

CF04

Mécanique des fluides numérique et couplages multiphysiques

Emmanuel LEFRANÇOIS

Equipe Numérique

Mots-clés :

Mécanique des fluides, méthodes numériques, couplages multiphysiques

Laboratoire Roberval, UMR 7337 UTC-CNRS

<http://roberval.utc.fr>



Cinquième partie

Ecoulements compressibles et captures de chocs

- 1 Motivations de ce chapitre
- 2 Rappels généraux des écoulements compressibles
- 3 Ondes de choc
- 4 Application pragmatique au dimensionnement des entrées d'air
- 5 Techniques numériques de capture de chocs

Section. 1

Motivations de ce chapitre

1.1. Pourquoi ce cours ?

Pour des vitesses élevées, on parle généralement d'un nombre de Mach supérieur à 0.3 :

$$\mathcal{M} = \frac{\text{vitesse de l'écoulement}}{\text{célérité du son}} > 0.3 \quad \text{soit} \quad > 100 \text{ m/s}$$

effets de compressibilité non négligeables et désormais $\rho \neq \text{cste}$!

Deux sections :

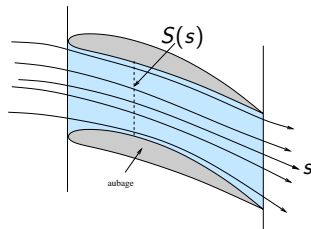
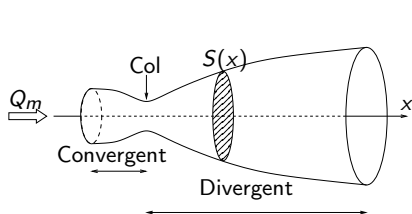
- 1/ rappels (?) succincts de la théorie des écoulements compressibles, chocs droits et enfin chocs obliques.
- 2/ techniques CFD spécifiques pour garantir la stabilité de la solution que les effets de compressibilité tenteront systématiquement de mettre à mal.

Section. 2

Rappels généraux des écoulements compressibles

2.1. Écoulement isentropique 1D à section variable

Pourquoi du 1D ?



Écoulements compressibles supposés 1D au travers d'une section variable $S(x)$.

2.1.Écoulement isentropique 1D à section variable/ Equations de bilan

- Bilan de masse :

$$Q_m = \rho S u = \text{cste}$$

- Bilan d'énergie (échanges avec extérieur négligés) :

$$h_t = h + \frac{u^2}{2} = \text{cste}$$

h enthalpie et h_t l'enthalpie d'arrêt/de réservoir (Δ).

- Bilan de quantité de mouvement (forme différentielle) :

$$dp + \rho u du = 0.$$

Fermeture du système d'équations :

- Loi d'état des gaz parfaits $p = \rho r T$ et équation d'état $h = c_p T + \text{cste}$.

Célérité du son : $c = \sqrt{\gamma r T}$.

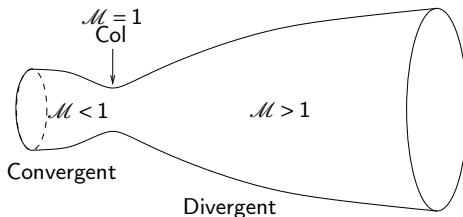
2.1.Écoulement isentropique 1D à section variable/ Effets de changements de section

Deux équations fondamentales :

$$\frac{du}{u} = \frac{-1}{1-\mathcal{M}^2} \frac{dS}{S} \quad \text{et} \quad \frac{dp}{p} = \frac{+1}{1-\mathcal{M}^2} \left(\frac{\rho u^2}{p} \right) \frac{dS}{S} \quad \text{avec} \quad S(x) : \text{section}$$

1. $0 < \mathcal{M} < 1$ (subsonique) : $S \searrow \rightarrow u \nearrow$ et $p \searrow$,
2. $\mathcal{M} > 1$ (supersonique), c'est LE CONTRAIRE : $S \nearrow \rightarrow u \nearrow$ et $p \searrow$.

Application concrète au fonctionnement des moteurs fusée.



→ Profils de $\mathcal{M}(x)$ et $p(x)$

2.1.Écoulement isentropique 1D à section variable/ Relations fondamentales

Conditions de réservoir : $u=0$, p_t , T_t ... avec l'indice t pour totale.

