



TECHNIQUES
DE L'INGÉNIEUR

Réf. : **BM5040 V1**

Concentration de contraintes

Date de publication :
10 avril 1998

Cet article est issu de : **Mécanique | Fonctions et composants mécaniques**

par **Jian LU, Henri-Paul LIEURADE**

Pour toute question :
Service Relation clientèle
Techniques de l'Ingénieur
Immeuble Pleyad 1
39, boulevard Ornano
93288 Saint-Denis Cedex

Par mail :
infos.clients@teching.com
Par téléphone :
00 33 (0)1 53 35 20 20

Document téléchargé le : **22/01/2020**
Pour le compte : **7200049203 - ecole centrale de lyon // 156.18.19.146**

© Techniques de l'Ingénieur | tous droits réservés

Concentration de contraintes

par **Jian LU**

*Professeur de Génie mécanique à l'UTT (Université de technologie de Troyes)
Directeur du département Génie des systèmes mécaniques
et du LASMIS (laboratoire des systèmes mécaniques et d'ingénierie simultanée)*

et **Henri-Paul LIEURADE**

*Docteur ès sciences
Chef du département Matériaux, CETIM, Senlis*

1. Généralités.....	BM 5 040 - 2
1.1 Rappel.....	— 2
1.2 Définition.....	— 2
1.3 Coefficient théorique de concentration de contraintes K_t	— 3
1.4 Coefficient effectif de concentration de contraintes K_f	— 4
2. Rupture d'une pièce sous l'effet d'une concentration de contraintes.....	— 4
2.1 Rupture sous sollicitation monotone.....	— 4
2.2 Rupture sous sollicitation cyclique.....	— 4
2.3 Approche par la mécanique de la rupture.....	— 12
3. Méthode de détermination de K_t.....	— 14
3.1 Calcul analytique.....	— 14
3.2 Calcul numérique.....	— 15
3.3 Méthodes expérimentales.....	— 15
4. Données existantes.....	— 16
4.1 Les données sur K_t	— 16
4.2 Les données sur K_f	— 17
4.3 La notion de l'épaisseur de la couche critique dans un calcul numérique de la résistance à la fatigue.....	— 17
5. Exemples de calcul.....	— 17
5.1 Calcul en statique.....	— 17
5.2 Calcul en statique pour le cas des sollicitations composées.....	— 19
5.3 Calcul en fatigue.....	— 19
5.4 Calcul analytique en fatigue sous sollicitation combinée.....	— 20
5.5 Calcul en fatigue par calcul numérique.....	— 22
Références bibliographiques.....	— 24

La concentration de contraintes est un problème souvent rencontré dans la conception mécanique d'un composant ou organe mécanique. C'est un phénomène d'augmentation locale des contraintes dans une zone comportant une modification géométrique de la pièce. Il apparaît dans une discontinuité de la pièce ou d'une structure avec la présence d'une entaille après l'usinage par exemple. La zone de concentration de contraintes est souvent le site d'amorçage des fissures de fatigue mais peut être aussi l'origine d'une rupture brutale dans le cas d'un matériau fragile.

Pourquoi, par exemple, l'extrémité de l'ampoule de verre se casse-t-elle toujours à l'endroit du trait de scie, si petit soit-il ? La diminution de section est négligeable et, de plus, l'extrémité étant conique, il y a, à proximité du trait de scie, une section très certainement inférieure. L'explication est simple : il y a, au

fond de l'entaille, très petite, ainsi créée, un phénomène de concentration de contraintes qui provoque le dépassement de la limite de rupture.

En plus des problèmes de rupture statiques, la prise en compte des concentrations de contraintes en fatigue est un domaine important dans une démarche d'allègement de structures. En effet, la fatigue est la cause de la plupart des cas de rupture des composants contenant des concentrations de contraintes. Donc, une analyse s'impose pour montrer comment traiter ce type de problèmes dans le contexte de calcul de structure par éléments finis.

Nous avons voulu, dans cet article, par des exemples précis, montrer le phénomène physique, définir la terminologie et donner la méthodologie en traitant des cas, en augmentant progressivement la difficulté. Un des objectifs est aussi d'intégrer les nouvelles méthodes de calcul. Enfin, nous indiquons les informations pour faciliter l'utilisation de la documentation existante.

1. Généralités

1.1 Rappel

Le phénomène de concentration de contraintes a été d'abord traité par G. Kirsh, en 1898, pour un problème de concentration de contraintes autour d'un trou. Ensuite, des solutions analytiques ont été progressivement trouvées par différents chercheurs pour des géométries de pièces de plus en plus complexes. H. Neuber [1] et R.E. Peterson [2] ont beaucoup contribué à la connaissance dans ce domaine en faisant une analyse systématique pour les principales géométries et sollicitations mécaniques rencontrées dans la conception. Il y a 20 ans, grâce aux moyens informatiques de l'époque, le CETIM [3] a tracé des abaques pour simplifier les calculs des dessinateurs. Aujourd'hui, les calculs analytiques se font directement par un logiciel sur PC [4]. En même temps que le développement des méthodes analytiques, les techniques expérimentales comme l'extensométrie [5] et la photoélasticimétrie [6] ont beaucoup progressé. Avec l'arrivée des méthodes numériques, un grand nombre de problèmes traités par la photoélasticimétrie 3D ont pu être analysés directement avec un temps beaucoup plus court. Mais les méthodes expérimentales sont de plus en plus utilisées pour mieux déterminer les conditions aux limites des calculs par éléments finis. Avec l'introduction des techniques de prototypage rapide et des techniques de traitement de données automatiques, l'analyse expérimentale 3D [7] est en train de revenir en force dans une démarche globale d'ingénierie simultanée.

1.2 Définition

L'entaille, au sens strict du terme, n'est pas la seule particularité morphologique susceptible de créer une concentration de contraintes. Les épaulements, les trous et, en règle générale, toutes les discontinuités de forme provoquent le même phénomène. Afin de bien illustrer ce problème, nous commençons par une plaque en présence d'un trou sous traction. En effet, sans la présence d'un trou, les lignes de contraintes sont homogènes, si on utilise la densité des lignes comme la valeur des contraintes en traction. Après la réalisation d'un trou, ces lignes sont représentées figure 1. On constate que ces lignes sont perturbées autour du trou et la densité augmente. C'est juste une illustration schématique qualitative pour bien montrer que l'origine de la concentration de contraintes est une perturbation de forme d'une pièce mécanique. Chaque modification de discontinuité entraîne un nouveau type de distribution de contraintes. On peut donc modifier la concentration de contraintes en gé-

rant un grand nombre de combinaisons de géométries de pièces possibles. Par exemple, si on introduit deux trous dans la plaque, la distance entre les deux trous permet de faire varier sensiblement l'importance de cette concentration de contraintes.

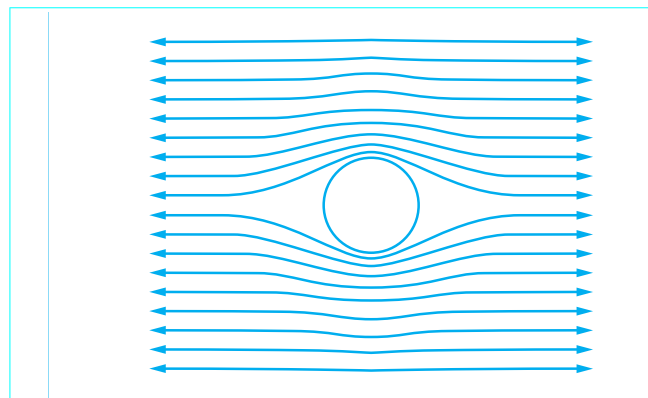


Figure 1 – Illustration schématique qualitative montrant l'origine de la concentration de contraintes

Cependant, on utilise souvent le terme d'**entaille** pour schématiser les différents cas possibles. Il faut toutefois être conscient que ce phénomène existe, non seulement dans des pièces ou composants mécaniques, mais également dans une structure. Le cas de structures soudées est un bon exemple. En effet, la forme du cordon de soudage peut modifier considérablement la concentration de contraintes. On peut également avoir des phénomènes de concentration de contraintes microscopiques, au niveau des stries d'usure par exemple. L'effet d'une entaille sur une pièce est la création de concentration de **contraintes locales** (figure 2).

Dans une **pièce non entaillée**, la répartition des contraintes se représente par des droites et résulte de l'application des formules classiques de résistance de matériaux ; on a affaire dans ce cas à des contraintes nominales. Dans le cas de la flexion et de la torsion, la contrainte nominale est maximale en A et en B.

Dans une **pièce entaillée avec la même section nominale**, cette répartition est modifiée par le phénomène de concentration de contraintes. On parle alors de **contraintes réelles**. Dans le cas de la figure 2, les contraintes réelles sont également maximales en A et en B.

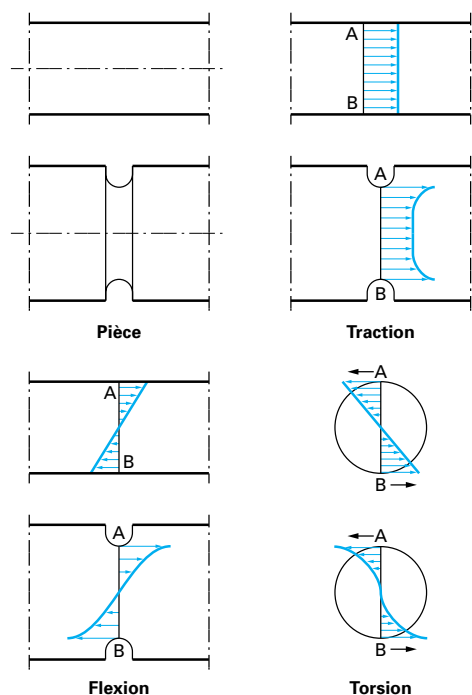


Figure 2 – Champ de contraintes dans différents cas de pièces lisses ou entaillées

Dans certains cas, la morphologie de la pièce combinée, avec une sollicitation, fait que les contraintes nominales maximales et les contraintes réelles maximales ne se trouvent pas au même point (figure 3). Il faut signaler que ce type de configuration est relativement fréquent dans un composant ou une structure mécanique.

Pour ne pas alourdir la terminologie, on désignera les contraintes obtenues à l'aide des calculs analytiques par :

- σ_{nom} pour la contrainte nominale maximale ;
- $\sigma_{\text{réelle}}$ pour la contrainte réelle maximale.

On constate que la section de la pièce n'est donc pas le seul paramètre de calcul ; il faut aussi tenir compte d'autres paramètres, comme la géométrie de la pièce et surtout la nature de la sollicitation.

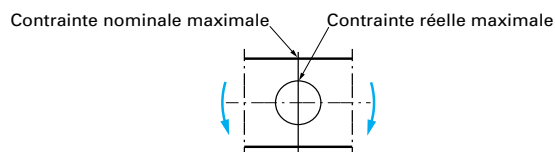


Figure 3 – Plaque percée en flexion : influence de la morphologie sur la localisation de σ_{max}

1.3 Coefficient théorique de concentration de contraintes K_t

Les définitions qui suivent reposent sur une constatation fondamentale. Pour un type de chargement donné, le rapport entre la contrainte réelle (*dans le cas où elle est inférieure à la limite d'élasticité*) et la contrainte nominale en un point ne dépend pas de la valeur de la charge appliquée. Le choix du coefficient qui représentera les concentrations de contraintes est donc tout naturel.

L'indice « t » est employé pour indiquer que ces coefficients sont théoriques et que leur calcul repose sur les hypothèses de la théorie de l'élasticité.

L'expression mathématique a été donnée par Peterson [2] à la suite des travaux de Neuber, pour des formes de **pièces simples**, pour les cas en **traction**. Il propose :

$$K_t = 1 + 2 \sqrt{\frac{a}{\rho}}$$

a étant la demi-longueur de l'entaille et ρ le rayon de courbure de l'entaille.

Dans le cas d'un trou, on a :

$$a = \rho$$

d'où $K_t = 3$.

K_t est défini comme le rapport de la contrainte maximale réelle dans la zone de discontinuité (entaille, trou, par exemple) à la contrainte dans la section nette :

$$K_t = \sigma_{\text{réelle}} / \sigma_{\text{nom}}$$

$\sigma_{\text{réelle}}$ est calculable par les méthodes numériques comme la méthode des éléments finis ou par les méthodes analytiques pour les géométries simples. Elle est également mesurable par les techniques d'analyses de contraintes expérimentales comme la photo-élasticimétrie, l'extensométrie ou encore les méthodes thermiques.

σ_{nom} est calculable à l'aide des formules de résistance des matériaux (tableau 1), en considérant la pièce comme une barre ou une plaque sans prendre en compte la discontinuité géométrique.

Tableau 1 – Contraintes nominales

Traction/compression	Flexion	Torsion
$\sigma_{\text{nom}} = \frac{F}{S}$	$\sigma_{\text{nom}} = \frac{M}{I/V}$	$\tau_{\text{nom}} = \frac{M_t}{I_0/V}$
F effort de traction ou de compression S section M moment de flexion I moment d'inertie par rapport à l'axe neutre	M_t moment de torsion I_0 moment d'inertie polaire V distance de la fibre considérée à l'axe neutre	

Pour le cas de la **torsion**, il faut considérer les contraintes de cisaillement pour faire les calculs.

Le coefficient théorique de concentration de contraintes K_t dépend uniquement de la géométrie de la pièce et du type de sollicitation. Dans ce cas, on suppose que le matériau du composant mécanique est homogène et continu.

Insistons sur la **limite d'utilisation** de K_t :

- les sollicitations sont statiques ;
- les contraintes réelles sont calculées comme si le matériau avait un comportement purement élastique ;
- K_t est une valeur relative, donc sans unité.

Il faut également faire **attention** à ne pas confondre K_t avec le **facteur d'intensité de contrainte K** utilisé dans la mécanique de rupture.

1.4 Coefficient effectif de concentration de contraintes K_f

Par définition, la limite d'endurance en fatigue d'une pièce σ_D est la valeur de la sollicitation alternée au-dessous de laquelle un métal peut supporter un nombre illimité de cycles (cf. article *Essais de fatigue* [53]). Dans certains cas, cette limite n'existe pas (pour certains alliages d'aluminium par exemple) ; une valeur de résistance à la fatigue conventionnelle est alors adoptée.

K_f est défini comme le rapport de la limite d'endurance d'un échantillon lisse, σ_D , à la limite d'endurance de l'échantillon possédant des foyers de concentration de contraintes σ'_D , à même section de travail :

$$K_f = \sigma_D / \sigma'_D$$

On notera que σ_D et σ'_D sont des **contraintes nominales**.

K_f est donc un coefficient expérimental déterminé à partir d'essais d'endurance réalisés sur la pièce même et dans les conditions de fonctionnement de celle-ci. C'est un facteur effectif de concentration de contraintes. Mais, dans ce cas, les sollicitations mécaniques sont cycliques. Il est alors constaté que K_f est différent de K_t et très généralement inférieur à K_t .

Autrement dit, l'abaissement expérimental de l'endurance est plus faible que ce qu'on pourrait attendre du coefficient théorique de concentration de contraintes K_t . Ce fait s'interprète généralement par des effets de soutien provenant de deux causes :

a) le principal effet est dû à une déformation plastique qui modifie l'acuité de l'entaille ; il est d'autant plus important (K_f/K_t diminue) que la contrainte maximale théorique à fond d'entaille est plus élevée ;

b) effet de l'érouissage cyclique, l'entaille amenant très vite le matériau à l'état plastique en fond d'entaille, qui est fonction des caractéristiques du matériau, d'où la dépendance de K_f vis-à-vis de la microstructure et du matériau.

Comme K_f est obtenu directement par les essais sur des composants avec une géométrie donnée et sous une sollicitation donnée, il représente bien la réalité. Dans un calcul, il est donc préférable d'utiliser K_f . Mais, il est difficile de tester chaque composant avec sa géométrie finale et son matériau réel. Les méthodes de calculs avancés constituent donc un atout important pour résoudre ce type de problème. Nous allons présenter quelques approches dans les chapitres 2 et 3. Comme K_t est, dans la plupart des cas, supérieur à K_f , on peut donc penser à le substituer en apportant une marge de sécurité supplémentaire. Cela est vrai uniquement quand les autres paramètres influençant la résistance à la fatigue sont déjà pris en compte. On peut citer la rugosité, la taille de la pièce, le mode de fabrication, les contraintes résiduelles, etc. (cf. article *Fatigue des alliages ferreux. Approche classique* [54]).

2. Rupture d'une pièce sous l'effet d'une concentration de contraintes

2.1 Rupture sous sollicitation monotone

Considérons, par exemple, une pièce prismatique entaillée soumise à un effort de traction croissant :

— pour des **efforts moyens ou faibles**, les contraintes ne dépassent pas la limite d'élasticité, même en tenant compte de la morpho-

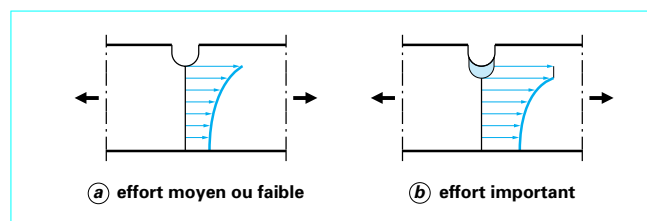


Figure 4 – Plastification à fond d'entaille

logie de la pièce ; la répartition est alors du type de celle représentée figure 4a ;

— si l'**effort de traction augmente**, la contrainte maximale atteint la limite d'élasticité dans la zone de l'entaille, ce qui se traduit par une plastification partielle ; la répartition des contraintes est donnée figure 4b ;

— si le niveau d'**effort augmente encore**, une amorce de rupture apparaît dans la zone plastifiée, provoquant la destruction de la pièce.

Il est donc inexact de dire que la pièce est hors d'usage lorsque la limite d'élasticité est dépassée en un point. La rupture dépendra en fait de la forme de la pièce, de la nature du matériau et du mode de sollicitation. Cette plastification est même utilisée pour renforcer la résistance de certaines pièces.

Les coefficients de concentration de contraintes ne doivent donc pas être utilisés pour déterminer avec exactitude l'effort qui provoque la rupture d'une pièce, mais pour comparer deux formes entre elles.

