CF04
Mécanique des fluides numérique et couplages multiphysiques

Emmanuel LEFRANÇOIS

Equipe Numérique

Mots-clés :
Mécanique des fluides, méthodes numériques, couplages multiphysiques

Laboratoire Roberval, UMR 7337 UTC-CNRS

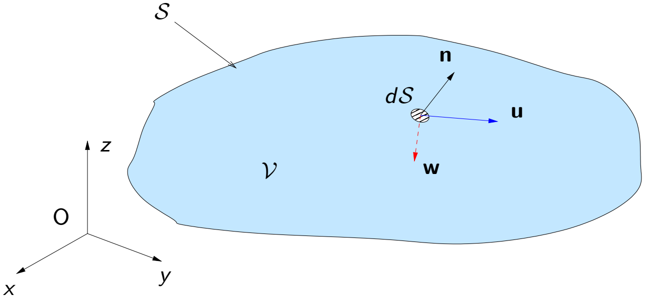
http://roberval.utc.fr

Deuxième partie

Introduction aux techniques CFD (1/3)

Section. 1

Rappel des principaux modèles mathématiques



$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{\mathcal{V}(t)}\phi(\mathbf{x},t)d\mathcal{V}}_{\text{Taux d'accumulation}} + \underbrace{\oint\limits_{\mathcal{S}(t)}\phi(\mathbf{u}-\mathbf{w}).\mathbf{n}d\mathcal{S}}_{\text{Echange surfacique}} + \underbrace{\oint\limits_{\mathcal{S}(t)}\mathbf{q}.\mathbf{n}d\mathcal{S} + \iint\limits_{\mathcal{V}(t)}\hat{f}_v d\mathcal{V}}_{\text{Production}} = 0$$

Forme GLOBALE $\rightarrow$ forme locale (~~intégrales~~).

1. Théorème du gradient/divergence :

$$\phi \text{ scalaire} \quad : \quad \iint_{\mathcal{V}} \nabla\phi \, d\mathcal{V} = \oint_{\mathcal{S}} \phi \mathbf{n} d\mathcal{S}, \quad \text{[théorème du gradient]}$$

$$\phi \text{ vecteur} \quad : \quad \iint_{\mathcal{V}} \nabla.\phi \, d\mathcal{V} = \oint_{\mathcal{S}} \phi.\mathbf{n} d\mathcal{S}, \quad \text{[théorème de la divergence]}$$

2. Elimination des intégrales TOUTES triples :

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \underbrace{\nabla\cdot(\phi(\mathbf{u}-\mathbf{w}))}_{\text{transport}} - \underbrace{\nabla\cdot(\mu\nabla\phi)}_{\text{diffusion}} = S_\phi \quad \forall(x,y,z)\in\mathcal{V},$$

TRANSPORT et **DIFFUSION** = deux ingrédients fondamentaux de la MDF.

Conservation des débits massiques :

$$\oiint_{\mathcal{S}} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, d\mathcal{S} = 0$$

n : normale orientée vers l'extérieur.

Théorème de la divergence :

$$\oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\mathcal{S} = \iiint_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \mathbf{F} \, d\mathcal{V},$$

$\rightarrow$ forme générale (compressible) :

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad \forall (x, y, z) \in \mathcal{V}.$$

- ρ : masse volumique $[kg/m^3]$
- **V** : vecteur vitesse locale $[m/s]$

Présence effective du terme de **TRANSPORT** de masse.

Conservation de la quantité de mouvement = Principe Fondamental de la Dynamique (PFD).

$$\rho d\mathcal{V} \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \sum \mathcal{F}_{\mathbf{ext}} \ \forall \ d\mathcal{V}$$

Ingrédients :

dérivée matérielle $\dfrac{d}{dt}$ + bilan des efforts extérieurs → équations générales de Navier-Stokes

$$\frac{\partial \rho \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla.(\rho \mathbf{V} \otimes \mathbf{V}) = -\nabla p + \nabla.\bar{\tau} + \rho \mathbf{f_v} \quad \forall (x, y, z) \in \mathcal{V}.$$

- p : pression <u>statique</u> $[Pa = N/m^2]$
- $\bar{\tau}$: tenseur des contraintes visqueuses $[N/m^2]$
- $\mathbf{f_v}$: force volumique $[N/kg = m/s^2]$

Pour un cas incompressible, elles s'expriment selon les trois composantes d'un repère cartésien :

$$\text{Selon } x \quad : \quad \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+\rho f_x$$

$$\text{Selon } y \quad : \quad \rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)+\rho f_y$$

$$\text{Selon } z \quad : \quad \rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)+\rho f_z$$

- μ : viscosité dynamique $[Pa\,s]$
- $\nu = \mu/\rho$: viscosité cinématique $[m^2/s]$

Pourquoi ?

