Série 8

Correction de l'exercice 8.1 : RECONSTRUCTION PAR FILTRAGE IDÉAL

1) On a déjà vu ce résultat à de nombreuses reprises. Comme $x_{éch}(t) = x(t) \cdot \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(t - kT)$, on en déduit en passant dans le domaine fréquentiel que

$$X_{éch}(\omega) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * \frac{2\pi}{T} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(\omega - k\frac{2\pi}{T}) = \frac{1}{T} \sum_{k\in\mathbb{Z}} X(\omega - k\frac{2\pi}{T}).$$

2) La transformée de Fourier $\Phi(\omega)$ de $\varphi(t)$ vaut d'après les tables $\Phi(\omega) = \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$. Le filtre est donc passe-bas. Il est en outre idéal car il coupe strictement les hautes fréquences et conserve parfaitement les basses fréquences.

3) On a tout d'abord, pour T général,

$$\begin{aligned} Y(\omega) = X_{éch}(\omega) \cdot \Phi(\omega) &= \text{rect}(\frac{\omega}{2\pi}) \cdot \frac{1}{T} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\delta(\omega - k\frac{2\pi}{T} - \frac{\pi}{2}) + \delta(\omega - k\frac{2\pi}{T} + \frac{\pi}{2}) \right) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\text{rect}(\frac{k}{T} + \frac{1}{4}) \delta(\omega - k\frac{2\pi}{T} - \frac{\pi}{2}) + \text{rect}(\frac{k}{T} - \frac{1}{4}) \delta(\omega - k\frac{2\pi}{T} + \frac{\pi}{2}) \right) \end{aligned}$$

Notons qu'on a utilisé l'égalité $f(\omega)\delta(\omega - \omega_0) = f(\omega_0)\delta(\omega - \omega_0)$. Étant donné T, on calcule $Y(\omega)$ en évaluant pour $k \in \mathbb{Z}$ la valeur de $\text{rect}(\frac{k}{T} + \frac{1}{4})$ et $\text{rect}(\frac{k}{T} - \frac{1}{4})$. On en déduit ensuite $y(t)$.
Pour $T = 1$ on obtient $Y(\omega) = \delta(\omega - \frac{\pi}{2}) + \delta(\omega + \frac{\pi}{2}) = X(\omega)$ (les autres membres de la somme sont nuls) et donc, avec les tables,

$$y(t) = x(t) = \frac{1}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2} t\right).$$

Pour $T = 3$, il y a six termes non nuls dans la somme. On obtient finalement $Y(\omega) = \frac{1}{3}[\delta(\omega + \frac{5\pi}{6}) + \delta(\omega + \frac{\pi}{2}) + \delta(\omega + \frac{\pi}{6}) + \delta(\omega - \frac{\pi}{6}) + \delta(\omega - \frac{\pi}{2}) + \delta(\omega - \frac{5\pi}{6})]$ et donc, avec les tables,

$$y(t) = \frac{1}{3\pi} \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} t\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} t\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{6} t\right) \right].$$

4) On a déjà vu que si $T = 1$, $y(t) = x(t)$. On voit de plus par le même raisonnement que celui effectué dans la question précédente que $y(t)$ est une somme de cosinus multipliée par $\frac{1}{T}$. Le facteur $\frac{1}{T}$ suffit pour dire que $Y(\omega) \neq X(\omega)$ pour $T \neq 1$, et *a fortiori* que $y(t) \neq x(t)$. La condition est donc

$$y(t) = x(t) \Leftrightarrow T = 1.$$

5) On sait que $y(t) = \text{sinc}(t) * x_{\text{éch}}(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(kT)\text{sinc}(t - kT)$. On en déduit la condition

$$y(t) = 0 \Leftrightarrow x(kT) = 0, \ \forall k \in \mathbb{Z}.$$

6) On peut prendre par exemple comme signal d'entrée $x(t) = \sin\left(\frac{n\pi}{T} t\right)$ pour un $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ qui est bien à bande limitée et tel que $x(kT) = \sin(nk\pi) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Correction de l'exercice 8.2 : ÉCHANTILLONNAGE ET RECONSTRUCTION

1) La fonction $x(t) = -\sin(2\pi t/3)$ est 3-périodique et nulle en 0.
Le signal $y(t) = \sin(\pi t/3)$ est 6-périodique et nul en 0.
Les échantillons à la période T correspondent donc à $x[n] = -\sin(2n\pi T/3)$ et $y[n] = \sin(n\pi T/3)$.
Les graphes des deux fonctions se trouvent dans la feuille de réponses.

