

CF04

Mécanique des fluides numérique et couplages multiphysiques

Emmanuel LEFRANÇOIS

Equipe Numérique

Mots-clés :

Mécanique des fluides, méthodes numériques, couplages multiphysiques

Laboratoire Roberval, UMR 7337 UTC-CNRS

<http://roberval.utc.fr>



Troisième partie

Introduction aux techniques CFD (2/3)

Section. 1

Méthode des Volumes Finis (MVF)

1.1. Principes généraux

Approche mécanicienne basée sur :

1. UNE SEULE cellule (originalité) de surface/volume (resp. 2D/3D) (\mathcal{V}_e , \mathcal{S}_e),
2. un bilan des FLUX.

Equation d'équilibre local

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi \mathbf{V}) - \nabla \cdot (\mu \nabla \phi) = S_\phi,$$

1. Intégration au niveau d'une cellule (LA nouveauté!) ← approche ingénieur

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_{\mathcal{V}_e} \phi d\mathcal{V} + \iint_{\mathcal{V}_e} \nabla \cdot (\phi \mathbf{V}) d\mathcal{V} - \iint_{\mathcal{V}_e} \nabla \cdot (\mu \nabla \phi) d\mathcal{V} = \iint_{\mathcal{V}_e} S_\phi d\mathcal{V}.$$

2. Théorème de la divergence

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_{\mathcal{V}_e} \phi d\mathcal{V} + \oint_{\mathcal{S}_e} \phi \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} d\mathcal{S} - \oint_{\mathcal{S}_e} \mu \nabla \phi \cdot \mathbf{n} d\mathcal{S} = \iint_{\mathcal{V}_e} S_\phi d\mathcal{V}.$$

3. Définition du flux total $\mathbf{F} = \phi \mathbf{V} - \mu \nabla \phi$

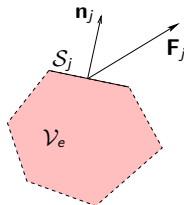
1.1. Principes généraux

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\mathcal{V}_e} \phi d\mathcal{V} = - \oint_{S_e} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS + \iiint_{\mathcal{V}_e} S_\phi d\mathcal{V}.$$

Lecture : ϕ varie en fonction du bilan des entrées/sorties (\mathbf{n}) et d'une source/puits.

Cellule élémentaire e :

- ▶ type polygone,
- ▶ n facettes (segments) sur son contour



Approche par des grandeurs moyennes :

$$\frac{\partial \phi_e}{\partial t} + \frac{1}{\mathcal{V}_e} \sum_j^n (\mathbf{F}_j \cdot \mathbf{n}_j S_j)_e = \frac{1}{\mathcal{V}_e} (S_\phi)_e$$

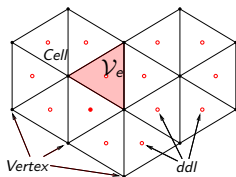
Notations :

- ▶ ϕ_e : valeur moyenne de ϕ sur la cellule e ,
- ▶ \mathbf{F}_j le flux moyen sur le segment j .

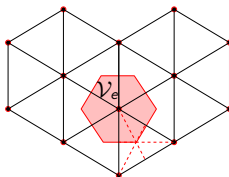
1.2. Définition des volumes de contrôle

Trois approches possibles :

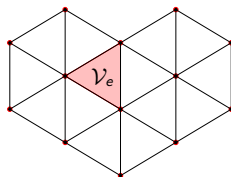
1. **Cell Centered** : cellule \leftrightarrow volume élémentaire géométrique (type éléments finis)
MAIS inconnues aux centres,
2. **Vertex Centered** : cellule centrée autour d'un nœud
 \rightarrow (**NEW**) phase de création des cellules à partir du maillage initial.
3. **Cell Vertex** : cellule \leftrightarrow volume élémentaire géométrique (type éléments finis) ET
inconnues sur les nœuds.



