensionner une structure hyperstatique, il faut lever l'hyperstatisme, mais, pour lever l'hyperstatisme, il faut connaître $J(x)$ et donc avoir dimensionné la section de la poutre. Pour une poutre hyperstatique, on ne peut donc pas construire une poutre d'égale résistance de manière simple.

Exemple 1
Une poutre de longueur l encastrée en A et B est soumise à un effort réparti uniforme. L'application des équations d'équilibre statique donne :



$$R_B = pl - R_A \qquad M_B = -M_A + R_A l - \frac{pl^2}{2} \tag{6.44}$$

Le système est hyperstatique de degré 2. On retient $Y = R_A$ et $Z = M_A$ comme inconnues hyperstatiques.
Les efforts intérieurs sont :

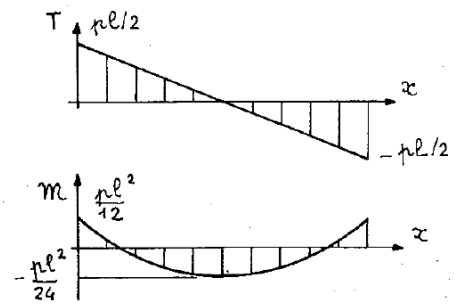
$$T = Y - px \qquad , \qquad \mathcal{M} = Z - Yx + \frac{px^2}{2} \tag{6.45}$$

Une fois levé l'hyperstatisme par l'une des méthodes présentées dans les paragraphes suivants, on obtient pour cet exemple :

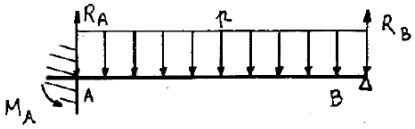
$$Y = \frac{pl}{2} = R_A = R_B \qquad , \qquad Z = \frac{pl^2}{12} = M_A = -M_B \tag{6.46}$$

On peut alors - et alors seulement - tracer les diagrammes des efforts tranchants et des moments fléchissants. On constate que le moment fléchissant est maximum au niveau des encastrements. Sa valeur est $pl^2/12$. On peut alors dimensionner la section de la poutre :

$$\frac{J}{\eta} \geqslant \frac{\mathcal{M}_{f_{max}}}{\sigma_e} = \frac{pl^2}{12\sigma_e} \tag{6.47}$$



Exemple 2
Une poutre de longueur l encastrée en A et appuyée en B est soumise à une charge répartie uniforme. Le système est hyperstatique de degré 1.



On retient $Y = R_B$ comme inconnue hyperstatique. Les inconnues de liaison sont :

$$R_B = Y \quad , \quad R_A = pl - Y \quad , \quad M_A = -Yl + \frac{pl^2}{2} \tag{6.48}$$

Les efforts intérieurs obtenus par la méthode 2 sont :

$$T = -R_B + p(l-x) \quad , \quad \mathcal{M} = -R_B(l-x) + \frac{p(l-x)^2}{2} \tag{6.49}$$

Les efforts intérieurs obtenus par la méthode 1 sont :

$$T = R_A - px \quad , \quad \mathcal{M} = M_A - R_A x + \frac{px^2}{2} \tag{6.50}$$

Suivant la méthode utilisée pour lever l'hyperstatisme, il est plus facile d'utiliser l'une ou l'autre de ces expressions. On obtient pour cet exemple :

$$Y = R_B = \frac{3pl}{8} \quad , \quad R_A = \frac{5pl}{8} \quad , \quad M_A = \frac{pl^2}{8} \tag{6.51}$$

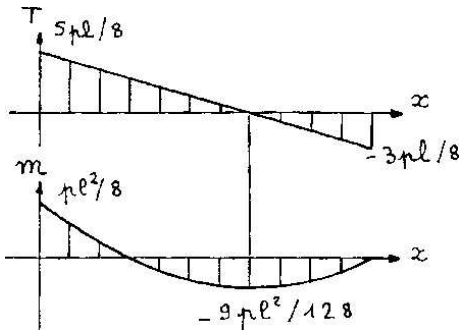
On peut alors tracer les diagrammes des efforts tranchants et des moments fléchissants.

Le moment fléchissant maximum peut a priori être atteint :

— à l'encastrement $x = 0$, $\mathcal{M} = \dfrac{pl^2}{8}$

— au point $x = 5l/8$ où l'effort tranchant s'annule et qui correspond au point où le moment fléchissant passe par un extremum. En reportant (6.51) dans (6.49), on trouve :

$$x = \frac{5l}{8} \quad , \quad \mathcal{M} = -\frac{9pl^2}{128}$$



Finalement, le moment fléchissant maximum est atteint à l'encastrement et vaut $pl^2/8$. On peut alors dimensionner la section de la poutre.

Il reste donc à lever l'hyperstatisme, c'est-à-dire à obtenir (6.46) et (6.51). On a montré que l'effet de l'effort tranchant était négligeable :

— pour le dimensionnement (§ 4.1.3),

— pour le calcul du déplacement (§ 6.1.1).

On suppose (sans le montrer) qu'il est également négligeable pour la levée de l'hyperstatisme.

6.2.2 Méthode énergétique

La première méthode pour lever l'hyperstatisme consiste à utiliser le théorème de Menabrea. L'énergie de déformation d'une poutre droite en flexion pure est donnée par :

$$W = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{\mathcal{M}^2}{EJ}\,dx \tag{6.52}$$

Exemple 1

A partir de (6.45), on obtient :

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}\int_0^l \left(\hat{Z} - \hat{Y}x + \frac{px^2}{2}\right)^2 dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^l \left(\hat{Z}^2 - \hat{Y}^2x^2 - 2\hat{Z}\hat{Y}x + p\hat{Z}x^2 - p\hat{Y}x^3 + \frac{p^2x^4}{4}\right) dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\hat{Z}^2 l + \hat{Y}^2\frac{l^3}{3} - \hat{Z}\hat{Y}l^2 + p\hat{Z}\frac{l^3}{3} - p\hat{Y}\frac{l^4}{4} + \frac{p^2l^5}{20}\right] \end{aligned} \tag{6.53}$$

Le théorème de Menabrea donne alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial Z} &= Zl - Y\frac{l^2}{2} + \frac{pl^3}{6} = 0 \\ \frac{\partial W}{\partial Y} &= -Z\frac{l^2}{2} + Y\frac{l^3}{3} - \frac{pl^4}{8} = 0 \end{aligned} \tag{6.54}$$

Ce système de deux équations à deux inconnues s'écrit encore :

$$\begin{cases} 6Z - 3Yl = -pl^2 \\ -12Z + 8Yl = 3pl^2 \end{cases} \tag{6.55}$$

Finalement :

$$Y = \frac{pl}{2} \quad , \quad Z = \frac{pl^2}{12} \tag{6.56}$$

Exemple 2

On obtient de la même manière, en utilisant la forme (6.49) :

$$W = \frac{1}{2EJ}\int_0^l \left[-Y(l-x) + \frac{p(l-x)^2}{2}\right]^2 dx \tag{6.57}$$

en faisant le changement de variable $\xi = l - x$, on obtient facilement :

$$EJW = \frac{1}{2}\int_0^l \left[\frac{p\xi^2}{2} - Y\xi\right]^2 d\xi = \frac{1}{2}\left[Y^2\frac{l^3}{3} - pY\frac{l^4}{4} + \frac{pl^5}{20}\right] \tag{6.58}$$

et le théorème de Menabrea donne :

$$EJ\frac{\partial W}{\partial Y} = Y\frac{l^3}{3} - \frac{pl^4}{8} = 0 \quad , \quad Y = \frac{3pl}{8} \tag{6.59}$$

6.2.3 Compatibilité des déformations

Si on impose L conditions de liaisons cinématiques à une poutre droite, elle est isostatique si $L = 2$, et hyperstatique de degré $L - 2$ si $L > 2$. On peut donc calculer les efforts intérieurs en fonction de $(L-2)$ inconnues hyperstatiques. La déformée $v(x)$ s'obtient par intégration de l'équation différentielle du second ordre (6.13) qui introduit 2 constantes d'intégration, alors que L conditions aux limites sont imposées. Il en résulte donc $(L - 2)$ équations de compatibilité qui permettent de calculer les $(L - 2)$ inconnues hyperstatiques.

