ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Signaux et Systèmes

Chapitre 7

Analyse et synthèse des filtres analogiques

Decembre 2011

TABLE DES MATIERES

7.1 Filtres analogiques: généralités

7.2 Filtres à phase linéaire

7.3 Fonctions de transfert rationnelles

7.4 Placement des pôles et zéros

7.5 Synthèse de filtres particuliers

7.1 FILTRES ANALOGIQUES: GENERALITES

- Filtre analogique = système analogique linéaire invariant dans le temps (LIT)
- Classification des filtres analogiques
- Spécifications fréquentielles
- Diagramme de Bode
- Temps de propagation de groupe

Filtre analogique = système analogique LIT

- Descriptions mathématiques équivalentes:

  - Réponse impulsionnelle

    $$h(t) = S_a\left\{\delta\right\}(t)$$

    $$x(t) \longrightarrow \boxed{S_a\{\cdot\}} \longrightarrow y(t)$$

  - Réponse indicielle

    $$a(t) = S_a\left\{u\right\}(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

    $$y(t) = (h * x)(t)$$

    $$\updownarrow$$

    $$Y(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega)$$

  - Réponse fréquentielle

    $$H(\omega) = \mathcal{F}\{h\}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t$$

  - Fonction de transfert (=notation plus concise)

    $$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t \qquad \text{(Transformation de Laplace)}$$

    Equivalent à Fourier si l'on pose $s = j\omega$

Classification des filtres analogiques

Filtres causaux (réalisables)

Réponse impulsionnelle

- finie → **Filtres FIR**
  - Filtres à phase linéaire
  - ⇓ Retard
- infinie (R, C, ⋮) → **Systèmes physiques à constantes localisées**:
  - Filtres à fonction de transfert rationnelle
  - ⇓ Dispersion, Distorsion de phase

Filtres non-causaux (non-réalisables)

Réponse impulsionnelle

- finie → Filtres FIR
- infinie → Filtres idéaux
  - Shannon
  - Nyquist

Remarque: la causalité est une contrainte physique liée à la flèche du **temps**.
Des filtres non-causaux sont parfaitement réalisables dans d'autres contextes (e.g. systèmes optiques pour le traitement des images)

Spécifications fréquentielles

Les filtres idéaux n'étant pas réalisables, il faut faire des compromis:

- Fluctuations dans la bande passante $(1 \pm \delta_1)$
- Zone de transition (largeur Δ)
- Fluctuations dans la bande bloquante $(0 \pm \delta_2)$

La tolérance par rapport à une réponse idéale est exprimée à l'aide d'un gabarit

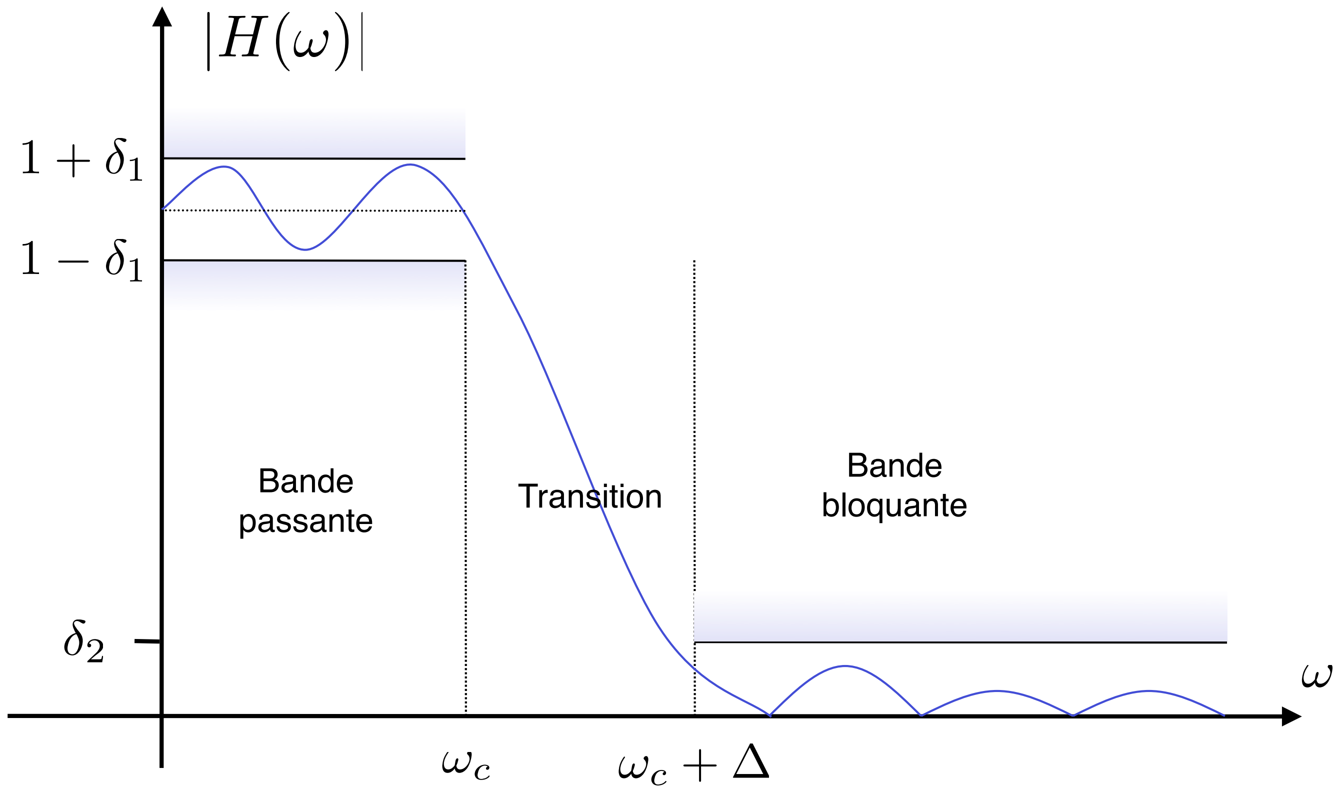
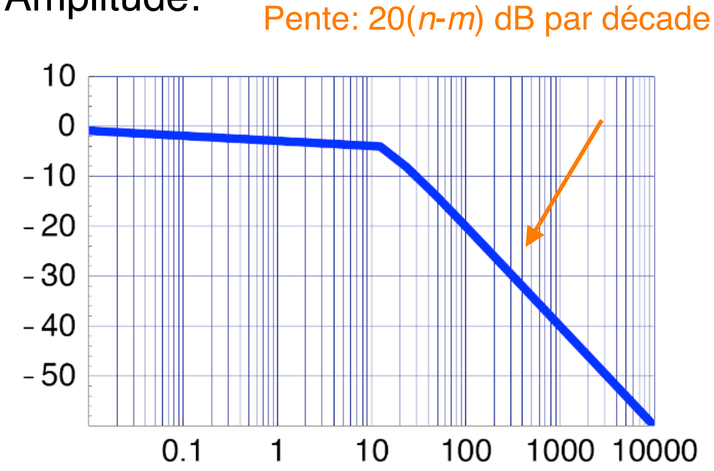


Diagramme de Bode

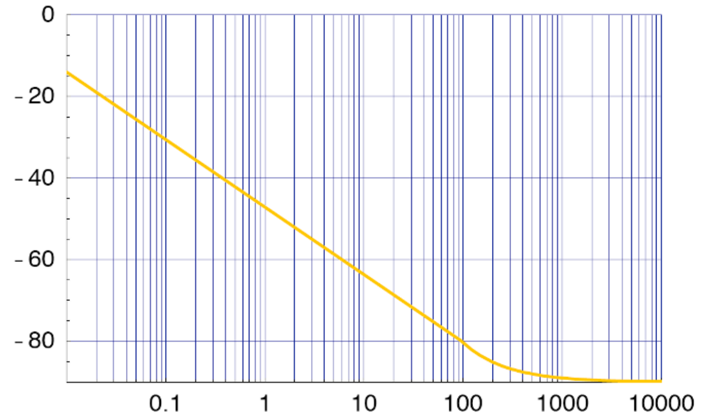
Réponse fréquentielle: $H(\omega) = |H(\omega)| \cdot e^{j\Phi_H(\omega)}$

- **Diagramme de Bode**
  - Echelle fréquentielle logarithmique
  - Amplitude en décibel: $20\log_{10}|H(\omega)|$ [dB]
  - Phase: $\Phi_H(\omega)$

Amplitude:



Phase:



- **Cas des fonctions de transfert rationnelles**

$$H(\omega) = \frac{b_m(j\omega)^m + \cdots + b_1(j\omega) + b_0}{(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \cdots + a_1(j\omega) + a_0}$$

  - Forme asymptotique lorsque $\omega \to +\infty$

$$\lim_{\omega\to+\infty} H(\omega) = \frac{b_m}{(j\omega)^{n-m}}$$

  - Amplitude normalisée:

$$\lim_{\omega\to+\infty} \{20\log_{10}|H(\omega)|\} = -20(n-m)\log_{10}\omega + \text{const}$$

$$\lim_{\omega\to+\infty} \Phi_H(\omega) = -(n-m)\frac{\pi}{2}$$

Temps de propagation de groupe

- Motivation
  - L'effet d'un filtrage analogique se traduit généralement par l'introduction d'un retard
  - L'effet de ce retard est complètement encodé dans la phase
  - On observe une distorsion (dispersion) lorsque le temps de retard varie avec la fréquence

- Cas d'un retard pur

$$h(t) = \delta(t - t_0) \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad H(\omega) = e^{j\Phi_H(\omega)} \quad \text{avec} \quad \Phi_H(\omega) = -\omega t_0$$

- Temps de propagation de groupe (Group delay)

$$\boxed{\mathrm{TPG}(\omega) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\Phi_H(\omega)}$$

- Propriété: additivité lors de la mise en cascade de filtres

$$h(t) = (h_1 * h_2)(t) \quad \Rightarrow \quad \Phi_H(\omega) = \Phi_{H_1}(\omega) + \Phi_{H_2}(\omega)$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{TPG}(\omega) = \mathrm{TPG}_1(\omega) + \mathrm{TPG}_2(\omega)$$

TPG : exemples de calcul

Rappel:

- $z = a + jb = \rho \cdot e^{j\theta}$
- $\log(z) = \log \rho + j\theta$
- $\mathrm{Im}(j \cdot z) = \mathrm{Re}(z) = a$

- Cas du retard pur

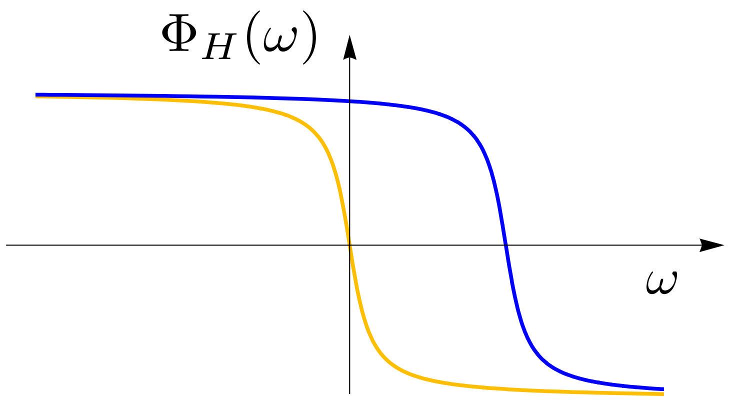
$$H(\omega) = e^{-j\omega t_0} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{TPG}(\omega) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}(-\omega t_0) = t_0$$

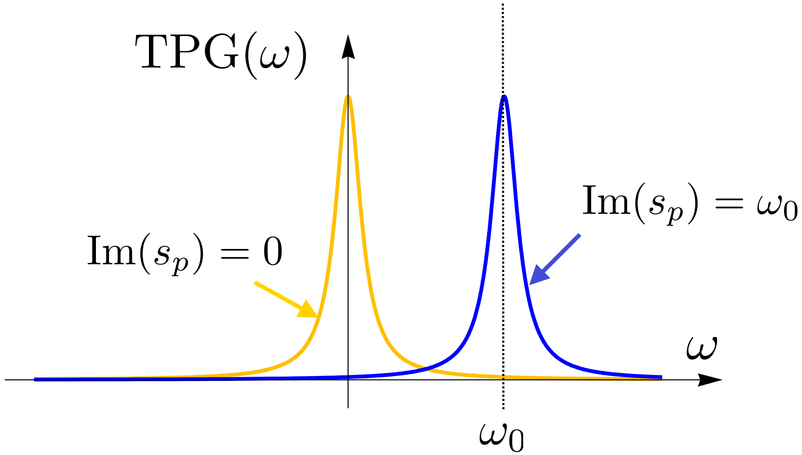
- Systèmes différentiels

Formule alternative: $\mathrm{TPG}(\omega) = -\mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\log H(\omega)\right) = -\mathrm{Im}\left(\frac{\frac{\mathrm{d}H(\omega)}{\mathrm{d}\omega}}{H(\omega)}\right)$