(a) **Cell-Centered**



(b) **Vertex-Centered**



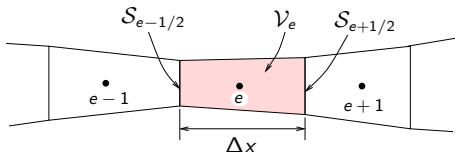
(c) **Cell-Vertex**

Cellule/élément \leftrightarrow Cell

Nœud \leftrightarrow Vertex

1.3. Application 1D : écoulement dans une conduite de section variable

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{1}{S} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \mathbf{Q} \quad \text{avec} \quad \mathbf{U} = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{Bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (E + p)u \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{p}{S} \frac{\partial S}{\partial x} \\ 0 \end{Bmatrix}.$$



Equation d'équilibre sur la cellule e

$$\frac{\partial \phi_e}{\partial t} = \frac{1}{V_e} (\mathbf{F}_{e-1/2} S_{e-1/2} - \mathbf{F}_{e+1/2} S_{e+1/2}) + \frac{1}{V_e} Q_e.$$

Étapes suivantes

1. calcul des flux aux interfaces
2. boucle sur toutes les cellules et assemblage du système algébrique,
3. conditions aux limites (trois types),
4. résolution et post-traitement.

1.3. Application 1D : écoulement dans une conduite de section variable

Calcul pour les termes de flux aux interfaces $\mathbf{F}_{e-1/2}$ et $\mathbf{F}_{e+1/2}$.

Plusieurs choix :

1. **Centré** : $\mathbf{F}_{e-1/2} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}_{e-1} + \mathbf{F}_e)$ et $\mathbf{F}_{e+1/2} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}_e + \mathbf{F}_{e+1})$,

2. **Décentré DROITE** : $\mathbf{F}_{e-1/2} = \mathbf{F}_e$ et $\mathbf{F}_{e+1/2} = \mathbf{F}_{e+1}$,

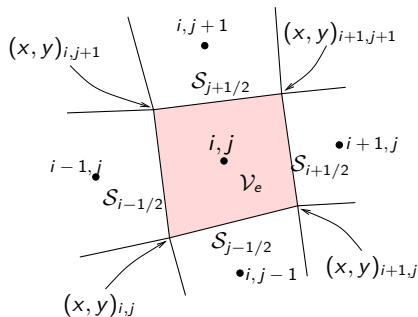
3. **Décentré GAUCHE** : $\mathbf{F}_{e-1/2} = \mathbf{F}_{e-1}$ et $\mathbf{F}_{e+1/2} = \mathbf{F}_e$,

4. **Interpolé** linéairement (pour des cas de longueurs de cellules non équidistantes) :

$$\mathbf{F}_{e+1/2} = (1 - \lambda)\mathbf{F}_e + \lambda\mathbf{F}_{e+1} \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{x_{e+1/2} - x_e}{x_{e+1} - x_e}.$$

1.4. Application 2D : Écoulement compressible en 2D

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}^x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}^y}{\partial y} = \mathbf{0} \quad \text{avec la notation} \quad \mathbf{F} = \mathbf{F}^x \mathbf{i} + \mathbf{F}^y \mathbf{j}.$$



Equation d'équilibre sur la cellule e

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = -\frac{1}{V_e} \left(\mathbf{F}_{i+1/2} \cdot \mathbf{S}_{i+1/2} + \mathbf{F}_{j+1/2} \cdot \mathbf{S}_{j+1/2} + \mathbf{F}_{i-1/2} \cdot \mathbf{S}_{i-1/2} + \mathbf{F}_{j-1/2} \cdot \mathbf{S}_{j-1/2} \right)$$

Remarque : choix de flux centrés ou décentrés restent les mêmes que pour le cas 1D.

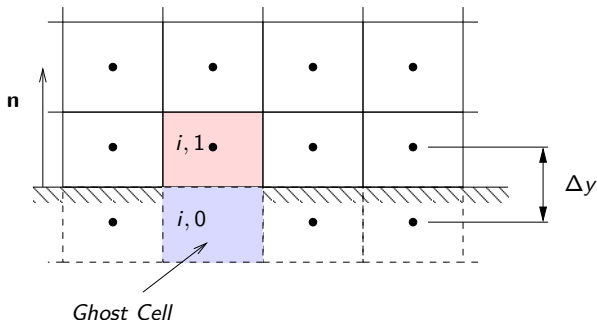
1.5. Conditions aux limites : notion de mailles *fantômes* ou *Ghost Cell*

Si solutions calculées au centre des cellules

→ mailles supplémentaires en dehors du domaine pour **conditions aux limites**



mailles *fantômes* ou *Ghost Cell*



Comment calculer ces inconnues supplémentaires ?