Effets de compressibilité et/ou les échanges de chaleur avec le milieu environnant.

$$\Delta E_{tot} = \mathcal{W}(\mathbf{F}) + \delta \mathcal{Q}_{ext} + \text{Production de chaleur}$$

Forme intégrale (en puissance) :

$$\iiint_{\mathcal{V}} \rho \frac{dE}{dt} d\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{V} \, d\mathcal{V} + \oiint_{\mathcal{S}} (\bar{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{V} \, d\mathcal{S} - \oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \, d\mathcal{S}$$

$\rightarrow$ forme locale :

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho E \mathbf{V}) = \nabla \cdot ((-p\mathbf{I} + \tau) \cdot \mathbf{V}) + \rho \mathbf{f_v} \cdot \mathbf{V} + \nabla \cdot \mathbf{q}$$

- $e = C_v T$: énergie interne. $E = e + \dfrac{V^2}{2}$
- $\mathbf{q} = -\kappa \nabla T$ (loi de Fourier)
- T : température
- κ : conductivité thermique

Pourquoi ?

Nécessité de garantir autant d'équations que d'inconnues :

$$p = \rho \, r \, T = (\gamma - 1)(E - \frac{1}{2} V^2).$$

- $r = 287 \; J.kg^{-1}.K^{-1}$: constante des gaz parfaits,
- $\gamma = \dfrac{C_p}{C_v}$: rapport des chaleurs spécifiques (1.4 pour de l'air).

$$\begin{pmatrix} \rho \\ u, \; v, \; w \\ p \\ T \end{pmatrix} \longleftrightarrow \left| \begin{array}{c} \text{Continiuté} \\ \text{PFD } (\textit{Momentum}) \times 3 \\ \text{1er principe thermo} \\ \text{Loi d'état des gaz parfaits} \end{array} \right.$$

1.8. Conditions aux limites (CL) et conditions initiales (CI) adaptées. . .

Connaissance du nombre adéquats de conditions aux limites sur TOUT le pourtour de $\mathcal{S}$:

- des entrées/sorties de fluide,
- des parois imperméables fixes ou mobiles, adhérentes ou non,
- des symétries,
- des conditions reportées à l'infini...

Approche instationnaire ? $\rightarrow$ condition initiale sur TOUT le domaine $\mathcal{V}$ à $t = 0\,s$:

$$u(\mathbf{x}, t=0),\ v(\mathbf{x}, t=0),\ w(\mathbf{x}, t=0)\ \ \forall \mathbf{x} \in \mathcal{V}.$$
$$\rho(\mathbf{x}, t=0),\ p(\mathbf{x}, t=0),\ T(\mathbf{x}, t=0)\ \ \forall \mathbf{x} \in \mathcal{V}.$$

Plus facile à manipuler sous forme algébrique avant les étapes de discrétisation :

1. en espace,
2. en temps.

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{U} + \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{F^x} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{F^y} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{F^z} \;=\; \mathbf{H},$$

avec

$$\mathbf{U} = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \rho f_{vx} \\ \rho f_{vy} \\ \rho f_{vz} \\ \rho \mathbf{f_v} \cdot \mathbf{V} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{F^x} = \begin{Bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p + \tau_x \\ \rho uv + \tau_{xy} \\ \rho uw + \tau_{xz} \\ (\rho E + p + \tau_x)u + \tau_{xy} v + \tau_{xz} w - \kappa \frac{\partial T}{\partial x} \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{F^y} = \begin{Bmatrix} \rho v \\ \rho uv + \tau_{xy} \\ \rho v^2 + p + \tau_y \\ \rho vw + \tau_{yz} \\ (\rho E + p + \tau_y)v + \tau_{xy} u + \tau_{yz} w - \kappa \frac{\partial T}{\partial y} \end{Bmatrix}, \mathbf{F^z} = \begin{Bmatrix} \rho w \\ \rho uw + \tau_{xz} \\ \rho vw + \tau_{yz} \\ \rho w^2 + p + \tau_z \\ (\rho E + p + \tau_z)w + \tau_{xz} u + \tau_{yz} v - \kappa \frac{\partial T}{\partial z} \end{Bmatrix}.$$

Section. 2

Boucle de modélisation numérique

2.1. Boucle de modélisation articulée autour de 4 modèles

Démarche de la **modélisation numérique** $\rightarrow$ construction et utilisation de **modèles approchés** du comportement de **systèmes physiques**, en utilisant **l'outil informatique**.