Relations fondamentales :

$$\begin{aligned}\frac{T_t}{T} &= 1 + \frac{\gamma-1}{2} \mathcal{M}^2 \\ \frac{p_T}{p} &= \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} \mathcal{M}^2\right)^{\gamma/(\gamma-1)} \\ \frac{\rho_T}{\rho} &= \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} \mathcal{M}^2\right)^{1/(\gamma-1)},\end{aligned}$$

Calcul du débit :

$$Q_m = \rho S u = \rho_\star S_\star u_\star \quad \text{calculé au col (sonique)}$$

Dimensionnement de la section au col (la plus petite) :

$$\frac{S}{S_\star} = \frac{1}{\mathcal{M}} \left(\frac{2}{\gamma+1} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} \mathcal{M}^2 \right) \right)^{(\gamma+1)/2(\gamma-1)} \quad \text{section critique} \Leftrightarrow \mathcal{M} = 1$$

2.1.Écoulement isentropique 1D à section variable/ Tables d'écoulements isentropiques compressibles 1D

\mathcal{M}	T/T_t	p/p_t	ρ/ρ_t	S/S_*
0	1.0000	1.0000	1.0000	∞
0.2500	0.9877	0.9575	0.9694	2.4027
0.5000	0.9524	0.8430	0.8852	1.3398
0.7500	0.8989	0.6886	0.7660	1.0624
1.0000	0.8333	0.5283	0.6339	1.0000
1.2500	0.7619	0.3861	0.5067	1.0468
1.5000	0.6897	0.2724	0.3950	1.1762
1.7500	0.6202	0.1878	0.3029	1.3865
2.0000	0.5556	0.1278	0.2300	1.6875
2.2500	0.4969	0.0865	0.1740	2.0964
2.5000	0.4444	0.0585	0.1317	2.6367
2.7500	0.3980	0.0398	0.0999	3.3377
3.0000	0.3571	0.0272	0.0762	4.2346
3.2500	0.3213	0.0188	0.0585	5.3691
3.5000	0.2899	0.0131	0.0452	6.7896
3.7500	0.2623	0.0092	0.0352	8.5517
4.0000	0.2381	0.0066	0.0277	10.7188
4.2500	0.2168	0.0047	0.0219	13.3622
4.5000	0.1980	0.0035	0.0174	16.5622
4.7500	0.1814	0.0025	0.0140	20.4084
5.0000	0.1667	0.0019	0.0113	25.0000
5.2500	0.1536	0.0014	0.0092	30.4467
5.5000	0.1418	0.0011	0.0076	36.8690
5.7500	0.1314	0.0008	0.0063	44.3987
6.0000	0.1220	0.0006	0.0052	53.1798
6.2500	0.1135	0.0005	0.0043	63.3685
...				

2.1.Écoulement isentropique 1D à section variable/ Application au calcul de l'écoulement dans un moteur fusée

$P_t = 110$ bars, $T_t = 2400$ K, sortie dans le vide.

1. Compléter le tableau.
2. Déterminer le débit massique de gaz.
3. Calculer la poussée du moteur : $\mathcal{P} = Q_m v_s + S_s(p_s - p_{ext})$ avec s pour sortie.



Axe (m)	S (m^2)	S/S_*	P (Pa)	ρ (kg/m^3)	\mathcal{M}
-0.32	0.135	2.28			
0.00	0.059	1			
0.32	0.225	3.81			
0.65	0.496	8.40			
0.97	0.872	14.78			
1.30	1.355	22.96			
1.62	1.942	32.91			
1.95	2.636	44.67			
2.27	3.435	58.22			
2.60	4.340	73.55			

2.1.Ecoulement isentropique 1D à section variable/ Et Bernoulli ?

À partir de quelle vitesse, l'approche par Bernoulli incompressible :
n'est plus valable ?

$$p_t = p + \frac{1}{2} \rho V^2$$

► Relation générale :

$$\frac{p_t}{p} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} \mathcal{M}^2\right)^{\gamma/(\gamma-1)}$$

► Développement en série :

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \mathcal{O}(x^3)$$

$$\Rightarrow p_t = p + \frac{1}{2} \rho V^2 \left(1 + \frac{\mathcal{M}^2}{4} + \mathcal{O}(\mathcal{M}^4)\right)$$

Limite usuelle

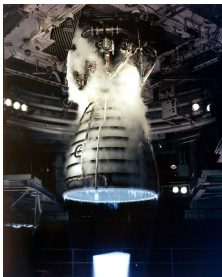
\mathcal{M}	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$\mathcal{M}^2/4$ [%]	0.25	1	2.25	4	6.25

$$p_t \approx p + \frac{1}{2} \rho V^2 \quad \text{pour } \mathcal{M} < 0.3$$

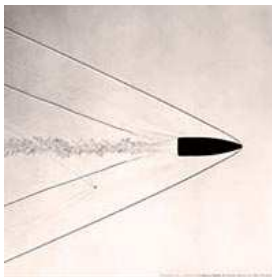
Section. 3

Ondes de choc

3.1. Késako ?



J2S Space Shuttle Engine



Projectile supersonique



Passage mur du son sur F22

3.2. Et tout d'abord pourquoi une onde de choc ?

1. Variations très brutales des grandeurs à travers l'onde de choc,
2. Epaisseur de l'ordre du libre parcours moyen des particules ($2 \cdot 10^{-4} \text{ mm}$).