2) La version échantillonnée de x vaut

$$x_{\mathrm{e}}(t) = x(t) \times \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(t-kT) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x[k]\delta(t-kT),$$

avec $x[k] = x(kT) = \cos(2k\pi T/3 + \pi/2)$. La suite $x[k]$ est 3-périodique, avec $x[0] = 0$, $x[1] = \sqrt{3}/2$ et $x[2] = -\sqrt{3}/2$.
De même, $y_{\mathrm{e}}(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} y[k]\delta(t-kT)$ avec $y[k] = y(kT) = \sin(k\pi T/3)$. La suite $y[k]$ est également 3-périodique, avec $y[0] = 0$, $y[1] = \sqrt{3}/2$ et $y[2] = -\sqrt{3}/2$.
On observe donc que les suites $x[k]$ et $y[k]$ sont identiques, bien que les signaux de bases ne le soient pas.

3) En utilisant les tables, on trouve la transformée de Fourier de $x(t) = -\sin(2\pi t/3)$, soit $X(\omega) = \mathrm{j}\pi\left[-\delta(\omega+\omega_1) + \delta(\omega-\omega_1)\right]$ avec $\omega_1 = 2\pi/3$.
De même pour $y(t)$, $Y(\omega) = \mathrm{j}\pi\left[\delta(\omega+\omega_2) - \delta(\omega-\omega_2)\right]$ avec $\omega_2 = \pi/3$.
Les graphes des deux fonctions se trouvent dans la feuille de réponses. On observe que les deux signaux sont à bande limitée car ils sont nuls au-delà des fréquences ω_1 et ω_2 respectivement.

4) En se rappellant qu'un échantillonage en temps correspond à une périodisation en fréquence, on trouve $X_e(\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k\in\mathbb{Z}} X(\omega - k\omega_0)$ avec $\omega_0 = 2\pi/T$. De même, $Y_e(\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k\in\mathbb{Z}} Y(\omega - k\omega_0)$.
Les graphes des deux fonctions se trouvent dans la feuille de réponses. Il est intéressant de remarquer que, bien que les signaux de départ soient différents, les transformées de Fourier des versions échantillonnées sont identiques car les répétitions de $X(\omega)$ se "marchent dessus" à cause de la trop grande fréquence de répétition. Pour cette raison, il devient impossible de reconstruire le signal x à partir de sa version échantillonnée. On appelle ce phénomène indésirable le repliement spectral.

5) La formule de Shannon n'est applicable que si la fréquence d'échantillonnage est au moins deux fois supérieure à la bande passante du signal. Ici, on a bien $\omega_0 > 2\omega_2$ pour y. En revanche, $\omega_0 < 2\omega_1$ pour x. La formule de Shannon n'est donc applicable que dans le cas de $y(t)$.
En appliquant Shannon, on a dans le domaine temporel $y(t) = y_{\mathrm{e}}(t) * \mathrm{sinc}(t/T) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} y[k]\,\mathrm{sinc}\left(\frac{t-kT}{T}\right)$.
On peut vérifier dans le domaine de Fourier que $Y(\omega) = Y_{\mathrm{e}}(\omega) \times T\,\mathrm{rect}(\omega/\omega_0)$. Graphiquement, on retrouve bien la transformée de Fourier $y(t)$, comme on peut le voir sur le graphe dans les réponses.

Correction de l'exercice 8.3 : MULTIPLEXAGE EN FRÉQUENCE

1) La modulation en amplitude du signal $x(t)$ à la fréquence ω_1 est le signal $\cos(\omega_1 t)x(t)$. De même, la modulation en amplitude du signal $y(t)$ à la fréquence ω_2 est le signal $\cos(\omega_2 t)y(t)$. Le signal $s(t)$ est la somme des deux modulations, soit

$$s(t) = \cos(\omega_1 t)x(t) + \cos(\omega_2 t)y(t).$$

2) On calcule tout d'abord $S(\omega)$ avec un tableau.

