ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Signaux et Systèmes

Chapitre 3

Représentation des signaux par séries de Fourier

Novembre 2011

TABLE DES MATIERES

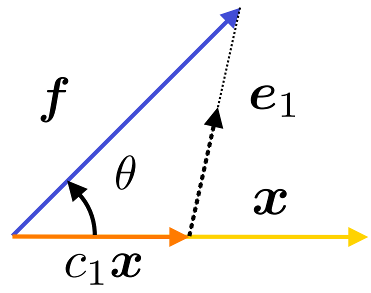
3.1 VECTEURS ET SIGNAUX

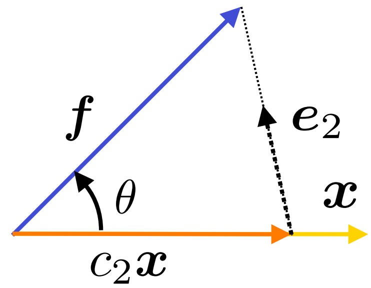
- Composantes d'un vecteur
- Composantes d'un signal
- Produit scalaire

Composantes d'un vecteur

Géométrie vectorielle: notions de base

- Vecteur: $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n) \in \mathbb{R}^n$
- Produit scalaire: $\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{x} \rangle = f_1 x_1 + f_2 x_2 + \cdots + f_n x_n$
- Norme: $\|\boldsymbol{f}\| = \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{f} \rangle^{1/2} = \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + \cdots + f_n^2}$
- Angle entre deux vecteurs: $\cos\theta = \dfrac{\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{x} \rangle}{\|\boldsymbol{f}\| \cdot \|\boldsymbol{x}\|}$

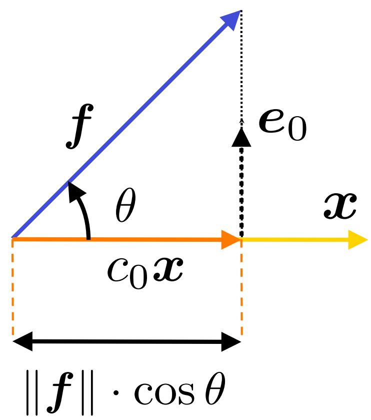




Meilleure approximation de $\boldsymbol{f}$ par $\boldsymbol{x}$

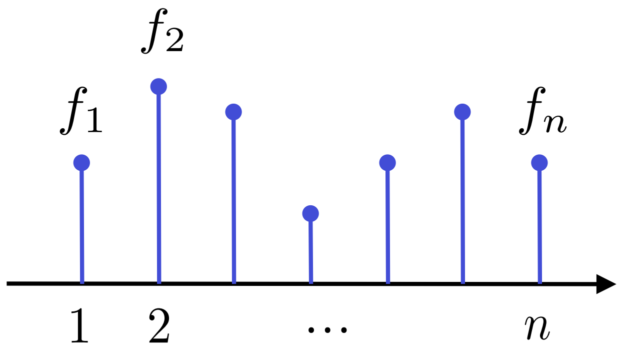
- Approximation linéaire: $\boldsymbol{f} \approx c\boldsymbol{x}$
- Calcul de l'erreur: $\|\boldsymbol{e}\|^2 = \|\boldsymbol{f} - c\boldsymbol{x}\|^2 = \|\boldsymbol{f}\|^2 + c^2\|\boldsymbol{x}\|^2 - 2c\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{x} \rangle$
- Minimisation: **projection orthogonale**!

$$\boldsymbol{e}_0 \perp \boldsymbol{x} \quad \Leftrightarrow \quad \langle \boldsymbol{f} - c_0\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad c_0 = \frac{\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{x} \rangle}{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle}$$



Norme et énergie d'un signal

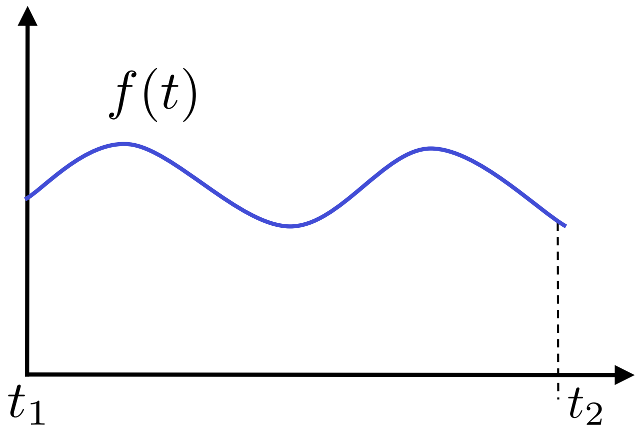
- Vecteur comme un signal



$$\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n) \in \mathbb{R}^n$$

Norme au carré: $\|\boldsymbol{f}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |f_i|^2$ (= énergie)

- Signal comme un vecteur



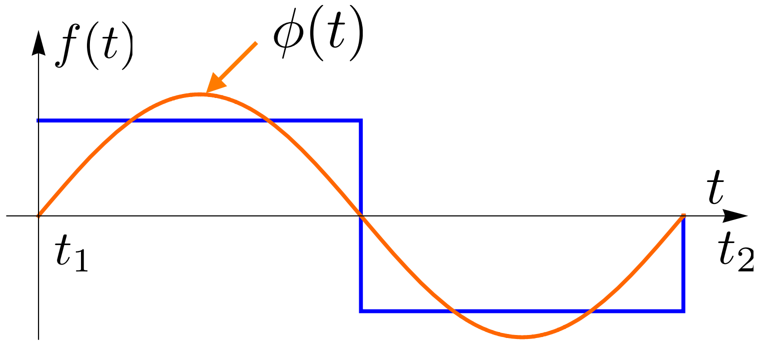
Energie du signal: $\|f\|_{L_2}^2 = \int_{t_1}^{t_2} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t$

Espace vectoriel de signaux:

$$L_2([t_1, t_2]) = \left\{ f(t) : t \in [t_1, t_2] \;\wedge\; \int_{t_1}^{t_2} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t < +\infty \right\}$$

Composantes d'un signal

- Signal comme un point dans un espace vectoriel (espace de Hilbert)
  - Signal: $f \in L_2([t_1, t_2])$
  - Energie du signal: $\|f\|_{L_2}^2 = \int_{t_1}^{t_2} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t$



- Meilleure approximation de $f(t)$ par $\phi(t)$
  - Approximation linéaire: $f(t) \simeq c\phi(t)$
  - Erreur quadratique:

$$\|e\|_{L_2}^2 = \int_{t_1}^{t_2} \left(f(t) - c\phi(t)\right)^2 \mathrm{d}t = \|f\|_{L_2}^2 + c^2 \|\phi\|_{L_2}^2 - 2c \int_{t_1}^{t_2} f(t)\phi(t) \, \mathrm{d}t$$