Pour une sollicitation statique, on peut aussi déterminer la valeur du coefficient effectif de la concentration. On utilise le rapport de la charge de rupture pour les cas avec ou sans présence de concentration de contraintes. Supposons que nous ayons deux plaques soumises à la traction : une lisse et une autre avec un trou, la largeur et l'épaisseur des deux plaques sont respectivement ℓ_1 et ℓ_2 , e_1 , e_2 . Le diamètre du trou est d . Pour conserver la même surface utile, nous avons donc :

$$\ell_1 e_1 = (\ell_2 - d) e_2$$

Les charges de rupture pour les deux cas sont P_1 et P_2 et K_t a pour valeur :

$$K_t = P_1 / P_2$$

On sait que le calcul d'un coefficient de concentration de contraintes théorique suppose que l'on soit dans le domaine élastique (§ 1.3). Quand on utilise la charge de rupture pour calculer les coefficients de sécurité, la déformation plastique joue un rôle très important ; de plus, la section change aussi avant la rupture. D'après les résultats expérimentaux, on peut tirer les conclusions suivantes :

— pour les matériaux fragiles (acier trempé par exemple), K_t est très proche de la valeur expérimentale ;

— pour un acier ductile avec une grande capacité de déformation plastique, K_t réel est proche de 1.

Donc, si l'on ne considère que la charge statique, on peut négliger K_t pour un matériau fragile [8]. En fait, dans ce cas $K_t = 1$ pour toutes les géométries.

2.2 Rupture sous sollicitation cyclique

La prévision de l'amorçage à la fatigue d'une pièce entaillée est traditionnellement effectuée sur des essais réalisés sur des éprouvettes lisses et des éprouvettes entaillées de petite dimension, au

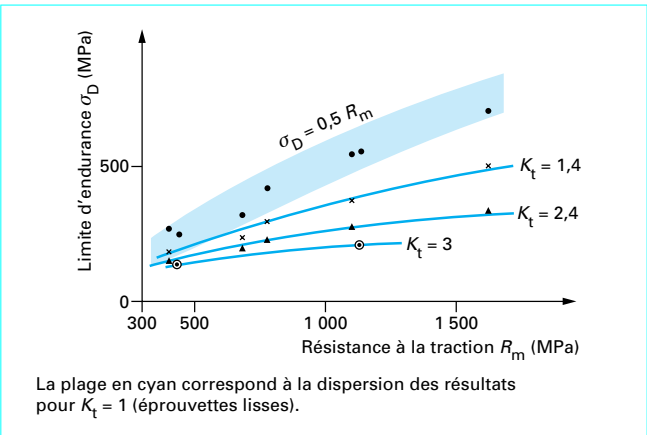


Figure 5 – Influence des caractéristiques mécaniques des aciers sur l'endurance des pièces entaillées (d'après Cazaud [8])

cours desquels, le plus souvent, on s'est intéressé à la relation existant entre la charge cyclique appliquée et le nombre de cycles à rupture. Comme nous l'avons indiqué paragraphe 1.4, la valeur de K_t dépend de nombreux paramètres.

2.2.1 Sensibilité à l'entaille

La figure 5 donne les variations de la limite d'endurance de quelques aciers en fonction de leurs contraintes à la rupture et de l'acuité d'entaille. On notera que, pour un matériau donné, la limite d'endurance diminue quand K_t augmente ; cette diminution est d'autant plus forte que l'acier possède des caractéristiques élevées. D'autre part, pour les fortes valeurs de K_t , on observe que la limite d'endurance est pratiquement insensible aux variations de résistance statique de l'acier.

Ces observations ont amené Peterson [2] à définir un indice de sensibilité à l'entaille, q , qui s'exprime par :

$$q = \frac{K_f - 1}{K_t - 1}$$

Diverses formulations ont été proposées pour ce coefficient. Le tableau 2 donne les plus connues.

En particulier, la relation proposée par Peterson conduit à :

$$K_f = 1 + \frac{K_t - 1}{1 + (a/r)}$$

Tableau 2 – Formulations du coefficient de sensibilité à l'entaille q , selon différents auteurs		
Auteur	Formule	Paramètre caractéristique
Peterson [2]	$q = \frac{1}{1 + (a/r)}$	$a = f(R_m)$ (figure 6)
Neuber [9]	$q = \frac{1}{1 + \sqrt{a/r}}$	$a = f(R_m)$ (figure 7)
Harris [10].	$q = 1 - \exp\left(\frac{-r}{a}\right)$	$a = \frac{10,8}{R_m^2}$
a (mm) constante du matériau ; R_m en MPa ; r (mm) rayon de l'entaille.		

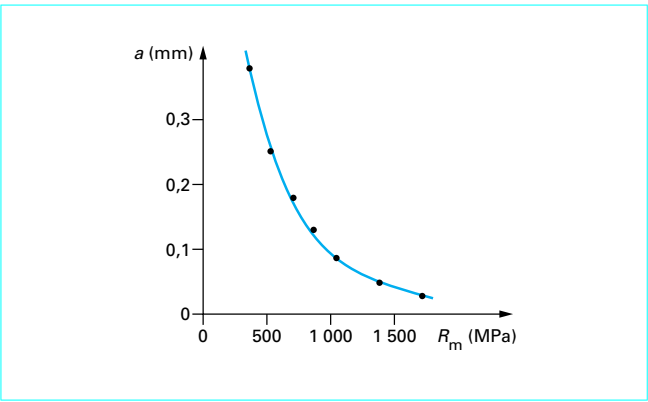


Figure 6 – Variation de la grandeur caractéristique a dans la formule de la sensibilité à l'entaille (cf. tableau 2) (selon Peterson [2])

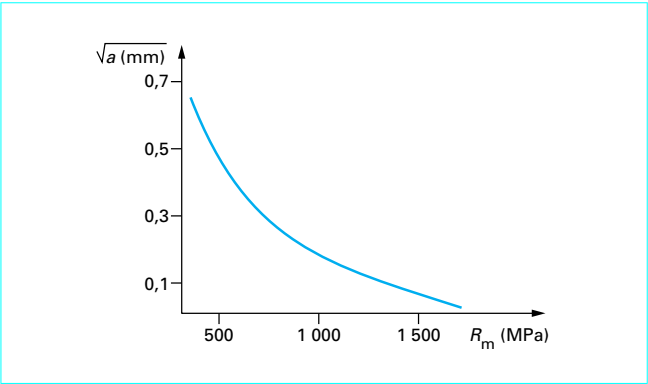


Figure 7 – Variation de la grandeur caractéristique \sqrt{a} dans la formule de la sensibilité à l'entaille due à Neuber [9] (cf. tableau 2) (selon Kuhn et Hardrath [12])

L'évolution du paramètre a (mm), en fonction de R_m (MPa) est présentée figure 6 ; pour la plupart des métaux ferreux, la relation suivante a été proposée [11] :

$$a = \left(\frac{270}{R_m}\right)^{1,8}$$

Bien que d'autres équations empiriques aient été développées, aucune n'est remarquablement supérieure aux autres. L'équation de Peterson est considérée généralement d'une précision acceptable ; les résultats obtenus sont, dans ce cas, du côté de la sécurité.

On peut cependant signaler que les travaux de Brand [13], pour rendre compte de résultats bibliographiques, ont montré que l'utilisation du facteur q conduisait à une plus grande dispersion que l'utilisation de $\frac{K_t}{K_f}$ qu'il appelle **coefficient d'adaptation**. De ce fait, le facteur de sensibilité à l'entaille q n'est que peu utilisé dans les calculs en fatigue.

En effet, après avoir recensé un grand nombre de résultats intéressant des entailles de tous types, il donne à titre d'exemple (figure 8) le résultat du traitement des données bibliographiques concernant la classe d'aciers de résistance $400 \leq R_m \leq 700$ MPa (un plus grand affinement de la classe n'apporte aucun renseignement supplémentaire). Cette figure confirme les nombreux abaques français et étrangers antérieurement établis. Elle montre à l'évidence la

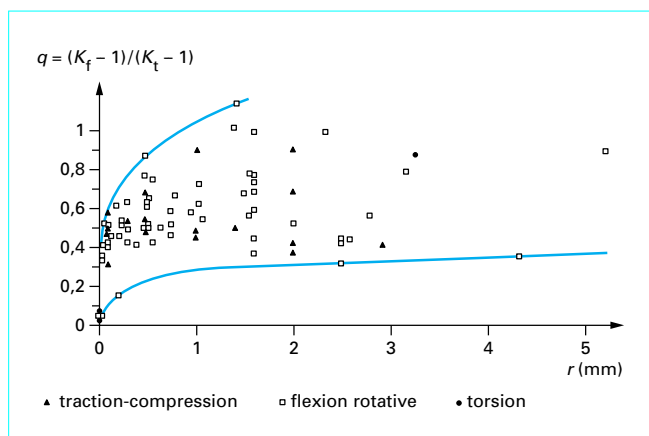


Figure 8 – Variation de l'indice de sensibilité à l'entaille q en fonction du rayon r à fond d'entaille, pour des aciers de résistance comprise entre 400 et 700 MPa

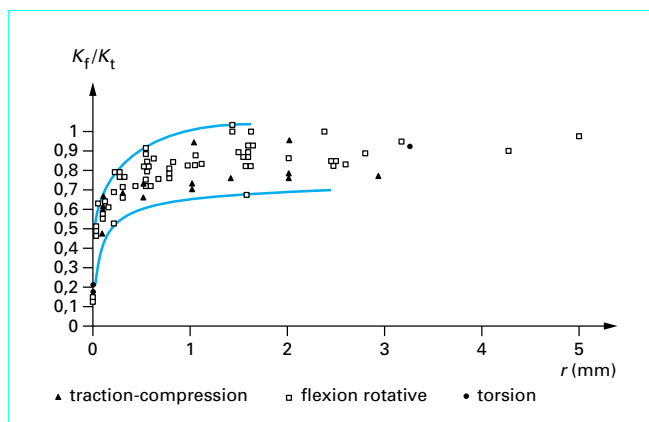


Figure 9 – Variation du rapport K_f/K_t en fonction du rayon r à fond d'entaille, pour des aciers de résistance comprise entre 400 et 700 MPa

grande dispersion des résultats et le danger de les utiliser sous cette forme, puisque, à un même rayon à fond d'entaille $r = 2$ mm, correspond un facteur de sensibilité à l'entaille qui peut aussi bien être environ égal à 0,3 ou supérieur à 1 suivant la courbe enveloppe considérée.

Si on utilise les mêmes bases expérimentales que précédemment, ce qui est logique, mais en étudiant les variations de K_f/K_t et non plus de $q = (K_f - 1) / (K_t - 1)$, nous obtenons les résultats de la figure 9.

La dispersion a fortement diminué, sans disparaître, ce qui est normal, car il n'y a pas de différence fondamentale entre q et K_f/K_t ; mais cette approche, encore élémentaire, permet toutefois d'estimer, avec moins d'incertitude, la limite d'endurance σ_D d'un échantillon possédant des foyers de concentration de contraintes.

Grâce à cette approche, il serait possible de proposer un abaque $K_f/K_t = f(r)$, paramétré en résistance, mais la seule prise en compte du paramètre rayon à fond d'entaille r est insuffisante. Aussi, il est apparu à la fois plus juste et plus pratique pour le concepteur de proposer l'abaque moyen représenté figure 10 en fonction de la résistance à la traction R_m et du coefficient théorique de concentration de contraintes K_t .

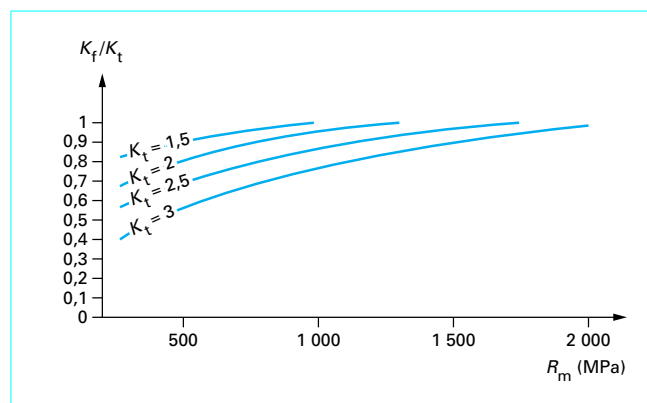


Figure 10 – Variation du rapport K_f/K_t en fonction de R_m et de K_t

2.2.2 Calcul de fatigue en présence d'une plastification à fond d'entaille

Si un dépassement de la limite d'élasticité se produit à fond d'entaille pour chaque cycle d'un chargement d'amplitude variable, l'adoucissement ou le durcissement du matériau peut modifier très sensiblement les amplitudes de contrainte et de déformation à cet endroit critique, de façon non linéaire par rapport au chargement nominal. C'est la raison pour laquelle l'utilisation d'un coefficient de réduction de type K_t ou K_f ne convient plus.

2.2.2.1 Hypothèse de base

L'approche qui a reçu jusqu'à présent le plus large agrément de la part de nombreux chercheurs qui se sont intéressés à l'amorçage des fissures de fatigue, est appelée par les anglo-saxons « *local strain approach* », qui se traduit de façon satisfaisante par « approche par la déformation locale » ou « approche locale ». Cette approche repose sur l'hypothèse selon laquelle la contrainte et la déformation locales (à l'endroit où la fissure va s'amorcer) gouvernent seules le nombre de cycles à l'amorçage. Autrement dit, deux pièces de formes différentes présenteront la même résistance à l'amorçage si les déformations qu'elles subissent au point critique sont identiques.

À l'aide d'essais de fatigue réalisés sur éprouvettes lisses et entaillées, un accord satisfaisant a été observé entre les durées d'amorçage obtenues sur les deux types d'éprouvettes, en appliquant aux premières les déformations mesurées au fond des entailles des secondes [14].

2.2.2.2 Mise en application de la méthode

Compte tenu des remarques faites au paragraphe précédent, la méthode a besoin des ingrédients suivants pour être appliquée [15].

■ Courbe de base donnant la résistance à la fatigue du matériau

On connaît, le plus souvent, cette caractéristique du matériau par sa courbe de Wöhler, lorsque la sollicitation de fatigue ne dépasse pas la limite d'élasticité du matériau et par sa courbe de Manson-Coffin dans le cas complémentaire. L'équation de cette dernière a la forme suivante :

$$\frac{\Delta \varepsilon_t}{2} = \frac{\sigma_f'}{E} (2N_r)^b + \varepsilon_f' (2N_r)^c \quad (1)$$

avec b coefficient de résistance en fatigue,
 c coefficient de ductilité en fatigue,
 E module d'élasticité,

N_r	nombre de cycles au bout duquel la rupture se produit,
ε'_f	coefficient de la ductilité en fatigue,
$\Delta\varepsilon_{t/2}$	amplitude de déformation totale,
σ'_f	coefficient de la résistance en fatigue.

Dans cette formule, on peut distinguer l'endommagement apporté par la **déformation élastique** :

$$\frac{\Delta\varepsilon_e}{2} = \frac{\sigma'_f}{E} (2N_r)^b \quad (2)$$

de celui apporté par la **déformation plastique** :

$$\frac{\Delta\varepsilon_p}{2} = \varepsilon'_f (2N_r)^c \quad (3)$$

Dans la mesure où l'on s'intéresse à l'amorçage d'une fissure, l'idéal serait que ces courbes soient basées non pas sur la rupture des éprouvettes d'essai (N_r) mais sur l'amorçage de la fissure (N_a).

■ Moyen de connaître la déformation locale

La connaissance de la déformation locale, et par conséquent celle de la contrainte locale, doit s'obtenir à partir du chargement nominal. On peut utiliser plusieurs méthodes pour y parvenir :

- méthodes des éléments finis (MEF) [16] ;
- méthodes approchées proposées par Neuber [9] [17] [18] ou Stowell [19].

Quelle que soit la méthode utilisée, les informations suivantes sont nécessaires.

■ Loi de comportement du matériau

Il faut non seulement connaître la courbe de traction monotone du matériau, mais aussi sa courbe de traction cyclique. Comme on le verra paragraphe 2.2.2.3, un raffinement de la méthode de Neuber demande même de connaître la forme des boucles d'hystérésis mécanique et la façon dont elles se déforment en fonction du nombre de cycles.

En général, on exprimera cette loi de la façon suivante :

- pour la courbe de **traction monotone** :

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + m \left(\frac{\sigma}{E} \right)^{1/n} \quad (4)$$

m , n étant des constantes de matériaux ;

- pour la courbe d'**écrouissage cyclique** ou la forme des boucles d'hystérésis mécanique :

$$\Delta\varepsilon = \frac{\Delta\sigma}{E} + m' \left(\frac{\Delta\sigma}{E} \right)^{1/n'} \quad (5)$$

m' et n' étant des constantes de matériaux liées à l'écrouissage cyclique.

2.2.2.3 Détermination de la déformation locale par la méthode approchée de Neuber

En prenant le cas d'un solide entaillé, sollicité en cisaillement pur, Neuber [17] a démontré que :

$$K_\sigma = K_\varepsilon = K_t^2 \quad (6)$$

où :

- $K_\sigma = \sigma/\sigma_\infty$: coefficient de concentration de contrainte locale ;
- $K_\varepsilon = \varepsilon/\varepsilon_\infty$: coefficient de concentration de déformation ;
- K_t : coefficient de concentration de contraintes.

Le symbole « ∞ » placé en indice signifie que l'on fait référence aux grandeurs nominales. Les grandeurs non indicées désignent les grandeurs locales.

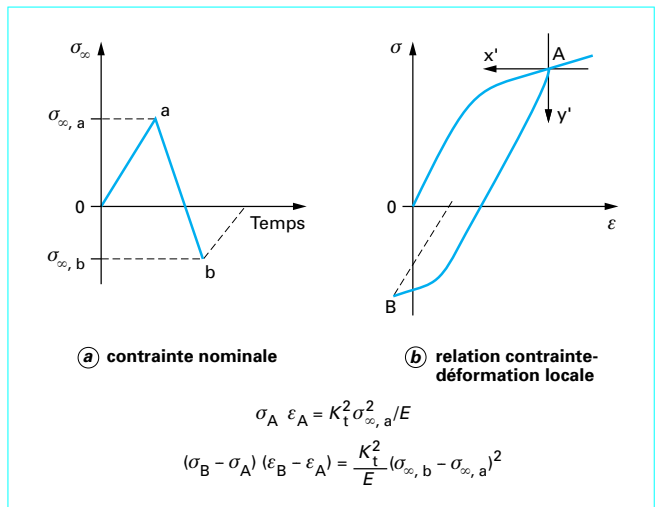


Figure 11 – Schéma de l'application de la règle de Neuber à la fatigue

Plus tard, Neuber a proposé d'étendre cette relation à tous les autres types de chargement [18].

