Série 2

Correction de l'exercice 2.1 : IMPULSION DE DIRAC

Rappel : $f(t) * \delta(t - t_0) = f(t - t_0)$ et $f(t) \cdot \delta(t - t_0) = f(t_0)\delta(t - t_0)$.

1)
$$\delta(t) * \mathrm{rect}(t) = \mathrm{rect}(t).$$

2)
$$\delta(t) * \mathrm{rect}(t-1) = \mathrm{rect}(t-1).$$

3)
$$\delta(t-1) * \mathrm{rect}(t) = \mathrm{rect}(t-1).$$

4)
$$\delta(t-1) * \mathrm{rect}(t-1) = \mathrm{rect}([t-1]-1) = \mathrm{rect}(t-2).$$

5)
$$\begin{aligned}
[\delta(t-1) - \delta(t-2)] * [\delta(t-1) + \delta(t-2)] &= \delta(t-1) * [\delta(t-1) + \delta(t-2)] \\
&\quad -\delta(t-2) * [\delta(t-1) + \delta(t-2)] \\
&\quad \text{(par distributivité)} \\
&= [\delta(t-2) + \delta(t-3)] - [\delta(t-3) + \delta(t-4)] \\
&= \delta(t-2) - \delta(t-4).
\end{aligned}$$

6)
$$\begin{aligned}
[\delta(t+2) - \mathrm{e}^{-1}\delta(t+1)] * [\mathrm{e}^{-t}u(t)] &= \delta(t+2) * [\mathrm{e}^{-t}u(t)] - \mathrm{e}^{-1}\delta(t+1) * [\mathrm{e}^{-t}u(t)] \\
&\quad \text{(par distributivité)} \\
&= \mathrm{e}^{-t-2}u(t+2) - \mathrm{e}^{-1}\mathrm{e}^{-t-1}u(t+1) \\
&= \mathrm{e}^{-t-2}[u(t+2) - u(t+1)] \\
&= \mathrm{e}^{-t-2}[u(t + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}) - u(t + \frac{3}{2} - \frac{1}{2})] \\
&= \mathrm{e}^{-t-2}\mathrm{rect}(t + \frac{3}{2}).
\end{aligned}$$

7)
$$\begin{aligned}
[\delta(t+2) - \mathrm{e}^{-1}\delta(t+1)] \times [\mathrm{e}^{-t}u(t)] &= \delta(t+2)[\mathrm{e}^{-t}u(t)] - \mathrm{e}^{-1}\delta(t+1)[\mathrm{e}^{-t}u(t)] \\
&= [\mathrm{e}^{-t}u(t)]\Big|_{t=-2}\delta(t+2) - \mathrm{e}^{-1}\,[\mathrm{e}^{-t}u(t)]\Big|_{t=-1}\delta(t+1) \\
&= 0 \times \delta(t+2) - 0 \times \delta(t+1) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

8)
$$\begin{aligned}
\mathrm{D}\{\delta(t-2)\} * [\mathrm{e}^{-t}u(t)] &= \delta(t-2) * \mathrm{D}\{\mathrm{e}^{-t}u(t)\} \\
&= \delta(t-2) * [-\mathrm{e}^{-t}u(t) + \mathrm{e}^{-t}\delta(t)] \\
&\quad \text{(Où on utilise la relation } (fg)' = f'g + fg'.\text{)} \\
&= \delta(t-2) * [-\mathrm{e}^{-t}u(t) + \mathrm{e}^{-0}\delta(t)] \\
&= -\mathrm{e}^{-t+2}u(t-2) + \delta(t-2).
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 2.2 : ANALYSE DE SYSTÈME

On rappelle rapidement les notations de cet exercice. On note $x(t)$ l'entrée du système S et $z(t)$ sa sortie. On a aussi $S_1\{x\}(t) = y(t)$, et $S_2\{y\}(t) = z(t)$. Ainsi, $y(t)$ est à la fois la sortie du système S_1 et l'entrée du système S_2.

