

# CF04

## Mécanique des fluides numérique et couplages multiphysiques

Emmanuel LEFRANÇOIS

Equipe Numérique

**Mots-clés :**

Mécanique des fluides, méthodes numériques, couplages multiphysiques

Laboratoire Roberval, UMR 7337 UTC-CNRS

<http://roberval.utc.fr>



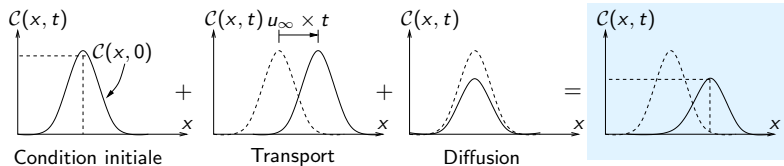
## Quatrième partie

### Introduction aux techniques CFD (3/3)

# Section. 1

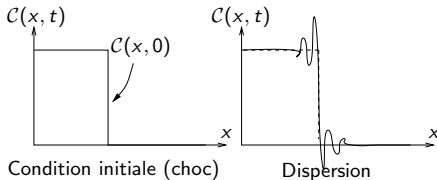
## Calcul des flux

1. **convectifs** (transport) liés aux effets de transport et responsable des **instabilités numériques** au voisinage des discontinuités ( ? ),
2. **diffusifs** liés aux effets de diffusion numérique/physique et qui au contraire jouent un rôle stabilisant sur la solution (mais point trop n'en faut. . . )



► + **dispersif** (numérique) :

$$C_{\lambda(\max)} > C_{\lambda(\min)}.$$



- ▶ Etape décisive dans le choix des schémas de discrétisation retenus,
- ▶ Origine des phénomènes d'instabilité numérique en présence de fronts *raides*,
- ▶ Garantir l'absence d'oscillations numérique au voisinage des discontinuités.

TROIS principales familles des schémas :

1. TVD (*Total Variation Diminishing*)

Roe, Harten-Yee, Steger-Warming ou Mac-Cormack,

2. FCT (*Flux Corrected Transport*)

Boris et Book (1973),

3. WENO (*Weighted Essentially Non Oscillatory*) ordre élevés (4, 5 voire plus).

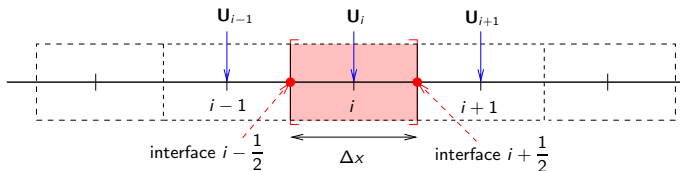
Harten, Osher, Chakravarthy (1987)

**En règle générale :** gain de stabilité  $\leftrightarrow$  dégradation de l'ordre de précision !

- ▶ technique de décentrement (TVD, WENO),
- ▶ ajout diffusion/anti-diffusion (FCT).

Equations d'Euler 1D, compressible, non visqueux, instationnaire, section constante.

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \mathbf{0} \quad \text{avec} \quad \mathbf{U} = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{Bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (E + p)u \end{Bmatrix}.$$



**Forme discrétisée sur la cellule  $i$  :**

$$\frac{\partial \mathbf{U}_i}{\partial t} + \frac{1}{\Delta x} \left( \mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}} - \mathbf{F}_{i-\frac{1}{2}} \right) = \mathbf{0},$$

$\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}$  (resp.  $\mathbf{F}_{i-\frac{1}{2}}$ )  $\rightarrow$  flux numérique à travers l'interface  $i + \frac{1}{2}$  (resp.  $i - \frac{1}{2}$ ).

Décomposition du flux  $F_{i\pm\frac{1}{2}}$  en la somme :

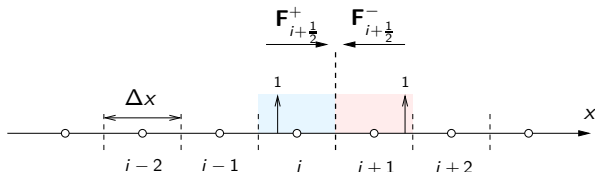
- ▶ contribution amont ( $\rightarrow$ ) notée  $F_{i\pm\frac{1}{2}}^+$ ,
- ▶ contribution aval ( $\leftarrow$ ) notée  $F_{i\pm\frac{1}{2}}^-$ .

