ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Signaux et Systèmes

Chapitre 5

Filtrage et échantillonnage

Novembre 2011

TABLE DES MATIERES

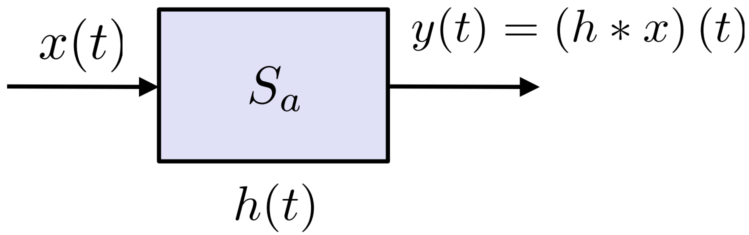
5.1 REPONSE FREQUENTIELLE

- Réponse fréquentielle d’un système
- Réponse à une excitation sinusoïdale
- Réponse à une excitation périodique

Réponse fréquentielle d'un système LIT

- Système linéaire invariant dans le temps = filtrage temporel

$$\boxed{y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \quad\longleftrightarrow\quad X(\omega)H(\omega)}$$



- Réponse impulsionnelle
  - $h(t)=S_a\{\delta\}(t)$
  - Condition de stabilité BIBO: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\,\mathrm{d}t < +\infty \quad\Leftrightarrow\quad h\in L_1$

- Réponse fréquentielle

$$\boxed{H(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t=\mathcal{F}\{h\}(t)}$$

(bien définie, car $h\in L_1$)

Deux représentations :

  - Parties réelle et imaginaire: $H(\omega)=R_H(\omega)+jI_H(\omega)$
  - Réponse d'amplitude et de phase: $H(\omega)=A_H(\omega)\cdot e^{j\Phi_H(\omega)}$

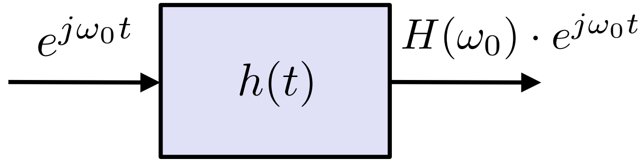
Réponse à une excitation sinusoïdale

Réponse à une excitation sinusoïdale complexe

Réponse fréquentielle

$$x_c(t) = e^{j\omega_0 t}$$

$$y_c(t) = (h * x_c)(t) = H(\omega_0) \cdot e^{j\omega_0 t} = H(\omega_0) \cdot x_c(t)$$



Calcul temporel (rappel)

$$y_c(t) = (h * x_c)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot e^{j\omega_0 (t-\tau)} \,\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j\omega_0 \tau} \,\mathrm{d}\tau \, e^{j\omega_0 t} = H(\omega_0) \cdot e^{j\omega_0 t}$$

Calcul par transformation de Fourier

$$\begin{aligned} e^{j\omega_0 t} \quad &\leftrightarrow \quad 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \\ y_c(t) \quad &\leftrightarrow \quad X_c(\omega) \cdot H(\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \cdot H(\omega) = H(\omega_0) \cdot 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \end{aligned}$$

Réponse à une excitation sinusoïdale réelle

Réponse d'amplitude

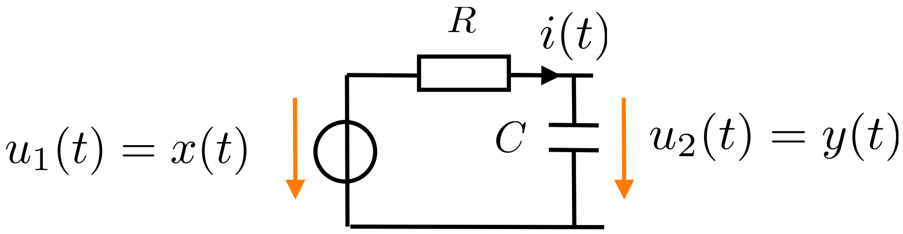
Réponse de phase

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta) = \mathrm{Re}\left(A e^{j\theta} e^{j\omega_0 t}\right)$$

$$y(t) = \mathrm{Re}\left(A e^{j\theta} y_c(t)\right) = \mathrm{Re}\left(A e^{j\theta} H(\omega_0) e^{j\omega_0 t}\right) = A \cdot A_H(\omega_0) \cdot \cos\left(\omega_0 t + \theta + \Phi_H(\omega_0)\right)$$

Conclusion: La réponse à une excitation sinusoïdale est une sinusoïde de même fréquence avec un facteur d'atténuation et un déphasage spécifiés par la réponse fréquentielle (amplitude et phase) du système LIT.

Exemple: filtre RC



Equation différentielle:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) + s_0 y(t) = s_0 x(t), \quad s_0 = \frac{1}{RC}$$

$$\boxed{H(\omega) = \frac{s_0}{j\omega + s_0}}$$

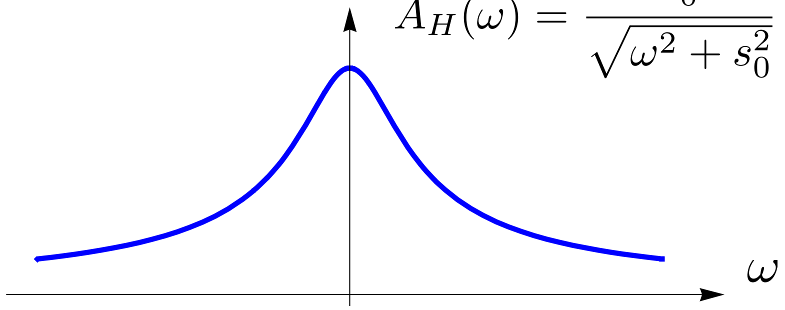
Recherche explicite de la réponse à une excitation sinusoïdale (**méthode des phaseurs**):