  - Minimisation: $\dfrac{\partial \|e\|_{L_2}^2}{\partial c} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{c_0 = \dfrac{\int_{t_1}^{t_2} f(t)\phi(t) \, \mathrm{d}t}{\|\phi(t)\|_{L_2}^2}} = \dfrac{\langle f, \phi \rangle}{\langle \phi, \phi \rangle} \ ?$

Produit scalaire

- Concepts mathématiques sous-jacents
  - Espace vectoriel des signaux: $\forall f, g \in \mathcal{H},\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \alpha f + \beta g \in \mathcal{H}$
  - Mesure de norme ou d'énergie: $\|f\|^2$
  - Forme bilinéaire: $\forall c \in \mathbb{R},\ \langle f, c\phi\rangle = c\langle f, \phi\rangle$ t.q. $\|f\|^2 = \langle f, f\rangle$

- Produit scalaire (réel)

Soit un espace vectoriel $\mathcal{H}$ réel. On définit un produit scalaire associant à tout couple $f, g \in \mathcal{H}$ un réel noté $\langle f, g\rangle$ qui a les propriétés suivantes $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall f, g, h \in \mathcal{H}$:

1. **Linéarité:** $\langle \alpha f, g\rangle = \alpha\langle f, g\rangle$ et $\langle f + g, h\rangle = \langle f, h\rangle + \langle g, h\rangle$
2. **Symétrie:** $\langle f, g\rangle = \langle g, f\rangle$
3. **Positivité:** $\|f\|^2 = \langle f, f\rangle > 0,\ \forall f \neq 0$

- Exemples
  - $\mathcal{H} = \mathbb{R}^n \ :\ \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}\rangle = f_1 g_1 + f_2 g_2 + \cdots + f_n g_n$
  - $\mathcal{H} = L_2([0, T]) \ :\ \langle f, g\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f(t) g(t)\, \mathrm{d}t$

Produit scalaire (suite)

- **Produit scalaire hermitien**

Soit un espace vectoriel $\mathcal{H}$ complexe. On définit un produit scalaire associant à tout couple $f, g \in \mathcal{H}$ un complexe noté $\langle f, g \rangle$ qui a les propriétés suivantes $\forall \alpha \in \mathbb{C},\ \forall f, g, h \in \mathcal{H}$:

1. **Linéarité:** $\langle \alpha f, g \rangle = \alpha \langle f, g \rangle$ et $\langle f + g, h \rangle = \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle$
2. **Symétrie hermitienne:** $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle^*$
3. **Positivité:** $\|f\|^2 = \langle f, f \rangle > 0,\ \forall f \neq 0$

Généralisation du cas réel (symétrie $\longrightarrow$ symétrie hermitienne)

Implication: $1 + 2 \quad \Rightarrow \quad \langle f, \alpha g \rangle = \alpha^* \langle f, g \rangle$

- **Exemples**
  - $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n \ :\ \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \rangle = f_1 g_1^* + f_2 g_2^* + \cdots + f_n g_n^*$
  - $\mathcal{H} = L_2([0, T])$ complexe: $\langle f, g \rangle = \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_0^T f(t) g^*(t)\, \mathrm{d}t$

3.2 COMPARAISON DE SIGNAUX

- Corrélation et similarité
- Corrélation normalisée
- Fonction d'intercorrélation: définition
- Intercorrélation et convolution
- Application à la détection

Corrélation et similarité

- Comparaison de signaux par mesure de distance

$$d(f,g) = \|f-g\| = \left(\int_{t_1}^{t_2} \big(f(t)-g(t)\big)^2 \,\mathrm{d}t\right)^{1/2}$$

$$d(f,g) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f = g \qquad \text{p.p.}$$

- Mesure de similarité et corrélation

Hypothèse: il existe un produit scalaire associé t.q. $\|f\|^2 = \langle f, f\rangle$

$$\|f-g\|^2 = \langle f-g, f-g\rangle = \|f\|^2 + \|g\|^2 - 2\langle f,g\rangle$$

Donc si $\|f\|^2 = \mathrm{cste}$ et $\|g\|^2 = \mathrm{cste}$, alors

$\|f-g\|$ minimum $\quad \Leftrightarrow \quad$ $\langle f,g\rangle$ maximum

- Fonction d'intercorrélation

Degré de similarité entre deux signaux en fonction de leur décalage relatif

Corrélation normalisée

But: Définir une mesure de similarité qui ne dépend pas de l'amplitude des signaux

- Corrélation normalisée (ou coefficient de corrélation)

$$\rho(f,g) = \frac{\langle f, g\rangle}{\| f\| \cdot \| g\|}$$

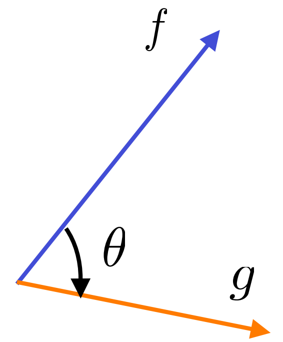
Valable pour tout produit scalaire

- Inégalité de Cauchy-Schwarz

Quel que soit le produit scalaire, on a l'inégalité suivante

$$|\langle f, g\rangle| \leqslant \| f\| \cdot \| g\|$$

avec égalité si et seulement si $f = \alpha \cdot g$ avec α scalaire.



$$\cos\theta = \frac{\langle f, g\rangle}{\|f\| \cdot \|g\|}$$

- Implications pour la corrélation normalisée
  - $-1 \leqslant \rho(f,g) \leqslant 1$
  - $\rho(f,g) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad f = \alpha \cdot g$ p.p.
  - $\rho(f,g)$ peut être assimilé au $\cos\theta$ entre deux vecteurs ou signaux

Fonction d'intercorrélation: définition

- Produit scalaire pour signaux complexes à énergie finie

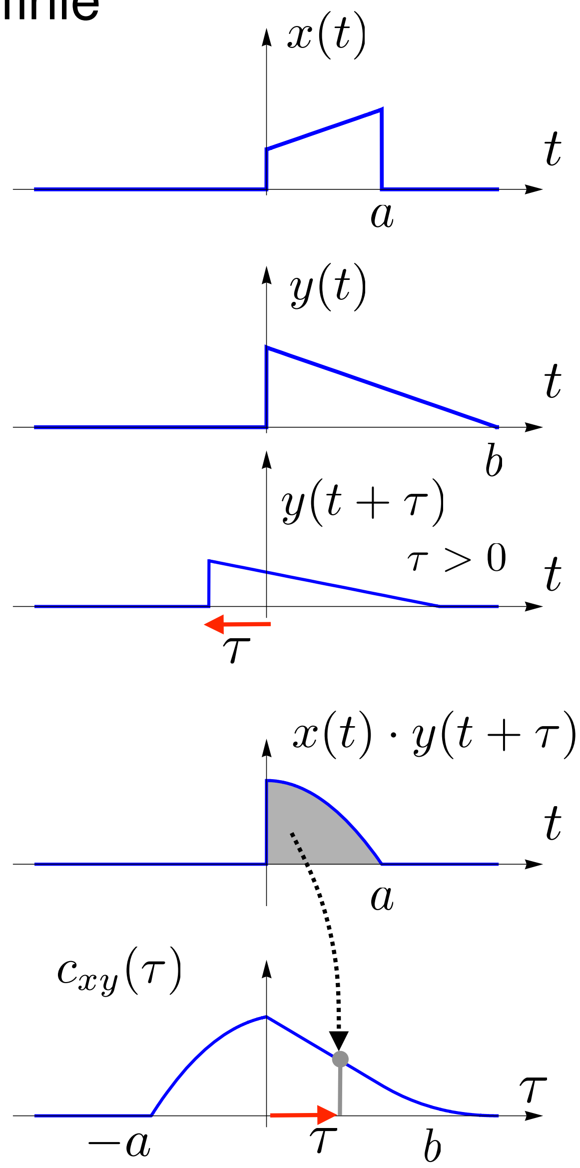
$$\langle x, y \rangle_{L_2} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y^*(t)\, \mathrm{d}t$$

