



**TECHNIQUES**  
**DE L'INGÉNIEUR**

Réf. : **B5020 V1**

Date de publication :  
**10 novembre 1987**

# Résistance des matériaux - Sections usuelles

Cet article est issu de : **Mécanique | Fonctions et composants mécaniques**

par **Jean COURBON, Jean-Noël THEILLOUT**

**Pour toute question :**  
Service Relation clientèle  
Techniques de l'Ingénieur  
Immeuble Pleyad 1  
39, boulevard Ornano  
93288 Saint-Denis Cedex

**Par mail :**  
infos.clients@teching.com  
**Par téléphone :**  
00 33 (0)1 53 35 20 20

Document téléchargé le : **07/02/2020**  
Pour le compte : **7200049203 - ecole centrale de lyon // 156.18.19.146**

© Techniques de l'Ingénieur | tous droits réservés

# Résistance des matériaux

## Sections usuelles

par **Jean COURBON**

*Ingénieur Général Honoraire des Ponts et Chaussées  
Professeur Honoraire à l'École Nationale des Ponts et Chaussées  
M. COURBON étant décédé avant l'impression, ce formulaire a été mis au point*

par **Jean-Noël THEILLOUT**

*Ingénieur au Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, Section Fonctionnement des Structures*

<b>Tableau 1 — Caractéristiques géométriques des sections .....</b>	Form. B 5 020-2
<b>Tableau 2 — Contraintes de cisaillement dues à l'effort tranchant (déduites de la théorie de l'élasticité) .....</b>	— 5
<b>Tableau 3 — Contraintes de cisaillement et déformations dues à l'effort tranchant (formules approchées) .....</b>	— 6
<b>Tableau 4 — Contraintes de cisaillement et déformations dues à un moment de torsion (torsion gauche libre) (1) .....</b>	— 8
<b>Tableau 5 — Moments et effort tranchant dans une section en I soumise à une torsion (torsion gauche non libre) et à une flexion .....</b>	— 10
<b>Tableau 6 — Charge critique de flambement d'une barre à inertie constante, libre de fléchir transversalement entre ses extrémités (1) .....</b>	— 11

**D**ans cet article sont énoncées les caractéristiques géométriques puis les caractéristiques mécaniques de résistance des sections usuelles des pièces suivant des hypothèses de base.

Les caractéristiques mécaniques de résistance d'anneaux circulaires ou d'arcs font l'objet d'un deuxième article [Form. B 5 021].

Des articles du traité Structure et gros œuvre sont également consacrés à la résistance des matériaux des structures composées de poutres que l'on rencontre dans presque tous les ouvrages de Génie civil.

Tableau 1 – Caractéristiques géométriques des sections

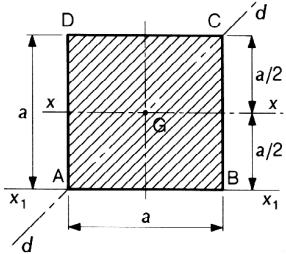
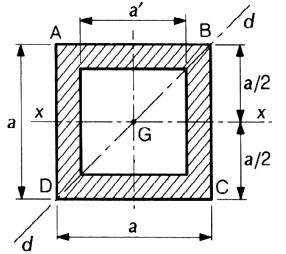
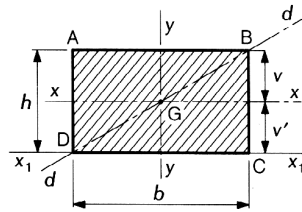
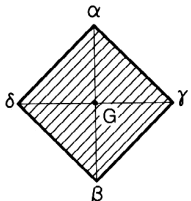
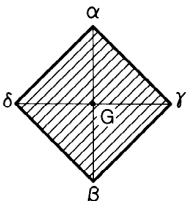
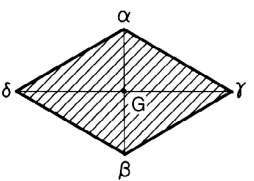
Section			
Centre de gravité	$v = \frac{a}{2}$ $v' = \frac{a}{2}$	$v = \frac{a}{2}$ $v' = \frac{a}{2}$	$v = \frac{h}{2}$ $v' = \frac{h}{2}$
Surface	$S = a^2$	$S = a^2 - a'^2$	$S = bh$
Inertie polaire	$I_G = \frac{a^4}{6}$	$I_G = \frac{a^4 - a'^4}{6}$	$I_G = \frac{bh(b^2 + h^2)}{12}$
Inertie par rapport à un axe	$I_{x_1} = \frac{a^4}{3}$ $I_x = \frac{a^4}{12}$ $I_d = \frac{a^4}{12}$	$I_x = \frac{a^4 - a'^4}{12}$ $I_d = \frac{a^4 - a'^4}{12}$	$I_{x_1} = \frac{bh^3}{3}$ $I_x = \frac{bh^3}{12}$ $I_d = \frac{b^3h^3}{6(b^2 + h^2)}$
Module de résistance minimal	$\mu_x = \frac{a^3}{6}$ $\mu_d = \frac{a^3}{6\sqrt{2}}$	$\mu_x = \frac{a^4 - a'^4}{6a}$ $\mu_d = \frac{a^4 - a'^4}{a\sqrt{72}} = \frac{a^4 - a'^4}{6a\sqrt{2}}$	$\mu_x = \frac{bh^2}{6}$ $\mu_d = \frac{b^2h^2}{6\sqrt{b^2 + h^2}}$
Rayon de giration	$r_x = \frac{a}{\sqrt{12}}$ $r_d = \frac{a}{\sqrt{12}}$	$r_x = \sqrt{\frac{a^2 + a'^2}{12}}$ $r_d = \sqrt{\frac{a^2 + a'^2}{12}}$	$r_x = \frac{h}{\sqrt{12}}$ $r_d = \frac{bh}{\sqrt{6(b^2 + h^2)}}$
Noyau central	 $G\alpha = G\beta = \frac{a}{6}$ $G\gamma = G\delta = \frac{a}{6}$	 $G\alpha = G\beta = \frac{a^2 + a'^2}{6a}$ $G\gamma = G\delta = \frac{a^2 + a'^2}{6a}$	 $G\alpha = G\beta = \frac{h}{6}$ $G\gamma = G\delta = \frac{b}{6}$

Tableau 1 – Caractéristiques géométriques des sections (suite)

