

# CF04

## Mécanique des fluides numérique et couplages multiphysiques

Emmanuel LEFRANÇOIS

Equipe Numérique

**Mots-clés :**

Mécanique des fluides, méthodes numériques, couplages multiphysiques

Laboratoire Roberval, UMR 7337 UTC-CNRS

<http://roberval.utc.fr>



## Septième partie

### Méthode *Volume Of Fluid* (VOF)

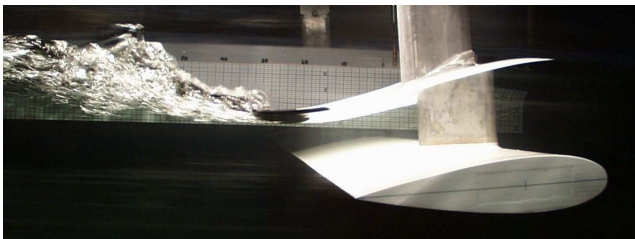
- 1 Brève introduction
- 2 Écoulements dans les canaux découverts
- 3 Origine de la méthode VOF : Hirt & Coll, 1981
- 4 Motivations et applications pour ce type d'approche
- 5 Théorie de l'approche VOF
- 6 Effets de tension de surface et cavitation
- 7 Mise en données numériques

# Section. 1

## Brève introduction

## 1.1. Principaux mots-clés

Les problématiques de mécanique des fluides associant deux phases, liquide et air sont monnaie courante. On définit l'interface comme la frontière séparant les deux phases.



*Ecoulement autour d'un hydrofoil (Source : CD-Adapco)*

Trois approches pour étudier les écoulements avec des suivis d'interface.

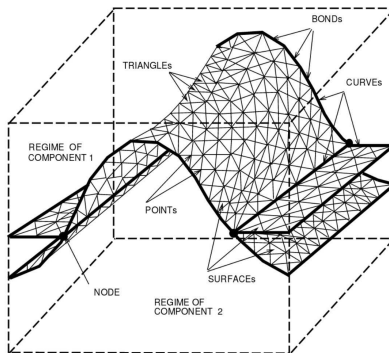
**Front Tracking**

**Level-Set**

**Volume Of Fluid**

## 1.2. Principales approches pour une capture d'interface

- la méthode de suivi de front mobile ou de *Front Tracking* (Harlow & Welch - 1965)

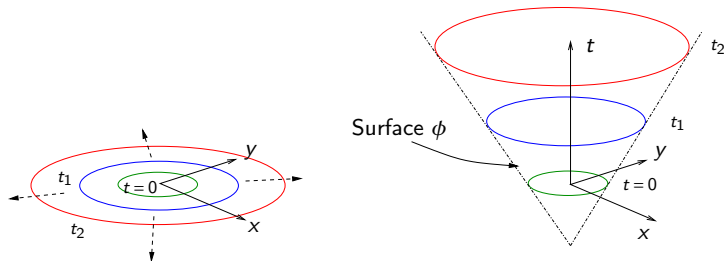


Source : Frontier++

1. Résolution classique des équations de NS pour chacune des phases,
2. Résolution d'une équation de transport pour  $\rho$  et  $\mu$  au niveau de l'interface.

## 1.2. Principales approches pour une capture d'interface

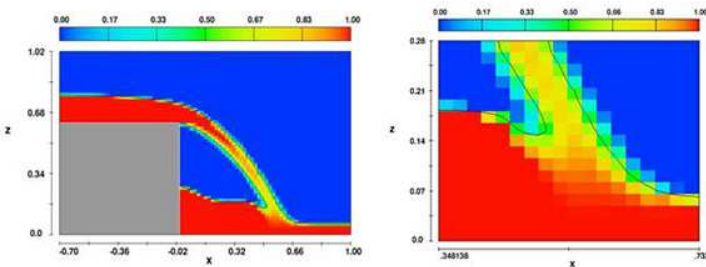
- ▶ la méthode *level-set* (Osher & Sethian, 1988)



1. Méthode s'appuyant sur la création d'une fonction  $\phi$  enveloppe dans  $(x, y, t)$ ,
2. La solution à un instant  $t$  est une courbe de niveau (plan de coupe de  $\phi$ ),
3. Bagage mathématique plus lourd...