- Description en langage *ingénieur* du problème **physique** ;
- Traduction du problème d'ingénieur en écritures **mathématiques** ;
- Construction d'un modèle **numérique** (ou algébrique) (méthodes de discrétisation) ;
- Écriture/développement d'un **logiciel**.

Introduction d'erreurs lors du passage d'un modèle à l'autre :

- erreur sur le choix du modèle mathématique = erreur entre modèles réel et mathématique ;
- erreur de discrétisation = erreur entre modèles ... et ... ;
- erreur d'origine informatique = erreur entre modèles ... et ...

Proposition de définition d'un bon modélisateur ?

Expertise suffisante pour contrôler ces erreurs

→ s'assurer que la solution fournie par le logiciel est **'assez' proche du comportement réel** du système physique étudié (inconnu pas a priori).

⥀ Ne pas hésiter à *itérer* la boucle !

2.2. Modèle physique

Description du modèle physique qui repose sur :

- la représentation de sa **géométrie**,
- la sélection des **variables inconnues** que l'on cherche à évaluer et la nature des variations **spatio-temporelles**,
- les **lois de la physique** qui régissent le comportement,
- les valeurs des **propriétés physiques** supposées connues,
- les **sollicitations**, **conditions aux limites**, conditions **initiales** ?

Description du modèle mathématique qui repose sur :

- **nature** du problème (stationnaire ou non...),
- **dimensions** retenues,
- **EDP**,
- lois de **conservations**,
- lois de **comportement**,
- **conditions aux limites** et **conditions initiales**,

Si nécessaire $\rightarrow$ écriture variationnelle (MEF).

2.4. Modèle numérique/algébrique/discret

Modèle mathématique $\rightarrow$ modèle numérique via des techniques de discrétisation :

1. en espace,
2. **puis** en temps (si requis).

Méthodes de discrétisatoin en espace :

- la méthode des **différences finies** (MDF),
- la méthode des **éléments finis** (MEF),
- la méthode des **volumes finis** (MVF),
- ...

$\rightarrow$ écriture systématique vers système algébrique :

$$\begin{aligned} [M]\{\ddot{U}\} + [K]\{U\} &= \{F\} : \text{dynamique} \\ [M]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} &= \{F\} : \text{thermique, CFD} \\ [K]\{U\} &= \{F\} : \text{statique, stationnaire} \end{aligned}$$

Matrices $[M]$, $[K]$ et vecteur $\{F\}$:

- constants (linéaires),
- ou dépendants de la solution $\{U\}$ (non linéaires).

Objectif : tendre vers la **solution exacte du problème mathématique** (!!)

Comment ? en $\searrow$ erreur de troncature !

- $\nearrow$ la taille du maillage,
- $\nearrow$ le nombre de *degrés de liberté* (ddl),
- $\nearrow$ la taille du système à résoudre,
- $\nearrow$ ressources informatiques (CPU, mémoire, calcul distribué),
- $\nearrow$ temps de calcul (rôle des CRI).

Question :

Atteindre la **solution exacte du problème mathématique** et c'est tout ?

Section. 3

Principales méthodes numériques et rappels

Logique de déroulement :

1. création d'un maillage,
2. associer un nœud à une inconnue nodale : $U(x_i) = U_i$ (en 1D),
3. dérivées (1er ordre, 2nd ordre ...) continues en temps et en espace $\rightarrow$ formes discrètes (D.L.) :

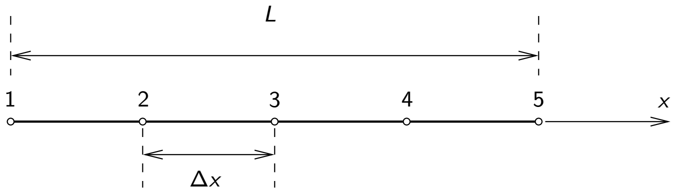
$$\begin{aligned}
\frac{dU}{dx} &= \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2\Delta x} + \Delta x^2(...) && \text{centrée dordre 2} \\
\frac{dU}{dx} &= \frac{U_{i+1} - U_i}{\Delta x} + \Delta x(...) && \text{décentrée DROITE d'ordre 1} \\
\frac{dU}{dx} &= \frac{U_i - U_{i-1}}{\Delta x} + \Delta x(...) && \text{décentrée GAUCHE d'ordre 1}
\end{aligned}$$