Condition de type Dirichlet

$$T|_w = \bar{T} \rightarrow \bar{T} = \frac{T_{i,0} + T_{i,1}}{2},$$

soit à imposer :

$$T_{i,0} = 2\bar{T} - T_{i,1}.$$

Condition de type Neumann (selon la normale \mathbf{n})

$$\left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_w = \phi \rightarrow \frac{T_{i,1} - T_{i,0}}{\Delta y} \approx \phi,$$

soit à imposer :

$$T_{i,0} = T_{i,1} - \phi \Delta y.$$

Condition de type Cauchy (selon la normale \mathbf{n})

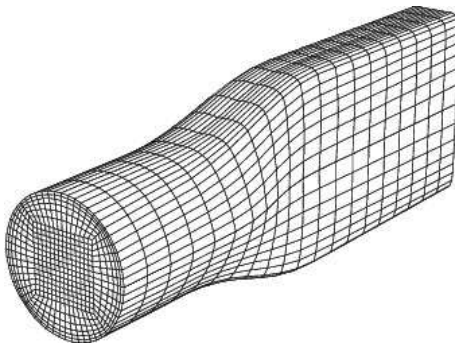
$$\left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_w = \alpha T \rightarrow \frac{T_{i,1} - T_{i,0}}{\Delta y} \approx \alpha \frac{T_{i,0} + T_{i,1}}{2},$$

soit à imposer :

$$T_{i,0} = T_{i,1} \left(\frac{2 - \alpha \Delta y}{2 + \alpha \Delta y} \right).$$

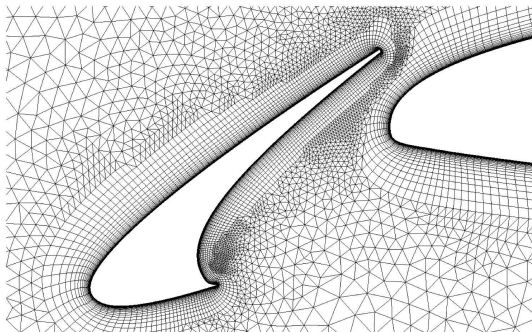
Section. 2

Description des différents maillages



source : sharcnet

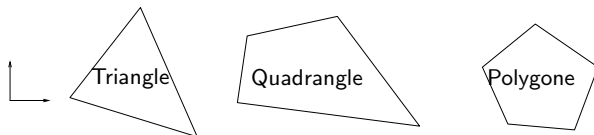
1. localisation par lecture directe des indices i , j et k ,
2. extraction immédiate des proches voisins pour les calculs de dérivées,
3. pas de table de stockage à l'exception des coordonnées,
4. exclusivement pour des géométries simples et en l'absence d'objets internes,
5. Malgré son apparence "cadrée", peut-être non structuré !



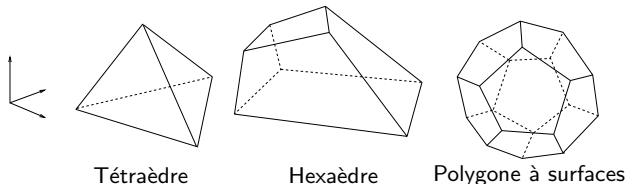
source : www.pointwise.com

1. requiert une table des connectivités,
2. plus lourd à manipuler,
3. approche universelle,
4. possibilité d'optimiser la numérotation des nœuds.

Topologies courantes d'éléments 2D en volumes finis



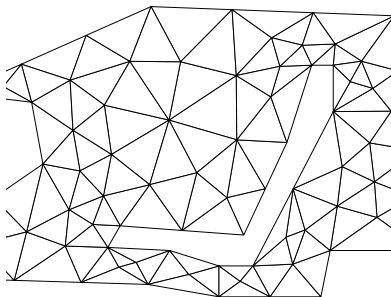
Topologies courantes d'éléments 3D en volumes finis



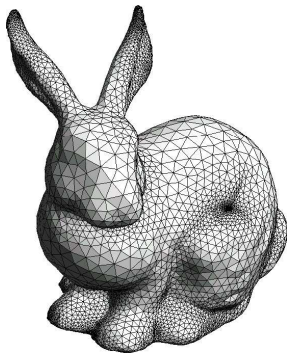
L'élément de type polygone (2D/3D) à surfaces résulte d'une discrétisation du domaine par approche de type diagramme de Voronoï.

Procédure :

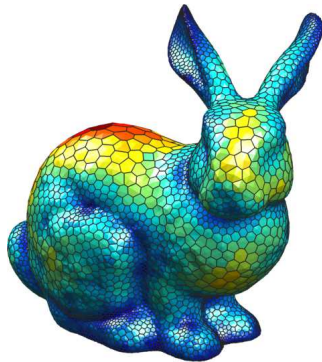
1. création d'un maillage standard,
2. repérage des milieux de tous les segments,
3. tracé des facettes par des axes perpendiculaires aux segments et intersectants.



