Signaux

12 December 2021 19:01

Analyse temporelle

Vecteurs/signaux

Espace fonctionnel: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall f, g \in V(\mathbb{R}): \alpha f + \beta g \in V(\mathbb{R})$

Produit scalaire: $\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t) g(t) dt$

Opération matricielle: $y(t) = \int_{\mathbb{R}} h(t, \tau) x(\tau) d\tau$

Produit de convolution: $(h * f)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) f(t - \tau) d\tau$

Égalités:

- Stricte: $f = g$
- Norme: $\|f - g\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t) - g(t)|^2 dt = 0$
- Distributions: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\phi(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\phi(t) dt \ \ \forall \phi \in S$ (dérivées rapidement décroissantes)

Signaux fondamentaux

Signal rectangulaire: $\mathrm{rect}(t) = \begin{cases} 1, t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} = u\left(t + \frac{1}{2}\right) - u\left(t - \frac{1}{2}\right)$

Inpulsion de Dirac: $\forall f(t) \in C^0(\mathbb{R}): \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t) dt = \langle \delta, f \rangle = f(0)$

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t - t_0) dt = f(t_0)$
- $\displaystyle(\delta * x)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) x(t - \tau) d\tau = x(t)$
- $\displaystyle\delta(t) = \frac{\partial u}{\partial t}$
- $\displaystyle\delta = \lim_{a \to 0^+} \frac{1}{a} \varphi\left(\frac{t}{a}\right), \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt = 1$

Fonction exponentielle: $e^{st} = e^{(\sigma + j\omega)t} = e^{\sigma t}(\cos \omega t + j \sin \omega t)$

Systèmes

$S\{x\}(t) = (x * h)(t)$

$h(t) = S\{\delta\}(t)$ (réaction impulsionnelle)

Système linéaire: $S\{\lambda x_1 + x_2\} = \lambda S\{x_1\} + S\{x_2\}$

Système invariant dans le temps: $S\{x(\cdot - \tau)\}(t) = y(t - \tau) \ \forall \tau \in \mathbb{R}$

Système LIT: linéaire + invariant dans le temps

Système causal: $h(t) = 0 \ \forall t < 0$

Système RIF: réaction impulsionnelle finie ($h(t)$ a un support fini)

Exemples:

- Amplificateur: $h(t) = aI\{\delta\}(t) = a\delta(t) \Rightarrow S\{f\}(t) = af(t)$
- Retardateur: $h(t) = S\{\delta\}(t) = \delta(t - t_0) \Rightarrow S\{f\}(t) = f(t - t_0)$
- Dérivateur: $h(t) = \frac{\partial}{\partial t}\delta(t) = \delta'(t) \Rightarrow D\{f\}(t) = \frac{\partial}{\partial t} f(t) = f'(t)$
- Intégrateur: $h(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau) d\tau = u(t) \Rightarrow D^{-1}\{f\}(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau) d\tau = F(t)$

En série: $h(t) = (h_1 * h_2 * \cdots * h_n)(t)$, en parallèle: $h(t) = \sum_{i=1}^{n} h_i(t)$

Équations différentielles

Équation différentielle $(Q(d)\{y\} = P(D)\{x\})$: $D^n\{y\} + a_{n-1}D^{n-1}\{y\} + \cdots + a_0 I\{y\} = b_n D^m\{x\} + \cdots + b_0 I\{x\}$

Solution homogène ($P(D) = 0$): $y(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{s_i t}$, s_i racines de $Q(D)$, $C_i \in \mathbb{R}$

Factorisation: $Q(D) = (D - s_n I) \dots (D - s_1 I)$

- Solution de $(D - s_i I)\{y\}(t) = 0$: $y(t) = Ce^{s_i t}$
- Solution de $(D - s_i I)^p\{y\}(t) = 0$: $y(t) = (C_1 + C_2 t + \cdots + C_p t^{p-1})e^{s_i t}$
- Solution réelle de $((D - \alpha I)^2 + \beta^2 I)\{y\}(t) = 0$: $y(t) = \frac{C}{2} e^{j\theta} e^{(\alpha + j\beta)t} + \frac{C}{2} e^{-j\theta} e^{(\alpha - j\beta)t} = Ce^{\alpha t}\cos(\beta t + \theta)$