$$x(t) = e^{j\omega_0 t}$$

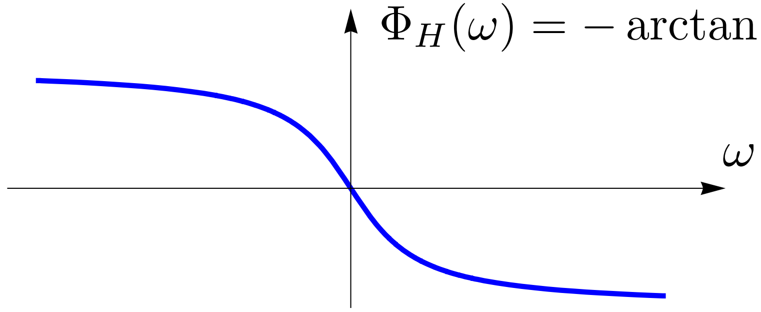
$$y(t) = H(\omega_0)e^{j\omega_0 t} \quad \Rightarrow \quad y'(t) + s_0 y(t) = (j\omega_0 + s_0)H(\omega_0)e^{j\omega_0 t}$$

$$(j\omega_0 + s_0)H(\omega_0)e^{j\omega_0 t} = s_0 e^{j\omega_0 t} \quad \Rightarrow \quad H(\omega_0) = \frac{s_0}{j\omega_0 + s_0}$$

$$A_H(\omega) = \frac{s_0}{\sqrt{\omega^2 + s_0^2}}$$

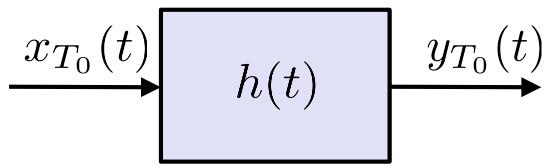


$$\Phi_H(\omega) = -\arctan(\omega/s_0)$$



Réponse à une excitation périodique

- Signal d'excitation périodique



$$x_{T_0}(t) = x_{T_0}(t + kT_0), \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Série de Fourier: $x_{T_0}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{jn\omega_0 t}, \quad c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x_{T_0}(t) e^{-jn\omega_0 t} \, \mathrm{d}t, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

- Réponse du système à une excitation périodique

$$y_{T_0}(t) = (h * x_{T_0})(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \cdot H(n\omega_0) \cdot e^{jn\omega_0 t}$$ (par linéarité)

Périodicité de la réponse (argument temporel):

$$y(t + kT_0) = (h * x_{T_0}(\cdot + kT_0))(t) = (h * x_{T_0})(t) = y(t)$$

Calcul par transformation de Fourier

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad \leftrightarrow \quad 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \delta(\omega - n\omega_0)$$

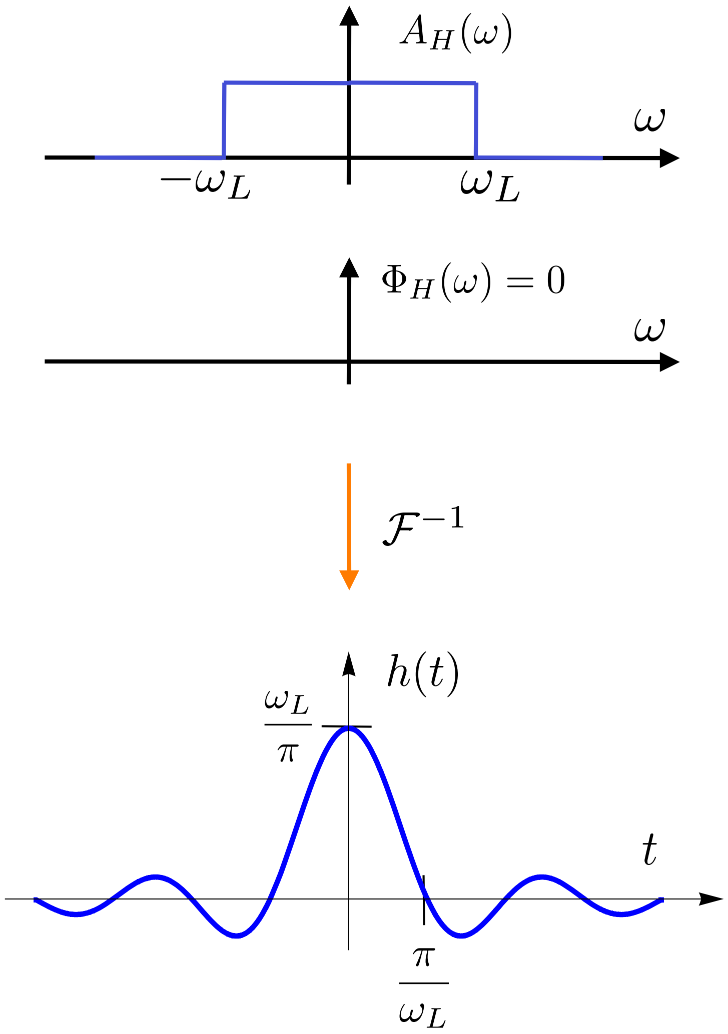
$$y_{T_0}(t) \quad \leftrightarrow \quad X_{T_0}(\omega) \cdot H(\omega) = H(\omega) \cdot \left(2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \delta(\omega - n\omega_0) \right) = 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} H(n\omega_0) \cdot c_n \delta(\omega - n\omega_0)$$

Conclusion: La réponse d'un système LIT à une excitation périodique est forcément périodique

5.2 FILTRES IDEAUX

- Filtre passe-bas idéal
- Canal de Nyquist idéal
- Canal de Nyquist non-idéal
- Filtre passe-bande idéal

Filtre passe-bas idéal



$$A_H(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_L \\ 0, & |\omega| > \omega_L \end{cases}$$

$$\Phi_H(\omega) = 0, \quad \forall \omega$$

$$h(t) = \frac{\omega_L}{\pi} \mathrm{sinc}\left(\frac{t}{\pi/\omega_L}\right) \quad \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad H(\omega) = \mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_L}\right)$$

N.B. Le filtre passe-bas idéal n'est pas causal–donc pas réalisable!
Toutefois, c'est un outil très utile pour comprendre et analyser les systèmes.