$$\rightarrow F_{i\pm\frac{1}{2}} = F_{i\pm\frac{1}{2}}^+ + F_{i\pm\frac{1}{2}}^-.$$

Plusieurs choix selon l'ordre de précision recherché :

- ▶ au premier ordre :

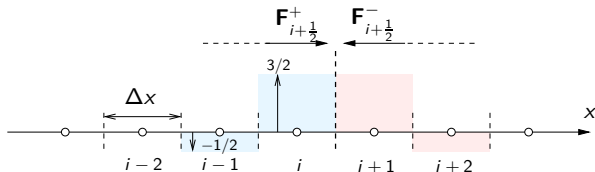
$$F_{i+\frac{1}{2}}^+ = F_i^+ \text{ et } F_{i+\frac{1}{2}}^- = F_{i+1}^-$$



- ▶ au second ordre :

$$F_{i+\frac{1}{2}}^+ = \frac{3}{2}F_i^+ - \frac{1}{2}F_{i-1}^+$$

$$F_{i+\frac{1}{2}}^- = \frac{3}{2}F_{i+1}^- - \frac{1}{2}F_{i+2}^-$$



## Question :

Comment distinguer les deux contributions  $\mathbf{F}^+$  et  $\mathbf{F}^-$  ?

## Réponse

⇒ analyse aux valeurs propres en linéarisant le terme de flux :

$$\mathbf{F} = \mathbf{A}\mathbf{U} \quad \text{avec la matrice jacobienne} \quad \mathbf{A} = \partial\mathbf{F}/\partial\mathbf{U}$$

⇒ Diagonalisation sur la base  $\mathcal{X}$  de ses vecteurs propres :

$$\mathbf{A} = \mathcal{X}\mathbf{\Lambda}\mathcal{X}^{-1} \quad \text{avec} \quad \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} u - c & & \\ & u & \\ & & u + c \end{bmatrix}$$

Pour écrire

$$\mathbf{F}^+ = \mathbf{A}^+\mathbf{U} \quad \text{et} \quad \mathbf{F}^- = \mathbf{A}^-\mathbf{U}$$

$$\mathbf{A}^+ = \mathcal{X}\mathbf{\Lambda}^+\mathcal{X}^{-1} \quad \text{et} \quad \mathbf{A}^- = \mathcal{X}\mathbf{\Lambda}^-\mathcal{X}^{-1}$$

où les composantes des matrices diagonales  $\mathbf{\Lambda}^\pm$  sont données par :

$$\lambda_j^\pm = \frac{1}{2} (\lambda_j \pm |\lambda_j|), \quad j = 1, 2, 3.$$



Où évaluer les matrices jacobiniennes  $\mathbf{A}^+$  et  $\mathbf{A}^-$  ?

- **Steger et Warming** (1981) proposent de les calculer aux mêmes points que  $\mathbf{U}$  :

$$\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^{SW} = \left( \frac{3}{2} \mathbf{A}_i^+ \mathbf{U}_i - \frac{1}{2} \mathbf{A}_{i-1}^+ \mathbf{U}_{i-1} \right) + \left( \frac{3}{2} \mathbf{A}_{i+1}^- \mathbf{U}_{i+1} - \frac{1}{2} \mathbf{A}_{i+2}^- \mathbf{U}_{i+2} \right)$$

[-] Approche très dissipative [+] Stabilité garantie dans les zones de forts gradients.

- **MacCormack** (1985) propose d'alterner les points entre la phase prédicteur  $q = 0$  et la phase correcteur  $q = 1$  de son schéma :

$$\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^{MC} = \mathbf{A}_{i+q}^+ \left( \frac{3}{2} \mathbf{U}_i - \frac{1}{2} \mathbf{U}_{i-1} \right) + \mathbf{A}_{i+q}^- \left( \frac{3}{2} \mathbf{U}_{i+1} - \frac{1}{2} \mathbf{U}_{i+2} \right)$$

[-] Instable dans les forts gradients

[+] Moins dissipatif, couches limites OK.

Dans la pratique →

pondération des deux approches.