Fonction de Green $\varphi(t)$: $L\{\varphi\}(t) = \delta(t), \varphi(t) = 0 \ \forall t < 0$

$\Rightarrow L^{-1}\{\delta\}(t) = \varphi(t) \Rightarrow L^{-1}\{f\}(t) = (\varphi * f)(t)$

$LL^{-1} = L^{-1}L = I$ si $\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)| dt < +\infty$

- Pour $(D - s_i I)$: $\varphi_i(t) = (D - s_i I)^{-1}\{\delta\}(t) = u(t)e^{s_i t}$
- Pour $Q(D)$: $\varphi(t) = (D - s_n I)^{-1} \dots (D - s_1 I)^{-1}\{\delta\}(t) = (\varphi_n * \cdots * \varphi_1)(t)$

Séries de Fourier

Signaux et vecteurs

Signaux à énergie finie: $f \in L_2 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt < +\infty$

Produit scalaire hermitien:

- $\displaystyle\langle f, g \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) g^*(t) dt$
- $\langle \alpha f, g \rangle = \alpha \langle f, g \rangle$
- $\langle f, \alpha g \rangle = \alpha^* \langle f, g \rangle$
- $\langle f + g, h \rangle = \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle$
- $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle^*$

Norme L_2: $\|f(t)\|_{L_2} = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt}$

Projection orthogonale: $\frac{\langle \vec{f}, \vec{u} \rangle}{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} \vec{u} \Leftrightarrow \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) u(t) dt}{\|u(t)\|_{L_2}^2}$, $\|\vec{e}\|^2 = \|\vec{f} - c\vec{u}\|^2 = \|\vec{f}\|^2 + c^2\|\vec{u}\|^2 - 2c\langle \vec{f}, \vec{u} \rangle$

Énergie: $\|\vec{f}\|_{L_2}^2 = \int_{t_1}^{t_2} |f(t)|^2 dt$

Comparaison de signaux

Distance entre signaux: $d(f, g) = \|f - g\| = \sqrt{\int_{t_1}^{t_2} |f(t) - g(t)|^2 dt}$

Corrélation: $\|f - g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2 - 2\langle f, g \rangle$

Corrélation normalisée: $p(f, g) = \frac{\langle f, g \rangle}{\|f\| \|g\|} = \cos \theta$

Intercorrélation: $c_{xy}(\tau) = \langle x(\cdot), y(\cdot + \tau) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y^*(t + \tau) dt = (x^\vee * y^*)(\tau), c_{yx}(\tau) = c_{xy}^*(-\tau)$

Détection de signaux: $s(t) = ap(t - t_0) + \text{bruit} \Rightarrow h(t) = p(-t)$

Approximation de signaux

Changement de base: $\vec{x} = \sum \langle \vec{x}, \vec{e}_i \rangle \vec{e}_i$

Base orthonormale: $\langle \phi_m, \phi_n \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \phi_m(t) \phi_n^*(t) dt = \delta_{m-n}$

Approximation par une base orthonormale: $x_N = \sum c_i \phi_i$, $c_i = \langle x, \phi_i \rangle$

Sèries de Fourier trigonométriques

$$x_T(t) = x_T(t + kT) \ \forall k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x_T(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (2a_n \cos n\omega_0 t + 2b_n \sin n\omega_0 t), \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \left(\text{ssi } \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x_T(t)| dt < +\infty\right)$$

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_T(t) \cos n\omega_0 t \, dt = \langle x_T, \cos n\omega_0 t \rangle \qquad b_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_T(t) \sin n\omega_0 t \, dt = \langle x_T, \sin n\omega_0 t \rangle$$