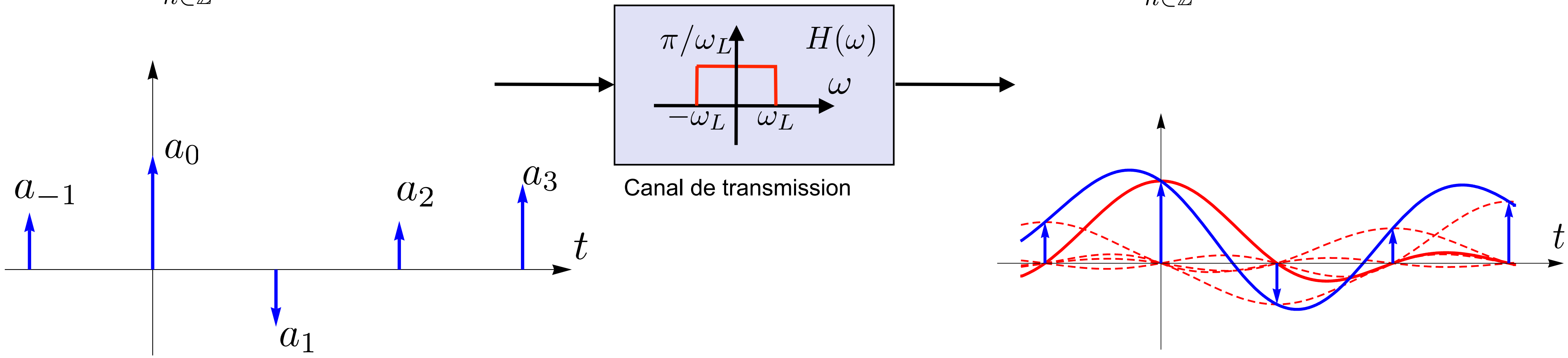
Canal de Nyquist idéal

Un filtre passe-bas idéal présente les caractéristiques idéales d'un canal de transmission pour des impulsions de Dirac pondérées, si elles sont introduites dans le canal avec une distance $T_e = \pi/\omega_L$ (=1$^{\text{er}}$ zéro du sinc) (Canal de Nyquist idéal)

Capacité du canal: $$\frac{\omega_L}{\pi} = 2f_L = \frac{1}{T_e}\left[\frac{\text{Digits}}{\text{sec}}\right]$$

$$x(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \cdot \delta(t - nT_e)$$

$$y(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \cdot \mathrm{sinc}\left(\frac{t-nT_e}{T_e}\right)$$



$$\mathrm{sinc}\left(\frac{nT_e}{T_e}\right) = \delta_n \quad \Rightarrow \quad y(nT_e) = a_n$$

Canal de Nyquist non-idéal

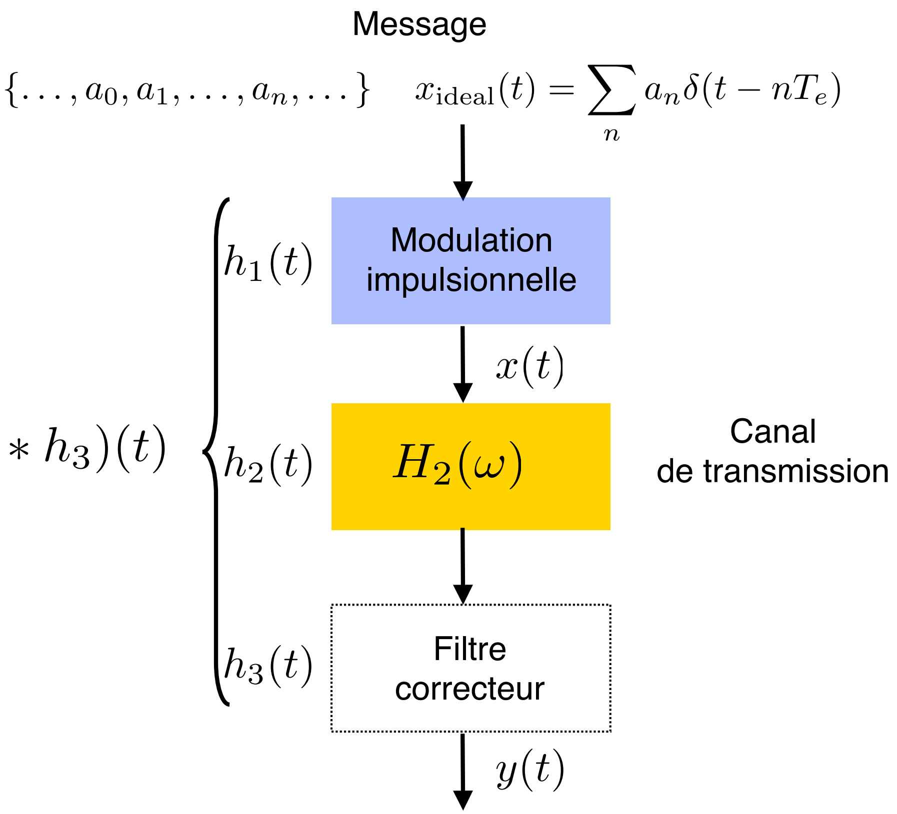
- **Signal transmis**

$$x(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n h_1(t - nT_e)$$

- **Signal reçu**

$$y(t) = \sum_{n} a_n h(t - nT_e)$$

$$h(t) = (h_1 * h_2 * h_3)(t)$$

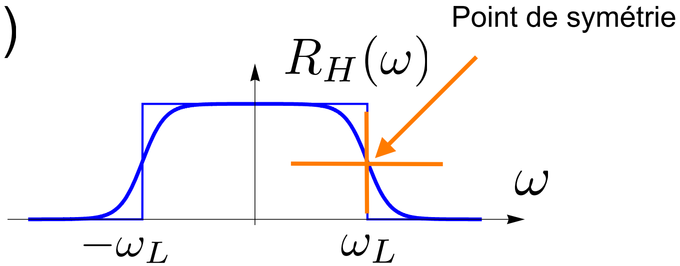


- **Critère de transmission parfaite**

$$y(nT_e) = a_n \quad \Leftrightarrow \quad h(nT_e) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