Application...



pointwise.com (the choice for CFD meshing)



mathworks.com

Section. 3

Classification des équations aux dérivées partielles (EDP)

Cas général d'une équation pouvant s'écrire :

$$\textcolor{red}{A} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \textcolor{blue}{B} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + \textcolor{green}{C} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \mathcal{D} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \mathcal{E} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \mathcal{F} \phi + \mathcal{G} = 0.$$

Calcul du déterminant :

$$\Delta = \textcolor{blue}{B}^2 - 4\textcolor{red}{A}\textcolor{green}{C}.$$

Remarque : approche généralisable aux systèmes d'EDP.

Trois catégories selon le signe de Δ :

1. $\Delta < 0$: ELLIPTIQUE
2. $\Delta = 0$: PARABOLIQUE
3. $\Delta > 0$: HYPERBOLIQUE

Intérêt ? catégorie \rightarrow application dédiée \rightarrow CL spécifiques

Equation d'Euler pour écoulement stationnaire et irrotationnel $\mathbf{V} = \nabla\phi$

$$(1 - \mathcal{M}^2) \frac{\partial\phi}{\partial s^2} + \frac{\partial\phi}{\partial n^2} = 0,$$

avec :

1. $\mathcal{M} = V/c$: nombre de Mach, c : célérité du son,
2. s : coordonnée curviligne le long d'une *ligne de courant*,
3. n : coordonnée curviligne perpendiculaire à d'une *ligne de courant*.

Source mobile de vitesse u .

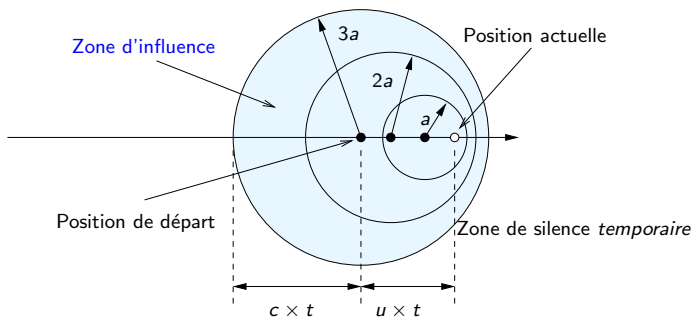
Classification ?

$$\Delta = \mathcal{B}^2 - 4\mathcal{A}\mathcal{C} = -4(1 - \mathcal{M}^2)$$

plusieurs classifications possibles selon le nombre de Mach

$$\mathcal{M} < 1 \Rightarrow \Delta < 0$$

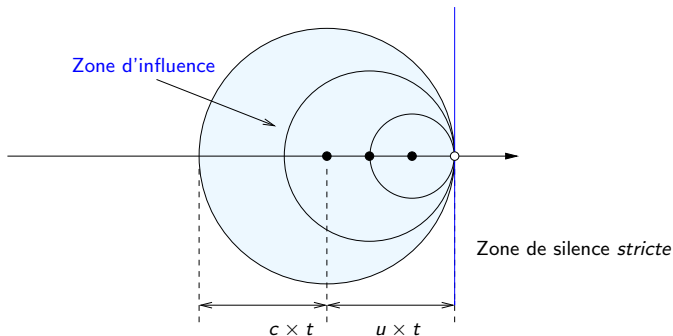
Elliptique



Applications : mécanique statique, thermique stationnaire, écoulement incompressible