Temps	Fréquence
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi(\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)$
$x(t)\cos(\omega_1 t)$	$\frac{1}{2\pi}X(\omega) * \pi(\delta(\omega-\omega_1) + \delta(\omega+\omega_1)$ $= \frac{1}{2}(X(\omega-\omega_1) + X(\omega+\omega_1))$
$y(t)\cos(\omega_2 t)$	$\frac{1}{2}(Y(\omega-\omega_2) + Y(\omega+\omega_2))$

Finalement, $S(\omega) = \frac{1}{2}\left(X(\omega-\omega_1) + X(\omega+\omega_1) + Y(\omega-\omega_2) + Y(\omega+\omega_2)\right)$. La représentation graphique est donnée dans la feuille de réponse et exploite les hypothèses $\pi \ll \omega_1$ (qui implique que les versions translatées de $X(\omega)$ ne se recouvrent pas) et $\omega_1 < \omega_2$ (qui implique que les versions translatées de $Y(\omega)$ sont centrées à des fréquences plus élevées que celles de $X(\omega)$).

3) Les signaux $x(t)$ et $y(t)$ sont à bande limitée : tout deux sont en effet non-nuls sur un intervalle de longueur 2π en fréquences. Ainsi, $X(\omega-\omega_1)$ est non nul sur l'intervalle $[\omega_1-\pi, \omega_1+\pi]$ et $Y(\omega-\omega_2)$ sur $[\omega_2-\pi, \omega_2+\pi]$. Ces deux intervalles ne s'intersectent pas tant que $\omega_2-\omega_1 \geq 2\pi$. La largeur de bande occupée est alors 2π pour chaque signal sans recouvrement, soit 4π.
Le choix de cette valeur minimale n'est pas réaliste. Cela supposerait en effet pour reconstruire les signaux $x(t)$ et $y(t)$ d'avoir à disposition un filtre idéal correspondant à un rect dans le domaine de Fourier. En pratique, on ne peux générer de discontinuités comme celles aux bornes du rectangle. On approche donc seulement le filtre idéal, et l'on a toujours une zone de transition plus ou moins étalée en fréquences. Ainsi, on préférera prendre un écart $\omega_2-\omega_1 > 2\pi$ pour bien pouvoir reconstruire les deux signaux individuellement à partir du signal multiplexé $s(t)$.

4) Le signal $x(t)$ modulée à la fréquence ω_0 est de nouveau $x(t)\cos(\omega_0 t)$. Le déphasage pour la modulation de $y(t)$ donne pour signal modulé $y(t)\cos(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}) = y(t)\sin(\omega_0 t)$ (avec un zeste de trigonométrie ici). Finalement,

$$v(t) = x(t)\cos(\omega_0 t) + y(t)\sin(\omega_0 t).$$

5) Par un calcul similaire à celui effectué pour la question **2)**, on a $V(\omega) = \frac{1}{2}\left(X(\omega-\omega_0)+X(\omega+\omega_0)\right)+ \frac{\mathrm{j}}{2}\left(Y(\omega-\omega_0)+Y(\omega+\omega_0)\right)$. Le recouvrement spectral ne se situe pas cette fois entre $X(\omega)$ et $Y(\omega)$ puisque, en module, ces deux signaux se recouvrent nécessairement (ils diffèrent cependant en phase, c'est donc ici le déphasage qui est utilisé pour rendre possible la reconstruction). Par contre, il est nécessaire que les spectres de $X(\omega-\omega_0)$ et $X(\omega+\omega_0)$ ne se recouvre pas (idem pour $Y(\omega)$). Comme $X(\omega)$ est à bande limitée dans $[-\pi, \pi]$, ceci impose la condition

$$\omega_0 \geq \pi.$$

Cette condition peut toujours être satisfaite en pratique.

6) Cette fois, sous la condition $\omega_0 \geq \pi$, la largeur de bande du signal $V(\omega)$ est celle commune de $X(\omega)$ et $Y(\omega)$, à savoir 2π.

Correction de l'exercice 8.4 : SYSTÈME DÉRIVATEUR

1) D'après les tables,

$$h(t) = \delta'(t) \quad \text{et} \quad H(\omega) = \mathrm{j}\omega.$$

Les opérations usuelles sur les nombres complexes impliquent alors que $A_H(\omega) = |H(\omega)| = |\omega|$ et $\Phi_H(\omega) = \arg H(\omega) = \arg(\omega) + \arg(\mathrm{j})$. Autrement dit, $\Phi_H(\omega) = \pi/2$ si $\omega \geq 0$ et $-\pi/2$ si $\omega < 0$, ce qu'on peut récrire comme $\Phi_H(\omega) = \mathrm{sign}(\omega) \times \frac{\pi}{2}$. On en déduit les graphiques représentés dans la feuille de réponses.