■ Application à la fatigue

Faisons varier entre 0 et $\sigma_{\infty,a}$ la contrainte nominale appliquée à l'éprouvette entaillée (figure 11a). Quelle que soit la valeur de σ_∞ entre 0 et $\sigma_{\infty,a}$, l'élément le plus contraint au fond d'entaille connaît une contrainte et une déformation qui vérifient [d'après relation (6)] :

$$\sigma \varepsilon = K_t^2 \sigma_\infty \varepsilon_\infty$$

Lorsque σ_∞ atteint $\sigma_{\infty,a}$, on a :

$$\sigma_A \varepsilon_A = K_t^2 \sigma_{\infty,a} \varepsilon_{\infty,a}$$

σ a varié de $\Delta\sigma$, ε de $\Delta\varepsilon$ et σ_∞ de $\Delta\sigma_\infty$.

On peut donc écrire :

$$\Delta\sigma \Delta\varepsilon = K_t^2 \Delta\sigma_\infty \Delta\varepsilon_\infty \quad (7)$$

L'application de la règle de Neuber à la fatigue consiste à dire qu'on peut utiliser la relation (7) pour l'alternance décroissante qui suit, en prenant le point A (figure 11) comme nouvelle origine dans le diagramme (σ ; ε) des contraintes et des déformations locales. Ainsi, si σ_∞ varie entre $\sigma_{\infty,a}$ et $\sigma_{\infty,b}$ au cours de cette deuxième alternance, σ variera entre σ_A et σ_B de sorte que :

$$(\sigma_B - \sigma_A)(\varepsilon_B - \varepsilon_A) = K_t^2 (\sigma_{\infty,b} - \sigma_{\infty,a})(\varepsilon_{\infty,b} - \varepsilon_{\infty,a}),$$

en application de la relation (7).

La même règle est pratiquée pour les alternances suivantes.

■ Cas particulier des chargements d'amplitude constante

Dans ce cas, le second membre de la relation (7) est constant. On obtient alors facilement l'amplitude de la déformation à fond d'entaille en résolvant le système constitué par les équations (5) et (7) :

$$\begin{aligned} \Delta\sigma \Delta\varepsilon &= Cte \\ \Delta\varepsilon &= \frac{\Delta\sigma}{E} + m' \left(\frac{\Delta\sigma}{E} \right)^{1/n'} \end{aligned} \quad (8)$$

La dernière équation correspond au comportement cyclique stable du matériau ; son utilisation immédiate suppose donc que l'on

néglige le stade d'adoucissement ou de durcissement qui a lieu pendant les premiers cycles de chargement.

■ Forme condensée du critère d'amorçage basé sur la règle de Neuber

S'agissant du critère d'amorçage, on doit utiliser la relation (7) comme point de départ du raisonnement. Cette relation peut se développer sous la forme :

$$\Delta\sigma\Delta\varepsilon = K_f^2 \Delta\sigma_\infty \Delta\varepsilon_\infty \quad (9)$$

Si le chargement nominal est élastique, on a :

$$\Delta\varepsilon_\infty = \frac{\Delta\sigma_\infty}{E}$$

et, alors, on peut écrire :

$$\sqrt{E\Delta\sigma\Delta\varepsilon} = K_f \Delta\sigma_\infty \quad (10)$$

Cela signifie que, pour un matériau donné, on peut relier aisément le chargement nominal aux sollicitations locales, par la relation (10).

D'autre part, connaissant la loi de résistance à la fatigue du matériau [relation (1)] :

$$\Delta\varepsilon = f(N_f)$$

et sa loi de comportement cyclique [relation (5)] :

$$\Delta\sigma = f(\Delta\varepsilon)$$

on peut en déduire facilement la relation qui existe entre la fonction $\sqrt{E\Delta\sigma\Delta\varepsilon}$ et le nombre de cycles N_a , comme le montre le schéma de la figure 12. On a :

$$\sqrt{E\Delta\sigma\Delta\varepsilon} = g(N_a) \quad (11)$$

Connaissant cette caractéristique (fonction $g(N_a)$) du matériau et K_f , on peut donc prévoir de cette manière le nombre de cycles à l'amorçage correspondant à un chargement nominal donné, en résolvant le système simple constitué par les équations (10) et (11) [20].

■ Effets de contrainte moyenne

Ces effets peuvent être importants lorsque le chargement est aléatoire. En effet, comme le montre la figure 13, suivant l'ordre de succession des cycles, on peut obtenir localement des boucles d'hystérésis de même largeur mais de contraintes moyennes différentes. Cela ne sera pas indifférent pour calculer l'endommagement subi par le matériau : celui-ci ne dépend pas seulement de l'amplitude de la contrainte, mais aussi de la contrainte moyenne. Malheureusement, cet endommagement propre à la contrainte est difficilement mesurable par des essais classiques de fatigue oligocyclique ; les essais, dans ce cas, sont réalisés avec déformation contrôlée.

Une hypothèse sur cet endommagement et souvent nécessaire. À titre d'exemple, on citera l'hypothèse avancée par Smith et al. [21] pour tenir compte de l'effet de contrainte moyenne. Par extension de la règle de Neuber, les auteurs proposent d'utiliser la quantité $\sqrt{E\sigma_{\max}\Delta\varepsilon}$ comme critère d'amorçage. Quelques vérifications expérimentales [15] [25] ont montré le bien-fondé de cette hypothèse.

■ Méthode basée sur l'énergie absorbée localement

La méthode proposée par Molski et Glinka [22] s'appuie sur des concepts voisins de ceux qu'a développés Neuber. De plus, elle n'a pas l'inconvénient signalé par certains auteurs de prévoir une déformation locale en excès par rapport aux résultats des mesures ou des calculs par la méthode des éléments finis.

● Exposé de la méthode

Molski et Glinka [22] supposant que l'état des contraintes est uniaxial à fond d'entaille, proposent la règle suivante :

$$\frac{W_\sigma}{W_{\text{nom}}} = K_t^2 \quad (12)$$

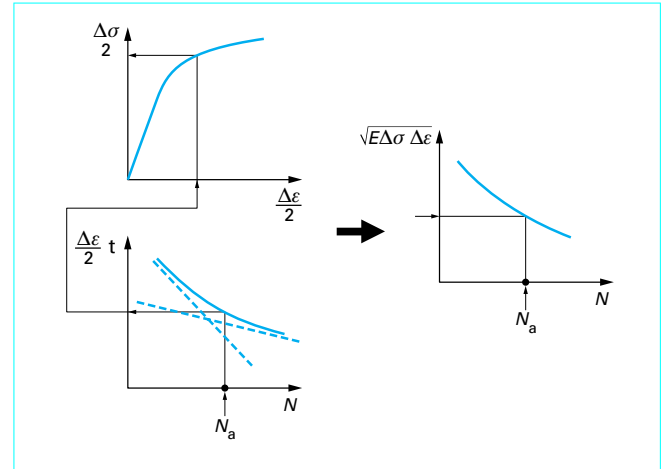


Figure 12 – Application du critère d'amorçage basé sur la règle de Neuber

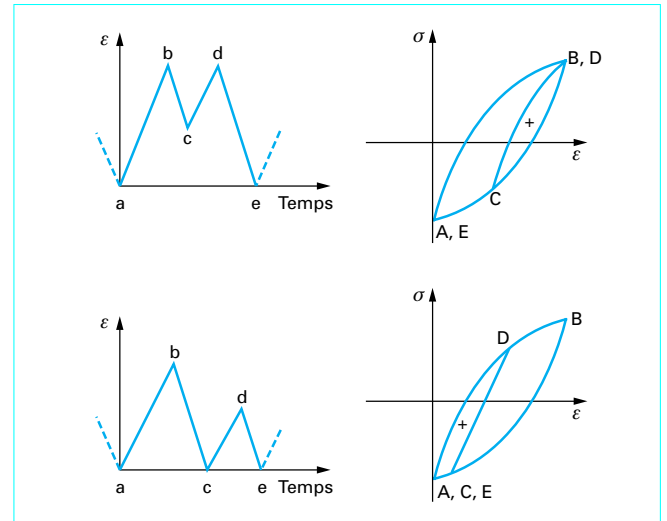


Figure 13 – Représentation schématique des effets de contrainte moyenne en fatigue oligocyclique sous sollicitations d'amplitudes variables

où :

$$W_\sigma = \int_0^\varepsilon \sigma(\varepsilon) d\varepsilon$$

est l'énergie de déformation par unité de volume au point le plus sollicité à fond d'entaille

et :

$$W_{\text{nom}} = \int_0^{\varepsilon_{\text{nom}}} \sigma_{\text{nom}}(\varepsilon_{\text{nom}}) d\varepsilon_{\text{nom}}$$

est l'énergie de déformation par unité de volume due à la sollicitation nominale.

On vérifie aisément que la relation (12) est exacte lorsque le comportement du matériau est entièrement élastique. Les auteurs considèrent que la relation (12) reste encore valide tant que la plasticité à fond d'entaille continue à être confinée dans un environnement élastique.

Connaissant la forme de la loi (4) de traction du matériau, on sait calculer W_σ et W_{nom} :

$$W_\sigma = \frac{\sigma^2}{2E} + \frac{m\sigma}{n+1} \left(\frac{\sigma}{E} \right)^{1/n}$$

$$W_{nom} = \frac{\sigma_{nom}^2}{2E}$$

● Application à la fatigue

Cela se fait simplement en remplaçant la contrainte par la variation (max.-min.) des contraintes et la loi de traction par l'équation (5) qui décrit la forme des boucles d'hystérésis mécanique du matériau :

$$W_\sigma = \frac{(\Delta\sigma)^2}{2E} + \frac{m'\Delta\sigma}{n'+1} \left(\frac{\Delta\sigma}{E} \right)^{1/n'}$$

$$W_{nom} = \frac{(\Delta\sigma_{nom})^2}{2E}$$

Pour connaître les valeurs successives de la contrainte et de la déformation locales dans le cas d'un chargement d'amplitude variable, le calcul doit être fait itération par itération. Les énergies sont calculées à la $i^{ème}$ itération en prenant pour nouvelle origine les valeurs de la contrainte et de la déformation locales obtenues à la fin de la $(i-1)^{ème}$ itération.

2.2.3 Prise en compte de l'effet d'échelle

On note que le rayon à fond d'entaille r intervient dans les trois formules du tableau 2, ce qui signifie que celles-ci tiennent compte, dans une certaine mesure, de l'effet d'échelle ou de taille des pièces.

Deux pièces de géométrie similaire, conduisant à un même K_t , mais de tailles différentes, ont des rayons d'entaille différents ; ainsi, la pièce la plus grande possède un K_t plus élevé et une résistance à la fatigue plus faible. Cet effet de taille de l'entaille se sature pour des valeurs de r relativement faibles (5 à 10 mm) lorsque K_t tend vers K_t ; cela signifie qu'aucune diminution supplémentaire ne peut être prédite.

Cependant, de nombreux chercheurs ont observé des réductions substantielles de la résistance à la fatigue avec la taille de composants entaillés ou non. Ces travaux indiquent la nécessité de règles de correction tenant compte des effets d'ordre statistique (augmentation de la possibilité de sites d'amorçage, avec l'accroissement des dimensions de la pièce).

2.2.3.1 Relation de Kuguel

Partant de la théorie statistique de Weibull sur la résistance, Kuguel [23] a proposé la relation suivante :

$$\sigma'_D / \sigma_D = (V/V_0)^{-a}$$

avec σ'_D et σ_D limites d'endurance à 10^8 cycles respectivement, d'une pièce et de la pièce de référence,
 V et V_0 volumes du métal sous-jacent soumis à une contrainte au moins égale à 95 % de la contrainte superficielle pour ces mêmes pièces.

Cette relation postule le rôle du gradient de contrainte sur la résistance à la fatigue.

L'utilisation de $a = 0,034$ est recommandée pour le calcul des pièces entaillées ou non.

Si l'on suppose que le volume concerné par l'endommagement est proportionnel au cube d'une caractéristique de longueur, t (épaisseur ou diamètre de la pièce), la relation précédente devient :

$$\sigma'_D / \sigma_D = (t_0/t)^n$$

avec : $n = 3a = 0,102$

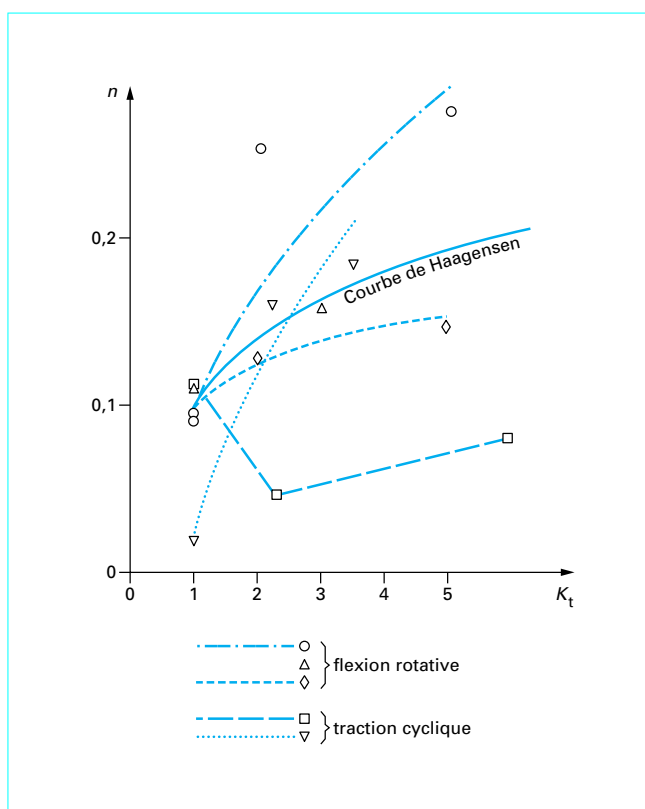


Figure 14 – Variation de l'exposant n de correction de taille en fonction de K_t pour des éprouvettes entaillées sollicitées soit en flexion rotative, soit en traction cyclique [24]

L'effet de la taille des éprouvettes a été étudié en prenant comme référence des éprouvettes de faibles diamètres (5 à 10 mm) sollicitées en flexion rotative. Les résultats montrent que l'effet d'échelle est d'autant plus important que l'on passe d'une sollicitation en traction à une sollicitation en flexion et que K_t est plus important (figure 14), montrant ainsi l'effet prépondérant du gradient de contrainte.

L'expression de n suivante a été proposée par Haagensen [24] :

$$n = 0,1 + 0,14 \lg K_t$$

2.2.3.2 Contrainte moyenne sur une certaine profondeur

Neuber [18] calcule la contrainte moyenne appliquée à la pièce, sur une certaine profondeur r^* (profondeur caractéristique). Dans le cas des pièces entaillées, cela revient à calculer K_t dans l'entaille avec un rayon fictif r_f :

$$r_f = r + cr^*$$

où r est le rayon géométrique de l'entaille,
 c est une constante qui dépend de la forme de l'éprouvette et de son mode de chargement.

Le tableau 3 récapitule les valeurs de c . La figure 15 donne les variations de la profondeur caractéristique r^* pour différents matériaux.

Tableau 3 – Valeurs de la constante *c* (d’après Neuber [18])

Critère de résistance à la fatigue	Traction et flexion		Torsion et cisaillement
	Plats avec entailles, trous, épaulements	Barreaux avec entaille circulaire	
Contrainte normale	2	2	1
Cisaillement maximal	2	$\frac{2 - \nu}{1 - \nu}$	1
Énergie de déformation	2,5	$\frac{5 - 2\nu + 2\nu^2}{2 - 2\nu + 2\nu^2}$	1

ν : coefficient de Poisson.

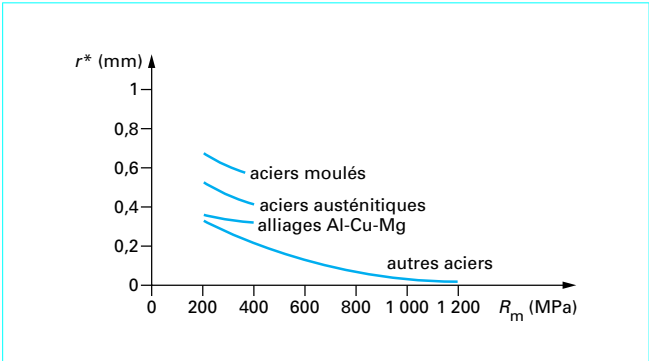


Figure 15 – Variation de la profondeur caractéristique *r** en fonction des caractéristiques mécaniques, de différents matériaux (selon Neuber [18])

D’après les résultats expérimentaux que nous avons déjà utilisés (figure 5 [8]), l’intervalle de confiance à 90 % des écarts entre les valeurs de *K_f* mesurées et les valeurs calculées par cette méthode vaut ± 0,4.

2.2.3.3 Gradient de la contrainte

Selon Brand [13], il est possible de rendre compte très correctement de l’effet d’échelle qu’il observe effectivement, en utilisant le gradient de contrainte à fond d’entaille :

$$\chi = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dx}$$

Après avoir analysé un grand nombre de données de fatigue obtenues sur éprouvettes lisses ou entaillées en acier, l’auteur montre que l’on peut écrire :

$$\hat{\sigma}_D = K_t \sigma_D = a \lg \chi + b$$

formule dans laquelle $\hat{\sigma}_D$ est la limite d’endurance réelle purement alternée et σ_D la limite de fatigue (exprimée en contrainte nominale) de l’éprouvette lisse pour la sollicitation considérée ; *a* et *b* sont des constantes qui ne dépendent que de la résistance à la rupture de l’acier considéré.

Le tableau 4 donne les valeurs des constantes de la relation, qui correspondent à 90 % de probabilité de survie.

Tableau 4 – Valeurs des coefficients *a* et *b* servant au calcul de $\hat{\sigma}_D$ suivant la classe utilisée (selon Brand [13])

Classe	(<i>R_m</i> en MPa)	<i>a</i>	<i>b</i>
acier	<i>R_m</i> ≥ 1 400	100/3	655
	1 200 ≤ <i>R_m</i> < 1 400	110/3	585
	1 000 ≤ <i>R_m</i> < 1 200	120/3	520
	900 ≤ <i>R_m</i> < 1 000	130/3	465
	800 ≤ <i>R_m</i> < 900	130/3	430
	700 ≤ <i>R_m</i> < 800	135/3	390
	600 ≤ <i>R_m</i> < 700	135/3	335
	500 ≤ <i>R_m</i> < 600	140/3	295
	400 ≤ <i>R_m</i> < 500	140/3	245
	<i>R_m</i> < 400	140/3	195
acier moulé	350 ≤ <i>R_m</i> < 500	140/3	180
	<i>R_m</i> < 350	140/3	135

2.2.4 Approche « épaisseur de la couche critique »

Les divers critères de fatigue multiaxiale utilisant le couple des paramètres, amplitude de cisaillement et pression hydrostatique maximale, semblent bien rendre compte du comportement réel des pièces en sollicitations multiaxiales, mais rencontrent une difficulté quand les chargements ou les géométries engendrent de forts gradients de contraintes dans les pièces. Des travaux ont été menés au CETIM pour intégrer la notion de gradient de contraintes au critère de fatigue [26].

