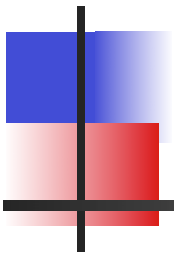




ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE



Signaux et Systèmes

Chapitre 4

Transformation de Fourier

TABLE DES MATIERES

4.1 Intégrale de Fourier

4.2 Propriétés de base

4.3 Fourier: signaux fondamentaux

4.4 Séries de Fourier et périodisation

4.5 Signaux et spectres particuliers

4.6 Relations de Parseval

4.7 Corrélation et densité spectrale d'énergie

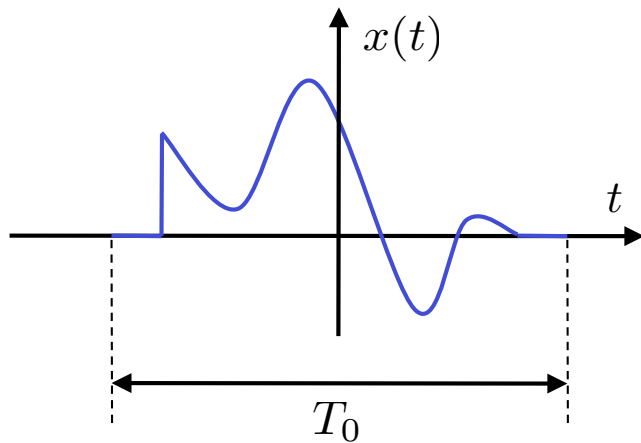
4.8 Fenêtres de pondération

4.9 Localisation temps-fréquence

4.1 INTEGRALE DE FOURIER

- Des séries à l'intégrale de Fourier
- Transformation de Fourier
- Caractéristiques de $X(\omega)$
- Convergence de l'intégrale de Fourier

Des séries à l'intégrale de Fourier



Notation: $\omega_n = n \frac{2\pi}{T_0}$

$$x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{j\omega_n t} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j\omega_n t} dt \right) \cdot e^{j\omega_n t}$$

$x(t)$: signal non-périodique

$$\frac{1}{T_0} = \frac{\omega_{n+1} - \omega_n}{2\pi}$$

$$\Downarrow$$

$$x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j\omega_n t} dt \right) e^{j\omega_n t} \underbrace{(\omega_{n+1} - \omega_n)}_{\Delta\omega}$$

Puis on fait tendre $T_0 \rightarrow \infty$

$$\omega_n \rightarrow \omega$$

$$\omega_n - \omega_{n-1} = \Delta\omega \rightarrow d\omega$$

$$\Downarrow$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt}_{X(\omega)} d\omega$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\approx c_n}$

Transformation de Fourier

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \mathcal{F}\{x\}(\omega)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \mathcal{F}^{-1}\{X\}(t)$$

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega)$$

■ Condition suffisante d'existence

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt = \|x\|_{L_1} < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad x \in L_1 \quad (\text{très pratique})$$

Justification:

$$|X(\omega)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t) e^{-j\omega t}| dt = \|x\|_{L_1}$$

De même, on peut montrer que

$$x \in L_1 \quad \Rightarrow \quad X(\omega) \text{ continue et } \lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} X(\omega) = 0 \quad (\text{Riemann-Lebesgue})$$

Caractéristiques de $X(\omega)$

$X(\omega)$ est une fonction complexe

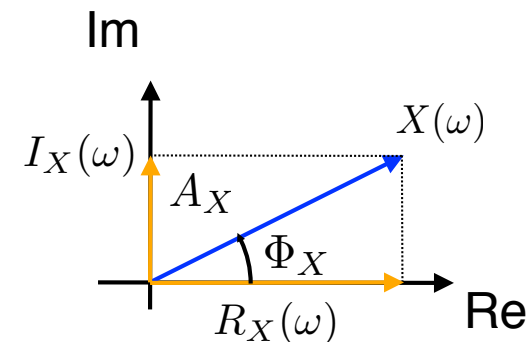
$$X(\omega) = R_X(\omega) + jI_X(\omega)$$

$$e^{-j\omega t} = \cos(\omega t) - j \sin(\omega t)$$

Si $x(t)$ est une fonction réelle

$$R_X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos(\omega t) dt \quad I_X(\omega) = - \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin(\omega t) dt$$

$$X(\omega) = A_X(\omega) \cdot e^{j\Phi_X(\omega)}$$



$$A_X(\omega) = |X(\omega)| = \sqrt{R_X^2(\omega) + I_X^2(\omega)}$$

$$\Phi_X(\omega) = \arg(X(\omega)) = \arctan\left(\frac{I_X(\omega)}{R_X(\omega)}\right)$$

Convergence de l'intégrale de Fourier

■ Transformation de Fourier inverse

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \mathcal{F}^{-1}\{X\}(t)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{X\}(t) = x(t) ?$$

■ Convergence de l'intégrale

- En général, seulement **presque partout** (cf. Gibbs)

Problème : une somme uniformément convergente de fonctions continues (sinusoïdes) est forcément continue !

- La convergence uniforme (*partout*) est garantie dans le cas suivant:

- $x(t)$ continue
- $X(\omega) \in L_1 \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} |X(\omega)| d\omega < +\infty$

- La convergence est garantie partout sauf aux points de discontinuités lorsque les trois **conditions de Dirichlet** sont satisfaites

- $x(t) \in L_1 \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} |x(t)| dt < +\infty$
- $x(t)$ a un nombre fini de maxima et minima dans tout intervalle fini
- $x(t)$ est bornée avec un nombre fini de singularités dans tout intervalle fini

Sur la notation...

■ Electriciens et microtechniciens

$$j = \sqrt{-1} \quad X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad \leftrightarrow \quad x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega$$
$$\omega = 2\pi f \quad X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad \leftrightarrow \quad x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df$$

■ Automaticiens

Transformation de Laplace $X(s) = \int_0^{+\infty} x(t)e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x_+(t)e^{-st} dt$

$$s = j\omega \quad \rightarrow \quad X(j\omega)$$

■ Physiciens

$$i = \sqrt{-1} \quad X(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt \quad \leftrightarrow \quad x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{i\omega t} d\omega$$

■ Mathématiciens

$$i = \sqrt{-1} \quad \hat{x}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt$$

4.2 PROPRIETES DE BASE

- Linéarité
- Dualité, relations de symétries
- Changement d'échelle
- Translation
- Modulation
- Convolution
- Multiplication et convolution fréquentielle
- Différentiation
- Intégration
- Multiplication par un monôme, moments

Linéarité

Si

$$x_k(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_k(\omega)$$

Alors

$$\sum_k a_k x_k(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \sum_k a_k X_k(\omega)$$

■ Démonstration

- Linéarité de l'opérateur d'intégration

■ Application pratique

- Décomposition en éléments simples
- Utilisation des tables de transformation de Fourier

Dualité

Si

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega)$$

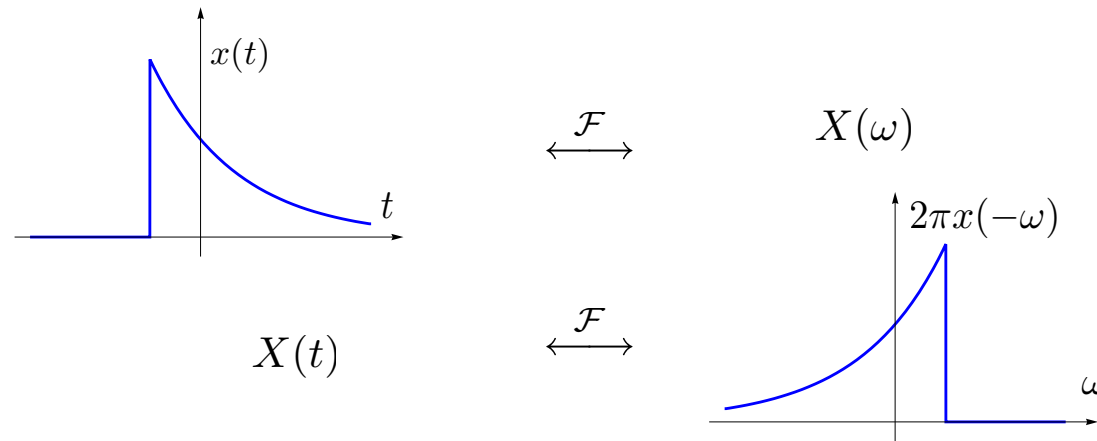
Alors

$$X(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi x(-\omega)$$

Dualité entre transformation directe et inverse:

$$\mathcal{F}^{-1}\{ \} = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}^*\{ \}$$

Illustration graphique:



Vérification

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$x(-t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{-j\omega t} d\omega \iff x(-\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}\{X\}(\omega)$$

Échange des symboles $t \leftrightarrow \omega$

Relations de symétries

$$\begin{aligned} x(-t) = x^\vee(t) &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(-\omega) = X^\vee(\omega) \\ x(t)^* &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(-\omega)^* \end{aligned}$$

Renversement

En effet:

$$X(-\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{j\omega t} dt \stackrel{\tau = -t}{=} \int_{+\infty}^{-\infty} -x(-\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(-\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau = \mathcal{F}\{x^\vee\}(\omega)$$
$$X(-\omega)^* = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{j\omega t} dt \right)^* = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)^* e^{-j\omega t} dt = \mathcal{F}\{x^*\}(\omega)$$

■ Application: relations de parité

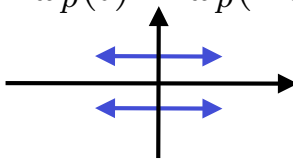
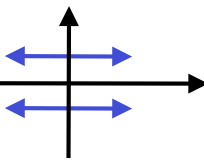
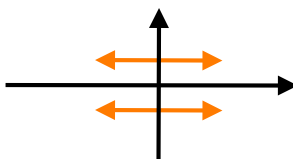
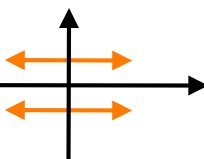
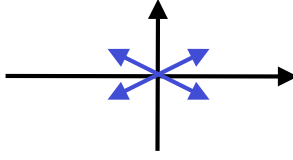
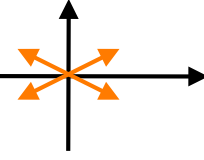
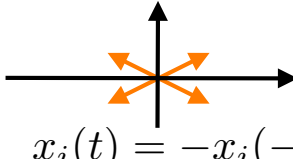
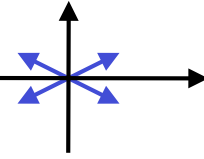
$$x_p(t) = \frac{1}{2} (x(t) + x(-t)) \quad \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \quad X_p(\omega) = \frac{1}{2} (X(\omega) + X(-\omega))$$

$$x_i(t) = \frac{1}{2} (x(t) - x(-t)) \quad \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \quad X_i(\omega) = \frac{1}{2} (X(\omega) - X(-\omega))$$

Symétrie et parité

Signaux complexes pairs ou impairs

$$x(t) = x_1(t) + jx_2(t)$$

Domaine temporel		Domaine fréquentiel	
$x_1(t)$	$x_p(t) = x_p(-t)$ 	$R_X(\omega)$	
$x_2(t)$		$I_X(\omega)$	
$x_1(t)$		$R_X(\omega)$	
$x_2(t)$	 $x_i(t) = -x_i(-t)$	$I_X(\omega)$	

Relations de symétries: signaux réels

■ Signal réel

$$x(t) = x(t)^* \quad \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \quad X(\omega) = X(-\omega)^*$$
$$X(\omega) = \underbrace{R_X(\omega)}_{\text{fct paire}} + j \underbrace{I_X(\omega)}_{\text{fct impaire}}$$

■ Symétrie hermitienne

$$x(t) \text{ réel} \quad \Leftrightarrow \quad X(-\omega) = X(\omega)^*$$

■ Décomposition en parties paire et impaire

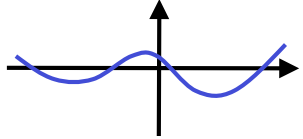
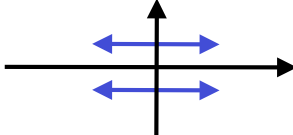
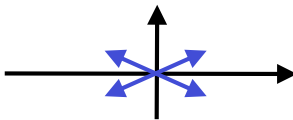
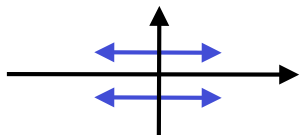
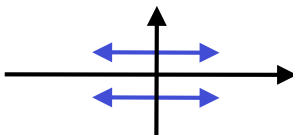
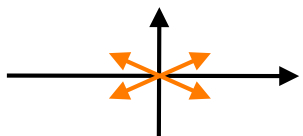
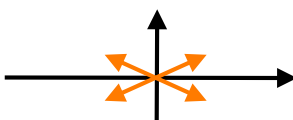
$$x_p(t) = \frac{1}{2} (x(t) + x(-t)) \quad \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \quad \frac{1}{2} (X(\omega) + X^*(\omega)) = R_X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos \omega t \, dt$$

$$x_i(t) = \frac{1}{2} (x(t) - x(-t)) \quad \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \quad \frac{1}{2} (X(\omega) - X^*(\omega)) = jI_X(\omega) = -j \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin \omega t \, dt$$

$$\begin{array}{l} x_p(t) = x_p(-t) \\ x_i(t) = -x_i(-t) \end{array} \quad \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \quad \begin{array}{l} R_X(\omega) = R_X(-\omega) \\ jI_X(\omega) = -jI_X(-\omega) \end{array}$$

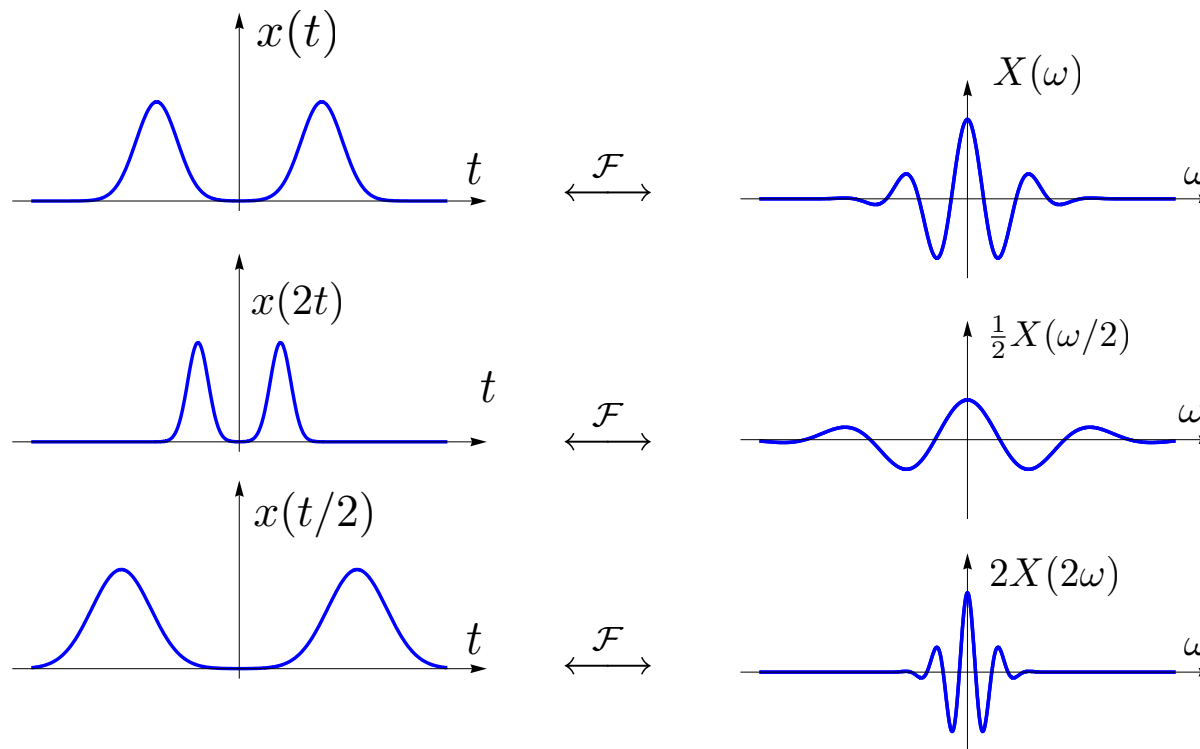
Symétrie et parité (suite)

Signaux réels

Domaine temporel		Domaine fréquentiel	
$x_1(t)$		$R_X(\omega)$	
$x_2(t)$	0	$I_X(\omega)$	
$x_1(t)$		$R_X(\omega)$	
$x_2(t)$	0	$I_X(\omega)$	0
$x_1(t)$		$R_X(\omega)$	0
$x_2(t)$	0	$I_X(\omega)$	

Changement d'échelle

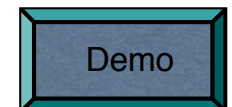
$$x(t/a) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} |a|X(a\omega)$$



