Série 3

Correction de l'exercice 3.1 : APPROXIMATION DE SIGNAUX

1) Pour montrer l'orthonormalité, on vérifie que $\langle \phi_i, \phi_j \rangle = 1$ si $i = j$ et 0 sinon (pour $0 \leq i, j \leq 3$). Soit $i, j \in \{0, \cdots, 3\}$. On voit que Supp $\phi(t-i) \subset [i, i+1]$.

Si $i \neq j$, on a donc Supp $\phi(t-i) \cap$ Supp $\phi(t-j) = \emptyset$, et donc , $\langle \phi_i, \phi_j \rangle = \int_0^4 \phi(t-i)\phi(t-j)\mathrm{d}t = 0$.

Si $i = j$, on a $\langle \phi_i, \phi_j \rangle = \int_0^4 \phi(t - \frac{1}{2} - i)^2 \mathrm{d}t = \int_0^4 \mathrm{rect}(t - \frac{1}{2} - i)^2 \mathrm{d}t = \int_0^4 \mathrm{rect}(t - \frac{1}{2} - i)\mathrm{d}t = 1$. Ceci démontre donc que la famille $(\phi_n)_{n \in \{0, \cdots, 3\}}$ est orthonormale.

Remarque 1 *La notation* Supp f *désigne le support de f. Par définition, f est nulle en dehors de* Supp f.

2) On veut calculer l'erreur d'approximation : $\|x - f\| = \left(\int_0^4 (x(t) - f(t))^2 \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$. On donne deux manières de faire cette question.

(a) Une première façon, *ad hoc*, utilise le fait suivant : le graphe de $x(t) - f(t)$ est constitué de 4 translations du graphe de la fonction $t \mapsto \begin{cases} t \text{ si } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$, comme illustré sur la Figure 1. Il en découle que

$$\|x - f\| = \left(4 \int_0^1 t^2 \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

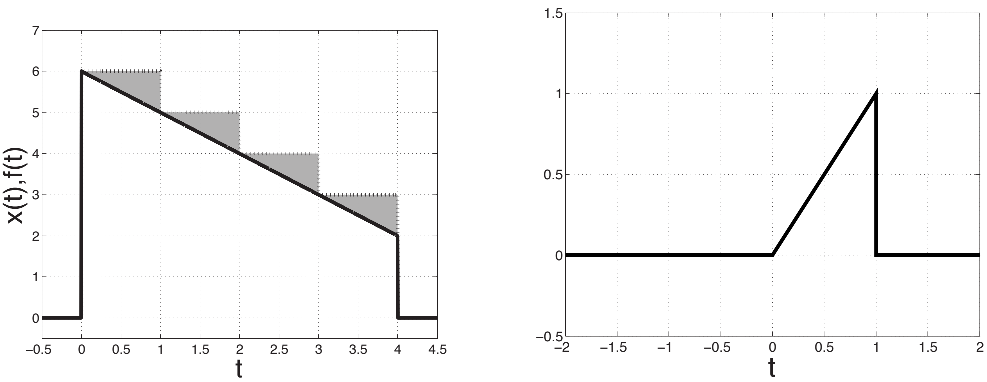

FIGURE 1 – L'erreur d'approximation correspond au carré de l'aire couverte par les zones grises sur le graphe de $x(t) - f(t)$ dans la figure de gauche. Elle est donc est égale à quatre fois la valeur de l'intégrale de la fonction représentée sur le graphe de droite, élevée au carré.

(b) Une deuxième méthode, générale, consiste à écrire :

$$\|x - f\|^2 = \|f\|^2 - 2\langle f, x \rangle + \|x\|^2 = \|f\|^2 - 2\sum_{i=0}^{3} x(i)\langle \phi_i, x \rangle + \|x\|^2$$