Espace de Hilbert des signaux à durée et énergie finies: $L_2\left(\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]\right) = \left\{x(t): x = 0, |t| > \frac{T}{2} \text{ et } \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt < +\infty\right\}$

Produit scalaire associé: $\langle x, y \rangle = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) y(t) dt$

$\left\{1, \sqrt{2} \cos n\omega_0 t, \sqrt{2} \sin n\omega_0 t\right\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une base orthonormale pour $L_2\left(\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]\right)$

Orthogonalités:

$$\frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos \frac{m2\pi t}{T} \cos \frac{n2\pi t}{T} dt = \delta_{m-n} \qquad \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin \frac{m2\pi t}{T} \sin \frac{n2\pi t}{T} dt = \delta_{m-n} \qquad \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos \frac{m2\pi t}{T} \sin \frac{n2\pi t}{T} dt = 0$$

$$x_T(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{jn\omega_0 t} = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (c_n e^{jn\omega_0 t} + c_n^* e^{-jn\omega_0 t})$$

$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \langle x_T, e^{jn\omega_0 t} \rangle$ (complexe conjugué dans l'intégrale)

$c_0 = a_0, c_n = c_{-n}^* = a_n - jb_n$

$a_n = \frac{c_n + c_{-n}}{2}, b_n = \frac{-c_n + c_{-n}}{2j}$

Transformation de Fourier

Intégrale de Fourier

$$x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt\right) e^{jn\omega_0 t}$$

$$\omega_n = n\frac{2\pi}{T_0} \Rightarrow \frac{1}{T_0} = \frac{\omega_{n+1} - \omega_n}{2\pi} = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt\right) e^{jn\omega_0 t} \Delta\omega$$

$$\xrightarrow{T_0 \to +\infty} x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \, d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\}(t) \text{ p.p.}$$

Condition suffisante d'existence: $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt = \|x\|_{L_1} < +\infty \Leftrightarrow x \in L_1$

$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\}(t)$ converge vers $x(t)$ si

$x(t) \in L_1$ continue, $X(\omega) \in L_1$, $x(t)$ a # fini d'extrémums et de singularités sur tout intervalle fini

Propriétés de base

Linéarité: $\sum a_k x_k(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \sum a_k X_k(\omega)$

Dualité: $\mathcal{F}^{-1} = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}^*$

Symétries: $x(-t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(-\omega), x^*(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X^*(-\omega)$

$$\frac{1}{2}(x(t) + x(-t)) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{1}{2}(X(\omega) + X(-\omega)) = \mathrm{Re}(X(\omega))$$

$$\frac{1}{2}(x(t) - x(-t)) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{1}{2}(X(\omega) - X(-\omega)) = j\mathrm{Im}(X(\omega))$$

Moments: $m_f^n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t) dt = j^n \left.\frac{\partial^n F(\omega)}{\partial \omega^n}\right|_{\omega = 0}$

Signaux fondamentaux

Transformée de Fourier inversible pour $\phi(t) \in S \subset L_1$: $\left|t^m \frac{\partial^k \phi}{\partial t^k}\right| \le C_{mk} < +\infty \ \forall m, k \in \mathbb{N}$

Relation de Parseval: $\langle x, \phi \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \mathcal{F}\{x\}, \mathcal{F}\{\phi\} \rangle, x \in L_1(\mathbb{R})$

Corrélation et densité spectrale d'énergie

Densité spectrale d'énergie: $\frac{1}{2\pi} |X(\omega)|^2$

Énergie dans une bande de fréquence: $E_{[\omega_1, \omega_2]} = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} |X(\omega)|^2 d\omega$ (cas réel)

Fonction d'autocorrélation: $c_{xx}(\tau) = \langle x(\cdot), y(\cdot + \tau) \rangle = (x^\vee * x^*)(\tau)$

