Série 3

Exercice 3.1 : (BASIQUE) APPROXIMATION DE SIGNAUX

Cet exercice montre la problématique de l'approximation d'un signal. On y voit que le choix de la projection va déterminer l'erreur d'approximation commise et que la projection orthogonale est la meilleure au sens des moindres carrés.

Le but de cet exercice est d'approcher la fonction

$$x(t) = \begin{cases} 6-t & \text{si } 0 \le t \le 4 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

par une fonction constante par morceaux.

On considère l'espace des fonctions réelles à support dans $[0,4]$ et d'énergie finie. On le munit du produit scalaire $\langle f,g\rangle = \int_0^4 f(t)g(t)\mathrm{d}t$ et on note $\|\cdot\|$ la norme induite. On définit $\phi(t) = \mathrm{rect}(t-1/2)$ et $\phi_n(t) = \phi(t-n)$ pour $n \in \{0,\cdots,3\}$.

1) Montrer que le système de fonctions $(\phi_n)_{n\in\{0,\cdots,3\}}$ est orthonormal au sens du produit scalaire défini ci-dessus.

2) La première approximation est obtenue à partir des échantillons de x aux entiers :

$$f = \sum_{n=0}^{3} x(n)\phi_n.$$

Tracer les fonctions x et f sur le même graphe. Calculer l'erreur d'approximation, c'est à dire la distance entre x et f.

3) Calculer g, l'approximation aux moindres carrés de x dans l'espace engendré par les $(\phi_n)_{n\in\{0,\cdots,3\}}$. Tracer x et g sur le même graphe. Calculer l'erreur d'approximation.

Exercice 3.2 : (BASIQUE) ÉNERGIE, DISTANCE, PRODUIT SCALAIRE

Cet exercice introduit la manipulation des notions d'énergie et de distance sur des espaces de fonctions. Ces notions sont à la base du traitement du signal.

$$\text{On définit } f(t) = \begin{cases} \sqrt{t} & \text{si } t\in[0,1], \\ 2-t & \text{si } t\in[1,2], \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad \text{et } g(t) = \begin{cases} \frac{1}{t+1} & \text{si } t \ge 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1) Esquisser les signaux $f(t), g(t)$ et $g(t-1)$.

2) Calculer l'énergie des signaux $f(t)$, $g(t)$ et $g(t-1)$ et en déduire qu'ils appartiennent à $L_2(\mathbb{R})$.

3) Calculer le produit scalaire au sens L_2 entre $g(t)$ et $g(t-1)$. Existe-t-il un décalage t_0 tel que le produit scalaire entre $g(t)$ et $g(t-t_0)$ soit égal à 3 ? Si oui, donner un exemple d'un tel t_0.
Indication : Pour le calcul de $\langle g, g(\cdot-1)\rangle$, effectuer une décomposition en éléments simples.

4) Déduire des points **2)** et **3)** la distance entre $g(t)$ et $g(t-1)$
Indication : utiliser la relation entre norme et produit scalaire.

Exercice 3.3 : (INTERMÉDIAIRE) PRODUITS SCALAIRES ET APPROXIMATION

*On donne ici un exemple d'utilisation du produit scalaire pour l'approximation de signaux. Bien qu'il s'agisse d'un exercice de niveau intermédiaire, le problème de vérifier les propriétés d'un produit scalaire donné (question **2)**) doit être maîtrisé par tous.*

Soit l'expression $U(c) = 3(x_1 - cy_1)^2 + 2(x_2 - cy_2)^2$ en fonction de c, où $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ et $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ sont des vecteurs réels quelconques.

1) Donner la valeur de c qui minimise $U(c)$.
Indication : utiliser l'approche d'analyse habituelle pour trouver le minimum d'une fonction univariée.

2) On définit $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_m = 3x_1y_1 + 2x_2y_2$ pour $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ et $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$. Vérifier que $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_m$ est un produit scalaire.
Montrer de plus que pour tout $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$, $\langle \mathbf{x} - c\mathbf{y}\,,\, \mathbf{x} - c\mathbf{y} \rangle_m = \|\mathbf{x} - c\mathbf{y}\|_m^2 = U(c)$.

3) Trouver c qui résout le problème de la meilleure approximation de $\mathbf{x}$ par $\mathbf{y}$ avec le produit scalaire obtenu en **2)** (*cf.* page 3-4 du cours).
Comparer cette réponse avec celle de la question **1)**.

4) Dessiner $\mathbf{x}$ et $c\mathbf{y}$ et calculer $U(c)$ pour
(a) $\mathbf{x} = (2, 2)$ et $\mathbf{y} = (3, 3)$,
(b) $\mathbf{x} = (1, 1)$ et $\mathbf{y} = (-2, 3)$,
(c) $\mathbf{x} = (2, 3)$ et $\mathbf{y} = (1, 1)$.
Que peut-on dire des deux vecteurs du point (b) vis-à-vis du produit scalaire m ?
*Indication : utiliser la valeur de c obtenue en **3)**.*

Exercice 3.4 : (AVANCÉ) INTERCORRÉLATION ET DÉTECTION DE SIGNAUX

Cet exercice montre l'intérêt applicatif de l'intercorrélation en tant que mesure de similarité entre deux signaux. Il permet en outre de s'exercer à manipuler l'intégrale de corrélation.

Il est souvent utile de détecter les discontinuités (transitions abruptes) dans un signal. L'intercorrélation est un outil permettant de le faire. Nous allons illustrer cela dans le cas d'un signal corrompu par une forte composante périodique, de fréquence connue. Dans cet exercice, on prendra

$$s_1(t) = u(t+3) + u(t+1) - u(t) - u(t-3) + 10\sin(10\pi t)$$

comme signal d'entrée et $p(t) = \mathrm{rect}(t - 1/2) - \mathrm{rect}(t + 1/2)$ comme signal détecteur.

1) Esquisser $s_1(t)$, d'abord sans le terme périodique, puis avec. Montrer que

$$s_1(t) = u(t) * [\delta(t+3) + \delta(t+1) - \delta(t) - \delta(t-3)] + 10\sin(10\pi t)$$

2) Soit $c_{p\,u}(\tau)$ l'intercorrélation entre $p(t)$ et $u(t)$. La calculer et la représenter graphiquement.

3) Calculer l'intercorrélation $c_{p\,s_1}(\tau)$. On utilisera la relation entre corrélation et convolution, et on fera apparaître des versions translatées de $c_{p\,u}(\tau)$.

4) Esquisser $c_{p\,s_1}(\tau)$ et comparer la courbe aux graphes de la question **1)** : à quoi correspondent les extrema de $c_{p\ s_1}(\tau)$? A quoi correspondent les signes de ces extrema ?