Il nous faut donc calculer $\|f\|^2, \|x\|^2$, et les produits scalaires $(\langle \phi_i, x \rangle)_{i \in \{0, \cdots, 3\}}$. Ces quantités nous seront aussi utiles pour traiter la question suivante. Nous allons les calculer maintenant :

$$\begin{aligned}
\|x\|^2 &= \int_0^4 x(t)^2 \mathrm{d}t = \int_0^4 (6-t)^2 \mathrm{d}t = \left[\frac{1}{3}(t-6)^3\right]_0^4 = \frac{208}{3}, \\
\|f\|^2 &= \int_0^4 f(t)^2 \mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{3} x(i)^2 = 6^2 + 5^2 + 4^2 + 3^2 = 86, \\
\langle \phi_i, x \rangle &= \int_0^4 \phi_i(t)(6-t)\mathrm{d}t = \int_0^4 \mathrm{rect}(t - \frac{1}{2} - i)(6-t)\mathrm{d}t = \int_i^{i+1} (6-t)\mathrm{d}t = \left[6t - \frac{t^2}{2}\right]_i^{i+1} = \frac{11-2i}{2}.
\end{aligned}$$

Pour calculer $\|f\|^2$, on a utilisé le fait que la famille $(\phi_n)_{n\in\{0,\cdots,3\}}$ soit orthonormale.

Finalement, nous obtenons : $\|x-f\|^2 = \frac{208}{3} - 2\sum_{i=0}^{3} \frac{(6-i)(11-2i)}{2} + 86 = \frac{208}{3} - 154 + 86 = \frac{4}{3}$, ce qui est cohérent avec le résultat obtenu par la première méthode.

3) Dans cette question, on cherche tout d'abord l'élément $g \in \mathrm{Vect}(\phi_0, \ldots, \phi_3)$ qui minimise $\|x-g\|^2$. On sait que g est la projection orthogonale de x sur $\mathrm{Vect}(\phi_0, \ldots, \phi_3)$. Comme la famille $(\phi_n)_{n\in\{0,\cdots,3\}}$ est orthonormale, il s'agit de

$$g(t) = \sum_{i=0}^{3} \langle \phi_i, x \rangle \, \phi_i(t).$$

Nous avons déjà calculé les produits scalaires $(\langle \phi_i, x \rangle)_{i\in\{0,\cdots,3\}}$ à la question **2)**. On a donc :

$$g(t) = \frac{11}{2}\phi_0(t) + \frac{9}{2}\phi_1(t) + \frac{7}{2}\phi_2(t) + \frac{5}{2}\phi_3(t).$$

On cherche maintenant l'erreur d'approximation $\|x-g\|$. Par définition de la projection orthogonale, on a $g \perp (x-g)$. Par Pythagore, on a donc $\|x\|^2 = \|g\|^2 + \|x-g\|^2$, ou encore $\|x-g\|^2 = \|x\|^2 - \|g\|^2$. On connait déjà $\|x\|^2 = \frac{208}{3}$. Il reste à calculer $\|g\|^2$. Nous utilisons de nouveau le fait que la famille $(\phi_n)_{n\in\{0,\cdots,3\}}$ est orthonormale pour écrire

$$\|g\|^2 = \sum_{i=0}^{3} \langle \phi_i, x \rangle^2 = \left(\frac{11}{2}\right)^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 69$$

Au final, $\|x-g\|^2 = \frac{208}{3} - 69 = \frac{1}{3}$, et donc l'erreur d'appoximation vaut

$$\|x-g\| = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

On vérifie bien que $\|x-g\| < \|x-f\|$.

Remarque 2 $\mathrm{Vect}(\phi_0, \ldots, \phi_3)$ *désigne l'espace vectoriel engendré par* $(\phi_0, \ldots, \phi_3)$. *Comme notre espace de fonctions est muni d'un produit scalaire, il est fécond de penser le problème géométriquement.*

Correction de l'exercice 3.2 : ÉNERGIE, DISTANCE, PRODUIT SCALAIRE

1) Les graphes sont tracés sur la feuille de réponses.

2) Vérifions que les normes L_2 de ces signaux sont finies, il en résultera qu'ils appartiennent à $L_2(\mathbb{R})$.