Écoulement supersonique : $\mathcal{M} > 1 \rightarrow u > c \rightarrow$ effet précède la cause !

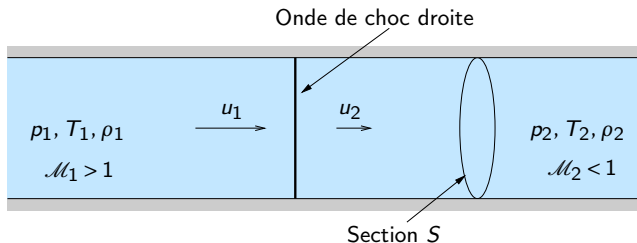
Toute variation de l'environnement (pression extérieure...) ou de géométrie (rampe de compression, paroi, entrée d'air...) se traduira par la nécessité d'adapter l'écoulement **brutalement** au travers d'ondes de choc (droites ou obliques)

Facilement déterminées à partir de tables de choc similaires aux tables d'écoulements isentropiques.

Attention !

Au travers d'une onde de choc, l'hypothèse d'isentropie (adiabatique réversible) n'est bien entendu plus vérifiée.

3.3. Onde de choc droite STATIONNAIRE



Hypothèses simplificatrices :

1. les forces de frottement,
2. les forces de gravité,
3. les échanges caloriques avec l'extérieur (adiabatique).

Conservation de la masse

$$\frac{Q_m}{S} = \rho_1 u_1 = \rho_2 u_2.$$

Conservation de la quantité de mouvement

$$Q_m(u_2 - u_1) = S(p_1 - p_2) \Rightarrow p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2.$$

Conservation de l'énergie

$$h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2}$$

complétée des lois d'état :

$$p = \rho r T \quad \text{et} \quad h = c_p T.$$

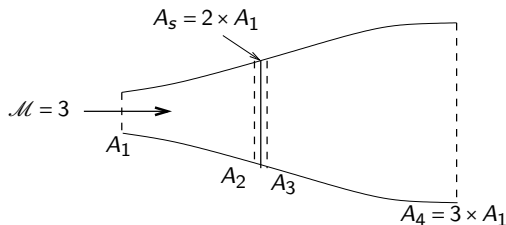
3.3.Onde de choc droite STATIONNAIRE/ Relations FONDAMENTALES

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} \mathcal{M}_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} \mathcal{M}_2^2}, \quad \frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + \gamma \mathcal{M}_1^2}{1 + \gamma \mathcal{M}_2^2}, \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{\mathcal{M}_1 c_1}{\mathcal{M}_2 c_2}, \quad \mathcal{M}_2^2 = \frac{\mathcal{M}_1^2 + 2/(\gamma-1)}{2\gamma \mathcal{M}_1^2/(\gamma-1) - 1}.$$

ou sous forme de tables :

\mathcal{M}_1	\mathcal{M}_2	T_2/T_1	p_2/p_1	ρ_2/ρ_1
1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1.1000	0.9118	1.0649	1.2450	1.1691
1.2000	0.8422	1.1280	1.5133	1.3416
1.3000	0.7860	1.1909	1.8050	1.5157
1.4000	0.7397	1.2547	2.1200	1.6897
1.5000	0.7011	1.3202	2.4583	1.8621
1.6000	0.6684	1.3880	2.8200	2.0317
1.7000	0.6405	1.4583	3.2050	2.1977
1.8000	0.6165	1.5316	3.6133	2.3592
1.9000	0.5956	1.6079	4.0450	2.5157
2.0000	0.5774	1.6875	4.5000	2.6667
2.1000	0.5613	1.7705	4.9783	2.8119
2.2000	0.5471	1.8569	5.4800	2.9512
2.3000	0.5344	1.9468	6.0050	3.0845
2.4000	0.5231	2.0403	6.5533	3.2119
2.5000	0.5130	2.1375	7.1250	3.3333
2.6000	0.5039	2.2383	7.7200	3.4490
2.7000	0.4956	2.3429	8.3383	3.5590
2.8000	0.4882	2.4512	8.9800	3.6636
2.9000	0.4814	2.5632	9.6450	3.7629
3.0000	0.4752	2.6790	10.3333	3.8571
...				