- **Condition de Nyquist généralisée (interpolation)**

$$h(nT_e) = \delta_n \quad \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \quad \frac{1}{T_e}\sum_{n\in\mathbb{Z}} H\left(\omega + \frac{2\pi}{T_e} n\right) = 1$$



(cf. exercise)

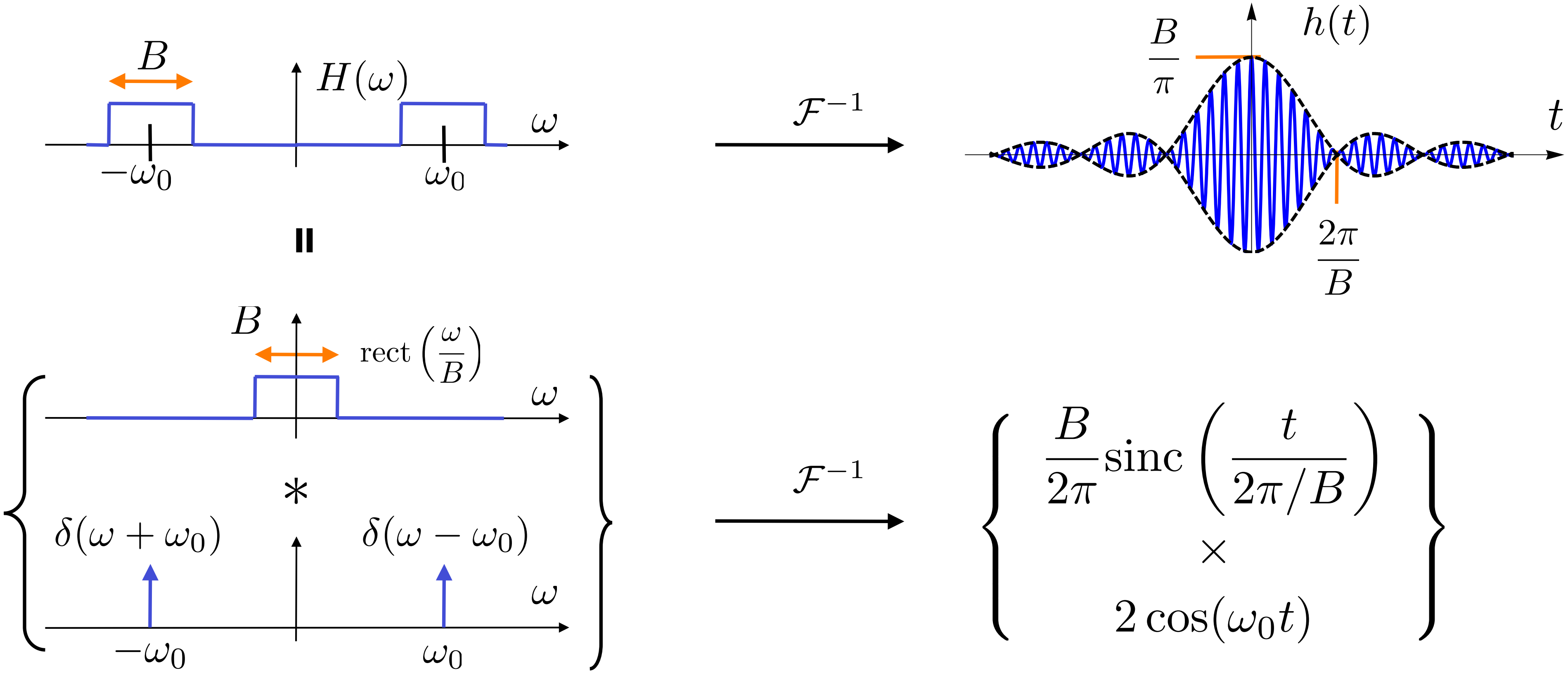
Filtre passe-bande idéal

- Réponse fréquentielle:

$$H(\omega) = \mathrm{rect}\left(\frac{\omega+\omega_0}{B}\right) + \mathrm{rect}\left(\frac{\omega-\omega_0}{B}\right)$$

ω_0: fréquence centrale

B: bande passante

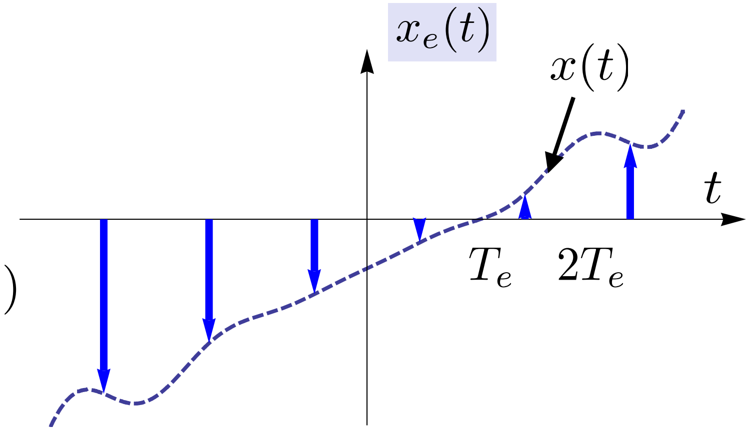


5.3 ECHANTILLONNAGE DE SIGNAUX

- Signal échantillonné analogique
- Echantillonnage et répétition spectrale
- Dualité avec les séries de Fourier
- Formule de Poisson
- Théorème d’échantillonnage (Shannon)
- Reconstruction d’un signal analogique
- Généralisation du théorème d’échantillonnage

Signal analogique échantillonné

- **Echantillonnage idéal**



Multiplication avec un peigne de Dirac

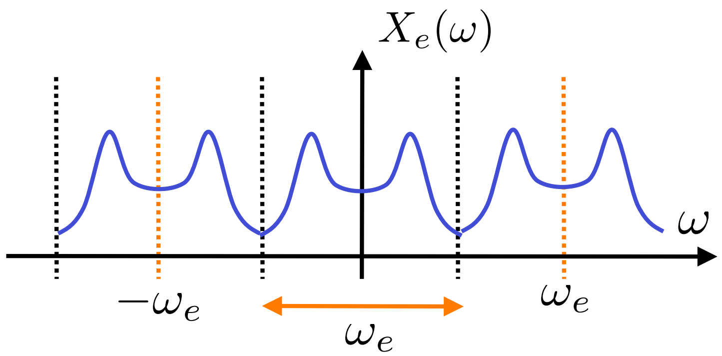
$$x_e(t) = x(t) \times \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(t - nT_e) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(nT_e)\delta(t - nT_e)$$