## 1.2. Principales approches pour une capture d'interface

- ▶ la méthode *Volume Of Fluid* (Hirt & Nichols - 1981)



Source : Flow3D

1. Résolution des équations de NS pour une phase **unique moyennée**,
2. Définition de la fraction volumique  $0 \leq \alpha \leq 1$  associée à une équation de transport.



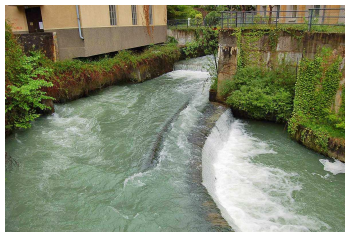
## Section. 2

### Écoulements dans les canaux découverts

## 2.1. Introduction

### Hydraulique fluviale :

- ▶ Écoulements à **surface libre** de l'eau,
- ▶ Théorie fondamentale pour la construction d'ouvrages hydraulique,
- ▶ Ouverts à la **pression atmosphérique**,
- ▶ Écoulements générés par **effets de pente/gravité**,
- ▶ Forme de la surface inconnue,



source : wikipedia (déversoir de crue)

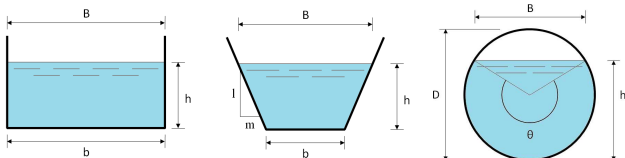
## 2.1. Introduction

- Écoulements rarement laminaires :

$$Re = \frac{U 4 R_H}{\nu} > 3000$$

avec pour *rayon hydraulique* :

$$R_H = \frac{\text{Surface mouillée}}{\text{Périmètre mouillé}} = \frac{1}{4} D_H.$$



Source : wikipedia

## 2.2. Nombre de Froude

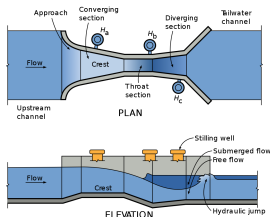
**Canaux ouverts** : caractérisés par

$$\text{Nombre de Froude : } Fr = \frac{V}{\sqrt{gh}} = \frac{\text{effets d'inertie}}{\text{effets hydrostatique}}$$

**Vitesse de propagation des ondes pour un observateur fixe :**  $V_w = V \pm \sqrt{gh}$ .

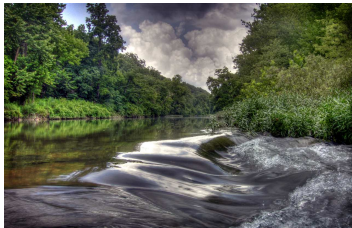
- ▶  $Fr < 1$  : régime subcritique (fluvial). Ondes se propagent vers l'amont et vers l'aval.
- ▶  $Fr = 1$  : régime critique (ressaut hydraulique). Caractère stationnaire des ondes.
- ▶  $Fr > 1$  : régime supercritique (torrentiel).