2) En dérivant directement $x_1(t)$, on trouve

$$y_1(t) = -9\sin(3t + \pi/3).$$

Une seconde méthode consiste à utiliser la formule donnant la réponse d'un systéme à une impulsion sinusoïdale. On sait en effet (*cf.* cours slide 5-5) que

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta) \implies y(t) = A.A_H(\omega_0).\cos(\omega_0 t + \theta + \Phi_H(\omega_0)).$$

Ici, $A = 3$, $\omega_0 = 3$ et $\theta = \pi/3$. De plus, par la question **1)**, on sait que $A_H(3) = 3$ et $\Phi_H(3) = \pi/2$. On a donc

$$y_1(t) = 9\cos\left(3t + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = -9\sin\left(3t + \frac{\pi}{3}\right).$$

On a utilisé la formule trigonométrique $\cos(x + \pi/2) = -\sin(x)$. Les deux méthodes donnent bien le même résultat.

3) $x_2(t)$ est 1-périodique car elle est la périodisation de la fonction $\mathrm{tri}(2t)$. Le graphique est donné dans la feuille de réponse.

4) On l'a dit, $x_2(t)$ est la périodisation pour $T_0 = 1$ de la fonction $f(t) = \mathrm{tri}(2t)$. On en déduit (table A-6, ligne 6) que $c_n = F(2\pi n)$ (car $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi$)). On doit donc calculer $F(\omega)$ la transformée de Fourier de $f(t)$. On utilise pour cela un tableau.

Temps	Fréquence
$\mathrm{tri}(t) = \mathrm{rect}(t) * \mathrm{rect}(t)$	$\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$
$f(t) = \mathrm{tri}(2t)$	$F(\omega) = \frac{1}{2}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\omega}{4\pi}\right)$

Ainsi, on a obtenu les coefficients de Fourier de $x_2(t)$:

$$c_n = F(2\pi n) = \frac{1}{2}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{n}{2}\right).$$

On en déduit alors via la slide 5-7 que les coefficients de Fourier de $y_2(t)$ sont donnés par

$$d_n = H(2\pi n) \cdot c_n = \pi \mathrm{j} n \mathrm{sinc}^2\left(\frac{n}{2}\right) = 2\mathrm{j}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\mathrm{sinc}\left(\frac{n}{2}\right).$$

5) Pour le calcul direct, on rappelle que $\mathrm{tri}'(t) = \mathrm{rect}(t + 1/2) - \mathrm{rect}(t - 1/2)$. Ainsi,

$$y_2(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2\left(\mathrm{rect}(2(t-k) + 1/2) - \mathrm{rect}(2(t+k) - 1/2)\right).$$

On utilise cette formule pour tracer $y_2(t)$, comme fait sur la feuille des réponses. Posons $g(t) = 2(\mathrm{rect}(2t+1/2) - \mathrm{rect}(2t-1/2)$. $y_2(t)$ est la périodisation de $g(t)$ pour $T_0 = 1$. Toujours en utilisant la table A-6, ligne 6, on sait que les coefficients de Fourier de $y_2(t)$ vérifient : $d_n = G(2\pi n)$. On calcule donc $G(\omega)$:

Temps	Fréquence
$f(t) = \mathrm{tri}(2t)$	$F(\omega) = \frac{1}{2}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\omega}{4\pi}\right)$
$g(t) = f'(t)$	$G(\omega) = \mathrm{j}\omega F(\omega) = \frac{1}{2}\mathrm{j}\omega\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\omega}{4\pi}\right)$

On obtient donc, de nouveau, comme dans la question précédente,

$$d_n = G(2\pi n) = \pi \mathrm{j} n \mathrm{sinc}^2\left(\frac{n}{2}\right) = 2\mathrm{j}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\mathrm{sinc}\left(\frac{n}{2}\right).$$

Remarque : *Dans cet exercice, on a calculer deux fois les coefficients de Fourier de $y_2(t)$ en utilisant deux méthodes différentes. La première (question **4)**) consistait à (i) calculer les coefficients de Fourier de $x_2(t)$ et (ii) en déduire avec le cours les coefficients de Fourier de la sortie correspondante. On a donc calculé les coefficients dans $y_2(t)$ sans même avoir calculé la fonction elle même ! La seconde méthode (question **5)**) consiste justement à (i) calculer d'abord $y_2(t)$ puis (ii) à obtenir les coefficients de Fourier de cette nouvelle fonction. Dans les deux cas, les coefficients de Fourier sont obtenus à partir du calcul de la transformée de Fourier et du lien entre transformée et coefficients de Fourier.*