$x(t),\ y(t)$ signaux complexes ou réels

$$\boxed{\begin{aligned} c_{xy}(\tau) &= \langle x(\cdot), y(\cdot + \tau) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y^*(t+\tau)\, \mathrm{d}t \\ c_{yx}(\tau) &= \langle y(\cdot), x(\cdot + \tau) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) \cdot x^*(t+\tau)\, \mathrm{d}t \end{aligned}}$$

$c_{xy}(\tau)$: intercorrélation entre $x(t)$ et $y(t+\tau)$

$c_{yx}(\tau)$: intercorrélation entre $y(t)$ et $x(t+\tau)$



Corrélation et convolution

Intercorrélation

$$c_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y^*(t+\tau)\,\mathrm{d}t$$

Convolution

$$(g * h)(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau - u) \cdot h(u)\,\mathrm{d}u$$

$$c_{xy}(\tau) = \langle x, y(\cdot + \tau)\rangle \overset{t+\tau=u}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x(u-\tau) \cdot y^*(u)\,\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{\vee}(\tau - u) \cdot y^*(u)\,\mathrm{d}u$$

Operateur de renversement: $x^{\vee}(\tau) = x(-\tau)$

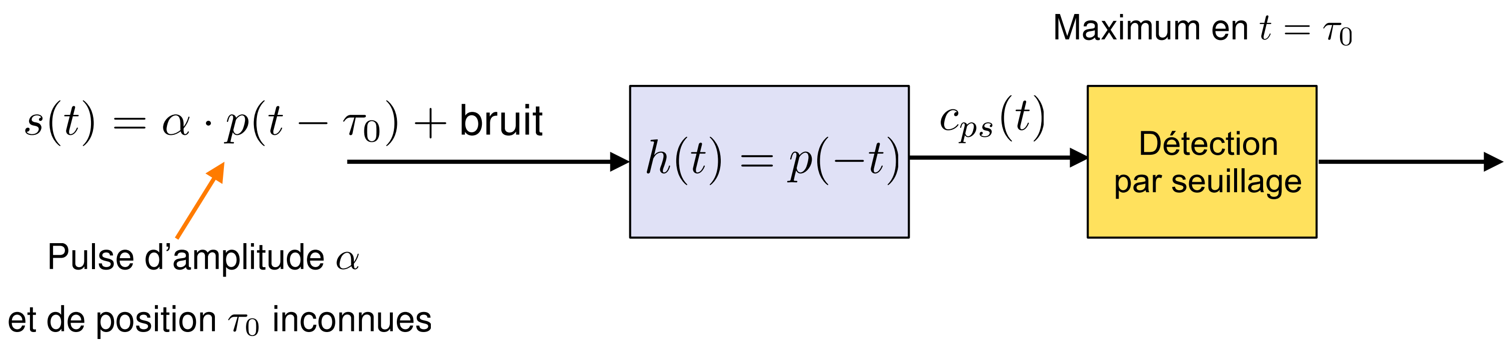
Donc: $\boxed{c_{xy}(\tau) = \left(x^{\vee} * y^*\right)(\tau)}$

Suit: $c_{yx}(\tau) = \left(y^{\vee} * x^*\right)(\tau) = \left(x^* * y^{\vee}\right)(\tau) = c_{xy}^*(-\tau)$

$$\boxed{c_{yx}(\tau) = c_{xy}^*(-\tau)}$$

Si $x(t),\ y(t)$ réels: $\boxed{c_{yx}(\tau) = c_{xy}(-\tau)}$

Application: détection de signaux



- Structure du détecteur
  Corrélateur = filtre analogique (ou digital)
- Détecteur optimal en présence de bruit blanc
  Filtre adapté
- Applications:
  - Radar
  - Sonar, Ultrasons
  - Communications

Demo sonar

3.3 APPROXIMATION DE SIGNAUX

- Changement de base dans le plan
- Espaces de Hilbert
- Système orthonormal de fonctions
- Approximation aux moindres carrés

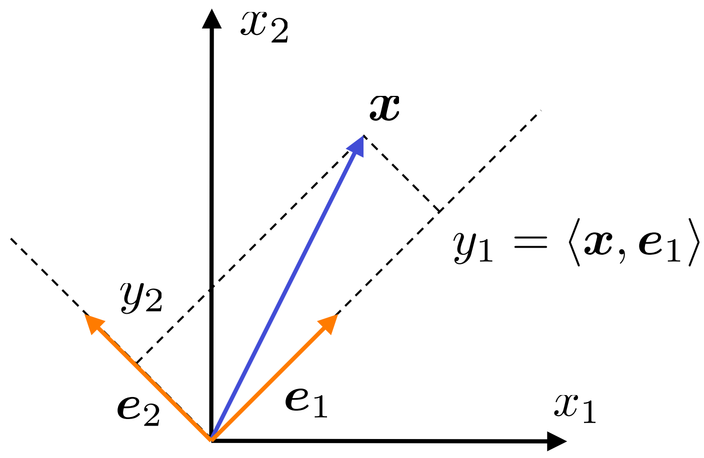
Changement de base dans le plan

Soit $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ un point (vecteur) dans le plan $\mathbb{R}^2$.

Soit $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$ t.q.

$$\langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j \rangle = \delta_{i-j} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Comment représente-t-on $\boldsymbol{x}$ dans la base $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$?



- Changement de base: $(x_1, x_2) \longrightarrow (y_1, y_2)$

$$\boldsymbol{x} = y_1 \boldsymbol{e}_1 + y_2 \boldsymbol{e}_2 \quad \text{avec} \quad y_i = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_i \rangle$$

ou, sous forme plus concise, $\boldsymbol{x} = \sum_i \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_i \rangle \boldsymbol{e}_i$

Espace de Hilbert

Un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est un espace vectoriel, typiquement de dimension infinie, muni d'un produit scalaire $\langle x, y \rangle$.