**Analogie totale entre les nombres de Mach et de Froude !**



Source : U.S. Soil Conservation Service

## 2.3. Illustrations



(a) Rivière



(b) Canal artificiel



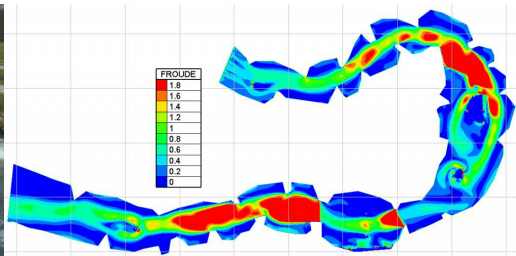
(c) Ouvrage civil



(d) Entrée égouts

## 2.3. Illustrations

### Optimisation hydraulique du stade d'eaux vives de Pau-Pyrénées



source : INP Toulouse /enseeiht (TELEMAC2D)

## 2.4. Ecoulements permanents

L'écoulement d'un canal est **uniforme** si :

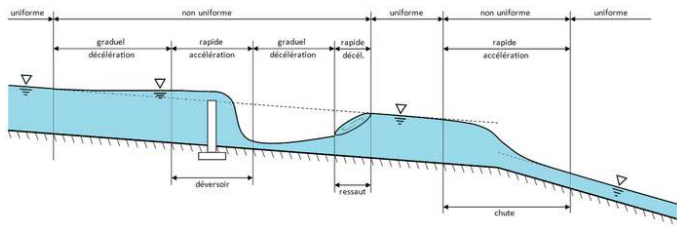
- ▶ la profondeur hydraulique et la vitesse restent invariables sur toutes les sections.

L'écoulement d'un canal est **non-uniforme** si :

- ▶ la profondeur hydraulique et la vitesse changent d'une section à l'autre du canal.

**Trois catégories :**

1. Ecoulements uniformes,
2. Ecoulements graduellement variés,
3. Ecoulements rapidement variés.



Source : wikipedia

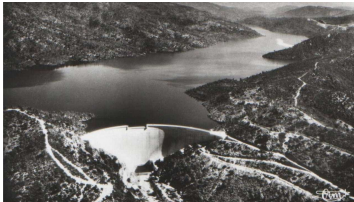
## 2.5. Ecoulements ondulatoires (ondes de gravité)



(e) Croisée d'ondes - Ile de Ré



(f) Mascaret



(g) Barrage de Malpasset (Var)

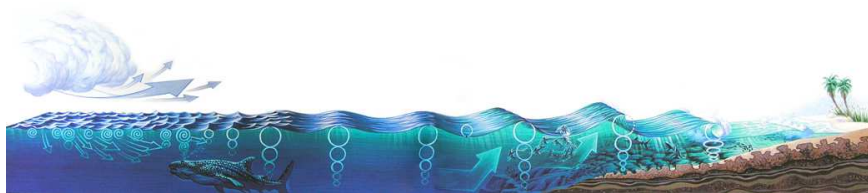


(h) ... après rupture (1959)



## 2.5. Ecoulements ondulatoires (ondes de gravité)

### Naissance des vagues et déferlement



source : [boost-technologies.com](http://boost-technologies.com)

Les ondes se *rattrapent* et s'additionnent jusqu'à l'instabilité...

$$V_w = V \pm \sqrt{gh}.$$

## Section. 3

Origine de la méthode VOF : Hirt & Coll, 1981

### Méthode VOF

- ▶ basée sur des méthodes antérieures de type *Marker-And-Cell* (MAC),
- ▶ premiers travaux sur VOF proposés par Noh & Woodward en 1976,
- ▶ première publication dans un journal par Hirt et Nichols en 1981.  
Hirt, C.W.; Nichols, B.D. (1981).  
"Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries"  
Journal of Computational Physics. 39 (1): 201-225.
- ▶ capture d'interface par des algo. spécifiques SLIC (*Simple Line Interface Calculation*), PLIC (*Piecewise-Linear Interface Calculation*)
- ▶ premières applications par Torrey et al. de Los Alamos, qui a créé des codes VOF pour la NASA (1985, 1987).
- ▶ présent aujourd'hui dans de nombreux codes de calcul : FLOW-3D, Gerris (logiciel), ANSYS Fluent, STAR-CCM et CONVERGE.