- Exemple: système du 1er ordre

$$H(\omega) = \frac{\sigma}{j\omega + \underbrace{(\sigma - j\omega_0)}_{-s_p}} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{TPG}(\omega) = -\mathrm{Im}\left(\frac{\frac{-j\sigma}{(j\omega - s_p)^2}}{\frac{\sigma}{j\omega - s_p}}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{j(\omega - \omega_0) + \sigma}\right)$$





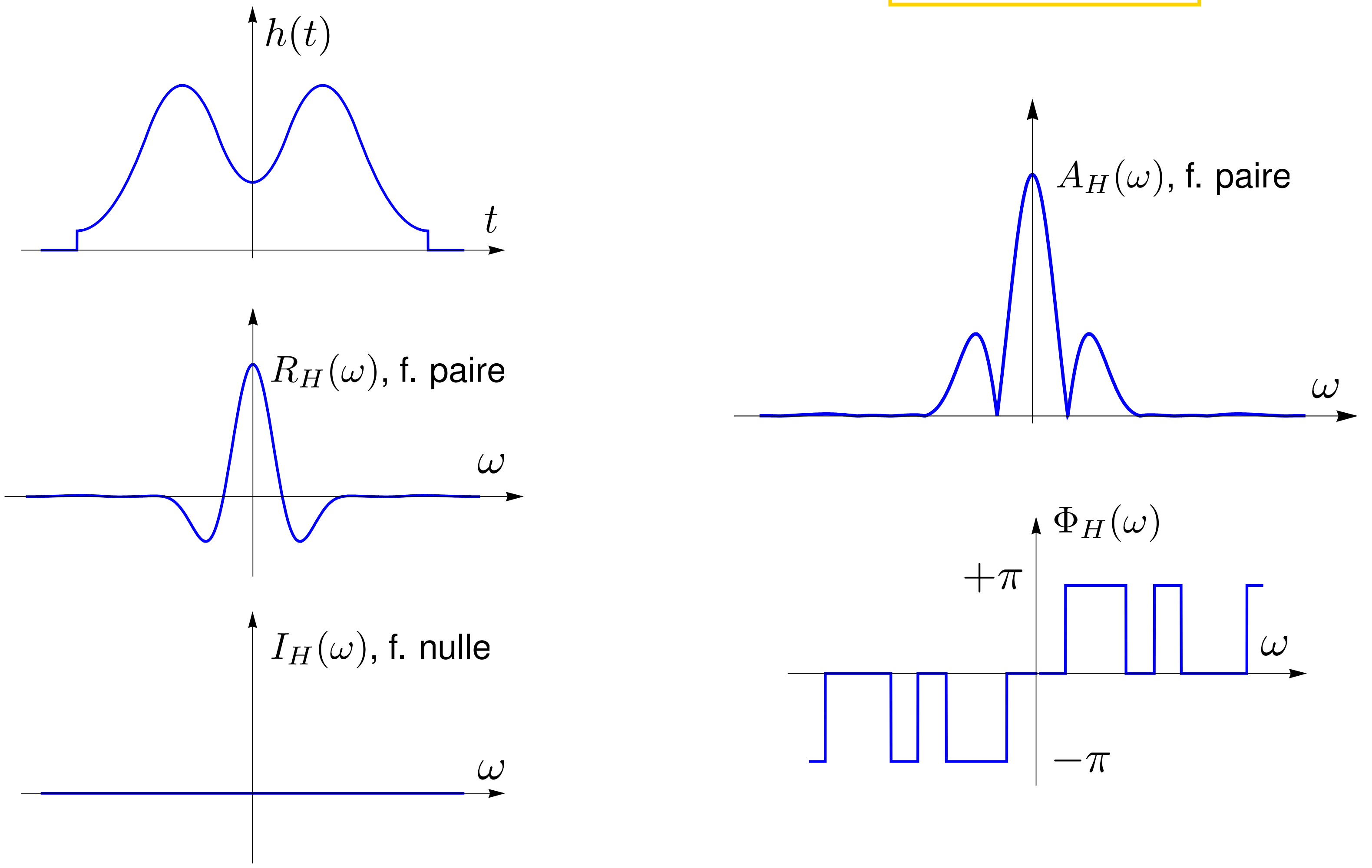
7.2 FILTRES A PHASE LINEAIRE

- Phase linéaire: cas de la symétrie paire
- Phase linéaire: cas de la symétrie impaire
- Réponse impulsionnelle d'un filtre à phase linéaire
- Réponse indicielle d'un filtre à phase linéaire
- Temps de montée
- Filtres passe-bas Gaussien
- Mise en cascade: filtre Gaussien équivalent

Réponse impulsionnelle à symétrie paire

- Symétrie paire autour de $t = 0$

$$\boxed{h(t) = h(-t)}$$

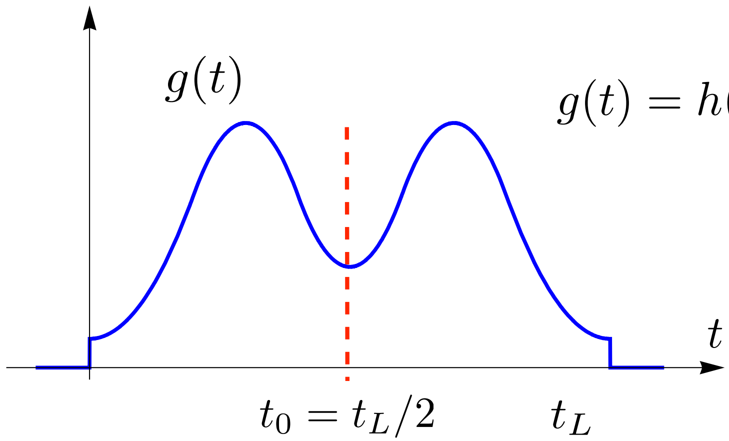


$$\left[\begin{array}{c} h(t) \text{ avec symétrie} \\ \text{paire autour de } t = 0 \end{array}\right] \quad \Leftrightarrow \quad \Phi_H(\omega) = \begin{cases} 0, & R_H(\omega) \geqslant 0 \\ \pm\pi, & R_H(\omega) < 0 \end{cases}$$

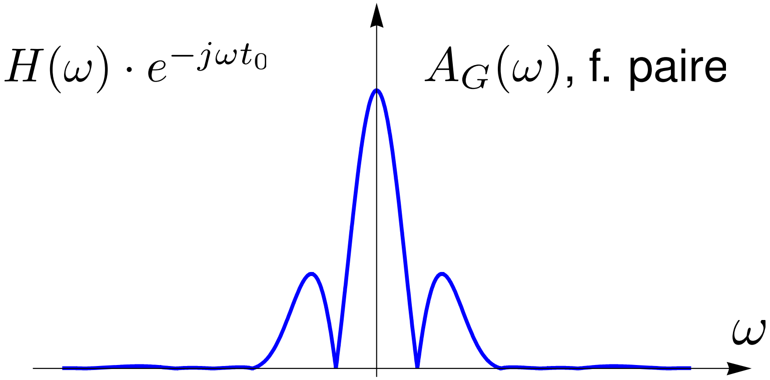
Phase linéaire: cas de la symétrie paire

- Symétrie paire autour de $t = t_0$

$$\boxed{g(t_0+\tau) = g(t_0-\tau) = h(\tau)}$$

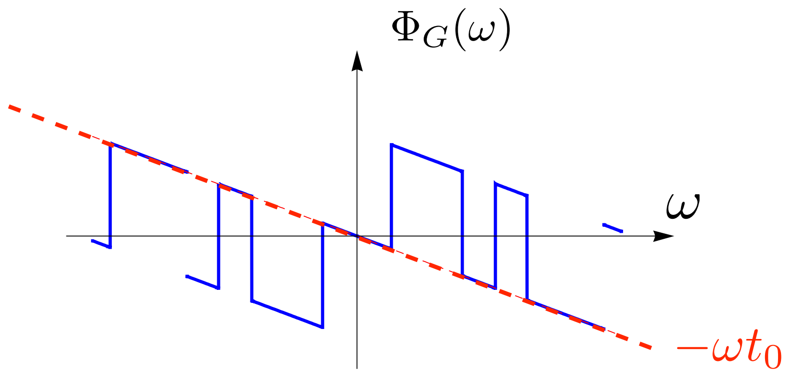


$$g(t) = h(t-t_0) \quad \longleftrightarrow \quad H(\omega)\cdot e^{-j\omega t_0}$$



$$A_G(\omega) = A_H(\omega)$$

$$\Phi_G(\omega) = \Phi_H(\omega) - \omega t_0 \quad \text{(modulo } 2\pi\text{)}$$

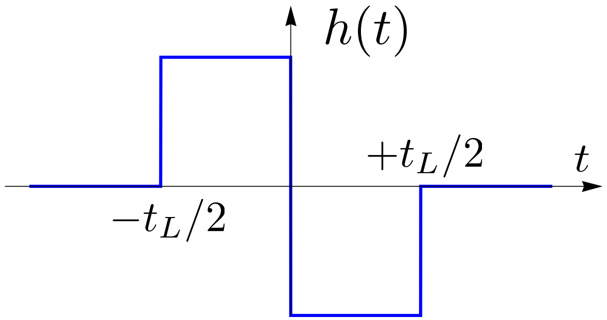


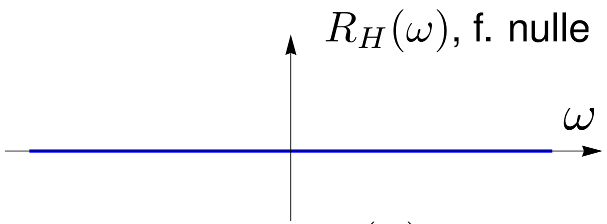
$$\left[\begin{array}{c} g(t) \text{ avec symétrie} \\ \text{paire autour de } t = t_0 \end{array}\right] \quad \Leftrightarrow \quad \Phi_G(\omega) = \begin{cases} -\omega t_0, & R_H(\omega) \geqslant 0 \\ -\omega t_0 \pm \pi, & R_H(\omega) < 0 \end{cases} \quad = \quad \text{phase linéaire!}$$

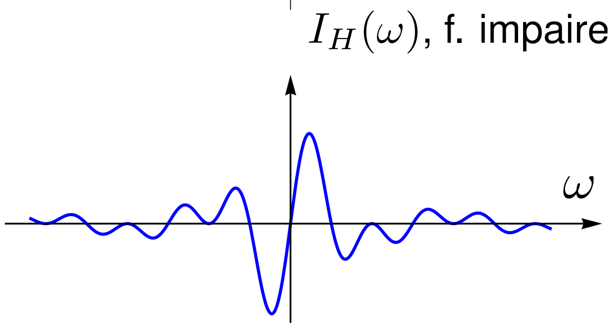
Réponse impulsionnelle à symétrie impaire

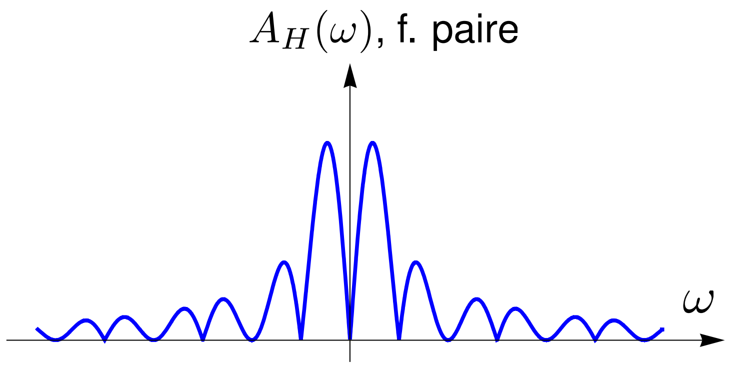
- Symétrie impaire autour de $t = 0$

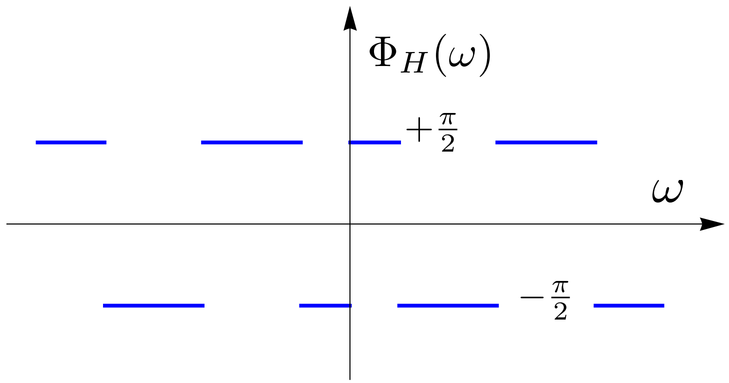
$$\boxed{h(t) = -h(-t)}$$









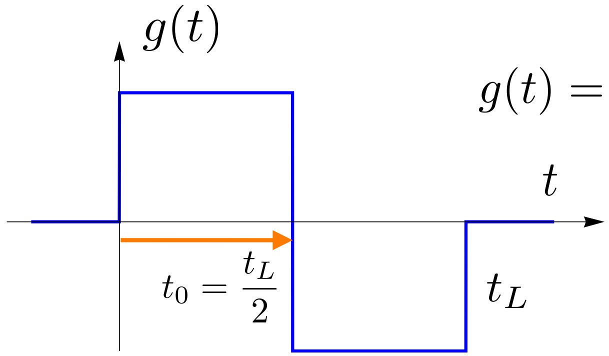


$$\left[\begin{array}{c} h(t) \text{ avec symétrie} \\ \text{impaire autour de } t = 0 \end{array}\right] \quad \Leftrightarrow \quad \Phi_H(\omega) = \begin{cases} +\pi/2, & I_H(\omega) > 0 \\ -\pi/2, & I_H(\omega) < 0 \end{cases}$$