$$\mathcal{M} = 1 \Rightarrow \Delta = 0$$

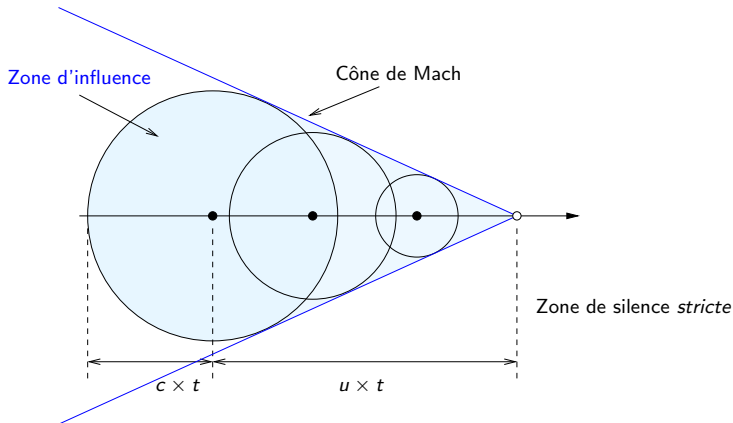
Parabolique



Applications : thermique transitoire, écoulements subsoniques/fluviaux

$$\mathcal{M} > 1 \Rightarrow \Delta > 0$$

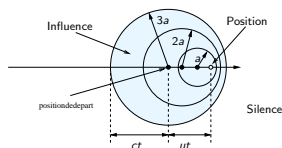
Hyperbolique



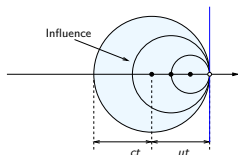
Applications : modes de propagation élastique, écoulements supersoniques/torrentiels

Classification / Influence sur les conditions aux limites et initiales

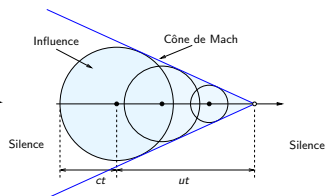
La classification de l'équation influera directement sur le nombre et le traitement des conditions aux limites :



(a) Elliptique



(b) Parabolique



(c) Hyperbolique

1. **Elliptique** : tout influence tout \rightarrow fournir des CL sur **tout** le contour.
2. **Parabolique/Hyperbolique (CFD!!!)** : notion de propagation de l'information \rightarrow influencée par la direction de l'écoulement et par sa vitesse. Nombre de CL fonction du type (entrée/sortie/...), vitesse et direction.

Approche purement **QUALITATIVE**.

L'outil qui va nous permettre de **QUANTIFIER** (combien de CL à imposer ?) cet aspect s'appuie sur la notion de *caractéristiques*.

Section. 4

Introduction pragmatique aux notions de caractéristiques

Cas simple d'une équation de transport

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{avec} \quad u(x, 0) = u_o(x).$$

Une *caractéristique* peut se définir dans le plan (x, t) comme une **courbe** $x(t)$ le long de laquelle **l'information se conserve**.

Mathématiquement, l'EDP devient une ODE (Ordinary Differential Equation)).

Expression de la dérivée matérielle

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Par analogie, si la caractéristique $x(t)$ satisfait l'ODE :

$$\frac{dx}{dt} = a,$$

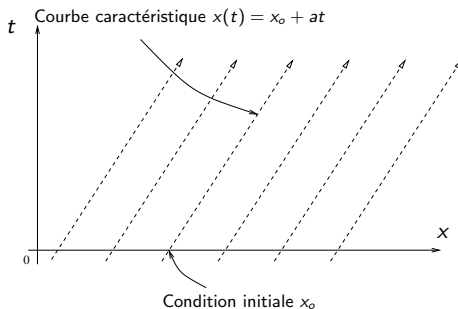
d'où :

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

→ L'information u se conserve le long de la caractéristique $x(t)$.

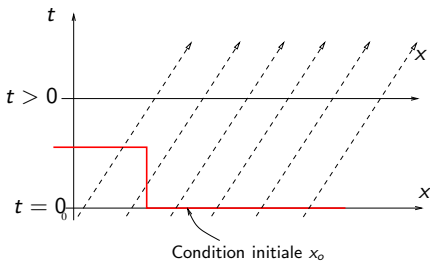
La vitesse a est appelée *vitesse caractéristique*.



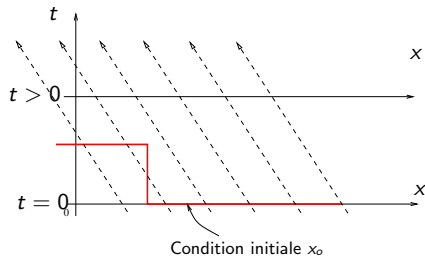
On en déduit que la solution générale (qui peut être résolue **graphiquement**) s'écrit :

$$u(x, t) = u_0(x - at).$$

Mise en pratique des deux cas de figure possibles



Cas $a > 0$



Cas $a < 0$

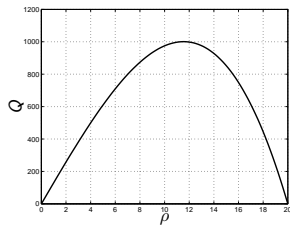
Modèle simple de trafic routier : équation