■ Preuve

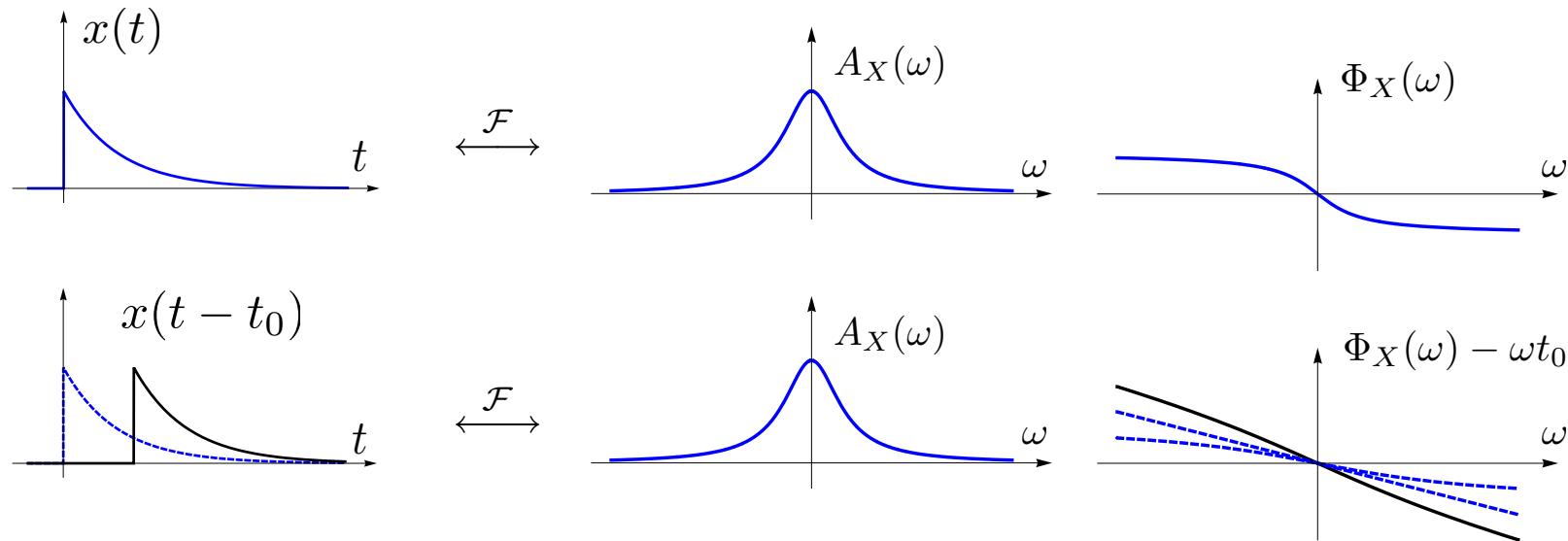
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t/a) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) e^{-ja\omega u} |a| du = |a|X(a\omega)$$

Changement de variable $u = t/a \Rightarrow dt = |a| du$



Translation

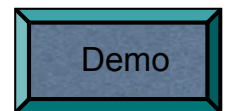
$$x(t - t_0) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\omega t_0} X(\omega)$$



■ Preuve

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t - t_0) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) e^{-j\omega(u+t_0)} du = e^{-j\omega t_0} X(\omega)$$

Changement de variable $u = t - t_0$, $dt = du$



Modulation

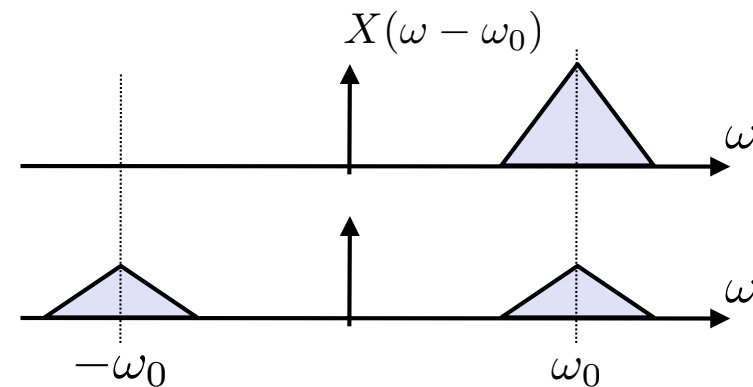
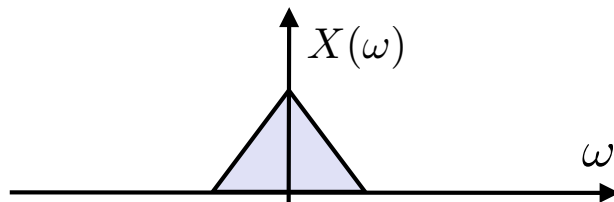
$$e^{j\omega_0 t} x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega - \omega_0)$$

■ Preuve

Par dualité

■ Application: modulation d'amplitude

$$e^{-j\omega_0 t} x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega + \omega_0)$$
$$\cos(\omega_0 t) x(t) = \frac{1}{2} (e^{j\omega_0 t} x(t) + e^{-j\omega_0 t} x(t)) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2} (X(\omega - \omega_0) + X(\omega + \omega_0))$$



Convolution

Propriété de convolution de la transformation de Fourier

$$(x_1 * x_2)(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_1(\omega)X_2(\omega)$$

■ Preuve

$$\begin{aligned}(x_1 * x_2)(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau)x_2(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(X_2(\omega)e^{-j\omega\tau} \right) e^{j\omega t} d\omega}_{\text{Fourier inverse}} d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau \right) X_2(\omega)e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X_1(\omega)X_2(\omega)e^{j\omega t} d\omega\end{aligned}$$

Retard

Condition technique: $x_1, x_2 \in L_1(\mathbb{R})$

Multiplication et convolution fréquentielle

■ Convolution dans le domaine des fréquences

$X_1(\omega)$, $X_2(\omega)$: fonctions complexes

$$(X_1 * X_2)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} X_1(\xi) X_2(\omega - \xi) d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} X_1(\omega - \xi) X_2(\xi) d\xi$$

■ Relation fondamentale

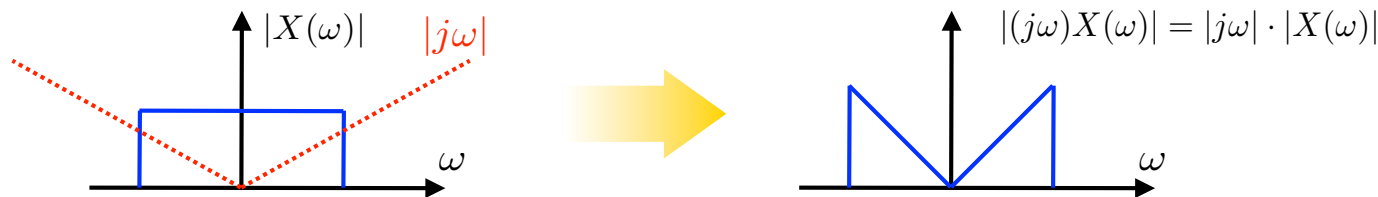
$$2\pi (x_1(t) \cdot x_2(t)) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} (X_1 * X_2)(\omega)$$

Preuve: par dualité

Différentiation

$$\frac{d}{dt}x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} (j\omega)X(\omega) \quad \text{Si } \lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t) = 0$$

■ Effet d'amplification des hautes fréquences



■ Preuve

Intégration par parties

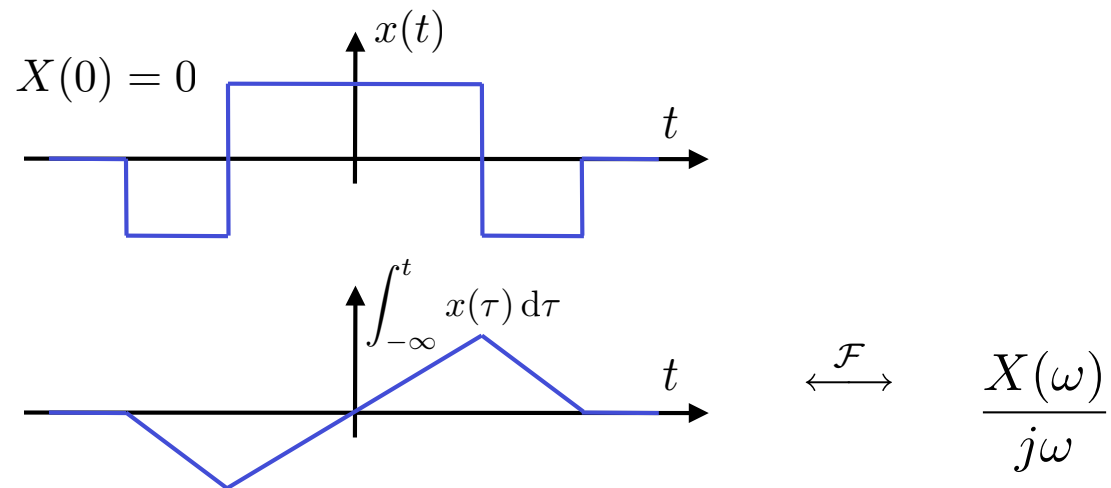
$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left\{ \frac{dx}{dt} \right\} (\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-j\omega t} dt = x(t)e^{-j\omega t} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \frac{d(e^{-j\omega t})}{dt} dt \\ &= 0 - \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)(-j\omega)e^{-j\omega t} dt = j\omega \cdot X(\omega) \end{aligned}$$

Hypothèse sous-jacente: $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t) = 0 \Rightarrow [x(t)e^{-j\omega t}]_{t=-\infty}^{+\infty} = 0$

Intégration

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{X(\omega)}{j\omega}$$

$$\text{Si } X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt = 0$$



■ Preuve

$$g(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

$$\begin{aligned} \dot{g}(t) &\longleftrightarrow j\omega G(\omega) = X(\omega) \\ \Rightarrow G(\omega) &= \frac{X(\omega)}{j\omega} \end{aligned}$$

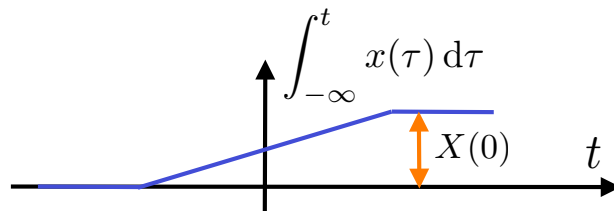
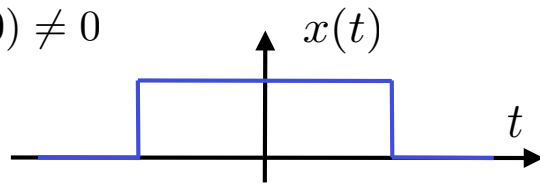
Condition pour la validité du résultat:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} g(t) = \int_{-\infty}^{-\infty} x(t) dt = 0 \quad (\text{OK})$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt = 0 \Rightarrow X(0) = 0$$

Intégration (suite)

$$X(0) \neq 0$$



$$\longleftrightarrow \frac{X(\omega)}{j\omega} + ?$$

Solution:

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t - \tau)x(\tau) d\tau = (u * x)(t) \quad \longleftrightarrow \quad U(\omega)X(\omega)$$

(cf. Tables 4.1, 4.2)

Multiplication par un monôme

$$t^n x(t) \quad \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \quad j^n \frac{d^n X(\omega)}{d\omega^n}$$

■ Preuve: par dualité

■ Vérification: cas du 1er ordre

$$\begin{aligned} j \frac{dX(\omega)}{d\omega} &= j \frac{d}{d\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = j \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \frac{d}{d\omega} e^{-j\omega t} dt \\ &= j \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) (-jt) e^{-j\omega t} dt = \mathcal{F} \{t x(t)\}(\omega) \end{aligned}$$

Moments

■ Moment d'ordre n

$$m_f^n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t) dt$$

$$m_f^n = j^n \left. \frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n} \right|_{\omega=0}$$

■ Cas important: l'intégrale de la fonction

$$m_f^0 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = F(0)$$

■ Justification

$$t^n f(t) \longleftrightarrow j^n \frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}$$

$$\Rightarrow j^n \frac{d^n F(0)}{d\omega^n} = \left. \int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t) e^{-j\omega t} dt \right|_{\omega=0}$$

Table 4.1 : Propriétés de la transformation de Fourier

Opération	$f(t)$	$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$
Combinaison linéaire	$\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)$	$\alpha_1 F_1(\omega) + \alpha_2 F_2(\omega)$
Dualité	$F(t)$	$2\pi \cdot f(-\omega)$
Renversement	$f^\vee(t) = f(-t)$	$F^\vee(\omega) = F(-\omega)$
Complexe conjugué	$f^*(t)$	$F^*(-\omega)$
Dilatation	$f(t/a)$	$ a F(a\omega)$
Translation	$f(t - t_0)$	$F(\omega)e^{-j\omega t_0}$
Modulation	$e^{j\omega_0 t} f(t)$	$F(\omega - \omega_0)$
Convolution	$(h * f)(t)$	$H(\omega)F(\omega)$
Multiplication	$f_1(t)f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi} (F_1 * F_2)(\omega)$
Différentiation	$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$	$(j\omega)^n F(\omega)$
Intégration	$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$	$\frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega)$

4.3 FOURIER: SIGNAUX FONDAMENTAUX

- Exponentielle causale décroissante
- Fonctions de la classe de Schwartz
- Relation de Parseval et égalité au sens faible
- Transformation de Fourier au sens des distributions
- Impulsion de Dirac
- Sinusoïde complexe
- Saut indiciel
- Fonction SIGN

Exponentielle causale décroissante

■ Transformation de Fourier

$$u(t) \cdot e^{st} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{j\omega - s} \quad \text{Re}(s) < 0$$

Calcul analytique:

$$F(\omega) = \int_0^{+\infty} e^{st} e^{-j\omega t} dt = \left. \frac{e^{st-j\omega t}}{s-j\omega} \right|_{t=0}^{\infty} = \frac{1}{j\omega - s}, \quad \text{Re}(s) < 0$$

Remarque: $u(t) \cdot e^{st} \in L_1$ si et seulement si $\text{Re}(s) < 0$ (exponentielle décroissante)

Retour en arrière: problématique car $F(\omega) \notin L_1$!

Ce qui s'explique car $u(t)e^{st}$ n'est pas continue...

Fonctions de la classe de Schwartz

Cadre classique pour la transformation de Fourier: $f(t) \in L_1$

$$\mathcal{F} : L_1 \rightarrow ?$$

Problème: la transformation inverse ne converge pas forcément partout (Gibbs)

■ Définition d'un cadre plus restrictif

\mathcal{S} : Classe de Schwartz des fonctions «test» réelles à décroissance rapide

$$\phi(t) \in \mathcal{S} \quad \Leftrightarrow \quad \left| t^m \frac{d^k \phi(t)}{dt^k} \right| \leq C_{mk} < +\infty, \quad \forall m, k \in \mathbb{N}$$

- Fonctions indéfiniment dérivables
- Fonctions et dérivées à décroissance plus rapide que $1/t^m$

Propriété: la transformation de Fourier est un opérateur inversible de \mathcal{S} dans \mathcal{S} :

$$\forall \phi \in \mathcal{S}, \quad \mathcal{F}\{\phi\} \in \mathcal{S} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}^* \mathcal{F}\{\phi\} = \phi \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{F}^{-1} = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}^*$$

Note: la condition $\phi \in \mathcal{S}$ est bien plus restrictive que $\phi \in L_1$; en effet, $\mathcal{S} \subset L_1$

Relation de Parseval et convergence faible

Produit scalaire L_2 : $\langle x, y \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t) dt$

$$\text{Relation de Parseval: } \forall \phi \in \mathcal{S}, \quad \langle \phi, x \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \mathcal{F}\{\phi\}, \mathcal{F}\{x\} \rangle$$

Preuve:
$$\langle \phi, x \rangle = \int_{\mathbb{R}} \overbrace{\left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \Phi(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right)}^{\phi(t)} x^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \Phi(\omega) \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-j\omega t} dt \right)^*}_{\langle \Phi, \mathcal{F}\{x\} \rangle} d\omega$$

Condition technique: $x \in L_1(\mathbb{R})$

■ Invertibilité de la transformation de Fourier: $\frac{1}{2\pi} \mathcal{F}^* \{ \} = \mathcal{F}^{-1} \{ \} ?$

Test de l'égalité au sens faible: $\forall \phi \in \mathcal{S}, \langle \phi, x \rangle = \langle \phi, \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}^* \{X\} \rangle$

$$\langle \phi, \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}^* \{X\} \rangle = \int \phi(t) \overbrace{\left(\frac{1}{2\pi} \int X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right)^*}_{\mathcal{F}^{-1}\{X\}^*} dt = \frac{1}{2\pi} \int \overbrace{\left(\int \phi(t) e^{-j\omega t} dt \right)}^{\Phi(\omega)} X^*(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \langle \mathcal{F}\{\phi\}, \mathcal{F}\{x\} \rangle$$

D'où l'on conclut que:

$$\forall \phi \in \mathcal{S}, \quad \langle \phi, x \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \mathcal{F}\{\phi\}, \mathcal{F}\{x\} \rangle \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}^* \{X\} = x \text{ (au sens faible)}$$

Fourier au sens des distributions

\mathcal{S}' : Espace des distributions tempérées (dual de \mathcal{S})

Une distribution $\mu \in \mathcal{S}'$ est une fonctionnelle linéaire continue sur \mathcal{S} ; en d'autres termes, μ est défini par l'ensemble des «produits scalaires»: $\forall \phi_i \in \mathcal{S}, \langle \phi_i, \mu \rangle = a_i$ avec $a_i \in \mathbb{C}$

Exemple: $\forall \phi_i \in \mathcal{S}, \langle \phi_i, \delta \rangle = \phi_i(0)$

■ Transformation de Fourier généralisée

$\mathcal{F}\{\mu\} = \hat{\mu}$ est la transformation de Fourier de $\mu \in \mathcal{S}'$ au sens des distributions si et seulement si

$$\forall \phi \in \mathcal{S}, \langle \phi, \mu \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \mathcal{F}\{\phi\}, \hat{\mu} \rangle \quad (\text{généralisation de la propriété de Parseval})$$

avec $\mathcal{F}\{\phi\}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) e^{-j\omega t} dt \in \mathcal{S}$

■ Commentaires

- \mathcal{S}' est un espace immensément plus vaste que \mathcal{S} ou même que L_1 ; en effet, $\mathcal{S} \subset L_1 \subset \mathcal{S}'$
- Cette définition est applicable quand l'intégrale de Fourier n'est pas calculable

Transformation de Fourier généralisée

■ Transformation de Fourier au sens des distributions

Distribution: $\mu \in \mathcal{S}'$

Transformation de Fourier: $\forall \phi \in \mathcal{S}, \langle \phi, \mu \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \mathcal{F}\{\phi\}, \mathcal{F}\{\mu\} \rangle$

■ Propriétés fondamentales

La transformation de Fourier est un opérateur invertible de \mathcal{S}' dans \mathcal{S}' :

$$\forall \mu \in \mathcal{S}', \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{F}\{\mu\} \in \mathcal{S}' \\ \forall \phi \in \mathcal{S}, \langle \phi, \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}^* \mathcal{F}\{\mu\} \rangle = \langle \phi, \mu \rangle \end{array} \right. \Leftrightarrow \mathcal{F}^{-1} = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}^*$$

Les propriétés fondamentales de la transformation de Fourier classique restent valables:

- dualité, symétrie
- linéarité, translation
- modulation
- changement d'échelle
- différentiation, intégration

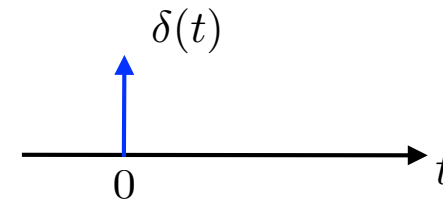
Les propriétés de **convolution** et de **multiplication** sont aussi valables sous certaines réserves; par exemple, que l'une des deux distributions soit à support compact.