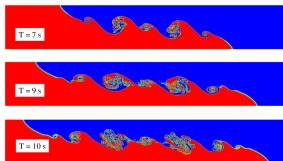
## Section. 4

Motivations et applications pour ce type d'approche

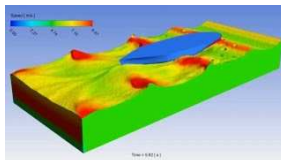
# 4.1. Écoulements de liquides par effets de gravité

## Domaines d'application :

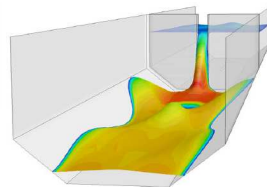
- ▶ interaction entre un ou plusieurs liquides et un gaz,
- ▶ effets de gravité prépondérants ou non (apesanteur) sur les liquides,
- ▶ prise en compte des effets de tension superficielle.



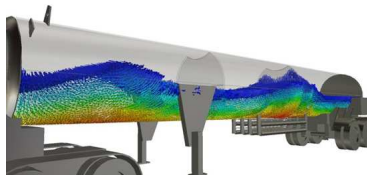
(a) Cours A. Bakker



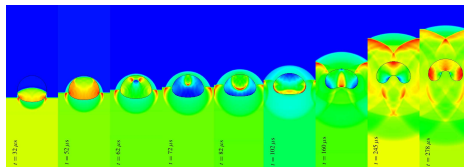
(b) Google



(c) cfd



(d) autodesk



(e) mehdivahab.com (interaction choc/bulle)

## Section. 5

### Théorie de l'approche VOF

## 5.1. Principes généraux

- Définition de la **fraction volumique**  $\alpha$  telle que :

$$\alpha = \frac{1}{V_e} \int_{V_e} \xi(\mathbf{x}, t) dV = \begin{cases} 0 & \text{si gaz} \\ 0.5 & \text{interface} \\ 1 & \text{liquide} \end{cases}$$

- **Propriétés moyennées** :  $\rho = \alpha\rho_l + (1-\alpha)\rho_g$ ,  $\mu = \alpha\mu_l + (1-\alpha)\mu_g$ .
- Correction des équations de Navier-Stokes moyennées :

$$\Rightarrow \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot (\mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)) + \mathbf{F}_c \quad \text{et} \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0.$$

- Ajout d'une **équation de transport** de  $\alpha$  :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \alpha = 0.$$

## 5.1. Principes généraux

- ▶ Résolution en mode SEGREGATED :

Navier-Stokes (**u**)  $\rightarrow$  Transport de  $\alpha \rightarrow$  Navier Stokes ...

- ▶ Hypothèse de fluides **non miscibles**,
- ▶ Prise en compte des **forces de capillarité** comme force de volume :

$$\mathbf{F}_c = \sigma(\nabla \cdot \mathbf{n}_\alpha) \nabla \alpha,$$

$\sigma$  : tension superficielle entre les deux fluides et  $\mathbf{n}_\alpha$  la normale à l'interface.

- ▶ Approche **EULERIENNE** et non LAGRANGIENNE,

Approche **EULERIENNE**

"je vois passer la particule"

Approche **LAGRANGIENNE**

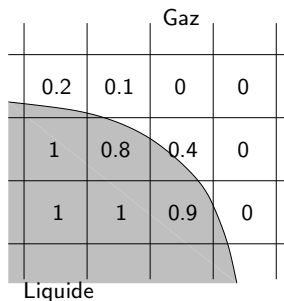
"je suis la particule"



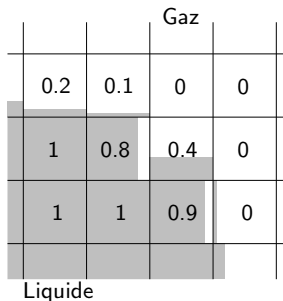
## 5.2. Technique de suivi et de capture de l'interface

Interface est "géo-localisée" en repérant les cellules pour lesquelles  $0 < \alpha < 1$

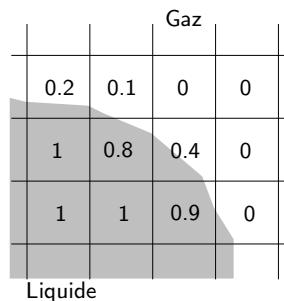
### Techniques de reconstruction de l'interface



(a) Géo-localisation



(b) SLIC



(c) PLIC

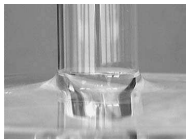
- ▶ SLIC : Simple line interface calculation *donor-acceptor*,
- ▶ PLIC : Piecewise line interface calculation.