- **Calcul de la transformation de Fourier**

$$X_e(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(nT_e)\delta(t - nT_e)e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(nT_e) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e)e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(nT_e)e^{-j\omega nT_e}$$

- **Caractéristiques de $X_e(\omega)$**



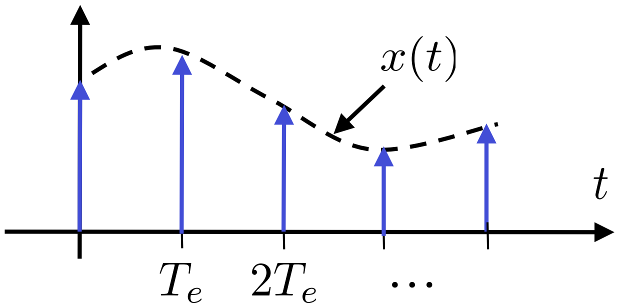
  - Fonction périodique (somme d'harmoniques)
  - Période: $\omega_e = \dfrac{2\pi}{T_e}$ (t.q., $\omega_e T_e = 2\pi$)
  - Forme: dépend des échantillons $x(nT_e)$ de $x(t)$

Echantillonnage et répétition spectrale

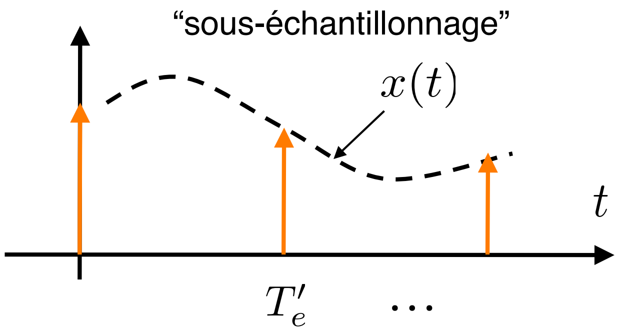
- Signal échantillonné

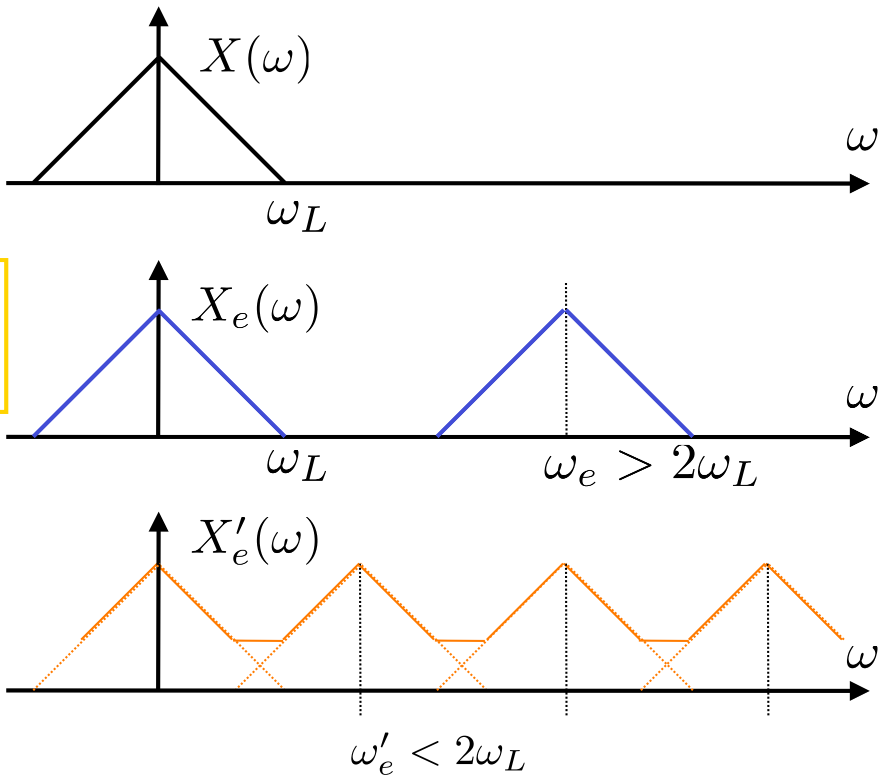
$$x_e(t) = x(t)\times\sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta(t-kT_e) \quad \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad X_e(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left(X * \frac{2\pi}{T_e}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\delta\left(\cdot - n\frac{2\pi}{T_e}\right)\right)(\omega)$$

$$\boxed{X_e(\omega) = \frac{1}{T_e}\sum_{n\in\mathbb{Z}} X\left(\omega - n\frac{2\pi}{T_e}\right)}$$



$$\boxed{\omega_e = \frac{2\pi}{T_e}}$$





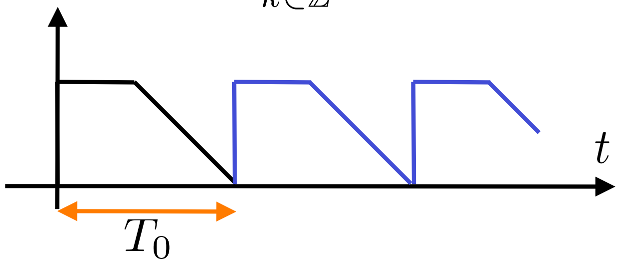
Dualité avec les séries de Fourier

- Périodisation dans le temps

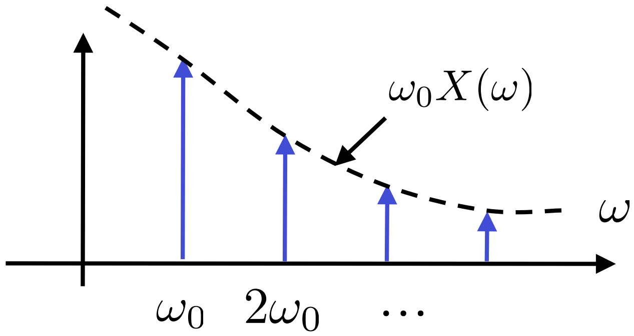
$$\boxed{\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}}$$

$$x_{T_0}(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(t - kT_0)$$

$$X_{T_0}(\omega) = \omega_0 \sum_{n\in\mathbb{Z}} X(n\omega_0)\delta(\omega - n\omega_0)$$