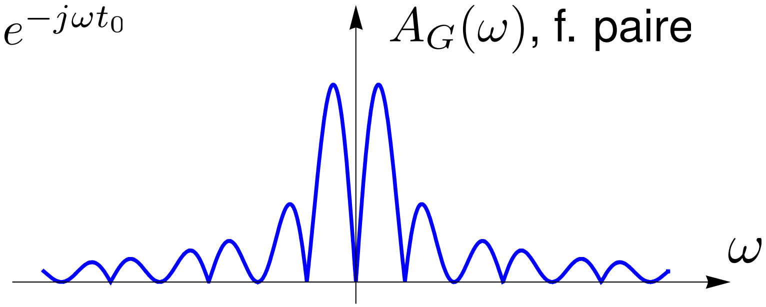
Phase linéaire: cas de la symétrie impaire

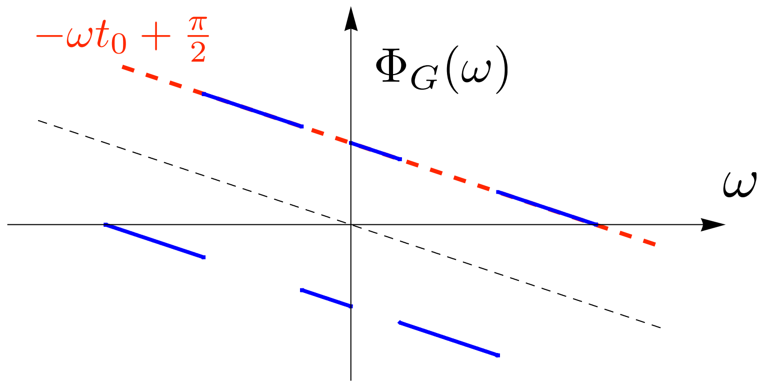
- Symétrie impaire autour de $t = t_0$

$$\boxed{g(t_0+\tau) = -g(t_0-\tau) = h(\tau)}$$



$$g(t) = h(t-t_0) \quad \longleftrightarrow \quad H(\omega)\cdot e^{-j\omega t_0}$$





$$A_G(\omega) = A_H(\omega)$$
$$\Phi_G(\omega) = \Phi_H(\omega) - \omega t_0 \qquad \text{(modulo } 2\pi\text{)}$$

$$\left[\begin{array}{c} g(t) \text{ avec symétrie} \\ \text{impaire autour de } t = t_0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \quad \Phi_G(\omega) = \begin{cases} -\omega t_0 + \pi/2, & I_H(\omega) > 0 \\ -\omega t_0 - \pi/2, & I_H(\omega) < 0 \end{cases} \quad = \quad \text{phase linéaire!}$$

Réponse impulsionnelle d'un filtre à phase linéaire

Réponse fréquentielle d'un filtre réel, passe-bas à phase linéaire *pure*; *i.e.*,

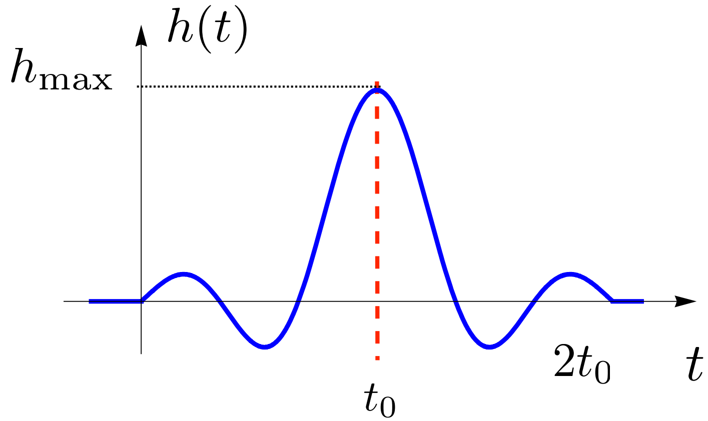
$$H(\omega) = |H(\omega)| \cdot e^{-j\omega t_0} \qquad \text{(c-à-d. } \Phi_H(\omega) = -\omega t_0\text{)}$$

Calcul de la réponse impulsionnelle:

$$\begin{aligned} h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H\}(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega)| \cdot e^{j(\omega t + \Phi_H(\omega))}\,\mathrm{d}\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega)| \cdot \cos\left(\omega(t - t_0)\right)\,\mathrm{d}\omega \end{aligned}$$

Réponse maximale pour $t = t_0$ (tous les cosinus sont en phase):

$$h(t_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega)|\,\mathrm{d}\omega = h_{\max}$$



Symétrie paire autour de $t = t_0$

$$h(t_0 + \tau) = h(t_0 - \tau)$$

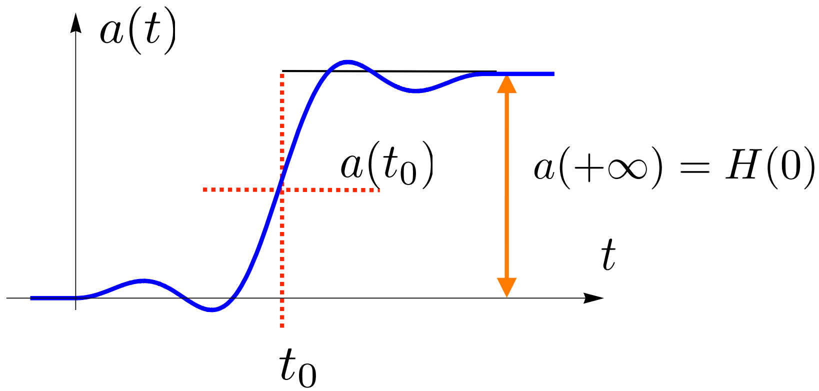
Réponse indicielle d'un filtre passe-bas à phase linéaire

Réponse indicielle (cas général): $a(t) = (u * h)(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\,\mathrm{d}\tau$

- **Filtre causal:**

$a(t) = 0$, pour $t \leqslant 0$

$a(+\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\,\mathrm{d}\tau = H(0) > 0$ (si filtre passe-bas)



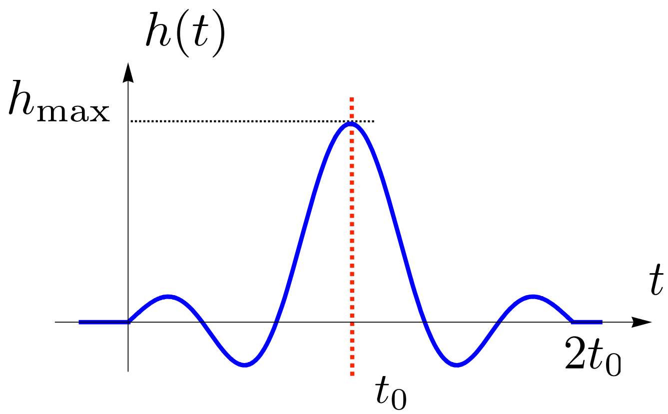
- **Filtre à phase linéaire:** $h(t_0 + \tau) = h(t_0 - \tau)$

$$a(t_0) = \int_{-\infty}^{t_0} h(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}H(0)$$

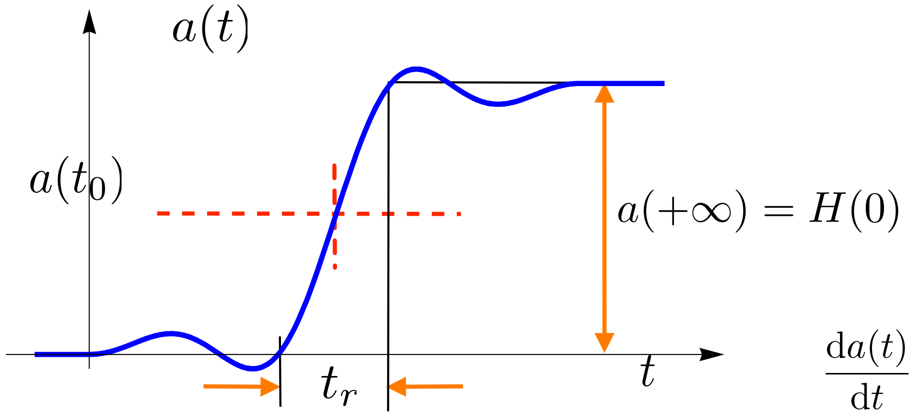
Anti-symétrie autour de $t = t_0$

$$a(t_0+\tau) - a(t_0) = -\left(a(t_0-\tau) - a(t_0)\right)$$

Justification: $a(t_0 \pm \tau) = \underbrace{\int_{-\infty}^{t_0} h(\tau)\,\mathrm{d}\tau}_{a(t_0)} \pm \int_0^{\tau} h(t_0+\tau)\,\mathrm{d}\tau$



Temps de montée



$$\left.\frac{\mathrm{d}a(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{t} h(\tau)\,\mathrm{d}\tau\Big|_{t=t_0} = h(t_0) = h_{\max} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega)|\,\mathrm{d}\omega$$

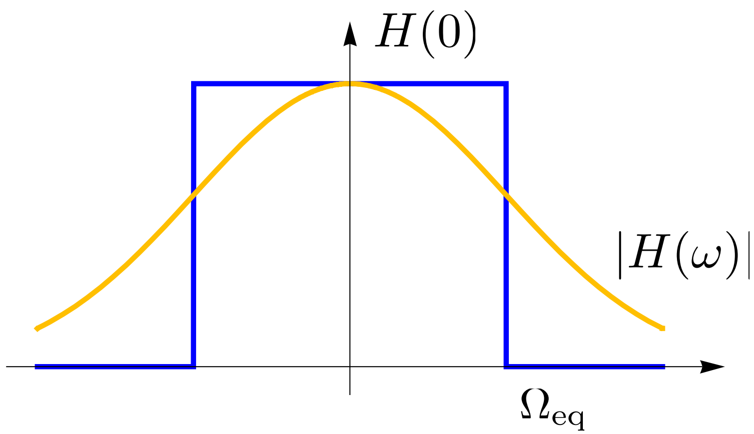
- Temps de montée: "rise time"

$$\frac{H(0)}{t_r} = \left.\frac{\mathrm{d}a(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0} = h_{\max} \quad\Rightarrow\quad t_r = \frac{H(0)}{h_{\max}} = \frac{2\pi H(0)}{\int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega)|\,\mathrm{d}\omega}$$

$$\boxed{t_r = \frac{\pi}{\Omega_{\mathrm{eq}}} = \frac{1}{2 f_{\mathrm{eq}}}}$$

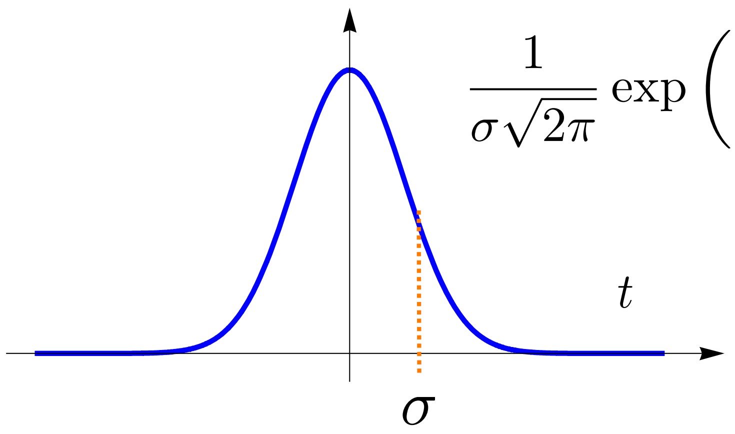
- Largeur de bande équivalente

$$2\Omega_{\mathrm{eq}}\, H(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega)|\,\mathrm{d}\omega$$