Le comportement en fatigue d’un matériau ne peut, en effet, s’expliquer par la seule observation de l’état de contrainte en un point du matériau. La nature hétérogène des métaux et la répartition des contraintes sous la surface où s’amorce la fissure de fatigue doivent intervenir dans tout processus d’endommagement par fatigue. Il apparaît donc judicieux de faire porter le calcul sur un élément de volume suffisant pour représenter le comportement réel du matériau, d’où l’idée d’un volume ou d’une distance caractéristique du matériau.

En 1954, Stieler [27] a proposé la notion de **couche critique** pour rendre compte du phénomène d’adaptation à fond d’entaille et de l’évolution de la tenue en fatigue d’éprouvettes entaillées. En 1979, par une approche mécanique de la rupture, Devaux et ses collaborateurs [28] ont montré qu’on pouvait prévoir l’amorçage à partir d’un critère faisant intervenir une distance caractéristique du matériau (distance *d* du fond d’entaille (§ 2.3.3)). Par ailleurs, Mataka

et Imai [29] ont exploité des résultats d'essais de flexion-torsion à l'aide du critère de Findley [30], en effectuant le calcul de la valeur moyenne des contraintes sur une épaisseur égale à la moitié de la dimension des grains. Ils ont également démontré la nécessité de considérer l'état de contrainte dans un élément de volume suffisant ou à une distance déterminée de la surface.

Ces différents travaux montrent, à partir d'approches très différentes, qu'on doit pouvoir déterminer, pour chaque matériau, une **épaisseur de couche critique** e_{cc} , caractéristique à partir de laquelle s'effectueront les calculs.

Pour mettre en évidence l'existence d'une épaisseur de couche critique, plusieurs séries de résultats d'essais de fatigue en traction-compression sur éprouvettes cylindriques entaillées [26] ont été exploitées à partir des critères de Dang Van et de Crossland. Pour chaque géométrie, un calcul élastique par éléments finis a permis de suivre l'évolution des contraintes principales, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, dans l'épaisseur des éprouvettes. Dans le cas du critère de Dang Van, on calcule les répartitions de l'amplitude maximale du cisaillement τ_a et de la pression hydrostatique maximale p_{max} en fonction de la profondeur.

Dans le cas des chargements d'amplitude constante auxquels étaient soumises les éprouvettes, τ_a et p_{max} sont données par les relations :

$$\tau_a = \frac{\tau_{1a} - \tau_{3a}}{2}$$

$$p_{max} = \frac{\sigma_{1max} + \sigma_{2max} + \sigma_{3max}}{3}$$

avec τ_{1a} et τ_{3a} amplitudes des deux contraintes principales extrêmes,
 $\sigma_{1max}, \sigma_{2max}, \sigma_{3max}$ valeurs maximales des trois contraintes principales lors du cycle en fatigue.

Pour disposer d'une répartition très précise de la contrainte dans les couches superficielles, la taille des mailles utilisée pour le calcul par éléments finis était très réduite, de l'ordre de 7 à 15 μm suivant les cas.

Lorsqu'on porte sur un diagramme, $\tau_a - p_{max}$, les valeurs calculées à la surface de l'éprouvette (c'est-à-dire à fond d'entaille), on obtient les courbes de la figure 16. On observe sur cette figure que, pour chaque géométrie, les points expérimentaux suivent assez bien une relation linéaire entre τ_a et p_{max} .

Le critère de Dang Van semble donc rendre compte correctement des résultats expérimentaux, mais il ne peut être considéré comme un critère intrinsèque puisque la relation $\tau_a - p_{max}$ dépend de la géométrie et donc du coefficient de facteur de concentration local. Cela rend difficilement utilisable un tel critère pour un calcul automatique de la résistance en fatigue par la méthode des éléments finis.

Si, au lieu d'utiliser les valeurs de τ_a et p_{max} calculées à la surface de la pièce, on reporte, sur le diagramme $\tau_a - p_{max}$, les valeurs calculées (τ_a^*, p_{max}^*) à une profondeur judicieusement choisie appelée **épaisseur de couche critique** e_{cc} et qui dépend de chaque matériau (par exemple 50 μm pour l'acier 35CD4 ; $R_m = 1\ 000$ MPa), on constate que les points expérimentaux se regroupent et s'alignent suivant une seule droite, quelle que soit la géométrie des éprouvettes. Cette droite correspond à la relation de comportement du matériau en absence d'entaille (figure 17). Les points qui ne s'alignent pas sur la droite sont les résultats expérimentaux pour lesquels le calcul conduit à un dépassement de la limite d'élasticité à fond d'entaille et pour lesquels la contrainte équivalente σ_{eq} selon Mises est supérieure à la limite d'élasticité R_e cyclique.

Pour tenir compte de la nature des matériaux et des mécanismes physiques qui se produisent lors de l'amorçage et en particulier si on imagine le cisaillement des plans cristallographiques dans un grain de métal, les auteurs [26] utilisent des valeurs moyennes $\bar{\tau}_a$ de l'amplitude de cisaillement et \bar{p}_{max} de la pression hydrostatique sur l'épaisseur de l'élément de volume. En retraçant le diagramme $\tau_a - p_{max}$, en utilisant les valeurs moyennes $\bar{\tau}_a$ et \bar{p}_{max} (figure 18) et

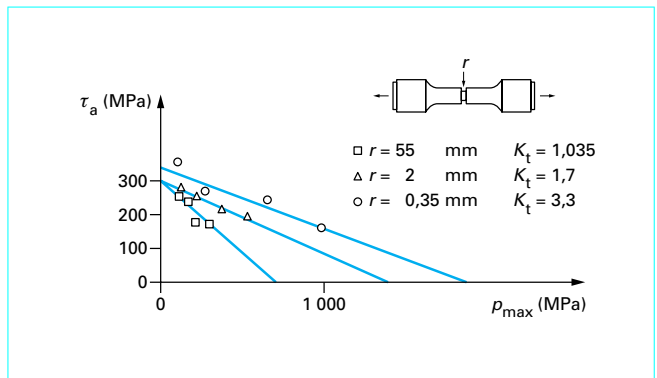


Figure 16 – Diagramme $\tau_a - p_{max}$, pour l'acier 35CD4 ($R_m = 1\ 000$ MPa), obtenu avec les valeurs des contraintes calculées à la surface, à la limite de fatigue. Calcul élastique

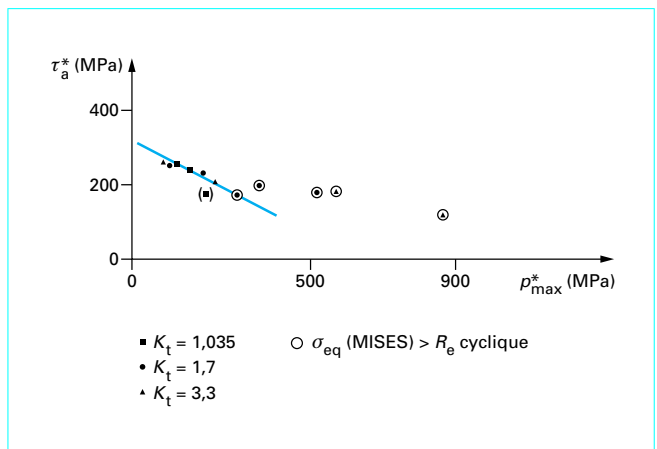


Figure 17 – Diagramme $\tau_a^* - p_{max}^*$ pour l'acier 35CD4 ($R_m = 1\ 000$ MPa), pour des valeurs de contraintes calculées à $e_{cc} = 50\ \mu m$ de profondeur. Calcul élastique

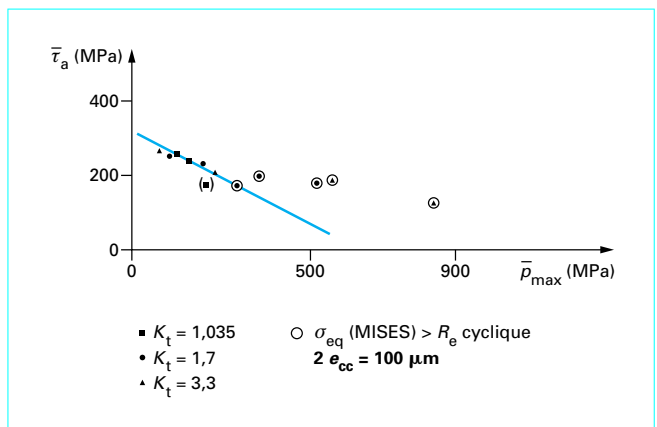


Figure 18 – Diagramme $\bar{\tau}_a - \bar{p}_{max}$ obtenu avec les valeurs moyennes calculées sur l'épaisseur de couche critique. Calcul élastique

en recherchant l'épaisseur de l'élément de volume qui conduit au meilleur alignement des points, on obtient une couche critique du matériau.

On peut améliorer la rigueur de la détermination de la couche critique en traçant le diagramme $\tau_a - p_{\max}$ pour différentes épaisseurs et en recherchant celle qui conduit au meilleur coefficient de corrélation (ρ) et au minimum de la variance (σ^2) de la régression linéaire $\tau_a - p_{\max}$ (figure 19). Ce traitement est purement mathématique, sans signification physique. Mais, on peut penser que la valeur optimale de l'épaisseur de la couche critique correspond statistiquement à un état représentatif de microstructure (la taille et l'orientation des grains) du matériau étudié.

Lorsque l'on utilise les valeurs moyennes $\bar{\tau}_a$ et \bar{p}_{\max} , on définira l'épaisseur de couche critique comme la demi-épaisseur de l'élément de volume pour laquelle l'ensemble des points expérimentaux s'alignent au milieu des points représentatifs des essais de fatigue en absence de concentration de contraintes.

Les valeurs obtenues sont très différentes suivant les matériaux étudiés. L'épaisseur de couche critique calculée évolue avec la structure métallurgique ; pour un acier XC38 à l'état recuit, l'épaisseur de couche critique de 70 μm est plus élevée que celle des aciers trempés revenus 35CD4 et 35CND16 pour lesquels la structure métallurgique est plus fine. Pour l'acier 35CD4 traité pour $R_m = 1\,500\text{ MPa}$, on notera que la couche critique (40 μm) est plus faible que pour le même acier traité pour $R_m = 1\,000\text{ MPa}$ (50 μm).

Il apparaît normal que la notion de couche critique, mise en évidence ici, évolue avec la structure métallurgique. Stieler avait déjà indiqué que cette couche critique devait être de l'ordre de grandeur d'un grain, ce qui paraît justifié si l'on imagine que le glissement doit intervenir sur un grain au moins pour créer l'endommagement initial.

J.F. Flavenot et J. Lu [31] ont effectué une étude sur l'effet de grossseur du grain sur l'épaisseur de la couche critique d'un acier XC10 avec une grosseur de grain respective de 39 μm et 150 μm . Le tableau 5 montre l'épaisseur de la couche critique pour les deux matériaux étudiés. On voit que plus la grosseur du grain est importante, plus le rapport entre l'épaisseur de la couche critique et la grosseur de grain est faible. On observe cependant une augmentation de la couche critique quand la grosseur de grain est plus importante.

Tableau 5 – Épaisseur de la couche critique pour les différentes grosseurs de grain			
Matériau	Grosseur de grain G	Épaisseur de la couche critique e_{cc}	e_{cc}/G
Grain gros .	150 μm	83 μm	0,55
Grain fin . . .	39 μm	60 μm	1,54

Si on considère les résultats obtenus sur les éprouvettes entaillées avec une contrainte moyenne de traction importante, la profondeur de la couche critique devient 350 μm pour les deux grosseurs de grain en prenant la définition de la couche critique vis-à-vis de la droite de référence. La théorie de la couche critique n'est pas valable pour des cas où il y a une grande plastification due à la traction qui doit créer des contraintes résiduelles de compression importantes dans l'entaille. Il faut donc prendre en compte ce phénomène. Pour cela, les calculs sont beaucoup plus compliqués. Ils font intervenir des problèmes de modélisation de la création des contraintes résiduelles et de leur relaxation pendant la fatigue.

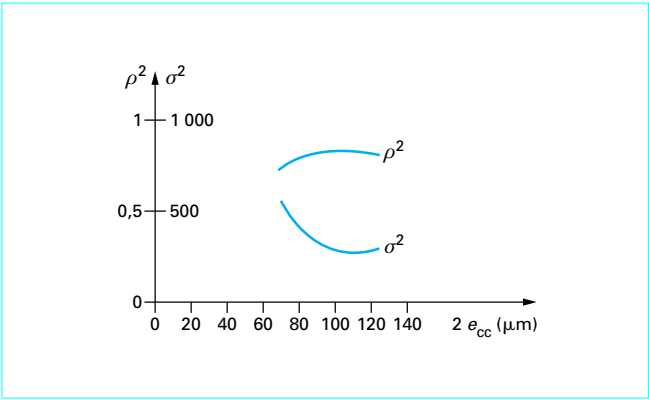


Figure 19 – Détermination de l'épaisseur de couche critique pour l'acier 35CD4 ($R_m = 1\,000\text{ MPa}$) à l'aide du coefficient de corrélation ρ et de la variance σ^2

2.3 Approche par la mécanique de la rupture

Utilisant les concepts de la mécanique de la rupture, plusieurs auteurs [32] [33] [34] [35] [36] [37] [38] [39] [40] ont montré que le comportement en fatigue des pièces entaillées dépendait de l'acuité de celles-ci et ils ont proposé des expressions particulières pour le coefficient de concentration de contrainte.

2.3.1 Entailles aiguës

Dans ce cas, des fissures peuvent s'amorcer à fond d'entaille, croître d'une certaine longueur puis s'arrêter. En terme de mécanique de la rupture, le facteur d'intensité de contrainte efficace ΔK_{eff} :

$$\Delta K_{\text{eff}} = K_{\text{max}} - K_{\text{min}}$$

ou

$$\Delta K_{\text{eff}} = K_{\text{max}} - K_{\text{op}}$$

quand $K_{\text{min}} \leq K_{\text{op}}$ (K_{op} étant le facteur d'intensité de contrainte d'ouverture de fissure).

Ce facteur ΔK_{eff} , correspondant à une fissure, présente dans une entaille aiguë, commence par décroître avant de croître lorsque la longueur de la fissure augmente. Dans cette situation, le niveau de la contrainte appliquée peut conduire à amorcer une fissure mais être insuffisant pour causer la propagation de celle-ci jusqu'à la rupture de la pièce.

L'expression générale du facteur effectif de concentration de contraintes K_f correspondant à une entaille aiguë est basée sur la mécanique de la rupture appliquée aux fissures courtes :

$$K_f = \Delta S_e \left(\frac{1 + \sqrt{D/a_0}}{FE\Delta\epsilon_e} \right)$$

- avec ΔS_e étendue de contraintes correspondant à la limite d'endurance d'une éprouvette lisse,
- $\Delta\epsilon_e$ étendue de déformation élastique correspondant à la limite d'endurance,
- D profondeur de l'entaille,
- F facteur de correction de surface libre pour une fissure débouchante (pris égal à 1,12).

a_0 est un paramètre de longueur :

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\Delta K_s}{C E \Delta \varepsilon_e} \right)^2$$

avec ΔK_s seuil de non-fissuration,
 C facteur de forme de la fissure pris égal à 0,71

Il apparaît un accord raisonnable entre les résultats expérimentaux et la prédiction donnée par l'équation précédente [41].

2.3.2 Entailles émoussées

Pour des entailles émoussées à partir desquelles des fissures non propagées n'apparaissent pas, ΔK_{eff} croît avec la longueur de la fissure. Dans le cas d'un chargement alterné, tant que la déformation à fond d'entaille reste élastique au niveau de la limite d'endurance, K_f s'écrit, suivant Neuber :

$$K_f = K_t \sqrt{\Delta S_e / (\Delta \varepsilon_e E)}$$

Le rayon critique à fond d'entaille, ρ_{cr} , qui sépare les entailles aiguës des entailles émoussées, est égal à environ 5,5 a_0 [37].

2.3.3 Critère $\Delta \sigma_{\theta\theta}$ à une distance d

Dans le cas de discontinuités géométriques entraînant une forte concentration des contraintes et un gradient abrupt, tels qu'on les trouve au niveau des raccordements des manchons thermiques des circuits primaires des centrales nucléaires PWR, Devaux et al. [28] [42] [43] proposent d'utiliser l'amplitude de la contrainte normale maximale $\Delta \sigma_{\theta\theta}$ à une certaine profondeur d comme critère d'amorçage en fatigue.

Depuis les travaux de Creager [44], on sait calculer les contraintes au voisinage d'une fissure émoussée de rayon à fond d'entaille ρ (figure 20). En particulier, on sait calculer la contrainte normale principale en fonction de la distance d du fond d'entaille. Dans le cas où la sollicitation est essentiellement en mode I (ouverture de fissure), $\sigma_{\theta\theta}(d)$ se confond avec $\sigma_{yy}(d)$ et, avec les conventions de la figure 20, on peut écrire :

$$\sigma_{\theta\theta}(d) = \sigma_{yy}(d) = \frac{K_I}{\sqrt{\pi d}} \frac{2 \left(1 + \frac{\rho}{d}\right)}{\left(2 + \frac{\rho}{d}\right)^{3/2}} \quad (13)$$

K_I étant le facteur d'intensité de contrainte en mode I :

$$K_I = \sigma_\infty \sqrt{\pi a}$$

avec a longueur de la fissure.

Sur la figure 21, on a représenté, en fonction de ρ/d , les variations de la quantité :

$$\sigma_{yy}(d) \left(\frac{\sqrt{\pi d}}{K_I} \right)$$

La courbe passe par un maximum égal à 0,77. La quantité :

$$0,77 \frac{K_I}{\sqrt{\pi d}} \quad (14)$$

constitue donc une borne supérieure de la contrainte $\sigma_{yy}(d)$. On voit qu'en utilisant cette borne supérieure, on se place du côté de la sécurité et on a éliminé le rayon ρ , à fond d'entaille, dont la valeur est incertaine, des calculs à venir. Il reste à déterminer la valeur de la distance d .