Impulsion DELTA de Dirac

■ Définition (au sens des distributions)

$$\forall \phi \in \mathcal{S}, \quad \langle \phi, \delta \rangle = \phi(0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) \delta(t) dt = \phi(0)$$



■ Transformation de Fourier

$$\delta(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 1$$

Preuve au sens des distributions: $\forall \phi \in \mathcal{S}$

$$\phi \in \mathcal{S} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \Phi(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) e^{-j\omega t} dt \in \mathcal{S}$$

$$\langle \phi, \delta \rangle = \phi(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\omega) e^{j\omega t} \Big|_{t=0} d\omega = \frac{1}{2\pi} \langle \Phi, 1 \rangle$$

$$\text{Vérification: } \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = e^{-j0} = 1$$

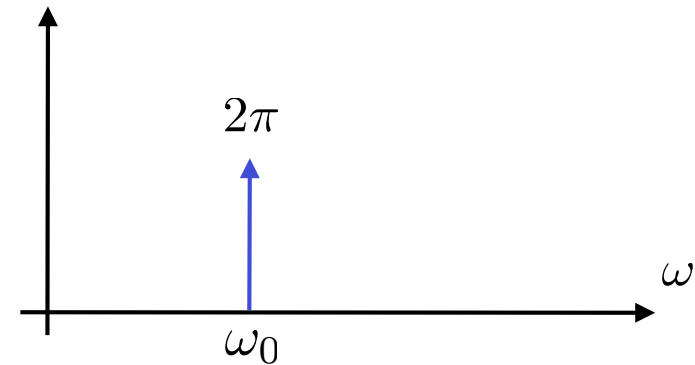
■ Application: remise à l'échelle de l'impulsion de Dirac

$$\delta(t/a) = |a| \cdot \delta(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} |a| \cdot 1$$

Sinusoïde complexe

■ Transformation de Fourier

$$\begin{array}{lcl} 1 & \xleftrightarrow{\mathcal{F}} & 2\pi\delta(\omega) \\ e^{j\omega_0 t} & \xleftrightarrow{\mathcal{F}} & 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \end{array}$$



Justification:

$$\delta(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 1$$

$$1 \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\delta(\omega) \quad (\text{Dualité})$$

$$1 \cdot e^{j\omega_0 t} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \quad (\text{Modulation})$$

Propriété de parité: $\delta(\omega) = \delta(-\omega)$

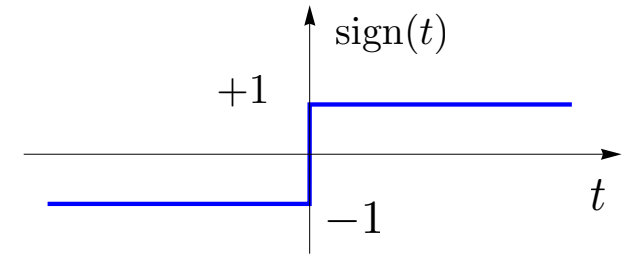
Vérification:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega = \frac{2\pi}{2\pi} e^{j\omega_0 t} = e^{j\omega_0 t} \quad (\text{Propriété d'échantillonnage})$$

Fonction SIGN

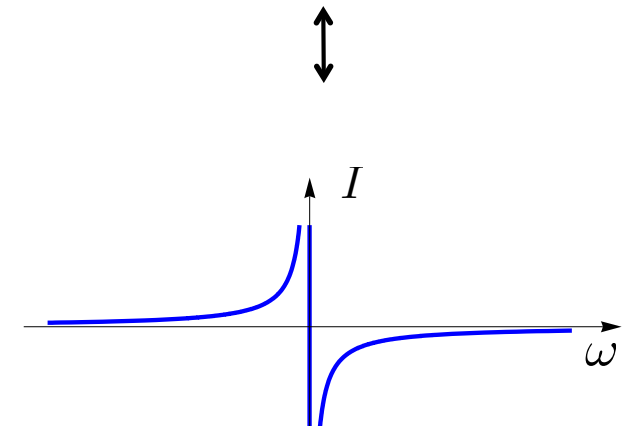
■ Définition

$$\text{sign}(t) = \begin{cases} -1, & t < 0 \\ +1, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$



■ Transformation de Fourier

$$\text{sign}(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{2}{j\omega} = -j \left(\frac{2}{\omega} \right)$$



■ Justification

$$\text{sign}(t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} [f_{\alpha}(t) - f_{\alpha}(-t)] \quad \text{où} \quad f_{\alpha}(t) = u(t) \cdot e^{-\alpha t}$$

$$\underbrace{f_{\alpha}(t) - f_{\alpha}(-t)}_{\text{fct impaire}} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \underbrace{F_{\alpha}(\omega) - F_{\alpha}(-\omega)}_{\text{fct impaire}} = \frac{1}{j\omega - \alpha} + \frac{1}{j\omega + \alpha}$$

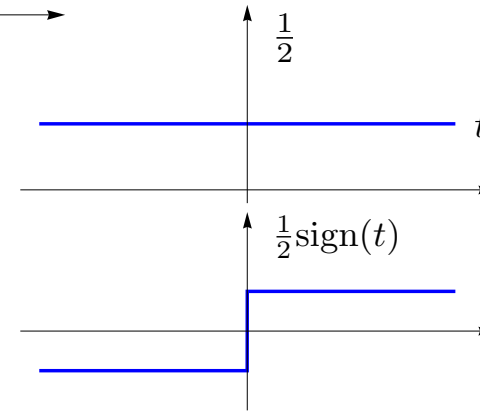
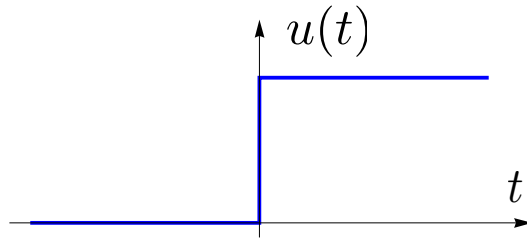
$$\Rightarrow \mathcal{F} \{ \text{sign}(\cdot) \} (\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (F_{\alpha}(\omega) - F_{\alpha}(-\omega)) = \frac{2}{j\omega}$$

Saut indiciel

■ Définition

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$$\left(= \frac{1}{2}, t = 0 \right)$$

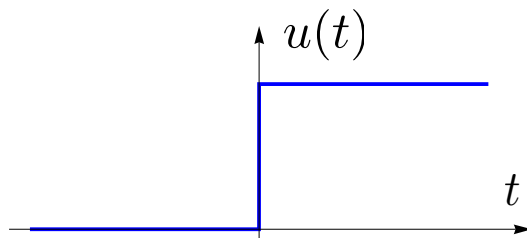
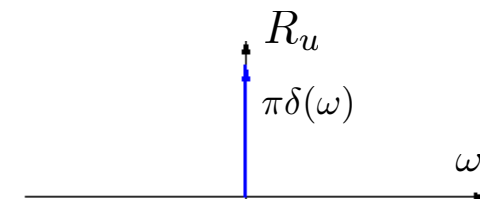


■ Relation avec la fonction SIGN

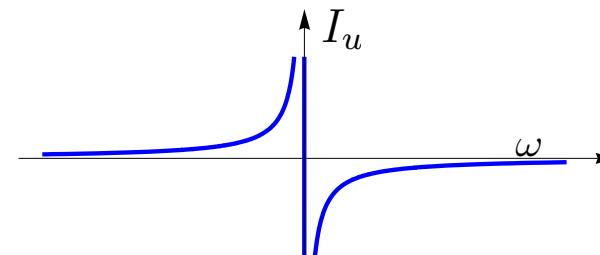
$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{sign}(t)$$

■ Transformation de Fourier

$$u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$



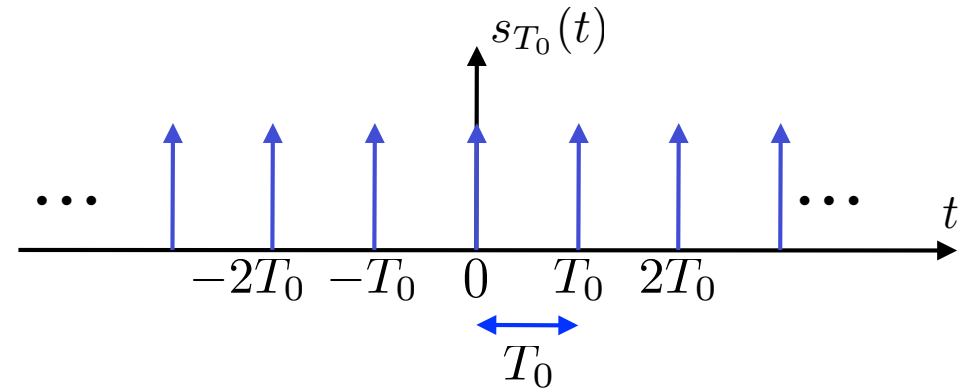
$\xleftrightarrow{\mathcal{F}}$



Train d'impulsions de Dirac

■ Définition

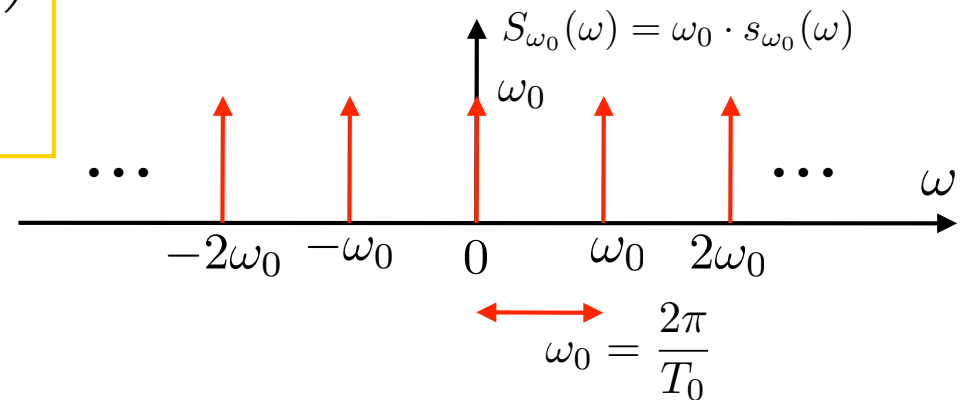
$$s_{T_0}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(t - kT_0)$$



■ Transformation de Fourier

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(t - kT_0) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{2\pi}{T_0} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta\left(\omega - n\frac{2\pi}{T_0}\right)$$

c.à.d. $s_{T_0}(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \omega_0 \cdot s_{\omega_0}(\omega)$



Essai de calcul formel

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(t - kT_0) e^{-j\omega t} dt = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_0) e^{-j\omega t} dt = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-j\omega kT_0}$$

$$\Rightarrow \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(t - kT_0) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-j\omega kT_0} = ?$$

Train d'impulsions de Dirac (suite)

■ Développement en série de Fourier (sens des distributions)

Justification: $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(t - kT_0)$ est T_0 -périodique avec $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(t - kT_0) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad \text{où} \quad c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \delta(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0}$$

$$\Rightarrow \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(t - kT_0) = \frac{1}{T_0} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{jn\omega_0 t} \quad \longleftrightarrow \quad \frac{2\pi}{T_0} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(\omega - n\omega_0)$$

(formule de Poisson)

Rappel: $e^{jn\omega_0 t} \longleftrightarrow 2\pi \delta(\omega - n\omega_0)$

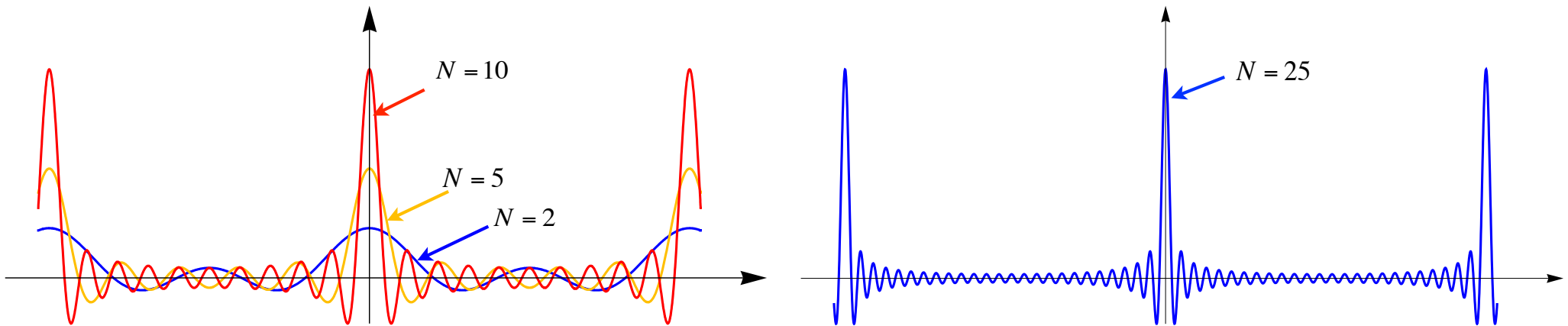
Convergence de la série de Fourier

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(t - kT_0) = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{jn\omega_0 t} \quad ?$$

■ Somme partielle

$$d_N(t) = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-N}^{+N} e^{jn\omega_0 t} = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-N}^{+N} \cos n\omega_0 t$$

$$\max\{d_N(t)\} = d_N(0) = 2N + 1$$



$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(t - kT) = \lim_{N \rightarrow +\infty} d_N(t)$$

Table 4.2 : Transformations de Fourier

$f(t)$	$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$
$\delta(t)$	1
1	$2\pi\delta(\omega)$
$u(t)$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(t - kT)$	$\omega_0 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(\omega - n\omega_0), \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$
$\text{sign}(t)$	$\frac{2}{j\omega}$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$
$\sin(\omega_0 t)$	$j\pi [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$
$u(t)e^{st}$	$\frac{1}{j\omega - s}, \quad \text{Re}(s) < 0$
$e^{-a t }$	$\frac{2a}{\omega^2 + a^2}, \quad a > 0$
$\frac{t_+^n e^{st}}{n!}$	$\frac{1}{(j\omega - s)^{n+1}}, \quad \text{Re}(s) < 0$
$\text{rect}(t/T)$	$T \cdot \text{sinc}(\omega T / (2\pi))$
$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2\sigma^2}$	$e^{-\sigma^2\omega^2/2}$

4.4 SERIES DE FOURIER ET PERIODISATION

- Interprétation des séries de Fourier
- Décalage par convolution
- Convolution avec un peigne de Dirac
- Périodisation et échantillonnage fréquentiel

Interprétation des séries de Fourier

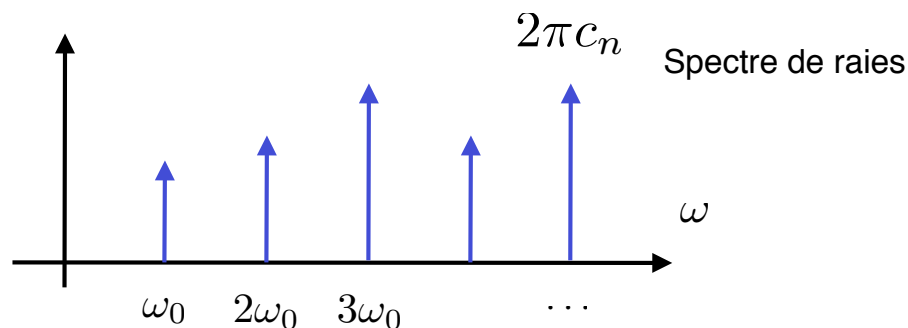
■ Séries de Fourier d'un signal périodique

$$x_p(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad c_n = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x_p(t) e^{-jn\omega_0 t} dt; \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