- Exemples
  - Le plan $\mathbb{R}^2$ avec $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$
  - $L_2([0,T])$: l'espace des signaux à durée et énergie finies avec $\langle x, y \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) y^*(t)\, \mathrm{d}t$
  - $L_2(\mathbb{R})$: l'espace des signaux à énergie finie avec $\langle x, y \rangle_{L_2} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y^*(t)\, \mathrm{d}t$

Le produit scalaire spécifie

1) la notion d'orthogonalité: $x \perp y \quad \Leftrightarrow \quad \langle x, y \rangle = 0$

2) la notion de similarité par l'intermédiaire de la norme

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}: \ \|x - y\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y$$

Système orthonormal de fonctions

- Espace de Hilbert: $L_2([0,T])$

  Produit scalaire associé: $\langle x, y\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)y^*(t)\,\mathrm{d}t$

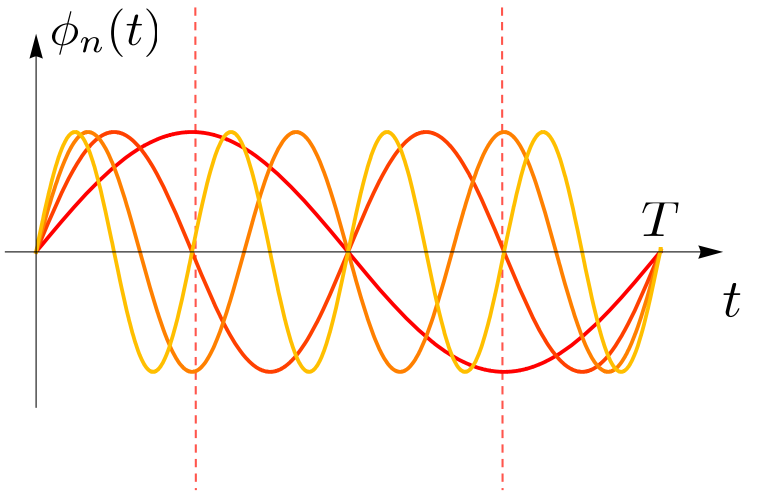
- Définition

  Le système de fonctions $\phi_1(t), \dots, \phi_N(t)$ est orthonormal si et seulement si

  $$\langle \phi_m, \phi_n\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \phi_m(t)\phi_n^*(t)\,\mathrm{d}t = \delta_{m-n} \qquad \text{(Delta de Kronecker)}$$

- Exemple

  Les fonctions sinusoïdales: $\phi_n(t) = \sqrt{2}\sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)$



  En effet,

  $\langle \phi_m(t), \phi_n(t)\rangle = 0,\ m \neq n$ (argument de symétrie)

  $$\|\phi_n\|^2 = \frac{1}{T}\int_0^T |\phi_n(t)|^2\,\mathrm{d}t = 2\int_0^1 \sin^2(2\pi n\tau)\,\mathrm{d}\tau = 1$$

Approximation aux moindres carrés

Soit $\phi_1, \ldots, \phi_N$ un système orthonormal de fonctions dans $\mathcal{H}$

- Questions
  - Comment approche-t-on un élément $x \in \mathcal{H}$ à l'aide des ϕ_n?
  - Quelle est l'erreur d'approximation?

- Théorème d'approximation orthogonale

La meilleure approximation de $x \in \mathcal{H}$ par une combinaison linéaire de fonctions *orthonormales* $\phi_1, \ldots, \phi_N \in \mathcal{H}$ est

$$x_N = \sum_{n=1}^{N} c_n \phi_n \quad \text{avec} \quad c_n = \langle x, \phi_n \rangle$$

L'erreur (minimale) correspondante est

$$\|x - x_N\|^2 = \|x\|^2 - \|x_N\|^2 \qquad \text{avec} \qquad \|x_N\|^2 = \sum_{n=1}^{N} |c_n|^2$$

Preuve du théorème d'approximation orthogonale

Système orthonormal et énergie d'un signal: $y = \sum_{n=1}^{N} a_n \phi_n \quad \Rightarrow \quad \|y\|^2 = \sum_{n=1}^{N} |a_n|^2$

En effet: $\|y\|^2 = \left\langle \sum_{n=1}^{N} a_n \phi_n, \sum_{m=1}^{N} a_m \phi_m \right\rangle \underset{\text{linéarité}}{=} \sum_{n=1}^{N} a_n \sum_{m=1}^{N} a_m^* \langle \phi_n, \phi_m \rangle \underset{\text{orthogonalité}}{=} \sum_{n=1}^{N} |a_n|^2$

Soit $\quad y = \sum_{n=1}^{N} a_n \phi_n$ et $c_n = \langle x, \phi_n \rangle$ alors

$$\|x - y\|^2 = \langle x - y, x - y \rangle = \|x\|^2 - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle + \|y\|^2$$

$$\langle x, y \rangle = \left\langle x, \sum_{n=1}^{N} a_n \phi_n \right\rangle = \sum_{n=1}^{N} a_n^* \langle x, \phi_n \rangle = \sum_{n=1}^{N} a_n^* c_n \qquad = \langle y, x \rangle^*$$

Ce qui implique $\quad \|x - y\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{n=1}^{N} a_n^* c_n - \sum_{n=1}^{N} a_n c_n^* + \sum_{n=1}^{N} |a_n|^2$ **Demo JPEG**

$$= \|x\|^2 - \sum_{n=1}^{N} |c_n|^2 + \sum_{n=1}^{N} |a_n - c_n|^2$$ minimum pour $\quad a_n = c_n$

En effet: $|a_n - c_n|^2 = (a_n - c_n)(a_n^* - c_n^*) = |a_n|^2 + |c_n|^2 - a_n^* c_n - a_n c_n^*$

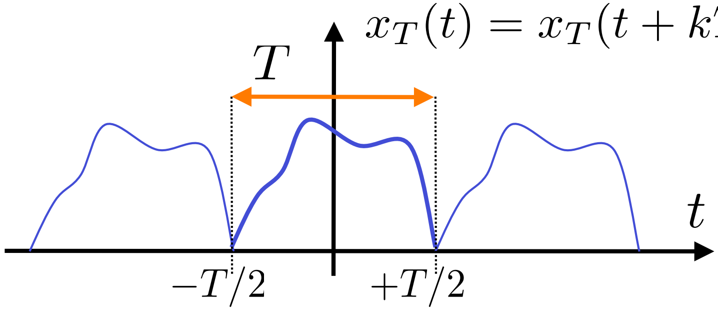
3.4 SERIES DE FOURIER TRIGONOMETRIQUES

- Séries de Fourier trigonométriques
- Spectre d'un signal périodique
- Interprétation Hilbertienne
- Orthogonalité des co-sinusoïdes
- Séries de Fourier généralisées