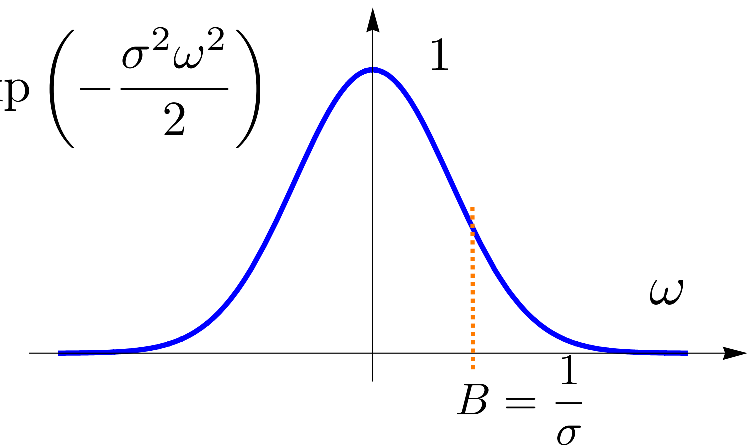


Filtre passe-bas Gaussien

- Transformation de Fourier d'une Gaussienne normalisée

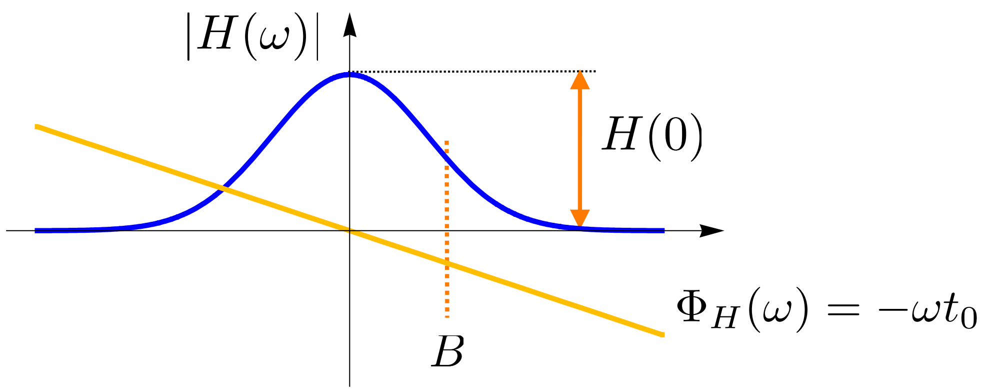


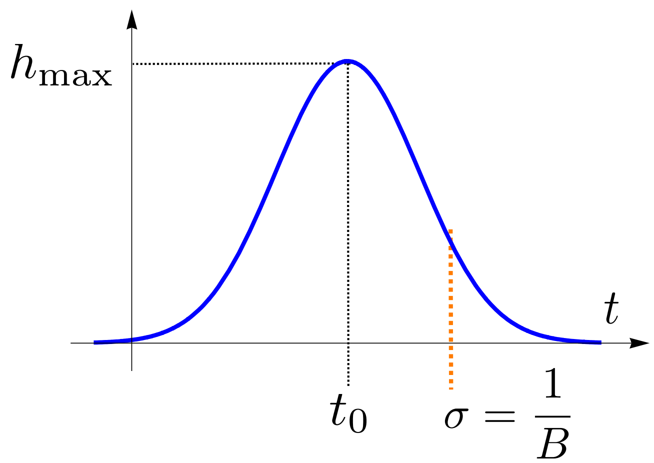
$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} \exp\left(-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}\right)$$



- Filtre passe-bas Gaussien avec phase linéaire

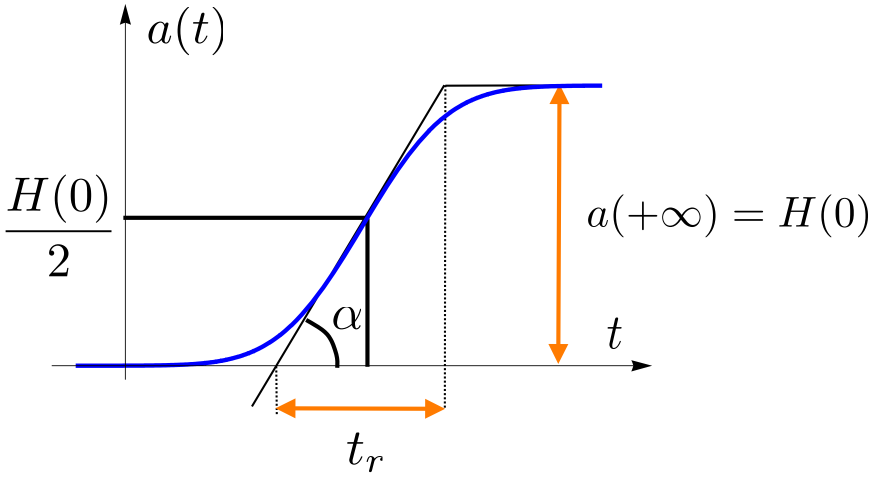
$$H(\omega) = H(0)\cdot\exp\left(-\frac{\omega^2}{2B^2}\right)\cdot e^{-j\omega t_0} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} h(t) = H(0)\cdot\frac{B}{\sqrt{2\pi}}\cdot\exp\left(-\frac{B^2(t-t_0)^2}{2}\right)$$





Filtre passe-bas Gaussien (suite)

- Réponse indicielle: fonction Erf



$$t_r = \frac{H(0)}{\tan\alpha} = \frac{H(0)}{h_{\max}}$$

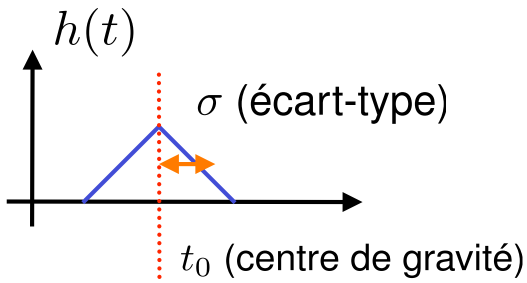
$$h_{\max} = H(0) \cdot \frac{B}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\Rightarrow \quad t_r = \frac{\sqrt{2\pi}}{B} = \sigma\sqrt{2\pi} = \frac{\pi}{\Omega_{\mathrm{eq}}}$$

$$\Rightarrow \quad \Omega_{\mathrm{eq}} = \frac{\pi}{\sqrt{2\pi}} B \approx 1.25 \cdot B$$

Cascade de filtres: filtre Gaussien équivalent

- Caractéristiques du filtre



Type passe-bas: $H_{\max} = H(0) = \int_{\mathbb{R}} h(t)\,\mathrm{d}t = 1$

Temps de retard: $t_0 = \int_{\mathbb{R}} t \cdot h(t)\,\mathrm{d}t$

Largeur équivalente: $\sigma = \sqrt{\int_{\mathbb{R}} (t - t_0)^2 h(t)\,\mathrm{d}t}$

$$\underbrace{\rightarrow \boxed{H(\omega)} \rightarrow \boxed{H(\omega)} \rightarrow \cdots \boxed{H(\omega)} \rightarrow}_{} \quad \Leftrightarrow \quad \rightarrow \boxed{H_{\mathrm{eq}}(\omega) = e^{-n\sigma^2\omega^2/2} \cdot e^{-j\omega n t_0}} \rightarrow$$

Cascade de n filtres identiques

$$B = \frac{1}{\sigma}; \quad \text{retard: } t_0$$

Filtre Gaussien équivalent

$$\sigma_{\mathrm{eq}}^2 = n\sigma^2; \quad B_{\mathrm{eq}} = \frac{B}{\sqrt{n}}; \quad t_{0,\mathrm{eq}} = n t_0$$

- Généralisation: cascade de n filtres (Gaussien)

$$\sigma_{\mathrm{eq}}^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_n^2; \quad t_{0,\mathrm{eq}} = t_{0,1} + \cdots + t_{0,n}$$

Théorème central-limite

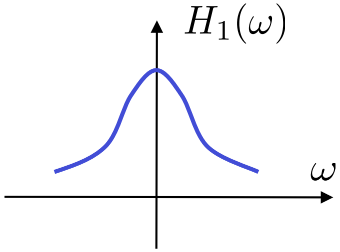
Théorème central-limite

Hypothèses

- $H_1(0) = 1$ (spectre passe-bas)

- Maximum global à $\omega = 0$ avec

$$\left.\frac{\mathrm{d}H_1(\omega)}{\mathrm{d}\omega}\right|_{\omega=0} = 0; \qquad \left.\frac{\mathrm{d}^2 H_1(\omega)}{\mathrm{d}\omega^2}\right|_{\omega=0} = -\sigma^2 < 0$$



$$\boxed{H_n(\omega) = (H_1(\omega))^n \quad \longrightarrow \quad e^{-n\sigma^2\omega^2/2}, \quad \text{lorsque } n \to +\infty}$$

Preuve

Série de Taylor autour de l'origine:

$$H_1(\omega) = 1 - \frac{\sigma^2\omega^2}{2!} + O\left(\omega^4\right)$$

$$\xi = \omega\sqrt{n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(H_1\left(\xi/\sqrt{n}\right)\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \underbrace{\frac{-\sigma^2\xi^2/2}{n}}_{z/n} + \underbrace{\frac{O\left(\xi^4\right)}{n^2}}_{\to 0}\right)^n = e^{-\sigma^2\xi^2/2}$$

Rappel:

$$e^z = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

Demo

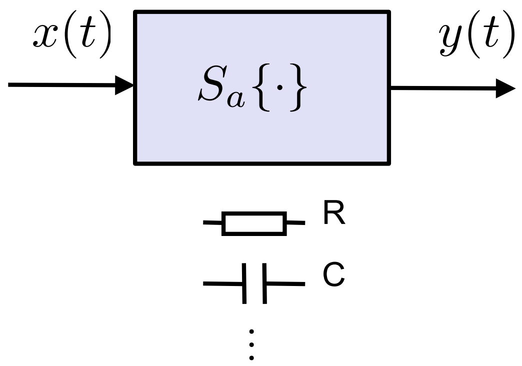
7.3 FONCTIONS DE TRANSFERT RATIONNELLES

- Fonctions de transfert rationnelles
- Pôles et zéros
- Décomposition en fractions simples
- Détermination de la réponse impulsionnelle
- Exemple de calcul

Fonctions de transfert rationnelles

- Filtre analogique à constantes localisées (équation différentielle)

Contraintes physiques: $n \geqslant m$



$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n} + a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + a_0 y = b_m \frac{\mathrm{d}^m x}{\mathrm{d}t^m} + \cdots + b_1 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + b_0 x$$

- Equation du filtre dans le domaine de Fourier

$$(j\omega)^n Y(\omega) + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} Y(\omega) + \cdots + a_0 Y(\omega) = b_m (j\omega)^m X(\omega) + \cdots + b_0 X(\omega)$$

$$\big((j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \cdots + a_0\big)\, Y(\omega) = \left(b_m (j\omega)^m + \cdots + b_0\right) X(\omega)$$

- Fonction de transfert

$$\boxed{H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{b_m (j\omega)^m + \cdots + b_1 (j\omega) + b_0}{(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \cdots + a_1 (j\omega) + a_0} = \frac{P_m(j\omega)}{Q_n(j\omega)}}$$

$P_m(s) = b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0$

$Q_n(s) = s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$ = polynôme caractéristique (cf. Chap 2)!

Pôles et zéros

- Fonctions de transfert rationnelles

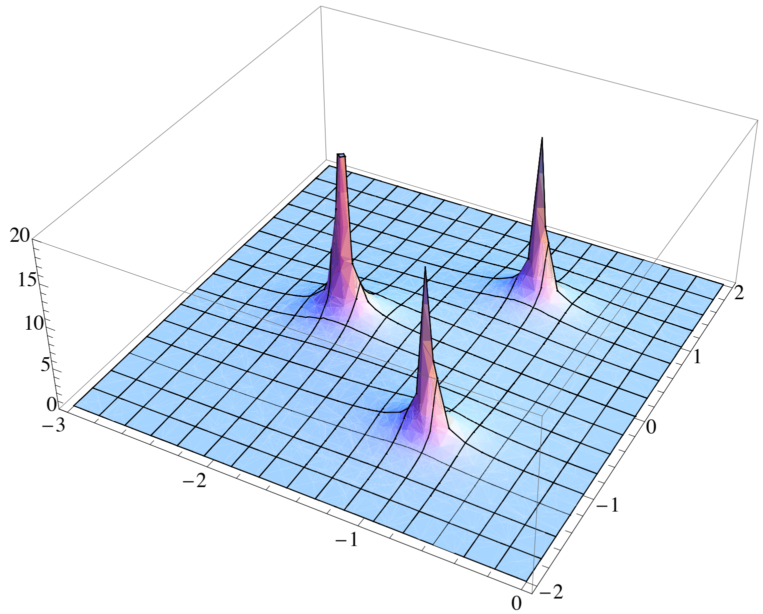
$$H(\omega) = \frac{b_m (j\omega)^m + \cdots + b_1 (j\omega) + b_0}{(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \cdots + a_1 (j\omega) + a_0} = \left. \frac{P_m(s)}{Q_n(s)} \right|_{s=j\omega}$$

- Factorisation

$$H(\omega) = b_m \frac{\prod_{k=1}^{m} (j\omega - s_{0k})}{\prod_{k=1}^{n} (j\omega - s_{\mathrm{p}k})}$$

Zéros: $\{s_{0k}\}_{k=1,\dots,m}$ t.q. $P_m(s_{0k}) = 0$

Pôles: $\{s_{\mathrm{p}k}\}_{k=1,\dots,n}$ t.q. $Q_n(s_{\mathrm{p}k}) = 0$



- Pourquoi l'appellation «pôles»?