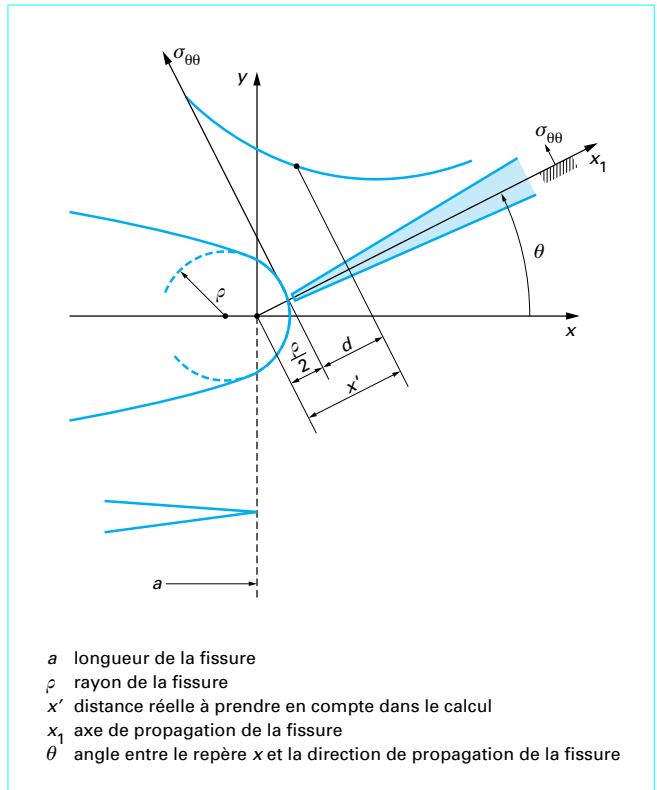


Figure 20 – Conventions géométriques adoptées par Creager [44] pour calculer les contraintes au voisinage d'une fissure émoussée

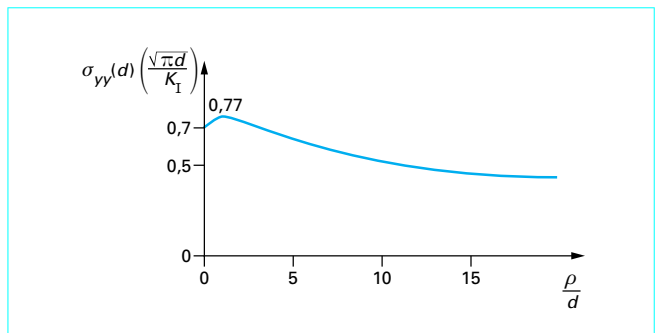


Figure 21 – Variations de la quantité $\sigma_{yy}(d) \left(\frac{\sqrt{\pi d}}{K_I} \right)$ en fonction de ρ/d

Pour ce faire, les auteurs ont réalisé des essais d'amorçage en fatigue sur des éprouvettes présentant des rayons à fond d'entaille compris entre 0,05 et 4 mm [45]. L'ajustement de la distance d se fait de la manière suivante :

— on représente les résultats d'essais dans un diagramme [$\lg \Delta \sigma_{\theta\theta}(d)$; $\lg N_a$];

— on cherche à représenter l'ensemble des résultats par une courbe d'équation :

$$\Delta \sigma_{\theta\theta}(d) = \sigma_0(d) N_a^{h(d)} \quad (15)$$

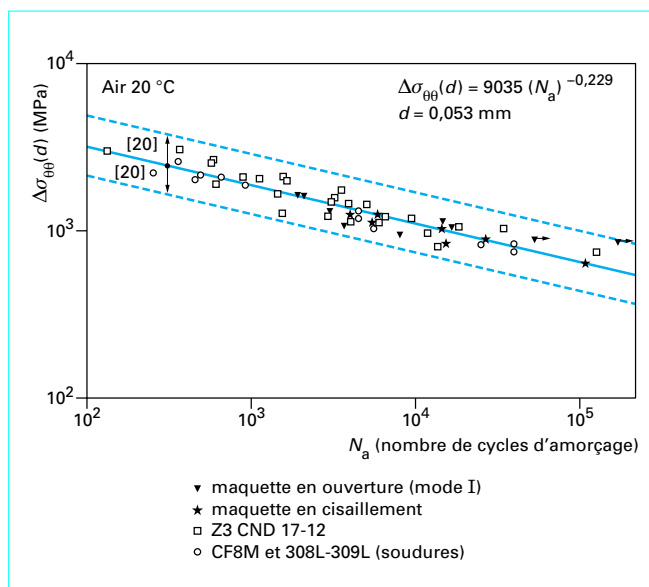


Figure 22 – Courbe de conception obtenue avec le critère $\Delta\sigma_{\theta\theta}(d)$ pour des constructions en aciers inoxydables austénitiques
(d'après [28] [42])

— pour chaque valeur de d , on calcule les constantes α_0 , et $n(d)$ et l'écart-type s de la dispersion des résultats expérimentaux autour de la courbe ajustée ;

— la valeur caractéristique de d est celle qui minimise l'écart-type s .

Ainsi, à la suite de nombreux essais sur aciers inoxydables, Devaux et al. [42] adoptent la valeur moyenne :

$$d = 0,053 \text{ mm}$$

Les auteurs en déduisent la « **courbe de conception** » de la figure 22, ainsi qu'une bande de dispersion permettant d'envisager l'étude de la fiabilité des constructions projetées. Cette courbe est établie dans un domaine réduit de nombres de cycles ($10^2 < N_a < 10^5$ cycles).

Pour la mise en application de la méthode, on distingue deux cas [46] :

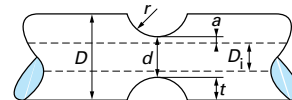
— celui pour lequel la géométrie du corps entaillé est suffisamment simple pour qu'on puisse calculer K_t ;

— celui pour lequel cela n'est pas possible ; on peut alors recourir à la méthode des éléments finis (MEF) pour évaluer la contrainte $\sigma_{\theta\theta}(d)$; le critère étant un critère élastique, le calcul ne sera pas trop onéreux.

Connaissant la « courbe de conception » et la distance caractéristique d correspondant à la famille de matériaux utilisés, on en déduit le nombre de cycles à l'amorçage.

3. Méthode de détermination de K_t

La détermination du coefficient de concentration de contraintes suppose la connaissance des contraintes nominales par les formules classiques, de la résistance des matériaux et celle de la contrainte réelle. Cette dernière valeur peut s'obtenir de plusieurs façons.



D_i diamètre interne de l'arbre

r rayon de la gorge

$$t = \frac{D - d}{2}$$

$$a = \frac{d - D_i}{2}$$

Figure 23 – Arbre creux avec gorge

3.1 Calcul analytique

Il est possible, par des méthodes analytiques raffinées et en faisant un certain nombre d'hypothèses simplificatrices, d'approcher la contrainte réelle à fond d'entaille. Les résultats obtenus sont relativement précis, mais l'utilisation de ces formules est assez complexe, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple : pour un arbre creux avec gorge en traction (figure 23), la formule analytique, d'après [1], est :

$$K_t = A + e^{-0,35 \frac{a}{t}}$$

$$A = 1 + \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(B-1)^2} + \frac{1}{(C-1)^2} + \frac{1}{(B'-1)^2} + \frac{1}{(F'-1)^2}}}$$

$$B = \frac{\alpha_1 - 2\beta}{1 - (\beta/Y)} + \frac{2Y - \alpha_1}{4(Y/\alpha_2) - 3(\alpha_1/Y)} ; C = 1 + \frac{2}{\sqrt{r/t}}$$

$$\alpha_1 = \frac{2XY^2}{Y^2 \arctan X + X} ; \alpha_2 = \frac{4}{3} \frac{X^3}{X + (X^2 - 1) \arctan X} ; \beta = \frac{\alpha_1 - Y}{(4Y/3\alpha_2) - 1}$$

$$X = \frac{1}{\sqrt{(r/t)(t/a)}} ; Y = \sqrt{\frac{1}{(r/t)(t/a)}} + 1$$

B' : même expression que B , avec :

$$X' = \sqrt{\frac{50}{(r/t)}} ; Y' = \sqrt{\frac{50}{(r/t)}} + 1$$

$$F' = \frac{X^2(Y + 0,8) + 1,3(Y + 1)}{X^2 + 0,6Y + 2}$$

Ce type de calcul est de plus en plus supplanté par les méthodes numériques (éléments finis, équations intégrales...) (cf. article *Méthode de calcul des structures élastiques* [55]). Elles permettent de couvrir tous les cas morphologiques et surtout elles sont presque les seules méthodes utilisables dans le cas tridimensionnel (arbres).

Il s'agit cependant de déterminer les contraintes maximales dans une zone où le gradient est très fort. La précision du résultat sera donc très étroitement liée à la finesse du maillage.

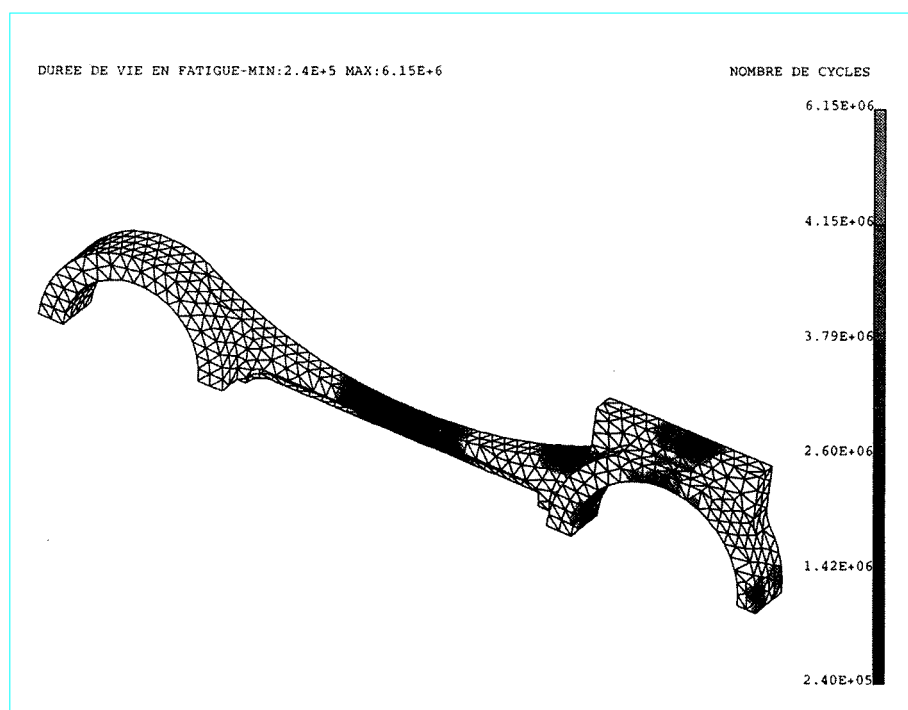


Figure 24 – Cartographie de durée de vie en fatigue d'une bielle [48]

3.2 Calcul numérique

Les calculs analytiques sont de moins en moins utilisés directement. À titre d'exemple, dans les années 70, le CETIM a sorti un guide contenant un nombre important d'abaques permettant de traiter des géométries simples. Avec le développement de la micro-informatique, ces calculs peuvent se faire directement à l'aide du logiciel CASTOR-RDM [4]. Ce logiciel est tout simplement la version micro-informatique des formules analytiques pour les différents types de géométries et de sollicitations. Mais, la grande difficulté est de pouvoir bien décomposer la pièce ou l'organe mécanique à analyser sous la forme d'une géométrie simple et trouver les sollicitations nominales correspondantes. Cela est de plus en plus difficile avec l'augmentation croissante de la complexité des pièces mécaniques. La solution numérique s'impose dans la majorité des cas. Deux possibilités s'offrent au concepteur.

■ La première consiste à utiliser les **outils de calculs numériques** comme la méthode des éléments finis pour trouver une valeur de K_t numérique et ensuite faire le calcul classique de fatigue. Cette première méthode est réalisable facilement si on dispose d'un programme de calcul des éléments finis. Il faut d'abord faire un calcul avec un maillage très grossier afin d'obtenir une contrainte moyenne sur la section critique.

■ La seconde est une **approche globale** permettant de calculer la cartographie de la durée de vie en fatigue, en incluant des paramètres comme la concentration de contraintes et les sollicitations multiaxiales. Cette deuxième démarche est plus compliquée, mais elle permet de faire un seul calcul pour évaluer la résistance à la fatigue [47] [48]. Avec une pièce de forme complexe comme une bielle ou un vilebrequin, cette technique sera nécessaire. La figure 24 donne un exemple de calcul de la durée de vie d'une bielle avec sa cartographie de durée de vie.

3.3 Méthodes expérimentales

La méthode de très loin la plus employée est la photoélasticité (cf. article *Photoélasticité* [56]). Elle permet, en utilisant une maquette en matériau photoélastique, de déterminer les contraintes réelles en ayant une visualisation complète du champ de contraintes. Ce point est fondamental si l'on se rappelle que le point où la contrainte est maximale et n'est pas connu *a priori*.

■ Certaines **précautions** sont à prendre, si l'on veut donner à la méthode toute son efficacité :

- réalisation très soignée de la maquette ;
- montage de mise en charge éliminant toute sollicitation parasite (figure 25).

■ Les **limites** de la méthode sont principalement :

- les difficultés de mise en œuvre dans les cas tridimensionnels ;
- le manque de précision dans certains cas (contraintes réelles très faibles par exemple).

S'agissant de mesures de contraintes réelles, il paraît tout naturel de songer aux **jauges résistives de déformation**. Il faut avoir présent à l'esprit que l'emploi de cette technique suppose la connaissance du point précis de contrainte maximale. D'autre part, une jauge occupe une certaine surface. Dans le cas de gradients importants, on mesurera la moyenne des contraintes sur cette surface et non la contrainte maximale. Elle reste malgré tout le moyen le plus précis de mesurer des contraintes. En résumé, l'**utilisation** de telles jauges dans la détermination des coefficients de concentration de contraintes suppose :

- la détermination préalable du point où la contrainte est maximale ;
- l'utilisation de petites jauges avec de grandes maquettes.

■ Il ne paraît pas inutile de **comparer les résultats** obtenus sur un même cas, à l'issue de ce survol des méthodes de détermination du

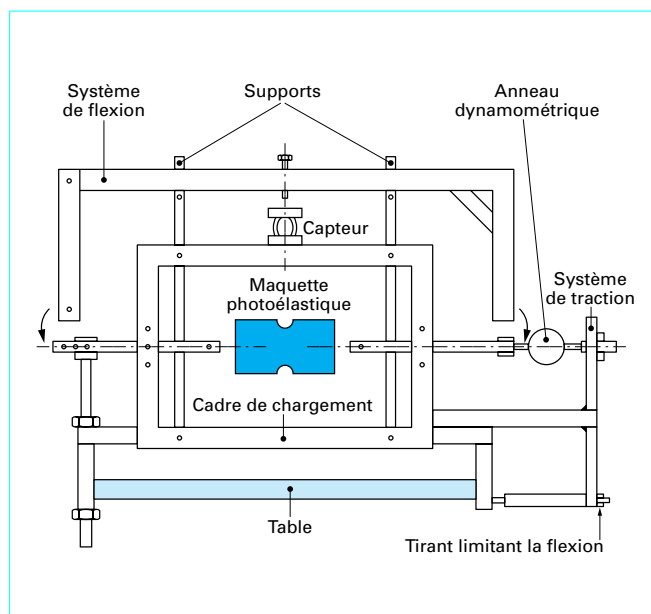


Figure 25 – Montage de mise en charge de maquettes photoélastiques

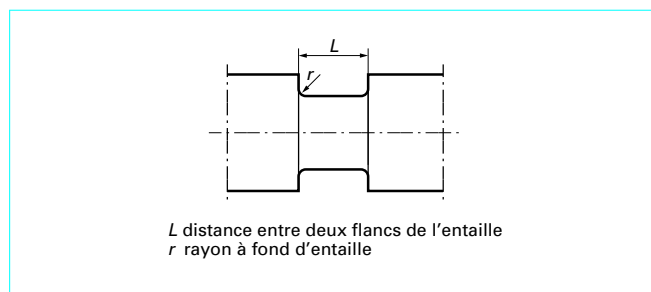


Figure 26 – Arbre avec gorge à fond plat

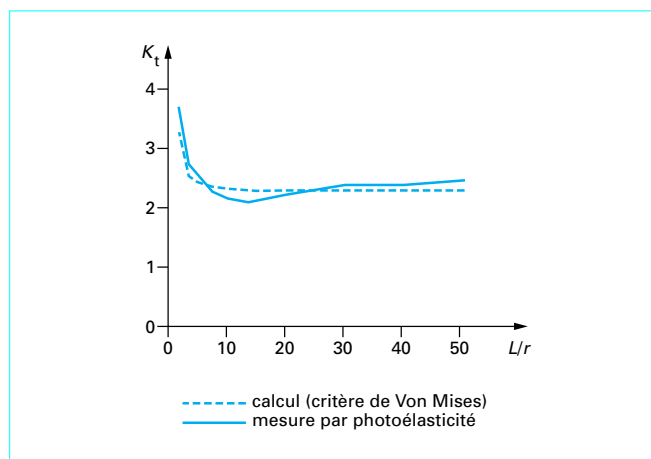


Figure 27 – Arbre avec gorge à fond plat : comparaison des contraintes mesurées et calculées

coefficient de concentration de contraintes. Pour ne pas tomber dans les généralités, nous l'avons fait sur un exemple précis : un arbre en traction avec une gorge à fond plat (figure 26).

La détermination de K_t a été faite par deux méthodes :

- calcul par éléments finis (application du critère de Von Mises) ;
- mesures par photoélasticité.

On observe des différences de plus de 10 % entre le résultat du calcul (contrainte équivalente) et la mesure (figure 27).

De la même façon, on peut trouver des différences très importantes d'un auteur à l'autre pour un même cas étudié avec la même technique.

Une **conclusion** essentielle est à tirer de ces constatations : le coefficient de concentration de contraintes est un outil peu précis. Il est illusoire d'espérer une précision supérieure à 10 %. Lorsqu'il est nécessaire de connaître avec précision la contrainte dans une zone de concentration, il faut la mesurer ou la calculer directement par une méthode numérique.

Autre remarque importante : compte tenu des difficultés de mesure ou de calcul des contraintes dans les entailles très aiguës, les coefficients de concentration de contraintes supérieurs à 6 n'ont plus grande signification ; la conception de la pièce est à revoir.

Avec le développement de l'informatique, des méthodes d'analyse automatique des données, la photoélasticimétrie redevient une technique intéressante. Car, dans ce cas, on peut analyser les problèmes de concentration de contraintes des pièces de formes très complexes comme un disque d'aube de turbines. L'autre point important est que cette technique permet d'étudier des zones critiques en dehors des zones surfaciques. Ces données sont donc très difficiles à obtenir avec les autres méthodes comme l'extensométrie, les techniques thermiques et les autres techniques optiques. Une des grandes difficultés de la photoélasticimétrie tridimensionnelle est la réalisation de maquettes 3D. Aujourd'hui, cette barrière est en train de sauter. En effet, grâce aux techniques de prototypage rapides [52] comme la stéréolithographie, on peut réaliser des maquettes en photopolymère de forme très complexe en quelques heures. Pour l'instant, la qualité optique de ces maquettes n'est pas encore excellente, mais on peut parier que cette technique se développera très rapidement. On utilise aussi cette technique pour réaliser des moules pour obtenir des maquettes.