Exemple 1

On intègre (6.13) avec les conditions aux limites en A et B :

$$v_A = 0 \quad , \quad v'_A = 0 \quad , \quad v_B = 0 \quad , \quad v'_B = 0 \tag{6.60}$$

Compte-tenu de (6.45), l'équation (6.13) donne :

$$\begin{cases} EJv'' = -\dfrac{px^2}{2} + Yx - Z \\ EJv' = -\dfrac{px^3}{6} + Y\dfrac{x^2}{2} - Zx + EJ\cancel{v'_A} \\ EJv = -\dfrac{px^4}{24} + Y\dfrac{x^3}{6} - Z\dfrac{x^2}{2} + EJ\cancel{v_A} \end{cases} \tag{6.61}$$

Les deux conditions aux limites en B restantes donnent un système de 2 équations à 2 inconnues qui permet de calculer X et Y :

$$\begin{cases} EJv'(l) = -\dfrac{pl^3}{6} + Y\dfrac{l^2}{2} - Zl = 0 \\ EJv(l) = -\dfrac{pl^4}{24} + Y\dfrac{l^3}{6} - Z\dfrac{l^2}{2} = 0 \end{cases} \tag{6.62}$$

$$\begin{cases} 6Z - 3Yl = -pl^2 \\ 12Z - 4Yl = -pl^2 \end{cases} \tag{6.63}$$

Le système permet de retrouver le résultat (6.46). L'équation de la déformée est alors :

$$\begin{aligned} EJv &= -\frac{px^4}{24} + \frac{plx^3}{12} - \frac{pl^2x^2}{24} \\ v &= -\frac{p}{24EJ}x^2(l-x)^2 \end{aligned} \tag{6.64}$$

Exemple 2

On intègre (6.13) avec les conditions aux limites en A et B :

$$v_A = 0 \quad , \quad v'_A = 0 \quad , \quad v_B = 0 \tag{6.65}$$

On obtient :

$$\begin{cases} EJv'' = -\dfrac{px^2}{2} + R_Ax - M_A \\ EJv' = -\dfrac{px^3}{6} + R_A\dfrac{x^2}{2} - M_Ax + EJ\cancel{v'_A} \\ EJv = -\dfrac{px^4}{24} + R_A\dfrac{x^3}{6} - M_A\dfrac{x^2}{2} + EJ\cancel{v_A} \end{cases} \tag{6.66}$$

Il reste à écrire la condition aux limites en B :

$$EJv(l) = -\frac{pl^4}{24} + R_A\frac{l^3}{6} - M_A\frac{l^2}{2} = 0 \tag{6.67}$$

En remplaçant M_A et R_A par leur expression (6.48) en fonction de l'inconnue hyperstatique Y, on trouve :

$$12\left(Yl - \frac{pl^2}{2}\right) + 4\left(pl - Y\right)l - pl^2 = 0$$

$$12Y - 6pl + 4pl - 4Y - pl = 0 \tag{6.68}$$

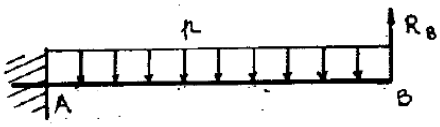
L'équation permet de retrouver le résultat (6.46) $Y = 3pl/8$, soit (6.51). L'équation de la déformée est alors :

$$v = -\frac{p}{48EJ}x^2(2x^2 - 5xl + 3l^2) \tag{6.69}$$

6.2.4 Méthode de superposition

La troisième méthode est la méthode de superposition : on commence par rendre le problème isostatique en supprimant des liaisons surabondantes et en considérant les inconnues de liaison correspondantes comme des forces extérieures. On résout ce problème isostatique par superposition de problèmes isostatiques élémentaires, et on détermine les inconnues de liaison en écrivant que les conditions cinématiques de liaison supprimées au départ sont vérifiées.

Exemple 2
On supprime l'appui en B en appliquant au point B une force concentrée R_B. Le problème devient isostatique et, après l'avoir résolu, on calcule R_B en écrivant que la flèche en B est nulle.



$$v_B = v(l) = 0 \tag{6.70}$$

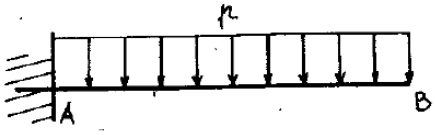
Pour ce problème isostatique, les efforts intérieurs sont donnés par (6.49) (la seule différence étant que R_B n'est plus une inconnue hyperstatique, mais un effort appliqué) et on peut résoudre ce problème par l'une des deux méthodes envisagées précédemment. Si l'on choisit la méthode énergétique, on remarque que d'après (6.49) l'énergie de déformation est toujours donnée par (6.57) avec $Y = R_B$. L'application du théorème de Castigliano donne alors :

$$v_B = \frac{\partial W}{\partial R_B} \tag{6.71}$$

Ainsi, l'écriture de (6.70) redonne exactement (6.59). Lorsque les inconnues hyperstatiques sont les inconnues de liaison associées à des liaisons surabondantes, le théorème de Menabrea est un cas particulier du théorème de Castigliano, et il est souvent présenté comme tel dans les cours de RDM. Si l'on préfère appliquer la méthode de compatibilité des déformations, alors on peut encore écrire (6.66), et la condition (6.70) redonne directement (6.67). Ainsi, si l'on envisage les deux méthodes présentées plus haut, la transformation du problème ne rapporte rien, les calculs étant exactement les mêmes. Par contre, on peut résoudre ce problème par superposition des deux problèmes élémentaires qui ont été étudiés au paragraphe 6.1 :

Problème 1 : c'est le problème du paragraphe 6.1.1 et on a trouvé (6.12) :

$$v_B^1 = -\frac{pl^4}{8EJ} \tag{6.72}$$



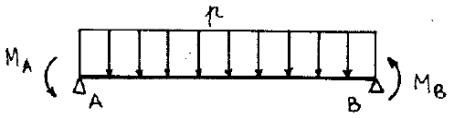
Problème 2 : c'est le problème du paragraphe 6.1.2 et on a trouvé (6.19) :

$$v_B^2 = \frac{R_B l^3}{3EJ} \tag{6.73}$$

Par superposition, on a $v_B = v_B^1 + v_B^2$ et la condition (6.70) donne directement :

$$\frac{R_B l^3}{3EJ} - \frac{pl^4}{8EJ} = 0 \qquad , \qquad R_B = \frac{3pl}{8} \tag{6.74}$$