3.3.Onde de choc droite STATIONNAIRE/ Application



$$\mathcal{M}_1 = 3$$

$$\mathcal{M}_2 = ? \rightarrow A_2/A_\star = 2 \times A_1/A_\star = 8.46$$

$$\mathcal{M}_3 ? \rightarrow \text{Table de chocs}$$

$$\mathcal{M}_3 = 0.443$$

$$\mathcal{M}_4 ? \rightarrow A_4/A_\star = 3/2 A_3/A_\star = 2.19$$

\mathcal{M}	T/T_t	p/p_t	ρ/ρ_t	A/A_\star
3	0.3571	0.0272	0.076	4.23

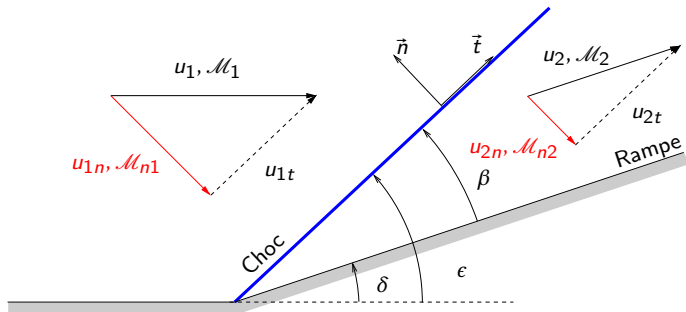
\mathcal{M}	T/T_t	p/p_t	ρ/ρ_t	A/A_\star
3.73	0.2636	0.0094	0.0357	8.46

\mathcal{M}_1	\mathcal{M}_2	T_2/T_1	p_2/p_1	ρ_2/ρ_1
3.73	0.443	3.639	16.06	4.41

\mathcal{M}	T/T_t	p/p_t	ρ/ρ_t	A/A_\star
0.443	0.9622	0.8739	0.9082	1.46

\mathcal{M}	T/T_t	p/p_t	ρ/ρ_t	A/A_\star
0.2758	0.9850	0.9485	0.9630	2.19

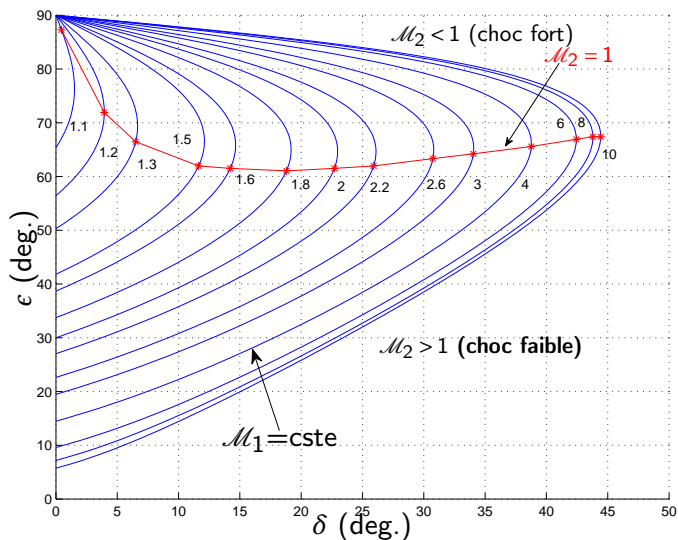
3.4. Onde de choc oblique



1. δ pour l'angle de déflexion (ou de rampe),
2. ϵ pour l'angle de choc : à extraire d'une polaire (slide suivante)
3. Table de choc pour les composantes **normales** au choc \rightarrow géométrie élémentaire...

Note : les relations fondamentales ne seront pas ici exposées.

3.4.Onde de choc oblique/ Polaires de choc (1/2)



$M_2 > 1 \rightarrow$ choc faible,

$M_2 < 1 \rightarrow$ choc fort

3.4.Onde de choc oblique/ Polaires de choc (2/2)

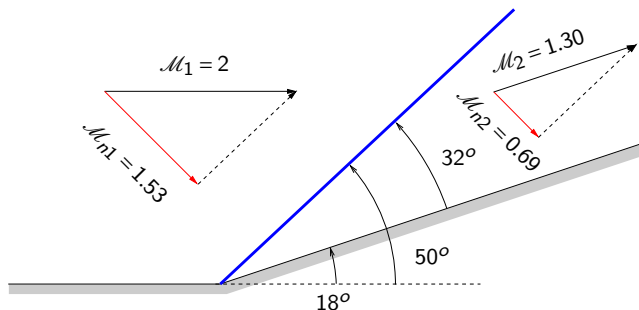
Connaissant \mathcal{M}_1 et δ :

1. déterminer l'angle de choc ϵ (par calcul ou lecture directe de la polaire),
2. calculer $\mathcal{M}_{n1} = \mathcal{M}_1 \sin(\epsilon)$,
3. table des chocs droits \rightarrow extraire \mathcal{M}_{n2} ,
4. en déduire $\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_{n2} / \sin(\epsilon - \delta)$.

A retenir :

- ▶ Il existe un angle limite pour chaque valeur de \mathcal{M}_1 au dessus duquel il n'y a plus de solution.
- ▶ En dehors de conditions particulières imposées en aval de la rampe, des considérations de stabilité favorisent la solution de choc faible ($\mathcal{M}_2 > 1$).