- Symétrie paire: $c_{xx}(\tau) = c_{xx}(-\tau)$
- Invariance par translation: $y(t) = x(t - t_0), c_{xx}(t) = c_{yy}(t)$
- Densité spectrale d'énergie $\propto C_{xx}(\omega) = X(-\omega)X^*(-\omega) = |X(-\omega)|^2 = |X(\omega)|^2$ (si $x \in \mathbb{R}$)
- Spectre d'intercorr.: $c_{xy}(t) = (x^\vee * y^*)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y(t + \tau) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(\omega) Y(\omega) e^{j\omega t} d\omega$

Périodisation

Convolution avec peigne de Dirac:

$$(x * s_{T_0})(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(t - nT_0) = x_p(t)$$

$$(x * s_{T_0})(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(\omega) \frac{2\pi}{T_0} \sum_{n \in \mathbb{Z}} X(n\omega_0) \delta(\omega - n\omega_0) = 2\pi \sum c_n \delta(\omega - n\omega_0)$$

$$c_n = \frac{1}{T_0} X(n\omega_0)$$

Relations de Parseval

Cas périodique:

- Série de Fourier: $x_T(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{jn\omega_0 t}$, $c_n = \frac{1}{T} \int_0^T x_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$
- Énergie moyenne: $\frac{1}{T} \int_0^T |x_T(t)|^2 dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2$
- Produit scalaire: $y_T(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n e^{jn\omega_0 t} \to \frac{1}{T} \int_0^T x_T(t) y_T^*(t) dt = \langle x_T, y_T \rangle_{L_2[0,T]} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n d_n^*$

Cas non-périodique:

$$x_1(t) x_2^*(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{1}{2\pi} (X_1 * X_2^{*\vee})(\omega) \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t) x_2^*(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X_1(\xi) X_2^*(\xi - \omega) d\xi$$

Avec $\omega = 0$: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t) x_2^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X_1(\omega) X_2^*(\omega) d\omega$ (Parseval)

Transformation de Fourier dans $L_2(\mathbb{R})$:

- Produit scalaire: $\langle x, y \rangle_{L_2} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y^*(t) dt$
- Norme: $\|x\|_{L_2} = \sqrt{\langle x, x \rangle_{L_2}} = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt}$
- Signaux à énergie finie: $L_2(\mathbb{R}) = \left\{x(t), t \in \mathbb{R}: \|x\|_{L_2} < +\infty\right\}$
- Égalité/équivalence: $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t) - y(t)|^2 dt = 0 \Leftrightarrow x = y$ (presque partout)
- Transformée de Fourier: $x \in L_2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow X = \mathcal{F}\{x\} \in L_2(\mathbb{R})$
- Relation de Parseval: $\langle x, y \rangle_{L_2} = \frac{1}{2\pi} \langle X, Y \rangle_{L_2} \Rightarrow \|x\|_{L_2}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega = \|X\|_{L_2}^2$

Localisation temps-fréquence

Relation d'incertitude L_1:

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt = \|f\|_{L_1} \le f_{\max} \Delta t = |f(t_0)| \Delta t \le \frac{1}{2\pi} |F(\omega_0)| \Delta\omega$
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)| d\omega = \|F\|_{L_1} \le F_{\max} \Delta\omega = |F(\omega_0)| \Delta\omega \le |f(t_0)| \Delta t$

$\Rightarrow \Delta t \Delta\omega \ge 2\pi$

Fenêtres de pondération

Troncation d'une série de Fourier avec pondération: $x'_N(t) = \sum_{n=-N}^{+N} c'_n e^{jn\omega_0 t}$, $c'_n = c_n w_n$

Erreur: $\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |e(t)|^2 dt = \sum_{n=-N}^{+N} \left|c_n - c'_n\right|^2 + \sum_{|n|>N} \left|c_n\right|^2$ (min: $c'_n = c_n \Rightarrow w_n = 1$, fenêtre rectangulaire)

Filtrage: $y(t) = \left(x * \frac{\Omega}{2\pi}\operatorname{sinc}\frac{\cdot}{\frac{2\pi}{\Omega}}\right)(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X_T(\omega) = X(\omega)\operatorname{rect}\frac{\omega}{\Omega}$