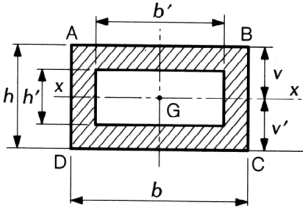
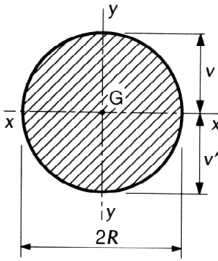
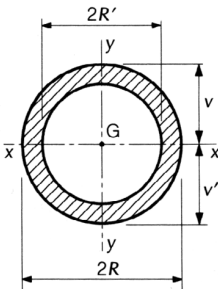
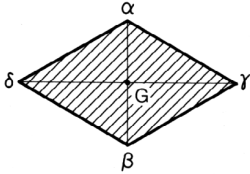
Section			
Centre de gravité	$v = \frac{h}{2}$ $v' = \frac{h}{2}$	$v = R$ $v' = R$	$v = R$ $v' = R$
Surface	$S = bh - b'h'$	$S = \pi R^2$	$S = \pi(R^2 - R'^2)$
Inertie polaire	$I_G = \frac{bh(b^2 + h^2) - b'h'(b'^2 + h'^2)}{12}$	$I_G = \frac{1}{2} \pi R^4$	$I_G = \frac{1}{2} \pi (R^4 - R'^4)$
Inertie par rapport à un axe	$I_x = \frac{bh^3 - b'h'^3}{12}$	$I_x = \frac{1}{4} \pi R^4$ $I_y = \frac{1}{4} \pi R^4$	$I_x = \frac{\pi}{4} (R^4 - R'^4)$ $I_y = \frac{\pi}{4} (R^4 - R'^4)$
Module de résistance minimal	$\mu_x = \frac{bh^3 - b'h'^3}{6h}$	$\mu_x = \frac{1}{4} \pi R^3$ $\mu_y = \frac{1}{4} \pi R^3$	$\mu_x = \frac{\pi(R^4 - R'^4)}{4R}$ $\mu_y = \frac{\pi(R^4 - R'^4)}{4R}$
Rayon de giration	$r_x = \sqrt{\frac{bh^3 - b'h'^3}{12(bh - b'h')}}}$	$r_x = \frac{1}{2} R$ $r_y = \frac{1}{2} R$	$r_x = \frac{1}{2} \sqrt{R^2 + R'^2}$ $r_y = \frac{1}{2} \sqrt{R^2 + R'^2}$
Noyau central	  $G\alpha = G\beta = \frac{bh^3 - b'h'^3}{6h(bh - b'h')}$ $G\gamma = G\delta = \frac{hb^3 - h'b'^3}{6b(bh - b'h')}$	Le noyau central est limité par un cercle de centre G et de rayon $\rho$ : $\rho = \frac{1}{4} R$	Le noyau central est limité par un cercle de centre G et de rayon $\rho$ : $\rho = \frac{R^2 + R'^2}{4R}$

Tableau 1 – Caractéristiques géométriques des sections (suite)

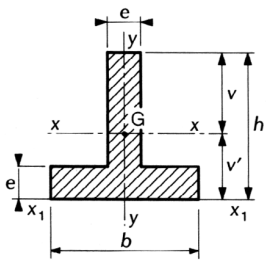
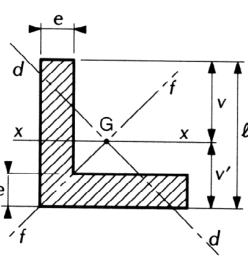
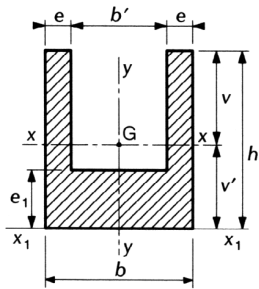
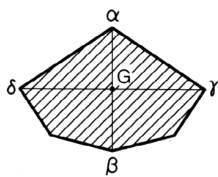
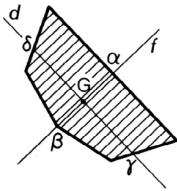
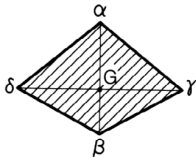
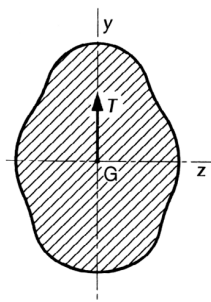
Section			
Centre de gravité	$v = \frac{h^2 + (b - e)(2h - e)}{2(h + b - e)}$ $v' = \frac{h^2 + be - e^2}{2(h + b - e)}$	$v = \frac{3\ell(\ell - e) + e^2}{2(2\ell - e)}$ $v' = \frac{\ell^2 + \ell e - e^2}{2(2\ell - e)}$	$v = h - v'$ $v' = \frac{2h^2e + b'e_1^2}{2(2he + b'e_1)}$
Surface	$S = e(h + b - e)$	$S = e(2\ell - e)$	$S = 2he + b'e_1$
Inertie polaire	$I_G = I_x + I_y$	$I_G = I_f + I_d$	$I_G = I_x + I_y$
Inertie par rapport à un axe	$I_{x_1} = \frac{e}{3} (h^3 + be^2 - e^3)$ $I_x = I_{x_1} - Sv'^2$ $I_y = \frac{e}{12} [b^3 + (h - e)e^2]$	$I_x = \frac{1}{3} e[\ell^3 + (\ell - e)e^2] - Sv'^2$ $I_f = \frac{1}{12} [\ell^4 - (\ell - e)^4]$ $I_d = I_f - \frac{\ell^2(\ell - e)^2e}{2(2\ell - e)}$	$I_{x_1} = \frac{1}{3} (2h^3e + b'e_1^3)$ $I_x = I_{x_1} - Sv'^2$ $I_y = \frac{1}{12} [hb^3 - (h - e_1)b'^3]$
Module de résistance minimal	$\mu_x = \frac{I_x}{v}$ $\mu_y = \frac{e[b^3 + (h - e)e^2]}{6b}$	$\mu_x = \frac{I_x}{v}$ $\mu_f = \frac{I_f\sqrt{2}}{\ell}$ $\mu_d = \frac{I_d}{v'\sqrt{2}}$	$\mu_x = \frac{I_x}{v}$ $\mu_y = \frac{2I_y}{b}$
Rayon de giration	$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{S}}$ $r_y = \sqrt{\frac{I_y}{S}}$	$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{S}}$ $r_f = \sqrt{\frac{\ell^2 + (\ell - e)^2}{12}} \text{ et } r_d = \sqrt{\frac{I_d}{S}}$	$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{S}}$ $r_y = \sqrt{\frac{I_y}{S}}$
Noyau central	 $G\alpha = \frac{I_x}{Sv'} \text{ et } G\beta = \frac{I_x}{Sv}$ $G\gamma = G\delta = \frac{2I_y}{Sb}$	 $G\alpha = \frac{I_d}{Sv'\sqrt{2}} \text{ et } G\beta = \frac{I_d}{Sv\sqrt{2}}$ $G\gamma = G\delta = \frac{I_f\sqrt{2}}{S\ell}$	 $G\alpha = \frac{I_x}{Sv'} \text{ et } G\beta = \frac{I_x}{Sv}$ $G\gamma = G\delta = \frac{2I_y}{Sb}$