Une explication parmi d'autres:
Le quotient $P_m(s)/Q_n(s)$ est une fonction dans le plan complexe qui ressemble vaguement à une tente avec des singularités (piquets=«poles» en anglais) en $s = s_{pk}$.

Décomposition en fractions simples

$$H(\omega) = \left.\frac{P_m(s)}{Q_n(s)}\right|_{s=j\omega} = b_m \frac{\prod_{k=1}^{m}(j\omega - s_{0k})}{\prod_{k=1}^{n}(j\omega - s_{pk})} \quad m \leqslant n$$

■ Cas de racines simples

$$H(\omega) = \underbrace{b_n}_{\substack{=0, \\ \text{si } n>m}} + \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{j\omega - s_{pk}} \quad \text{avec} \quad A_i = (s - s_{pi}) \cdot \left.\frac{P_m(s)}{Q_n(s)}\right|_{s=s_{pi}} = b_m \frac{\prod_{k=1}^{m}(s_{pi} - s_{0k})}{\prod_{k\neq i}(s_{pi} - s_{pk})}$$

■ Cas de racines multiples

Contribution d'un pôle multiple d'ordre p:

$$\frac{B_1}{j\omega - s_p} + \frac{B_2}{(j\omega - s_p)^2} + \cdots + \frac{B_p}{(j\omega - s_p)^p} \quad \text{avec} \quad B_{p-k} = \frac{1}{k!}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}s^k}\left((s - s_p)^p \frac{P_m(s)}{Q_n(s)}\right)_{s=s_p}$$

Détermination de la réponse impulsionnelle

- Cas de racines simples

$$H(\omega) = \underbrace{b_n}_{\substack{=0,\\ \text{si } n>m}} + \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{j\omega - s_{\mathrm{p}k}}$$

$$\downarrow \quad \mathcal{F}^{-1}$$

$$h(t) = \underbrace{b_n \delta(t)}_{\substack{=0,\\ \text{si } n>m}} + \sum_{k=1}^{n} A_k u(t) \cdot e^{s_{\mathrm{p}k} t}$$

$\Rightarrow$ Somme pondérée de modes (cf. Chap. 2)!

$f(t)$	$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t$
$\delta(t)$	1
$u(t) \cdot e^{st}$	$\frac{1}{j\omega - s}, \quad \mathrm{Re}\{s\} < 0$
$\frac{t_+^n e^{st}}{n!}$	$\frac{1}{(j\omega - s)^{n+1}}, \quad \mathrm{Re}\{s\} < 0$
$u(t) \cdot e^{at} \cos \omega_0 t$	$\frac{j\omega - a}{(j\omega - a)^2 + \omega_0^2}, \quad a < 0$
$u(t) \cdot e^{at} \sin \omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{(j\omega - a^2)^2 + \omega_0^2}, \quad a < 0$

- Contribution d'un pôle multiple (ordre p)

$$\frac{B_1}{j\omega - s_{\mathrm{p}}} + \frac{B_2}{(j\omega - s_{\mathrm{p}})^2} + \cdots + \frac{B_p}{(j\omega - s_{\mathrm{p}})^p} \quad \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \quad \left(\sum_{k=1}^{p} B_k \frac{t_+^{k-1}}{(k-1)!} \right) e^{s_{\mathrm{p}} t}$$

Condition de stabilité BIBO

Tous les pôles dans le demi-plan complexe gauche !

Exemple de calcul

Problème: Calculer la réponse impulsionnelle du filtre: $H(\omega) = \dfrac{-2\omega^2+5}{-\omega^2+3j\omega+2}$

1. Exprimer $H(\omega)$ sous la forme d'un quotient de deux polynômes en $s = j\omega$

$$H(\omega) = \frac{2(j\omega)^2+5}{(j\omega)^2+3j\omega+2} = \left.\frac{P(s)}{Q(s)}\right|_{s=j\omega} = \left.\frac{2s^2+5}{s^2+3s+2}\right|_{s=j\omega}$$

2. Détermination des pôles: $s^2+3s+2=0 \quad \Rightarrow \quad (s_1=-1,\ s_2=-2)$

   Le système causal est stable!

3. Décomposition en fractions simples

$$\frac{2s^2+5}{s^2+3s+2} = \frac{2s^2+5}{(s+1)(s+2)} = 2 + \frac{A_1}{(s+1)} + \frac{A_2}{(s+2)}$$

(remarque: $\lim_{\omega\to+\infty} H(\omega) = b_m = 2$)

$$A_1 = \left.\frac{2s^2+5}{(s+2)}\right|_{s=-1} = \frac{2+5}{-1+2} = 7; \quad A_2 = \left.\frac{2s^2+5}{(s+1)}\right|_{s=-2} = \frac{8+5}{-2+1} = -13$$

4. Réponse impulsionnelle par transformation de Fourier inverse

$$h(t) = 2\delta(t) + 7u(t)\cdot e^{-t} - 13u(t)\cdot e^{-2t}$$

7.4 PLACEMENT DES POLES ET ZEROS

- Réponse d'amplitude et de phase
- Contribution d'un pôle réel
- Contribution d'un zéro réel
- Contribution d'une paire de pôles conjugués
- Contribution d'une paire de zéros conjugués
- Système à phase minimale
- Filtre passe-tout

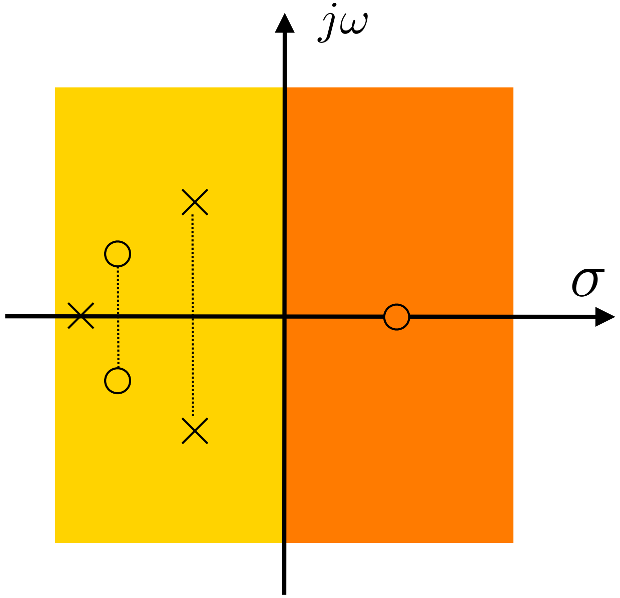
Fonction de transfert: pôles et zéros

- Fonctions de transfert rationnelles

$$H(\omega) = \frac{b_m (j\omega)^m + \cdots + b_1 (j\omega) + b_0}{(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \cdots + a_1 (j\omega) + a_0} = \left.\frac{P_m(s)}{Q_n(s)}\right|_{s=j\omega} \qquad m \leqslant n$$

Exemples: circuit électrique à constantes localisées

$$H(\omega) = b_m \frac{\prod_{k=1}^{m} (j\omega - s_{0k})}{\prod_{k=1}^{n} (j\omega - s_{\mathrm{p}k})}$$

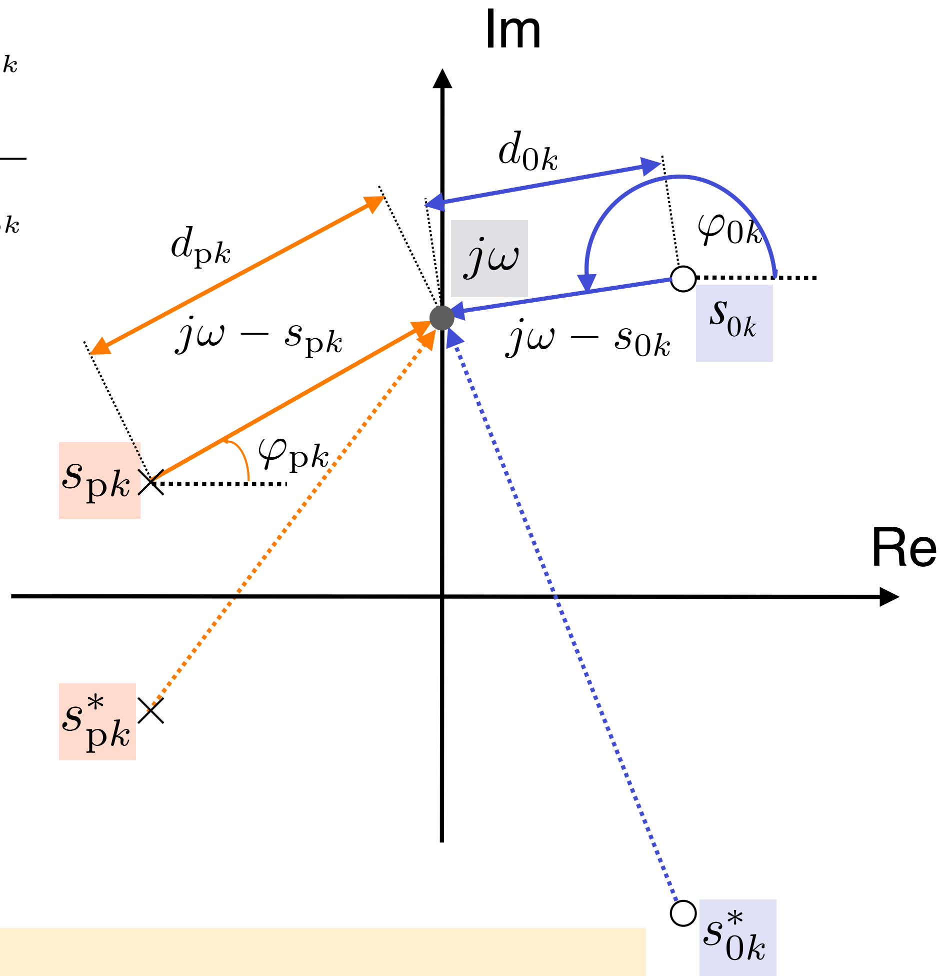


$s_{0k} = \sigma_{0k} + j\omega_{0k}$: zéros de $H(\omega)$ $\circ$

$s_{\mathrm{p}k} = \sigma_{\mathrm{p}k} + j\omega_{\mathrm{p}k}$: pôles de $H(\omega)$ $\times$

Réponse d'amplitude et de phase

$$H(\omega) = b_m \frac{\prod_{k=1}^{m} (j\omega - s_{0k})}{\prod_{k=1}^{n} (j\omega - s_{pk})} = b_m \frac{\prod_{k=1}^{m} d_{0k} \cdot e^{j\varphi_{0k}}}{\prod_{k=1}^{n} d_{pk} \cdot e^{j\varphi_{pk}}}$$



Représentation polaire:

$$j\omega - \overbrace{(\sigma_k + j\omega_k)}^{s_k} = d_k \cdot e^{j\varphi_k}$$

$$d_k = \sqrt{\sigma_k^2 + (\omega - \omega_k)^2}$$

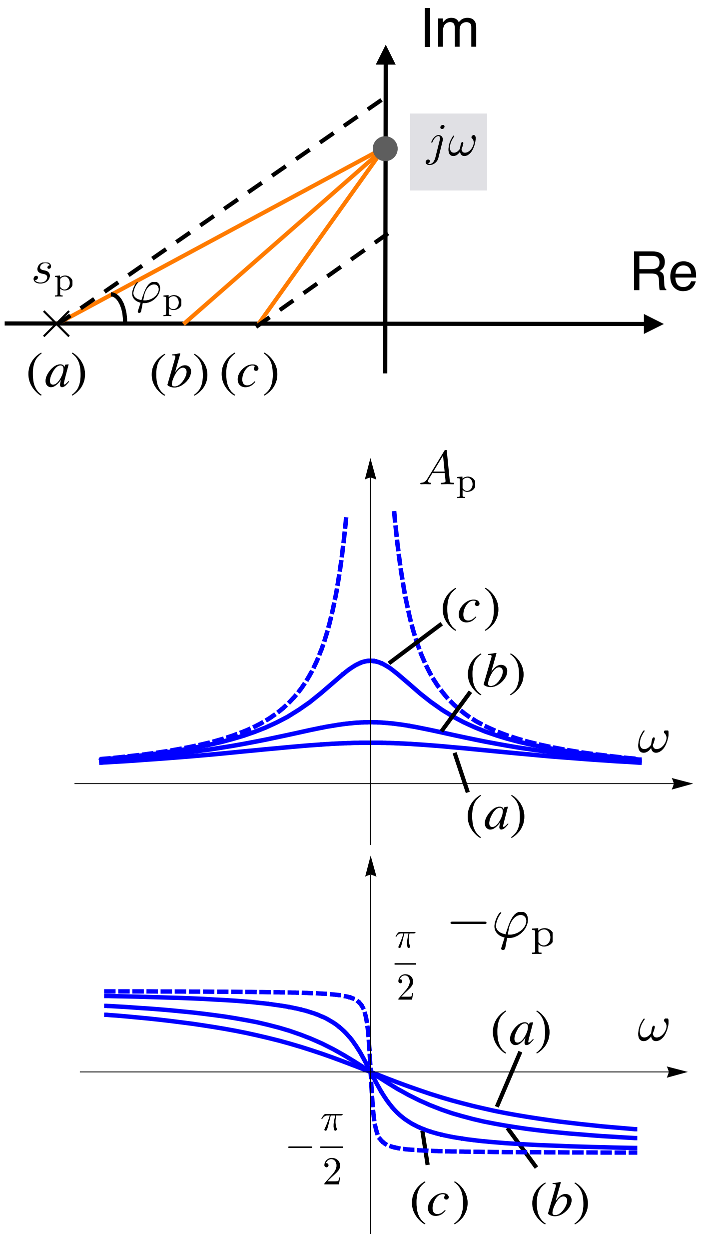
$$\varphi_k = \arctan \tfrac{\omega - \omega_k}{-\sigma_k}$$