- ▶ ρ : densité d'automobiles par unité de longueur,
- ▶ $V(\rho)$: vitesse des véhicules,
- ▶ $Q(\rho) = \rho V$: débit d'automobiles,
- ▶ $C(\rho) = Q'$: vitesse d'advection des fluctuations de la densité.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + C(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$$

La courbe caractéristique $x(t)$ est définie d'après :

$$\frac{dx}{dt} = C(\rho) \neq \text{cste} !$$

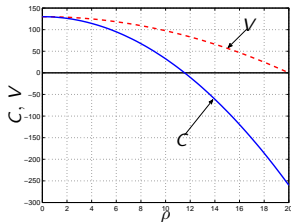


Modèles issus de mesures expérimentales :

$$V(\rho) = V_{max} \left(1 - \frac{\rho^2}{\rho_{max}^2} \right)$$

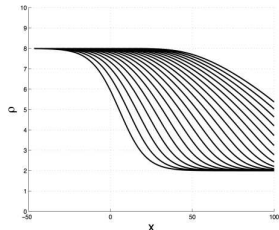
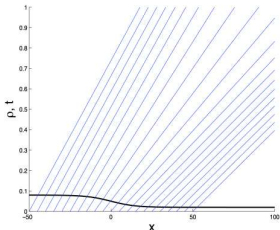
$$\rightarrow C(\rho) = Q' = V_{max} \left(1 - 3 \frac{\rho^2}{\rho_{max}^2} \right)$$

Débit Q maximal pour $\rho^* = 0.6\rho_{max}$.



Modèle simple de trafic routier : effet de détente

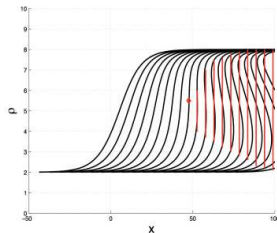
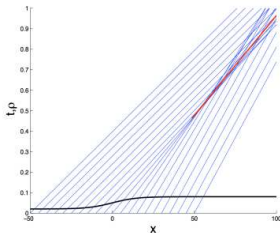
Profil continu de ρ imposé tel que $\rho(\text{gauche})/\rho_{\max} = 0.75$ et $\rho(\text{droite})/\rho_{\max} = 0.4$



pedagotech.com, J.-F. Parmentier & O. Thual

Modèle simple de trafic routier : effet de compression

Profil continu de ρ imposé tel que $\rho(\text{gauche})/\rho_{\max} = 0.4$ et $\rho(\text{droite})/\rho_{\max} = 0.75$



pedagotech.com, J.-F. Parmentier & O. Thual

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} + \mathbf{A} \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{U} = \mathbf{0} \quad \text{avec } \mathbf{U}_o = \mathbf{U}_L \text{ pour } x < 0 \text{ et } \mathbf{U}_o = \mathbf{U}_R \text{ pour } x > 0.$$

1/ **Diagonalisation** par un habile changement de variables :

$$\mathbf{U} = \mathcal{X} \mathbf{Q} \quad \text{soit} \quad \mathbf{Q} = \mathcal{X}^{-1} \mathbf{U}$$

\mathcal{X} : matrice des vecteurs propres à droite

\mathbf{Q} : *variables caractéristiques*.

2/ Ré-écriture du système

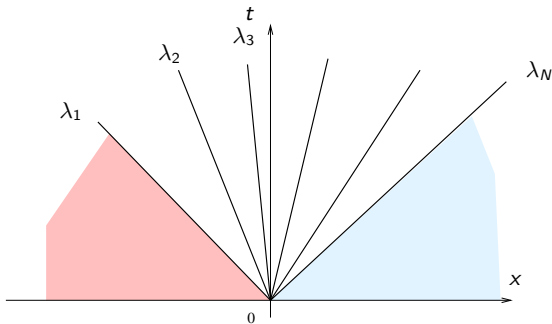
$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \mathbf{\Lambda} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x} = \mathbf{0} \quad \text{avec} \quad \mathbf{\Lambda} = \mathcal{X}^\top \mathbf{A} \mathcal{X} \quad \text{soit} \quad \frac{\partial q_i}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial q_i}{\partial x} = 0.$$

3/ **Extraction des directions caractéristiques** :

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_i, \quad \forall i = 1, \dots, N$$

soit la solution exacte par transport : $q_i(x, t) = q_i^{(o)}(x - \lambda_i t), \quad \forall i = 1, \dots, N$

Solution $\mathbf{U}(x, t) \rightarrow$ superposition de N ondes (de forme $q_i^{(o)} \mathcal{X}_i$) qui convectent indépendamment sans changer de forme à la vitesse λ_i .



