Décomposition en éléments simples

Le but de cette série est de vous familiariser avec les décompositions en éléments simples. Vous en aurez souvent besoin pour déterminer la réponse impulsionnelle $h(t)$ d'un système S à partir de sa réponse en fréquence $H(\omega)$.

Correction de l'exercice 1 :

1) On re-écrit l'équation différentielle sous forme d'opérateurs pour obtenir

$$\begin{aligned}(3\mathrm{D}^2 + 5\mathrm{D} + 2\mathrm{I})\{y\}(t) &= x(t) \\ \Rightarrow y(t) &= \frac{1}{3}(\mathrm{D}+\mathrm{I})^{-1}(\mathrm{D}+\frac{2}{3}\mathrm{I})^{-1}\{x\}(t).\end{aligned}$$

En utilisant les tables, on trouve $H(\omega) = \frac{1}{3}\frac{1}{(\mathrm{j}\omega+1)(\mathrm{j}\omega+\frac{2}{3})}$.

2) En posant $X = \mathrm{j}\omega$, on se ramène au calcul de la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{3}\frac{1}{(X+1)(X+\frac{2}{3})}$. On sait alors qu'il existe $a,\ b \in \mathbb{C}$ tels que :

$$\frac{1}{3}\frac{1}{(X+1)(X+\frac{2}{3})} = \frac{a}{X+1} + \frac{b}{X+\frac{2}{3}}.$$

En multipliant l'égalité précédente par $X+1$, on obtient :

$$\frac{1}{3}\frac{1}{X+\frac{2}{3}} = a + \frac{b(X+1)}{X+\frac{2}{3}}.$$

Cette égalité est vraie pour tout $X \in \mathbb{C}$. En prenant la valeur particulière $X = -1$ (afin de rendre nulle la contribution en b), on obtient facilement $a = -1$. On procède de manière similaire pour trouver $b = 1$. On obtient donc la décomposition en éléments simples suivante :

$$\frac{1}{3}\frac{1}{(X+1)(X+\frac{2}{3})} = \frac{-1}{X+1} + \frac{1}{X+\frac{2}{3}}$$

et, a fortiori,

$$H(\omega) = \frac{-1}{\mathrm{j}\omega+1} + \frac{1}{\mathrm{j}\omega+\frac{2}{3}}.$$

En utilisant les tables, on trouve finalement $h(t) = -u(t)\mathrm{e}^{-t} + u(t)\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}t}$.

Remarque importante : *Il est crucial de bien noter que l'approche de décompositions en éléments simples présentée ci-dessus n'est permise que lorsque le degré du dénominateur est supérieur à celui du numérateur. Si cela n'est pas le cas, il s'agira de d'abord appliquer une division euclidienne sur la fraction afin de retomber sur ses pattes (c.f., exercices 3 et 4).*

Correction de l'exercice 2 :

1) Le système S est la mise en série des sous-systèmes S_1, S_2 et S_3. On rappelle que la réponse en fréquence d'un ensemble de sous-systèmes LIT en série correspond à la multiplication des réponses fréquentielles de chaque sous-système. On a donc

$$\begin{aligned} H(\omega) &= H_1(\omega)H_2(\omega)H_3(\omega) \\ &= \frac{1}{2\pi}\mathrm{j}\omega\Big(\frac{\pi}{\mathrm{j}(\omega+2)+4}+\frac{\pi}{\mathrm{j}(\omega-2)+4}\Big)\Big(\frac{1}{\mathrm{j}\omega+4}\Big) \\ &= \frac{1}{2\pi}\mathrm{j}\omega\Big(\frac{2\pi(\mathrm{j}\omega+4)}{(\mathrm{j}(\omega+2)+4)(\mathrm{j}(\omega-2)+4)}\Big)\Big(\frac{1}{\mathrm{j}\omega+4}\Big) \\ &= \frac{\mathrm{j}\omega}{(\mathrm{j}(\omega+2)+4)(\mathrm{j}(\omega-2)+4)}. \end{aligned}$$