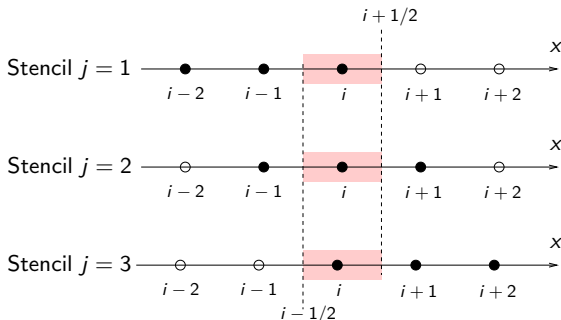
# Flux / Convectifs - schéma WENO (Harten 1987, Liu, Osher et Chan 1994) (1/2)

**Objectif** : augmenter l'ordre de précision.

- ▶ **WENO** pour *Weighted Essentially Non-Oscillatory*
- ▶ Décomposition du flux selon trois composantes :

$$\mathbf{F}_{i \pm \frac{1}{2}} = \omega_1 \mathbf{F}_{i \pm \frac{1}{2}}^{(1)} + \omega_2 \mathbf{F}_{i \pm \frac{1}{2}}^{(2)} + \omega_3 \mathbf{F}_{i \pm \frac{1}{2}}^{(3)}$$

- ▶ Recherche de la combinaison la + précise et la + stable

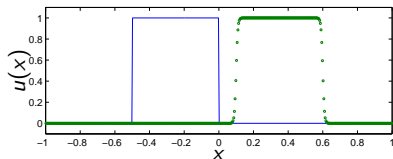


## Illustration sur une équation scalaire de transport 1D + condition initiale

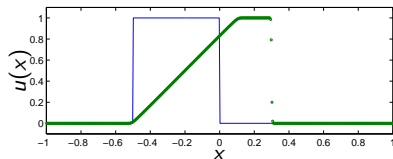
$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0,$$

### Terme flux $f$ ?

1. flux constant  $f = u$ ,
2. flux de type Burgers  $f = u^2/2$ .



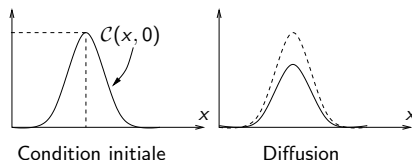
(a) Flux linéaire  $F = u$



(b) Flux non linéaire (Burgers)  $F = u^2/2$

- ▶ Condition initiale en trait plein,
- ▶ Solution à  $t = 0.6$  s (symboles),
- ▶ Pas de temps :  $CFL = 0.2$ , ordre 5 en espace (!)
- ▶ Maillage constitué de 500 nœuds.

Termes ne sont pas générateurs d'oscillations numériques parasites.



Recours **systématique** à des schémas centrés d'ordre élevé :

- ▶ 2 pour les TVD et FCT,
- ▶ 4, 5 pour WENO.

Et c'est tout ...

Rappel des équations de Navier-Stokes en 3D visqueux et incompressible (selon  $x$ ) :

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \rho f_x$$

## Constats

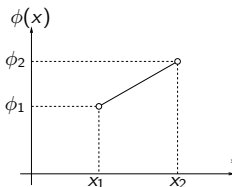
Composantes du **gradient** et du **laplacien** ( $\sim$  gradient second) omniprésentes !

**FONDAMENTAL** de savoir les calculer !

## Astuce

$$\text{Th. du gradient} \quad \iint_{V_e} \nabla \phi \, dV = \oint_{S_e} \phi \mathbf{n} \, dS \quad \Rightarrow \quad \nabla \phi|_e = \frac{1}{V_e} \sum_j \bar{\phi}_j \mathbf{S}_j$$

Illustration du concept :



## Estimation des gradients

... repose sur le choix de la valeur (uniforme!) de  $\bar{\phi}_j$  sur l'interface  $j$  de la cellule.

1. **Evaluation des gradients par Green-Gauss au centre des cellules (cell-based)**

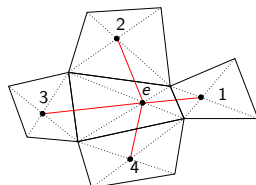
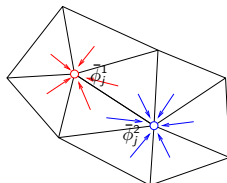
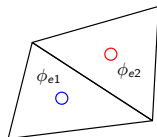
$$\bar{\phi}_j = \frac{\phi_{e1} + \phi_{e2}}{2}.$$

2. **Evaluation nodales des gradients par Green-Gauss (node-based)**

$$\bar{\phi}_j = \frac{1}{n_j} \sum_i^{n_j} \bar{\phi}_j^i$$

$\bar{\phi}_j^i$  = moyenne pondérée des valeurs extraites sur les cellules voisines.