Exemple 2
On remplace les encastrements en A et B par deux appuis simples, et on considère les moments d'encastrement M_A et M_B comme des efforts extérieurs. La condition à écrire est donc :

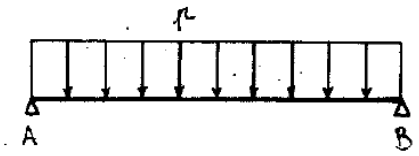


$$v'_A = 0 \qquad , \qquad v'_B = 0 \tag{6.75}$$

Pour résoudre ce problème, on superpose trois problèmes isostatiques :

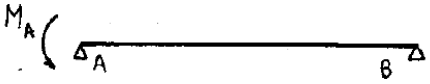
Problème 1 : c'est le problème du paragraphe 6.1.4. On obtient alors directement à partir de (6.27) :

$$v_B'^1 = -v_A'^1 = \frac{pl^3}{24EJ} \tag{6.76}$$



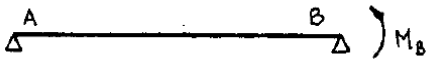
Problème 2 : c'est le problème du paragraphe 6.1.5 et (6.41) donne :

$$v_B'^2 = -\frac{M_A l^2}{6EJ} \quad , \quad v_A'^2 = \frac{M_A l^2}{3EJ} \tag{6.77}$$



Problème 3 : c'est le problème symétrique du précédent :

$$v_B'^3 = \frac{M_B l^2}{3EJ} \quad , \quad v_A'^3 = -\frac{M_B l^2}{6EJ} \tag{6.78}$$



La condition (6.75) donne alors :

$$\begin{cases} \dfrac{M_A l^2}{3EJ} - \dfrac{M_B l^2}{6EJ} - \dfrac{pl^3}{24EJ} = 0 \\ -\dfrac{M_A l^2}{6EJ} + \dfrac{M_B l^2}{3EJ} + \dfrac{pl^3}{24EJ} = 0 \end{cases} \tag{6.79}$$

Ce système de deux équations à deux inconnues donne directement :

$$M_A = -M_B = \frac{pl^2}{12} \tag{6.80}$$

La méthode de superposition permet d'obtenir le système d'équations vérifié par les inconnues hyperstatiques sans aucun calcul . Son succès est lié au fait que, pour une poutre droite, les problèmes isostatiques élémentaires sont en nombre limité, et il est facile d'en dresser un catalogue.

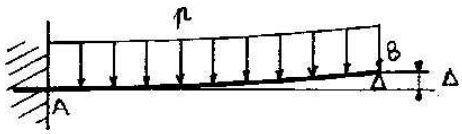
6.2.5 Problèmes non classiques

Les théorèmes énergétiques présentés au chapitre 5 sont valables pour les problèmes classiques de RDM, c'est-à-dire pour des liaisons parfaites imposant des déplacements nuls. Ces méthodes peuvent aussi être utilisées pour des problèmes présentant des liaisons non classiques. Deux types de liaisons sont envisagées : dénivellation d'un appui et appui élastique. Dans les deux cas, on considère un problème analogue à celui de l'exemple 2.

Dénivellation d'un appui

On suppose que l'appui B est dénivelé d'une quantité Δ. Les conditions aux limites (6.65) sont donc remplacées par :

$$v_A = 0 \quad , \quad v_A' = 0 \quad , \quad v_B = \Delta \tag{6.81}$$



Les équations d'équilibre statique sont inchangées. La méthode de compatibilité des déformations s'applique directement. il suffit en effet d'introduire (6.81) dans (6.67). Mais la méthode de superposition est plus rapide : il suffit de remplacer (6.74) par :

$$\Delta = \frac{1}{EJ}\left[R_B \frac{l^3}{3} - \frac{pl^4}{8}\right] \tag{6.82}$$

$$R_B = \frac{3pl}{8} + \frac{3EJ\Delta}{l^3} \tag{6.83}$$

Connaissant Δ, on peut déterminer R_A, M_A et les efforts intérieurs.

Pour appliquer la méthode énergétique, on supprime l'appui en B et on introduit un effort extérieur R_B. On obtient alors W donné par (6.58). Pour remplacer la condition supprimée, on applique le théorème de Castigliano.

$$v_B = \frac{\partial W}{\partial R_B} = \Delta \tag{6.84}$$

A partir de (6.58), on obtient :

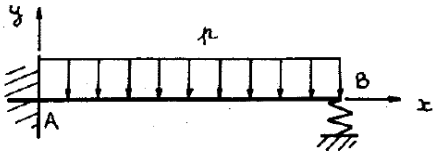
$$\Delta = \frac{1}{EJ}\left[R_B\frac{l^3}{3} - \frac{pl^4}{8}\right]$$

Pour $\Delta = 0$, on retrouve le théorème de Menabrea.

Appui élastique

On suppose que l'appui en B est élastique, c'est-à-dire que la réaction en B est proportionnelle à la flèche :

$$R_B = -kv_B \tag{6.85}$$



A nouveau, la méthode de compatibilité des déformations s'applique directement. Mais la méthode de superposition est plus rapide. Il suffit de remplacer (6.74) par la condition (6.85) :

$$\frac{R_B l^3}{3EJ} - \frac{pl^4}{8EJ} = -\frac{R_B}{k} \tag{6.86}$$

On obtient :

$$R_B = \frac{1}{1 + \frac{3EJ}{kl^3}}\frac{3pl}{8} \tag{6.87}$$

Si l'appui élastique est très rigide ($k \to \infty$), on retrouve la poutre de l'exemple 2 avec un appui classique en B. S'il est très souple ($k \to 0$), on retrouve la poutre encastrée-libre du paragraphe 6.1.1.

On peut appliquer le théorème de Menabrea à condition de prendre comme système la poutre et l'appui élastique, c'est-à-dire de rajouter l'énergie de l'appui élastique à l'énergie de déformation.

$$W_B = \frac{1}{2k}R_B^2 \tag{6.88}$$

L'énergie de déformation du système est donc d'après :

$$W = \frac{1}{2EJ}\left[R_B^2\frac{l^3}{3} - pR_B\frac{l^4}{4} + \frac{p^2l^5}{20}\right] + \frac{1}{2k}R_{B^2} \tag{6.89}$$

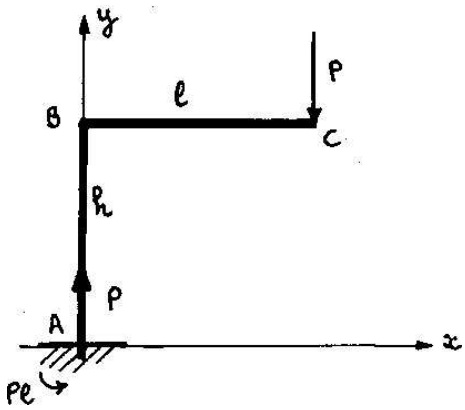
Le théorème de Menabrea donne alors :

$$\frac{\partial W}{\partial R_B} = \frac{1}{EJ}\left(R_B\frac{l^3}{3} - \frac{pl^4}{8}\right) + \frac{1}{k}R_B = 0 \tag{6.90}$$