3.5. Application



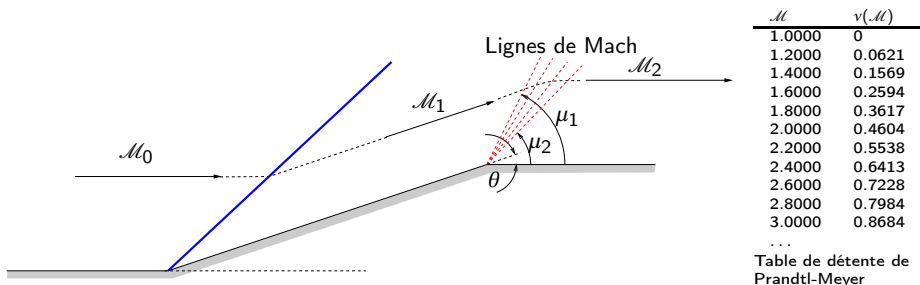
En respectant les étapes du slide précédent :

1. $\epsilon = 50^\circ$ (lecture directe de la polaire),
2. $M_{n1} = 2 \times \sin(50) = 1.53$,
3. Table de chocs :

M_{n1}	M_{n2}	T_2/T_1	p_2/p_1	ρ_2/ρ_1
1.53	0.69	1.34	2.56	1.91

4. $M_2 = 0.69 / \sin(50 - 18) = 1.30$

3.6. Faisceaux de détente : origine et descriptif du phénomène



- ▶ $\mu_1 = \arcsin\left(\frac{1}{\mathcal{M}_1}\right)$, $\mu_2 = \arcsin\left(\frac{1}{\mathcal{M}_2}\right)$ et $\theta = v(\mathcal{M}_2) - v(\mathcal{M}_1)$
- ▶ v : fonction de Prandtl-Meyer (par convention $v(1) = 0$)

$$v(\mathcal{M}) = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \arctan\left(\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}(\mathcal{M}^2-1)}\right) - \arctan(\sqrt{\mathcal{M}^2-1})$$

- ▶ **MISE EN PRATIQUE** : calculer $v(\mathcal{M}_1)$ puis on en déduit $v(\mathcal{M}_2)$ connaissant θ .

Section. 4

Application pragmatique au dimensionnement des entrées



Concorde



Rafale

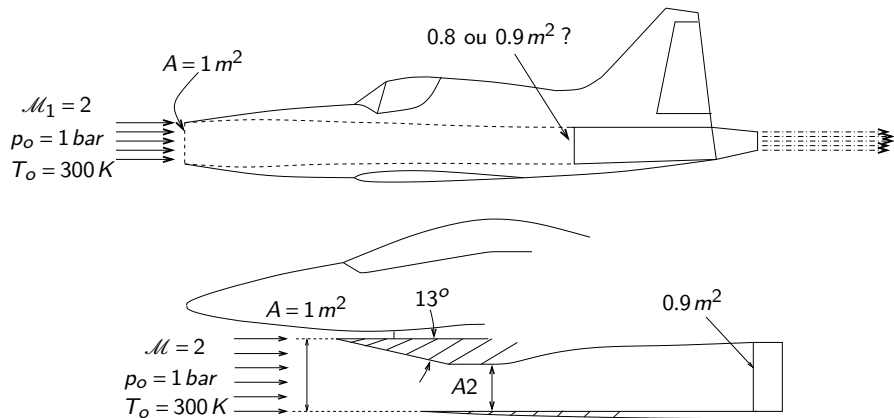


Mirage 2000

Contraintes de fonctionnement

Les réacteurs positionnés en aval des entrées d'air doivent **OBLIGATOIREMENT** être alimentés en régime **SUBSONIQUE** !

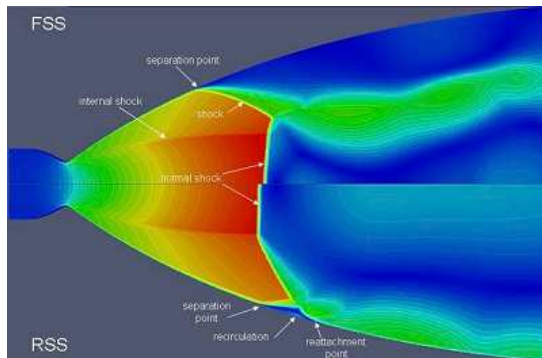
Applications



Section. 5

Techniques numériques de capture de chocs

5.1. Cas illustratif : structures de chocs RSS et FSS sur Vulcain



Caractéristique clé du solveur : capacité de **capture de choc** (= précis et stable)

Principalement deux techniques :

1. ajout d'un terme de dissipation numérique,
2. décentrement des termes de flux.

