Série 1

Correction de l'exercice 1.1 : SIGNAUX DE BASE ET DÉCALAGES

1) Pour $f_1(t)$, posons le changement de variable $s = t-4$. Alors $f_1(t) = u(s)$. La singularité de u est en $s = 0$, soit $t = 4$ pour f_1. Donc le graphe de f_1 est juste la translation de 4 unités du graphe de u sur la droite. Par le même raisonnement on montre que le graphe de f_2 est la translation du graphe de u de 2 unités sur la gauche. Le graphe de f_3 est obtenu par la soustraction des deux graphes précédents. Son expression analytique déduite du graphique est $\mathrm{rect}(\frac{t-1}{6})$. C'est un rectangle dilaté de 6 et décalé de 1.

2) $x(t)$ peut visiblement se décomposer en deux rectangles : $x(t) = \mathrm{rect}(t+1/2) - \mathrm{rect}(t-1/2)$. Or $\mathrm{rect}(t)$ peut lui-même se décomposer ainsi' : $\mathrm{rect}(t) = u(t+1/2) - u(t-1/2)$. On montre donc que $x(t) = u(t+1) - 2u(t) + u(t-1)$.

3) La fonction $t \mapsto \mathrm{rect}(t-1/2)$ vaut 1 entre 0 et 1 et 0 sinon. Donc le produit $t \cdot \mathrm{rect}(t-1/2)$ vaut t entre 0 et 1 et 0 sinon. Ceci donne immédiatement le graphe de g. Pour h, il suffit de faire la symétrie axiale selon l'axe des ordonnées du graphe de g.

4) On constate que le graphe de y se décompose facilement en la somme de trois graphes translatés de h (*cf.* questions précédentes). Les versions translatées s'obtiennent par un simple changement de variable. On trouve $y(t) = h(t) + h(t-1) + h(t-2)$.

5) Pour r_1, la division par 4 induit sur le graphe une dilatation de facteur 4. On a alors le graphe de $s_1(t) = \mathrm{rect}(t/4)$. Puis la soustraction par 1 induit une translation de 4 sur la droite car $\mathrm{rect}(t/4-1) = s_1(t-4)$.
Pour r_2, la division par 4 induit sur le graphe une dilatation de facteur 4. Puis l'addition de 3 induit une translation de 3 sur la gauche car $\mathrm{rect}((t+3)/4) = s_1(t+3)$.

Correction de l'exercice 1.2 : PROPRIÉTÉS DE LA CONVOLUTION

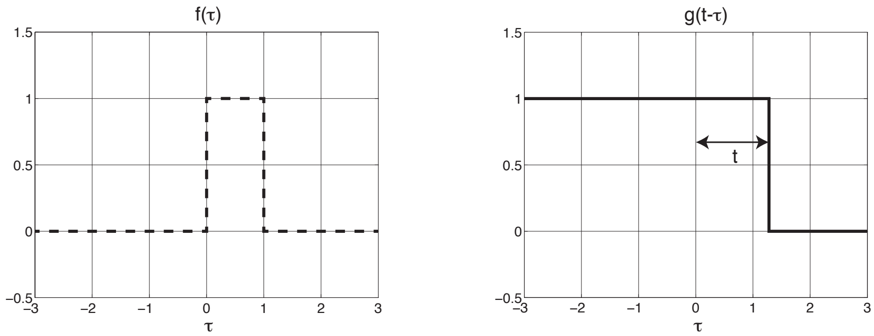
1) Le schéma présente N convolutions des signaux x_i par un même filtre de réponse impulsionnelle h, puis la sortie y est donnée par la somme de ces signaux filtrés : $y(t) = \sum_{i=1}^{N} (h * x_i)(t)$. La convolution étant un opérateur linéaire, on a donc $y(t) = \left(h * \sum_{i=1}^{N} x_i\right)(t)$. Ce qui revient d'abord à sommer les signaux x_i avant de filtrer l'unique résultat. En procédant de cette manière on économise $N-1$ filtrages. La nouvelle implémentation est donc plus rentable dès que $N \geq 2$.