Chapitre 7

Exemples de structures planes

7.1 *Console coudée isostatique*

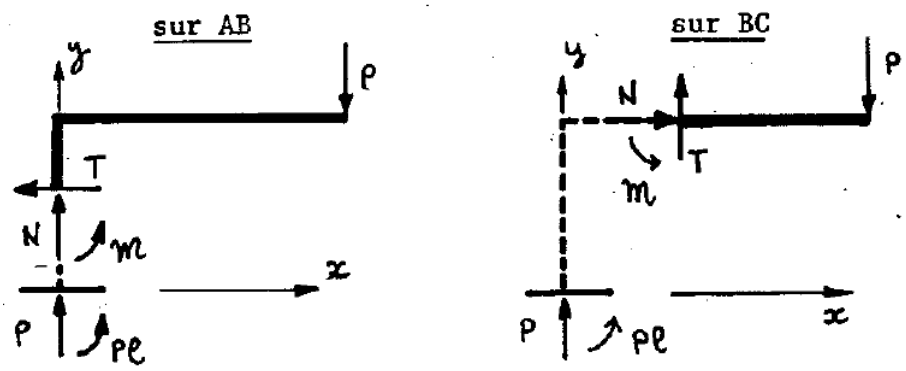


On considère une console coudée ABC encastrée en A. La structure est isostatique. Les inconnues de liaison sont données par :

$$X_A = 0, Y_A = P, M_A = Pl \tag{7.1}$$

Les efforts intérieurs sur AB et sur BC sont donnés par :

$$\begin{cases} N = P \\ T = 0 \\ \mathcal{M} = Pl \end{cases} \qquad \begin{cases} N = 0 \\ T = P \\ \mathcal{M} = P(l - x) \end{cases} \tag{7.2}$$



On néglige l'effort tranchant dans le dimensionnement. La partie AB est la plus sollicitée. La condition de dimensionnement (5.31) s'écrit :

$$\frac{Pl}{J/\eta} + \frac{P}{S} \leqslant \sigma_e \tag{7.3}$$

soit, pour une section carrée de côté a :

$$\frac{6Pl}{a^3} + \frac{P}{a^2} \leqslant \sigma_e \tag{7.4}$$

L'effet de l'effort normal (second terme) est en $O(a/l)$ par rapport à l'effet du moment fléchissant (premier terme).

Pour calculer le déplacement le long de la poutre, on peut utiliser les formules de Navier-Bresse (5.43), (5.46) ou intégrer directement (5.42) et (5.44).

Sur AB, on a $(s = y, \theta = \pi/2)$. L'intégration de (5.42) et (5.44) se fait directement. Cmpte-tenu des conditions aux limites correspondant à l'encastrement en A, on obtient :

$$u_A = 0 \quad , \quad v_A = 0 \quad , \quad \omega_A = 0$$

$$\begin{cases} \omega' = -\dfrac{\mathcal{M}}{EJ} = -\dfrac{Pl}{EJ} \quad \Rightarrow \quad \omega = -\dfrac{Pl}{EJ}y + \cancel{\omega_A} \\ u' = \dfrac{T}{GS_2} - \omega = \dfrac{Pl}{EJ}y \quad \Rightarrow \quad u = \dfrac{Pl}{EJ}\dfrac{y^2}{2} + \cancel{u_A} \\ v' = -\dfrac{N}{ES} - \dfrac{P}{ES} \quad \Rightarrow \quad v = \dfrac{P}{ES}y + \cancel{v_A} \end{cases}$$

En particulier, les déplacements au point B sont :

$$\omega_B = -\frac{Plh}{EJ} \quad , \quad u_B = \frac{Plh^2}{2EJ} \quad , \quad v_B = -\frac{Ph}{ES} \tag{7.5}$$

Sur BC, on a $(s = x, \theta = 0)$. Il vient :

$$\omega' = -\frac{\mathcal{M}}{EJ} = -\frac{P(x-l)}{EJ} \quad \Rightarrow \quad \omega = -\frac{Pl}{EJ}\left(\frac{x^2}{2} - lx\right) + \omega_B$$

$$u' = -\frac{N}{ES} = 0 \quad \Rightarrow \quad u = u_B$$

$$v' = \frac{T}{GS_2} + \omega = -\frac{P}{GS_2} + \frac{P}{EJ}\left(\frac{x^2}{2} - lx\right) + \omega_B$$

$$\Rightarrow v = \frac{P}{EJ}\left(\frac{x^3}{6} - l\frac{x^2}{2}\right) + \omega_B x - \frac{P}{GS_2}x + v_B$$

Compte-tenu des conditions des déplacements au point B (7.5), on obtient :

$$\begin{cases} \omega = \dfrac{P}{2EJ}\left(x^2 - 2lx - 2lh\right) \\ u = \dfrac{Plh^2}{2EJ} \\ v = \dfrac{P}{6EJ}\left(x^3 - 3lx^2 - 6lhx\right) - \dfrac{Ph}{ES} - \dfrac{Px}{GS_2} \end{cases}$$

En particulier, les déplacements au point C sont :

$$\begin{cases} \omega_C = -\dfrac{Pl(2h+l)}{2EJ} \\ u_C = \dfrac{Plh^2}{2EJ} \\ v_C = -\dfrac{Pl^2(l+3h)}{3EJ} - \dfrac{Ph}{ES} - \dfrac{Pl}{GS_2} \end{cases}$$

Si on ne cherche que la flèche au point C, on peut appliquer le théorème de Castigliano. L'énergie de déformation est :

$$\left\{\begin{array}{ll} W & = \dfrac{1}{2}\left[\int_0^k \left(\dfrac{P^2}{ES}+\dfrac{P^2l^2}{EJ}\right)\,dy + \int_0^l \left(\dfrac{P^2}{GS_2}+\dfrac{P^2(l-x)^2}{EJ}\right)\,dx\right] \\ & \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{P^2h}{ES}+\dfrac{P^2l}{EJ}+\dfrac{P^2l}{GS_2}+\dfrac{P^2k^3}{3EJ}\right] \end{array}\right. \tag{7.6}$$

Le théorème de Castigliano permet de calculer le déplacement v_C :

$$\delta = -v_C = \frac{\partial W}{\partial P} = \frac{Ph}{ES}+\frac{Pl}{GS_2}+\frac{Pl^2(3h+l)}{3EJ}$$

Le terme prépondérant est le terme de flexion, et on peut écrire :

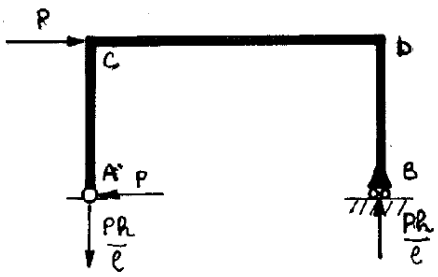
$$\delta = \underbrace{\frac{Pl^2(3h+l)}{3EJ}}_{\text{Flexion}} \cdot \left[1 + \underbrace{\underbrace{\frac{3J}{S}\frac{h}{l^2(3h+l}}_{\text{Effort normal}} + \underbrace{\frac{3EJ}{GS_2}\frac{1}{l(3h+l)}}_{\text{Effort tranchant}}}_{O(d^2/l^2)}\right] \tag{7.7}$$

Les effets de l'effort normal et de l'effort tranchant sont des corrections d'ordre $O(d^2/l^2)$. Ils sont donc négligeables dans les conditions normales d'application de la RDM.