- Troncation temporelle: $x_T(t) = w_T(t)x(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X_T(\omega)\frac{1}{2\pi}\left(W_T * X\right)(\omega)$
- Troncation fréquentielle (filtrage): $Y_\Omega(\omega) = w_\Omega(\omega)X(\omega) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} y_\Omega(t) = \left(w_\Omega * x\right)(t)$

Relation d'incertitude L_2:

- $\Delta_t = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty}\left(t - t_0\right)^2 p(t)dt}$, $t_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} tp(t)dt$, $p(t) = \frac{|x(t)|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2 dt}$
- $\Delta_\omega = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\omega - \omega_0\right)^2 P(\omega)d\omega}$, $\omega_0 = \int_{-\infty}^{+\infty}\omega P(\omega)d\omega$, $P(\omega) = \frac{|X(\omega)|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty}|X(\omega)|^2 d\omega}$

$\Rightarrow \Delta_t\Delta_\omega \leq \frac{1}{2}$

Filtrage et échantillonnage

Réponse fréquentielle

Réponse à une excitation sinusoidale:

$$y(t) = \left(h * e^{j\omega_0 t}\right)(t) = H(\omega_0)e^{j\omega_0 t}$$

$$\Rightarrow A\cos\left(\omega_0 t + \theta\right) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} A \cdot A_H\left(\omega_0\right)\cos\left(\omega_0 t + \theta + \phi_H\left(\omega_0\right)\right) \text{ (même fréquence)}$$

Réponse à une excitation périodique:

$$y(t) = \left(h * \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{jn\omega_0 t}\right)(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n H(n\omega_0)e^{jn\omega_0 t} \text{ (périodique)}$$

Filtres idéaux

Filtre passe-bas idéal: $H(\omega) = \operatorname{rect}\frac{\omega}{2\omega_L} \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} h(t) = \frac{\omega_L}{\pi}\operatorname{sinc}\frac{t}{\frac{\pi}{\omega_L}}$ (pas causal)

Canal de Nyquist idéal: $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\delta\left(t - nT_e\right) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \operatorname{sinc}\frac{t - nT_e}{T_e}$

Canal de Nyquist non-idéal: $h\left(nT_e\right) = \delta_n \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{1}{T_e}\sum_{n\in\mathbb{Z}} H\left(\omega + \frac{2\pi}{T_e}n\right) = 1$

Filtre passe-bande idéal: $H(\omega) = \operatorname{rect}\frac{\omega + \omega_0}{B} + \operatorname{rect}\frac{\omega - \omega_0}{B}$ (B: bande passante)

Échantillonnage de signaux

Signal analogique échantillonné:

$$x_e(t) = x(t)\cdot\sum_{n\in\mathbb{Z}}\delta\left(t - nT_e\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x\left(nT_e\right)\delta\left(t - nT_e\right) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X_e(\omega) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x\left(nT_e\right)e^{-jn\omega T_e} = \frac{1}{T_e}\sum_{n\in\mathbb{Z}} X\left(\omega - n\frac{2\pi}{T_e}\right)$$

Recouvrement spectral si $\omega_e < 2\omega_L$ (ω_L: largeur d'une transformée simple)

Formule de Poisson: $\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} F(2\pi n)$

Dualité avec les séries de Fourier:

- $x_{T_0}(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x\left(t - kT_0\right) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X_{T_0}(\omega) = \omega_0\sum_{n\in\mathbb{Z}} X(n\omega_0)\delta(\omega - n\omega_0)$
- $x_e(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x\left(kT_0\right)\delta\left(t - kT_0\right) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X_e(\omega) = \frac{\omega_0}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} X(\omega - n\omega_0)$

Théorème d'échantillonnage: $T_e = \frac{2\pi}{\omega_e} \leq \frac{1}{2f_{\max}} \Leftrightarrow \omega_e \geq 2\omega_{\max}$