2) Soit x l'entrée du système de réponse impulsionnelle h. La sortie de ce système linéaire est $(h * x)(t)$. Si on place un dérivateur ensuite, la sortie est $y(t) = (h * x)'(t)$. Les propriétés de la convolution donnent en outre $(h * x)'(t) = (h' * x)(t) = (h * x')(t)$. Par exemple :

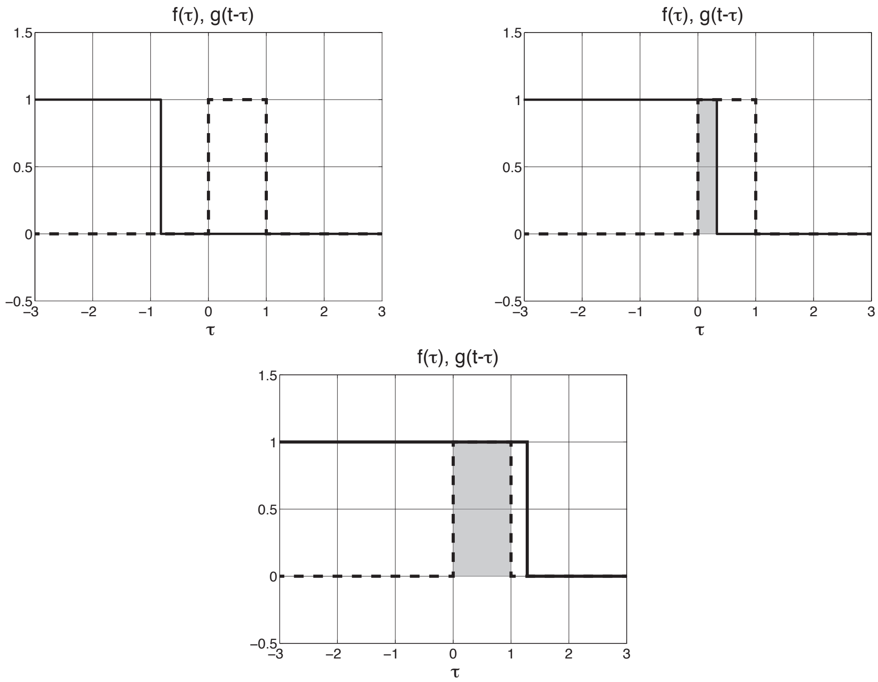
$$(h * x)'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) x(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau = (h * x')(t).$$

L'expression $(h' * x)(t)$ nous intéresse particulièrement puisqu'elle exprime la sortie comme la convolution de l'entrée par un filtre de réponse impulsionnelle h'. La nouvelle réponse impulsionnelle est donc $h'(t)$. L'expression $(h * x')(t)$ nous permet de montrer par contre que l'on a la même sortie en plaçant le dérivateur avant.

3) On rappelle la définition $h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau)g(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau$. Les fonctions f et g étant positives, la valeur de $h(t)$ est donnée par le calcul de l'aire entre le graphe de $\tau \mapsto f(t-\tau)g(\tau)$ et l'axe des abscisses comme vu dans la slide 2-27 du cours. De façon détaillée, on dessine d'abord les graphes de $f(\tau)$ puis de $g(t-\tau)$ (c'est à dire de $g(\tau)$ retourné et décalé d'une valeur t quelconque).



On regarde ensuite l'évolution de l'aire que ces deux fonctions ont en commun pour différents décalages de t (en gris sur les graphes ci-dessous). On distingue trois cas : $t < 0$, $t \in [0, 1]$, et $t > 1$.



Pour les valeurs particulières de t, on obtient donc facilement $h(0) = 0$, $h(1/2) = 1/2$, $h(1) = 1$ et $h(2) = 1$ en utilisant cette méthode.

4) Les signaux f, g et h sont bien causaux car nuls pour les temps négatifs.