1) Le système S_1 peut-être réécrit comme $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) + 5y(t) = x(t)$, c'est à dire en terme d'opérateurs :

$$\begin{aligned} \mathrm{D}\{y\}(t) + 5y(t) &= x(t) \\ \Rightarrow (\mathrm{D} + 5\mathrm{I})\{y\}(t) &= x(t) \end{aligned}$$

2) Rappelons tout d'abord que, pour un système S, la réponse impulsionnelle est définie comme $h(t) = \mathrm{S}\{\delta\}(t)$. Dans le cas du système S_1, $(\mathrm{D}{+}5\mathrm{I})\{h\}(t) = \delta(t)$, c'est à dire $h(t) = (\mathrm{D}{+}5\mathrm{I})^{-1}\{\delta\}(t)$. La table A-5, ligne 9, nous indique que la réponse impulsionnelle d'un système défini par $(\mathrm{D} - s\mathrm{I})^{-1}$ est $h(t) = u(t)e^{st}$. On trouve donc, puisque $s = -5$ ici, que $h_1(t) = u(t)e^{-5t}$.

3) Un système causal est défini par une réponse impulsionnelle telle que $h(t) = 0 \ \forall t < 0$. Le terme $u(t)$ présent dans h_1 rend donc le système causal.

RIF signifie "réponse impulsionnelle finie" , c'est à dire que $h(t)$ est à support fini. L'exponentielle décroissante e^{-5t} présente dans h_1 est strictement positive pour toutes les valeurs de t jusqu'à l'infini, donc le support de h_1 est $[0, +\infty[$. En conséquence S_1 n'est pas RIF.

Un système est stable BIBO s'il respecte $\int_{\mathbb{R}} |h(t)|\,\mathrm{d}t < +\infty$. Dans le cas de S_1, on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |h_1(t)|\,\mathrm{d}t &= \int_{\mathbb{R}} |u(t)e^{-5t}|\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-5t}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{5}\,e^{-5t}\Big|_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{5} < +\infty. \end{aligned}$$

Le système est donc stable BIBO. Remarquez que vous auriez aussi pu invoquer le critère de stabilité sur les systèmes de réponse impulsionnelle de la forme $h(t) = \mathrm{e}^{st}u(t)$ dont le cours nous apprend qu'ils sont stable BIBO si et seulement si $s < 0$. Ici, $s = -5$.

4) La sortie $z(t)$ d'une entrée quelconque $y(t)$ passée dans le système S_2 est définie par $z(t) = y(t) * h_2(t)$. Le système peut donc être décrit de façon générale par l'équation différentielle suivante

$$\begin{aligned} z(t) &= y(t) * (2\delta'(t) + 3\delta(t)) \\ &= 2y'(t) + 3y(t). \end{aligned}$$

5) En reprenant les définitions de la causalité et de RIF redonnées dans le point **3)**, on en conclu que S_2 est causal et RIF du fait que δ' et δ soient tout deux localisés en zéro et nuls partout ailleurs.

6) On rappelle tout d'abord que lorsque plusieurs systèmes sont mis en série, la réponse impulsionnelle résultante est le résultat de la convolution des réponses impulsionnelles des sous-systèmes. Le système S est donc décrit par

$$\begin{aligned} h(t) &= h_1(t) * h_2(t) \\ &= (2\delta'(t) + 3\delta(t)) * (u(t)e^{-5t}) \\ &= 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u(t)e^{-5t}) + 3u(t)e^{-5t} \\ &= 2(\delta(t)e^{-5t} - 5u(t)e^{-5t}) + 3u(t)e^{-5t} \\ &= 2\delta(t) - 10u(t)e^{-5t} + 3u(t)e^{-5t} \\ &= 2\delta(t) - 7u(t)e^{-5t}. \end{aligned}$$

7) (a) Par définition de la réponse impulsionnelle, $z_1(t) = h(t) = 2\delta(t) - 7u(t)e^{-5t}$.