4. Données existantes

4.1 Les données sur K_t

Nous donnons, en fin d'article, une bibliographie étendue sur les problèmes de concentration de contraintes. Nous croyons utile de commenter celle-ci afin que le lecteur puisse choisir rapidement et efficacement les documents qui lui seront nécessaires pour le calcul.

Le premier document étoffé, publié sur ces problèmes, est l'œuvre de Heinz Neuber dans les années cinquante [1]. C'est une étude théorique analytique qui, encore de nos jours, est une source très importante de données. Le coefficient de concentration de contraintes est déterminé par extrapolation de cas limites. Cet ouvrage, publié en allemand et traduit en anglais, est d'une utilisation très laborieuse. Ce n'est certainement pas un document pour les bureaux d'études. Insistons cependant sur le fait que la connaissance du phénomène de concentration de contraintes et la détermination des valeurs numériques doivent beaucoup à cet auteur.

Un ouvrage très important est celui de R.E. Peterson publié en 1974 [2]. Par l'ampleur de la bibliographie analysée et le nombre de cas traités, il est l'ouvrage le plus complet de ces dernières années. Cependant, son utilisation n'est pas toujours facile en raison du système de classement adopté et du type de graphique utilisé.

Une synthèse a été également réalisée en 1977 par une équipe du CETIM. Le résultat a été publié sous la forme d'un guide dans lequel les cas les plus intéressants sont traités. Ce document se veut avant tout clair et d'une utilisation très facile [3].

Le reste de la bibliographie est constitué d'une série d'articles techniques traitant de cas particuliers.

En conclusion de cette très brève analyse de la bibliographie, il faut faire trois **remarques importantes**.

- En général, il faut trois ou quatre paramètres pour définir complètement la forme et les dimensions d'une pièce entaillée. Or, un réseau de courbes dans le plan ne permet de prendre en compte que deux paramètres ; tous les auteurs utilisent donc des paramètres sans dimensions ; de ce point de vue, et compte tenu du développement des calculatrices de bureau, la formulation mathématique exacte est d'un grand intérêt en évitant toute approximation.
- Un certain nombre de cas morphologiques qui pourraient être utiles ne sont pas traités dans la littérature technique. Une partie de ces lacunes a été comblée depuis. En présence d'un cas réel, le concepteur est donc souvent amené à interpréter les données existantes, il paraît alors raisonnable de prendre plusieurs hypothèses d'interprétation et de les comparer.
- La dernière remarque est une mise en garde, car les résultats connus se rapportent presque toujours à des entailles non chargées (épaulement ne servant pas d'appui, rainure de clavette sans clavette, etc.) ; il n'est pas du tout certain que ces résultats soient utilisables pour une entaille chargée ; le développement des méthodes de calcul numérique devrait permettre de lever le doute.

4.2 Les données sur K_f

La valeur de K_f dépend considérablement de la nature des matériaux et de la géométrie des pièces. En plus, il dépend du nombre de cycles analysés. En effet, en fonction du nombre de cycles, le comportement cyclique peut être très différent. On trouvera dans la référence [49] un nombre important de cas traités.

4.3 La notion de l'épaisseur de la couche critique dans un calcul numérique de la résistance à la fatigue

À partir de résultats d'essais de fatigue en traction-compression sur éprouvettes entaillées [26], on a pu mettre en évidence, pour différents matériaux, l'existence d'une épaisseur de couche critique caractéristique de l'état structural. Le tableau 6 donne des exemples de la valeur de l'épaisseur de la couche critique. En introduisant ce paramètre dans des critères de fatigue multiaxiale, il est possible d'expliquer le comportement en fatigue des matériaux étudiés, soumis à des états de contraintes complexes en présence de gradient de contrainte. Dans un proche avenir, l'**épaisseur de couche critique**, reliée à un critère de fatigue applicable pour les chargements non proportionnels [50], devrait constituer un critère universel de fatigue à grand nombre de cycles pour des géométries et des chargements quelconques.

Tableau 6 – Exemples d'épaisseur de couche critique en fonction des matériaux et de leurs propriétés mécaniques			
Matériau	Traitement thermique	R_m (MPa)	e_{cc} (μm)
XC38	Recuit	585	70
35CD4	Trempe-revenu	915 1 000 1 500	50
35NCD16	Trempe-revenu	1 270	50
TA6V	Recuit 2 h à 730 °C	1 020	180
TA6VE2	Trempe-revenu	1 190	120
AU4G1	Trempe-revenu	480	40
AZ5GU	T7351	480	80
A7U4SG	T651	480	80

5. Exemples de calcul

5.1 Calcul en statique

Déterminer le facteur théorique de concentration de contraintes ainsi que les contraintes maximales correspondant aux points critiques de la chape, présentée figure 28, soumise à un chargement statique de traction P de 50 000 daN.

■ **Recherche des pièces types et formes d'entailles figurant dans le guide [3] et correspondant au problème posé**

Au point A, correspond le cas de la **chape en traction** (figure 29a).
 Aux points B et C, correspondent :
 — soit le cas de l'**arbre épaulé en traction** (figure 29b) ;
 soit le cas de la **plaque épaulée en traction** (figure 29c).

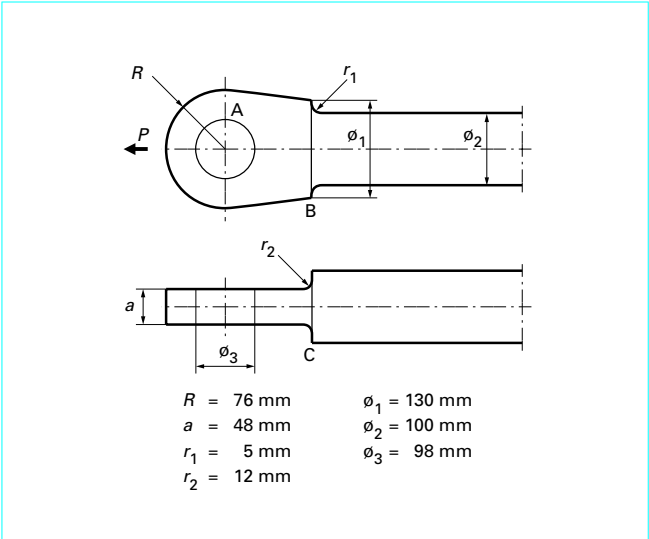
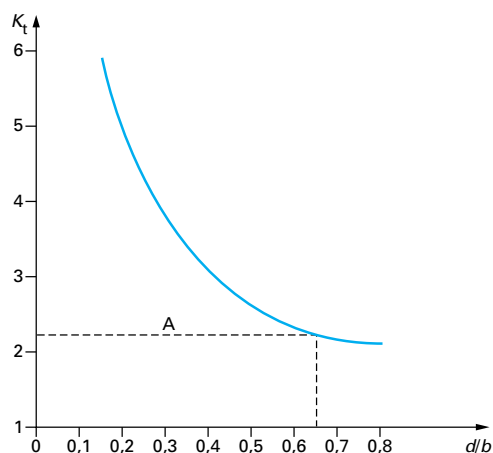
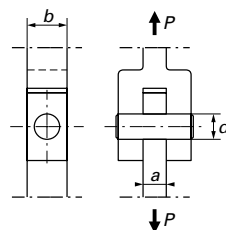


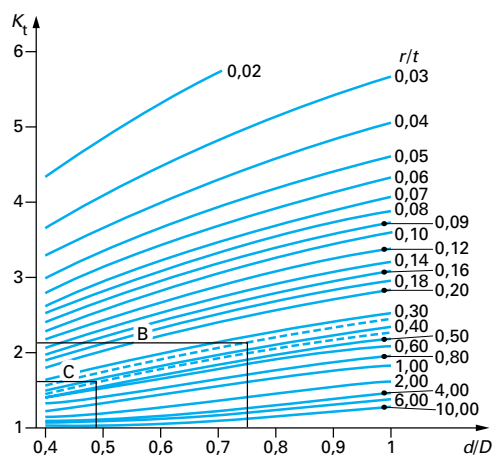
Figure 28 – Étude d'une chape



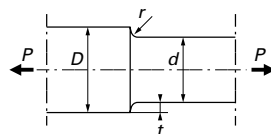
(a) chape en traction



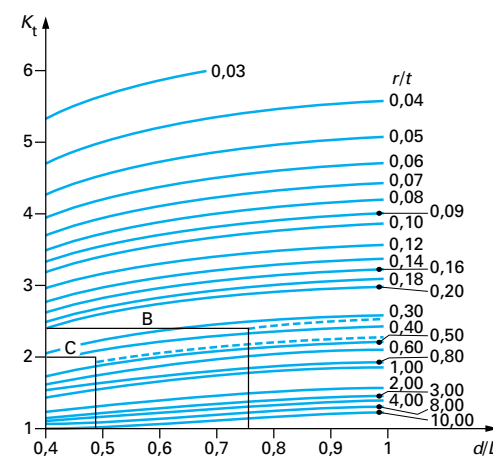
$$\sigma_{\text{nom}} = \frac{P}{(b-d)a}$$



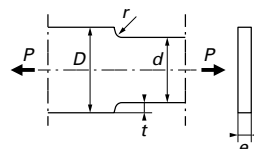
(b) arbre épaulé en traction



$$\sigma_{\text{nom}} = \frac{4P}{\pi d^2}$$



(c) plaque épaulée en traction



$$\sigma_{\text{nom}} = \frac{P}{ed}$$

Figure 29 – Document de base pour le calcul d'une chape en traction [3]

■ Calcul de K_t et $\sigma_{réelle}$ au point A

— identification des paramètres géométriques (chape figure 29a) :

$$P = 500\,000\text{ N} \quad b = 2R = 152\text{ mm} \\ a = 48\text{ mm} \quad d = \varnothing_3 = 98\text{ mm}$$

— détermination graphique de K_t :

$$\frac{d}{b} = \frac{98}{152} = 0,64$$

$$K_t = 2,2$$

— calcul de $\sigma_{réelle}$ (§ 1.3) :

$$\sigma_{nom} = \frac{P}{a(b-d)} = \frac{500\,000}{48(152-98)} = 193\text{ MPa}$$

$$\sigma_{réelle} = K_t \cdot \sigma_{nom} = 2,2 \times 193 = 424\text{ MPa}$$

■ Calcul de K_t et $\sigma_{réelle}$ au point B

— identification des paramètres géométriques (arbre épaulé figure 29b, plaque épaulée figure 29c) :

$$P = 500\,000\text{ N} \quad r = r_1 = 5\text{ mm} \\ d = \varnothing_2 = 100\text{ mm} \quad t = \frac{D-d}{2} = 15\text{ mm} \\ D = \varnothing_1 = 130\text{ mm}$$

— détermination graphique de K_t :

$$\frac{d}{D} = 0,77 ; \quad \frac{r}{t} = 0,33$$

$$K_t = 2,2 \text{ (arbre épaulé, figure 29b)}$$

$$K_t = 2,4 \text{ (plaque épaulée, figure 29c)}$$

— calcul de $\sigma_{réelle}$ (§ 1.3) :

$$\sigma_{nom} = \frac{4P}{\pi d^2} = \frac{4 \times 500\,000}{3,14 \times 100^2} = 63\text{ MPa}$$

$$\sigma_{réelle} = K_t \cdot \sigma_{nom} = 2,4 \times 63 = 150\text{ MPa}$$

■ Calcul de K_t et de $\sigma_{réelle}$ au point C

— identification des paramètres géométriques (arbre épaulé, figure 29b, plaque épaulée, figure 29c) :

$$D = \varnothing_2 = 100\text{ mm} \quad t = \frac{D-d}{2} = 26\text{ mm} \\ d = a = 48\text{ mm} \quad e = \varnothing_1 = 130\text{ mm} \\ r = r_2 = 12\text{ mm}$$

— détermination graphique de K_t :

$$\frac{d}{D} = \frac{48}{100} = 0,48 ; \quad \frac{r}{t} = \frac{12}{26} = 0,46$$

$$K_t = 1,6 \text{ (arbre épaulé, figure 29b)}$$

$$K_t = 2,0 \text{ (plaque épaulée, figure 29c)}$$

— calcul de $\sigma_{réelle}$ (§ 1.3) :

$$\sigma_{nom} = \frac{P}{ed} = \frac{500\,000}{48 \times 130} = 80\text{ MPa}$$

$$\sigma_{réelle} = K_t \cdot \sigma_{nom} = 2,0 \times 80 = 160\text{ MPa}$$

Pour le calcul de $\sigma_{réelle}$, on prendra toujours la valeur de K_t , c'est-à-dire celle correspondant au cas de la plaque épaulée.

À l'issue de cet exemple, on remarquera qu'aux plus grandes valeurs de K_t ne correspondent pas obligatoirement les plus fortes valeurs de contraintes.

5.2 Calcul en statique pour le cas des sollicitations composées

Dans la plupart des cas, la sollicitation réelle est la composante de plusieurs sollicitations élémentaires (traction + flexion + torsion). Il faut donc faire le calcul pour chacune des composantes et déterminer la contrainte équivalente réelle par un critère type Von Mises.

5.3 Calcul en fatigue

Soit l'arbre épaulé représenté figure 30 et travaillant en flexion rotative. Le matériau est un acier 35CD4 trempé-revenu pour obtenir une résistance à la traction $R_m = 1\,200\text{ MPa}$.

Le moment de flexion de travail étant égal à :

$$M = \pm 200\text{ m} \cdot \text{daN},$$

quelle est la valeur du coefficient de sécurité ?

■ Calcul de la contrainte de travail

Pour $M = 200\text{ m} \cdot \text{daN} = 2 \times 10^6\text{ mm} \cdot \text{N}$, on a (§ 1.3) :

$$\sigma = \frac{32M}{\pi d^3} = \frac{32 \times 2 \times 10^6}{\pi \times (64)^3} = 77,7\text{ MPa} \\ \sigma \approx 78\text{ MPa}$$

■ Calcul de la contrainte admissible limite

● **Rupture** : dans ce cas particulier de sollicitation purement alternée, le calcul de la résistance équivalente $R_{m1} = R_m/K_t$ est superflu puisqu'il ne sera pas nécessaire d'utiliser le diagramme d'endurance de Haigh [49].

● **Fatigue purement alternée** : le matériau ayant une résistance à la traction $R_m = 1\,200\text{ MPa}$, la limite de fatigue purement alternée en flexion rotative du matériau se calcule par la formule suivante [49] :

$$\sigma_{D0} = R_m(0,57 - 1,2 \times 10^{-4} R_m), \\ \sigma_{D0} = 1\,200(0,57 - 1,2 \times 10^{-4} \times 1\,200) = 511,2\text{ MPa}, \\ \sigma_{D0} \approx 510\text{ MPa}$$

● **Facteur d'échelle** K_e [49] : pour un diamètre $d = 64\text{ mm}$, l'abaque $K_e = f(d)$ (figure 31) conduit à une valeur :

$$K_e \approx 0,8$$

● **Facteur de concentration de contraintes** K_f : à l'aide des formules et abaques spécialisées (figures 30 et 32), on calcule, tout d'abord, la valeur du facteur théorique de concentration de contraintes K_t en flexion (que nous écrivons K_{tf}) :

$$K_{tf} \approx 3,0$$

Puis, pour cette valeur K_{tf} et une résistance à la traction $R_m = 1\,200\text{ MPa}$, l'abaque $K_f/K_t = f(R_m, K_t)$ conduit à une valeur $K_f/K_t \approx 0,825$ (figure 33), d'où :

$$K_f = 0,825 \times 3 = 2,475 \\ K_f \approx 2,5$$

● **Contrainte admissible** : en sollicitation de flexion rotative, la contrainte admissible se réduit à la valeur de :

$$\sigma_D = \sigma_{D0} \frac{K_e}{K_f}$$

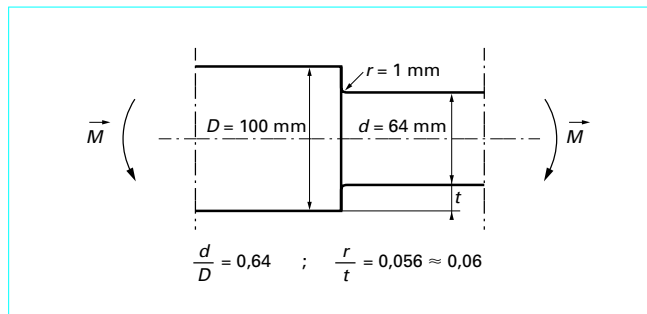


Figure 30 – Pièce étudiée travaillant en flexion rotative

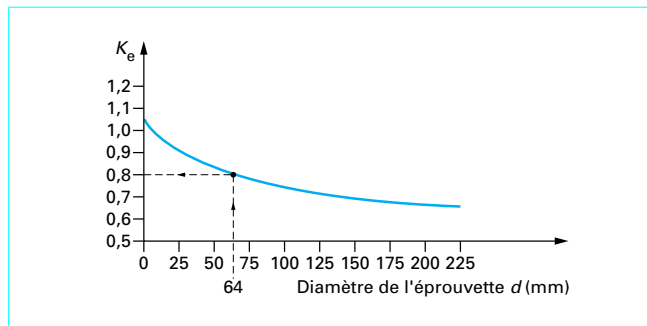


Figure 31 – Détermination du coefficient d'effet d'échelle K_e

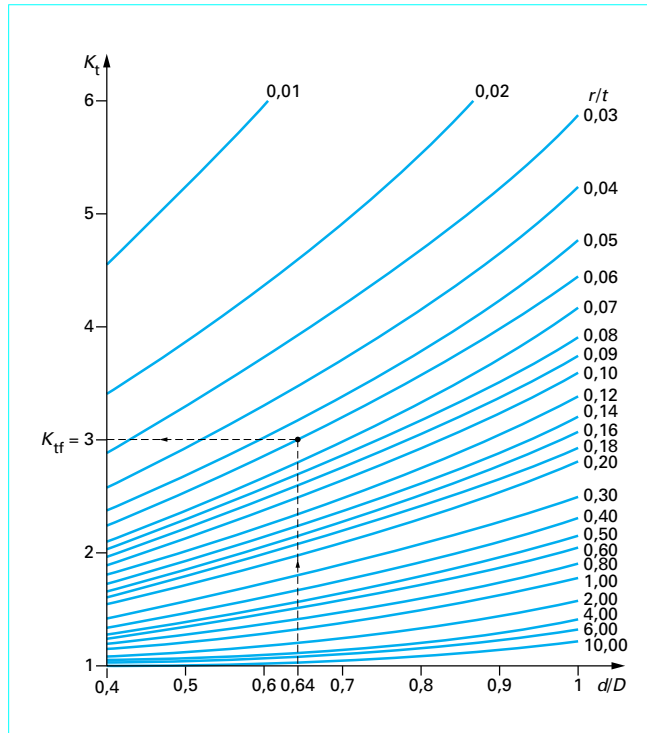


Figure 32 – Calcul du facteur théorique de concentration de contraintes K_t en flexion pour un arbre épaulé

soit :

$$\sigma_D = 511,2 \times \frac{0,8}{2,475} = 165,2 \text{ MPa}$$

$$\sigma_D \approx 165 \text{ MPa}$$

■ Calcul du coefficient de sécurité

Le coefficient de sécurité S est déterminé par le rapport de la contrainte alternée admissible σ_D à la contrainte alternée de travail σ :

$$S = \frac{\sigma_D}{\sigma} \approx \frac{165}{78} \approx 2,11$$

$$S \approx 2,11$$

5.4 Calcul analytique en fatigue sous sollicitation combinée

Supposons que l'arbre représenté figure 30 doive transmettre, en plus du moment de flexion $M = \pm 200 \text{ m} \cdot \text{daN}$ et un couple de torsion répété en phase Mt , tel que :

$$M_{t \min} = 0 \text{ et } M_{t \max} = 300 \text{ m} \cdot \text{daN}$$

et les valeurs moyennes M_{tm} :

$$M_{tm} = \frac{M_{t \max} + M_{t \min}}{2}$$

et alternée M_{ta} :

$$M_{ta} = \frac{M_{t \max} - M_{t \min}}{2}$$

qui, dans notre cas, sont identiques :

$$M_{tm} = M_{ta} = 150 \text{ m} \cdot \text{daN}$$

Quel est le **nouveau coefficient de sécurité** ?