4. construction du système (ici stationnaire) :

$$[K]\{U\} = \{F\}.$$

5. Résolution,
6. Affichage et post-traitement.

$$-k\frac{d^2T(x)}{dx^2} - f_v = 0 \quad \forall x \in [0,\ L] \quad \text{avec} \quad T(0) = T_o \quad \text{et} \quad -k\frac{dT}{dx}(L) = \phi_L.$$



Forme discrète centrée d'ordre 2 :

$$-k\frac{T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1}}{\Delta x^2} - f_v \approx 0, \quad \forall i = \cancel{1}, 2, 3, 4, \cancel{5}$$

Conditions aux limites :

- En $i = 1$: $T_1 = T_o$
- En $i = 5$: $-k(T_6 - T_4) = 2\Delta x \phi_L$. Recours à un nœud fictif numéroté 6 !

Construction du système algébrique :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_o \\ f_v \Delta x^2 / k \\ f_v \Delta x^2 / k \\ f_v \Delta x^2 / k \\ f_v \Delta x^2 / k - 2\Delta x \phi_L / k \end{Bmatrix}$$

Remarque : la ligne 5 inclut la condition à la limite.

Approche enrichie :

1. ré-écriture du modèle mathématique sous sa forme variationnelle ou intégrale,
2. maillage non structuré (table des connectivités),
3. découpage :

$$\iint_A \ldots dA + \oint_S \ldots dS = \sum_{e=1}^{N} \iint_{Ae} \ldots dA + \sum_{e=1}^{n} \int_{Se} \ldots dS$$

4. approximation des variables sur une cellule élémentaire :

$$U(x) = \sum N_i(x) U_i \quad \text{avec} \quad N_i \ : \ \text{fonctions d'approximations nodales}$$

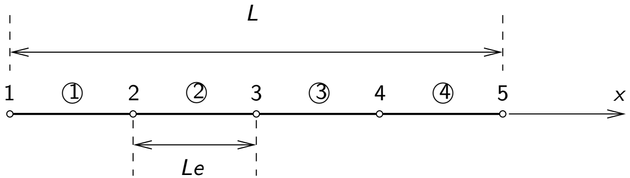
5. $\rightarrow$ matrices et vecteurs **élémentaires** : $[K_e], \{F_e\}$...
6. assemblage,
7. prise en compte des condition aux limites de type Dirichlet,
8. résolution et post-traitement.

MEF / Application simplifiée : thermique 1D stationnaire

Forme forte

$$-k\frac{d^2T(x)}{dx^2} - f_v = 0 \quad \forall x \in [0,\ L] \quad \text{avec} \quad T(0) = T_o \quad \text{et} \quad -k\frac{dT}{dx}(L) = \phi_L.$$

Maillage (coordonnées et connectivités) $\rightarrow$ kconec, vcorg



Forme faible $\rightarrow$ deux avantages

$$\mathcal{W} \quad = \quad \int_0^L \frac{d\varphi}{dx} k \frac{dT}{dx} dx - \left[\varphi\, k \frac{dT}{dx}\right]_0^L - \int_0^L \varphi f_v\, dx = 0 \quad \forall \varphi(x)$$

Discrétisation de la forme intégrale élémentaire

$$\mathcal{W} = \sum_{e=1}^{Ne} \mathcal{W}_e + \mathcal{W}_{CL} \quad \text{avec} \quad \mathcal{W}_e = \int_0^{Le} \frac{d\varphi}{ds} k \frac{dT}{ds} ds - \int_0^{L} \varphi f_v \, ds$$

$$\mathcal{W}_e = < \varphi_e > ([Ke]\{Te\} - \{Fe\}) \quad \text{avec} \quad [Ke] = \frac{k}{Le} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \{Fe\} = \frac{f_v Le}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

Assemblage

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_o \\ f_v Le^2/k \\ f_v Le^2/k \\ f_v Le^2/k \\ f_v Le^2/k/2 - \phi_L Le/k \end{Bmatrix}$$