(b) Il s'agit tout d'abord de remarquer que $u\left(\frac{t}{3}\right) = u(t)$, puis d'utiliser la table de convolutions A-4, ligne 3, avec $s_1 = 0$ et $s_2 = -5$. On trouve alors

$$\begin{aligned} z_2(t) &= u\left(\frac{t}{3}\right) * (2\delta(t) - 7u(t)e^{-5t}) \\ &= u(t) * (2\delta(t) - 7u(t)e^{-5t}) \\ &= 2u(t) - 7(u(t) * u(t)e^{-5t}) \\ &= 2u(t) - \frac{7}{5}(u(t) - u(t)e^{-5t}) \\ &= \frac{1}{5}u(t)(3 + 7e^{-5t}). \end{aligned}$$

(c) Dans cet exercice, on applique simplement les résultats de la table de convolutions A-4. En utilisant à nouveau la ligne 3, cette fois avec $s_1 = -2$ et $s_2 = -5$, on obtient

$$\begin{aligned} z_3(t) &= u(t)\mathrm{e}^{-2t} * (2\delta(t) - 7u(t)e^{-5t}) \\ &= 2u(t)\mathrm{e}^{-2t} - 7(u(t)\mathrm{e}^{-2t} * u(t)\mathrm{e}^{-5t}) \\ &= 2u(t)\mathrm{e}^{-2t} - \frac{7}{3}(u(t)\mathrm{e}^{-2t} - u(t)\mathrm{e}^{-5t}) \\ &= \frac{1}{3}u(t)e^{-2t}(7e^{-3t} - 1). \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 2.3 : OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS

1) Par définition de la réponse impulsionnelle, c'est la sortie que l'on obtient si l'on rentre $\delta(t)$ dans le système. On a donc $h(t) = (2\mathrm{D} - \mathrm{I})\{\delta\}(t) = 2\delta'(t) - \delta(t)$.
On a $2\mathrm{D} - \mathrm{I} = 2(\mathrm{D} - \frac{1}{2}\mathrm{I})$. Dans le cours, on a vu que la fonction de Green causale de $\mathrm{D} - \frac{1}{2}\mathrm{I}$ est $u(t)\mathrm{e}^{t/2}$, donc la fonction de Green causale de $2\mathrm{D} - \mathrm{I}$ est $g(t) = \frac{1}{2}u(t)\mathrm{e}^{t/2}$.

2) On reconnait la fonction de Green d'un opérateur différentiel du 1er ordre. D'après le cours, on trouve que $u(t)\mathrm{e}^{-t}$ est la fonction de Green de $\mathrm{D} + \mathrm{I}$. Alors, $\frac{1}{2}u(t)\mathrm{e}^{-t}$ est la fonction de Green de $2(\mathrm{D} + \mathrm{I})$.
La fonction de Green est la réponse impulsionnelle du système inverse. On voit donc que $\frac{1}{2}u(t)\mathrm{e}^{-t}$ est la réponse impulsionnelle du système $(2(\mathrm{D}+\mathrm{I}))^{-1}$. Il s'agit du système $x(t) \mapsto y(t)$, caractérisé par l'équation $2y'(t) + 2y(t) = x(t)$.

3) On a $4y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = (4\mathrm{D}^2 + 4\mathrm{D} + 5\mathrm{I})\{y\}(t)$. On remarquera que le terme d'ordre 0 est 5I et non pas seulement 5. Nous avons fait le plus dur. Pour résoudre le reste de la question on applique la méthode standard :

i. Factoriser le polynôme caractéristique : $4X^2 + 4X + 5 = 4(X + (\frac{1}{2} + \mathrm{j}))(X + (\frac{1}{2} - \mathrm{j}))$.

ii. Exprimer le système en utilisant des opérateurs différentiels du 1er ordre :
$y(t) = \left(4(\mathrm{D} + (\frac{1}{2} + \mathrm{j})\mathrm{I})(\mathrm{D} + (\frac{1}{2} - \mathrm{j})\mathrm{I})\right)^{-1}\{x\}(t) = \frac{1}{4}(\mathrm{D} + (\frac{1}{2} + \mathrm{j})\mathrm{I})^{-1}(\mathrm{D} + (\frac{1}{2} - \mathrm{j})\mathrm{I})^{-1}\{x\}(t)$

iii. Utiliser les tables pour trouver les réponses impulsionnelles des systèmes du 1er ordre (table A-5) et les convoluer (table A-4) :

$$h(t) = \frac{1}{4}u(t)\mathrm{e}^{-(\frac{1}{2}+\mathrm{j})t} * u(t)\mathrm{e}^{-(\frac{1}{2}-\mathrm{j})t} = \frac{\mathrm{j}}{8}u(t)\mathrm{e}^{-(\frac{1}{2}+\mathrm{j})t} - \frac{\mathrm{j}}{8}u(t)\mathrm{e}^{-(\frac{1}{2}-\mathrm{j})t}.$$

h est la fonction de Green du système inverse : $x(t) \mapsto y(t)$ défini par l'équation différentielle $y(t) = (4\mathrm{D}^2 + 4\mathrm{D} + 5\mathrm{I})\{x\}(t)$.