Équations d'Euler 1D compressibles

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \mathbf{0} \quad \text{avec} \quad \mathbf{U} = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{F} = \begin{Bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (E + p)u \end{Bmatrix}$$

1/ Passage sous forme non conservative fonction de $\mathbf{V} = \langle \rho, u, p \rangle^T$:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathcal{A} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} = \mathbf{0} \quad \text{avec} \quad \mathcal{A} = \begin{bmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & 1/\rho \\ 0 & \gamma p & u \end{bmatrix}.$$

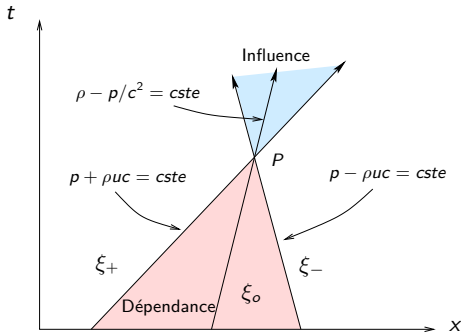
2/ Diagonalisation de \mathcal{A} sur la matrice \mathcal{X} de ses vecteurs propres :

$$\mathcal{X} \mathcal{A} \mathcal{X}^{-1} = \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & u + c & 0 \\ 0 & 0 & u - c \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathcal{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/c^2 \\ 0 & \rho c & 1 \\ 0 & -\rho c & 1 \end{bmatrix}.$$

3/ Changement de variables $\mathbf{V} = \mathcal{X}^{-1} \mathbf{Q}$

4/ Extraction des caractéristiques λ_i :

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \mathbf{\Lambda} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x} = \mathbf{0} \quad \text{avec} \quad \mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} \rho - p/c^2 \\ p + \rho uc \\ p - \rho uc \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \text{diag}|\mathbf{\Lambda}| = \begin{Bmatrix} u \\ u + c \\ u - c \end{Bmatrix}.$$



Section. 5

Définition des différents types de conditions aux limites

1/ **Condition d'adhérence :**

$$\mathbf{V} = \mathbf{0}.$$

2/ **Condition de glissement** → paroi non adhérente, symétrie.

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = 0,$$

\mathbf{n} : vecteur normal orienté paroi → fluide.

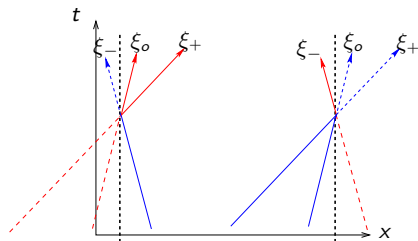
Projection du système d'équations sur la normale :

$$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial n} = \rho \mathbf{V} \cdot \underbrace{\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi}}_{\text{Courbure}},$$

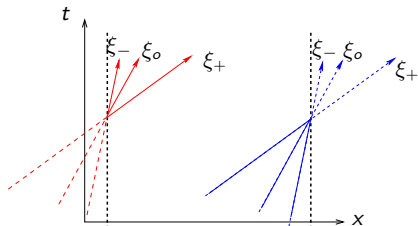
1. paroi rectiligne : $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$

2. paroi présentant une courbure R de centre (x_o, y_o) : $\frac{\partial p}{\partial n} = -\frac{\rho V^2}{R}$ (négligeable ?).

→ **99% des cas** : courbure négligée !



$x = 0$
(a) Cas subsonique $\mathcal{M} < 1$



$x = 0$
(b) Cas supersonique $\mathcal{M} > 1$

Caractéristiques **SORTANTES** (en bleu)

→ propagation d'une information **INTÉRIEUR** → **EXTÉRIEUR**

⇒ aucun traitement particulier.

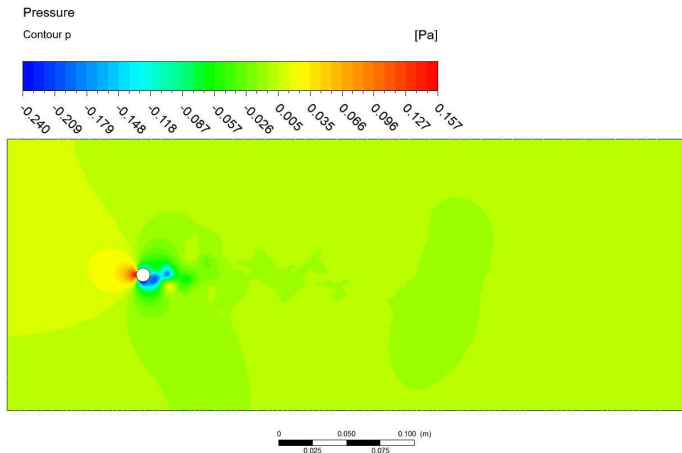
Caractéristiques **ENTANTES** (en rouge)