Reconstruction de Shannon: $x(t) = \left(x_e * \operatorname{sinc}\frac{\cdot}{T_e}\right)(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x\left(kT_e\right)\operatorname{sinc}\frac{t - kT_e}{T_e}$

Convertisseur N/A: $\left|H_s(\omega)\right| \approx \frac{1}{\operatorname{sinc}\frac{\omega T}{2\pi}}$ pour $\omega \in \left[-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}\right]$

Application aux communications

Largeur de bande essentielle: B: $\frac{1}{2\pi}\int_{-B}^{B}|X(\omega)|^2 d\omega = \alpha E_{tot}$ avec $E_{tot} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|X(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2 dt$ (typiquement, $\alpha = 95\%$)

Modulation d'amplitude

Modulation d'amplitude: $x_{AM}(t) = x(t)p(t) = x(t)A_p\cos\omega_p t \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{1}{2\pi}(X * P)(\omega) = \frac{A_p}{2}\left(X\left(\omega + \omega_p\right) + X\left(\omega - \omega_p\right)\right)$

Démodulation AM synchrone: $x_{AM}(t)p'(t) = 2x(t)\cos^2\omega_p t = x(t)\left(1 + \cos 2\omega_p t\right) \rightarrow$ filtre passe-bas: $\approx x(t)$ (si déphasage sur $p'(t)$, atténuation de $\cos\theta(t)$)

Modulation d'amplitude avec porteuse: $x(t) \rightarrow 1 + \lambda x(t) \rightarrow s(t) = \left(1 + \lambda x(t)\right)A_p\cos\omega_p t \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} S(\omega) = \pi A_p\left(\delta\left(\omega + \omega_p\right) + \delta\left(\omega - \omega_p\right)\right) + \frac{\lambda A_p}{2}\left(X\left(\omega + \omega_p\right) + X\left(\omega - \omega_p\right)\right)$

Modulation à bande latérale unique: $X_{AM}(\omega)\cdot H(\omega), H(\omega) = \begin{cases} 1, \omega_p + \Delta \leq \omega \leq \omega_p + B \\ 0, \omega < \omega_p - \Delta \end{cases}$ (zone de transition pour $\omega_p \pm \Delta$)

Recouvrement spectral si $\omega_p < \omega_{\max}$ de x

Modulation d'angle

Modulation d'angle: $x_m(t) = A_p\cos\theta(t) = A_p\cos\left(\omega_p t + \lambda_p y(t)\right) = A_p\cos\left(\omega_p t + \lambda(h * x)(t)\right)$

Phase instantanée: $\theta(t) = \omega_p t + \lambda_p(h * x)(t)$

Pulsation instantanée: $\omega_i(t) = \frac{\partial\theta(t)}{\partial t} = \dot{\theta}(t) = \omega_p + \lambda_p(\dot{h} * x)(t)$

Modulation de phase:

$h(t) = \delta(t)$

$\theta_{PM}(t) = \omega_p t + \lambda_p x(t)$

$\omega_i = \omega_p + \lambda\dot{x}(t)$

Excursion maximale de fréquence: $\max_t\left|\lambda_p\dot{x}(t)\right| = \lambda\dot{x}_{\max}$

$B_{PM} = 2\frac{\lambda_p\dot{x}_{\max}}{2\pi} + B_{AM}$

Modulation de fréquence:

$h(t) = u(t)$

$\theta_{FM}(t) = \omega_p t + \lambda_p\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$

$\omega_i(t) = \omega_p + \lambda_p x(t)$

Excursion maximale de fréquence: $\max_t\left|\lambda_p x(t)\right| = \lambda x_{\max}$

$B_{FM} = 2\frac{\lambda_p x_{\max}}{2\pi} + B_{AM}$

Avantages: peu sensible aux bruits, distortions et interférences, compensation facile des variations d'amplitude, puissance d e transmission réduite à qualité égale

Inconvénients: Plus grande largeur de bande, modulateur complexe (voltage controlled oscillator)