Séries de Fourier trigonométriques

- Signal réel périodique de période T

$$x_T(t) = x_T(t + kT), \quad k \in \mathbb{Z}$$



$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Pulsation fondamentale

- Décomposition en série de Fourier

$$x_T(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(2a_n \cos(n\omega_0 t) + 2b_n \sin(n\omega_0 t)\right)$$

- Calcul des coefficients de Fourier

$$a_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x_T(t)\cos(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t$$

$$b_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x_T(t)\sin(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t$$

Condition d'existence

$$\int_{-T/2}^{T/2} |x_T(t)|\,\mathrm{d}t < +\infty$$

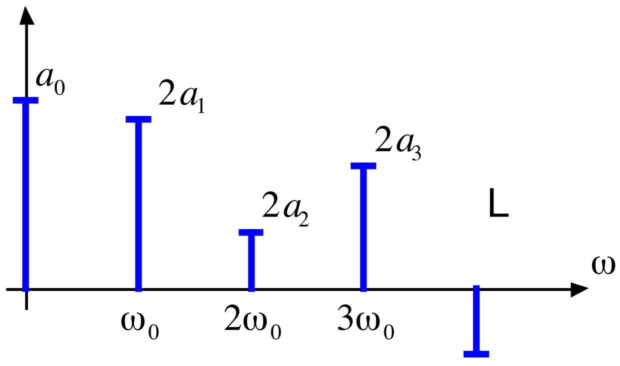
Spectre d'un signal périodique

- **Notion de spectre discret**

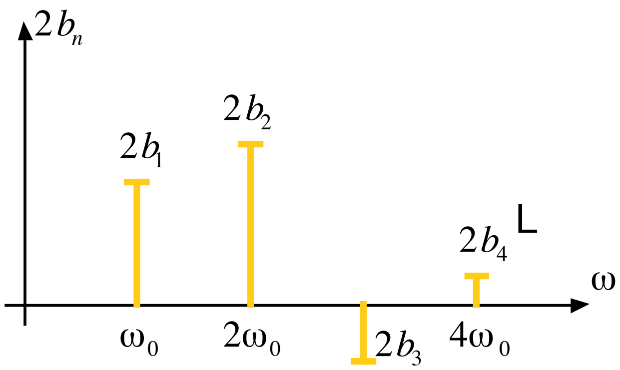
Un signal périodique est décrit de façon unique par ses coefficients de Fourier $a_0,\ 2a_n,\ 2b_n$

$\Rightarrow$ $x(t)$ possède un «spectre de lignes», un «spectre discret»

- **Représentation graphique des lignes spectrales**



composantes paires



composantes impaires

- **Décomposition en partie paire et impaire**

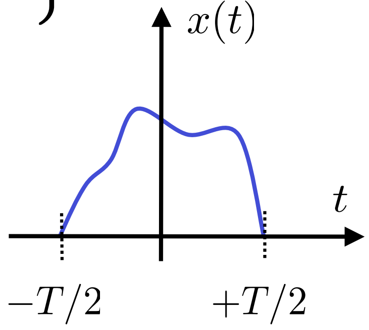
$$x(t) = x_p(t) + x_i(t)$$

$$x_p(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} 2a_n \underbrace{\cos(n\omega_0 t)}_{\text{f.p.}}; \qquad x_i(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2b_n \underbrace{\sin(n\omega_0 t)}_{\text{f.i.}}$$

Interprétation Hilbertienne

- Espace de Hilbert des signaux à durée et énergie finies

$$L_2\left(\left[-\tfrac{T}{2},\tfrac{T}{2}\right]\right)=\left\{x(t):\ x(t)=0,\ |t|>\frac{T}{2},\ \int_{-T/2}^{T/2}|x(t)|^2\,\mathrm{d}t<+\infty\right\}$$



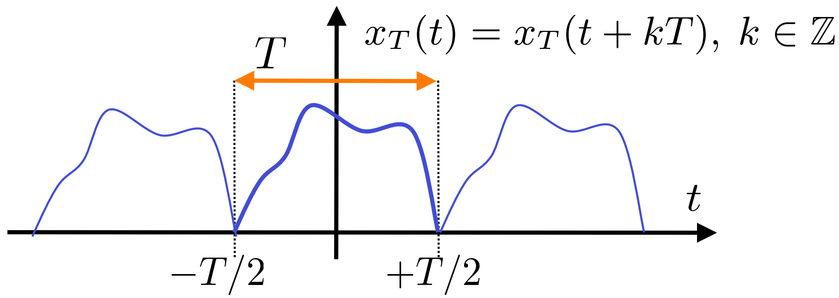
- Produit scalaire associé

$$\langle x,y\rangle=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)y(t)\,\mathrm{d}t$$

Théorème: $\left\{1,\sqrt{2}\cos(n\omega_0 t),\sqrt{2}\sin(n\omega_0 t)\right\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ est une base orthonormale pour $L_2\left(\left[-\tfrac{T}{2},\tfrac{T}{2}\right]\right)$

$\Rightarrow$ Tout signal $x(t)\in\mathcal{H}$ admet une décomposition unique en somme de fonctions (co-)sinusoïdales

- Extension naturelle aux signaux périodiques



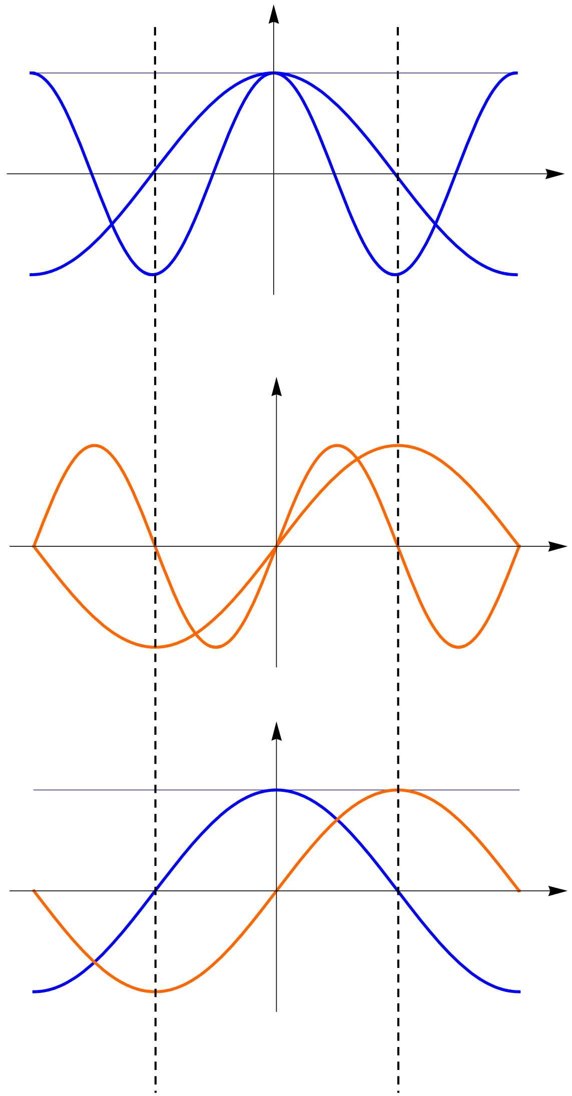
Orthogonalité des (co-)sinusoïdes

- Relations fondamentales d'orthogonalité

$$\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \cos\left(\frac{m2\pi t}{T}\right)\cos\left(\frac{n2\pi t}{T}\right)\mathrm{d}t = \delta_{m-n}$$

$$\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \sin\left(\frac{m2\pi t}{T}\right)\sin\left(\frac{n2\pi t}{T}\right)\mathrm{d}t = \delta_{m-n}$$

$$\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \cos\left(\frac{m2\pi t}{T}\right)\sin\left(\frac{n2\pi t}{T}\right)\mathrm{d}t = 0$$