Tableau 2 – Contraintes de cisaillement dues à l'effort tranchant (dédites de la théorie de l'élasticité)



Les valeurs des contraintes de cisaillement, déduites de la théorie de l'élasticité, sont données dans le tableau ci-après pour les sections circulaire et rectangulaire. Elles ont été établies à partir des hypothèses suivantes (Gy et Gz étant les axes principaux d'inertie de la section de la pièce).

• **La pièce est à section constante.**

Dans le cas où la pièce est à section variable, il faut faire intervenir la notion d'effort tranchant réduit.

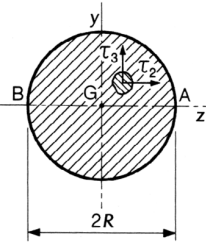
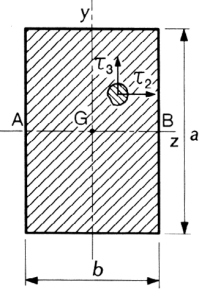
• **La résultante T (élément de réduction de l'effort tranchant dans la section) est portée par Gy.**

Dans le cas où la résultante T est inclinée par rapport aux axes Gy et Gz, on décomposera T en 2 composantes Ty et Tz suivant Gy et Gz. On fera le calcul des contraintes séparément sous l'action de Ty et Tz. Les contraintes totales s'obtiendront par application du principe de superposition.

• **L'axe Gy est l'axe de symétrie de la section.**

Dans le cas où Gy n'est pas axe de symétrie, il faut faire intervenir la notion de centre de cisaillement.

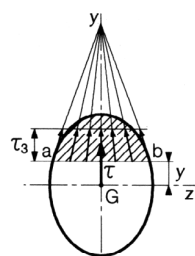
Les formules données dans ce tableau permettront en particulier de comparer les formules exactes ci-après avec les formules approchées, données dans le tableau 3.

Section	Valeurs générales	Valeurs particulières																																																																																				
 <p><b>Cercle</b></p>	$\tau_3 = \frac{3+2\nu}{8(1+\nu)} \left( \frac{T}{I} \right) \left[ R^2 - y^2 - \frac{1-2\nu}{3+2\nu} z^2 \right]$ $\tau_2 = -\frac{1+2\nu}{4(1+\nu)} \left( \frac{T}{I} \right) yz$ <p><math>\nu</math> coefficient de Poisson <math>I</math> moment d'inertie par rapport à Gz</p>	en G : $\tau_3 = \frac{3+2\nu}{2(1+\nu)} \left( \frac{T}{S} \right)$ en A et B : $\tau_3 = \frac{1+2\nu}{1+\nu} \left( \frac{T}{S} \right)$																																																																																				
 <p><b>Rectangle</b></p>	<p>Point G <math>\begin{cases} \tau_3 = \frac{3T}{2S} k_1 \\ \tau_2 = 0 \end{cases}</math></p> <p>Points A et B <math>\begin{cases} \tau_3 = \frac{3T}{2S} k_2 \\ \tau_2 = 0 \end{cases}</math></p> <p>Les coefficients <math>k_1</math> et <math>k_2</math> sont fonction de <math>\nu</math> et du rapport <math>a/b</math> ; les valeurs données dans la table ci-après correspondent à <math>\nu = 0,25</math>.</p> <table><tr><th><math>a/b</math></th><th><math>k_1</math></th><th><math>k_2</math></th><th><math>a/b</math></th><th><math>k_1</math></th><th><math>k_2</math></th><th><math>b/a</math></th><th><math>k_1</math></th><th><math>k_2</math></th><th><math>b/a</math></th><th><math>k_1</math></th><th><math>k_2</math></th></tr><tr><td>0</td><td>0,800</td><td><math>\infty</math></td><td>0,6</td><td>0,879</td><td>1,301</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0,6</td><td>0,976</td><td>1,048</td></tr><tr><td>0,1</td><td>0,800</td><td>3,770</td><td>0,7</td><td>0,899</td><td>1,235</td><td>0,1</td><td>0,999</td><td>1,001</td><td>0,7</td><td>0,968</td><td>1,064</td></tr><tr><td>0,2</td><td>0,801</td><td>2,285</td><td>0,8</td><td>0,916</td><td>1,188</td><td>0,2</td><td>0,997</td><td>1,005</td><td>0,8</td><td>0,959</td><td>1,083</td></tr><tr><td>0,3</td><td>0,811</td><td>1,790</td><td>0,9</td><td>0,929</td><td>1,153</td><td>0,3</td><td>0,994</td><td>1,012</td><td>0,9</td><td>0,950</td><td>1,104</td></tr><tr><td>0,4</td><td>0,832</td><td>1,543</td><td>1</td><td>0,940</td><td>1,126</td><td>0,4</td><td>0,989</td><td>1,021</td><td>1</td><td>0,940</td><td>1,126</td></tr><tr><td>0,5</td><td>0,856</td><td>1,396</td><td></td><td></td><td></td><td>0,5</td><td>0,983</td><td>1,033</td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	$a/b$	$k_1$	$k_2$	$a/b$	$k_1$	$k_2$	$b/a$	$k_1$	$k_2$	$b/a$	$k_1$	$k_2$	0	0,800	$\infty$	0,6	0,879	1,301	0	1	1	0,6	0,976	1,048	0,1	0,800	3,770	0,7	0,899	1,235	0,1	0,999	1,001	0,7	0,968	1,064	0,2	0,801	2,285	0,8	0,916	1,188	0,2	0,997	1,005	0,8	0,959	1,083	0,3	0,811	1,790	0,9	0,929	1,153	0,3	0,994	1,012	0,9	0,950	1,104	0,4	0,832	1,543	1	0,940	1,126	0,4	0,989	1,021	1	0,940	1,126	0,5	0,856	1,396				0,5	0,983	1,033				
$a/b$	$k_1$	$k_2$	$a/b$	$k_1$	$k_2$	$b/a$	$k_1$	$k_2$	$b/a$	$k_1$	$k_2$																																																																											
0	0,800	$\infty$	0,6	0,879	1,301	0	1	1	0,6	0,976	1,048																																																																											
0,1	0,800	3,770	0,7	0,899	1,235	0,1	0,999	1,001	0,7	0,968	1,064																																																																											
0,2	0,801	2,285	0,8	0,916	1,188	0,2	0,997	1,005	0,8	0,959	1,083																																																																											
0,3	0,811	1,790	0,9	0,929	1,153	0,3	0,994	1,012	0,9	0,950	1,104																																																																											
0,4	0,832	1,543	1	0,940	1,126	0,4	0,989	1,021	1	0,940	1,126																																																																											
0,5	0,856	1,396				0,5	0,983	1,033																																																																														