■ Transformation de Fourier

$$e^{jn\omega_0 t} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi \cdot \delta(\omega - n\omega_0) \quad (\text{fonctions de base})$$

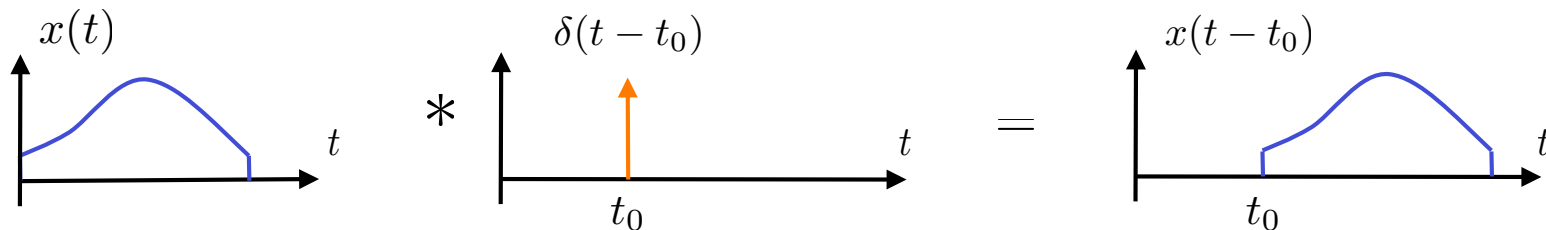
$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{jn\omega_0 t} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \delta(\omega - n\omega_0) \quad (\text{par linéarité})$$



Décalage par convolution et répétition pondérée

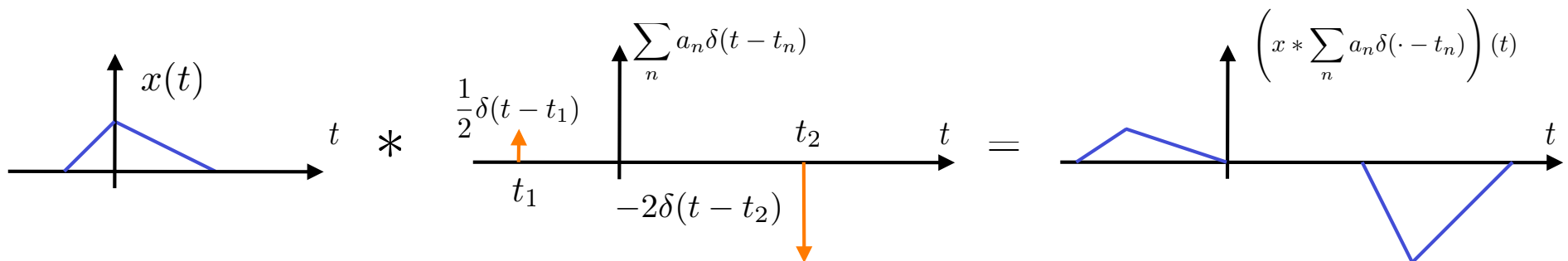
■ Convolution avec une impulsion de Dirac décalée

$$(x * \delta(\cdot - t_0))(t) = x(t - t_0)$$



■ Convolution avec une somme pondérée d'impulsions décalées

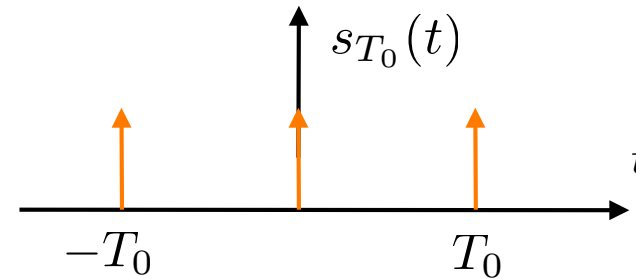
$$\left(x * \sum_n a_n \delta(\cdot - t_n) \right) (t) = \sum_n a_n (x * \delta(\cdot - t_n))(t) = \sum_n a_n x(t - t_n) \quad (\text{par linéarité})$$



Convolution avec un peigne de Dirac

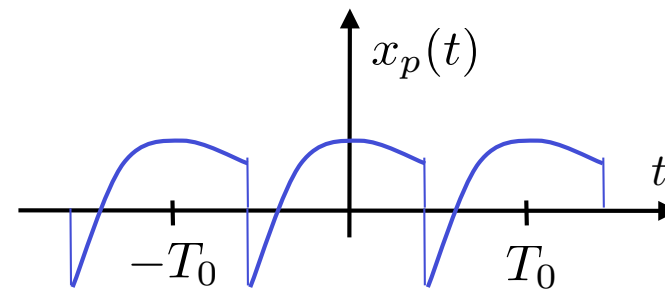
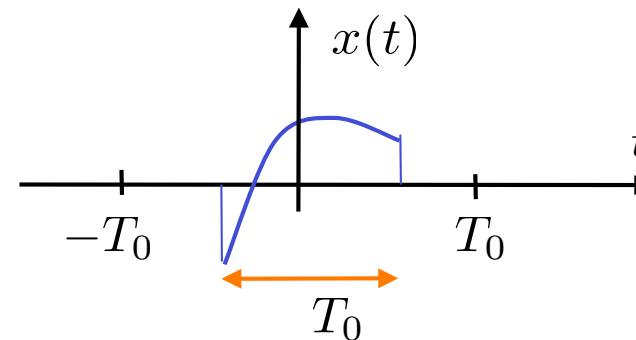
■ Peigne de Dirac

$$s_{T_0}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(t - nT_0)$$



■ Périodisation par répétition

$$(x * s_{T_0})(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(t - nT_0) = x_p(t)$$



Synthèse de signaux périodiques

■ Signal périodique

$$x_p(t) = x_p(t + nT_0), \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

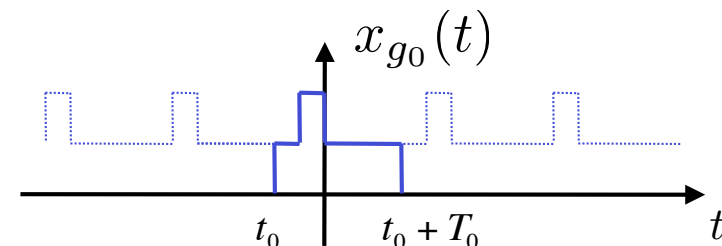
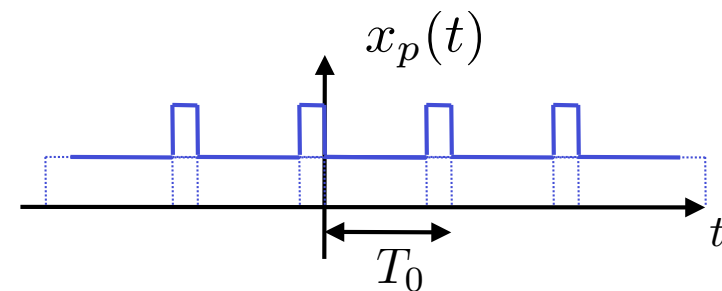
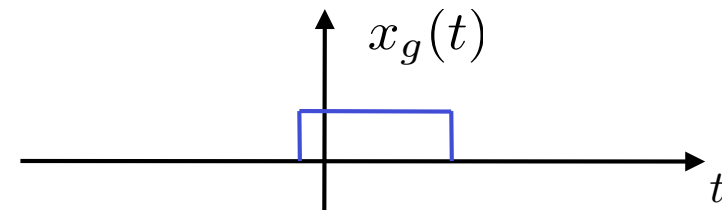
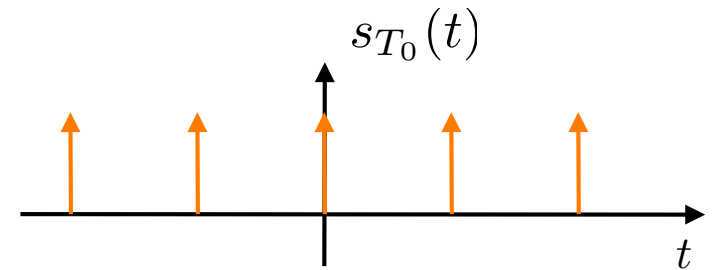
■ Synthèse d'un signal périodique

$$x_p(t) = (x_g * s_{T_0})(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_g(t - nT_0)$$

■ Signaux générateurs $x_g(t)$

- Infinité de solutions
- Générateurs simples

$$x_{g_0}(t) = \begin{cases} x_p(t), & t_0 \leq t < t_0 + T_0 \\ 0, & \text{autrement} \end{cases}$$



Périodisation et échantillonnage fréquentiel

■ Signal périodique

$$x_p(t) = (x_g * s_{T_0})(t) \quad \text{avec} \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$(x_g * s_{T_0})(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_g(\omega) \cdot \frac{2\pi}{T_0} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(\omega - n\omega_0) = \frac{2\pi}{T_0} \sum_{n \in \mathbb{Z}} X_g(n\omega_0) \delta(\omega - n\omega_0)$$

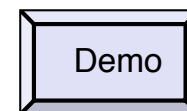
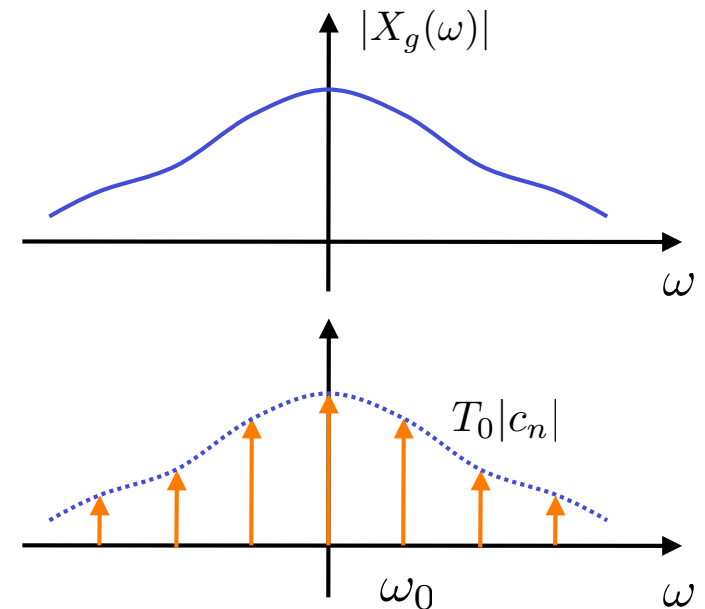
■ Série de Fourier

$$x_p(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{jn\omega_0 t} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \delta(\omega - n\omega_0)$$

Donc:

$$c_n = \frac{1}{T_0} X_g(\omega) \Big|_{\omega=n\omega_0}$$

Remarque: une alternative efficace au calcul traditionnel!



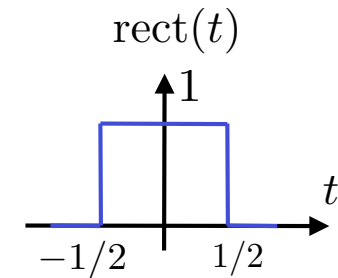
4.5 SIGNAUX ET SPECTRES PARTICULIERS

- Signaux de forme rectangulaire
- Fonction SINC
- Signaux de forme triangulaire
- Fonctions « B-spline »
- Signal sinusoïdal de durée limitée

Signaux de forme rectangulaire

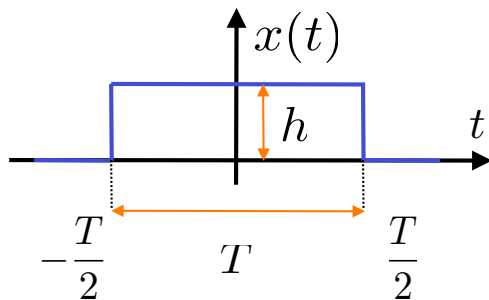
■ Signal RECT

$$\text{rect}(t) = \begin{cases} 1, & -\frac{1}{2} < t < +\frac{1}{2} \\ 0, & +\frac{1}{2} < |t| \end{cases}$$

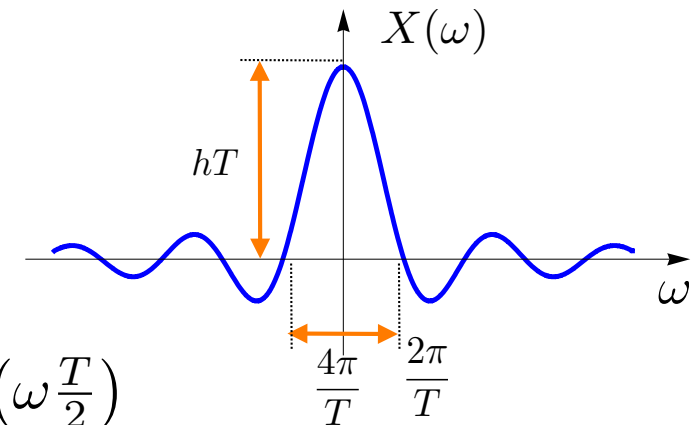


$$X(\omega) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-j\omega t} dt = \left. \frac{-e^{-j\omega t}}{j\omega} \right|_{t=-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} = \frac{e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}}{j\omega} = \frac{\sin(\omega/2)}{(\omega/2)}$$

■ Rectangle de largeur T et hauteur h



$$h \text{ rect} \left(\frac{t}{T} \right) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} hT \frac{\sin \left(\omega \frac{T}{2} \right)}{\left(\omega \frac{T}{2} \right)}$$



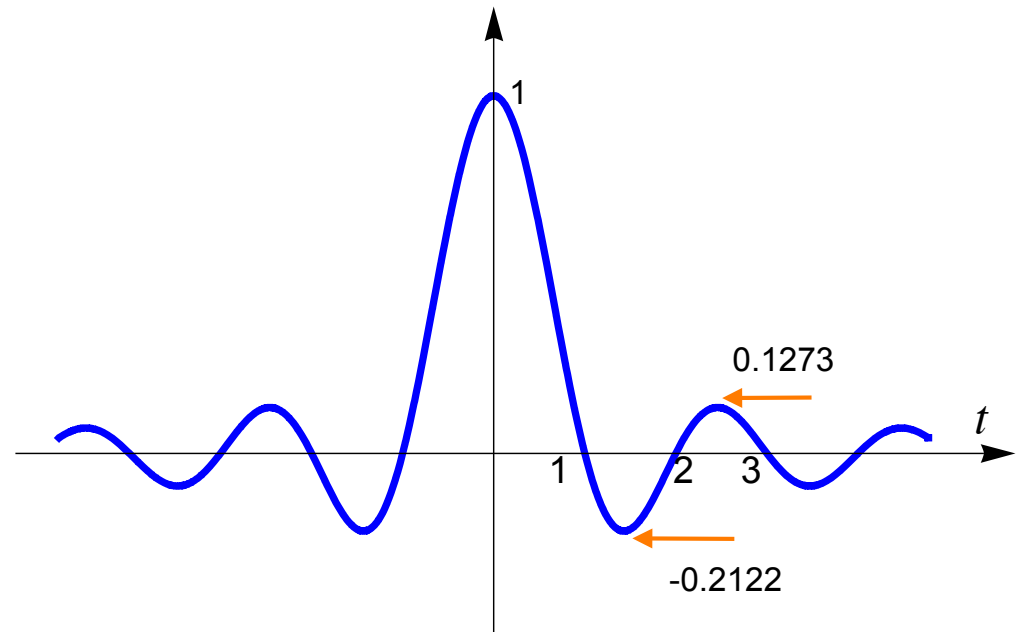
Fonction SINC

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

$$\text{sinc}(0) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$$

$$\text{sinc}(k) = 0, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(t) dt = \text{rect}(0) = 1$$

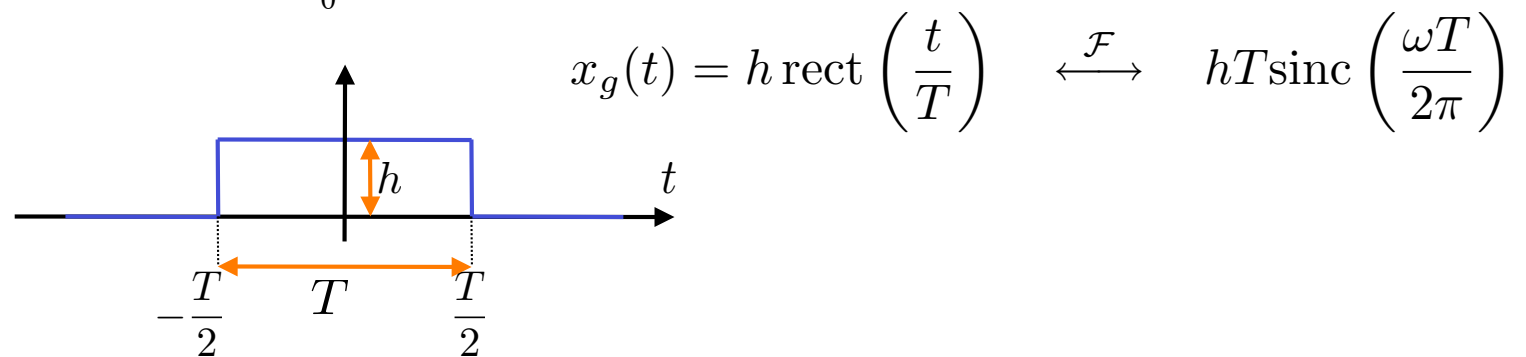
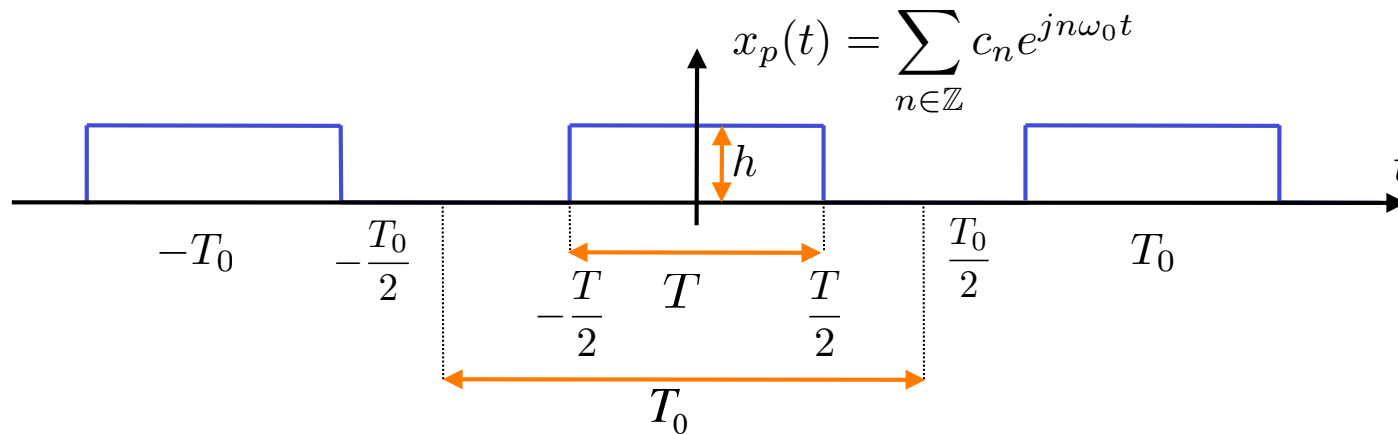