Modulation de type impulsionnel

Modulation impulsionnelle d'amplitude (PAM):

$$h(t) = \operatorname{rect}\frac{t}{\tau} \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \tau\operatorname{sinc}\frac{\omega}{\frac{2\pi}{\tau}}$$

$$p(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h\left(t - kT_e\right) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{2\pi}{T_e}\sum\delta\left(\omega - n\omega_e\right)H\left(n\omega_e\right)$$

$$x_{PAM}(t) = p(t)x(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X_{PAM}(\omega) = \frac{1}{2\pi}(P * X)(\omega) = \frac{1}{T_e}\sum_{n\in\mathbb{Z}} H\left(n\omega_e\right)X\left(\omega - n\omega_e\right)$$

Reconstruction: $H_{rec}(\omega) = \operatorname{rect}\frac{\omega}{\frac{2T_e}{\tau}}$

Sample-and-hold PAM:

$$x_e(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x\left(kT_e\right)\delta\left(t - kT_e\right) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X_e(\omega) = \frac{1}{T_e}\sum_{n\in\mathbb{Z}} X\left(\omega - n\omega_e\right)$$

$$h(t) = \operatorname{rect}\frac{t - \frac{\tau}{2}}{\tau} \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \tau e^{-\frac{j\omega t}{2}}\operatorname{sinc}\frac{\omega}{\frac{2\pi}{\tau}}$$

$$x_{SH}(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x\left(kT_e\right)h\left(t - kT_e\right) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} H(\omega)X_e(\omega) = \frac{1}{T_e}\sum_{k\in\mathbb{Z}} H(\omega)X\left(\omega - n\omega_e\right)$$

Reconstruction: Filtre passe-bas $\rightarrow$ Filtre correcteur $\left(\frac{1}{\operatorname{sinc}\frac{\omega}{\frac{2\pi}{\tau}}}\right) \rightarrow x\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$

Analyse et synthèse de filtres analogiques

Généralités

Retard pur: $h(t) = \delta\left(t - t_0\right) \Rightarrow H(\omega) = e^{j\Phi_H(\omega)}, \Phi_H(\omega) = -\omega t_0$

Temps de propagation de groupe: $TPG(\omega) = -\frac{\partial}{\partial\omega}\Phi_H(\omega) = -\operatorname{Im}\left(\frac{\partial}{\partial\omega}\log H(\omega)\right) = -\operatorname{Im}\left(\frac{\frac{\partial H(\omega)}{\partial\omega}}{H(\omega)}\right)$

Filtres à phase linéaire

Symétrie paire autour de t_0: $\Phi(\omega) = \begin{cases} -\omega t_0, \operatorname{Re}\left(H(\omega)\right) \geq 0 \\ -\omega t_0 \pm \pi, \operatorname{Re}\left(H(\omega)\right) < 0 \end{cases}$

Symétrie impaire autour de t_0: $\Phi(\omega) = \begin{cases} -\omega t_0 + \frac{\pi}{2}, \operatorname{Im}\left(H(\omega)\right) \geq 0 \\ -\omega t_0 - \frac{\pi}{2}, \operatorname{Im}\left(H(\omega)\right) < 0 \end{cases}$

Filtre à phase linéaire: $H(\omega) = |H(\omega)|e^{-j\omega t_0} \Rightarrow h(t) = \frac{1}{2\pi}\int|H(\omega)|\cos\omega\left(t - t_0\right)d\omega$ (max et centre en t_0)

Temps de montée: $t_r = \frac{H(0)}{h_{\max}} = \frac{2\pi H(0)}{\int_{-\infty}^{+\infty}|H(\omega)|d\omega} = \frac{\pi}{\Omega_{éq}} = \frac{1}{2f_{éq}}$

Largeur de bande équivalente: $\Omega_{éq} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty}|H(\omega)|d\omega}{2H(0)} = \frac{\pi h_{\max}}{H(0)}$