**Tableau 3 – Contraintes de cisaillement et déformations dues à l'effort tranchant (formules approchées)**

Les formules approchées, donnant pour les sections usuelles les valeurs des contraintes de cisaillement et la valeur de la section réduite  $S_1$  (intervenant dans le calcul des déformations), ont été déterminées à partir des hypothèses mentionnées dans le tableau 2 et des hypothèses supplémentaires suivantes.

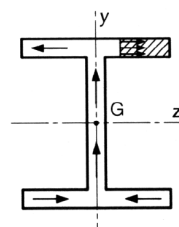
• **Cas des sections pleines.**



Le long d'une ligne parallèle à l'axe d'inertie Gz d'ordonnée y, coupant le contour de la section aux deux points a et b :

- les contraintes de cisaillement  $\tau$  passent toutes par le point de concours des deux tangentes en a et b au contour de la section ;
- la composante  $\tau_3$  suivant Gy des contraintes de cisaillement  $\tau$  est constante.

• **Cas des sections minces (fermées ou ouvertes).**



La contrainte de cisaillement est tangente en chaque point à la ligne moyenne du profil.

Section	Contrainte de cisaillement				Déformation $S_1$
	Hypothèses	Valeur générale	Contrainte maximale	Diagramme	
 <b>Rectangle</b>		$\tau_3 = \frac{3}{2} \frac{T}{S} \left[ 1 - \frac{4y^2}{h^2} \right]$ $S = bh$	$\tau_3 = \frac{3}{2} \frac{T}{S}$ <p>pour <math>y = 0</math></p>		$\frac{5}{6} S$
 <b>Carré évidé</b> $a' = ka$ (avec $k < 1$ )			$\tau_3 = \frac{3}{2} \frac{T}{S} \left( \frac{1+k+k^2}{1+k^2} \right)$ <p>pour <math>mm</math> (<math>y = 0</math>)</p>		

Tableau 3 – Contraintes de cisaillement et déformations dues à l'effort tranchant (formules approchées) (suite)

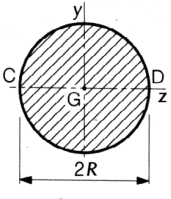
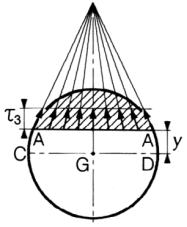
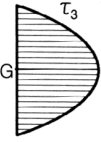
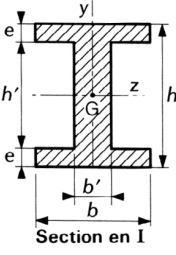
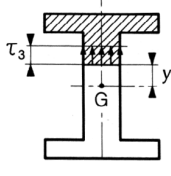
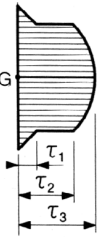
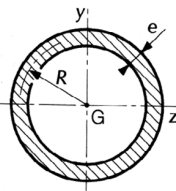
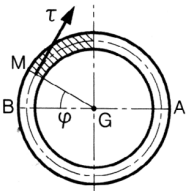
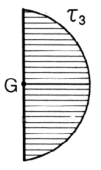
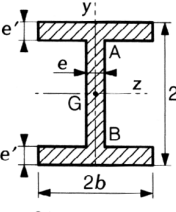
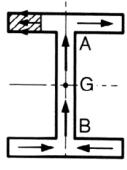
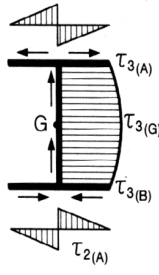
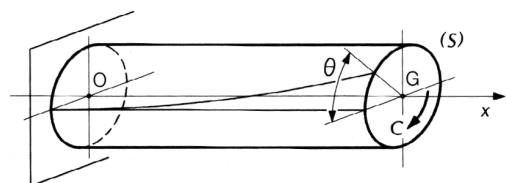
Section	Hypothèses	Contrainte de cisaillement		Diagramme	Déformation $S_1$
		Valeur générale	Contrainte maximale		
 <p>Cercle</p>		$\tau_3 = \frac{4}{3} \frac{T}{S} \left(1 - \frac{y^2}{R^2}\right)$ $\tau \text{ en } A = \frac{4}{3} \frac{T}{S} \sqrt{1 - \frac{y^2}{R^2}}$ $S = \pi R^2$	$\tau_3 = \frac{4}{3} \frac{T}{S}$ le long de CD		$\frac{9}{10} S$
 <p>Section en I</p>		$\tau_1 = \frac{6 T e (h - e)}{b h^3 - (b - b') h'^3}$ $\tau_2 = \tau_1 \frac{b}{b'}$ $\tau_3 = \frac{3}{2} \left( \frac{T}{b' h} \right) \frac{b - (b - b') (h'/h)^2}{b - (b - b') (h'/h)^3}$	$\tau_{\max} = \tau_3$		
 <p>Section circulaire mince</p>		$\tau_M = \frac{2 T}{S} \cos \varphi$ $S = 2 \pi R e$	$\tau_A = \tau_B = \frac{2 T}{S}$		$0,5 S$
 <p>Profil mince en I</p> $S = 2 h e$ $S' = 2 b e'$ $\lambda = \frac{S}{S'}$	 $I = \frac{h^2}{3} (S + 6 S')$	$\tau_{2(A)} = \frac{T}{I} (b - z) h$ $\tau_{3(\hat{a}me)} = \frac{T}{I} \left[ 2 b e' h + \frac{e}{2} (h^2 - y^2) \right]$	$\tau_{2(A)} = \frac{T}{I} b h$ $\tau_{3(A)} = \tau_{3(B)} = \frac{T}{S} \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{6}}$ $\tau_{3(G)} = \frac{T}{S} \frac{1 + \frac{\lambda}{4}}{1 + \frac{\lambda}{6}}$		$2 h e$