Séries de Fourier généralisées

Soit $\{\phi_n(t)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ un ensemble de fonctions orthonormales formant une base de $\mathcal{H} = L_2\left(\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]\right)$

- Orthonormalité

$$\langle \phi_m, \phi_n \rangle = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} \phi_m(t)\phi_n(t)\,\mathrm{d}t = \delta_{m-n} = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

- Séries de Fourier généralisées

$$x(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\phi_n(t) \quad \text{avec} \quad a_n = \langle x, \phi_n \rangle = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} x(t)\phi_n(t)\,\mathrm{d}t$$

- Vérification

Soit $x(t) = \sum_n a_n\phi_n(t)$

linéarité du produit scalaire

$$a_m = \langle x, \phi_m \rangle = \left\langle \sum_n a_n\phi_n, \phi_m \right\rangle = \sum_n a_n \underbrace{\langle \phi_n, \phi_m \rangle}_{\delta_{n-m}} = a_m$$

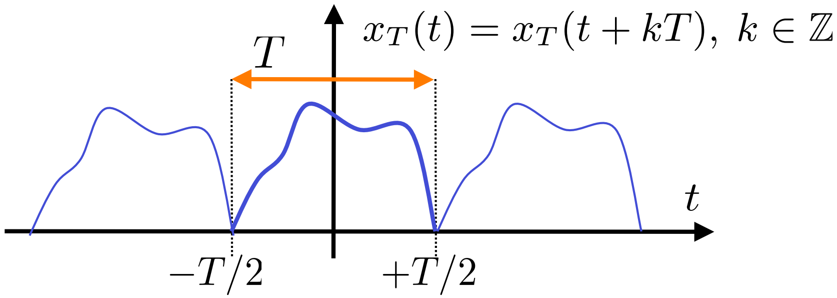
Encore faut-il s'assurer que la famille $\{\phi_n(t)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ est complète...

3.5 SERIES DE FOURIER COMPLEXES

- Séries de Fourier (cas complexe)
- Simplification du calcul réel
- Amplitude et phase
- Interprétation du spectre de Fourier
- Espace de Hilbert complexe

Série de Fourier (cas complexe)

- Signal complexe périodique de période T



$$\boxed{\omega_0 = \frac{2\pi}{T}}$$

Pulsation fondamentale

- Décomposition en série de Fourier complexe

$$x_T(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

- Calcul des coefficients de Fourier

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_T(t) e^{-jn\omega_0 t}\, \mathrm{d}t = \langle x_T, e^{jn\omega_0 t} \rangle$$

Condition d'existence (suffisante):

$$\int_{-T/2}^{T/2} |x_T(t)|\, \mathrm{d}t < +\infty \quad \Rightarrow \quad |c_n| < +\infty$$

Simplification du calcul réel

- Coefficient de Fourier d'un signal réel $x_T(t) = x_T^*(t)$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x_T(t)e^{-jn\omega_0 t}\,\mathrm{d}t \qquad c_{-n} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x_T(t)e^{jn\omega_0 t}\mathrm{d}t = c_n^*$$

Relations d'Euler:

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

- Lien avec la série de Fourier réelle

$c_0 = a_0$ (valeur moyenne)

$c_n = c_{-n}^* = a_n - jb_n$

En effet: $$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x_T(t)\left(\cos(n\omega_0 t) - j\sin(n\omega_0 t)\right)\,\mathrm{d}t$$

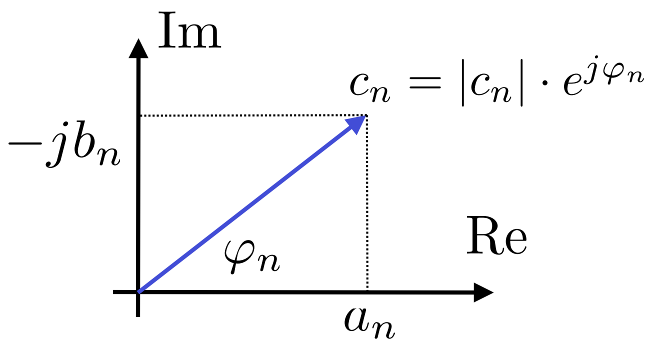
$$= \underbrace{\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x_T(t)\cos(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t}_{a_n = \frac{1}{2}(c_n + c_{-n})} - j\underbrace{\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x_T(t)\sin(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t}_{b_n = \frac{1}{2j}(-c_n + c_{-n})}$$

- Avantages de la représentation complexe
  - Simplification de l'écriture et des calculs (merci, Euler!)
  - Mise en évidence des symétries par l'introduction des fréquences négatives

Amplitude et phase

- Représentation polaire des coefficients de Fourier

$$c_n = a_n - jb_n = |c_n| \cdot e^{j\varphi_n}$$



Amplitude de c_n: $\quad |c_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$

Phase de c_n: $\quad \varphi_n = \arg(c_n) = \arctan\left(\frac{-b_n}{a_n}\right) + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

- Formule de reconstruction dans le cas réel

$$x_T(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{jn\omega_0 t} = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{+\infty} \overbrace{c_n^*}^{c_{-n}} e^{-jn\omega_0 t}$$

$$= c_0 + 2\,\mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}\right) = c_0 + 2\,\mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} |c_n| e^{j(n\omega_0 t + \varphi_n)}\right)$$

$$= c_0 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} |c_n| \cos(n\omega_0 t + \varphi_n)$$