7.2 Portique isostatique

On considère l'exemple 1 du paragraphe 2.2.2. Les efforts intérieurs ont été calculés au paragraphe 2.2.2. La section la plus sollicitée est la section C sur AC. La condition de dimensionnement donne :

$$\frac{Ph}{J/\eta}+\frac{Ph}{lS} \leqslant \sigma_e \tag{7.8}$$



Pour calculer le déplacement, on intègre les équations (5.42) et (5.44) avec les conditions aux limites :

$$u_A = 0 \quad , \quad v_A = 0 \quad , \quad v_B = 0 \tag{7.9}$$

On se limite à un calcul en flexion ($1/ES = 1/GS_2 = 0$).

Sur AC, on a ($s = y, \theta = \pi/2$). il vient avec (2.36) :

$$\left\{\begin{array}{lll} \omega' = -\dfrac{\mathcal{M}}{EJ} = \dfrac{Py}{EJ} & \Rightarrow & \omega = \dfrac{P}{EJ}\dfrac{y^2}{2}+\omega_A \\ u' = -\omega = -\dfrac{P}{EJ}\dfrac{y^2}{2}-\omega_A & \Rightarrow & u = -\dfrac{P}{EJ}\dfrac{y^3}{6}-\omega_A y + \cancel{u_A} \\ v' = 0 & \Rightarrow & v = \cancel{v_A} = 0 \end{array}\right. \tag{7.10}$$

En particulier, les déplacements au point C sont :

$$\omega_c = \omega_A + \frac{Ph^2}{2EJ} \quad , \quad u_C = -\frac{Ph^3}{6EJ}-\omega_A h \quad , \quad v_c = 0 \tag{7.11}$$

Sur CD, on a $(s = x, \theta = 0)$. Il vient avec (2.37) :

$$\begin{cases} \omega' = -\dfrac{\mathcal{M}}{EJ} = \dfrac{Ph(x-l)}{EJl} \qquad \Rightarrow \qquad \omega = -\dfrac{Ph}{EJ}\left(lx - \dfrac{x^2}{2}\right) + \omega_C \\ u' = 0 \qquad \Rightarrow \qquad u = u_C \\ v' = \omega = \dfrac{Ph}{EJl}\left(lx - \dfrac{x^2}{2}\right) + \omega_C \\ \Rightarrow v = \dfrac{Ph}{EJl}\left(l\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6}\right) + \omega_C x + v_C \end{cases} \tag{7.12}$$

En particulier, les déplacements au point D sont :

$$\begin{cases} \omega_D = \omega_C + \dfrac{Phl}{2EJ} = \dfrac{Ph(h+l)}{2EJ} + \omega_A \\ u_D = u_C = -\dfrac{Ph^3}{6EJ} - \omega_A h \\ v_D = \dfrac{Phl^2}{3EJ} + \omega_C l = \dfrac{Phl(2l+3h)}{6EJ} + \omega_A l \end{cases} \tag{7.13}$$

Sur DB, on a $(s = h - y, \theta = -\pi/2)$. Il vient avec (2.38) :

$$\begin{cases} \omega' = -\dfrac{\mathcal{M}}{EJ} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \omega_D \\ u' = \omega = \omega_D \qquad \Rightarrow \qquad u = \omega_D(h-y) + u_D \\ v' = 0 \qquad \Rightarrow \qquad v = v_D \end{cases} \tag{7.14}$$

En particulier, les déplacements au point B sont :

$$\begin{cases} \omega_B = \omega_D = \dfrac{Ph(h+l)}{2EJ} + \omega_A \\ u_B = \omega_D h + u_D = -\dfrac{Ph^2(2h+3l)}{6EJ} \\ v_B = v_D = \dfrac{Phl(2l+3h)}{3EJ} + \omega_C l = \dfrac{Phl(2l+3h)}{6EJ} + \omega_A l \end{cases} \tag{7.15}$$

La constante d'intégration ω_A est déterminée en écrivant la dernière condition aux limites ($v_B = 0$).

$$\omega_A = -\frac{Ph(2l+3h)}{6EJ} \tag{7.16}$$

On peut obtenir le déplacement tout au long de la poutre en reportant le résultat dans les équations précédentes.

Si on cherche uniquement le déplacement horizontal du point C (où est appliqué l'effort P), il est beaucoup plus simple d'appliquer le théorème de Castigliano. L'énergie de déformation de la poutre en flexion pure est donnée par :

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}\int_{ABCD} \frac{\mathcal{M}^{\in}}{EJ} ds = \frac{1}{2EJ}\left[\int_0^l P^2 y^2 dy + \int_0^l \frac{P^2h^2}{l^2}(l-x)dx\right] \\ &= \frac{P^2}{2EJ}\left[\frac{h^3}{3} + \frac{h^2 l}{3}\right] = \frac{P^2h^2(l+h)}{6EJ} \end{aligned} \tag{7.17}$$

ce qui donne directement :

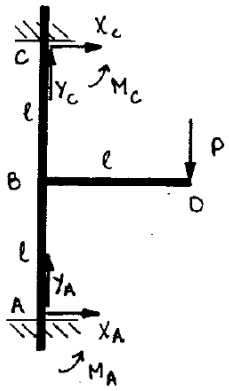
$$u_C = \frac{\partial W}{\partial P} = \frac{Ph^2(l+h)}{3EJ} \tag{7.18}$$

Le résultat correspond à celui obtenu en reportant (16) dans (11), le calcul par Castigliano étant beaucoup plus rapide. De même, pour avoir le déplacement en un point donné, le déplacement horizontal du point B par exemple, on peut appliquer le théorème de Castigliano en introduisant un effort fictif, puis en considérant que cet effort fictif a une valeur nulle. Pratiquement, le calcul complet du déplacement se justifie rarement.

7.3 Structure hyperstatique

7.3.1 Statique - Dimensionnement

On considère la structure à section constante ci-contre. On a 6 inconnues de liaison $(X_A, Y_A, M_A, X_C, Y_C, M_C)$. Le système est donc hyperstatique de degré 3. Les équations d'équilibre statique donnent :



$$X_A + X_C = 0$$

$$Y_A + Y_C = P$$

$$M_C + M_A + 2X_A l - Pl = 0 \tag{7.19}$$

On choisit $(X_A = X), (Y_A = Y)$ et $(M_A = Z)$ comme inconnues hyperstatiques.

$$\begin{cases} X_A = X & , \quad Y_A = Y & , \quad M_A = Z \\ X_C = -X & , \quad Y_C = P - Y & , \quad M_C = -Z - 2lX + Pl \end{cases} \tag{7.20}$$

Les efforts intérieurs sur AB, sur BC et sur BD sont donnés par :

$$\begin{cases} N = Y \\ T = -X \\ \mathcal{M} = Z + Xy \end{cases} \qquad \begin{cases} N = Y - P \\ T = -X \\ \mathcal{M} = Z + Xy - Pl \end{cases} \qquad \begin{cases} N = 0 \\ T = P \\ \mathcal{M} = P(l - x) \end{cases} \tag{7.21}$$