■ Transformation de Fourier

$$\text{rect}(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{\sin(\omega/2)}{(\omega/2)} = \text{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

$$\text{sinc}(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

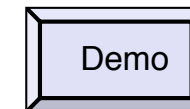
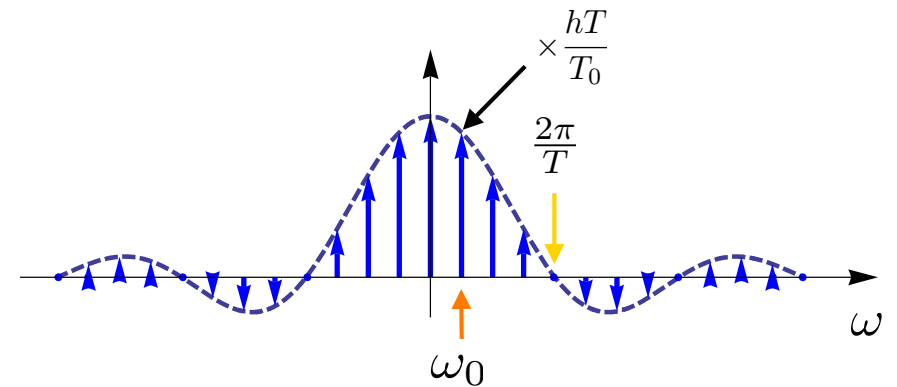
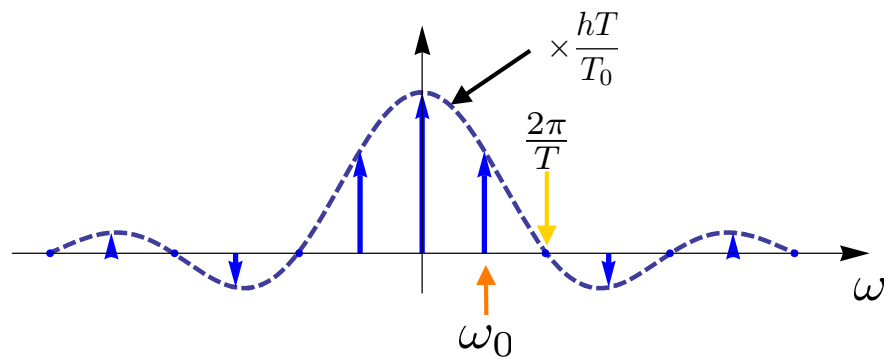
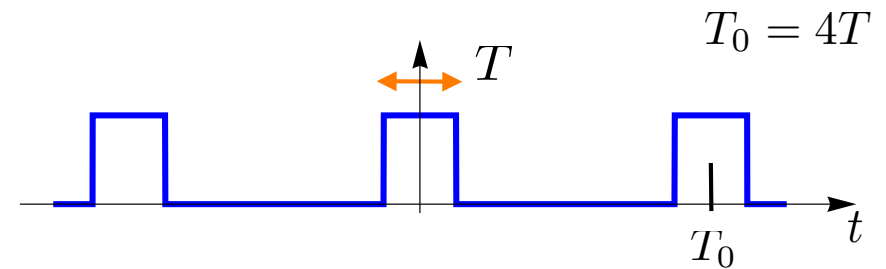
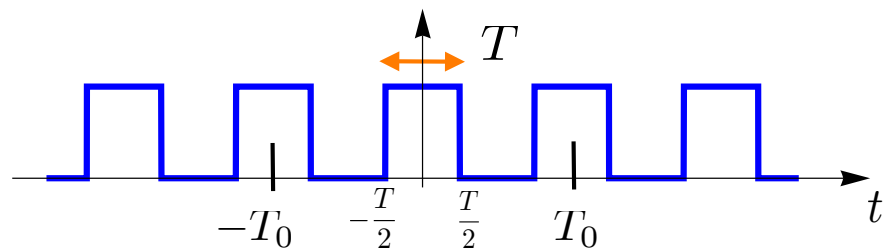
Signal rectangulaire périodique



$$c_n = a_n + jb_n = \frac{1}{T_0} X_g(\omega) \Big|_{\omega=n\omega_0} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

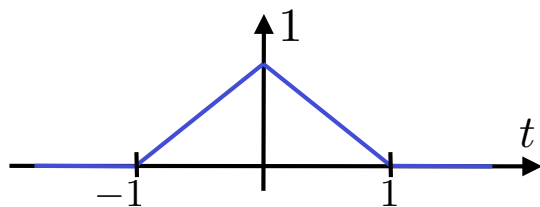
$$a_n = \frac{hT}{T_0} \operatorname{sinc} \left(\frac{n\omega_0 T}{2\pi} \right) = \frac{hT}{T_0} \operatorname{sinc} \left(\frac{nT}{T_0} \right), \quad b_n = 0$$

Signal rectangulaire périodique (suite)



Signaux de forme triangulaire

$$\text{tri}(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & |t| < 1 \\ 0, & \text{autrement} \end{cases}$$

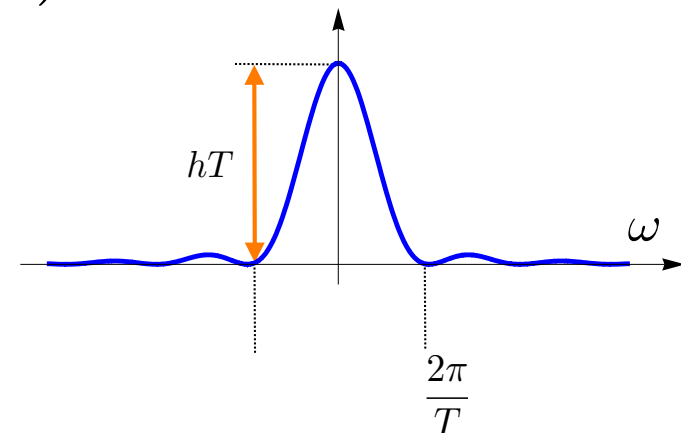
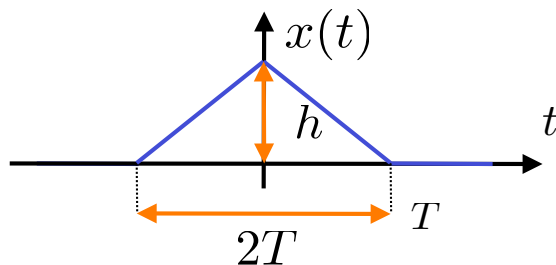


$$= \text{rect}(t) * \text{rect}(t)$$

$\downarrow \mathcal{F}$

$$\text{tri}(t) \longleftrightarrow \left(\frac{\sin(\omega/2)}{(\omega/2)} \right)^2 = \text{sinc}^2 \left(\frac{\omega}{2\pi} \right)$$

$$h \cdot \text{tri} \left(\frac{t}{T} \right) \longleftrightarrow hT \cdot \text{sinc}^2 \left(\frac{\omega}{2\pi/T} \right)$$

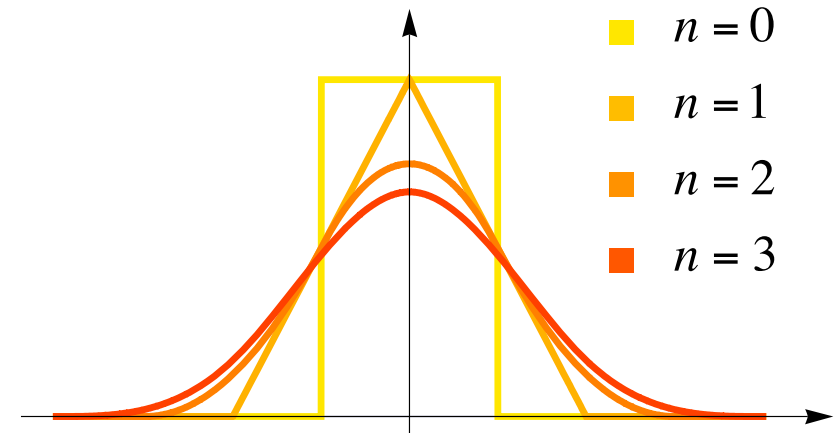


Fonctions "B-spline"

$$\beta^0(t) = \text{rect}(t)$$

$$\beta^n(t) = (\beta^{n-1} * \beta^0)(t) = \underbrace{(\beta^0 * \dots * \beta^0)}_{(n+1) \text{ fois}}(t)$$

$$\beta^n(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \text{sinc}^{n+1}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$



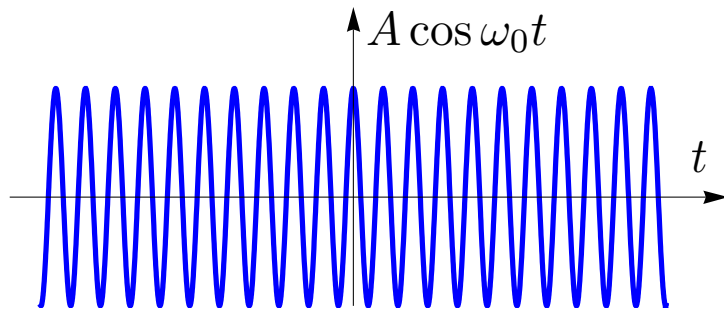
"Spline": fonctions polynomiales par morceaux maximales régulières

■ Propriétés

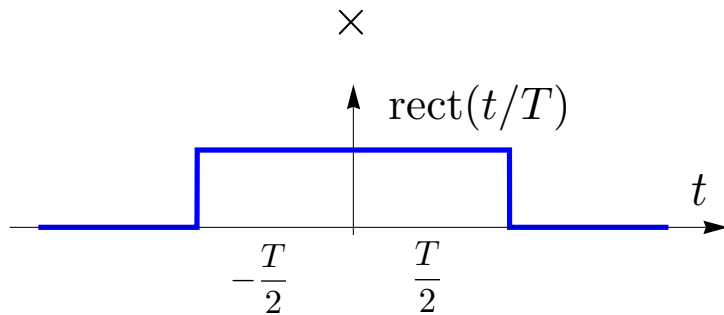
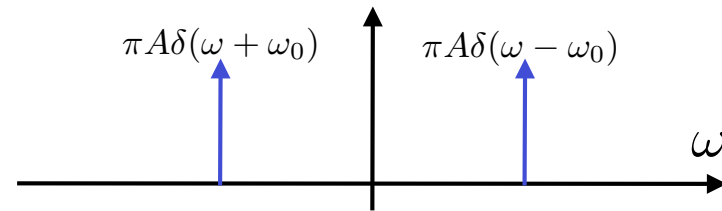
- Non-négativité: $\beta^n(t) \geq 0$
- Support fini: $\left[-\frac{n+1}{2}, +\frac{n+1}{2}\right]$
- Partition de l'unité: $x_p(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta^n(t+k) = x_p(t+1) = 1$

$$\text{Justification: } x_p(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m e^{jm2\pi t} \quad \text{avec} \quad c_m = \frac{1}{T_0} X_g(m\omega_0) = \text{sinc}^{n+1}(m) = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 0, & \text{autrement} \end{cases}$$

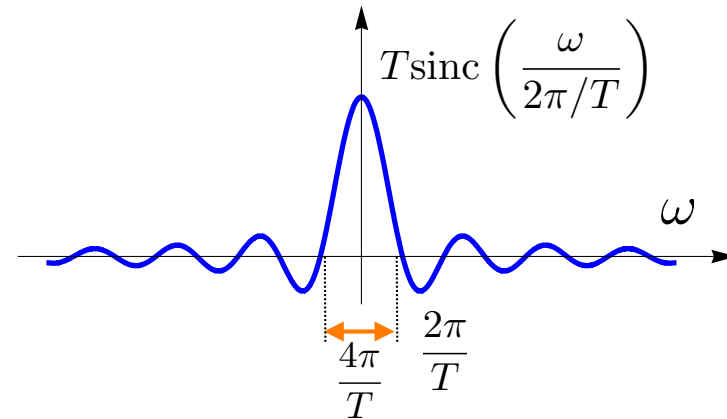
Signal sinusoïdal de durée limitée



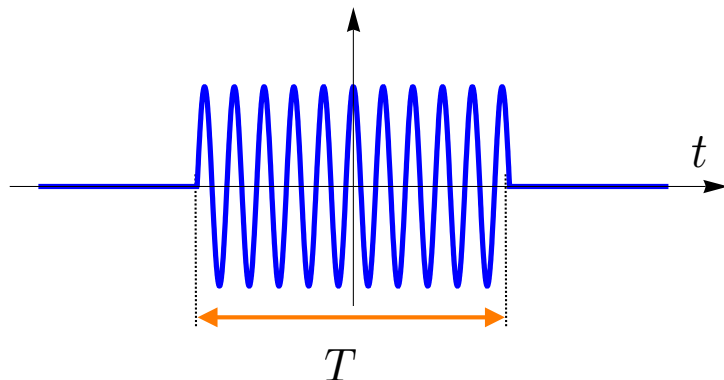
\mathcal{F}



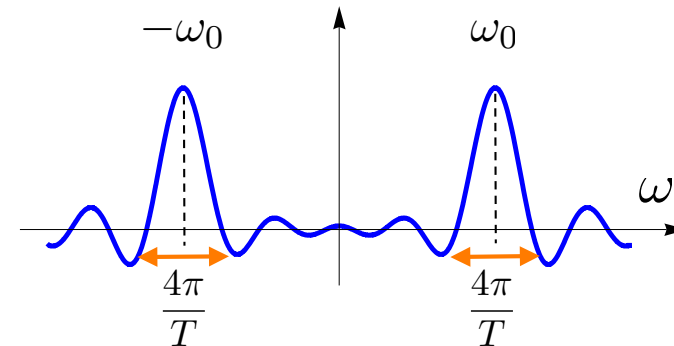
\mathcal{F}



$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) \text{rect}(t/T)$$



\mathcal{F}



$$\frac{AT}{2} \left(\text{sinc}\left(\frac{\omega + \omega_0}{2\pi/T}\right) + \text{sinc}\left(\frac{\omega - \omega_0}{2\pi/T}\right) \right)$$

4.6 RELATION DE PARSEVAL

- Relation de Parseval: Cas périodique
- Relation de Parseval: Cas non-périodique
- Transformation de Fourier dans L_2
- Hiérarchie des espaces fonctionnels

Relations de Parseval: Cas périodique

■ Série de Fourier

$$x_T(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad c_n = \frac{1}{T} \int_0^T x_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt; \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

■ Calcul de l'énergie moyenne

$$\frac{1}{T} \int_0^T |x_T(t)|^2 dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2$$

■ Calcul du produit scalaire

$$y_T(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T x_T(t) y_T^*(t) dt = \langle x_T, y_T \rangle_{L_2[0,T]} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n d_n^*$$

Justification:

$$\langle e^{jm\omega_0 t}, e^{jn\omega_0 t} \rangle_{L_2[0,T_0]} = \delta_{m-n}$$

$$\langle x_T, y_T \rangle = \left\langle \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m e^{jm\omega_0 t}, \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n e^{jn\omega_0 t} \right\rangle = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_m d_n^* \underbrace{\langle e^{jm\omega_0 t}, e^{jn\omega_0 t} \rangle}_{\delta_{m-n}} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n d_n^*$$

Relation de Parseval: Cas non-périodique

■ Rappel

$$x_1(t) x_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi} (X_1 * X_2)(\omega) \qquad x_2^*(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_2^*(-\omega) = X_2^{*\vee}(\omega)$$

En combinant:

$$x_1(t) x_2^*(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi} (X_1 * X_2^{*\vee})(\omega)$$

soit explicitement:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t) x_2^*(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X_1(\xi) X_2^*(\xi - \omega) d\xi = Y(\omega)$$

■ Consistence avec la relation de Parseval

Formule précédente avec $\omega = 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t) x_2^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X_1(\omega) X_2^*(\omega) d\omega$$

Transformation de Fourier dans L_2

Motivation: symétrisation de la théorie et simplification des conditions de convergence!