→ propagation d'une information **EXTÉRIEUR** → **INTÉRIEUR**

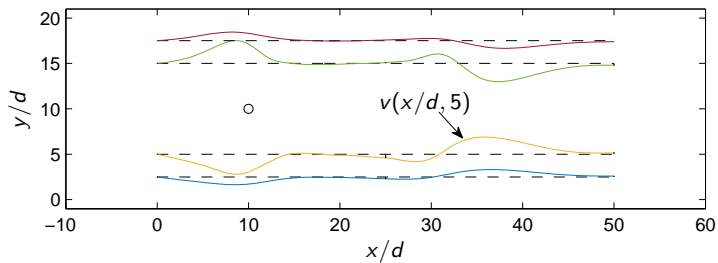
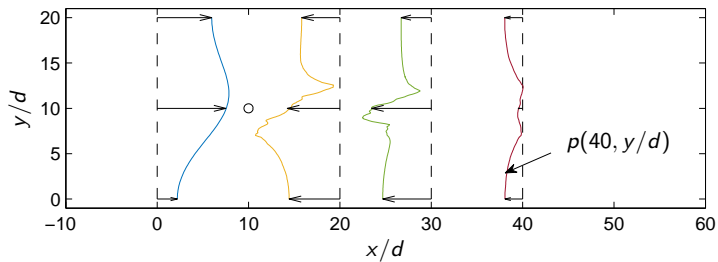
⇒ nombre de caractéristiques = nombre de CL à imposer.

CL / Eloignement des CL (1/2)

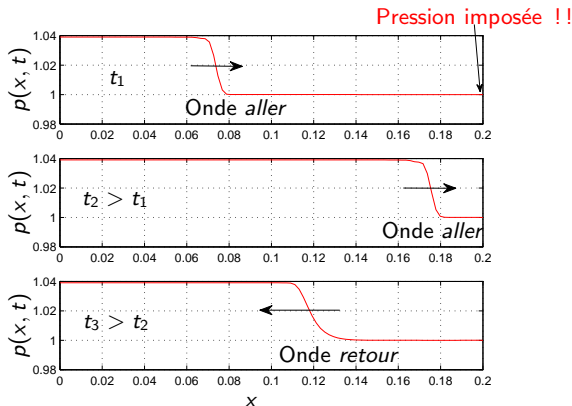
- ▶ Écoulement visqueux stationnaire : $U_{\infty} = 0.5 \text{ m/s}$, 0 Pa en sortie,
- ▶ Dimensions du domaine : $0.5 \text{ m} \times 0.2 \text{ m}$, soit $50 d \times 20 d$
- ▶ Cylindre de diamètre $d = 10 \text{ mm}$ en $(0.1 \text{ m}, 0.1 \text{ m})$.



CL / Eloignement des CL (2/2)



Onde de retour générée suite à l'imposition d'une pression en sortie de domaine.



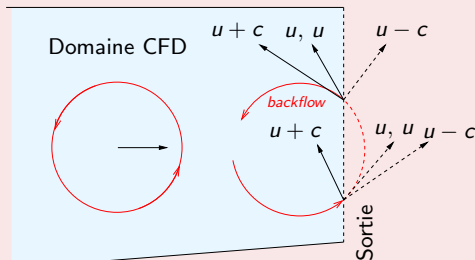
Solutions possibles :

1. **zone éponge** : simple et efficace mais mal adaptée pour l'acoustique,
2. **conditions de non-réflexion** : plus ardu mais plus propre.

CL / Comment gérer une «sortie» qui se comporte comme une «entrée» ?

Sortie à $\mathcal{M} < 1 \rightarrow$ 1 caractéristique ENTRANTE \rightarrow 1 seule CL (p imposée)

Sortie/établissement zone de **recirculation** (vortex) \rightarrow écoulement rentrant (*backflow*)



\rightarrow 3 caractéristiques ENTRANTES !

Solution : conditions supplémentaires telles que :

1. la température totale,
2. la direction de l'écoulement,

Si modèle turbulence, multiphasiques, compléter...