Une fois levé l'hyperstatisme par l'une des méthodes présentées dans les paragraphes suivants, et en négligeant l'effet de l'effort tranchant, on obtient :

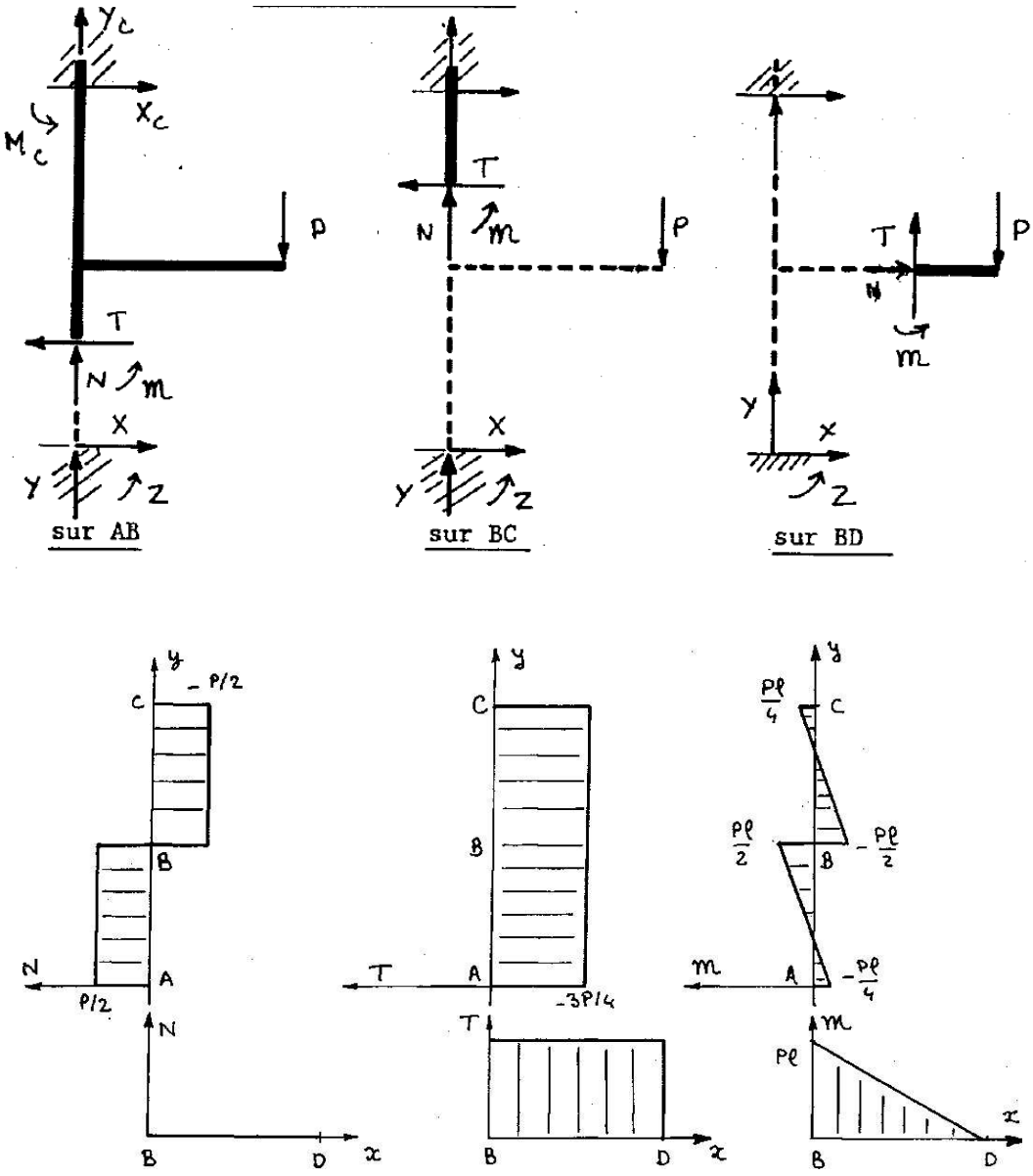
$$X = \frac{3P}{4} \quad , \quad Y = \frac{P}{2} \quad , \quad Z = -\frac{Pl}{4} \tag{7.22}$$

Les efforts de liaison sont alors :

$$X_A = -X_B = \frac{3P}{4} \quad , \quad Y_A = Y_B = \frac{P}{2} \quad , \quad M_A = M_C = -\frac{Pl}{4} \tag{7.23}$$

et on peut tracer les diagrammes des efforts intérieurs : La section la plus sollicitée est la section B sur BD. La condition de dimensionnement s'écrit :

$$\frac{Pl}{J/\eta} \leqslant \sigma_e \tag{7.24}$$



7.3.2 Méthodes énergétiques

Comme pour les poutres droites, la première méthode pour lever l'hyperstatisme consiste à utiliser le théorème de Menabrea. Le calcul qui suit est un calcul complet, qui tient compte de l'effort normal et de l'effort tranchant. D'après (5.36) et (7.21), l'énergie de déformation est donnée par :

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2ES}\left[\int_0^l Y^2 dy + \int_l^{2l}(Y-P)^2 dy\right] + \frac{1}{2GS_2}\left[\int_0^{2l} x^2 dy \int_0^l p^2 dx\right] \\ &+ \frac{1}{2EJ}\left[\int_0^l (Z+Xy)^2 dy + \int_l^{2l}(Z+Xy-Pl)^2 dy + \int_0^l P^2(l-x)^2 dx\right] \end{aligned} \tag{7.25}$$

avec

$$\begin{aligned} &\int_0^l (Z+Xy)^2 dy + \int_l^{2l}(Z+Xy-Pl)^2 dy \\ &= \int_0^{2l}(Z+Xy)^2 dy + \int_l^{2l}\left[-2Pl(Z+Xy)^2 + P^2l^2\right] dy \\ &\qquad = 2lZ^2 + 4l^2ZX + \frac{8}{3}X^2l^3 - 2Pl^2Z - 3PXl^3 + P^2l^3 \end{aligned} \tag{7.26}$$

Finalement, on obtient :

$$\begin{aligned} W = & \frac{l}{2ES}\left[Y^2+(Y-P)^2\right]+\frac{l}{2GS_2}[2X^2+P^2] \\ & +\frac{l}{2EJ}\left[2Z^2+4lZX+\frac{8}{3}l^2X^2-2lPX-3l^2PX+\frac{4}{3}l^2P^2\right] \end{aligned} \tag{7.27}$$

Le théorème de Menabrea donne alors :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial Y}=0 & \Rightarrow \quad 2Y+2(Y-P)=0 \\ \dfrac{\partial W}{\partial Z}=0 & \Rightarrow \quad 4Z+4lX-2Pl=0 \\ \dfrac{\partial W}{\partial Y}=0 & \Rightarrow \quad 4Z+\dfrac{16}{3}lX-3Pl+4\dfrac{EJ}{GS_2l}X=0 \end{cases} \tag{7.28}$$

En introduisant le coefficient sans dimension α :

$$\alpha=\frac{EJ}{GS_2l^2}=O\left(\frac{d^2}{l^2}\right) \tag{7.29}$$

on obtient :

$$2Y=P \tag{7.30}$$

$$\begin{cases} 2Z+2lX=Pl \\ 4Z+4\left(\dfrac{4}{3}+\alpha\right)lX=3Pl \end{cases} \tag{7.31}$$

Les inconnues hyperstatiques sont donc :

$$Y=\frac{P}{2} \quad , \quad X=\frac{3P}{4}\frac{1}{1+3\alpha} \quad , \quad Z=-\frac{Pl}{4}\frac{1-6\alpha}{1+3\alpha} \tag{7.32}$$

Le paramètre α est d'ordre (d^2/l^2). En première approximation, on retrouve (7.22), et les formules (7.32) donnent les corrections induites par l'effet de l'effort tranchant.