■ Contraintes en présence

● Flexion :

$$\sigma_{mf} = 0$$

$$\sigma_{af} = 77,7 = 78 \text{ MPa (§ 5.3)}$$

● Torsion :

$$\tau_m = \frac{16 M_t}{\pi d^3} = 29,1 \approx 30 \text{ MPa}$$

$$\tau_a = \tau_m \approx 30 \text{ MPa}$$

■ Contraintes équivalentes de travail

● Contrainte moyenne équivalente :

$$\sigma_{m \text{ eq}} = (\sigma_{mf}^2 + 3\tau_m^2)^{1/2} = (0 + 3 \times 30^2)^{1/2} = 52 \text{ MPa}$$

● Contrainte alternée équivalente :

$$\sigma_{a \text{ eq}} = (\sigma_{mf}^2 + 3\tau_m^2)^{1/2} = (78^2 + 3 \times 30^2)^{1/2} = 93,7 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{a \text{ eq}} \approx 94 \text{ MPa}$$

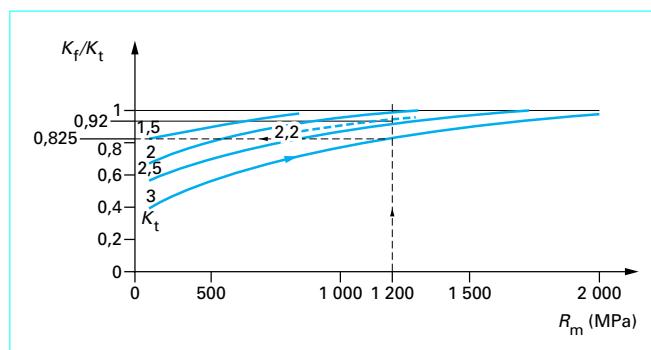
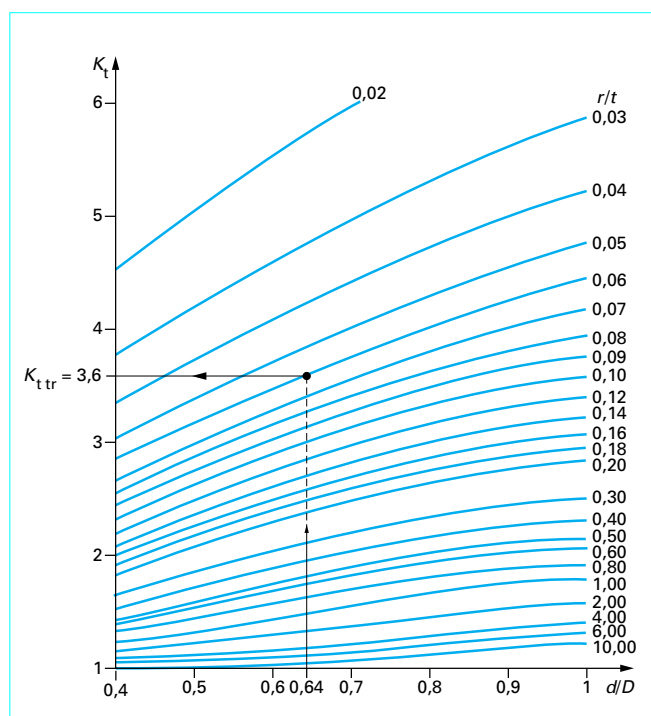
■ Rupture

On trouve sur les abaques des figures 32 à 35, respectivement (cf. figure 30) :

— K_t en flexion $\rightarrow K_{tf} = 3$;

— K_t en torsion $\rightarrow K_{tt} = 2,2$;

la contrainte moyenne équivalente étant : $\sigma_{m \text{ eq}} = 52 \text{ MPa}$.

Figure 33 – Détermination du rapport K_f/K_t Figure 34 – Calcul du facteur théorique de concentration de contrainte K_t en traction pour un arbre épaulé

● Facteur théorique de concentration de contrainte équivalent :

$$K_{t\text{eq}} = \left[\left(\frac{\sigma_{mf}}{\sigma_{m\text{eq}}} K_{tf} \right)^2 + 3 \left(\frac{\tau_m}{\sigma_{m\text{eq}}} \cdot K_{tt} \right)^2 \right]^{1/2}$$

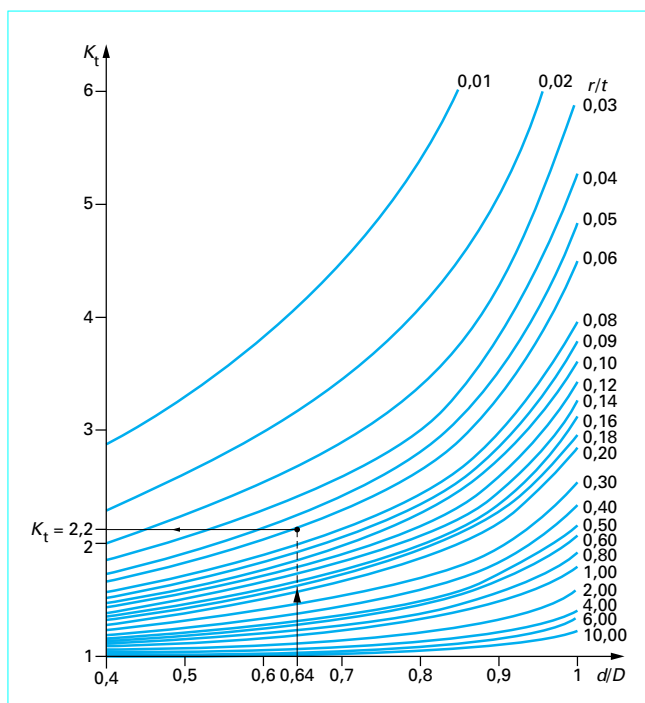
$$= [(0 \times 3)^2 + 3(0,578 \times 2,2)^2]^{1/2} = 2,20$$

● Contrainte de rupture équivalente :

$$R_{m\text{eq}} = \frac{R_m}{K_{t\text{eq}}} = \frac{1\,200}{2,20} = 545 \text{ MPa}$$

■ Fatigue purement alternée

- K_f en flexion ;
- $K_{ff} = 2,5$ (par l'intermédiaire de $K_{tf} = 3,0$) (cf. figure 32 et figure 33) ;

Figure 35 – Calcul du facteur théorique de concentration de contraintes K_t en torsion pour un arbre épaulé

— K_t en torsion $\rightarrow K_{ft} = 2,0$ (par l'intermédiaire de $K_{tt} = 2,2$).

$\sigma_{a\text{eq}} = 94 \text{ MPa}$.

Poids de la flexion : $\frac{\sigma_{af}}{\sigma_{a\text{eq}}} = \frac{78}{94} = 0,83$

Poids de la torsion : $\frac{\tau_a}{\sigma_{a\text{eq}}} = \frac{30}{94} = 0,32$

● Facteur effectif de concentration de contraintes :

$$K_{f\text{eq}} = \left[\left(\frac{\sigma_{af}}{\sigma_{a\text{eq}}} K_{ff} \right)^2 + 3 \left(\frac{\tau_a}{\sigma_{a\text{eq}}} K_{ft} \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$= [(0,83 \times 2,5)^2 + 3(0,32 \times 2)^2]^{1/2} = 2,35$$

● Contrainte de fatigue purement alternée équivalente :

$$\sigma_{D\text{eq}} = \sigma_{D0} \frac{K_e}{K_{f\text{eq}}} = \frac{511,2 \times 0,8}{2,35} = 174 \text{ MPa}$$

■ Contrainte admissible équivalente

Selon la méthode de constitution du diagramme de Haigh [49], on obtient :

$$\sigma_{a\text{eqadm}} = \frac{-c}{1-c} \sigma_{m\text{eq}} + \sigma_{D\text{eq}}$$

avec $c = \frac{1}{2} \frac{\sigma_{D\text{eq}}}{R_{m\text{eq}}} = \frac{1\,174}{2\,545} = 0,159$

$$\sigma_{a\text{eqadm}} = \frac{-0,159}{1-0,159} \sigma_{m\text{eq}} + 174 = -0,328 \sigma_{m\text{eq}} + 174$$

avec $\sigma_{m\text{eq}} = 52 \text{ MPa}$

$$\sigma_{a\text{eqadm}} = -0,328 \times 52 + 174 = 156,94 \text{ MPa}$$

● Calcul du coefficient de sécurité :

$$S = \frac{\sigma_{aeqadm}}{\sigma_{aeq}} = \frac{156,94}{94} = 1,67$$

5.5 Calcul en fatigue par calcul numérique

5.5.1 Effet combiné de l'entaille et de l'effet d'échelle

Les résultats de traction-compression obtenus par Kloos [51] sur un acier 38C4 trempé-revenu sont reportés dans le tableau 7.

On voit que pour $K_t = 1$, il n'y a pas d'effet d'échelle comme l'indique la bibliographie pour d'autres essais.

Tableau 7 – Effet d'échelle sur la limite d'endurance avec deux facteurs de concentration de contraintes K_t différents							
K_t	1	1	1	2	2	2	2
Diamètre d (mm)	4	10	16	4,63	7,71	13,89	21,6
σ_D (MPa)	370	370	370	255	240	220	200

Par contre, pour $K_t = 2$, il y a une différence assez importante de limite d'endurance. Plus le diamètre augmente, plus elle est faible.

La figure 36 montre les diagrammes de $K_e = f(d)$ pour les deux séries de pièces testées ($K_t = 1$ et $K_t = 2$).

La figure 37 montre les maillages utilisés pour les calculs des états de contraintes au fond de l'entaille pour différentes tailles de l'éprouvette.

La figure 38 montre les points expérimentaux, placés dans le diagramme de Dang Van, du matériau en utilisant les K_t nominaux des éprouvettes. On observe donc une différence assez importante pour le même $K_t = 2$ selon les diamètres D de l'éprouvette.

La figure 39 montre les résultats obtenus pour une couche critique de 150 μm à l'aide des calculs par la méthode des éléments finis. On voit que, dans ce cas, la dispersion est beaucoup plus faible.

On peut donc en conclure que dans le cas de la **traction-compression**, l'approche par la couche permet de prendre en compte à la fois l'effet d'échelle dû à l'effet de volume et un gradient de contraintes.

Le tableau 8 montre les résultats des essais de fatigue en **flexion rotative** avec des dimensions d'éprouvettes différentes.

Tableau 8 – Limite d'endurance en flexion de l'acier 38C4 trempé revenu en fonction de la dimension de l'éprouvette							
Diamètre (mm)	5,66	10	13,59	17,22	20	28,31	34,44
σ_D (MPa)	460	430	420	410	400	380	370

La figure 40 montre les résultats de flexion rotative sur un diagramme de Dang Van qui contient des points expérimentaux en traction-compression. On voit donc qu'il est difficile de tracer une droite pour le matériau. La figure 41 montre les résultats avec une couche critique de 150 μm . On voit que la dispersion a diminué dans ce cas, mais l'écart reste important.

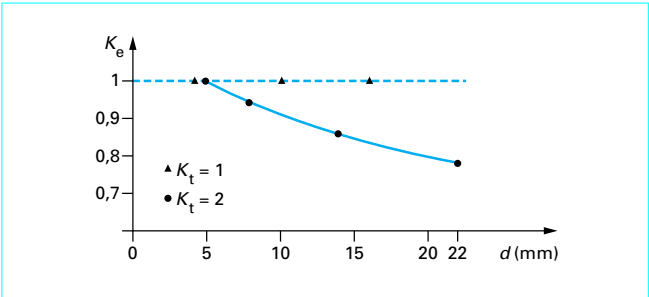


Figure 36 – Diagramme $K_e = f(d)$ pour l'acier 38C4 et deux facteurs de concentration de contraintes différents

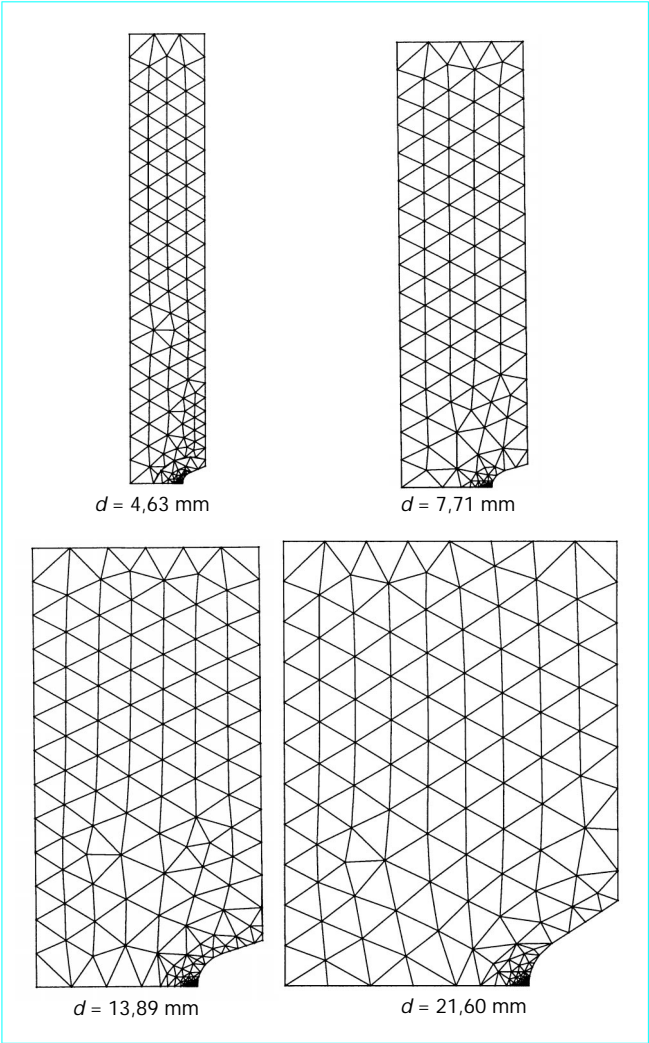


Figure 37 – Maillages utilisés pour des diamètres d'éprouvettes différents

On constate donc que l'approche de la couche critique atteint sa limite d'application. Elle ne permet pas de prendre totalement en compte l'effet de la dimension dans le cas de la flexion, tout en diminuant sensiblement la dispersion des résultats.2

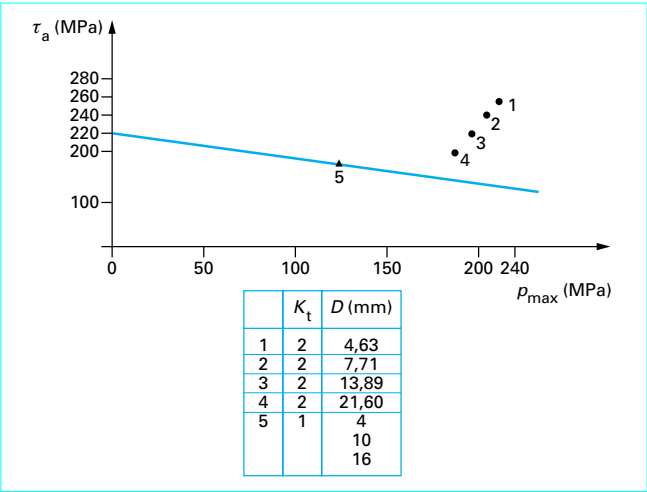


Figure 38 – Diagramme de Dang Van qui représente les points expérimentaux du matériau, obtenus sur des éprouvettes de traction-compression différentes

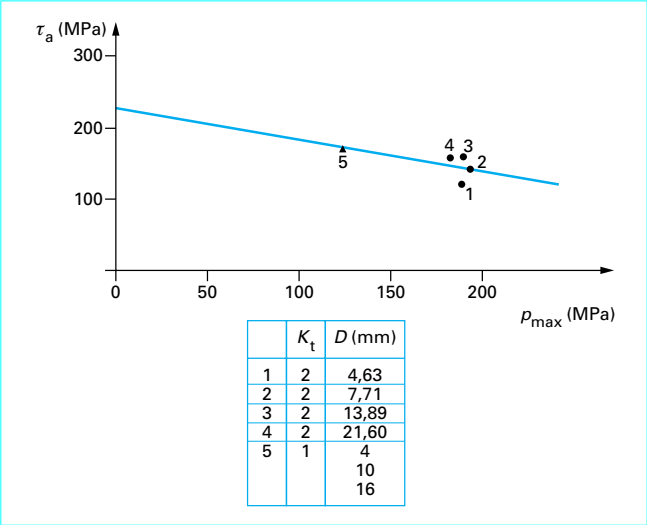


Figure 39 – Diagramme de Dang Van obtenu avec une épaisseur de couche critique de 150 μm sur des éprouvettes de traction-compression avec des K_t et des dimensions différentes

5.5.2 Conclusion sur l'effet d'échelle combiné avec l'effet de concentration de contrainte

La méthode de la couche critique associée au critère de Dang Van a été utilisée pour prendre en compte l'effet d'échelle combiné avec l'effet concentration de contrainte. Il semble qu'elle soit utilisable pour des chargements en traction-compression, mais les résultats sont moins probants sur des éprouvettes de flexion. Il faut noter que dans le cas de traction-compression, des éprouvettes entaillées avec un $K_t = 2$ ont été utilisées, de sorte que le facteur de la concentration de contraintes au fond de l'entaille et donc le gradient de contrainte sont importants. Par contre, dans le cas de la flexion, K_t est égal à 1 ; seul le gradient de contrainte dû à la dimension de la pièce est en jeu ; on a donc un gradient de contrainte faible. On peut donc penser que lorsque celui-ci est important, l'effet de volume peut être négligé et réciproquement.