## Section. 6

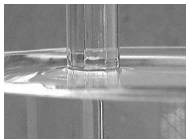
### Effets de tension de surface et cavitation

## 6.1. Tension superficielle

Au contact d'une paroi, l'eau *monte*, tandis que le mercure *descend* en dessous de la *surface libre* moyenne.



(a) Eau courante



(b) Eau pure



(c) Tension



(d) Apesanteur

Cette propriété résulte de l'attraction mutuelle entre les molécules du liquides et les atomes de la paroi.

*Tension superficielle*  $\sigma$  = énergie nécessaire par unité de surface pour constituer la surface libre.

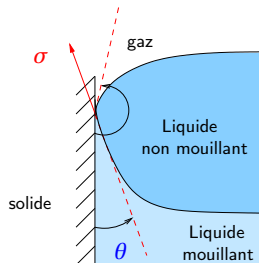
## 6.2. Contact d'une surface libre avec une surface solide

La surface de raccordement entre le fluide *liquide* et la paroi dépend des forces d'adhésion moléculaire entre le gaz, le solide et le liquide.

$\theta$  : angle de contact.

+ Si  $\theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow$  liquide *mouillant* (ex. : eau)

+ Si  $\theta > \frac{\pi}{2} \Rightarrow$  liquide *non mouillant* (ex. : mercure)



### Tension superficielle sur du verre propre

Fluide	$\sigma$ (N/m)	$\theta$ (deg.)
eau	0.072	0
mercure	0.435	135

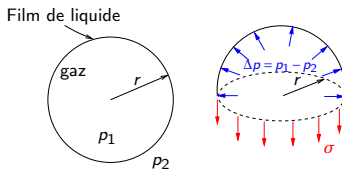


Source : CNAM

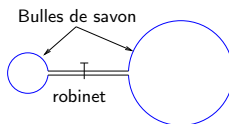
## 6.3. Formule de Laplace

L'équilibre *mécanique* est régi par  $\pi r^2 \Delta p = 2\pi r \sigma$  soit la formule de Laplace :

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{r}$$



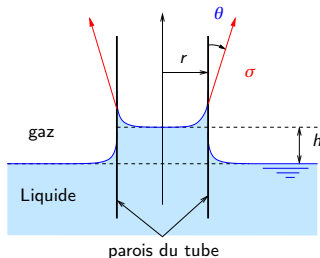
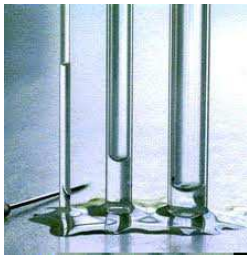
**Application surprenante :**



**Question :** à l'ouverture de la vanne, quel est le sens de l'écoulement ?

## 6.4. Capillarité : loi de Jurin

**Définition** : ascension d'un liquide dans un canal étroit.



Le poids de la colonne de liquide est équilibré par la résultante des forces de tension, soit d'après la loi de Jurin :

$$\pi r^2 h \rho g = 2 \pi r \sigma \cos(\theta) \quad \text{soit} \quad h = \frac{2 \sigma \cos(\theta)}{\rho g r}$$

## 6.5. Quantifier leur importance

### Question

Importance ou non des effets de surface ?