2) En posant $X = \mathrm{j}\omega$, on se ramène au calcul de la décomposition en éléments simples de $\frac{X}{(X-(2\mathrm{j}-4))(X+(2\mathrm{j}+4))}$. On sait alors qu'il existe $a,\ b \in \mathbb{C}$ tels que :

$$\frac{X}{(X-(2\mathrm{j}-4))(X+(2\mathrm{j}+4))} = \frac{a}{X-(2\mathrm{j}-4)} + \frac{b}{X+(2\mathrm{j}+4)}.$$

En multipliant l'égalité précédente par $X-(2\mathrm{j}-4)$, on a donc :

$$\frac{X}{X+(2\mathrm{j}+4)} = a - \frac{b(X-(2\mathrm{j}-4))}{X+(2\mathrm{j}+4)}.$$

Cette égalité est vraie pour tout $X \in \mathbb{C}$. En prenant la valeur particulière $X = 2\mathrm{j}-4$ (afin de rendre nulle la contribution en b), on obtient $a = \frac{1}{2}+\mathrm{j}$. On procède de manière similaire pour trouver $b = \frac{1}{2}-\mathrm{j}$. On obtient donc la décomposition en éléments simples suivante :

$$\frac{X}{(X-(2\mathrm{j}-4))(X+(2\mathrm{j}+4))} = \frac{\frac{1}{2}+\mathrm{j}}{X-(2\mathrm{j}-4)} + \frac{\frac{1}{2}-\mathrm{j}}{X+(2\mathrm{j}+4)}$$

et, a fortiori,

$$H(\omega) = \frac{\frac{1}{2}+\mathrm{j}}{\mathrm{j}\omega-(2\mathrm{j}-4)} + \frac{\frac{1}{2}-\mathrm{j}}{\mathrm{j}\omega+(2\mathrm{j}+4)}.$$

En utilisant les tables, on trouve finalement $h(t) = (\frac{1}{2}+\mathrm{j})u(t)\mathrm{e}^{(2\mathrm{j}-4)t} + (\frac{1}{2}-\mathrm{j})u(t)\mathrm{e}^{-(2\mathrm{j}+4)t}$.

Remarque importante : *Certes, une analyse des tables aurait pu immédiatement nous donner les réponses impulsionnelles suivantes pour nos trois sous-systèmes d'intéret :* $h_1(t) = \frac{1}{2\pi}\delta'(t)$, $h_2(t) = u(t)\mathrm{e}^{-4t}\cos(2t)$ *et* $h_3(t) = u(t)\mathrm{e}^{-4t}$*. Il s'agirait ensuite d'obtenir la réponse impulsionelle* $h(t)$ *de notre ensemble de sous-systèmes (en série) à travers la convolution dans le domaine temporel :* $h(t) = h_1(t) * h_2(t) * h_3(t)$*. CEPENDANT, dans ce cas-ci, cette approche temporelle est bien plus complexe que le calcul via le domaine fréquentiel présenté plus haut (et augmente donc le risque de faire des erreurs de calcul). A vous donc, dans les séries futures, de bien analyser les systèmes en jeu afin de sélectioner l'approche (temporelle ou fréquentielle) qui vous permettra de minimiser vos efforts et maximiser vos chances de réussite.*

Correction de l'exercice 3 :

1) On re-écrit l'équation differentielle sous forme d'opérateurs pour obtenir

$$\begin{aligned} (\mathrm{D}+3\mathrm{I})\{y\}(t) &= (2\mathrm{D}+\mathrm{I})\{x\}(t) \\ \Rightarrow y(t) &= (\mathrm{D}+3\mathrm{I})^{-1}(2\mathrm{D}+\mathrm{I})\{x\}(t). \end{aligned}$$

En utilisant les tables, on trouve $H(\omega) = \frac{2\mathrm{j}\omega+1}{\mathrm{j}\omega+3}$.