Résultat Général 1 *La convolution de signaux causaux donne un signal causal (voir p. 2-25 du cours).*

Correction de l'exercice 1.3 : CONVOLUTION DES SIGNAUX DE BASE

1) On utilise la ligne 3 de la table (p. A-4) avec les valeurs $s_1 = -1$ et $s_2 = -2$, ce qui donne $(h_1 * h_2)(t) = (\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t}) \cdot u(t)$.

2) On utilise toujours la ligne 3 la table (p. A-4) en prenant soin de décomposer le cosinus avec la formule d'Euler. Penser à invoquer la linéarité de la convolution. On obtient alors :

$$(h_1 * h_2)(t) = \frac{u(t)}{2}\left(\frac{\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{2j\pi t}}{-1 - 2j\pi} + \frac{\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2j\pi t}}{-1 + 2j\pi}\right).$$

Après simplification (mise en dénominateur commun et recomposition des exponentielles complexes en sinusoïdes) on obtient

$$(h_1 * h_2)(t) = \frac{u(t)}{1 + 4\pi^2}(-\mathrm{e}^{-t} + 2\pi \sin 2\pi t + \cos 2\pi t).$$

3) De ligne 1 de la table (p. A-4), on déduit $(h_1 * h_2)(t) = \mathrm{e}^{-|t-3|}$.

4) Commençons par décomposer h_2 en $h_2(t) = u(t)\mathrm{e}^{-t} + u(-t)\mathrm{e}^{t}$. On décompose le calcul en deux convolutions par linéarité. La première convolution est simple à calculer via la table (p. A-4) du cours.
On doit maintenant calculer le second terme, $u(t)\mathrm{e}^{-t} * u(-t)\mathrm{e}^{t}$, "à la main" puisque les tables ne nous renseignent pas. Partons de la définition de la convolution, qui donne

$$u(t)\mathrm{e}^{-t} * u(-t)\mathrm{e}^{t} = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)\mathrm{e}^{-\tau}u(-t+\tau)\mathrm{e}^{t-\tau}\mathrm{d}\tau.$$

On s'en sort ici en distinguant les deux cas $t > 0$ et $t < 0$, ce qui est le meilleur moyen de trouver les bonnes bornes pour l'intégrale. Pour $t > 0$, on a en effet $u(\tau)u(-t+\tau) = 1$ si $\tau > t$ et 0 sinon. Ainsi, pour $t > 0$,

$$\begin{aligned} u(t)\mathrm{e}^{-t} * u(-t)\mathrm{e}^{t} &= \int_{t}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\tau}\mathrm{e}^{t-\tau}\mathrm{d}\tau \\ &= \mathrm{e}^{t}\int_{t}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2\tau}\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-t}}{2}. \end{aligned}$$

Pour $t < 0$ maintenant, on a $u(\tau)u(-t+\tau) = 1$ si $\tau > 0$ et 0 sinon, d'où l'on déduit

$$\begin{aligned} u(t)\mathrm{e}^{-t} * u(-t)\mathrm{e}^{t} &= \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\tau}\mathrm{e}^{t-\tau}\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{\mathrm{e}^{t}}{2}. \end{aligned}$$