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f(t)^2 \mathrm{d}t &= \int_0^1 (\sqrt{t})^2 \mathrm{d}t + \int_1^2 (2-t)^2 \mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{(t-2)^3}{3}\right]_1^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} < +\infty \\
\int_{\mathbb{R}} g(t)^2 \mathrm{d}t &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t)^2} \mathrm{d}t = \left[\frac{-1}{1+t}\right]_0^{+\infty} = 1 < +\infty \\
\int_{\mathbb{R}} g(t-1)^2 \mathrm{d}t &= \int_{\mathbb{R}} g(u)^2 du = 1 < +\infty \text{ en faisant le changement de variable } u = t-1
\end{aligned}
$$

Ces intégrales sont finies donc les trois sigaux appartiennent à $L_2(\mathbb{R})$. On remarque aussi que le décalage n'a pas changé l'énergie du signal g, ce qui n'est pas tant non-intuitif, dans le fond.

3) On calcule

$$
\begin{aligned}
\langle g, g(\cdot - 1)\rangle &= \int_{\mathbb{R}} g(t) g(t-1) \mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t(t+1)} \mathrm{d}t \\
&= \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right) \mathrm{d}t = \left[\ln\left(\frac{t}{t+1}\right)\right]_1^{+\infty} = \ln 2.
\end{aligned}
$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $|\langle g(t), g(t-t_0)\rangle| \leq \|g(t)\|_{L_2} \|g(t-t_0)\|_{L_2} = 1$, car l'énergie est inchangée par le décalage. On voit donc qu'il est impossible de trouver un t_0 tel que $\langle g(t), g(t-t_0)\rangle$ soit égal à 3.

4) On a

$$
\|g - g(\cdot - 1)\|_{L_2}^2 = \|g\|_{L_2}^2 - 2\langle g, g(\cdot - 1)\rangle + \|g(\cdot - 1)\|_{L_2}^2 = 2 - 2\ln 2,
$$

donc $\|g - g(\cdot - 1)\|_{L_2} = (2(1 - \ln 2))^{\frac{1}{2}}$.

Correction de l'exercice 3.3 : PRODUITS SCALAIRES ET APPROXIMATION

1) On a ici une fonction d'une variable dont on cherche le minimum. Pour trouver la valeur de c qui minimise U, on peut donc simplement calculer la valeur qui annule sa première dérivée, soit

$$
U'(c) = -6y_1(x_1 - cy_1) - 4y_2(x_2 - cy_2) = 0.
$$

On trouve $c_{\min} = \frac{3x_1y_1 + 2x_2y_2}{3y_1^2 + 2y_2^2}$.
Finalement, on peut vérifier qu'il s'agit bien d'un minimum et non d'un maximum en regardant le signe de la dérivée seconde au point $c_{\min}$,

$$
U''(c_{\min}) = 6y_1^2 + 4y_2^2 > 0 \text{ si } y_1 \neq 0 \text{ ou } y_2 \neq 0.
$$

2) Pour s'assurer qu'il s'agit d'un produit scalaire valide, il faut démontrer que les trois propriétés de la page 3-7 du cours sont vérifiées.

Linéarité :

$$
\begin{aligned}
\langle \alpha\mathbf{x} + \mathbf{z}\,,\, \mathbf{y}\rangle_m &= 3(\alpha x_1 + z_1)y_1 + 2(\alpha x_2 + z_2)y_2 \\
&= \alpha(3x_1y_1 + 2x_2y_2) + 3z_1y_1 + 2z_2y_2 \\
&= \alpha\langle \mathbf{x}\,,\, \mathbf{y}\rangle_m + \langle \mathbf{z}\,,\, \mathbf{y}\rangle_m\,.
\end{aligned}
$$

Symétrie :

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{y}\,,\,\mathbf{x}\rangle_m &= 3y_1x_1 + 2y_2x_2\\ &= 3x_1y_1 + 2x_2y_2\\ &= \langle \mathbf{x}\,,\,\mathbf{y}\rangle_m\,.\end{aligned}$$

Positivité :

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}\|_m^2 &= \langle \mathbf{x}\,,\,\mathbf{x}\rangle_m\\ &= 3x_1^2 + 2x_2^2 > 0 \text{ si } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}.\end{aligned}$$

De plus, on voit qu'en appliquant le produit scalaire $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \langle \mathbf{x}\,,\,\mathbf{y}\rangle_m = 3x_1y_1 + 2x_2y_2$ à $\mathbf{x} - c\mathbf{y}$, on obtient bien $U(c)$.