Tableau 4 – Contraintes de cisaillement et déformations dues à un moment de torsion (torsion gauche libre) (1)



**Contraintes de cisaillement**

Les formules donnant les contraintes de cisaillement dans les pièces de section usuelle soumises à un moment de torsion  $C$  ont été déterminées dans les hypothèses suivantes :

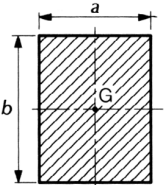
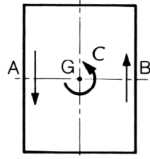
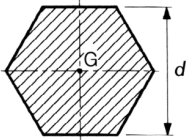
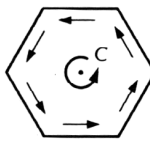
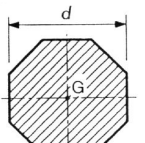
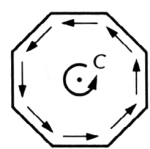
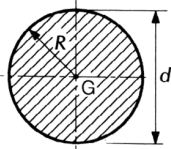

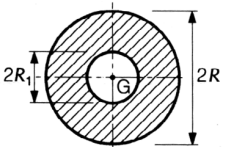
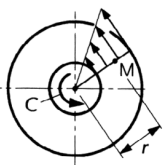
- la pièce est rectiligne et de section constante ;
- au cours de la déformation, les sections ne restent pas planes et sont libres de gauchir (torsion gauche libre).

**Déformation**

Dans les mêmes hypothèses que précédemment, si  $\theta$  est l'angle de rotation de la section d'abscisse  $x$ , on a :

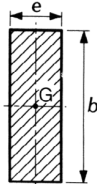

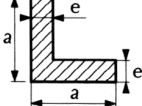
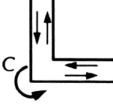
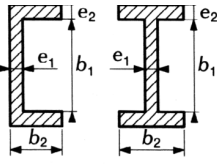
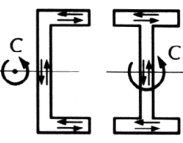

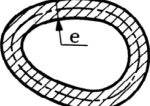
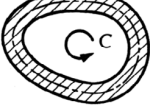
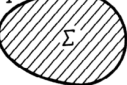
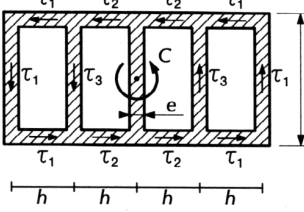
$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{C}{GK} \quad (G \text{ module d'élasticité transversale}).$$

La valeur de  $K$ , module d'inertie à la torsion de la pièce, est donnée dans le tableau ci-après pour les sections usuelles.

Section	Contrainte de cisaillement			Déformation																																																																																										
	Direction des contraintes	Valeur générale	Contrainte maximale	Valeur de K																																																																																										
<div></div> <p><b>Rectangle</b></p>	<div></div>	$C = -Ga^3b \frac{d\theta}{dx} k_1$ et $\tau_{\max} = \frac{C}{k_2 a^2 b} \quad (a < b)$																																																																																												
		<table><tr><th>b/a</th><th>k<sub>1</sub></th><th>k<sub>2</sub></th><th>b/a</th><th>k<sub>1</sub></th><th>k<sub>2</sub></th><th>b/a</th><th>k<sub>1</sub></th><th>k<sub>2</sub></th></tr><tr><td>1</td><td>0,140 6</td><td>0,208 2</td><td>1,9</td><td>0,223 3</td><td>0,243 2</td><td>4,5</td><td>0,286 6</td><td>0,287 0</td></tr><tr><td>1,1</td><td>0,154 0</td><td>0,213 9</td><td>2</td><td>0,228 7</td><td>0,245 9</td><td>5</td><td>0,291 3</td><td>0,291 5</td></tr><tr><td>1,2</td><td>0,165 1</td><td>0,218 9</td><td>2,2</td><td>0,238 0</td><td>0,250 9</td><td>6</td><td>0,298 3</td><td>0,298 4</td></tr><tr><td>1,3</td><td>0,177 1</td><td>0,223 4</td><td>2,4</td><td>0,245 9</td><td>0,255 4</td><td>7</td><td>0,303 3</td><td>0,303 3</td></tr><tr><td>1,4</td><td>0,186 9</td><td>0,227 3</td><td>2,6</td><td>0,252 6</td><td>0,259 7</td><td>8</td><td>0,307 1</td><td>0,307 1</td></tr><tr><td>1,5</td><td>0,195 8</td><td>0,231 0</td><td>2,8</td><td>0,258 3</td><td>0,263 6</td><td>9</td><td>0,310 0</td><td>0,310 0</td></tr><tr><td>1,6</td><td>0,203 7</td><td>0,234 3</td><td>3</td><td>0,263 3</td><td>0,267 2</td><td>10</td><td>0,312 3</td><td>0,312 3</td></tr><tr><td>1,7</td><td>0,210 9</td><td>0,237 5</td><td>3,5</td><td>0,273 3</td><td>0,275 1</td><td>20</td><td>0,322 8</td><td>0,322 8</td></tr><tr><td>1,8</td><td>0,217 4</td><td>0,240 4</td><td>4</td><td>0,280 8</td><td>0,281 7</td><td>∞</td><td>1/3</td><td>1/3</td></tr></table>	b/a	k <sub>1</sub>	k <sub>2</sub>	b/a	k <sub>1</sub>	k <sub>2</sub>	b/a	k <sub>1</sub>	k <sub>2</sub>	1	0,140 6	0,208 2	1,9	0,223 3	0,243 2	4,5	0,286 6	0,287 0	1,1	0,154 0	0,213 9	2	0,228 7	0,245 9	5	0,291 3	0,291 5	1,2	0,165 1	0,218 9	2,2	0,238 0	0,250 9	6	0,298 3	0,298 4	1,3	0,177 1	0,223 4	2,4	0,245 9	0,255 4	7	0,303 3	0,303 3	1,4	0,186 9	0,227 3	2,6	0,252 6	0,259 7	8	0,307 1	0,307 1	1,5	0,195 8	0,231 0	2,8	0,258 3	0,263 6	9	0,310 0	0,310 0	1,6	0,203 7	0,234 3	3	0,263 3	0,267 2	10	0,312 3	0,312 3	1,7	0,210 9	0,237 5	3,5	0,273 3	0,275 1	20	0,322 8	0,322 8	1,8	0,217 4	0,240 4	4	0,280 8	0,281 7	∞	1/3	1/3		
b/a	k <sub>1</sub>	k <sub>2</sub>	b/a	k <sub>1</sub>	k <sub>2</sub>	b/a	k <sub>1</sub>	k <sub>2</sub>																																																																																						
1	0,140 6	0,208 2	1,9	0,223 3	0,243 2	4,5	0,286 6	0,287 0																																																																																						
1,1	0,154 0	0,213 9	2	0,228 7	0,245 9	5	0,291 3	0,291 5																																																																																						
1,2	0,165 1	0,218 9	2,2	0,238 0	0,250 9	6	0,298 3	0,298 4																																																																																						
1,3	0,177 1	0,223 4	2,4	0,245 9	0,255 4	7	0,303 3	0,303 3																																																																																						
1,4	0,186 9	0,227 3	2,6	0,252 6	0,259 7	8	0,307 1	0,307 1																																																																																						
1,5	0,195 8	0,231 0	2,8	0,258 3	0,263 6	9	0,310 0	0,310 0																																																																																						
1,6	0,203 7	0,234 3	3	0,263 3	0,267 2	10	0,312 3	0,312 3																																																																																						
1,7	0,210 9	0,237 5	3,5	0,273 3	0,275 1	20	0,322 8	0,322 8																																																																																						
1,8	0,217 4	0,240 4	4	0,280 8	0,281 7	∞	1/3	1/3																																																																																						
<div></div> <p><b>Hexagone régulier</b></p>	<div></div>			$\tau_{\max} = \frac{C}{0,217(Sd)}$ S aire de la section $S = \frac{1}{2} d^2 \sqrt{3}$	$K = 0,133d^2S$																																																																																									
<div></div> <p><b>Octogone régulier</b></p>	<div></div>			$\tau_{\max} = \frac{C}{0,223 \times S \times d}$ S aire de la section $S = 2(\sqrt{2}-1) d^2$	$K = 0,130d^2S$																																																																																									
<div></div> <p><b>Circulaire pleine</b></p>	<div></div>	$\tau = \frac{Cr}{K}$ K inertie polaire	$\tau_{\max} = \frac{2C}{\pi R^3}$	$K = \frac{\pi R^4}{2}$																																																																																										
<div></div> <p><b>Annulaire</b></p>	<div></div>	$\tau = \frac{Cr}{K}$ K inertie polaire	$\tau_{\max} = \frac{2CR}{\pi(R^4 - R_1^4)}$	$K = \frac{\pi(R^4 - R_1^4)}{2}$																																																																																										