**Evaluation du nombre de Reynolds**

$$\mathcal{R}_e = \frac{UL}{\nu}$$

**Évaluation du nombre capillaire :**

► Si  $\mathcal{R}_e \ll 1$

$$Ca = \frac{\text{Viscosité}}{\text{Tension superficielle}} = \frac{\mu U}{\sigma}$$

► Si  $\mathcal{R}_e \gg 1$

**Évaluation du nombre de Weber :**

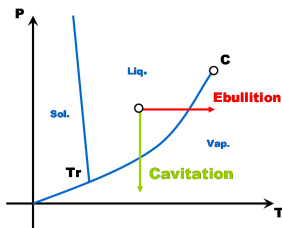
$$We = \frac{\text{Tension superficielle}}{\text{Inertie}} = \frac{\sigma}{\rho L U^2}$$

### Réponse

Effets de tension de surface IMPORTANTS si  $Ca \ll 1$  ou si  $We \gg 1$ .

## 6.6. Cavitation

### Cavitation



- ▶ naissance de bulles de gaz ou de vapeur dans un liquide soumis à une dépression telle que :

$$p < p_{vap.,sat.}$$

- ▶  $p_{vap.,sat.}$  est la pression de vapeur saturante dans le liquide :

Température	(°C)	-20	0	20	40	60	100
$p_{vap.,sat.}$	[mbar]	1.03	6.10	17	73.8	199	1013

- ▶ dépression résultant généralement d'un écoulement liquide fortement accéléré (effet Venturi),
- ▶ critère du NPSH pour les pompes centrifuges.

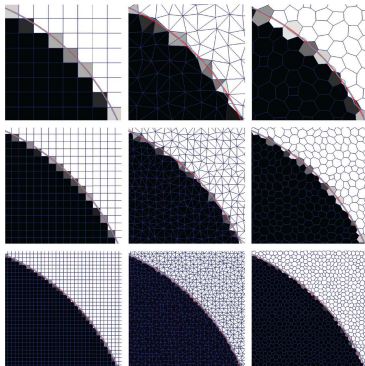


## Section. 7

### Mise en données numériques

### Considérations sur le maillage

- ▶ raffiner localement le maillage pour bien capter l'interface mobile,
- ▶ privilégier des géométries de cellules alignées avec l'interface,
- ▶ adapter la taille des mailles avec les contraintes liées aux modèles de turbulence.



Source : Royal Society Open Science [rouge (interface exacte), bleu ( $\alpha = 0.5$ )]

### Considérations sur les modèles physiques

- ▶ activer les effets de gravité,
- ▶ renseigner les options **Cavitation** et **Surface tension** si nécessaire,
- ▶ définir séparément les phases (eulériennes) des fluides considérés,
- ▶ privilégier les modèles de turbulence :
  - ▶  $k - \epsilon$  : écoulements internes,
  - ▶ Spalart-Allmaras : écoulements externes, peu de décollement,
  - ▶  $k - \omega$  : écoulements externes, forts décollements.

### Considérations sur le type d'analyse

- ▶ privilégier une analyse transitoire,
- ▶ schéma temporel d'ordre 1 si le résultat escompté est stationnaire (accélère la convergence par dissipation des effets transitoires). Sinon ordre maximum !
- ▶ pour le calcul du  $\Delta t$ , se référer au nombre de Courant calculé sur l'interface.

$$\text{Ordre 1 en temps : } CFL = \frac{U\Delta t}{\Delta x} < 0.7$$

$$\text{Ordre 2 en temps : } CFL = \frac{U\Delta t}{\Delta x} < 0.5$$

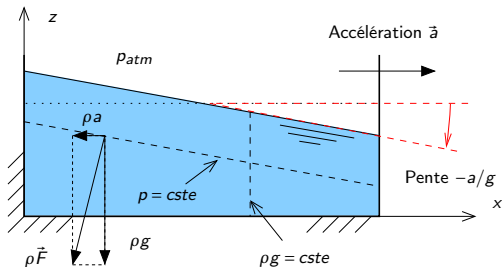
avec

$$U = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$$

où  $\lambda$  est une longueur d'onde caractéristique et  $g$  la constante de gravité.