3. **Evaluation par les moindres carrés...**



## Section. 2

### Algorithmes de résolution du système algébrique

## Caractéristiques :

- ▶ non linéaire (terme de transport principalement),
- ▶  $n$  équations couplées (variables en vitesses, pression, température...).

## Deux approches/solveurs possibles :

### *Segregated*

→ équations individuelles résolues **l'une après l'autre**.

- ▶ **Avantage** : efficace en terme de place mémoire ← équations stockées une à la fois.
- ▶ **Inconvénient** : convergence relativement lente car résolution **découplée**.
- ▶ **Usage** : incompressible ou faiblement compressible.

### *Coupled*

→ équations toutes résolues **simultanément**.

- ▶ **Avantage** : taux de convergence ↗.
- ▶ **Inconvénient** : place mémoire  $\times 1.5$  à 2 fois par rapport au cas *Segregated*.
- ▶ **Usage** : compressible, effet de gravité, convection naturelle, acoustique.



## Trois principales méthodes par résolution directe :

1. Elimination de Gauss,
2. Décomposition LU,
3. Algorithme de Thomas (algo de matrice tridiagonale),

... à **oublier** purement et simplement car totalement inadaptées vue la taille des systèmes ( $\sim 10^6$  ddl) !

## Solution

Privilégier une approche ITERATIVE !

**Principales méthodes :**

1. Jacobi,
2. Gauss-Seidel,
3. Sur-relaxation successive (SOR),
4. Méthode du gradient conjugué,
5. Multigrille (accélérateur de convergence)

- ▶ Chaque élément diagonal est résolu et une valeur approximative est calculée,
- ▶ Le processus est ensuite itéré jusqu'à ce qu'il converge,
- ▶ Approche requérant une condition de départ (initiale).

On cherche à résoudre :

$$\mathcal{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}.$$

soit pour la ligne  $i$  associée à l'inconnue  $\mathbf{U}_i$  :

$$\mathcal{K}_{i1}\mathbf{U}_1 + \dots + \mathcal{K}_{i,i-1}\mathbf{U}_{i-1} + \mathcal{K}_{ii}\mathbf{U}_i + \dots + \mathcal{K}_{in}\mathbf{U}_n = \mathbf{F}_i$$

Méthode de Jacobi  $\rightarrow$  réorganisation en isolant  $\mathbf{U}_i$  à l'itération  $k+1$  selon :

$$\mathbf{U}_i^{k+1} = \frac{1}{\mathcal{K}_{ii}} \left( \mathbf{F}_i - \sum_{j \neq i} \mathcal{K}_{ij} \mathbf{U}_j^k \right)$$

- ▶ Converge toujours si **matrice à diagonale dominante** :  $|\mathcal{K}_{ii}| > \sum_j |\mathcal{K}_{ij}|$ ,
- ▶ Requiert deux tables de stockage pour  $\mathbf{U}^k$  et  $\mathbf{U}^{k+1}$  : **pas de mise-à-jour simultanée.**

$$\Delta T(x) = 0, \forall x \in [0, 1] \quad \text{avec} \quad T(0) = 0, \quad T(1) = 1.$$

La solution exacte est  $T(x) = x$ .

- Forme discrète (DF, 2nd ordre) :

$$T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1} = 0,$$

- Isoler  $T_i$  pour aboutir à la forme de Jacobi :

$$T_i = \frac{1}{2} (T_{i-1} + T_{i+1}) \quad \forall i = 2, N-1.$$

- Ajouter la *couche* itérative :