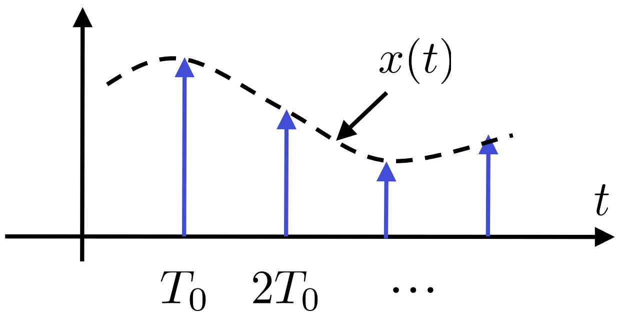
$$\xleftrightarrow{\mathcal{F}}$$



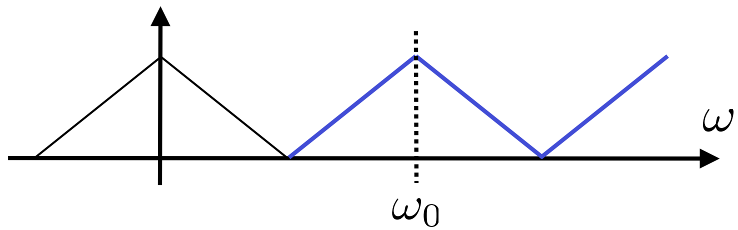
- Echantillonnage dans le temps

$$x_e(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(kT_0)\delta(t - kT_0)$$

$$X_e(\omega) = \frac{\omega_0}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} X(\omega - n\omega_0)$$



$$\xleftrightarrow{\mathcal{F}}$$



Formule de Poisson

- Peigne de Dirac

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(t+k) \quad \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \quad 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(\omega+n2\pi)$$

- Formule de Poisson

$$\boxed{\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} F(2\pi n)}$$

Valide également pour $f, F \in L_1$

Justification:

$$\forall f \in \mathcal{S}, \langle f, \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(\cdot+k)\rangle = \frac{1}{2\pi}\langle F, 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(\cdot+n2\pi)\rangle \quad \text{(Parseval)}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} F(2\pi n)$$

- Formule de Poisson et échantillonnage

$$f(t) = x(t)e^{-j\omega_0 t} \quad \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \quad F(\omega) = X(\omega+\omega_0) \qquad \text{(modulation)}$$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(k)e^{-j\omega_0 k} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} F(2\pi n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} X(2\pi n+\omega_0)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{X_e(\omega) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(k)e^{-jk\omega} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} X(\omega+2\pi n)}$$

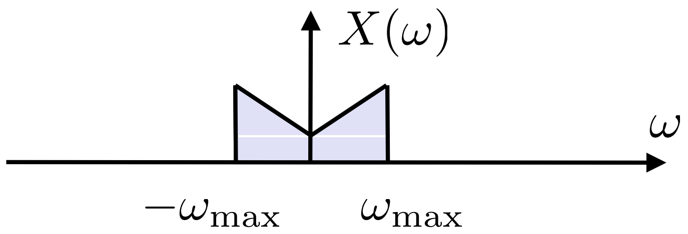
Théorème d'échantillonnage

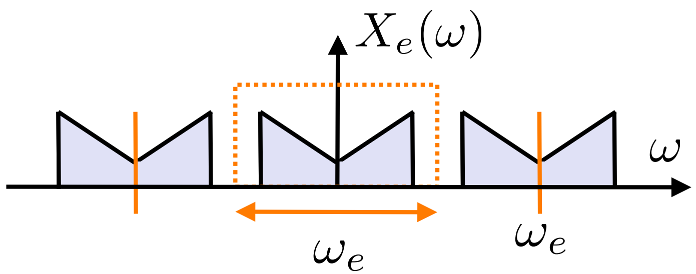
Théorème [Shannon, 1949]

Une fonction $x(t)$ (à bande limitée) qui ne contient pas de fréquences supérieures à $\omega_{\max} = 2\pi f_{\max}$ est complètement déterminée par ses échantillons $\{x(kT_e)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ pour autant que:

$$T_e = \frac{2\pi}{\omega_e} \leqslant \frac{1}{2f_{\max}}$$

ou $\quad \omega_e \geqslant 2\omega_{\max}$





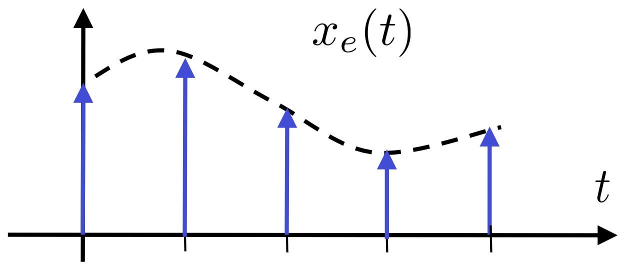
N.B. En pratique, le signal $x(t)$ doit être filtré avant l'échantillonnage avec un filtre passe-bas analogique (filtre de garde ou «anti-aliasing») de façon que sa largeur de bande soit bien limitée.

