Série 7

Exercice 7.1 : (BASIQUE) ÉCHANTILLONNAGE ET PÉRIODISATION

Cet exercice qui peut paraître élémentaire n'en est pas moins important puisqu'il vise à mettre en évidence les relations entre périodisation et échantillonnage dans les domaines temporels et fréquentiels. Maîtriser ces concepts avec aisance est absolument nécessaire car il s'agit là de propriétés clés de la théorie du traitement des signaux tant continus que discrets qui réapparaitront donc abondamment durant le second semestre.

On donne le signal $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$

1) Calculer $F(\omega)$ la transformée de Fourier de $f(t)$, puis représenter $f(t)$ et $F(\omega)$. Que remarque-t-on ?

2) On échantillonne $f(t)$ avec un pas d'échantillonnage T_0. Donner l'expression du signal échantillonné $f_{éch}(t)$ pour T_0 quelconque.

3) Calculer $F_{éch}(\omega)$ la transformée de Fourier de $f_{éch}(t)$, puis représenter $f_{éch}(t)$ et $F_{éch}(\omega)$ pour $T_0 = 0.5$.

4) On périodise maintenant $f(t)$ à période T_1. Donner l'expression de la fonction périodisée $f_{per}(t)$ pour T_1 quelconque.

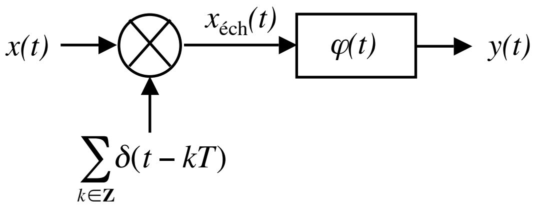
5) Calculer $F_{per}(\omega)$ la transformée de Fourier de $f_{per}(t)$, puis représenter $f_{per}(t)$ et $F_{per}(\omega)$ pour $T_1 = 4\pi$.

6) En général, que peut-on dire de la relation périodisation–échantillonnage entre les domaines temporels et fréquentiels ?

Exercice 7.2 : (INTERMEDIAIRE) INTERPOLATION

On étudie un système couplant échantillonnage et filtrage. Il en résulte un système dit d'interpolation. On cherche ici à se familiariser avec l'échantillonnage et à comprendre comment ce concept se combine avec les notions vues précédemment en cours.

Soit S le système représenté ci-dessous, avec un pas d'échantillonnage $T > 0$,



1) Exprimer $x_{\text{éch}}(t)$ en fonction des valeurs $x(kT)$, avec $k \in \mathbb{Z}$. En déduire une expression pour $y(t)$ en fonction de $\varphi(t)$ et des $x(kT)$, $k \in \mathbb{Z}$.

2) Exprimer $Y(\omega)$, la transformée de Fourier de la sortie $y(t)$, en fonction de $X(\omega)$ et $\Phi(\omega)$, transformées de Fourier de $x(t)$ et $\varphi(t)$ respectivement.

On fixe dorénavant $T = 2$. On définit les trois filtres décrits par les réponses impulsionnelle suivantes :

$$\begin{aligned}
\varphi_1(t) &= \delta(t), \\
\varphi_2(t) &= \operatorname{rect}\left(\frac{t}{2}\right), \\
\varphi_3(t) &= \operatorname{tri}\left(\frac{t}{2}\right),
\end{aligned}$$

et on note S_i le système S associé au filtrage par φ_i.

3) Le système S_3 est-il linéaire ? Est-il invariant par translation ?
Indication : calculer les sorties $y_1(t)$ et $y_2(t)$ correspondant respectivement à $x_1(t) = \mathrm{rect}(2t)$ et $x_2(t) = x_1(t - \frac{1}{2})$.

4) On définit la fonction :

$$x(t) = \begin{cases} t(t-3)(t-8) & \text{si } 0 \le t \le 8, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Que vaut $S_i\{x\}(t) = y_i(t)$ dans ce cas, pour $1 \le i \le 3$? Représenter sur un même graphe les fonctions $x(t)$, $y_1(t)$, $y_2(t)$ et $y_3(t)$.