(1) Dans le cas où les sections de la pièce ne sont plus libres de se gauchir, il faut tenir compte (plus particulièrement pour les sections ouvertes à paroi mince) des phénomènes de torsion-flexion qui ont une influence importante sur la distribution des contraintes dans la pièce. L'exemple donné dans le tableau 5 permettra de se rendre compte de cette influence.

Tableau 4 – Contraintes de cisaillement et déformations dues à un moment de torsion (torsion gauche libre) (1) (suite)

			$\tau_{\max} = \frac{3C}{be^2}$ <p>le long des grands côtés</p>	$K = \frac{1}{3} be^3$
<b>Rectangle étroit</b> $[(b/e) \rightarrow \infty]$				
			$\tau_{\max} = \frac{3C}{(2a - e)e^2}$	$\frac{1}{3} (2a - e)e^3$
<b>Cornière mince</b>				
			$\tau_{\max} = \frac{3Ce_1}{b_1e_1^3 + 2b_2e_2^3}$ <p>on suppose <math>e_1 &lt; e_2</math></p>	$\frac{b_1e_1^3 + 2b_2e_2^3}{3}$
<b>Ailes parallèles</b> <b>Sections en U et I</b>				
			<p>Formules identiques aux ailes parallèles dans lesquelles on remplace :</p> $e_2^3 \text{ par } \frac{1}{4} (e_2 + e_3)(e_2^2 + e_3^2)$	
<b>Ailes chanfreinées</b> <b>Sections en U et I</b>				
		$\tau = \frac{C}{2 \Sigma e} \Gamma$  <p><math>\Sigma</math> surface intérieure limitée par le contour <math>\Gamma</math>, ligne moyenne de la section.</p>		$\frac{4 \Sigma^2}{\int_r \frac{d\ell}{e}}$
<p><math>e</math> faible et la variation de <math>e</math> dans la section n'est pas brusque.</p> <b>Section tubulaire mince</b>				
	<p>On obtient <math>\tau_1, \tau_2, \tau_3</math> et <math>\varphi = \frac{d\theta}{dx}</math> en résolvant les quatre équations :</p> $(\ell + 2h)\tau_1 e + \ell e(\tau_1 - \tau_2) = -2G\ell h\varphi$ $2h\tau_2 e + \ell e(\tau_2 - \tau_1) = -2G\ell h\varphi$ $C = 4\ell h e(\tau_1 + \tau_2)$ $\tau_3 = \tau_1 - \tau_2$			
<b>Membrane tubulaire à parois intermédiaires d'épaisseur constante</b>				

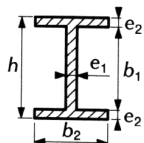
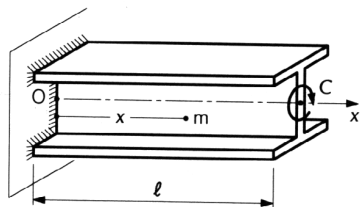
(1) Dans le cas où les sections de la pièce ne sont plus libres de se gauchir, il faut tenir compte (plus particulièrement pour les sections ouvertes à paroi mince) des phénomènes de torsion-flexion qui ont une influence importante sur la distribution des contraintes dans la pièce. L'exemple donné dans le tableau 5 permettra de se rendre compte de cette influence.

(1) Dans le cas où les sections de la pièce ne sont plus libres de se gauchir, il faut tenir compte (plus particulièrement pour les sections ouvertes à paroi mince) des phénomènes de torsion-flexion qui ont une influence importante sur la distribution des contraintes dans la pièce. L'exemple donné dans le tableau 5 permettra de se rendre compte de cette influence.

**Tableau 5 – Moments et effort tranchant dans une section en I soumise à une torsion (torsion gauche non libre) et à une flexion**

Étudions une poutre en I, encastrée à une extrémité et soumise à son extrémité libre à un moment de torsion  $C$ .