Si on néglige l'effort tranchant et l'effort normal, seul subsiste dans (7.27) le terme dû au moment fléchissant. On obtient alors le système suivant par application du théorème de Menabrea :

$$\begin{cases} 2Z+2lX=Pl \\ 4Z+\dfrac{16}{3}lX=3Pl \end{cases} \tag{7.33}$$

Ce système correspond aux équations (7.31) avec ($\alpha=0$). W ne dépend pas de Y. On ne peut donc pas lever l'hyperstatisme en Y, mais c'est sans importance, car Y n'intervient pas dans le moment de flexion. Pour obtenir (7.22), il faut donc négliger l'effort tranchant mais non l'effort normal. On obtient alors le système (7.30),(7.33) qui donne (7.22). Il s'agit ici d'une situation relativement exceptionnelle. En général, on néglige l'effort tranchant et l'effort normal pour lever l'hyperstatisme et les structures planes sont calculées en flexion pure.

Le théorème de Castigliano permet de calculer la flèche au point D :

$$\delta=-v_D=\frac{\partial W}{\partial P}=\frac{l}{ES}(P-Y)+\frac{Pl}{GS_2}+\frac{l^2}{2EJ}\left[\frac{8Pl}{3}-3lX-2Z\right] \tag{7.34}$$

$$\delta=\underbrace{\frac{11Pl^3}{24EJ}}_{\text{Flexion}}\frac{1+\dfrac{60}{11}\alpha}{1+3\alpha}+\underbrace{\frac{Pl}{2ES_2}}_{\text{Effort normal}}+\underbrace{\frac{Pl}{GS_2}}_{\text{Effort tranchant}}=\frac{11Pl^3}{24EJ}\left[1+O\left(\frac{d^2}{l^2}\right)\right] \tag{7.35}$$

7.3.3 Compatibilité des déformations

Comme pour les poutres droites, on peut également lever l'hyperstatisme en écrivant la compatibilité des déformations. En effet, si une structure fait intervenir L inconnues de liaison, elle est hyperstatique de degré $(L-3)$., alors il faut intégrer (5.42), (5.44), système d'équations différentielles de degré 1, d'ordre 3 avec L conditions aux limites pour 3 constantes d' intégration. Il reste donc $(L-3)$ équations de compatibilité des déplacements qui permettent de déterminer les $(L-3)$ inconnues hyperstatiques. On applique cette méthode en se limitant à un calcul en flexion pure. Les conditions aux limites sont donc :

$$u_A = 0 \quad , \quad v_A = 0 \quad , \quad \omega_A = 0 \quad , \quad u_C = 0 \quad , \quad v_C = 0 \quad , \quad \omega_C = 0 \tag{7.36}$$

Sur AB, on a $(\theta = \pi/2, s = y)$. Il vient avec (7.21) :

$$\begin{cases} \omega' = -\dfrac{\mathcal{M}}{EJ} = -\dfrac{1}{EJ}(Z + Xy) & \Rightarrow \quad \omega = -\dfrac{1}{EJ}\left(Zy + X\dfrac{y^2}{2}\right) + \omega_A \\ u' = -\omega = \dfrac{1}{EJ}\left(Zy + X\dfrac{y^2}{2}\right) & \Rightarrow \quad u = \dfrac{1}{EJ}\left(Z\dfrac{y^2}{2} + X\dfrac{y^3}{6}\right) + u_A \\ v' = 0 & \Rightarrow \quad v = v_A = 0 \end{cases} \tag{7.37}$$

En particulier, les déplacements au point B sont :

$$\omega_B = -\frac{1}{EJ}\left(Zl + X\frac{l^2}{2}\right) \qquad u_B = \frac{1}{EJ}\left(Z\frac{l^2}{2} + X\frac{l^3}{6}\right) \quad , \quad v_B = 0 \tag{7.38}$$

Sur BC, on a $(\theta = \pi/2, s = y)$. Il vient :

$$\omega' = -\frac{\mathcal{M}}{EJ} = -\frac{1}{EJ}(Z + Xy - Pl) \quad \Rightarrow \quad \omega = -\frac{1}{EJ}\left(Zy + X\frac{y^2}{2} - Ply\right) + Constante$$

La constante est déterminée en écrivant la continuité de ω en B.

$$\left| \begin{array}{l} \omega' = -\dfrac{\mathcal{M}}{EJ} = -\dfrac{1}{EJ}\left[Zy + X\dfrac{y^2}{2} - Pl(y-l)\right] \\ u' = -\omega = \dfrac{1}{EJ}\left[Zy + X\dfrac{y^2}{2} - Pl(y-l)\right] \\ \Rightarrow u = \dfrac{1}{EJ}\left[Z\dfrac{y^2}{2} + X\dfrac{y^3}{6} - Ply\right] + Constante \\ v' = 0 \Rightarrow v = v_A = 0 \end{array} \right. \tag{7.39}$$

$$u = \frac{1}{EJ}\left[Z\frac{y^2}{2} + X\frac{y^3}{6} - Pl\frac{(y-l)^2}{2}\right] \tag{7.40}$$

$$v' = 0 \qquad \Rightarrow \qquad v = v_A = 0 \tag{7.41}$$

En particulier, les déplacements au point C sont :

$$\begin{cases} \omega_C = -\dfrac{1}{EJ}(2Zl + 2Xl^2 - Pl^2) \\ u_C = \dfrac{1}{EJ}\left(2Zl^2 + 4X\dfrac{y^3}{3} - P\dfrac{l^3}{2}\right) \\ v_C = 0 \end{cases} \tag{7.42}$$

Les conditions aux limites (7.36) donnent alors le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 2Z + 2Xl = Pl \\ 4Z + \dfrac{8}{3}Xl = Pl \end{cases} \tag{7.43}$$

On obtient les valeurs (7.22) de X et Z. Comme précédemment, la flexion seule ne permet pas de déterminer Y. Sa valeur ne peut être obtenue qu'en tenant compte de l'effort normal, ce qui ne change rien aux équations (7.37) à (7.5) pour u et ω , mais transforme celle pour v :

Sur AB :

$$v' = -\frac{N}{ES} = -\frac{Y}{ES} \qquad \Rightarrow \qquad v = -\frac{Y}{ES}y + v_A \tag{7.44}$$

Sur BC :

$$v' = -\frac{N}{ES} = \frac{P-Y}{ES} \qquad \Rightarrow \qquad v = \frac{P-Y}{ES} + cte = \frac{P(y-l)}{ES} - \frac{Yy}{ES} \tag{7.45}$$

La condition ($v_C = 0$) donne alors :

$$\frac{Pl}{ES} - \frac{2Yl}{ES} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad Y = \frac{P}{2} \tag{7.46}$$