2) En posant $X = \mathrm{j}\omega$, on se ramène à la simplification de la fraction $\frac{2X+1}{X+3}$. Comme le numérateur et le dénominateur sont au même degré, on ne peut appliquer directement l'approche de décomposition en éléments simples utilisée précédemment. Pour résoudre cela, on effectue simplement la division euclidienne de $2X+1$ par $X+3$. Cela nous donne

$$\frac{2X+1}{X+3} = 2 - \frac{5}{X+3}$$

et, a fortiori,

$$H(\omega) = 2 - \frac{5}{\mathrm{j}\omega + 3}.$$

En utilisant les tables, on trouve finalement $h(t) = 2\delta(t) - 5u(t)\mathrm{e}^{-3t}$.

Correction de l'exercice 4 :

1) On re-écrit l'équation différentielle sous forme d'opérateurs pour obtenir

$$\begin{aligned}(\mathrm{D}^2 + 2\mathrm{D})\{y\}(t) &= (\mathrm{D}^3 + \mathrm{D}^2 + \mathrm{I})\{x\}(t)\\ \Rightarrow y(t) &= \mathrm{D}^{-1}(\mathrm{D} + 2\mathrm{I})^{-1}(\mathrm{D}^3 + \mathrm{D}^2 + \mathrm{I})\{x\}(t).\end{aligned}$$

En utilisant les tables, on trouve $H(\omega) = \frac{(\mathrm{j}\omega)^3 + (\mathrm{j}\omega)^2 + 1}{(\mathrm{j}\omega)(\mathrm{j}\omega+2)} + \frac{\pi}{2}\delta(\omega)$.

2) En posant $X = \mathrm{j}\omega$, on se ramène à la simplification de la fraction $\frac{X^3+X^2+1}{X(X+2)}$. Comme le degré du numérateur est supérieur à celui du dénominateur, on ne peut appliquer directement l'approche de décomposition en éléments simples utilisée précédemment. Pour résoudre cela, on effectue tout d'abord la division euclidienne de $X^3 + X^2 + 1$ par $X^2 + 2X$. Cela nous donne

$$\frac{X^3 + X^2 + 1}{X^2 + 2X} = X - 1 + \frac{2X+1}{X^2+2X}.$$

Il nous reste maintenant à simplifier le terme $\frac{2X+1}{X^2+2X}$. Pour ce faire, on utilise la décomposition en éléments simples (permise ici, le degré du dénominateur étant supérieur à celui du numérateur). On sait alors qu'il existe $a,\ b \in \mathbb{C}$ tels que :

$$\frac{2X+1}{X^2+2X} = \frac{2X+1}{X(X+2)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X+2}.$$

En multipliant l'égalité précédente par X, on obtient :

$$\frac{2X+1}{X+2} = a + \frac{bX}{X+2}.$$

Cette égalité est vraie pour tout $X \in \mathbb{C}$. En prenant la valeur particulière $X = 0$ (afin de rendre nulle la contribution en b), on obtient $a = \frac{1}{2}$. On procède de manière similaire pour trouver $b = \frac{3}{2}$. Finalement, on obtient donc la décomposition suivante pour notre fraction initiale :

$$\frac{X^3 + X^2 + 1}{X^2 + 2X} = X - 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{X} + \frac{3}{2}\frac{1}{X+2}$$

et, a fortiori,

$$\begin{aligned}H(\omega) &= \mathrm{j}\omega - 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{\mathrm{j}\omega} + \frac{3}{2}\frac{1}{\mathrm{j}\omega+2} + \frac{\pi}{2}\delta(\omega)\\ &= \mathrm{j}\omega - 1 + \frac{1}{2}\left(\pi\delta(\omega) + \frac{1}{\mathrm{j}\omega}\right) + \frac{3}{2}\frac{1}{\mathrm{j}\omega+2}.\end{aligned}$$

En utilisant les tables, on trouve $h(t) = \delta'(t) - \delta(t) + \frac{1}{2}u(t) + \frac{3}{2}u(t)\mathrm{e}^{-2t}$.