3) A la page 3-4 du cours, on rappelle que le problème de la meilleure approximation de $\mathbf{x}$ par $\mathbf{y}$ est la solution de $\langle \mathbf{x} - c\mathbf{y}\,,\,\mathbf{y}\rangle_m = 0$. Par linéarité du produit scalaire, on cherche donc $\langle \mathbf{x}\,,\,\mathbf{y}\rangle_m = c\,\langle \mathbf{y}\,,\,\mathbf{y}\rangle_m$, ce qui est vérifié par

$$c = \frac{\langle \mathbf{x}\,,\,\mathbf{y}\rangle_m}{\langle \mathbf{y}\,,\,\mathbf{y}\rangle_m}.$$

En développant les produits scalaires, on trouve

$$c = \frac{3x_1y_1 + 2x_2y_2}{3y_1^2 + 2y_2^2},$$

qui est la même solution qu'au problème du point **1)** où l'on cherchait à minimiser $U(c)$.

4) En utilisant l'expression de c pour la meilleure approximation obtenue dans la question précédente, on trouve

(a) $c = 2/3, c\mathbf{y} = \mathbf{x} = (2, 2), U(2/3) = 0$,

(b) $c = 0, c\mathbf{y} = (0, 0), U(0) = 5$,

(c) $c = 12/5, c\mathbf{y} = (12/5, 12/5), U(12/5) = 6/5$.

On constate qu'avec les vecteurs du point (b), on obtient $c = 0$. Ces vecteurs sont donc orthogonaux pour le produit scalaire m.

Correction de l'exercice 3.4 : INTERCORRÉLATION ET DÉTECTION DE SIGNAUX

1) Les graphiques ci-dessous montrent que la composante sinusoïdale est fortement dominante dans le signal à analyser. On obtient le résultat demandé en utilisant successivement le fait qu'un décalage correspond à une convolution avec une distribution de Dirac décalée et la distributivité du produit de convolution par rapport à l'addition.

$$\begin{aligned}s_1(t) &= u(t) * \delta(t+3) + u(t) * \delta(t+1) - u(t) * \delta(t) - u(t) * \delta(t-3) + 10\sin(10\pi t)\\ &= u(t) * [\delta(t+3) + \delta(t+1) - \delta(t) - \delta(t-3)] + 10\sin(10\pi t).\end{aligned}$$

2) On obtient

$$c_{pu}(\tau) = \langle p(\cdot - \tau), u\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t-\tau)u(t)\mathrm{d}t.$$

Cette fonction permet de comparer $u(t)$ avec des versions décalées du signal détecteur $p(t)$ (*cf.* l'interprétation du produit scalaire en tant que mesure de similarité p. 3-10). Elle peut être obtenue graphiquement en calculant l'aire sous la courbe de la fonction $t \mapsto p(t-\tau) \cdot u(t)$, ce

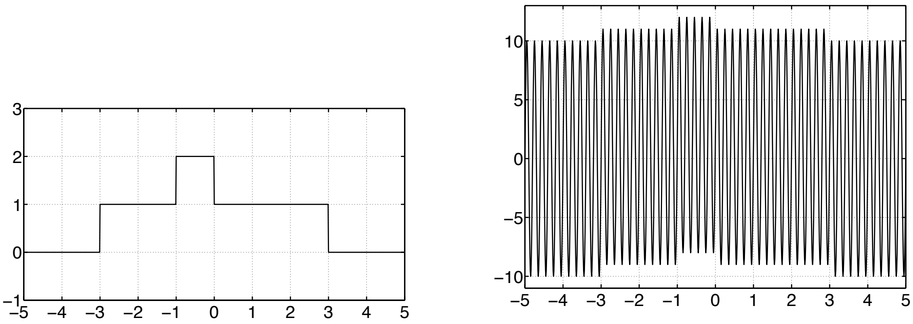

FIGURE 2 – $s_1(t)$ sans (à gauche) et avec (à droite) la composante sinusoïdale.