Il reste à calculer la déformée de BD. En revenant au cas de la flexion pure, on obtient avec (7.22) :

$$\left|\begin{array}{l}
\omega' = -\dfrac{\mathcal{M}}{EJ} = -\dfrac{P(x-l)}{EJ} \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \dfrac{P}{EJ}\left(\dfrac{x^2}{2} - lx\right) + \omega_B \\[2ex]
\omega = \dfrac{P}{EJ}\left(\dfrac{x^2}{2} - lx\right) - \dfrac{1}{EJ}\left(Zl + X\dfrac{l^2}{2}\right) = \dfrac{P}{EJ}\left(\dfrac{x^2}{2} - lx - \dfrac{l^2}{8}\right) \\[2ex]
v' = \omega = \dfrac{P}{EJ}\left(\dfrac{x^2}{2} - lx - \dfrac{l^2}{8}\right) \qquad \Rightarrow \qquad v = \dfrac{P}{EJ}\left(\dfrac{x^3}{6} - \dfrac{lx^2}{2} - \dfrac{l^2x}{8}\right) + \cancel{v_B} \\[2ex]
u' = 0 \qquad \Rightarrow \qquad u = u_B = \dfrac{1}{EJ}\left(Z\dfrac{y^2}{2} + X\dfrac{y^3}{6}\right) = 0
\end{array}\right. \tag{7.47}$$

En particulier, les déplacements au point D sont :

$$u_D \quad , \quad \omega_D = -\frac{5Pl^2}{8EJ} \quad , \quad v_D = -\frac{11Pl^3}{24EJ} \tag{7.48}$$

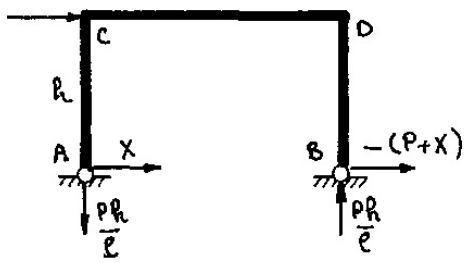
7.4 Portique hyperstatique

Pour lever l'hyperstatisme d'une structure plane, le principe des trois méthodes présentées pour les poutres droites subsiste. Cependant, d'un point de vue pratique, la méthode énergétique s'impose très nettement, car les calculs de déplacements sont généralement complexes. D'autre part, la méthode de superposition perd beaucoup de son intérêt en l'absence d'un catalogue de solutions isostatiques. Son seul avantage est de permettre de scinder un problème complexe en plusieurs problèmes simples, chacun étant lui-même résolu par la méthode énergétique. Un autre avantage des méthodes énergétiques est le fait qu'elles n'exigent le calcul du moment fléchissant qu'au signe près, ce qui élimine une importante source d'erreurs.

On considère le portique des paragraphes 1.3.2 et 2.2.2. Le système est hyperstatique de degré 1. On choisit ($X = X_A$) comme inconnue hyperstatique.

$$X_A = X, \qquad X_B = -(P+X)$$

$$Y_A = -\frac{Ph}{l}, \qquad Y_B = +\frac{Ph}{l} \tag{7.49}$$



les effets de l'effort tranchant et de l'effort normal sont négligés. D'après (2.39) à (2.41) l'énergie de déformation est donnée par :

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2EJ}\left[\int_0^h X^2y^2dy + \int_0^l \left(Xh + \frac{Ph}{l}x\right)^2 dx + \int_0^h (P+X)^2y^2dy\right] \\ &= \frac{1}{2EJ}\left[X^2\frac{h^3}{3} + X^2h^2l + XPh^2l + P^2\frac{h^2l}{3} + (P+X)^2\frac{h^3}{3}\right] \\ &= \frac{h^2}{6EJ}\left[(2h+3l)X^2 + (2h+3l)XP + (l+h)P^2\right] \end{aligned} \tag{7.50}$$

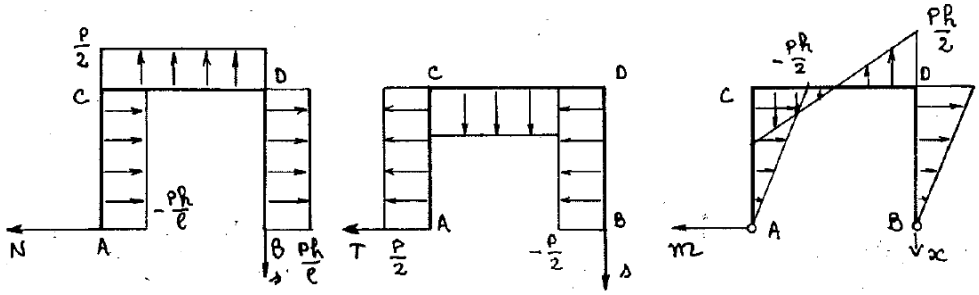
Le théorème de Menabrea donne :

$$\frac{\partial W}{\partial X} = \frac{h^2(2h+3l)}{6EJ}(2X+P) = 0 \qquad \Rightarrow X = -\frac{P}{2} \tag{7.51}$$

Les inconnues de liaison sont données par :

$$X_A = X_B = -\frac{P}{2} \qquad , \qquad -Y_A = Y_B = \frac{Ph}{l} \tag{7.52}$$

On peut tracer les diagrammes d'effort normal, d'effort tranchant et de moment fléchissant :



Si $2h \geqslant l$, les sections les plus sollicitées sont les sections en C et D situées sur les montants AC et BD. Si $2h \leqslant l$, les sections les plus sollicitées sont les sections en C et D sur la traverse CD. La condition de dimensionnement découle directement de (5.31) :

$$\frac{Ph}{J/\eta} + \max\left(\frac{P}{2S}, \frac{Ph}{Sl}\right) \leqslant \sigma_e \tag{7.53}$$

La flèche en C est donnée directement par le théorème de Castigliano :

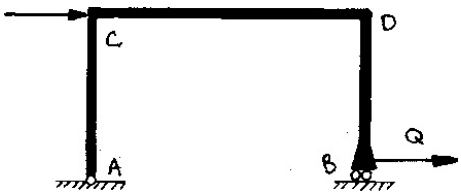
$$\delta = v_C = \frac{\partial W}{\partial P} = \frac{h^2}{6EJ}[2P(l+h) + X(2h+3l)]$$

$$\delta = \frac{Ph^2(l+2h)}{12EJ} \tag{7.54}$$

Pour appliquer la méthode de compatibilité des déformations, il faut reprendre les calculs de déplacements en rajoutant le terme provenant de l'inconnue hyperstatique X dans l'expression de $\mathcal{M}$. Celui-ci est déterminé avec la constante d'intégration ω_A en écrivant que :

$$u_B = v_B = 0 \tag{7.55}$$

Pour appliquer la méthode de superposition, on peut remplacer la liaison pivot en B par un appui simple et un effort horizontal Q en B. Celui-ci est déterminé en annulant le déplacement horizontal u_B. Mais la méthode la plus rapide pour calculer u_B est d'appliquer le théorème de Castigliano et d'écrire :



$$u_B = \frac{\partial W}{\partial Q} = 0 \tag{7.56}$$

Cette équation correspond au théorème de Menabrea.