Séries de Fourier: exemple

- Signal rectangulaire

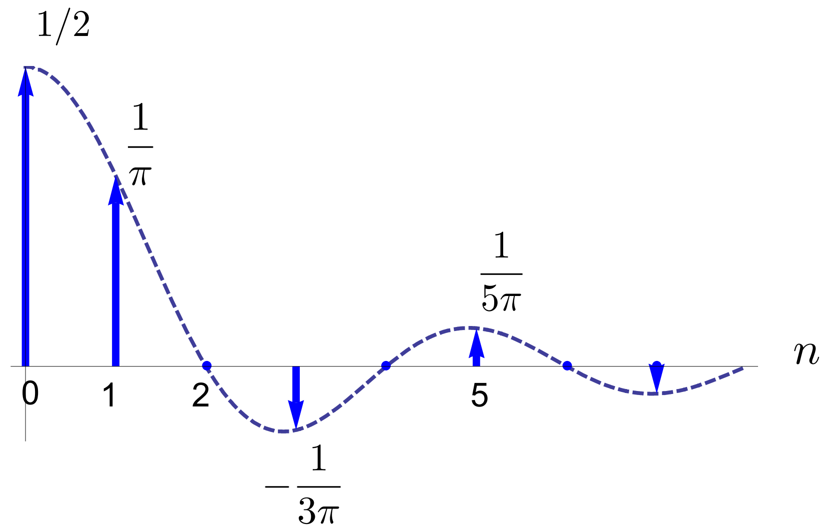
$$x_T(t) = \begin{cases} 1, & t \in (-T/4, T/4) \\ 0, & t \in [-T/2, -T/4) \cup [T/4, T/2) \end{cases}$$

- Coefficients de Fourier

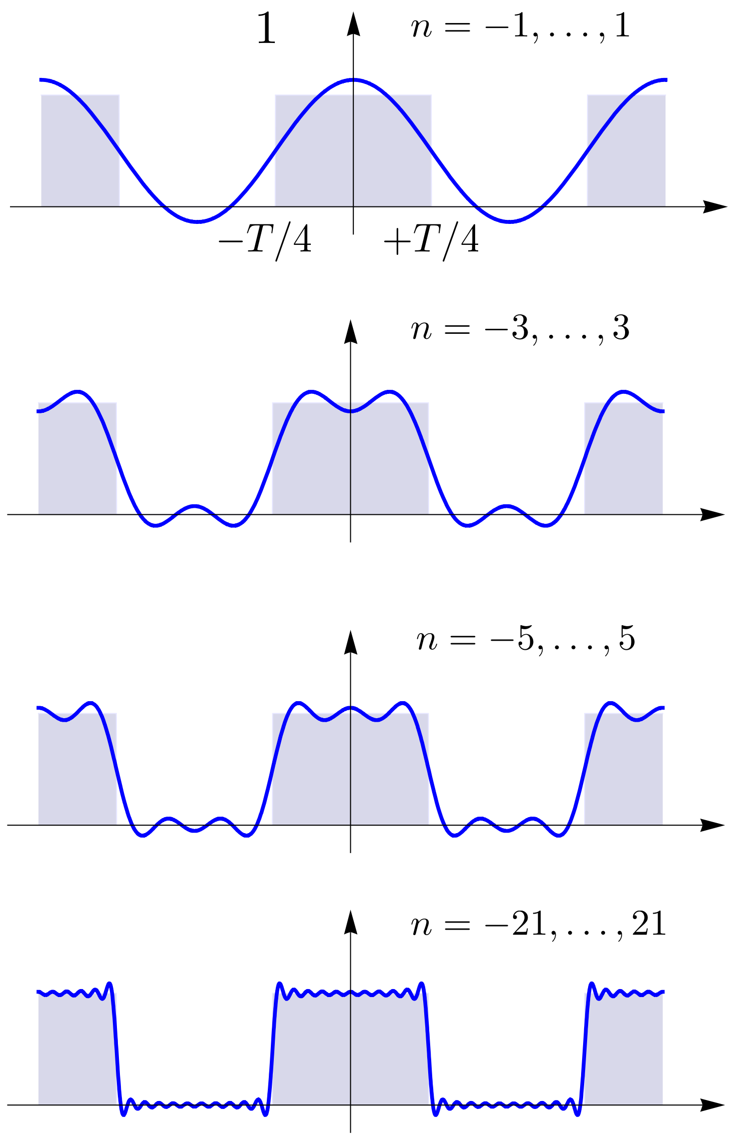
$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/4}^{+T/4} e^{-j2\pi nt/T}\,\mathrm{d}t = \left.\frac{e^{-j2\pi nt/T}}{-j2\pi n}\right|_{-T/4}^{+T/4} = \frac{\sin(\pi n/2)}{\pi n}$$

- Spectre de Fourier

$$c_n = |c_n| \cdot e^{j\varphi_n} \qquad \varphi_n = \begin{cases} \pi, & n = 3, 7, 11, \ldots \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$



- Séries de Fourier tronquées



Interprétation du spectre de Fourier

- Amplitude
  - Plus un signal est à variation lente, plus son spectre décroît de façon rapide.
  - Concept de largeur de bande: domaine spectral sur lequel les amplitudes spectrales $|c_n|$ ne sont pas négligeables. Typiquement, un signal à variation rapide a une largeur de bande supérieure à celle d'un signal à variation lente.
  - Degré de différentiabilité. La présence d'une discontinuité se traduit par une décroissance lente du spectre; e.g., $1/n$. On démontre que si les k premières dérivées d'un signal sont bornées, alors son spectre décroît au moins comme $1/n^k$.
- Phase
  - La phase a un rôle crucial pour reproduire la forme d'un signal. Pour générer un saut brusque, il est primordial que les fronts (zéros) des sinusoïdes soient bien en phase.
- Symétrie
  - Signal réel: $c_{-n} = c_n^*$
  - Signal réel pair: $c_n = \mathrm{Re}(c_n) = a_n \quad \Rightarrow$ spectre réel
  - Signal réel impair: $c_n = j\,\mathrm{Im}(c_n) = -jb_n \quad \Rightarrow$ spectre purement imaginaire

Espace de Hilbert complexe

- Espace des signaux complexes à durée et énergie finies

$$\mathcal{H}_T = \left\{ x(t) : \; x(t) \in \mathbb{C}, \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 \, \mathrm{d}t < +\infty \text{ et } \; x(t) = 0 \text{ pour } |t| > \frac{T}{2} \right\}$$

Produit scalaire associé: $\langle x, y \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) y^*(t) \, \mathrm{d}t$

Théorème: $\left\{e^{jn\omega_0 t}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base orthonormale de $\mathcal{H}_T$

$$\Rightarrow \quad \forall x(t) \in \mathcal{H}_T, \quad x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \underbrace{\left\langle x, e^{jn\omega_0 \cdot} \right\rangle}_{c_n} \cdot e^{jn\omega_0 t}$$

Orthogonalité des exponentielles complexes

$$\left\langle e^{jm\omega_0 \cdot}, e^{jn\omega_0 \cdot} \right\rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{jm\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t} \, \mathrm{d}t = \delta_{m-n}$$

Justification: $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{j2\pi(n-m)t} \, \mathrm{d}t = 0$ pour $m \neq n$ (compensation des valeurs positives et négatives)

3.6 BASES ORTHOGONALES: COMPLEMENTS

- Bases orthonormales
- Systèmes complets: de Bessel à Parseval
- Parseval et séries de Fourier
- Phénomène de Gibbs

Bases orthonormales

- **Structure mathématique requise**

  Espace de Hilbert $\mathcal{H}$ muni d'un produit scalaire $\langle x, y \rangle$ qui spécifie les notions de norme et d'orthogonalité

- **Bases orthonormales: propriétés fondamentales**

  1) les fonctions $\phi_n \in \mathcal{H}$ doivent être orthonormales; c.à d. $\langle \phi_m, \phi_n \rangle = \delta_{m-n}$

  2) le système $\{\phi_n\}$ doit être complet; c. à d.