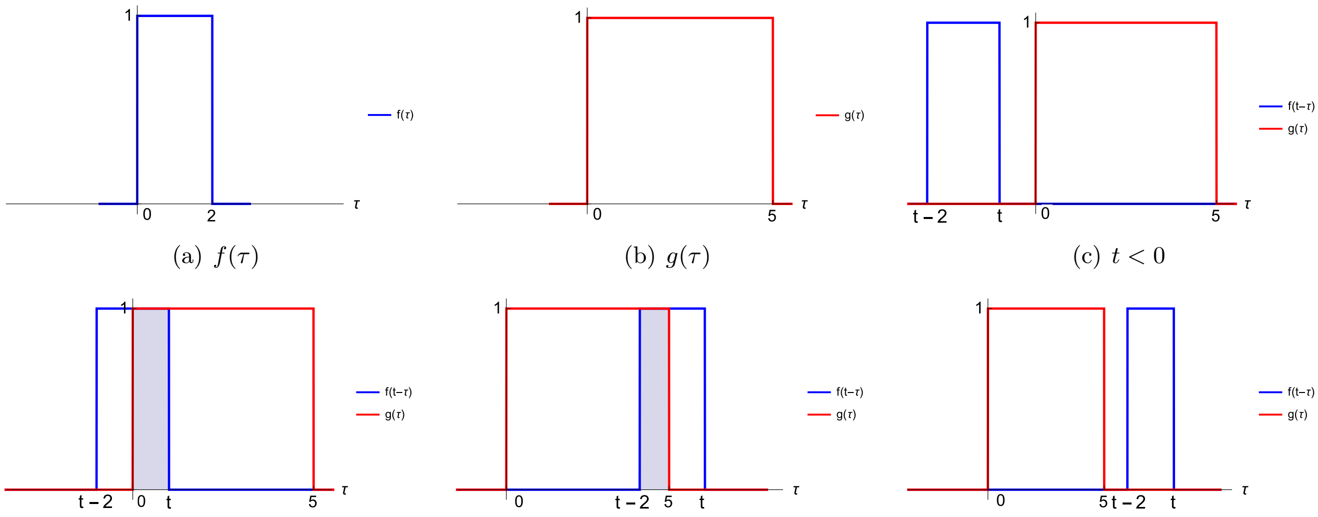
Si on résume en une seule formule, on a obtenu $u(t)\mathrm{e}^{-t} * u(-t)\mathrm{e}^{t} = \frac{\mathrm{e}^{-|t|}}{2}$. Donc, finalement,

$$(h_1 * h_2)(t) = t\mathrm{e}^{-t}u(t) + \frac{\mathrm{e}^{-|t|}}{2}.$$

Correction de l'exercice 1.4 : CONVOLUTION DE FONCTIONS A SUPPORT FINI

1) D'après la définition de la page 2-22, $[0, 2]$ est le plus petit intervalle en dehors duquel la fonction f est toujours nulle.

2) On a $(f * g)(t) = \int_0^5 f(t-\tau)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau$. On cherche les valeurs de t pour lesquelles $h(t) \neq 0$. C'est le cas lorsque les supports de $\tau \mapsto g(\tau)$ et $\tau \mapsto f(t-\tau)$ sont disjoints. Pour $t < 0$, on voit que les deux supports sont disjoints (argument graphique *c.f.* Figure 1 ou en remarquant que pour



(a) $f(\tau)$ (b) $g(\tau)$ (c) $t < 0$

(d) $0 < t < 5$ (e) $0 < t - 2 < 5$ (f) $t - 2 > 5$

FIGURE 1 – Illustrations de $f(t-\tau)g(\tau)$ pour différentes valeurs de t.

$t < 0$, $f(t-\tau)$ est nulle si $g(\tau) \neq 0$), il en est de même pour $t > 7$. Pour $0 \leq t \leq 7$, les supports des deux fonctions ne sont par contre plus disjoints. On en déduit que $h(t)$ est à support fini et que son support est $[0, 7]$.

3) Notons $[a, a+L]$ le support de la réponse impulsionnelle h du système RIF considéré. Comme $h(t)*\delta(t+a) = h(t+a)$, le support de $h(t)*\delta(t+a)$ est $[0, L]$ et est donc la réponse impulsionnelle d'un système RIF causal. Ainsi, $h(t) = h(t+a)*\delta(t-a)$ est bien la mise en série d'un système RIF causal et d'un système décaleur.

4) En combinant les points **2)** et **3)**, on voit que la convolution de deux fonctions à support fini est elle-même à support fini. La mise en série de deux filtrages de réponse impulsionnelle finie (RIF) équivaut à un unique filtrage dont la réponse impulsionnelle est la convolution de celles des précédents. Le système résultant est donc bien RIF.

Résultat Général 2 *Soient f et g, deux fonctions à supports finis de supports respectifs $[a_1, b_1]$ et $[a_2, b_2]$. Alors $h = f * g$ est à support fini de support $[a_1 + a_2, b_1 + b_2]$.*