$$T_i^{k+1} = \frac{1}{2} (T_{i-1}^k + T_{i+1}^k) \quad \forall i = 2, N-1.$$

## Exemple : Maillage à 5 nœuds

| Iteration | $T_1$ | $T_2$   | $T_3$   | $T_4$   | $T_5$ | Erreur $L_2$ |
|-----------|-------|---------|---------|---------|-------|--------------|
| 0         | 0.    | 0.      | 0.      | 0.      | 1.    | 1.           |
| 1         | 0.    | 0.0     | 0.      | 0.5     | 1.    | 0.61237      |
| 2         | 0.    | 0.      | 0.25    | 0.5     | 1.    | 0.43301      |
| 3         | 0.    | 0.125   | 0.25    | 0.625   | 1.    | 0.30619      |
| 4         | 0.    | 0.125   | 0.375   | 0.625   | 1.    | 0.21651      |
| 5         | 0.    | 0.1875  | 0.375   | 0.6875  | 1.    | 0.153091     |
| 6         | 0.    | 0.1875  | 0.43751 | 0.6875  | 1.    | 0.108251     |
| 7         | 0.    | 0.21875 | 0.4375  | 0.71875 | 1.    | 0.076547     |
| 8         | 0.    | 0.21875 | 0.46875 | 0.71875 | 1.    | 0.054127     |
| 9         | 0.    | 0.23438 | 0.46875 | 0.73438 | 1.    | 0.038273     |
| 10        | 0.    | 0.23438 | 0.48438 | 0.73438 | 1.    | 0.027063     |

La condition de départ/initiale peut fortement influencer le taux de convergence.

Approche est similaire à la méthode de Jacobi basée sur l'algorithme modifié :

$$\mathbf{U}_i^{k+1} = \frac{1}{\mathcal{K}_{ii}} \left( \mathbf{F}_i - \sum_{j < i} \mathcal{K}_{ij} \mathbf{U}_i^{k+1} - \sum_{j > i} \mathcal{K}_{ij} \mathbf{U}_i^k \right).$$

- ▶ calcul de  $\mathbf{U}_i^{k+1}$  repose sur les valeurs **mises-à-jour**  $\mathbf{U}_i^{k+1}$
- ▶ requiert une seule table de stockage.

### Exemple

En reprenant le même exemple, la forme itérative s'écrit désormais :

$$T_i^{k+1} = \frac{1}{2} (T_{i-1}^{k+1} + T_{i+1}^k) \quad \forall \quad i = 2, N-1,$$

ou bien :

$$T_i^{k+1} = \frac{1}{2} (T_{i-1}^k + T_{i+1}^{k+1}) \quad \forall \quad i = 2, N-1.$$

Le choix de l'un ou l'autre peut accélérer la convergence.

SOR : *Successive Over Relaxation* → Variante (1950) de Gauss-Seidel  
convergence généralement plus rapide.

Décomposition de  $\mathcal{K}$  en contrib. inférieure ( $\mathcal{L}$ ), diagonale ( $\mathcal{D}$ ) et supérieure ( $\mathcal{U}$ ) :

$$\mathcal{K} = \mathcal{L} + \mathcal{D} + \mathcal{U}.$$

Reformulation du système d'équations sous une forme itérative :

$$\mathbf{u}_i^{k+1} = (1 - \omega)\mathbf{u}_i^k + \frac{\omega}{\mathcal{K}_{ii}} \left( \mathbf{F}_i - \sum_{j < i} \mathcal{K}_{ij} \mathbf{u}_i^{k+1} - \sum_{j > i} \mathcal{K}_{ij} \mathbf{u}_i^k \right).$$

- ▶ Choix du facteur de relaxation  $\omega$  non trivial et fonction des coefficients de  $\mathcal{K}$ ,
- ▶ si  $\mathcal{K} \rightarrow$  algorithme est convergent pour tout  $\omega \in ]0, 2[$ ,
- ▶ si  $\omega = 1 \rightarrow$  Algorithme de Gauss Seidel

$\mathcal{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}$  avec  $\mathcal{K}$  symétrique et définie positive de dimensions  $(n \times n)$ .

- Résolution du problème équivalent de minimisation de la fonction :

$$f(\mathbf{U}) = \frac{1}{2} \mathbf{U}^\top \mathcal{K} \mathbf{U} - \mathbf{U}^\top \mathbf{F}.$$

- Définition du résidu comme le gradient de la fonctionnelle  $f$  :

$$r(\mathbf{U}) = \nabla f(\mathbf{U}) = \mathcal{K} \mathbf{U} - \mathbf{F}$$

Deux vecteurs  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  sont dits  $\mathcal{K}$ -conjugués s'ils vérifient :  $\mathbf{u}^\top \mathcal{K} \mathbf{v} = 0$ .