■ Produit scalaire L_2 : $\langle x, y \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y^*(t) dt$

■ Norme L_2 : $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \right)^{1/2}$

■ Espace des signaux à énergies finies: $L_2(\mathbb{R}) = \{x(t), t \in \mathbb{R} \text{ t.q. } \|x\|_{L_2} < +\infty\}$

■ Egalité ou équivalence au sens L_2 :

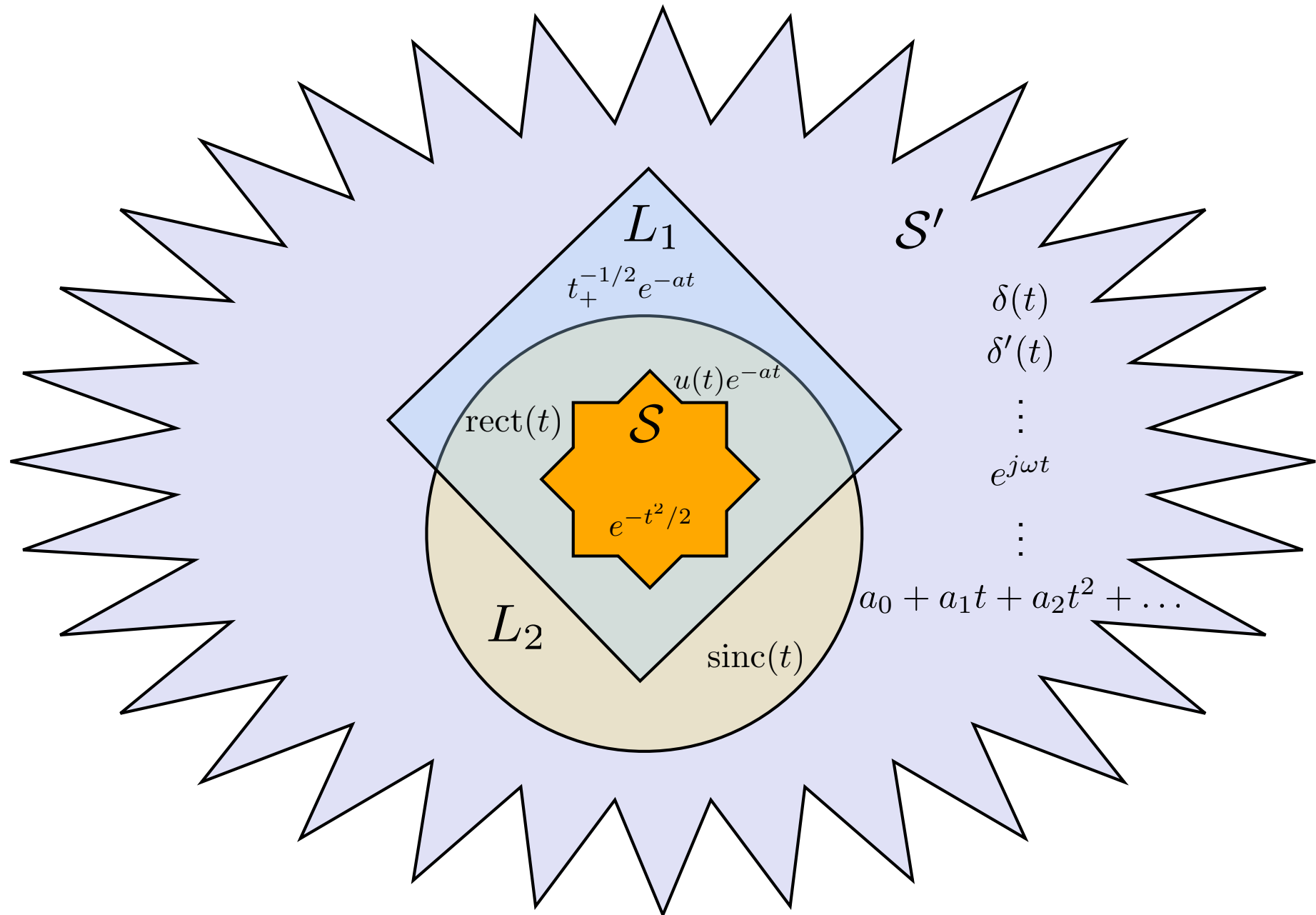
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t) - y(t)|^2 dt = 0 \Leftrightarrow x = y \text{ p.p. } (\textit{presque partout})$$

■ Transformée de Fourier dans L_2 : $x \in L_2 \Leftrightarrow X = \mathcal{F}\{x\} \in L_2$

■ Relation de Parseval:

$$\forall x, y \in L_2, \langle x, y \rangle_{L_2} = \frac{1}{2\pi} \langle X, Y \rangle_{L_2} \Rightarrow \|x\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

Hiérarchie des espaces fonctionnels



4.7 CORRELATION; DENSITE SPECTRALE D'ENERGIE

- Densité spectrale d'énergie
- Durée; largeur de bande essentielle
- Fonction d'autocorrélation: définition
- Autocorrélation et densité spectrale
- Spectres d'intercorrélation
- Corrélation et séries de Fourier

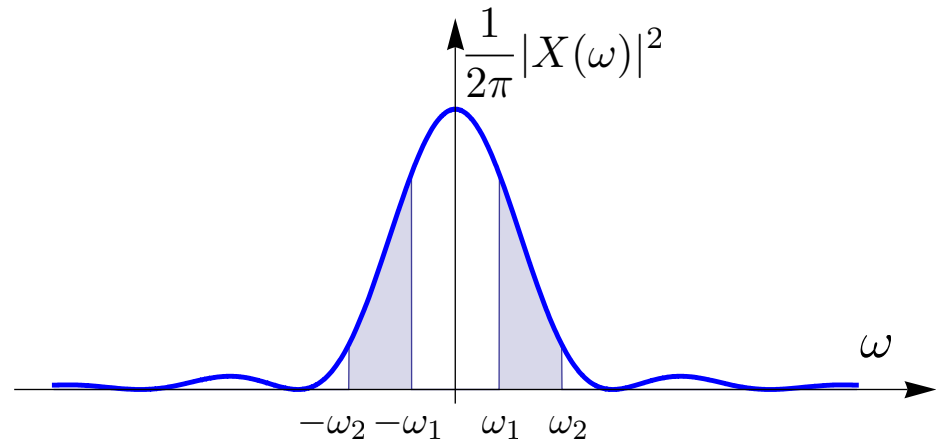
Densité spectrale d'énergie

■ Relation de Parseval

$$\|x\|_{L_2}^2 = \frac{1}{2\pi} \|X\|_{L_2}^2 \quad \Leftrightarrow \quad E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

■ Densité spectrale d'énergie

$$\frac{1}{2\pi} |X(\omega)|^2$$



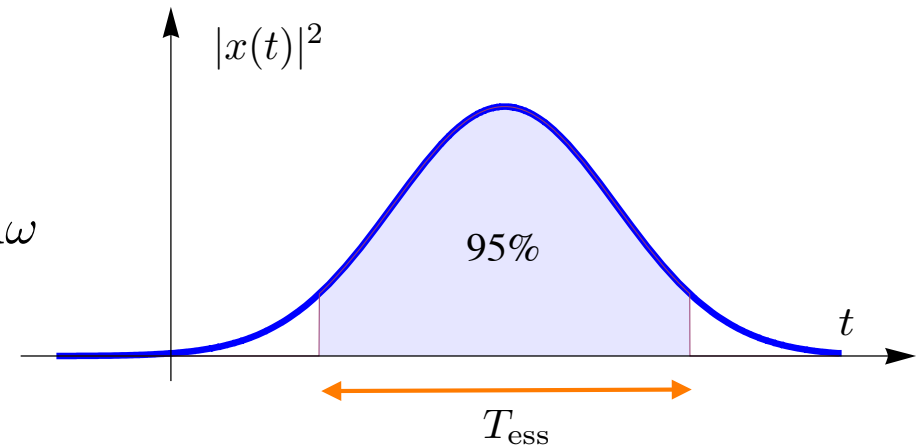
■ Energie dans une bande de fréquence (cas réel)

$$E_{[\omega_1, \omega_2]} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_2}^{-\omega_1} |X(\omega)|^2 d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} |X(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} |X(\omega)|^2 d\omega$$

Durée; largeur de bande essentielle

■ Relation de Parseval (cas réel)

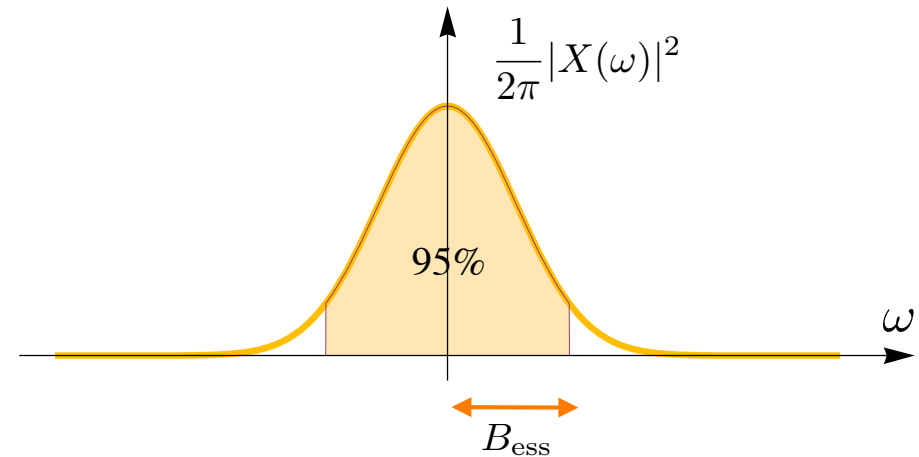
$$E_{\text{Tot}} = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$



■ Durée essentielle

$$T_{\text{ess}} = \arg \min_{T>0} \left\{ T : \int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)|^2 dt = \alpha \cdot E_{\text{Tot}}, t_0 \in \mathbb{R} \right\}$$

Typiquement: $\alpha=95\%$



■ Largeur de bande essentielle

$$B_{\text{ess}} = \arg \min_{B>0} \left\{ B : \frac{1}{\pi} \int_{\omega_0}^{\omega_0+B} |X(\omega)|^2 d\omega = \alpha \cdot E_{\text{Tot}}, \omega_0 \in \mathbb{R}^+ \right\}$$

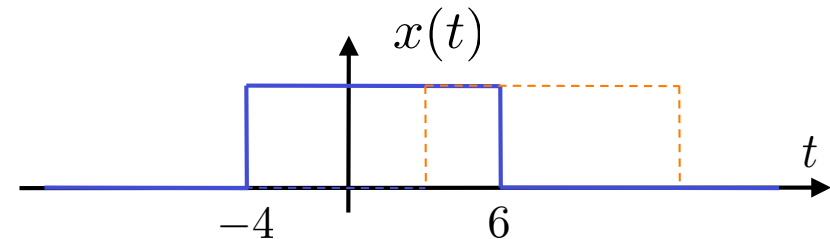
Fonction d'autocorrélation: définition

$x(t)$ signal complexe ou réel

Renversement: $x^\vee(t) = x(-t)$

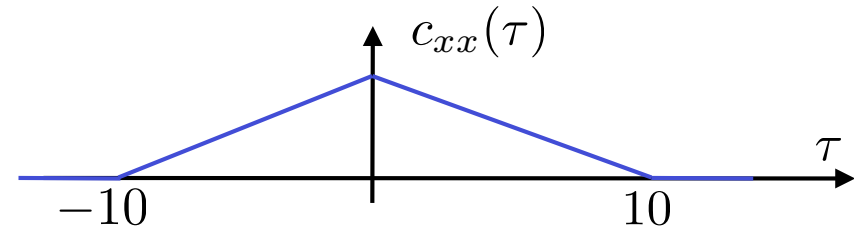
$$c_{xx}(\tau) = \langle x(\cdot), x(\cdot + \tau) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t + \tau) dt = (x^\vee * x^*)(\tau)$$

Si $x(t)$ réel: $c_{xx}(\tau) = (x^\vee * x)(\tau)$



■ Propriétés

- Symétrie paire: $c_{xx}(\tau) = c_{xx}(-\tau)$
- Invariance par translation



$$y(t) = x(t - t_0), \quad c_{xx}(\tau) = c_{yy}(\tau)$$

$$\text{En effet: } \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - t_0)x^*(t - t_0 + \tau) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)x^*(u + \tau) du = c_{xx}(\tau)$$

Autocorrélation et densité spectrale

$$c_{xx}(\tau) = (x^\vee * x^*)(\tau)$$

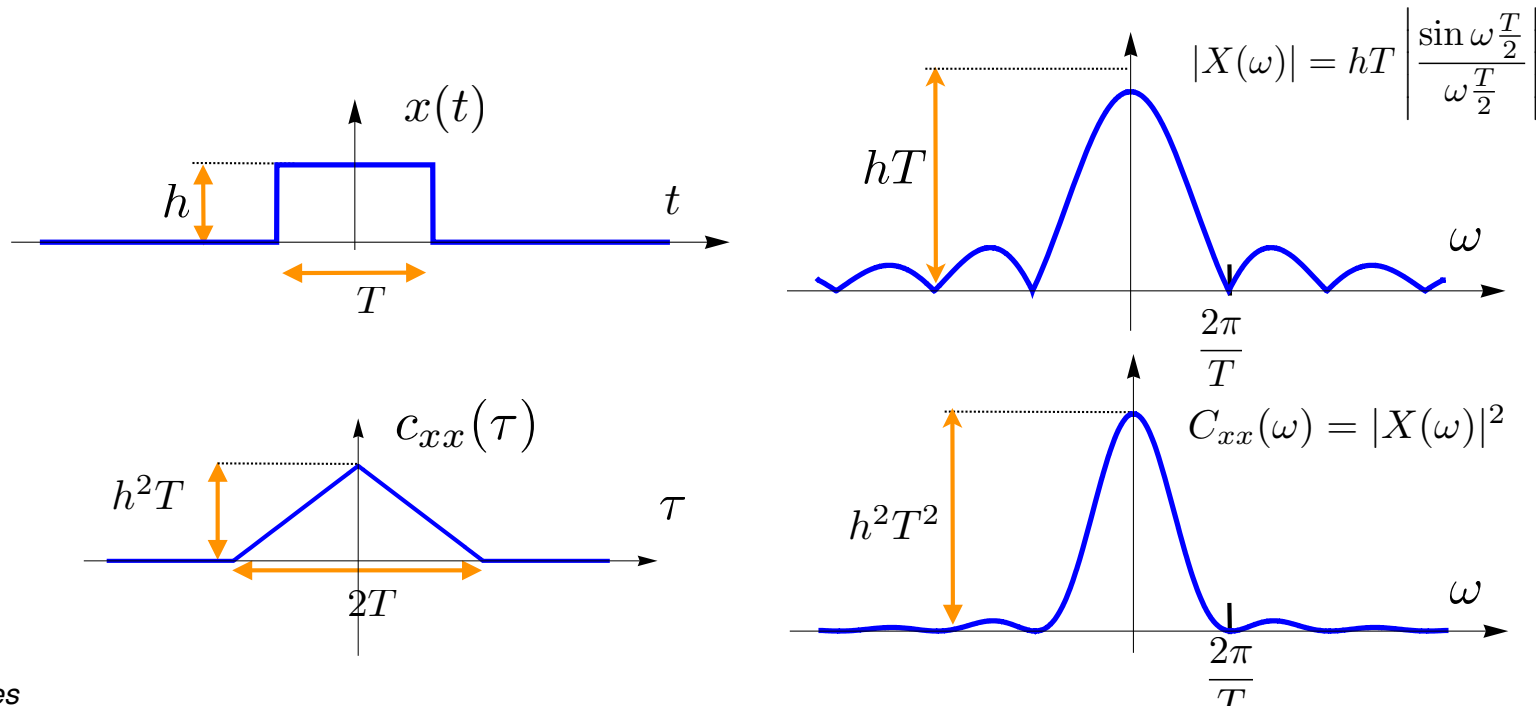
$$c_{xx}(\tau) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} C_{xx}(\omega) = X(-\omega)X^*(-\omega) = |X(-\omega)|^2$$

Si $x(t)$ réel: $|X(\omega)|^2 = C_{xx}(\omega)$

Rappel:

$$\begin{aligned} x^\vee(\tau) = x(-\tau) &\longleftrightarrow X(-\omega) \\ x^*(\tau) &\longleftrightarrow X^*(-\omega) \end{aligned}$$

La densité spectral d'énergie d'un signal est proportionnelle au spectre $C_{xx}(\omega)$ de sa fonction d'autocorrélation.