Si  $\Delta x$  connu, en déduire :  $\Delta t = CFL \times \min(\Delta x) / U$ .

## 7.2. Validation 1



Loi de l'hydrostatique :  $\rho \vec{F} - \vec{\nabla} p = \vec{0}$  avec  $\rho \vec{F} = \rho \vec{g} - \rho \vec{a}$ .

$$(\rightarrow x) \quad -\rho a - \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (\uparrow y) \quad -\rho g - \frac{\partial p}{\partial z} = 0.$$

Surface libre = surface d'iso-pression  $\rightarrow dp = 0$  :

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial z} dz = -\rho a dx - \rho g dz = 0,$$

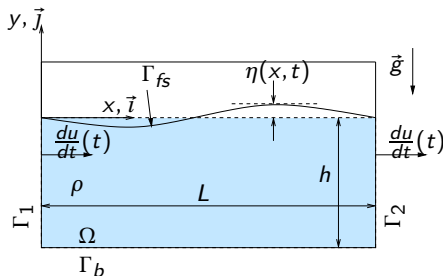
Intégration :

$$z_{SL}(x) = -a/g \cdot x + cste.$$

## 7.3. Validation 2

Modes de ballotement pour un réservoir partiellement rempli :

$$f_{\text{théorique}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\pi g \frac{m}{L} \tanh\left(\pi h \frac{m}{L}\right)} \quad [\text{Hz}],$$



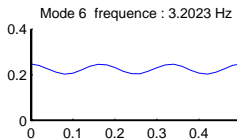
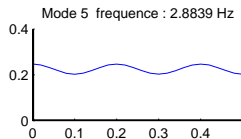
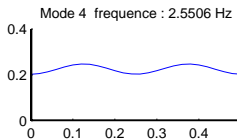
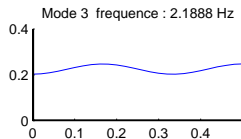
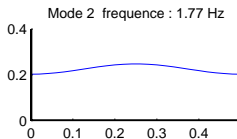
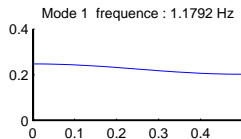
Réponse à une sollicitation périodique de la forme :

$$u(t) = u_o \sin(2\pi ft) \quad \text{où} \quad \frac{du}{dt}(t) = v_o \sin(2\pi ft)$$

sous la forme de modes stationnaires.

## 7.3. Validation 2

**Application :**  $L = 0.5\text{ m}$  et  $h = 0.225\text{ m}$



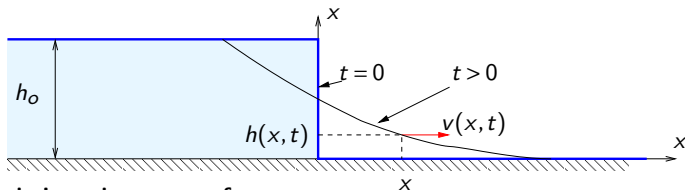
**Approche linéaire : la mise en données doit en tenir compte !**

## 7.4. Validation 3

Rupture de barrage (issu de *Working group on dam break modelling, 1996*)

### Conditions initiales

- ▶ canal rectangulaire à fond plat, largeur constante, suffisamment long pour les C.L.,
- ▶ canal sec sur la moitié aval et plan d'eau immobile ( $h_o$ ) sur la moitié amont.



### Soution analytique du cas sans frottement

$$h(x,t) = \frac{h_o}{9} \left( 2 - \frac{x}{ct} \right)^2, \quad v(x,t) = \frac{2c}{3} \left( 1 + \frac{x}{ct} \right) \quad \text{pour } -c < \frac{x}{t} < 2c$$

avec la célérité  $c = \sqrt{g h_o}$ .

- ▶ analyse influence du maillage,
- ▶ analyse des schémas en temps.