4) La réponse impulsionnelle h_2 du nouveau système est caractérisée par l'équation $4h_2''(t)+4h_2'(t)+5h_2(t)=\delta'(t)$. On a de plus $4h''(t)+4h'(t)+5h(t)=\delta(t)$. En dérivant les deux membres on obtient :

$$4(h')''(t)+4(h')'(t)+5h'(t)=\delta'(t),$$

ce qui montre que $h_2=h'$ est la réponse impulsionnelle demandée.

5) (i) $x_1(t)=\delta(t)$. Par définition, $y_1(t)=h(t)$ est la réponse impulsionnelle du système, qu'on a calculé dans la question **3)**.

(ii) $x_2(t)$ est la fonction de Green de l'opérateur $(4\mathrm{D}^2+4\mathrm{D}+5\mathrm{I})^{-1}$ donc $y_2(t)=\delta(t)$.

(iii) $y_3(t)=x_3(t)*h(t)$. On a calculé $h(t)$ dans la question **3)**. Comme le produit de convolution $u(t)\mathrm{e}^{-(\frac{1}{2}+\mathrm{j})t}*\mathrm{e}^{-t/3}$ ne se trouve pas dans les tables, on doit faire le calcul à la main. On a :

$$\begin{aligned}
u(t)\mathrm{e}^{-(\frac{1}{2}+\mathrm{j})t}*\mathrm{e}^{-t/3} &= \int_{\mathbb{R}} u(\tau)\mathrm{e}^{-(\frac{1}{2}+\mathrm{j})\tau}\mathrm{e}^{-(t-\tau)/3}\,\mathrm{d}\tau = \mathrm{e}^{-t/3}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(\frac{1}{2}+\mathrm{j})\tau}\mathrm{e}^{\tau/3}\,\mathrm{d}\tau \\
&= \mathrm{e}^{-t/3}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(\frac{1}{6}+\mathrm{j})\tau}\,\mathrm{d}\tau = \mathrm{e}^{-t/3}\left[-\frac{1}{\frac{1}{6}+\mathrm{j}}\mathrm{e}^{-(\frac{1}{2}+\mathrm{j})\tau}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\frac{1}{6}+\mathrm{j}}\mathrm{e}^{-t/3}.
\end{aligned}$$

On trouve, de même, $u(t)\mathrm{e}^{-(\frac{1}{2}-\mathrm{j})t}*\mathrm{e}^{-t/3}=\frac{1}{\frac{1}{6}-\mathrm{j}}\mathrm{e}^{-t/3}$. Donc

$$\begin{aligned}
h(t)*\mathrm{e}^{-t/3} &= \left(\frac{\mathrm{j}}{8}u(t)\mathrm{e}^{-(\frac{1}{2}+\mathrm{j})t}-\frac{\mathrm{j}}{8}u(t)\mathrm{e}^{-(\frac{1}{2}-\mathrm{j})t}\right)*\mathrm{e}^{-t/3} \\
&= \left(\frac{\mathrm{j}}{8}\frac{1}{1/6+\mathrm{j}}-\frac{\mathrm{j}}{8}\frac{1}{1/6-\mathrm{j}}\right)\mathrm{e}^{-t/3} \\
&= \frac{9}{37}\mathrm{e}^{-t/3}.
\end{aligned}$$

Le calcul de la constante peut être considéré comme un exercice sur les nombres complexes.

Correction de l'exercice 2.4 : RÉPONSES IMPULSIONNELLES

Pour les représentations graphiques, se référer à la feuille de réponses.