• **Caractéristiques de la pièce**



On pose :  $a^2 = \frac{EJh^2}{2GK}$

$EJ$  rigidité à la flexion d'une aile :  $J = \frac{e_2 b_2^3}{12}$

$GK$  rigidité à la torsion de la poutre :  $K = \frac{b_1 e_1^3 + 2 b_2 e_2^3}{3}$

• **Éléments de réduction dans une section  $m$  d'abscisse  $x$**

Moment de flexion dans chacune des ailes :

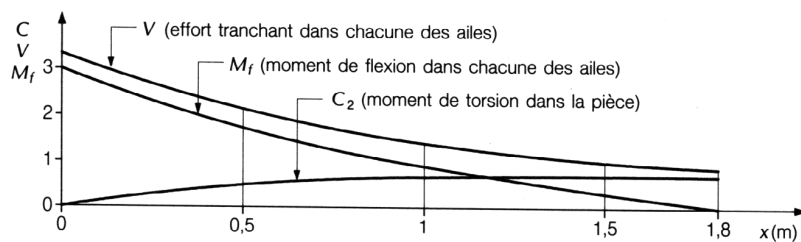
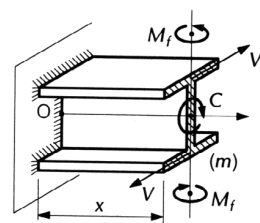
$$M_f = \frac{a}{h} C \frac{\text{sh}\left(\frac{\ell-x}{a}\right)}{\text{ch}\left(\frac{\ell}{a}\right)}$$

Moment de torsion dans la pièce :

$$C_2 = C \left[ 1 - \frac{\text{ch}\left(\frac{\ell-x}{a}\right)}{\text{ch}\left(\frac{\ell}{a}\right)} \right]$$

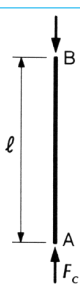
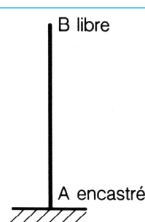
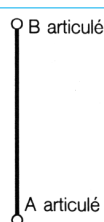
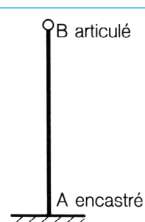
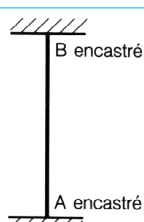
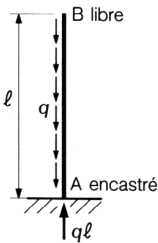
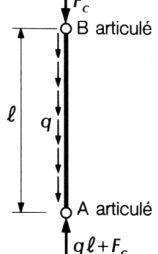
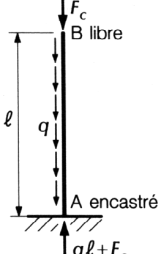
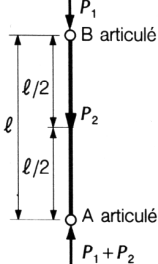
Effort tranchant dans chacune des ailes :

$$V = -\frac{C}{h} \frac{\text{ch}\left(\frac{\ell-x}{a}\right)}{\text{ch}\left(\frac{\ell}{a}\right)}$$



• **Exemple :**  
poutre I 300,  $\ell = 180$  cm :  $C = 1$  t.m.

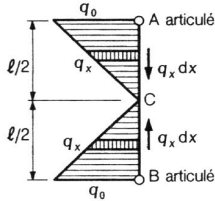
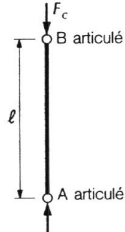
**Tableau 6 – Charge critique de flambement d'une barre à inertie constante, libre de fléchir transversalement entre ses extrémités (1)**

Caractéristiques de la pièce Cas de charges	Charge critique de flambement $F_c$ (sans tenir compte des déformations dues à l'effort tranchant)																								
	 $F_c = \frac{\pi^2 EI}{(2 \ell)^2}$	 $F_c = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2}$	 $F_c = \frac{\pi^2 EI}{(a\ell)^2}$ avec $a \approx 0,7$	 $F_c = \frac{\pi^2 EI}{(0,5 \ell)^2}$																					
	$(q\ell)_c = \frac{\pi^2 EI}{(1,122 \ell)^2} = 7,837 \frac{EI}{\ell^2}$																								
	$F_c \approx \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} - \frac{q\ell}{2}$ (valeur approchée)																								
	$F_c = \frac{\pi^2 EI}{(2\ell)^2} - 0,3q\ell$ (valeur approchée)																								
	$(P_1 + P_2)_c = \frac{4u^2 EI}{\ell^2} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$ et $\frac{L}{\ell} = \frac{\pi}{2u}$ Si l'on pose $\beta = \frac{P_1 + P_2}{P_1}$ , $u$ est la plus petite racine positive de l'équation : $u\sqrt{\beta} \cot\left(\frac{u}{\sqrt{\beta}}\right) + u \cot u = \frac{(\beta - 1)^2}{\beta + 1}$																								
	<table><tr><td><math>\frac{P_1 + P_2}{P_1}</math></td><td>1</td><td>1,25</td><td>1,5</td><td>1,75</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td><math>L/\ell</math></td><td>1</td><td>0,949</td><td>0,914</td><td>0,888</td><td>0,869</td><td>0,823</td></tr><tr><td><math>u</math></td><td><math>\pi/2</math></td><td>1,655 1</td><td>1,718 6</td><td>1,768 1</td><td>1,807 8</td><td>1,909 6</td></tr></table>	$\frac{P_1 + P_2}{P_1}$	1	1,25	1,5	1,75	2	3	$L/\ell$	1	0,949	0,914	0,888	0,869	0,823	$u$	$\pi/2$	1,655 1	1,718 6	1,768 1	1,807 8	1,909 6			
$\frac{P_1 + P_2}{P_1}$	1	1,25	1,5	1,75	2	3																			
$L/\ell$	1	0,949	0,914	0,888	0,869	0,823																			
$u$	$\pi/2$	1,655 1	1,718 6	1,768 1	1,807 8	1,909 6																			

(1)  $E$  module d'élasticité longitudinale,  $I$  moment d'inertie de la section transversale,  $\ell$  longueur de la pièce.

(1)  $E$  module d'élasticité longitudinale,  $I$  moment d'inertie de la section transversale,  $\ell$  longueur de la pièce.