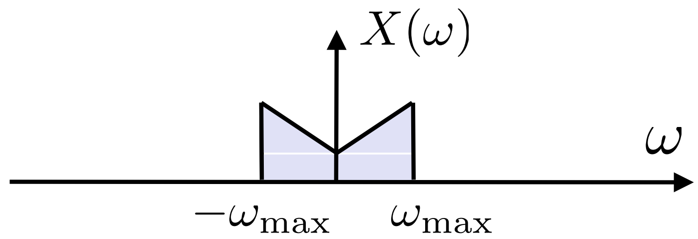
Demo

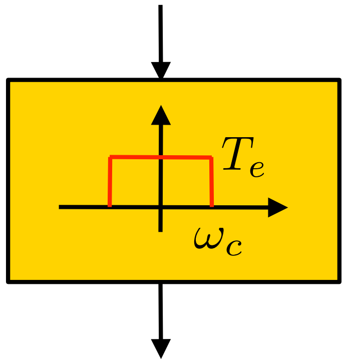
Video

Reconstruction du signal analogique

- Reconstruction par filtrage passe-bas idéal

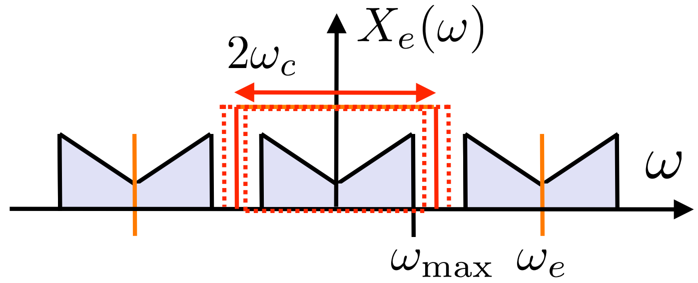


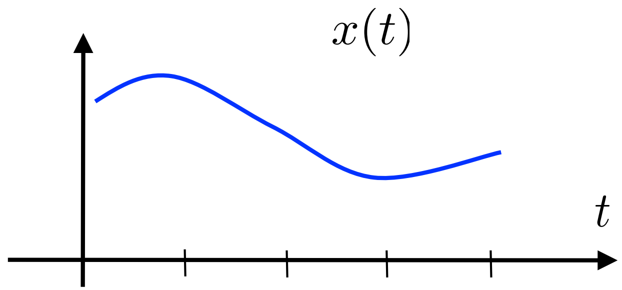




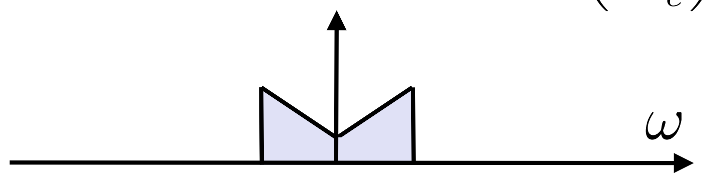
Fréquence de coupure ω_c:

$\omega_{\max} < \omega_c < \omega_e - \omega_{\max}$





$$X(\omega) = X_e(\omega) \cdot T_e \mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_c}\right)$$

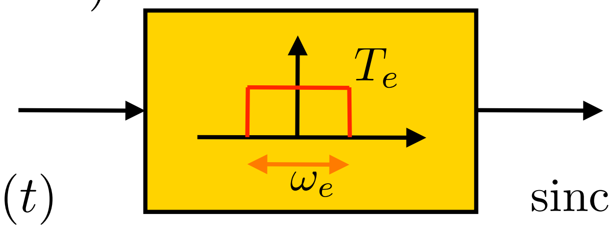


Formule de reconstruction de Shannon

- Reconstruction par filtrage idéal

$$x_e(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(kT_e)\delta(t-kT)$$

$x(t) = ?$



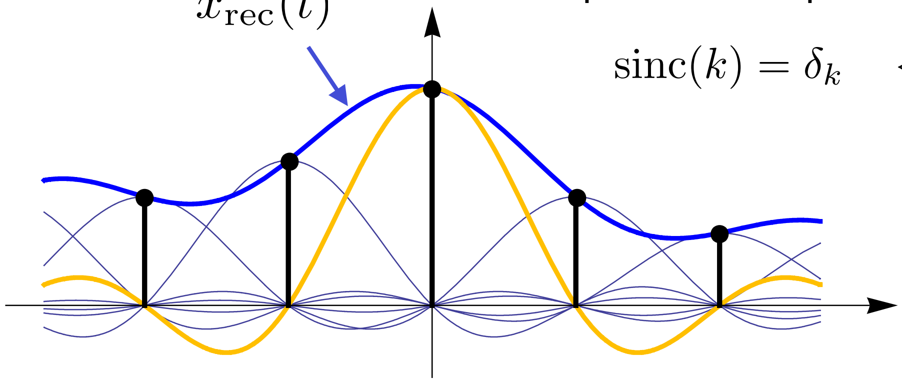
$\delta(t)$

$$\mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T_e}\right) = \mathcal{F}^{-1}\left\{T_e \mathrm{rect}\left(\frac{\cdot}{2\pi/T_e}\right)\right\}(t)$$

- Formule de reconstruction (signal à bande limitée)

$$\boxed{x(t) = \left(x_e * \mathrm{sinc}\left(\frac{\cdot}{T_e}\right)\right)(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(kT_e)\mathrm{sinc}\left(\frac{t-kT_e}{T_e}\right)}$$

$\omega_{\max} < \omega_e/2$



Propriété d'interpolation:

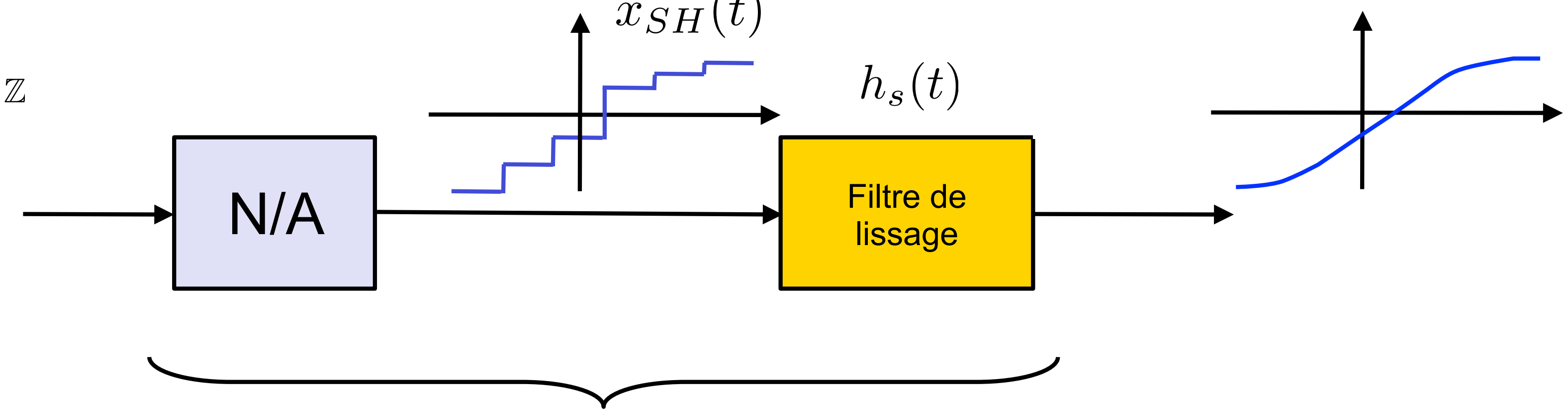
$$\mathrm{sinc}(k) = \delta_k \quad \Leftrightarrow \quad x_{\mathrm{rec}}(t)\big|_{t=kT_e} = x(kT_e)$$

Convertisseur N/A réel

- Système de reconstruction pratique

$\{x(kT)\}_{k\in\mathbb{Z}}$

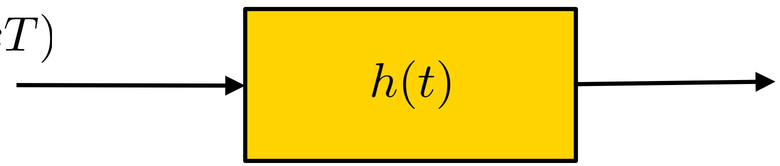
$x_{\mathrm{rec}}(t) = (h_s * x_{SH})(t)$



- Modèle équivalent

$$h(t) = \left(\mathrm{rect}\left(\frac{\cdot - T/2}{T}\right) * h_s\right)(t)$$

$$x_e(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(kT)\delta(t-kT)$$



$$x_{\mathrm{rec}}(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(kT)h(t-kT)$$

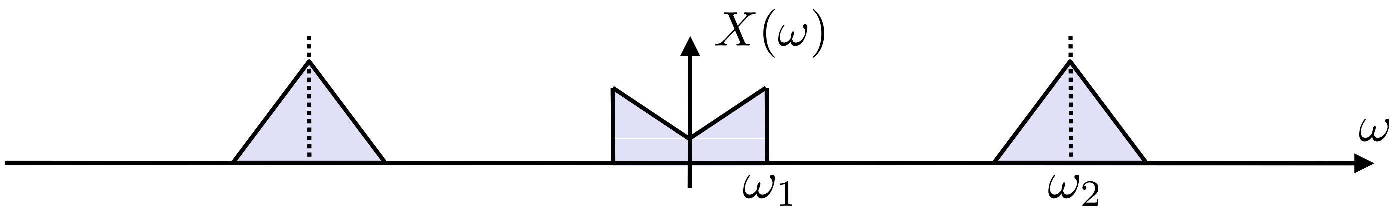
- Critères de design pour le filtre de lissage

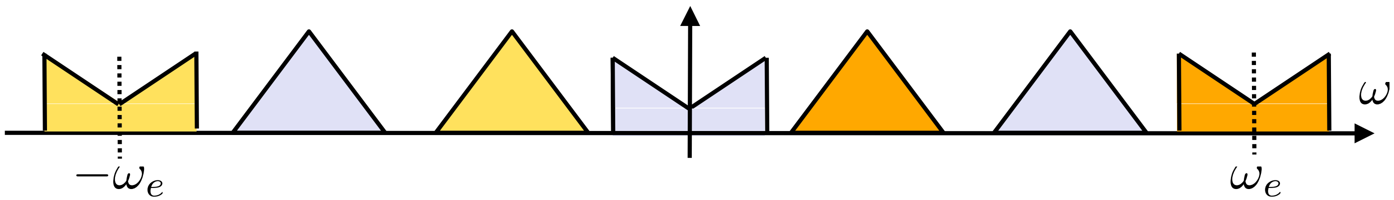
  - Bonne approximation du filtre idéal: $|H_s(\omega)| \approx \dfrac{1}{\mathrm{sinc}\,(\omega T/(2\pi))}$ pour $\omega \in [-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}]$

  - Interpolation: $x_{\mathrm{rec}}(kT) = x(kT) \quad \Leftrightarrow \quad h(kT) = \delta_k \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{T}\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} H\left(\omega + \frac{2\pi n}{T}\right) = 1$

Généralisation du théorème de Shannon

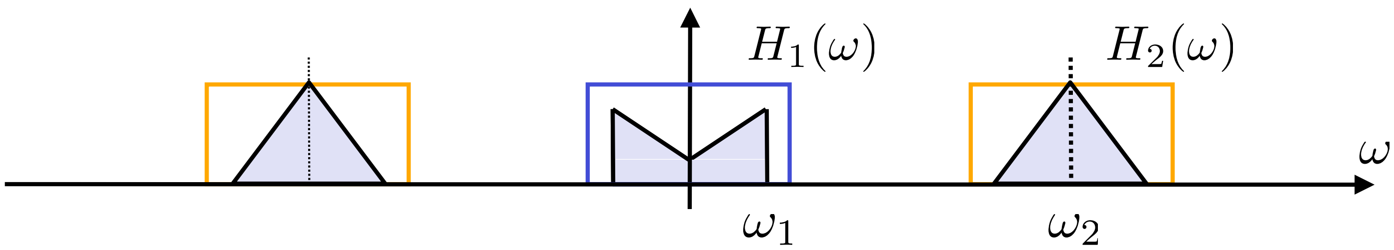
- Exemple: signal dont le spectre est contenu dans des bandes





La reconstruction est possible seulement s'il n'y a pas de recouvrement spectral!

- Reconstruction (filtres idéaux de reconstruction H_1 et H_2)



$$x(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(kT_e)h_1(t-kT_e) + \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(kT_e)h_2(t-kT_e)$$