Amplitude: $$A_H(\omega) = |b_m| \cdot \frac{\prod_{k=1}^{m} d_{0k}}{\prod_{k=1}^{n} d_{pk}}$$

Phase: $$\Phi_H(\omega) = \sum_{k=1}^{m} \varphi_{0k} - \sum_{k=1}^{n} \varphi_{pk}$$

Contribution d'un pôle réel

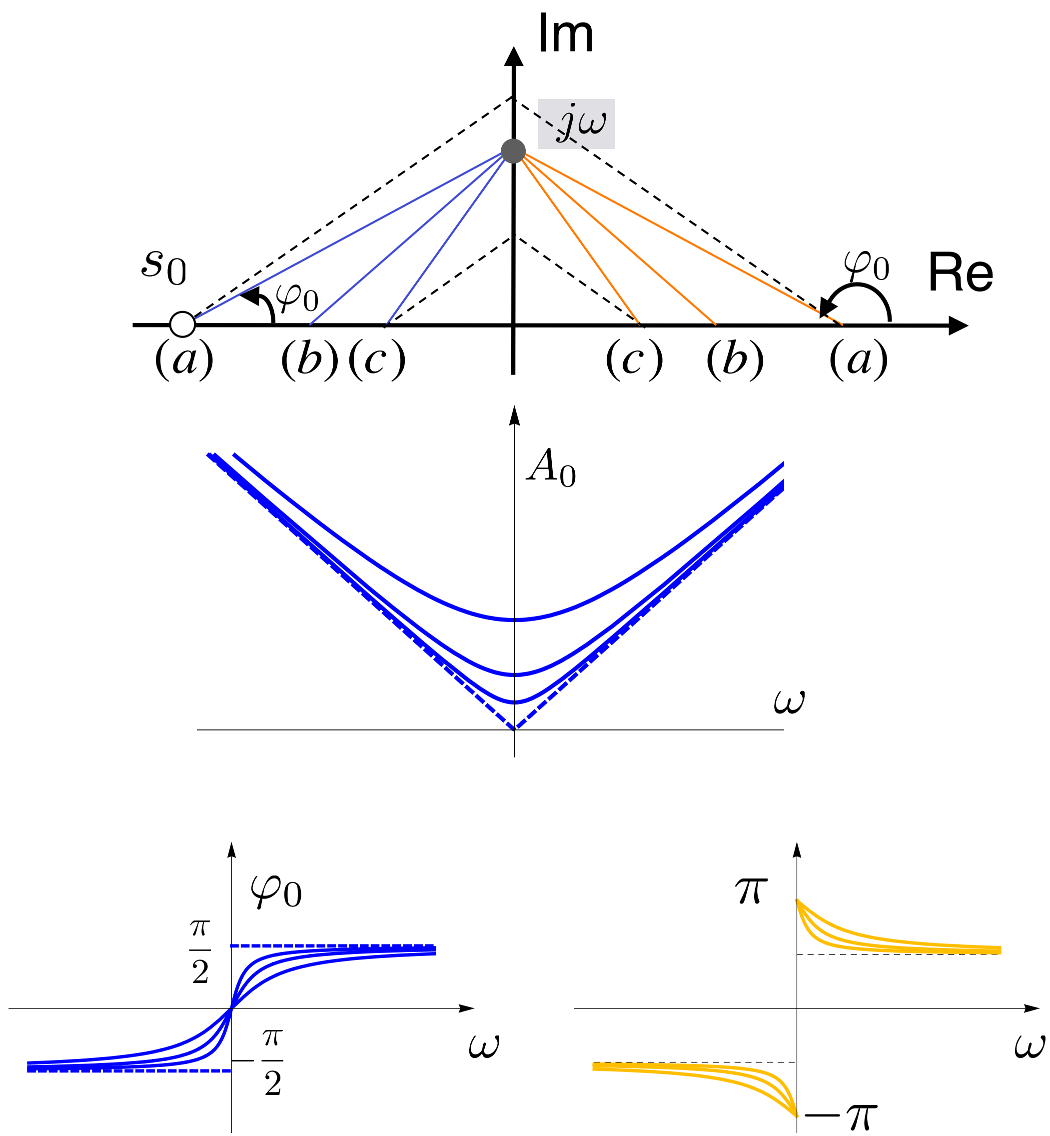
$s_{\mathrm{p}} = \sigma_{\mathrm{p}} < 0$



Click for demo

Contribution d'un zéro réel

$s_0 = \sigma_0$

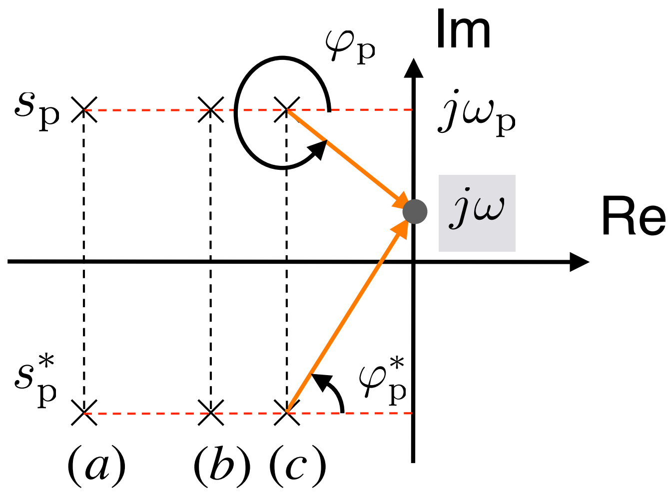


Click for demo

$\sigma_0 < 0$ $\sigma_0 > 0$

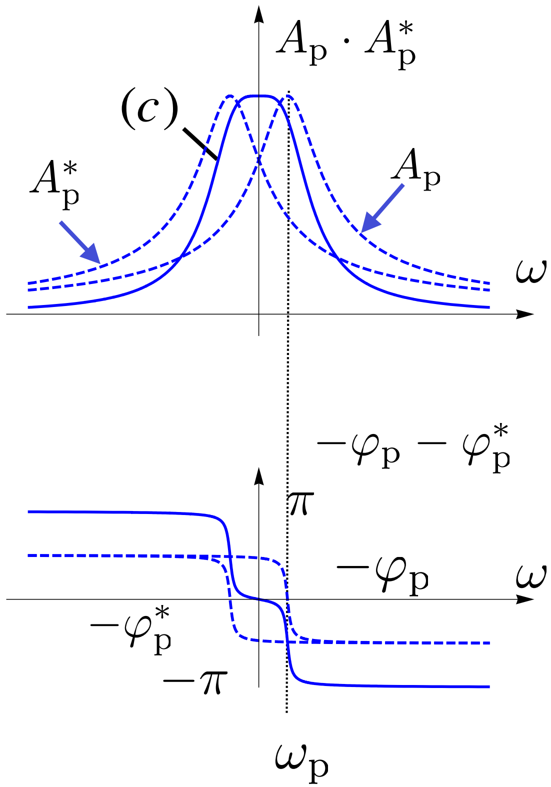
Contribution d'une paire de pôles conjugués

$$s_{\mathrm{p}} = \sigma_{\mathrm{p}} + j\omega_{\mathrm{p}}$$
$$s_{\mathrm{p}}^* = \sigma_{\mathrm{p}} - j\omega_{\mathrm{p}}$$



Placement du/des pôle(s): effets qualitatifs

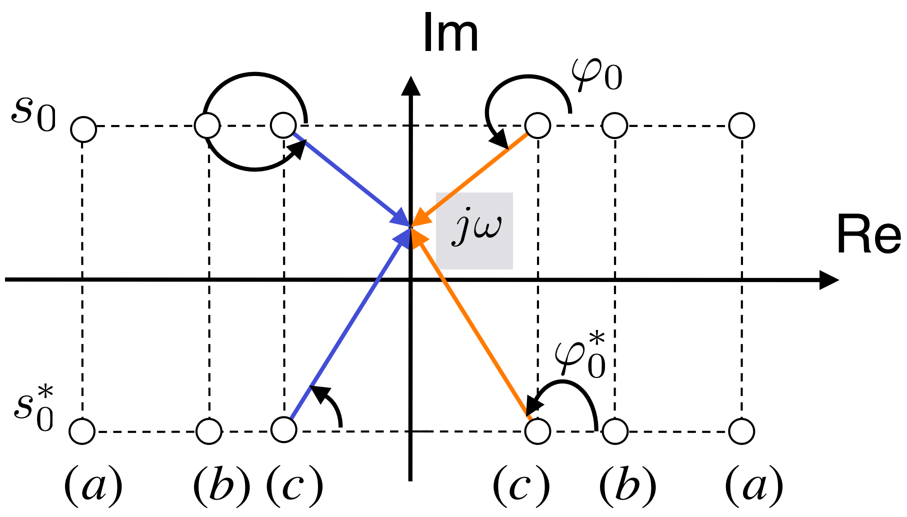
- Résonance (amplification) à la fréquence ω_{p}; d'autant plus forte que le pôle est proche de l'axe imaginaire
- Retard de phase de l'ordre de $\pi/2$ par pôle



Click for demo

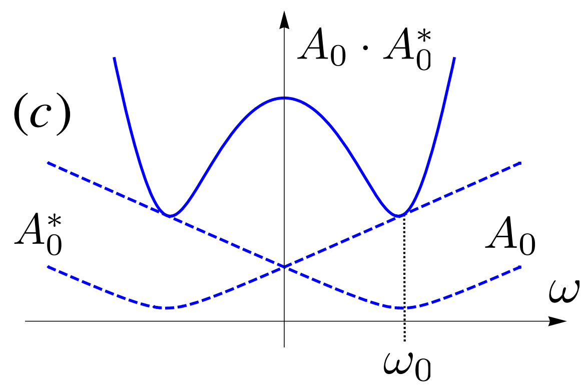
Contribution d'une paire de zéros conjugués

$$s_0 = \sigma_0 + j\omega_0$$
$$s_0^* = \sigma_0 - j\omega_0$$

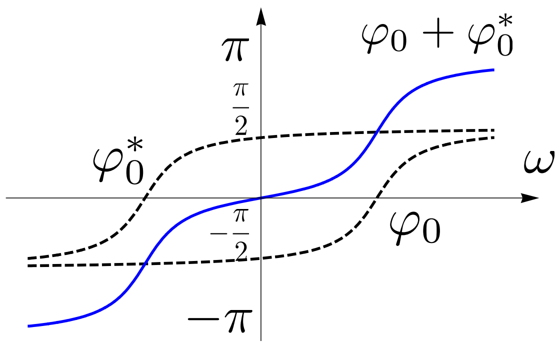


Placement du/des zéro(s): effets qualitatifs

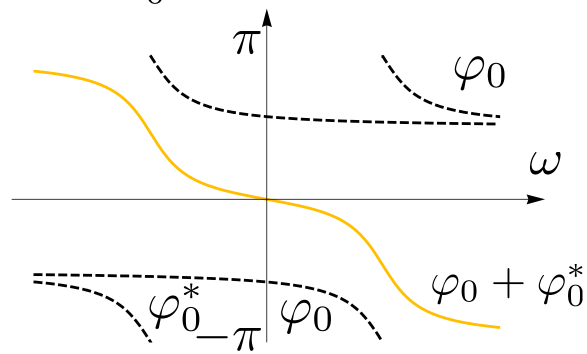
- Atténuation à la fréquence ω_0; d'autant plus forte que le zéro est proche de l'axe imaginaire
- Avance ($\sigma_0 < 0$) ou retard ($\sigma_0 > 0$) de phase de l'ordre de $\pi/2$ par zéro



Click for demo



$\sigma_0 < 0$



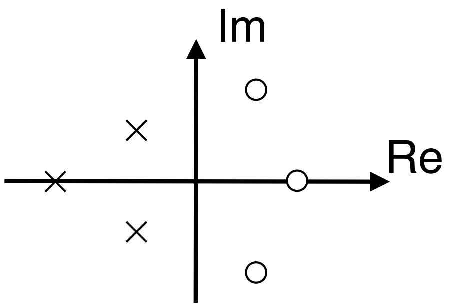
$\sigma_0 > 0$

Système à phase minimale

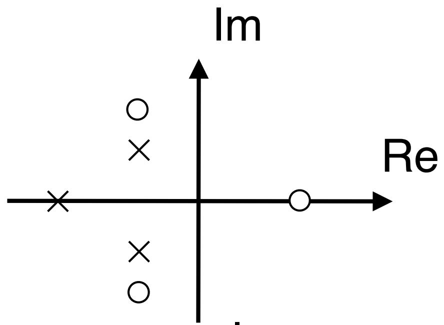
On peut obtenir la même réponse en amplitude avec deux zéros dont les σ_{0k} sont de valeur opposée

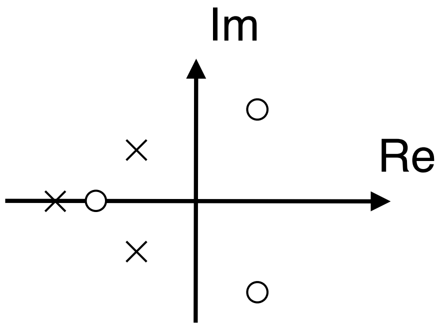
- Si $\sigma_{0k} > 0$, la contribution en phase pour $\omega > 0$ est négative
- Si $\sigma_{0k} < 0$, la contribution en phase est positive; elle peut donc compenser en partie la composante en phase des pôles qui est toujours négative!