## Méthode du gradient conjugué

→ construire une suite de  $n$  vecteurs  $\mathbf{p}_k$   $\mathcal{K}$ -conjugués tels que :

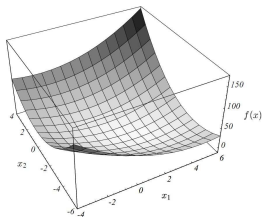
$$\mathbf{U} = \sum_k \alpha_k \mathbf{p}_k \quad \text{avec} \quad \alpha_k = \frac{\mathbf{p}_k^\top \mathbf{F}}{\mathbf{p}_k^\top \mathcal{K} \mathbf{p}_k}, k = 1, \dots, n.$$

## Application

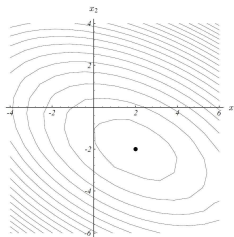
$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \end{pmatrix} \quad \text{ou encore} \quad f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \mathbf{K} \mathbf{x} - \mathbf{x}^\top \mathbf{F}.$$



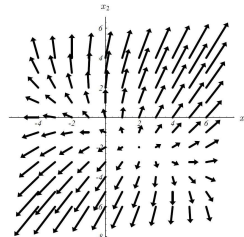
# Flux / Méthode du gradient conjugué : illustrations



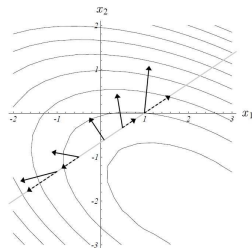
(a) Vue 3D de  $f$



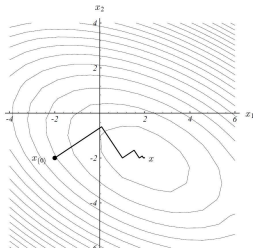
(b) Iso-niveaux 2D de  $f$



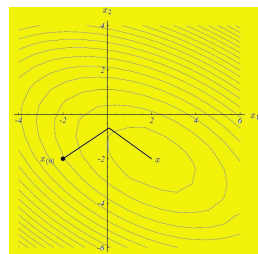
(c) Gradients locaux



(d) Analyse des gradients



(e) Méthode du Gradient



(f) Gradients conjugués

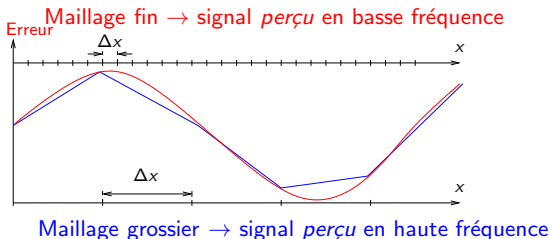
Source : illustrations tirées de l'excellent cours de J.R. Shewchuk, Carnegie Mellon University, USA

## IMPORTANT :

PAS un solveur, mais une technique pour obtenir un meilleur taux de convergence.

## Constats :

1. Convergence des approches itératives dégradées pour des maillages raffinés.
2. Nombre d'itérations proportionnel au nombre de nœuds dans une seule direction.



Un mode de réponse lissé sur une grille fine l'est moins sur une grille grossière  
 $\rightarrow$  il se dégrade.

**Solution retenue :** déraffiner la solution.

Basses fréquences pour un maillage  $\rightarrow$  hautes fréquences pour un maillage dégradé.

## Illustration autour de l'équation de diffusion 1D :

$$-\frac{d^2 u}{dx^2} = f \quad \forall x \in [0, L], \text{ avec } u(0) \text{ et } u(L) \text{ connus}$$

**Jacobi :** 
$$u_i^{k+1} = \frac{1}{2} (f \Delta x^2 + u_{i-1}^k + u_{i+1}^k)$$

$e_i^k$  : écart entre  $u_i^k$  et solution convergée :

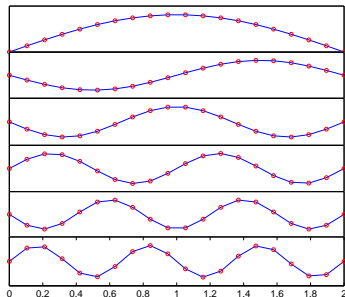
$$\rightarrow e_i^{k+1} = e_i^k - \frac{1}{2} (-e_{i-1}^k + 2e_i^k - e_{i+1}^k), \quad i = 1, 2, \dots, N$$

## Décomposition modale :

$$\mathbf{e}^k = \sum_i \alpha_j (\lambda_j)^k \mathbf{V}_j \text{ avec } \lambda_j = 1 - \frac{j^2 \pi^2 \Delta x^2}{2}$$