  "tout élément de $\mathcal{H}$ peut se représenter de façon exacte"

  "il n'existe aucun élément non nul de $\mathcal{H}$ orthogonal à tous les ϕ_n"

  $\Rightarrow$ le point délicat en dimension infinie!

- **Développement dans une base orthonormale**

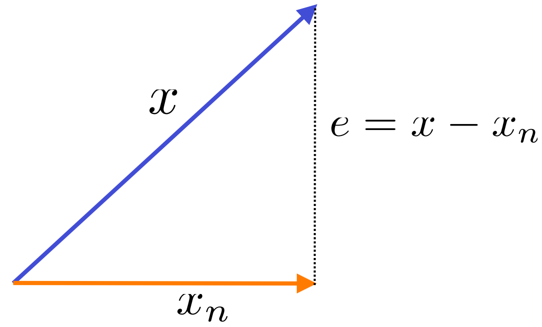
$$\boxed{\forall x \in \mathcal{H},\ x = \sum_n \langle x, \phi_n \rangle \phi_n} \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathcal{H},\ \left\| x - \sum_n \langle x, \phi_n \rangle \phi_n \right\| = 0$$

Systèmes complets: de Bessel à Parseval

Inégalité de Bessel

Soit $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un système de fonctions orthonormales dans $\mathcal{H}$.

$$\forall x \in \mathcal{H}, \ \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle x, \phi_n\rangle|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |c_n|^2 \leqslant \|x\|^2$$



$$\|x\|^2 = \|x_n\|^2 + \|e\|^2$$

Preuve: Application du théorème d'approximation orthogonale

$$\|x - x_N\|^2 = \|x\|^2 - \|x_N\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{n=0}^{N} |c_n|^2 \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{N} |c_n|^2 \leqslant \|x\|^2$$

Définition

Le système orthonormal $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est **complet** si et seulement si

$$\forall x \in \mathcal{H}, \ \lim_{N\to+\infty} \|x - x_N\|^2 = \left\| x - \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x, \phi_n\rangle \phi_n \right\|^2 = 0$$

Théorème de Parseval

$\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est un système orthonormal complet—et donc une base orthonormale de $\mathcal{H}$—
si et seulement si $\quad \forall x \in \mathcal{H}, \ \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle x, \phi_n\rangle|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |c_n|^2 = \|x\|^2$

Parseval et séries de Fourier

Coefficients de Fourier complexes: $c_n = \langle x, \phi_n \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jn\omega_0 t} \, \mathrm{d}t$

Relation de Parseval

$$\|x\|^2 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 \, \mathrm{d}t = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2$$

Série tronquée: $x_N = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{jn\omega_0 t}$

Erreur d'approximation: $\|x - x_N\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{n=-N}^{+N} |c_n|^2 \quad \xrightarrow{N \to \infty} \quad 0$

Convergence des séries de Fourier

C'est une question qui a longtemps laissé les mathématiciens perplexes et qui n'a été résolue, de façon satisfaisante, qu'au début du 20ème siècle (théorie de Lebesgue).

La convergence *uniforme* nécessite, en particulier, que $x(t)$ soit continue.

Autrement, on a seulement une convergence au sens de la norme L_2 (cf. Gibbs).

De plus, si $x \in L_2\left(\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]\right)$, la convergence ponctuelle (*i.e.*, $\lim_{N \to \infty} x_N(t_0) = x(t_0)$) est assurée *presque partout* (Carleson, 1966; Prix Abel 2006).

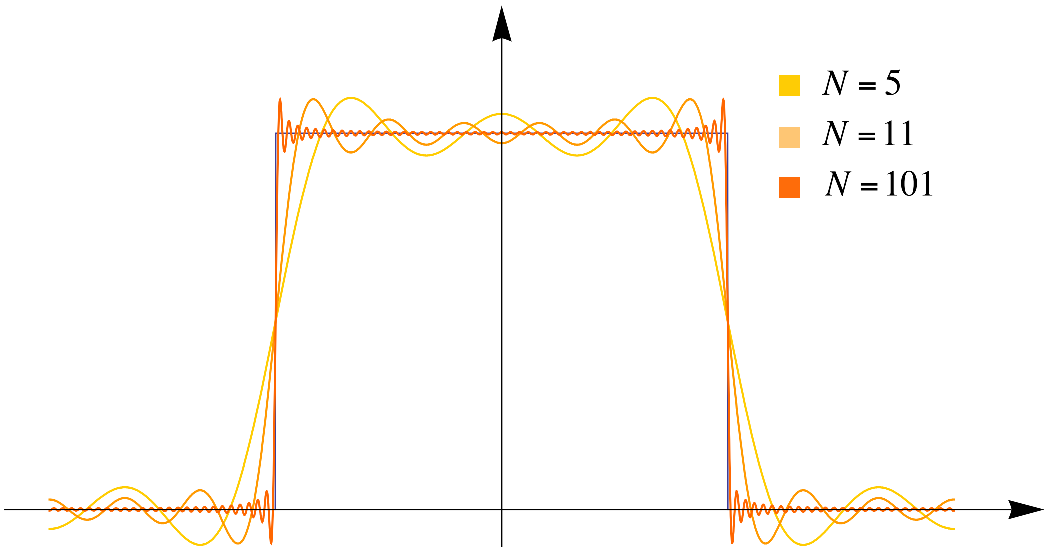
Phénomène de Gibbs

Décomposition en série de Fourier d'une onde rectangulaire de période $T = 1$

$$x(t) = \begin{cases} 0, & -\frac{1}{2} \leqslant t < -\frac{1}{4} \\ 1, & -\frac{1}{4} < t < +\frac{1}{4} \\ 0, & +\frac{1}{4} < t < +\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$x_N(t) = \sum_{n=-N}^{+N} c_n e^{j2\pi nt}$$

$$c_n = \int_{-1/4}^{+1/4} e^{-j2\pi nt}\, \mathrm{d}t = \frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi}$$



Commentaires

Deux ensembles de conditions suffisantes pour la convergence uniforme des séries de Fourier sont:

- $x(t)$ continue et $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n| < +\infty$
- $x(t)$ ainsi que sa dérivée sont à énergie finie;

Aucun n'est satisfait ici!