5.2. Généralités sur les techniques de capture de choc

1. Méthodes **classiques**

→ chocs faibles seulement sinon instables

- ▶ MacCormack,
- ▶ **Lax-Wendroff**,
- ▶ Beam-Warming.

2. Méthodes **modernes**

→ à haute résolution

- ▶ schémas TVD d'ordre supérieur proposés par Harten,
- ▶ **technique FCT** (*Flux Corrected Transport* **introduit par Boris et Book**,
- ▶ **approche MUSCL** (*Monotonic Upstream-Cented Schemes for Conservation Laws*) (**Godunov , van Leer**),
- ▶ schémas ENO/WENO proposés par Harten et al.,
- ▶ solveurs Riemann approximatifs proposés par Roe et par Osher,
- ▶ ...

5.3. Mise en évidence de la stabilité d'un schéma au voisinage d'une discontinuité de type choc

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U_{\infty} \frac{\partial C}{\partial x} = 0 \quad \forall x \in [0, 1]$$

$$C_o(0, t) = 0, C_o(1, t) = 1 \text{ et } C([0, 0.5], t) = 0, C([0.5, 1], t) = 1 \quad \forall t \geq 0.$$

Solution exacte :

$$C_{ex} = C_o(x - U_{\infty} t)$$

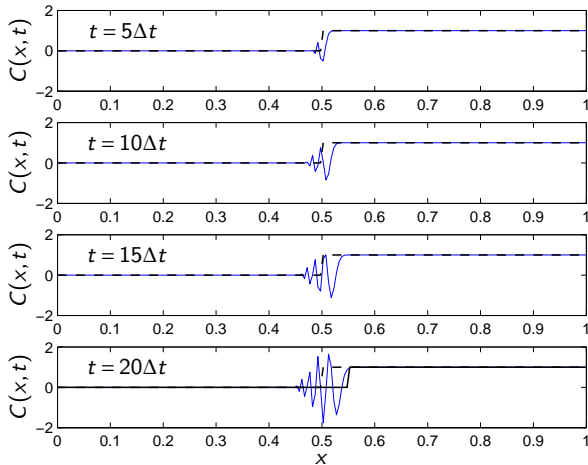
Différentes finies centrées, explicite :

$$C_j^{n+1} = \frac{U_{\infty} \Delta t}{2\Delta x} C_{j-1}^n - C_j^n - \frac{U_{\infty} \Delta t}{2\Delta x} C_{j+1}^n$$

Conclusion : schéma centré et précis à l'ordre 2 est **inconditionnellement instable** !

Analyse de la positivité du schéma prédit clairement ce résultat avec le coefficient pondérateur de C_{j+1}^n :

$$-\frac{U_{\infty} \Delta t}{2\Delta x} < 0$$

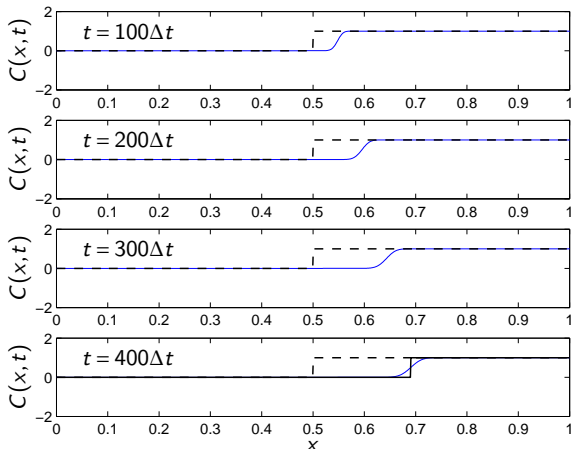


Propagation d'un front raide à l'aide d'un schéma centré en espace et précis à l'ordre 2
 ($U_\infty = 0.5 \text{ m/s}$, 200 nœuds, $\Delta t = 5 \cdot 10^{-3} \text{ s}$)

5.4. ...correction par ajout d'un terme dissipatif

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U_{\infty} \frac{\partial C}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad \forall x \in [0, 1]$$

$$\Rightarrow C_j^{n+1} = \left(\frac{U_{\infty} \Delta t}{2\Delta x} + \frac{\Delta t \nu}{\Delta x^2} \right) C_{j-1}^n + \left(1 - 2 \frac{\Delta t \nu}{\Delta x^2} \right) C_j^n + \left(-\frac{U_{\infty} \Delta t}{2\Delta x} + \frac{\Delta t \nu}{\Delta x^2} \right) C_{j+1}^n$$



5.5. ...correction par décentrement du terme de transport

Technique de décentrement : Godunov (1959), van leer (1986)...