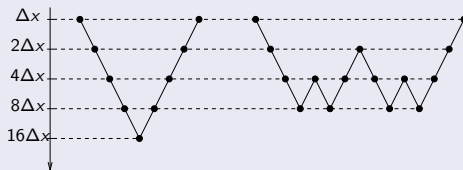
**Constat :**  $\lambda_j^k \rightarrow 0$  :

- ▶ très lentement pour les premiers modes  $j$  :  $\lambda_j \sim 1$ ,
- ▶ très rapidement pour les modes  $j$  élevés :  $\lambda_j \rightarrow 0$ .



## Multigrille géométrique (FAS)

- ▶ Hiérarchisation des maillages,
- ▶ Equations discrétisées sont évaluées pour chaque niveau de hiérarchie,
- ▶ Agglomération des nœuds (cellules, éléments ou volumes de contrôle),
- ▶ Mal adaptée à la MVF car nouvelles cellules de formes très irrégulières.



## Multigrille algébrique (AMG)

- ▶ Agglomération de la taille du système : directement au niveau des variables,
- ▶ Bien adaptée pour un maillage non structuré,
- ▶ Un seul et unique maillage.

Si résolution d'un écoulement incompressible et en mode découplé (*Segregated*).

**Equations de N.S. 2D incompressibles :**

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \\ \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)\end{aligned}$$

1. **Gradient de pression** joue le rôle du moteur de l'écoulement (= terme source).
2. Aucune équation de transport pour résoudre la pression !
3. Un champ de vitesse donné peut satisfaire l'équation de continuité sans pour autant vérifier les équations de transport de quantité de mouvement.

→ utilisation d'un **algorithme de couplage pression-vitesse**.

1. Algorithme SIMPLE (itératif, Patankar, 1972)
2. Algorithme PISO (prédicteur-correcteur, Issa, 1982)

## Principes généraux

1. **Champ de pression initial**  $\hookrightarrow$  équations de quantité de mouvement.
2. Résolution du système  $\rightarrow$  **champ de vitesse intermédiaire** (*faux* car pression *fausse*).
3. Equation de continuité  $\Rightarrow$  **équation de correction** de pression  $\Delta p$ .
4. Itération du cycle  $\rightarrow$  convergence (à savoir  $\Delta p = 0$ ).

## Section. 3

### Schémas de discrétisation en temps

## Ecriture générale du système algébrique

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}(\mathbf{U})\mathbf{U} = \mathbf{F}$$

- ▶ Prise en compte de CL ou de paramètres de calculs évolutifs dans le temps : **transitoire de démarrage**,
- ▶ Paramètres stationnaires mais **analyse contradictoires des courbes de résidus** en stationnaire,
- ▶ Ecoulement turbulent **sans modèle de turbulence...**
- ▶ Aéro-acoustique (analyse de la **génération de bruit**),
- ▶ Contourner une convergence difficile malgré une solution connue pour être stationnaire.

▶ Discrétisation d'ordre 1 en temps :  $\dot{\mathbf{U}} = \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\Delta t} + \Delta t(\dots),$

▶ Discrétisation d'ordre 2 en temps :  $\dot{\mathbf{U}} = \frac{3\mathbf{U}^{n+1} - 4\mathbf{U}^n + \mathbf{U}^{n-1}}{\Delta t} + \Delta t^2(\dots)$



## ► EXPLICITES

### Avantages :

1. Rapides, peu coûteux en place mémoire (pas de matrice),
2. Bien adaptés avec des systèmes non linéaires

### Inconvénients :

1. Limitation sévère sur le pas de temps (stabilité, CFL),
2. Effets instationnaires entretenus.

## ► IMPLICITES

### Avantages :

1. Pas de temps requis bien supérieurs à l'approche explicite,
2. Favorise l'obtention d'une solution stationnaire (dissipation numérique)

### Inconvénients :

1. Plus coûteux en temps et en espace mémoire, matrice à gérer.
2. Conditionnellement stable si non linéaire.

A compléter des approches **semi-implicites**.