qui est illustré en Fig. 3. Elle est maximale lorsque $p(t-\tau)$ est "aligné" sur la discontinuité de $u(t)$. On peut aussi faire le calcul analytiquement :

$$c_{p\,u}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} [\mathrm{rect}(t-\tau-1/2) - \mathrm{rect}(t-\tau+1/2)]\,u(t)\mathrm{d}t = \underbrace{\int_{\tau}^{\tau+1} u(t)\mathrm{d}t}_{r(\tau+1)} - \underbrace{\int_{\tau-1}^{\tau} u(t)\mathrm{d}t}_{r(\tau)}$$

avec $r(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{si } \tau \leq 0, \\ \tau & \text{si } 0 \leq \tau \leq 1, \\ 1 & \text{si } 1 \leq \tau. \end{cases}$

D'où

$$c_{p\,u}(\tau) = \begin{cases} \tau+1 & \text{si } -1 \leq \tau \leq 0, \\ 1-\tau & \text{si } 0 \leq \tau \leq 1, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} = \mathrm{tri}(\tau),$$

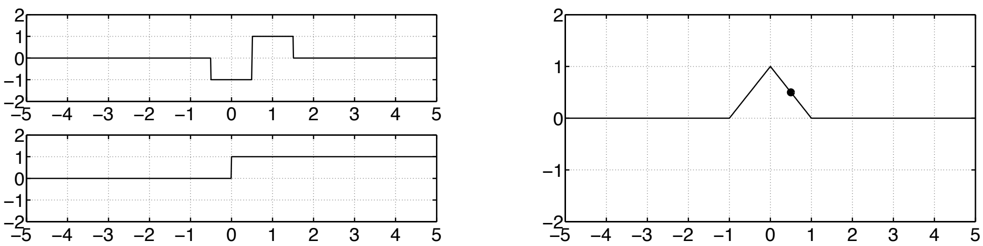

FIGURE 3 – A gauche, la position relative des fonctions $p(t-\tau)$ et $u(t)$ pour $\tau = 1/2$. Il faut calculer l'aire sous la courbe de la fonction produit $p(t-1/2)\cdot u(t)$ pour obtenir $c_{p\,u}(1/2)$. Cela correspond au point sur le graphique de droite, où l'on a aussi représenté la fonction $c_{p\,u}(\tau)$ complète.

3) On utilise la relation entre intercorrélation et convolution :

$$\begin{aligned} c_{p\,s_1}(\tau) &= p(-\tau) * s_1(\tau) \\ &= p(-\tau) * u(\tau) * [\delta(\tau+3) + \delta(\tau+1) - \delta(\tau) - \delta(\tau-3)] \\ &= c_{p\,u}(\tau) * [\delta(\tau+3) + \delta(\tau+1) - \delta(\tau) - \delta(\tau-3)] \\ &= c_{p\,u}(\tau+3) + c_{p\,u}(\tau+1) - c_{p\,u}(\tau) - c_{p\,u}(\tau-3) \\ &= \mathrm{tri}(\tau+3) + \mathrm{tri}(\tau+1) - \mathrm{tri}(\tau) - \mathrm{tri}(\tau-3). \end{aligned}$$

L'intercorrélation entre $p(t)$ et la composante sinusoïdale est nulle car on intègre sur des intervalles dont la longueur est toujours 1, soit un multiple entier de la période de la sinusoïde (qui vaut 1/5) :

$$c_{p\ \sin(10\pi\cdot)}(\tau) = \int_{\mathbb{R}} p(t-\tau)\sin(10\pi t)\mathrm{d}t = \underbrace{\int_{\tau}^{\tau+1} \sin(10\pi t)\mathrm{d}t}_{=0} - \underbrace{\int_{\tau-1}^{\tau} \sin(10\pi t)\mathrm{d}t}_{=0} = 0.$$

4) La position des extrema de l'intercorrélation correspond à celle des discontinuités du signal. Le signe des extrema est déterminé par le “sens” de la discontinuité (saut positif ou négatif).