$$\text{Décentrée à droite : } \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{C_{j+1}^n - C_j^n}{\Delta x} + \Delta x(\dots)$$

$$\text{Décentrée à gauche : } \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{C_j^n - C_{j-1}^n}{\Delta x} + \Delta x(\dots)$$

Principe de base

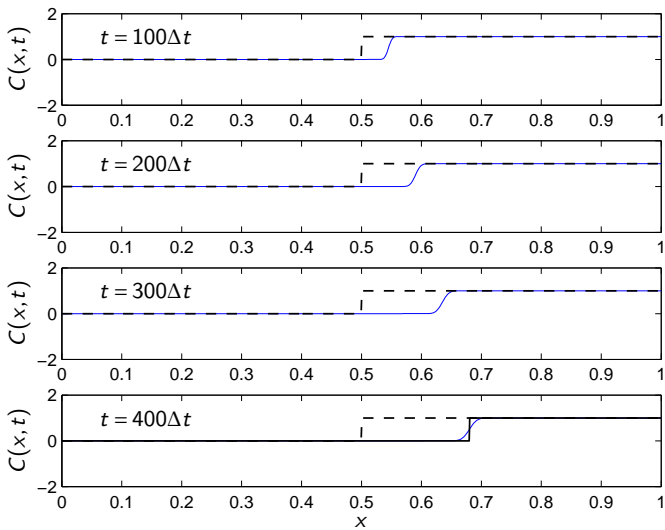
réduire l'ordre de précision du schéma pour garantir la stabilité (dans quel sens?)

Règle d'or : décentrer du côté d'où provient l'information !

$$\text{Décentrée à droite : } C_j^{n+1} = 0 \times C_{j-1}^n + \left(1 + \frac{\Delta t U_\infty}{\Delta x}\right) C_j^n - \frac{U_\infty \Delta t}{\Delta x} C_{j+1}^n$$

$$\text{Décentrée à gauche : } C_j^{n+1} = \frac{U_\infty \Delta t}{\Delta x} C_{j-1}^n + \left(1 - \frac{\Delta t U_\infty}{\Delta x}\right) C_j^n + 0 \times C_{j+1}^n$$

$$\text{Positivité garantit la stabilité ssi : } \Delta t < \left| \frac{\Delta x}{U_\infty} \right| \quad \leftarrow \text{Critère CFL} = \frac{U_\infty \Delta t}{\Delta x} < 1$$



5.6.Méthodes classiques/ Schéma de Lax-Wendroff (1960) :

Référence : P.D Lax et B. Wendroff, "Systems of conservation laws", Commun. Pure Appl Math., vol. 13, no 2, 1960, p. 217-237

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \quad \forall x \in [0, L]$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \Delta t a \left(\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} \right) + \frac{\Delta t^2 a^2}{2} \left(\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} \right)$$

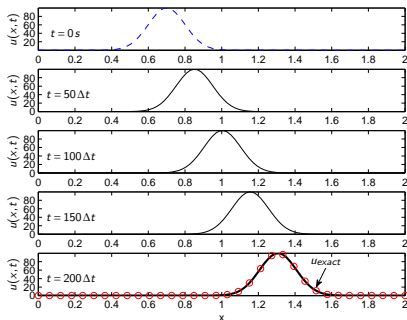
avec une viscosité numérique $\nu_{num.} = \frac{\Delta t^2 a^2}{2}$.

Schémas précis à l'ordre 2 en temps et en espace et stable sous condition de type CFL.

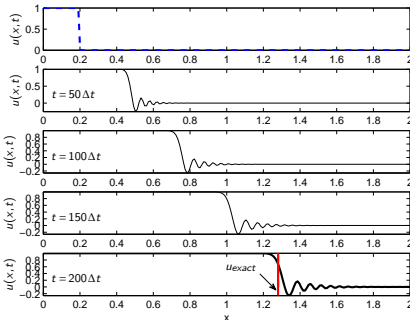
5.6.Méthodes classiques/ Schéma de Lax-Wendroff (1960) : limitations

Onde douce $u(x,0) = 100e^{-50(x-0.7)^2}$

Front raide de type choc



$f = 20u(x,t)$, $\Delta t = 1.52 \cdot 10^{-4} s$, 100 nœuds



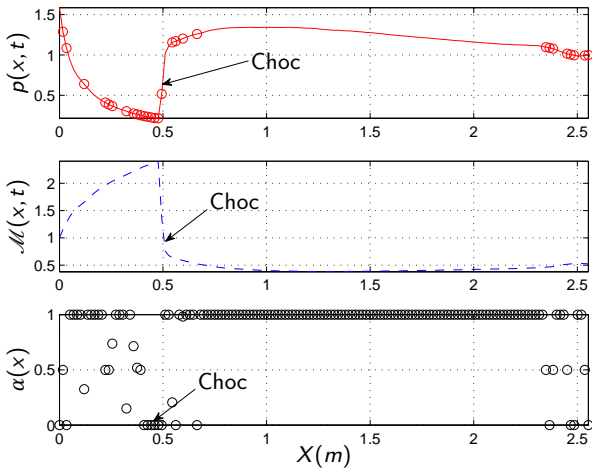
$f = 1.5u(x,t)$, 200 nœuds

5.7.Méthodes avancées/ Flux Corrected Transport (Boris & Book 1973)