**Tableau 6 – Charge critique de flambement d'une barre à inertie constante, libre de fléchir transversalement entre ses extrémités (1) (suite)**

Caractéristiques de la pièce Cas de charges	Charge critique de flambement $F_c$ (sans tenir compte des déformations dues à l'effort tranchant)
	<p>On a : <math>\sum_A^C q_x dx = \sum_B^C q_x dx = q_0 \ell / 4</math></p> $\left(\frac{q_0 \ell}{4}\right)_c = \frac{\pi^2 EI}{(0,696 \ell)^2}$
	$F_c = \left(\frac{\pi^2 EI}{\ell^2}\right) \left[ \frac{1}{1 + \left(\frac{\pi^2 EI}{\ell^2}\right) \frac{1}{GS_1}} \right]$ <p><math>G</math> module d'élasticité au cisaillement  <math>S_1</math> aire réduite de la section transversale de la pièce (voir valeurs de <math>S_1</math> dans le tableau 3)</p>

**Poutre encastree élastiquement à ses extrémités.** Les rotations  $\omega_0$  et  $\omega_1$  des extrémités de la poutre sont proportionnelles aux moments  $M_0$  et  $M_1$  d'encastrement :

$$\omega_0 = \beta_0 \frac{M_0 \ell}{EI}$$

$$\omega_1 = -\beta_1 \frac{M_1 \ell}{EI}$$

$\beta_0$  et  $\beta_1$  étant des nombres positifs sans dimension ;  $\beta = 0$  correspond à un encastrement, et  $\beta = \infty$  correspond à une articulation.  
 L'effort normal critique a pour valeur :

$$F_c = C \frac{EI}{\ell^2}$$

$C$  étant un coefficient dépendant de  $\beta_0$  et  $\beta_1$  dont la valeur est donnée par le tableau suivant.

$\beta_1 \backslash \beta_0$	0	0,1	0,2	0,5	1	2	5	10	20	50	$\infty$
0	39,478	38,199	37,004	33,981	30,550	26,958	23,452	21,933	21,092	20,559	20,191
0,1	38,199	36,981	35,841	32,950	29,647	26,166	22,745	21,257	20,431	19,907	19,546
0,2	37,004	35,841	34,752	31,984	28,804	25,429	22,092	20,635	19,825	19,311	18,955
0,5	33,981	32,950	31,984	29,517	26,648	23,554	20,495	19,073	18,307	17,819	17,482
1	30,550	29,647	28,804	26,648	24,121	21,353	18,521	17,250	16,545	16,091	15,777
2	26,958	26,166	25,429	23,554	21,353	18,916	16,382	15,236	14,589	14,174	13,886
5	23,452	22,745	22,092	20,495	18,521	16,382	14,134	13,107	12,523	12,148	11,887
10	21,933	21,257	20,635	19,073	17,250	15,236	13,107	12,130	11,574	11,217	10,967
20	21,092	20,431	19,825	18,307	16,545	14,589	12,523	11,574	11,034	10,686	10,443
50	20,559	19,907	19,311	17,819	16,091	14,174	12,148	11,217	10,686	10,344	10,105
$\infty$	20,191	19,546	18,955	17,482	15,777	13,886	11,887	10,967	10,443	10,105	9,870

(1)  $E$  module d'élasticité longitudinale,  $I$  moment d'inertie de la section transversale,  $\ell$  longueur de la pièce.

# GAGNEZ DU TEMPS ET SÉCURISEZ VOS PROJETS EN UTILISANT UNE SOURCE ACTUALISÉE ET FIABLE

Techniques de l'Ingénieur propose la plus importante collection documentaire technique et scientifique en français !

Grâce à vos droits d'accès, retrouvez l'ensemble des **articles et fiches pratiques de votre offre**, **leurs compléments et mises à jour**, et bénéficiez des **services inclus**.



RÉDIGÉE ET VALIDÉE  
PAR DES EXPERTS



MISE À JOUR  
PERMANENTE



100 % COMPATIBLE  
SUR TOUS SUPPORTS  
NUMÉRIQUES



SERVICES INCLUS  
DANS CHAQUE OFFRE

- + de 350 000 utilisateurs
- + de 10 000 articles de référence
- + de 80 offres
- 15 domaines d'expertise

- |   |   |
|---|---|
| <input type="radio"/> Automatique - Robotique         | <input type="radio"/> Innovation                    |
| <input type="radio"/> Biomédical - Pharma             | <input type="radio"/> Matériaux                     |
| <input type="radio"/> Construction et travaux publics | <input type="radio"/> Mécanique                     |
| <input type="radio"/> Électronique - Photonique       | <input type="radio"/> Mesures - Analyses            |
| <input type="radio"/> Énergies                        | <input type="radio"/> Procédés chimie - Bio - Agro  |
| <input type="radio"/> Environnement - Sécurité        | <input type="radio"/> Sciences fondamentales        |
| <input type="radio"/> Génie industriel                | <input type="radio"/> Technologies de l'information |
| <input type="radio"/> Ingénierie des transports       |   |

**Pour des offres toujours plus adaptées à votre métier,  
découvrez les offres dédiées à votre secteur d'activité**

Depuis plus de 70 ans, Techniques de l'Ingénieur est la source d'informations de référence des bureaux d'études, de la R&D et de l'innovation.

**[www.techniques-ingenieur.fr](http://www.techniques-ingenieur.fr)**

**CONTACT :** Tél. : + 33 (0)1 53 35 20 20 - Fax : +33 (0)1 53 26 79 18 - E-mail : [infos.clients@teching.com](mailto:infos.clients@teching.com)

# LES AVANTAGES ET SERVICES compris dans les offres Techniques de l'Ingénieur

## ACCÈS



### Accès illimité aux articles en HTML

Enrichis et mis à jour pendant toute la durée de la souscription



### Téléchargement des articles au format PDF

Pour un usage en toute liberté



### Consultation sur tous les supports numériques

Des contenus optimisés pour ordinateurs, tablettes et mobiles

## SERVICES ET OUTILS PRATIQUES



### Questions aux experts\*

Les meilleurs experts techniques et scientifiques vous répondent



### Articles Découverte

La possibilité de consulter des articles en dehors de votre offre



### Dictionnaire technique multilingue

45 000 termes en français, anglais, espagnol et allemand



### Archives

Technologies anciennes et versions antérieures des articles



### Impression à la demande

Commandez les éditions papier de vos ressources documentaires



### Alertes actualisations

Recevez par email toutes les nouveautés de vos ressources documentaires

\*Questions aux experts est un service réservé aux entreprises, non proposé dans les offres écoles, universités ou pour tout autre organisme de formation.

## ILS NOUS FONT CONFIANCE



**www.techniques-ingenieur.fr**

**CONTACT :** Tél. : + 33 (0)1 53 35 20 20 - Fax : +33 (0)1 53 26 79 18 - E-mail : [infos.clients@teching.com](mailto:infos.clients@teching.com)