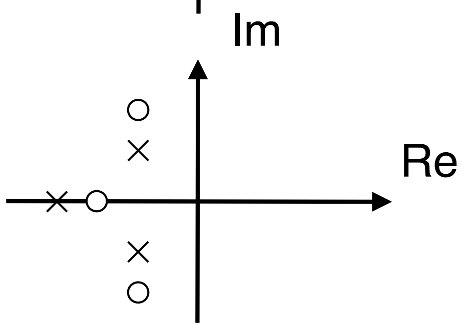
Filtre à phase minimale: tous les zéros dans le demi-plan gauche.
Parmi tous les filtres rationnels causaux ayant la même réponse d'amplitude, c'est celui qui a la phase minimale.



Système à phase maximale





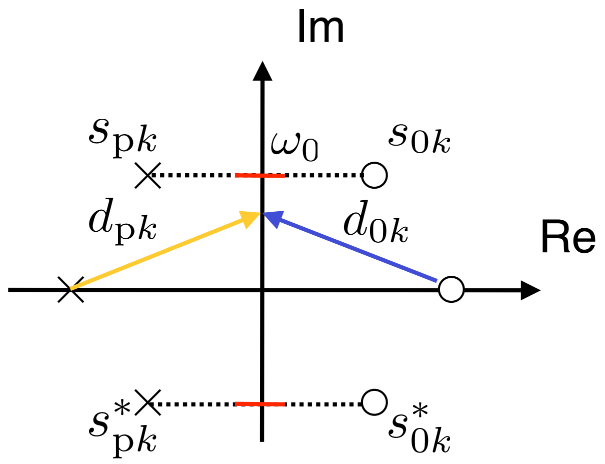


Système à phase minimale

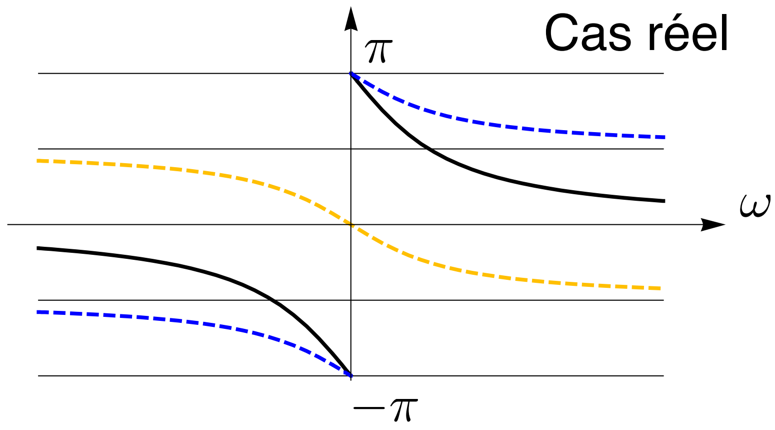
Filtre passe-tout

Filtre passe-tout = déphaseur

- Modifie seulement la phase
- Pôles et zéros placés de façon symétrique



$$A_H(\omega) = 1 \quad \forall\omega \quad \Rightarrow \quad A_H(\omega) = \prod_{k=1}^{n} \underbrace{\frac{d_{0k}}{d_{\mathrm{p}k}}}_{1}$$



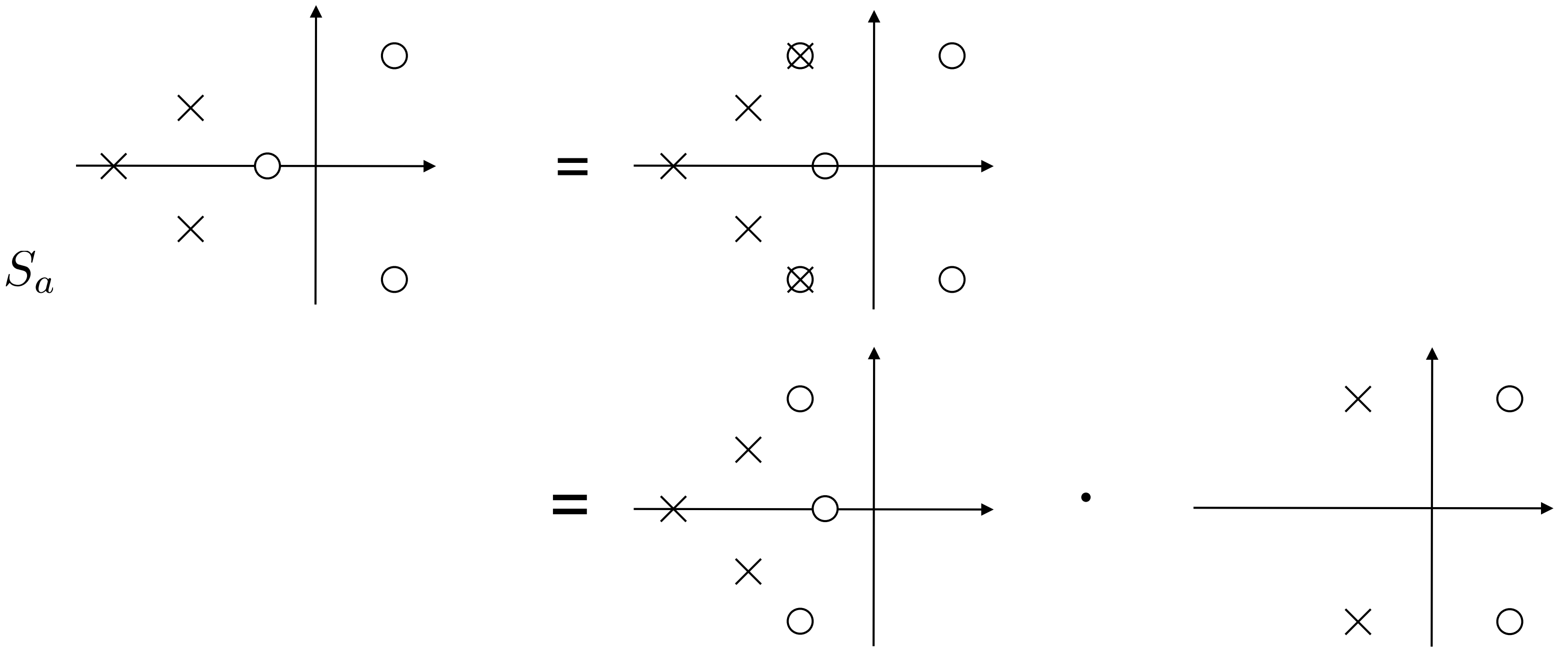
$$\sigma_{0k} + j\omega_{0k} = -\sigma_{pk} + j\omega_{pk} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{s_{0k} = -s^*_{\mathrm{p}k}}$$

Exemple: $\quad H(\omega) = \dfrac{j\omega - d}{j\omega + d}$

Décomposition: phase minimale-passe-tout

Propriété

Toute fonction de transfert rationnelle peut se décomposer en une cascade d'un système à phase minimale et un système passe-tout



Système à phase minimale

Système passe-tout

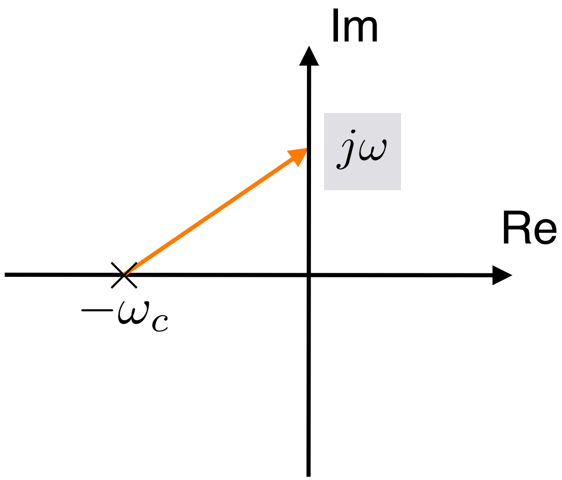
Intérêt pour la synthèse

- On tient compte d'abord de l'amplitude uniquement et l'on choisit la solution à phase minimale (pôles et zéros dans le demi-plan gauche)
- On corrige ensuite la phase à l'aide d'un filtre passe-tout

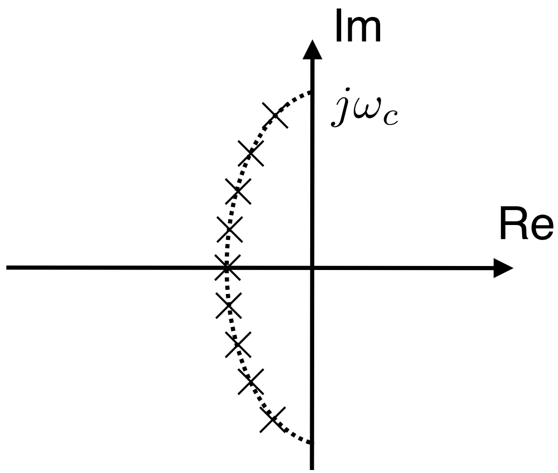
7.5 SYNTHESE DE FILTRES PARTICULIERS

- Filtres passe-bas
- Filtres passe-bande
- Filtres à encoches
- Filtres de Butterworth

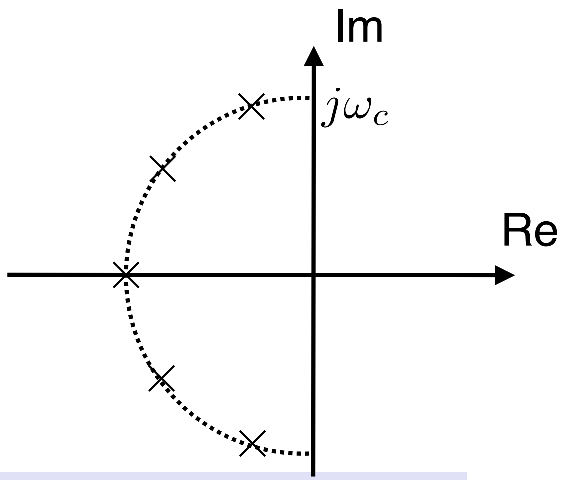
Filtres passe-bas



(a) Filtre du premier ordre ($n = 1$)