Trois étapes successives :

1. calcul pour chaque pas de temps :
 - 1.1 d'une solution d'ordre dégradé (*low order*) : $u_l(x, t)$
 - 1.2 d'une solution d'ordre élevé (*high order*) : $u_h(x, t)$
2. calcul d'un indicateur $0 \leq \alpha \leq 1$ (appelé limiteur de flux) = 0 dans les zones de discontinuité, 1 dans les zones "calmes".
3. construction de la solution retenue :

$$u(x, t) = u_l + \alpha (u_h - u_l).$$



Démarrage d'une tuyère conique axisymétrique

5.7.Méthodes avancées/ Schémas MUSCL (van Leer, 1979) pour la capture de choc

MUSCL pour *Monotonic Upstream-Centered Scheme for Conservation Laws* s'appuie sur deux points :

1. interpolation du champ inconnue basée sur une combinaison non linéaire de solutions du premier et du second ordre,
2. emploi de limiteurs de pente ϕ pour garantir l'absence d'oscillations (schéma TVD) :
 - ▶ SuberBee,
 - ▶ Van Leer,
 - ▶ Van Albada...

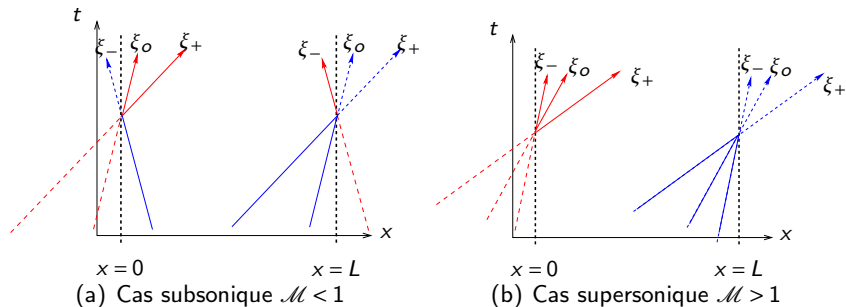
Exemple :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F(u) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{du_i}{dt} + \frac{F(u_{i+1/2}^*) - F(u_{i-1/2}^*)}{\Delta x} = 0$$

avec :

$$F(u_{i+1/2}^*) = F_{i+1/2}^{low} - \phi(r_i) (F_{i+1/2}^{low} - F_{i+1/2}^{high})$$

5.8. Rappels des conditions aux limites en compressible

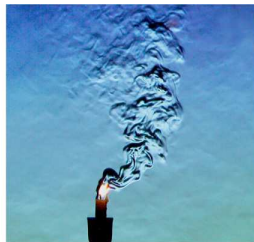
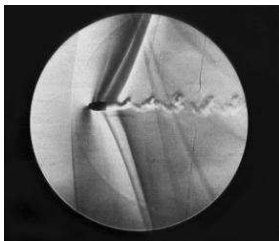


		À imposer	Caract. entrantes
Entrée	subsonique $\mathcal{M} < 1$	p_t, T_t, θ	3 : $u, u, u + c$
	supersonique $\mathcal{M} > 1$	$p_t, T_t, \theta, \mathcal{M}$	4 : $u - c, u, u, u + c$
Sortie	subsonique $\mathcal{M} < 1$	p_∞	1 : $u - c$
	supersonique $\mathcal{M} > 1$	–	0

$$\frac{T}{T_t} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} \mathcal{M}^2, \quad \frac{p}{p_T} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} \mathcal{M}^2 \right)^{\gamma/(\gamma - 1)}$$

5.9. Visualisation d'un Schlieren

Procédé d'origine expérimentale basé sur le gradient de masse volumique :



Mise en évidence/visibilité commune :

- ▶ des ondes de chocs,
- ▶ des ondes acoustiques.

Avantage : Pas d'écrasement/masquage par effet d'échelle.

5.10. Calcul et visualisation d'un Schlieren numérique

$$\text{Schlieren}_{num} = c_1 \exp\left(\frac{-c_2(|\nabla\rho| - |\nabla\rho|_{min})}{|\nabla\rho|_{max} - |\nabla\rho|_{min}}\right) \quad \text{avec} \quad c_1 = 0.8 \quad \text{et} \quad c_2 = 25.$$



Figure – Schlieren numérique transitoire démarrage divergent (6bar, ELF)