5) Le système S est dit *interpolateur* si $y_{\text{éch}}(t) = x_{\text{éch}}(t)$. Montrer que ceci est équivalent à la condition :

$$x(kT) = y(kT), \text{ pour } k \in \mathbb{Z}.$$

Cette condition est-elle satisfaite pour les systèmes S_i pour les différentes valeurs de i ?

Exercice 7.3 : (BASIQUE) CONVOLUTIONS ET PRODUITS SCALAIRES DANS LE DOMAINE DE FOURIER

La transformée de Fourier est également un outil permettant de simplifier les résultats de calculs dans le domaine temporel. Ainsi, certains problèmes seront résolus beaucoup plus facilement en faisant un aller-retour dans le domaine fréquentiel. Cet exercice donne quelques exemples de telles situations.

Indication : effectuer les convolutions suivantes en trois étapes : calculer la transformée de Fourier $X(\omega)$ de $x(t)$, la simplifier, puis retourner dans le domaine temporel.

1) $x(t) = (\mathrm{sinc} * \mathrm{sinc})(t)$.

2) $x(t) = \mathrm{sinc}(t) * \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(t-k)$.

3) $x(t) = \mathrm{sinc}(t) * \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(t-3k)$.

Indication : calculer les produits scalaires suivants en utilisant la relation de Parseval.

4) $\langle \mathrm{sinc}(t), \mathrm{sinc}(t+5) \rangle_{L_2(\mathbb{R})}$.

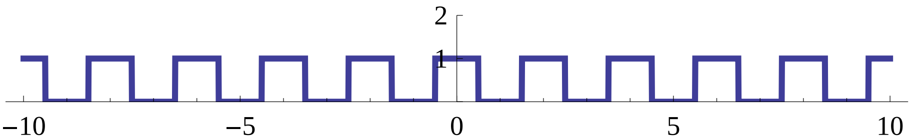
5) $\langle \cos(3\pi t), \cos(3\pi t) \rangle_{L_2([0,2])}$.

6) $\langle \sin(4\pi t), \sin(7\pi t) \rangle_{L_2([0,2])}$.

Exercice 7.4 : (AVANCÉ) ANALYSEUR SPECTRAL

Cet exercice permet de comprendre quelques idées mathématiques à la base des analyseurs spectraux. Il s'agit d'appareils de mesure analysant les fréquences (avec leurs amplitudes) contenues dans un signal. On voit donc ici un moyen d'utiliser les concepts du cours (signaux, transformée de Fourier, échantillonnage, etc.) dans le cadre d'un problème concret.

Soit $x(t)$ le signal 2-périodique défini sur la figure suivante



1) Donner la transformée de Fourier de $x(t)$.
On remarquera que $x(t) = \mathrm{rect}(t) * \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(t-2k)$.

2) *Analyseur simple*
Un analyseur simple enregistre le signal $x(t)$ pendant une durée T, et calcule le spectre du signal enregistré. Plus précisément, on pose $y(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \cdot x(t)$. Le signal $y(t)$ est enregistré, c'est une version tronquée du signal $x(t)$.

(a) Représenter $y(t)$ lorsque $T = 8$.

(b) Calculer la transformée de Fourier $Y(\omega)$ de $y(t)$.

(c) Représenter la transformée de Fourier de $x(t)$. Pour $T = 20$, esquisser, sur le même graphe, l'allure de la transformée de Fourier de $y(t)$.

(d) Quelle est l'influence du paramètre T.

3) *Analyseur amélioré*
On souhaite améliorer la résolution de l'analyseur. Pour cela, on propose de tronquer le signal en utilisant une autre fenêtre $w_T(t)$ à la place du rectangle de la question précédente. Cette fois, on a donc $y(t) = w_T(t) \cdot x(t)$.

(a) Exprimer $Y(\omega)$ en fonction de $W_T(\omega)$, la transformée de Fourier de $w_T(t)$.

(b) On fixe $T = 20$. Donner $W_{20}(\omega)$ lorsque $w_{20}(t) = \mathrm{tri}(\frac{t}{20})$, puis l'expression de $Y(\omega)$ dans ce cas. Esquisser l'allure de la transformée de Fourier de $y(t)$.

(c) En quoi l'utilisation de $w_T(t)$ a-t-elle améliorée la résolution de l'analyseur ?

4) Déduire des questions précédentes une stratégie générale pour améliorer l'analyseur.