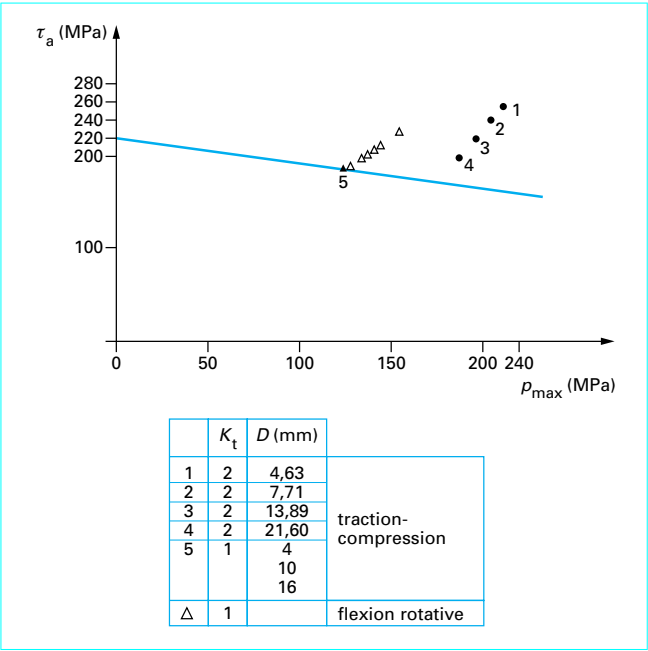


Figure 40 – Résultats en fatigue en flexion et en traction-compression pour des dimensions d'éprouvettes et des K_t différents placés dans un diagramme de Dang Van

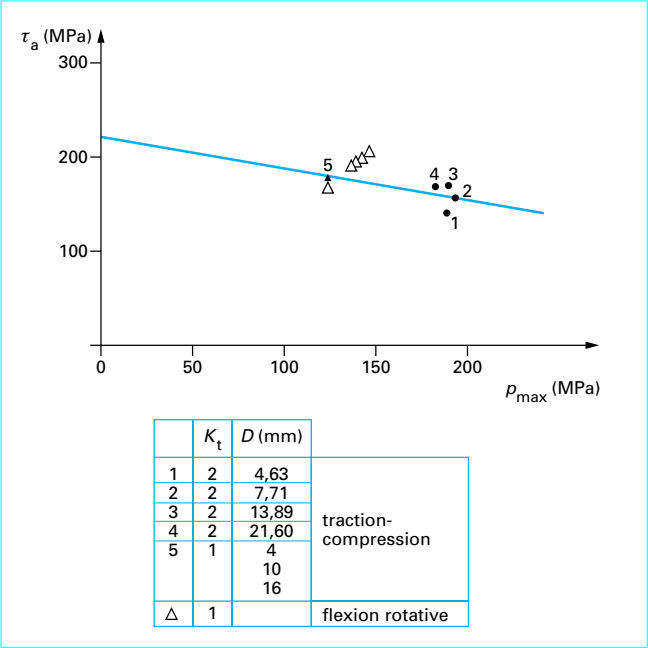


Figure 41 – Résultats en fatigue en flexion et en traction-compression pour des dimensions d'éprouvettes et des K_t différents placés dans un diagramme de Dang Van pour une épaisseur de la couche critique de 150 μm

Cette étude montre une nouvelle limitation de l'approche de la couche critique. Mais, on constate néanmoins qu'elle permet de diminuer considérablement la bande de la dispersion due à l'effet d'échelle.

Références bibliographiques

- [1] NEUBER (H.). – *Theory of notch stresses*. Office of Technical Services, 1961.
- [2] PETERSON (R.E.). – *Stress concentration factors*. John Wiley, 1974.
- [3] FAURIE (J.P.), MONNIER (P.) et NIKU-LARI (A.). – *Guide du dessinateur, les concentrations de contraintes*. CETIM, 1977.
- [4] CETIM-CASTOR-RdM.
- [5] Handbook of experimental Mechanics. SEM, Ed. by Kobayashi, 1990.
- [6] Encyclopédie d'analyse de contraintes, Vis-hay.
- [7] PARASKEVAS (D.). – *Examples of industrial analysis using a 3D fully automated photoelasticimeter (3D-CAPE). Technical and economical aspects. Link with the finite elements calculus*. Proceedings of the VII Int. Congress on Exp. Mech., SEM. Nashville, USA, juin 1996, p. 370-371.
- [8] CAZAUD (R.), POMEY (G.), RABBE (P.) et JANSSEN (Ch.). – *La fatigue des métaux*. Éd. Dunod, Paris, 1969.
- [9] NEUBER (H.). – *Theory of notch stresses*. J.W. Edwards Co., Ann Arbor, Mich., 1946.
- [10] HARRIS (W.J.). – *Metallic fatigue, international series of monographs in aeronautics and astronautics*. Pergamon Press, 1961.
- [11] Fatigue design Handbook. AE-10. The Engineering Society for advancing mobility land, sea, air and space, SAE, Warrendale, Pa (USA), 1988.
- [12] KUHN (P.) et HARDRATH (H.F.). – *An engineering method for estimating notch size effect in fatigue tests on steel*. NACA Technical Note, n° 2 805, 1952.
- [13] BRAND (A.) et SUTTERLIN (R.). – *Calcul des pièces à la fatigue, méthode du gradient*. Publication CETIM, Senlis, France, 1980.
- [14] LANDGRAF (R.W.), RICHARDS (F.D.) et LAPOINT (N.R.). – *Fatigue life predictions for a notched member under complex load histories. Fatigue under complex loading : analyses and experiments*. R.M. Wetzel, Editor, SAE Publications, 1977, p. 95-106.
- [15] DOWLING (N.E.), BROSE (W.R.) et WILSON (W.K.). – *Notched member fatigue life predictions by the local strain approach fatigue under complex loading : analysis and experiments*. R.M. Wetzel, Editor, SAE Publications, 1977, p. 55-84.
- [16] MOWBRAY (D.F.) et McCONNELCE (J.K.). – *Applications of finite element stress analysis and stress strain properties in determining notch fatigue specimen deformation and life*. ASTM STP 519, 1973, p. 151-169.
- [17] NEUBER (H.). – *Theory of stress concentration for shear strained prismatical bodies with arbitrary non-linear stress-strain law*. J. of Applied Res., 28, n° 4, 1961, p. 544.
- [18] NEUBER (H.). – *Theoretical determination of fatigue strength at stress concentration*. Air Force Materials Laboratory, Rapport AFML-tr-68-20, avril 1968.
- [19] STOWELL (E.). – *Stress and strain concentration at a circular hole in a infinite plate*. NACA-TN 2 073, 1950.
- [20] BAUS (A.), LIEURADE (H.P.), SANZ (G.) et TRUCHON (M.). – *Étude de l'amorçage des fissures de fatigue sur des éprouvettes en acier à très haute résistance possédant des défauts de formes et de dimensions différentes*. CIT du CDS, n° 1, 1978, p. 161-190.
- [21] SMITH (K.N.), WATSON (P.) et TOPPER (T.H.). – *A stress strain function for fatigue of metals*. Journal of materials, JMLSA, n° 4, déc. 1970, p. 767-778.
- [22] MOLSKI (K.) et GLINKA (G.). – *A method of elastic-plastic stress and strain calculation at a notch root*. Materials Science and Engineering, vol. 50, 1981, p. 93-100.
- [23] KUGUEL (R.). – *A relation between theoretical stress concentration factor and fatigue notch factor deduced from the concept of highly stressed volume*. Proceedings, ASTM, vol. 61, 1961, p. 732-748.
- [24] HAAGENSEN (P.J.), SLIND (T.) et OERJASAE-LER (O.). – *Scale effects in fatigue design data for welded and unwelded components*. OMAE, 1989.
- [25] CONLE (A.) et NOWAEK (H.). – *Verification of a Neuber-based notch analysis by the companion-specimen method*. Experimental Mechanics, fév. 1977, p. 57-63.
- [26] FLAVENOT (J.F.) et SKALLI (N.). – *L'épaisseur de couche critique ou une nouvelle approche du calcul des structures soumises à des sollicitations multi-axiales*. Mécanique, Matériaux, Électricité, n° 397, janv.-fév. 1983, p. 15-25.
- [27] STEILER (M.). – Thèse de Docteur Ingénieur 1954, Technische Kochsule Stuttgart, RFA
- [28] DEVAUX (J.C.), D'ESCATHA (Y.C.), RABBE (P.) et PELLISSIER-TANON (A.). – *A criterion for analysing fatigue crack initiation in geometrical singularities*. Paper G.8.1, 5th SMIRT, Berlin, 1979.
- [29] MATAKE (T.) et IMAI (Y.). – *Fatigue criterion for notched and unnotched specimens under combined stress state*. ZAIRYO, vol. 29, n° 325, 1980, p. 993-997.
- [30] FINDLEY (W.N.). – *Fatigue of metal under combinations of stresses*. Trans ASME, vol. 9, août 1959, p. 1337-1348.
- [31] FLAVENOT (J.F.) et LU (J.). – *The effect on grain size on the critical depth for evaluation of long-life fatigue strength using the critical depth criterion*. Proceeding of the 71st European Conf. On Fracture, Budapest, Hungary, Ed. by EMAS, sept. 1988, p. 1005-1007.
- [32] DUQUESNAY (D.L.), YU (M.T.) et TOPPER (T.H.). – *An analysis of notch-size effects at the fatigue limit*. ASTM J. Test. Eval., 16, 1988, p. 375-385.
- [33] EL HADDAD (M.H.), TOPPER (T.H.) et SMITH (K.N.). – *Prediction of non-propagating cracks*. Eng. Gract. Mech., 11, 1979, p. 573-584.
- [34] SMITH (R.A.) et MILLER (K.J.). – *Fatigue cracks at notches*. Int. J. Mech. Sci., 19, 1977, p. 11-22.
- [35] SMITH (R.A.) et MILLER (K.J.). – *Prediction of fatigue regimes in notched components*. Int. J. Mech. Sci., 20, 1978, p. 201-206.
- [36] HAMMOUDA (M.M.), SMITH (R.A.) et MILLER (K.J.). – *Elastic-plastic fracture mechanics for initiation and propagation of notch fatigue cracks*. Fatigue Eng. Mater. Struct., 2, 1979, p. 139-154.
- [37] DUQUESNAY (D.L.), TOPPER (T.H.) et YU (M.T.). – *The effect of notch radius on the fatigue notch factor and the propagation of short fatigue cracks*. In behaviour of short fatigue cracks. EGF Publication, n° 1, Ed. by K.J. Miller and E.R. De Los Rios, London, 1986, p. 323-335.
- [38] TOPPER (T.H.) et EL HADDAD (M.H.). – *Fatigue strength prediction of notches based on fracture mechanics*. In fatigue Thresholds. 1st Int. Conf. Stockholm, EMAS, Warley, U.K., vol. 2, 1981, p. 777-797.
- [39] YATES (J.R.) et BROWN (M.W.). – *Prediction of the length of non-propagating fatigue cracks*. Fatigue Fract. Eng. Mat. Struct., 10, 1987, p. 187-201.
- [40] MCEVILY (A.J.) et MINAKAWA (K.). – *On crack closure and the notch size effect in fatigue*. Eng. Fract. Mech., 28, 1987, p. 519-527.
- [41] YU (M.T.), DUQUESNAY (D.L.) et TOPPER (T.H.). – *Notched fatigue behaviour of two cold rolled steels*. Fatigue Fract. Eng. Struct., vol. 14, n° 1, 1991, p. 89-101.
- [42] D'ESCATHA (Y.C.), DEVAUX (J.C.), BERNARD (J.L.) et PELLISSIER-TANON (A.). – *Criterion for analysis fatigue crack initiation in geometrical singularities*. Int. Conf. on Pressure Vessel Technology, London, mai 1980, p. 211-222.
- [43] D'ESCATHA (Y.C.), AMZALLAG (C.), BATHIAS (C.), DEVAUX (J.C.), FONTILLAX (A.), PELLISSIER-TANON (A.), RABBE (P.), TAUPIN (B.), BILLON (F.), BROSSER (M.) et PONSOT (A.). – *Fatigue et rupture : applications aux structures*. Comptes rendus de la Conf. Mat. et Structures sous Chargement Cyclique, Palaiseau, 28-29 sept. 1978, p. 295-304.
- [44] CREAGER (M.). – *The elastic fields near the tip of a blunt crack*. Thesis Lehigh University, USA, 1966.
- [45] RABBE (P.) et AMZALLAG (C.). – *Étude de l'amorçage des fissures et de la vitesse de fissuration par fatigue de quelques aciers inoxydables austénitiques*. Revue de Métal, déc. 1974.
- [46] TRUCHON (M.). – *L'amorçage des fissures de fatigue à partir d'entailles*. Bulletin Technique du Bureau Véritas, mai 1985, p. 283.
- [47] AKRACHE (R.) et LU (J.). – *Prediction of fatigue life for three-dimensional structures by a finite element method*. MATTEC 96^e, IITT, Ed. by J. LU, mars 1996, p. 251-260.
- [48] AKRACHE (R.) et LU (J.). – *Fatigue life prediction for 3D structures*. Proceedings, Computational Plasticity, CIMNE, Barcelone, mars 1997.
- [49] BRAND (A.), FLAVENOT (J.F.), GREGOIRE (R.) et TOURNIER (C.). – *Recueil de données technologiques sur la fatigue*. CETIM, 1980.
- [50] LU (J.). – *Rôle des contraintes résiduelles sur la tenue des matériaux et prévision de la durée de vie en fatigue à grand nombre de cycles*. Thèse d'habilitation à diriger des recherches, Paris, 6 janv. 1993.
- [51] KLOOS. – *Influence de l'état de surface et de la dimension de la pièce sur la tenue en fatigue sous sollicitations avec l'amplitude constante ou par bloc*. VDI Berchte, n° 268, 1976.
- [52] WOOD (L.). – *Rapid Automated Prototyping : An Introduction*. Ed. by Industrial Press Inc., 1993.

Dans les Techniques de l'Ingénieur

- [53] POMEY (G.) et LIEURADE (H.P.). – *Essais de fatigue*. Traité Matériaux métalliques, M 130, 1982.
- [54] BRAND (A.). – *Fatigue des alliages ferreux. Approche classique*. Traité Génie mécanique, B 5 050, 1984.
- [55] COURBON (J.). – *Méthode de calcul des structures élastiques*. Traité Sciences fondamentales, A 330, 1980.
- [56] PARASKEVAS (D.). – *Photoélasticimétrie*. Traité Mesures et Contrôle, R 1870.

GAGNEZ DU TEMPS ET SÉCURISEZ VOS PROJETS EN UTILISANT UNE SOURCE ACTUALISÉE ET FIABLE

Techniques de l'Ingénieur propose la plus importante collection documentaire technique et scientifique en français !

Grâce à vos droits d'accès, retrouvez l'ensemble des **articles et fiches pratiques de votre offre**, **leurs compléments et mises à jour**, et bénéficiez des **services inclus**.



RÉDIGÉE ET VALIDÉE
PAR DES EXPERTS



MISE À JOUR
PERMANENTE



100 % COMPATIBLE
SUR TOUS SUPPORTS
NUMÉRIQUES



SERVICES INCLUS
DANS CHAQUE OFFRE

- + de 350 000 utilisateurs
- + de 10 000 articles de référence
- + de 80 offres
- 15 domaines d'expertise

- | | |
|---|---|
| <input type="radio"/> Automatique - Robotique | <input type="radio"/> Innovation |
| <input type="radio"/> Biomédical - Pharma | <input type="radio"/> Matériaux |
| <input type="radio"/> Construction et travaux publics | <input type="radio"/> Mécanique |
| <input type="radio"/> Électronique - Photonique | <input type="radio"/> Mesures - Analyses |
| <input type="radio"/> Énergies | <input type="radio"/> Procédés chimie - Bio - Agro |
| <input type="radio"/> Environnement - Sécurité | <input type="radio"/> Sciences fondamentales |
| <input type="radio"/> Génie industriel | <input type="radio"/> Technologies de l'information |
| <input type="radio"/> Ingénierie des transports | |

**Pour des offres toujours plus adaptées à votre métier,
découvrez les offres dédiées à votre secteur d'activité**

Depuis plus de 70 ans, Techniques de l'Ingénieur est la source d'informations de référence des bureaux d'études, de la R&D et de l'innovation.

www.techniques-ingenieur.fr

CONTACT : Tél. : + 33 (0)1 53 35 20 20 - Fax : +33 (0)1 53 26 79 18 - E-mail : infos.clients@teching.com

LES AVANTAGES ET SERVICES compris dans les offres Techniques de l'Ingénieur

ACCÈS



Accès illimité aux articles en HTML

Enrichis et mis à jour pendant toute la durée de la souscription



Téléchargement des articles au format PDF

Pour un usage en toute liberté



Consultation sur tous les supports numériques

Des contenus optimisés pour ordinateurs, tablettes et mobiles

SERVICES ET OUTILS PRATIQUES



Questions aux experts*

Les meilleurs experts techniques et scientifiques vous répondent



Articles Découverte

La possibilité de consulter des articles en dehors de votre offre



Dictionnaire technique multilingue

45 000 termes en français, anglais, espagnol et allemand



Archives

Technologies anciennes et versions antérieures des articles



Impression à la demande

Commandez les éditions papier de vos ressources documentaires



Alertes actualisations

Recevez par email toutes les nouveautés de vos ressources documentaires

*Questions aux experts est un service réservé aux entreprises, non proposé dans les offres écoles, universités ou pour tout autre organisme de formation.

ILS NOUS FONT CONFIANCE



www.techniques-ingenieur.fr

CONTACT : Tél. : + 33 (0)1 53 35 20 20 - Fax : +33 (0)1 53 26 79 18 - E-mail : infos.clients@teching.com