Spectres d'intercorrélation

$$c_{xy}(\tau) = (x^\vee * y^*)(\tau)$$

Renversement: $x^\vee(t) = x(-t)$

$$c_{xy}(\tau) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} C_{xy}(\omega) = X(-\omega)Y^*(-\omega)$$

Cas des signaux réels: $X(-\omega) = X^*(\omega)$

$$C_{xy}(\omega) = X^*(\omega)Y(\omega)$$

$$C_{yx}(\omega) = Y^*(\omega)X(\omega)$$

Spectres d'intercorrélation ("cross-power spectrum")

$$\Rightarrow c_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t+\tau) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(\omega)Y(\omega)e^{j\omega\tau} d\omega$$

Pour $\tau = 0$, on retrouve la relation de Parseval

$$c_{xy}(0) = \langle x, y \rangle_{L_2(\mathbb{R})} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(\omega)Y(\omega) d\omega$$

Corrélation et séries de Fourier

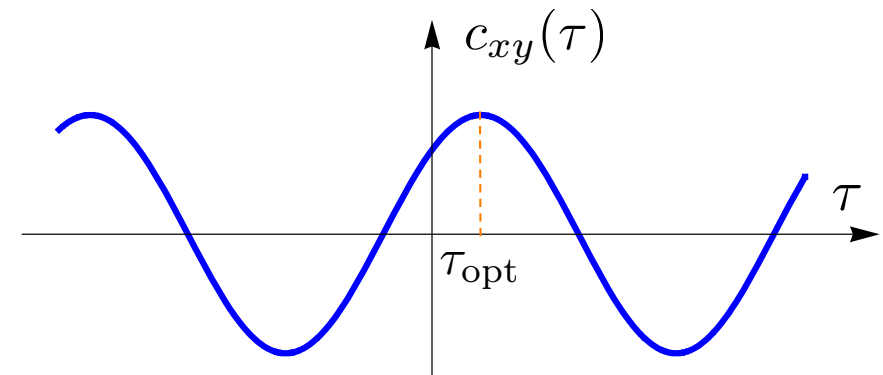
Signal périodique: $x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{jn\omega_0 t}, \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

Signal de référence: $y(t) = \cos(n\omega_0 t)$

■ Fonction d'intercorrélation (cas périodique et réel)

$$c_{xy}(\tau) = \langle x(\cdot), y(\cdot + \tau) \rangle_{L_2([0, T])} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cos(n\omega_0(t + \tau)) dt$$

$$\arg \max_{\tau} \{c_{xy}(\tau)\} = |c_n|; \quad \tau_{\text{opt}} = \frac{\varphi_n}{n\omega_0}$$



Calcul explicite:

$$c_{xy}(\tau) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jn\omega_0(t+\tau)} dt \right) = \operatorname{Re} \left(e^{-jn\omega_0\tau} \underbrace{\frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt}_{c_n = |c_n| \cdot e^{j\varphi_n}} \right) = |c_n| \cos(n\omega_0\tau - \varphi_n)$$

4.8 FENETRES DE PONDERATION

- Motivation: phénomène de Gibbs
- Pondération et limitation fréquentielle (filtrage)
- Pondération temporelle
- Fonctions "fenêtre"

Motivation: phénomène de Gibbs

■ Série de Fourier

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

■ Troncation de la série de Fourier

$$x_N(t) = \sum_{n=-N}^{+N} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

■ Troncation avec pondération

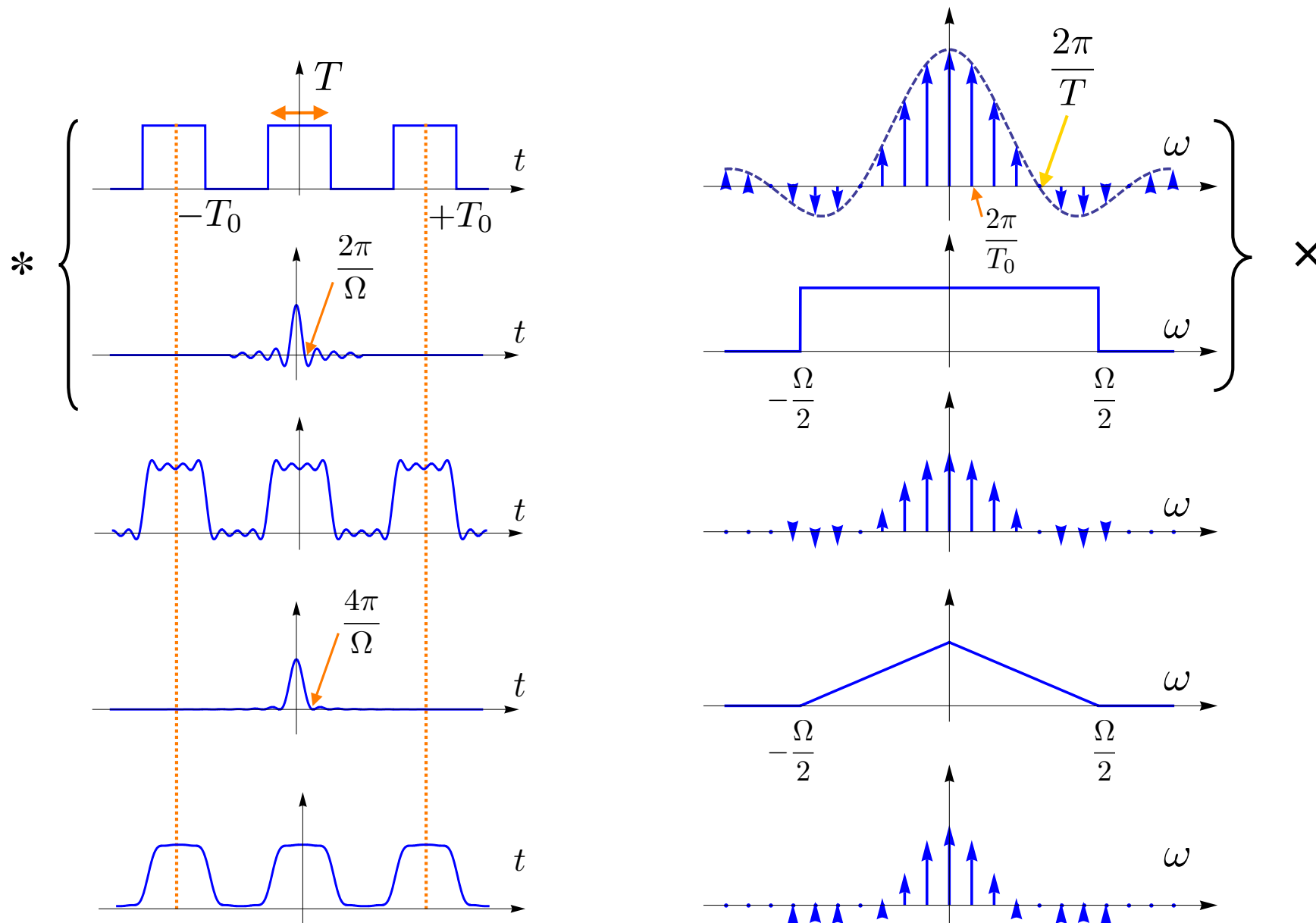
$$x'_N(t) = \sum_{n=-N}^{+N} c'_n e^{jn\omega_0 t}, \quad \text{avec} \quad c'_n = w_n c_n$$

w_n : coefficients de pondération ($w_n \in \mathbb{R}$)

Questions

1. Comment évaluer le résultat $x'_N(t)$ et l'erreur $e(t) = x(t) - x'_N(t)$?
2. Comment choisir les «meilleurs» w_n ?

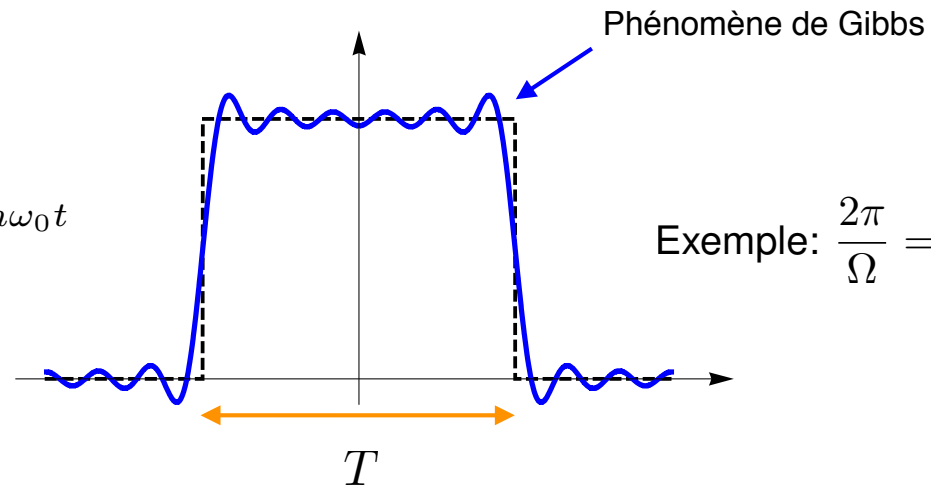
Exemple: reconstruction d'un signal rectangulaire



Phénomène de Gibbs (suite)

$$x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

Série tronquée: $x'_N(t) = \sum_{|n| \leq N} c'_n e^{jn\omega_0 t}$



■ Evaluation de l'erreur

$$e(t) = x(t) - x'_N(t)$$

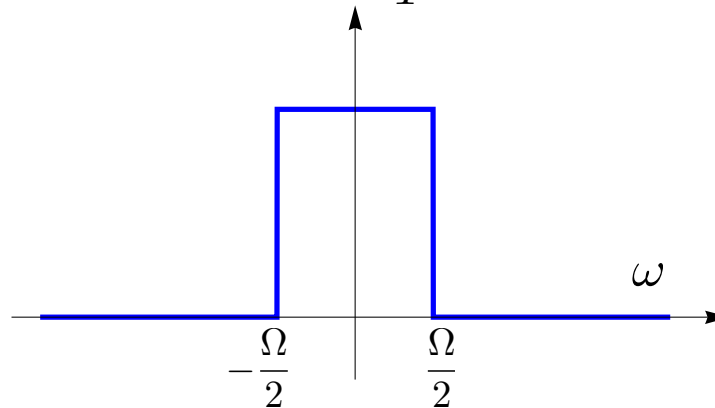
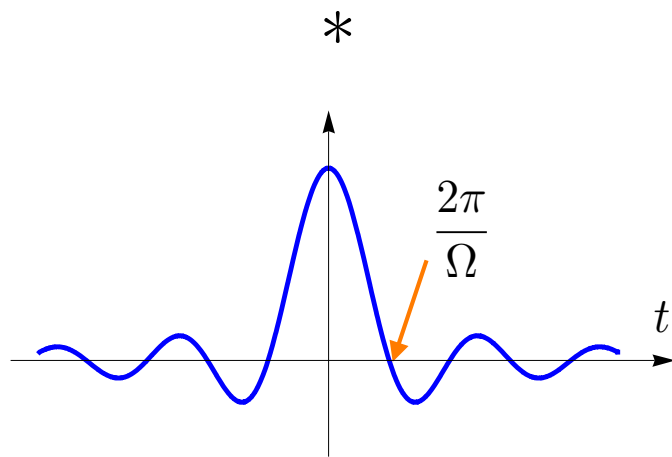
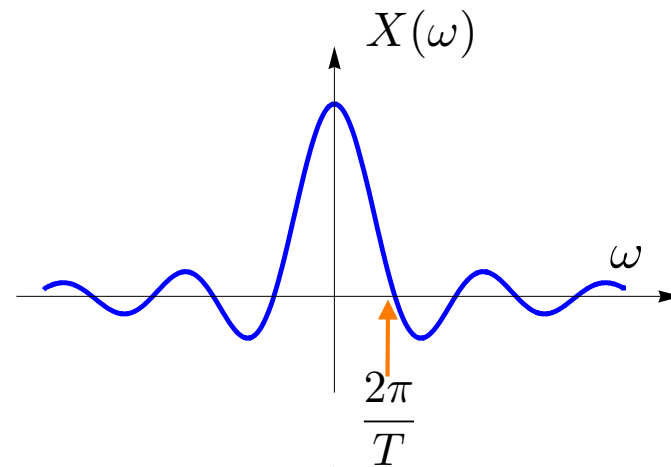
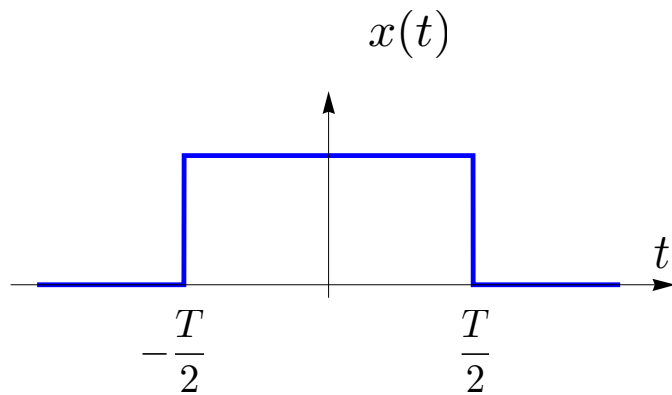
$$\frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |e(t)|^2 dt = \sum_{|n| \leq N} |c_n - c'_n|^2 + \sum_{|n| > N} |c_n|^2 \quad (\text{Parseval})$$

L'erreur quadratique moyenne est donc minimale pour une fenêtre rectangulaire. Par contre, l'écart maximal reste important même si l'on élargit la fenêtre (phénomène de Gibbs).

L'écart maximal se réduit lorsqu'on utilise une fenêtre triangulaire (de Féjer).

NB. La forme de $x'_N(t)$ dépend plus du rapport $(\Omega/2)/(2\pi/T)$ (bande passante relative) que du nombre de termes dans la série: $N = (\Omega/2)/(2\pi/T_0)$

Limitation et pondération fréquentielle (filtrage)



Signal filtré:

$$y(t) = \left(x * \frac{\Omega}{2\pi} \operatorname{sinc} \left(\frac{\cdot}{2\pi/\Omega} \right) \right) (t) \longleftrightarrow X(\omega) \times \operatorname{rect} \left(\frac{\omega}{\Omega} \right)$$

Fonctions “fenêtre”

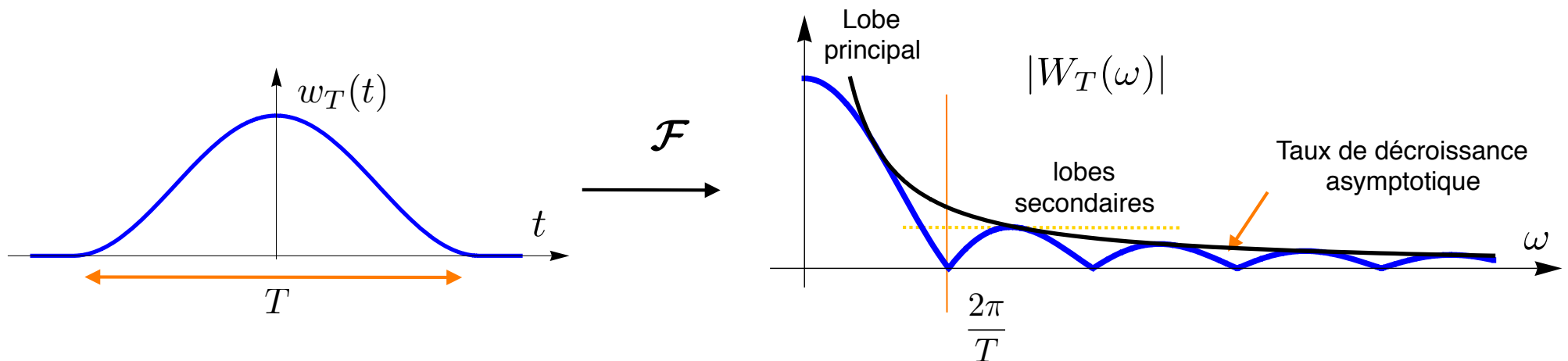
■ Applications

■ Troncation temporelle

$$x_T(t) = w_T(t) \times x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X_T(\omega) = \frac{1}{2\pi} (W_T(\omega) * X)(\omega)$$

■ Troncation fréquentielle = filtrage

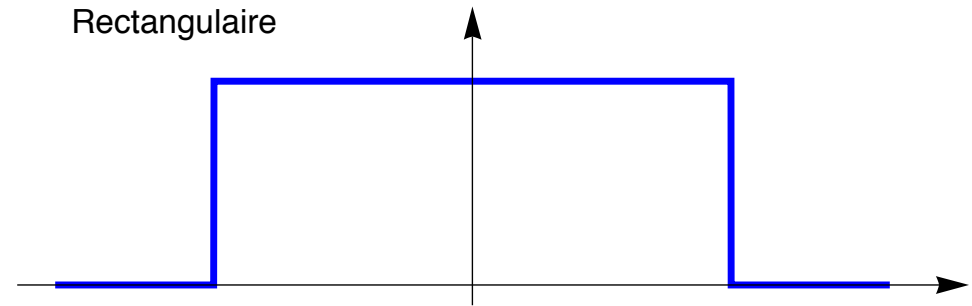
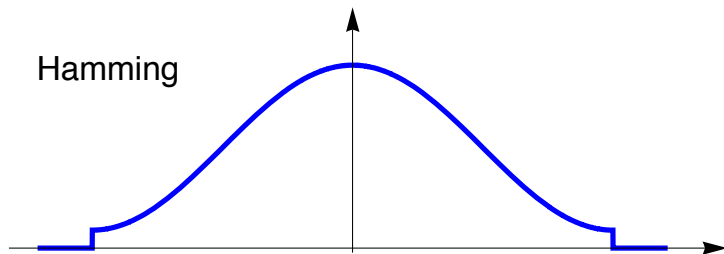
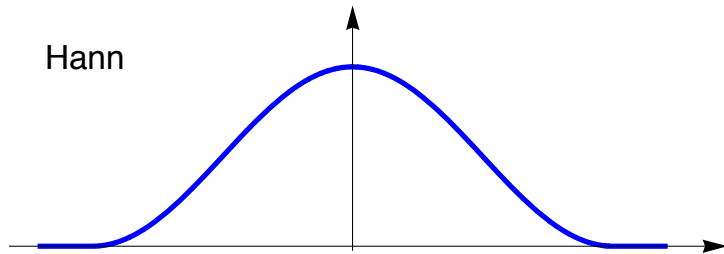
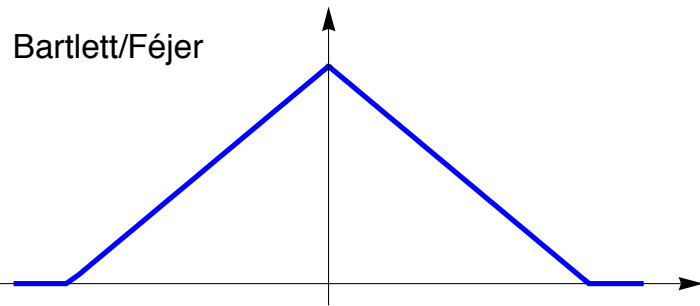
$$Y_\Omega(\omega) = w_\Omega(\omega) \times X(\omega) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} y_\Omega(t) = (W_\Omega * x)(t)$$