Filtre passe-bas gaussien: $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \overset{\mathcal{F}}{\rightarrow} e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}, B = \frac{1}{\sigma}$

- Avec phase linéaire: $H(\omega) = H(0)e^{-\frac{\omega^2}{2B^2}}e^{-j\omega t_0} \overset{\mathcal{F}^{-1}}{\longrightarrow} h(t) = H(0)\frac{B}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{B^2\left(t - t_0\right)^2}{2}}$
- Réponse indicielle: $t_r = \frac{\sqrt{2\pi}}{B} = \sigma\sqrt{2\pi} = \frac{\pi}{\Omega_{éq}} \Rightarrow \Omega_{éq} \approx 1.25B$
- Cascade de filtres: $\sigma_{éq}^2 = \sum\sigma_i^2$, $t_{0,éq} = \sum t_{0,i}$
- Théorème central-limite: Si $H(0) = H_{\max} = 1, \frac{\partial H}{\partial\omega}(0) = 0, \frac{\partial^2 H}{\partial\omega^2}(0) = -\sigma^2 < 0$: $H_1^n(\omega) \xrightarrow{n\to+\infty} e^{-\frac{n\sigma^2\omega^2}{2}}$

Fonctions de transfert rationnelles

Filtre analogique à constantes localisées (équation différentielle): $\frac{\partial^n y}{\partial t^n} + a_{n-1}\frac{\partial^{n-1}y}{\partial t^{n-1}} + \cdots + a_0 y = b_m\frac{\partial^m x}{\partial t^m} + \cdots + b_0 x$

Fonction de transfert: $\frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{b_m(j\omega)^n + \cdots + b_1(j\omega) + b_0}{(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + .. + a_1(j\omega) + a_0} = \frac{P_m(j\omega)}{Q_n(j\omega)}$ (contraintes physiques: $n \geq m$)

Factorisation: $H(\omega) = b_m\frac{\prod_{k=1}^{m}\left(j\omega - s_{ok}\right)}{\prod_{k=1}^{n}\left(j\omega - s_{pk}\right)}$

- Racines simples: $H(\omega) = b_n + \sum_{k=1}^{m}\frac{A_k}{j\omega - s_{pk}}, A_i = \left(s - s_{pi}\right)\frac{P_m(s)}{Q_n(s)}\Big|_{s=s_{pi}} \Rightarrow h(t) = b_n\delta(t) + \sum_{k=1}^{n} A_k u(t)e^{s_{pk}t}$
- Racines multiples: $H(\omega) = \frac{B_1}{j\omega - s_p} + \frac{B_2}{\left(j\omega - s_p\right)^2} + \cdots + \frac{B_p}{\left(j\omega - s_p\right)^p}, B_{p-k} = \frac{1}{k!}\frac{\partial^k}{\partial s^k}\left(\left(s - s_{pi}\right)\frac{P_m(s)}{Q_n(s)}\right)_{s=s_p}$

$\Rightarrow h(t) = e^{s_p t}\sum_{k=1}^{p} B_k\frac{t_+^{k-1}}{(k-1)!}$

Condition de stabilité BIBO: tous les pôles dans le demi-plan complexe gauche

Placement des pôles et zéros

Représentation polaire: $H(\omega) = b_m\frac{\prod_{k=1}^{m} d_{ok}e^{j\varphi_{0}k}}{\prod_{k=1}^{n} d_{pk}e^{j\varphi_p k}}, d_k = \sqrt{\sigma_k^2 + \left(\omega - \omega_k\right)^2}, \varphi_k = \arctan\frac{\omega - \omega_k}{-\sigma_k}$

- Amplitude: $A_H(\omega) = \left|b_m\right|\frac{\prod_{k=1}^{m} d_{ok}}{\prod_{k=1}^{n} d_{pk}}$
- Phase: $\Phi_H(\omega) = \sum_{k=1}^{m}\varphi_{ok} - \sum_{k=1}^{n}\varphi_{pk}$