1) L'équation différentielle peut être écrite comme $(\mathrm{D}-\mathrm{I})\{y(t)\}=x(t)$, c'est-à-dire $y(t)=(\mathrm{D}-\mathrm{I})^{-1}\{x(t)\}$. L'opérateur correspondant est ainsi $\mathrm{T}=(\mathrm{D}-\mathrm{I})^{-1}$, qui est de réponse impulsionnelle $h(t)=\mathrm{T}\{\delta(t)\}=\mathrm{e}^t u(t)$ (table A-5).
L'unique pôle est $s=1$, de partie réelle positive, donc le système n'est pas causal-stable BIBO.

2) $(\mathrm{D}^2-4\mathrm{D}+4\mathrm{I})\{y\}(t)=x(t)$ donc $y(t)=(\mathrm{D}^2-4\mathrm{D}+4\mathrm{I})^{-1}\{x\}(t)=(\mathrm{D}-2\mathrm{I})^{-2}\{x\}(t)$.
Ainsi, $\mathrm{T}=(\mathrm{D}-2\mathrm{I})^{-2}$ et $h(t)=\mathrm{T}\{\delta\}(t)=t\mathrm{e}^{2t}u(t)=t_+\mathrm{e}^{2t}$ (table A-5).
Pôle double en $s=2$: le système n'est pas causal-stable BIBO.

3) $(\mathrm{D}^2-5\mathrm{D}-14\mathrm{I})\{y\}(t)=x(t)$ donc $y(t)=(\mathrm{D}^2-5\mathrm{D}-14\mathrm{I})^{-1}\{x\}(t)=((\mathrm{D}-7\mathrm{I})(\mathrm{D}+2\mathrm{I}))^{-1}\{x\}(t)$
Ainsi, $\mathrm{T}=(\mathrm{D}-7\mathrm{I})^{-1}(\mathrm{D}+2\mathrm{I})^{-1}$ et $h(t)=\mathrm{T}\{\delta\}(t)=[\mathrm{e}^{7t}u(t)]*[\mathrm{e}^{-2t}u(t)]=\frac{\mathrm{e}^{7t}-\mathrm{e}^{-2t}}{9}u(t)$ (tables A-5 puis A-4).
Pôles en $s=7$ et -2 : le système n'est pas causal-stable BIBO (à cause du pôle en 7).

4) On a un système de la forme $P(\mathrm{D})\{y\}(t) = Q(\mathrm{D})\{x\}(t)$, avec $Q \neq \mathrm{I}$.

a) On commence par trouver la réponse impulsionnelle $h_1(t)$ du sous-système défini par

$$P(\mathrm{D})\{y\}(t) = x(t).$$

On a $(2\mathrm{D}^2+4\mathrm{I})\{y\}(t) = x(t)$ donc $y(t) = (2\mathrm{D}^2+4\mathrm{I})^{-1}\{x\}(t) = \frac{1}{2}\left((\mathrm{D}+\mathrm{j}\sqrt{2}\mathrm{I})(\mathrm{D}-\mathrm{j}\sqrt{2}\mathrm{I})\right)^{-1}\{x\}(t)$. Il vient $\mathrm{T}_1 = \frac{1}{2}[(\mathrm{D}+\mathrm{j}\sqrt{2}\mathrm{I})(\mathrm{D}-\mathrm{j}\sqrt{2}\mathrm{I})]^{-1}$, d'où

$$\begin{aligned} h_1(t) = \mathrm{T}_1\{\delta\}(t) &= \frac{1}{2}[\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\sqrt{2}t}u(t)] * [\mathrm{e}^{\mathrm{j}\sqrt{2}t}u(t)] \\ &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\sqrt{2}t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\sqrt{2}t}}{\mathrm{j}4\sqrt{2}}u(t) \text{ (table A-5)} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}t)u(t) \text{ (table A-4)}. \end{aligned}$$

b) Pour trouver la réponse impulsionnelle du système total, on écrit :

$$\begin{aligned} h(t) &= Q(\mathrm{D})P(\mathrm{D})^{-1}\{\delta\}(t) = Q(\mathrm{D})\{h_1\}(t) = h_1'(t) - h_1(t) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}u(t)(\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}t) - \sin(\sqrt{2}t)) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}t)\delta(t) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}u(t)(\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}t) - \sin(\sqrt{2}t)). \end{aligned}$$

Pôles en $s = \pm\mathrm{j}\sqrt{2}$ donc le système n'est pas causal-stable BIBO (mais marginalement stable car partie réelle nulle).