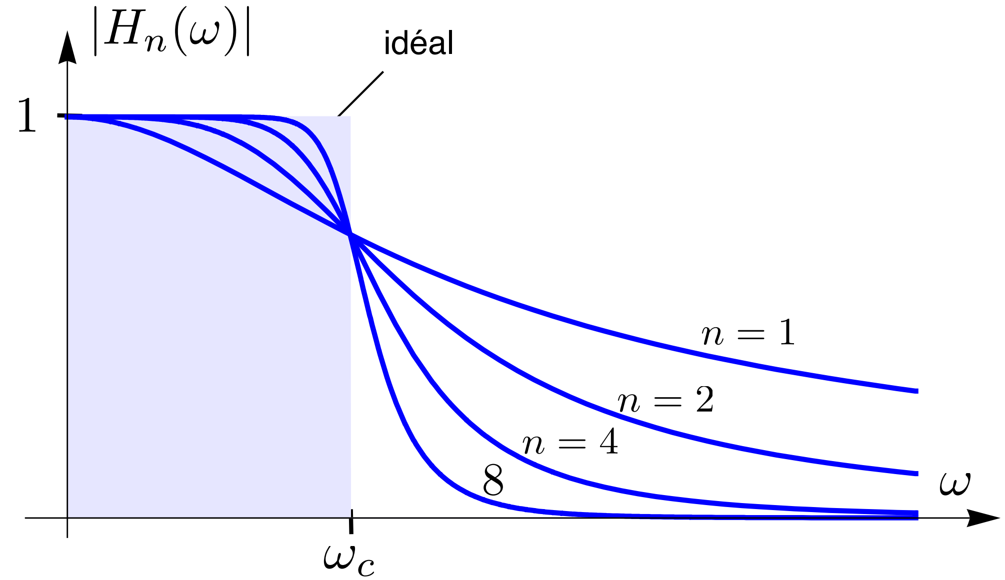


(b) Mur de pôles

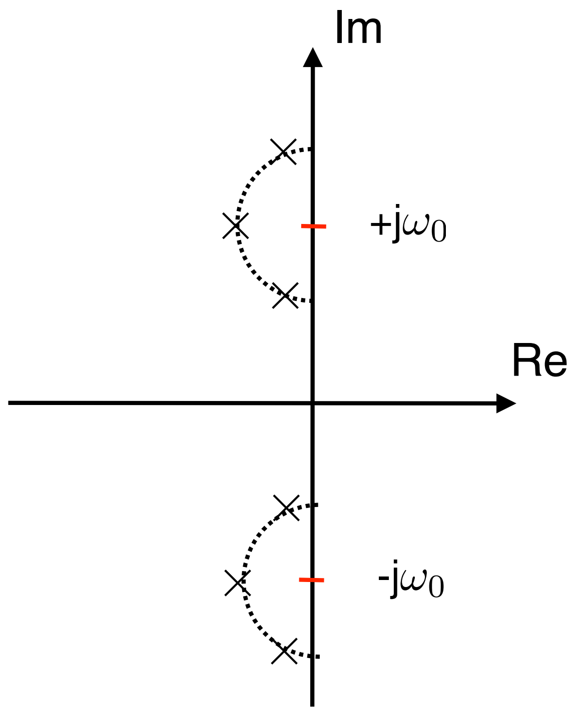


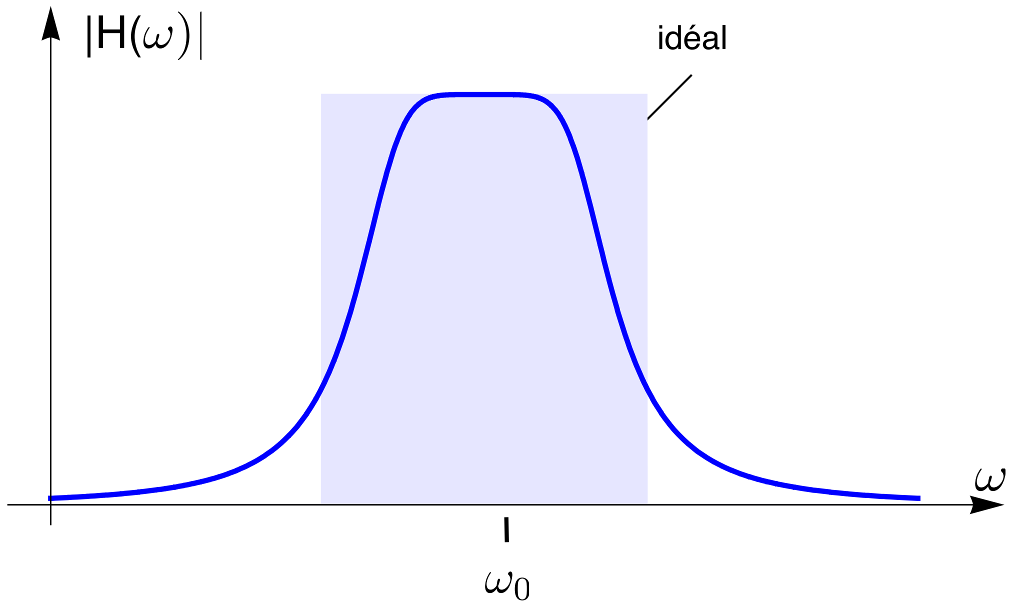
(c) Filtre de Butterworth

$$H_1(\omega) = \frac{\omega_c}{j\omega + \omega_c}$$

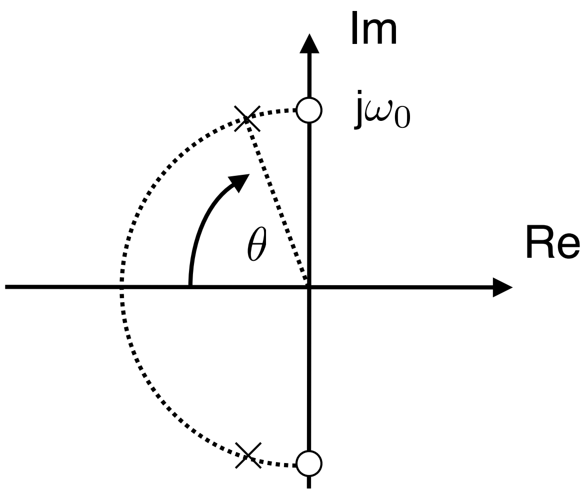


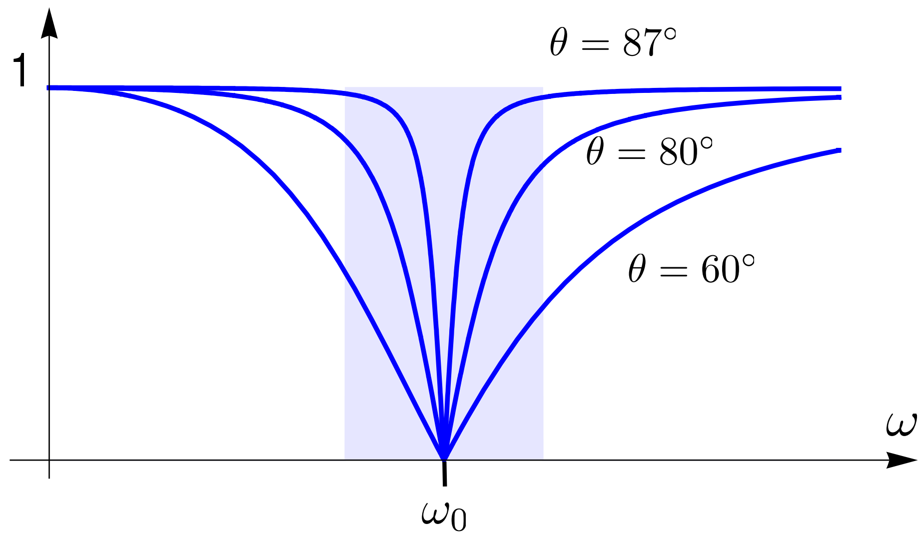
Filtres passe-bande





Filtre à encoche (Notch filter)





- Contraintes
  - $H(\omega_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad$ zéros à $s = \pm j\omega_0$
  - $\lim_{\omega \to +\infty} H(\omega) = 1 \quad \Rightarrow \quad$ même nombre de pôles et de zéros ($n = m$)
  - $H(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad$ pôles et zéros équidistants de l'origine (arc de cercle)

- Exemple: filtre du 2ème ordre

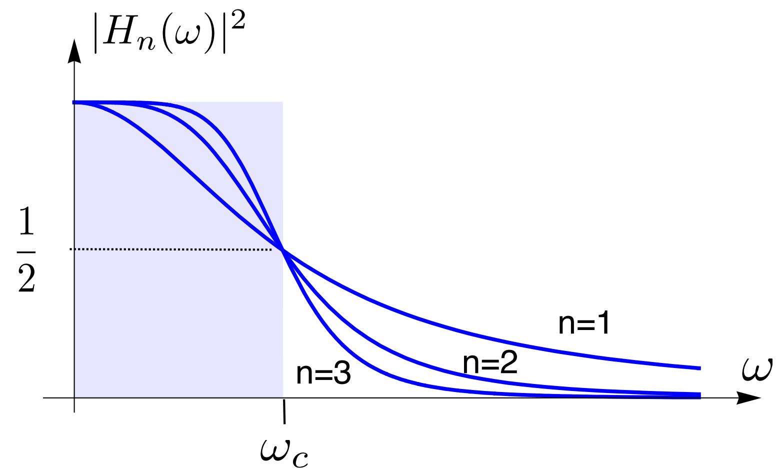
$$H(j\omega) = \frac{(j\omega + j\omega_0)(j\omega - j\omega_0)}{(j\omega + \omega_0(\cos\theta + j\sin\theta))\,(j\omega + \omega_0(\cos\theta - j\sin\theta))}$$

Filtres de Butterworth

- Definition: filtre de Butterworth d'ordre n

$$|H_n(\omega)|^2 = \frac{1}{1+(\omega/\omega_c)^{2n}}$$

ω_c: fréquence de coupure



- Propriétés de filtrage passe-bas

  - Comportement à l'origine: «Maximally Flat Magnitude Filter»

$$|H_n(\omega)|^2 = 1 + O\left(\omega^{2n}\right)$$

En effect: $$\frac{1}{1+\Delta x} = 1 - \underbrace{\Delta x}_{O(\omega^{2n})} + \underbrace{(\Delta x)^2}_{O(\omega^{4n})} - \cdots$$

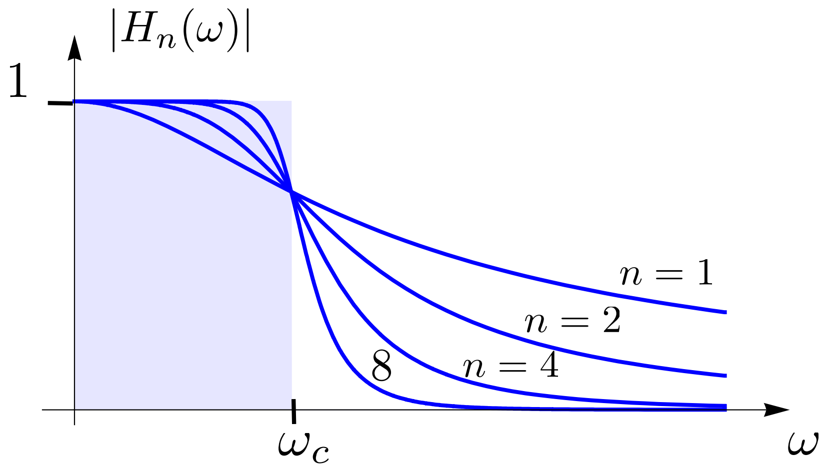
  - Comportement asymptotique:

$|H_n(\omega)| \propto \frac{1}{|\omega|^n}$ lorsque $\omega \to +\infty$

Filtres de Butterworth (suite)

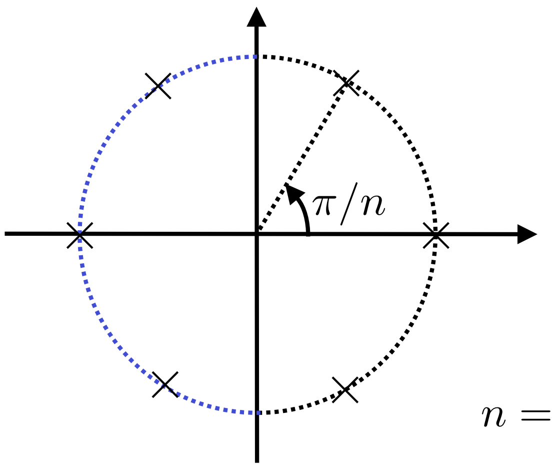
$$|H_n(\omega)|^2 = \frac{1}{1+(\omega/\omega_c)^{2n}} = \left.\frac{1}{1+(s/(j\omega_c))^{2n}}\right|_{s=j\omega}$$

$$= \frac{\omega_c^n}{Q_n(j\omega)} \cdot \frac{\omega_c^n}{Q_n(-j\omega)} = H_n(\omega) \cdot H_n^*(\omega)$$

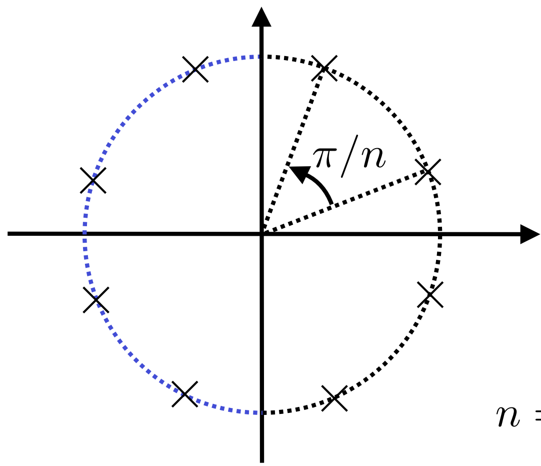


- Pôles de $|H_n(\omega)|^2 = H_n(\omega) \cdot H_n(-\omega)$

$$\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^{2n} = -1 \cdot j^{2n} = e^{j\pi(2k-1)} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}2n} \quad \Rightarrow \quad \boxed{s_{\mathrm{p}k} = \omega_c \cdot e^{\frac{j\pi}{2n}(2k-1+n)}}$$



$n=3$ (impair)



$n=4$ (pair)

Autres filtres

- Filtres de Chebyshev
- Filtres elliptiques
- ...
- Transformations fréquentielles

  Exemple: filtre passe-bas $\longrightarrow$ filtre passe-haut

$$\omega \longrightarrow \frac{\omega_c}{\omega}$$