■ Caractéristiques principales

- Largeur du lobe principal; le plus étroit possible pour T donné
- Hauteur relative du lobe secondaire
- Taux de décroissance; d'autant plus rapide que la fenêtre est continue

Quelques fonctions “fenêtre”



Fenêtre de longueur T	Largeur du lobe principal	Hauteur du pic secondaire	Ordre de décroissance
Rectangulaire: $\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$	$\frac{4\pi}{T}$	-13.3 dB	$O(\omega^{-1})$
Bartlett/Féjer: $\text{tri}\left(\frac{2t}{T}\right)$	$\frac{8\pi}{T}$	-26.5 dB	$O(\omega^{-2})$
Hann: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$	$\frac{8\pi}{T}$	-31.5 dB	$O(\omega^{-3})$
Hamming: $0.54 + 0.46 \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$	$\frac{8\pi}{T}$	-42.7 dB	$O(\omega^{-1})$

4.9 LOCALISATION TEMPS-FREQUENCE

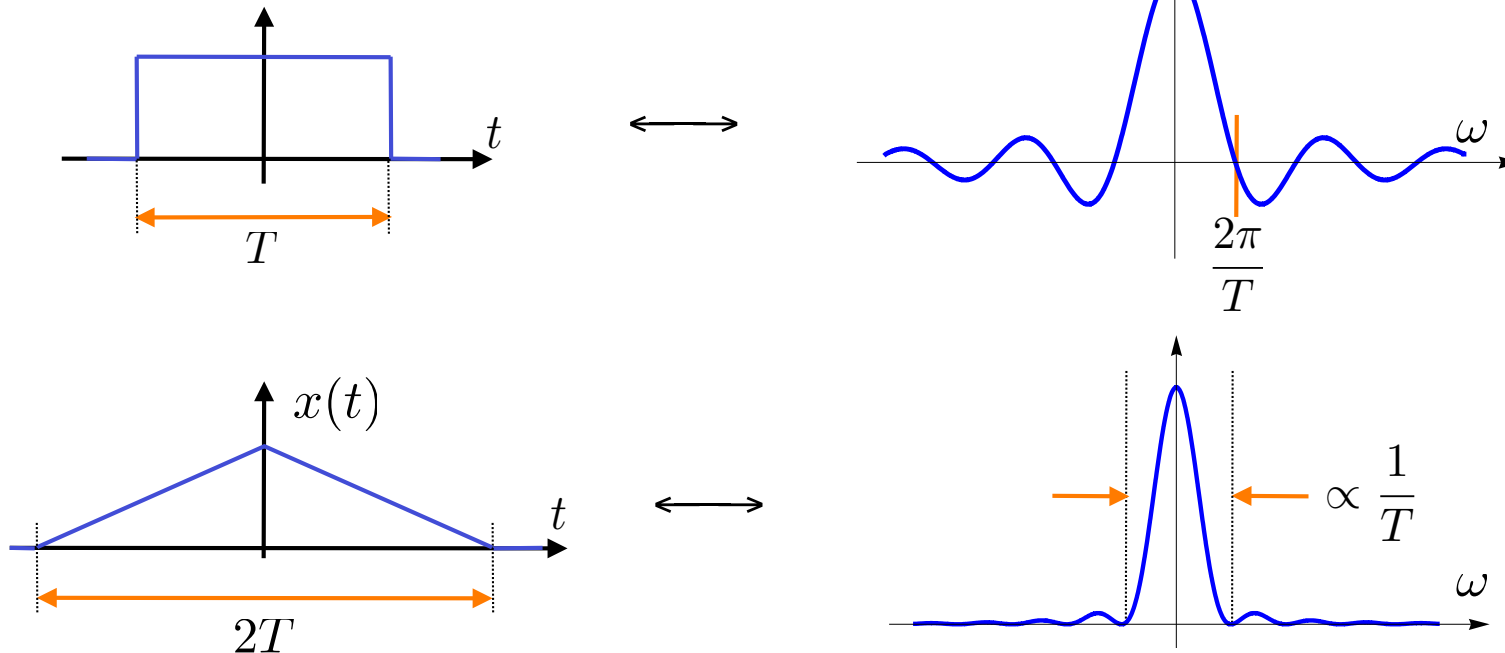
- Relation d'échelle: exemples
- Relation d'incertitude L_1
- Relation d'incertitude L_2 (Heisenberg)

Relation d'échelle: exemples

■ Dilatation temporelle

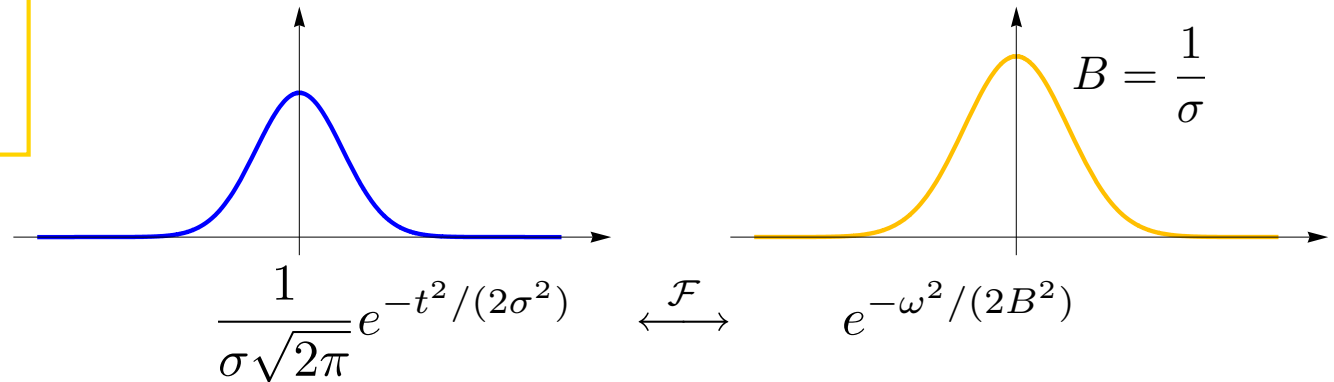
$$x\left(\frac{t}{T}\right) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} |T| X(T\omega)$$

■ Signaux rectangulaires et triangulaires



Impulsion Gaussienne

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-\omega^2/2}$$



Preuve:

$$G(\omega) = e^{-\omega^2/2} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$\frac{d}{d\omega} G(\omega) = -\omega e^{-\omega^2/2} = j(j\omega) G(\omega) \xleftrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} j \frac{d}{dt} g(t)$$

$$\frac{d}{d\omega} G(\omega) = -j \int_{-\infty}^{+\infty} (tg(t)) e^{-j\omega t} dt \xleftrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} -jt g(t)$$

Donc, $g(t)$ satisfait l'équation différentielle: $\frac{d}{dt} g(t) = -tg(t)$

Solution générale: $g(t) = K e^{-t^2/2}$

Normalisation: $G(0) = 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt \Rightarrow K = (2\pi)^{-1/2}$

Relation d'incertitude L_1

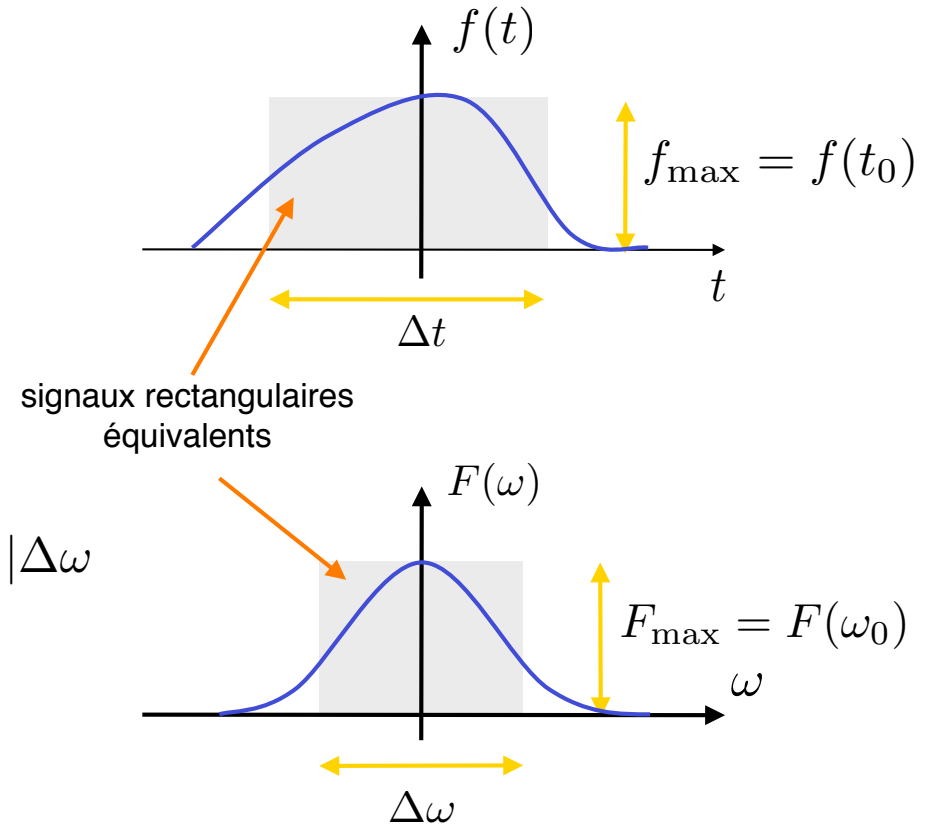
■ Durée et largeur de bande équivalentes

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt = \|f\|_{L_1} = f_{\max} \Delta t = |f(t_0)| \Delta t$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)| d\omega = \|F\|_{L_1} = F_{\max} \Delta\omega = |F(\omega_0)| \Delta\omega$$

■ Relation d'incertitude

$$\Delta t \cdot \Delta\omega \geq 2\pi$$



Relation d'incertitude L_1 (suite)

Preuve

$$|F(\omega_0)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega_0 t} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt = |f(t_0)| \cdot \Delta t$$

$$|f(t_0)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t_0} d\omega \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)| d\omega = \frac{1}{2\pi} |F(\omega_0)| \cdot \Delta\omega$$

$$\Rightarrow \Delta t \cdot \Delta\omega \geq \frac{|F(\omega_0)|}{|f(t_0)|} \frac{2\pi |f(t_0)|}{|F(\omega_0)|} = 2\pi$$

L'égalité est atteinte lorsque $t_0 = \omega_0 = 0$, $f(t) \geq 0$ et $F(\omega) \geq 0$.

Dans ce cas:

$$\begin{cases} F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \|f\|_{L_1} = f(0) \cdot \Delta t \\ f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \|F\|_{L_1} = \frac{1}{2\pi} F(0) \cdot \Delta\omega \end{cases} \Rightarrow \Delta t \cdot \Delta\omega = 2\pi$$

Exemples: impulsion gaussienne, B-splines de degrés impairs

Mesures de dispersion au sens L_2

■ Dispersion temporelle

$$\Delta_t = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (t - t_0)^2 p(t) dt \right)^{1/2}$$
$$t_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} t p(t) dt$$

Pseudo-densité de probabilité:

$$p(t) = \frac{|x(t)|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt} \geq 0$$

avec $\int_{-\infty}^{+\infty} p(t) dt = 1$

■ Dispersion fréquentielle

$$\Delta_\omega = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (\omega - \omega_0)^2 P(\omega) d\omega \right)^{1/2}$$
$$\omega_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega P(\omega) d\omega$$

Pseudo-densité de probabilité:

$$P(\omega) = \frac{|X(\omega)|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega} \geq 0$$

avec $\int_{-\infty}^{+\infty} P(\omega) d\omega = 1$

Relation d'incertitude L_2 (Heisenberg)

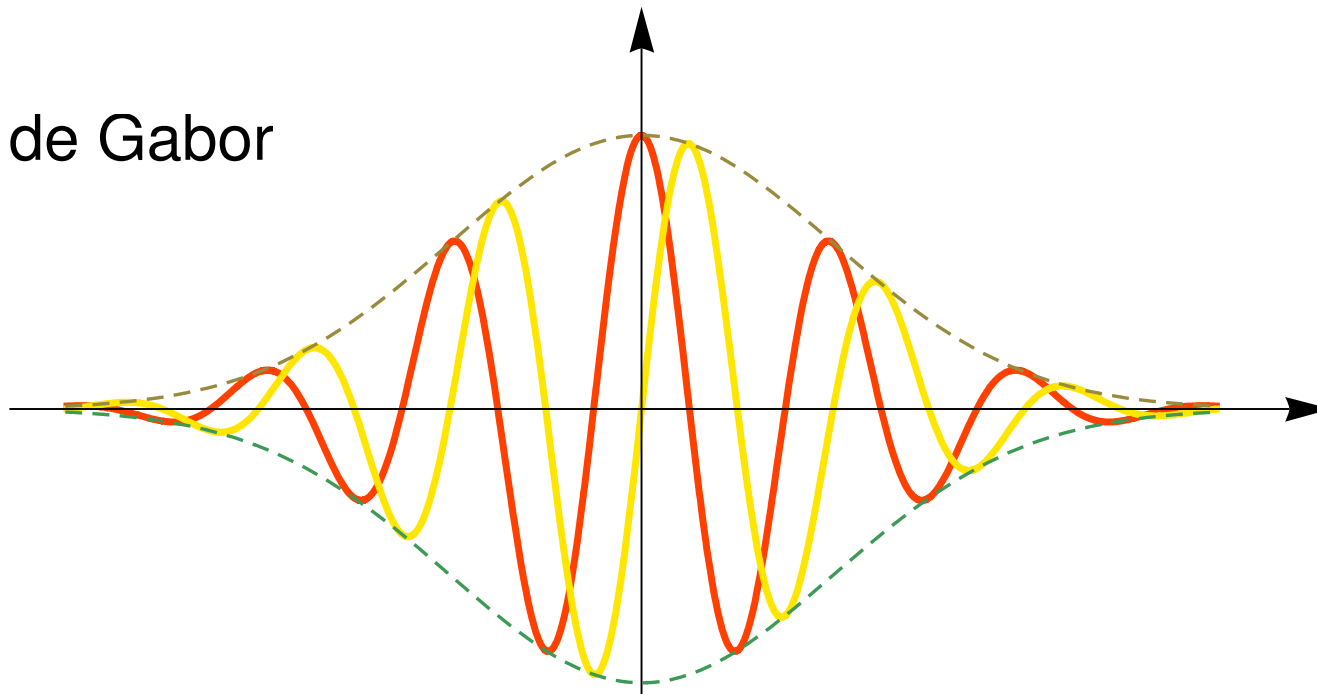
■ Relation d'incertitude d'Heisenberg

$$\Delta_t \cdot \Delta_\omega \geq \frac{1}{2}$$

avec égalité si et seulement si $x(t) = a e^{-b(t-t_0)^2/2 + j\omega_0 t}$

$t_0, \omega_0 \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^+, a \in \mathbb{C}$

■ Fonctions de Gabor



Preuve du principe d'incertitude

Considérons le signal recentré et normalisé

$$f(t) = x(t + t_0)e^{-j\omega_0 t} / \|x(t)\| \quad \text{t.q.} \quad \|f(t)\| = 1$$

$$\Delta_t^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |tf(t)|^2 dt = \|u\|^2 \quad \Delta_\omega^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |j\omega F(\omega)|^2 d\omega \stackrel{\text{Parseval}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{d}{dt} f(t) \right|^2 dt = \|v\|^2$$

Hypothèse: $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} |f(t)| \sqrt{t} = 0$

$$\Delta_t \Delta_\omega = \|u\| \|v\| \stackrel{\text{Cauchy-Schwarz}}{\geq} |\langle u, v \rangle| \geq \left| \operatorname{Re} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{tf(t)}_u \underbrace{\frac{d}{dt} f^*(t)}_{v^*} dt \right) \right| = \left| \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} t \frac{d}{dt} |f(t)|^2 dt \right| = \frac{1}{2}$$

En effet: $\frac{d}{dt} |f(t)|^2 = \dot{f}(t)f^*(t) + f(t)\dot{f}^*(t) = 2\operatorname{Re} \left(f(t)\dot{f}^*(t) \right)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t \frac{d}{dt} |f(t)|^2 dt = \underbrace{t |f(t)|^2 \Big|_{t=-\infty}^{+\infty}}_{=0} - \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt}_{=1} = -1$$

Egalité stricte de Cauchy-Schwarz:

$$\|u\| \|v\| = |\langle u, v \rangle| \Leftrightarrow \frac{d}{dt} f(t) = b(t f(t)) \Rightarrow f(t) = a e^{-b t^2 / 2}$$