## Philosophie générale de la classe des schémas explicites d'ordre 1

### Système algébrique général

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}(\mathbf{U})\mathbf{U} = \mathbf{F}$$

### Discrétisation d'ordre 1 en temps :

$$\dot{\mathbf{U}} = \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\Delta t} + \Delta t(\dots)$$

### ... explicite :

$$\mathbf{M} \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\Delta t} + \mathbf{K}\mathbf{U}^n = \mathbf{F}$$

pour aboutir à :

$$\mathbf{M}\Delta\mathbf{U} = \underbrace{-\Delta t\mathbf{K}\mathbf{U}^n + \Delta t\mathbf{F}}_{\mathbf{R}(\mathbf{U})}$$

## Philosophie générale de la classe des schémas implicites d'ordre 1

### Système algébrique général

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}(\mathbf{U})\mathbf{U} = \mathbf{F}$$

### Discrétisation

$$\dot{\mathbf{U}} = \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\Delta t} + \Delta t(\dots)$$

... explicite :

$$\mathbf{M} \frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\Delta t} + \mathbf{K}\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{F}$$

pour aboutir à :

$$(\mathbf{M} + \Delta t \mathbf{K}) \Delta \mathbf{U} = \underbrace{-\Delta t \mathbf{K} \mathbf{U}^n + \Delta t \mathbf{F}}_{\mathbf{R}(\mathbf{U})}$$

Sans entrer dans les détails et quel que soit la classe de schéma, la stabilité est contrôlée d'après :

... critère CFL pour *Courant-Friedrichs-Lewy* aussi appelé nombre de *Courant* :

$$\text{CFL} = \frac{V \Delta t}{\Delta x} = \frac{\text{Distance parcourue}}{\text{longueur de maille}} \quad \text{ou} \quad \Delta t = \text{CFL} \times \frac{\Delta x}{V}$$

Critère calculable sur toutes les cellules  $\rightarrow \Delta t$  défini par le cas le plus sélectif.

Pour un schéma :

- ▶ Explicite : vérifier  $\text{CFL} < 1$
- ▶ Implicite : vérifier  $\text{CFL} < 10, 20 \dots$  fonction du degré de non-linéarités

Choix de la vitesse  $V$  :

- ▶ vitesse locale du fluide  $u$  si incompressible,
- ▶  $|u| + c$  si compressible (captation des ondes acoustiques).

# Schémas en temps / Schémas de Runge-Kutta d'ordre élevés

Carl **Runge** et Martin Wilhelm **Kutta** (1901)

→ approche itérative (explicite) par correction de l'estimation précédente.

Soit à résoudre :  $\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{R}(t, \mathbf{U})$

**RK2** 2 pas = ordre 2

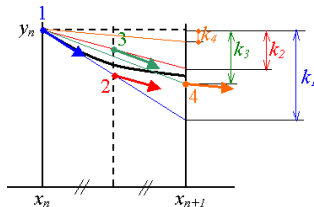
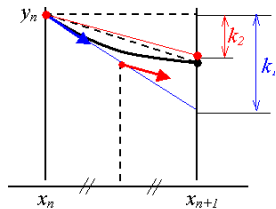
$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n + \Delta t \mathbf{R}(t^n + \frac{\Delta t}{2}, \mathbf{U}^n + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{R}(t^n, \mathbf{U}^n))$$

**RK4** 4 pas = ordre 4

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n + \frac{\Delta t}{6} (\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4)$$

avec successivement :

1.  $\mathbf{k}_1 = \mathbf{R}(t^n, \mathbf{U}^n)$
2.  $\mathbf{k}_1 = \mathbf{R}(t^n + \frac{\Delta t}{2}, \mathbf{U}^n + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{k}_1)$
3.  $\mathbf{k}_1 = \mathbf{R}(t^n + \frac{\Delta t}{2}, \mathbf{U}^n + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{k}_2)$
4.  $\mathbf{k}_1 = \mathbf{R}(t^n + \Delta t, \mathbf{U}^n + \Delta t \mathbf{k}_3)$



Source : cinet.chim

Calcul transitoire  $\Rightarrow$  fournir une **CONDITION INITIALE** :

- ▶ pour toutes les variables :  $\rho$ ,  $\mathbf{V}$ ,  $p$ ,  $T \dots$
- ▶ réaliste : qui **vérifie** les équations d'équilibre.

Trois approches :

1. mener un premier calcul avec hypothèses simplifiées (non visqueux, non turbulent),
2. partir d'une solution stationnaire convergée,
3. "boîte" vide qui se "remplit" suite à ouverture brutale d'un diaphragme en entrée (ou effet de rampe).