ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Signaux et Systèmes

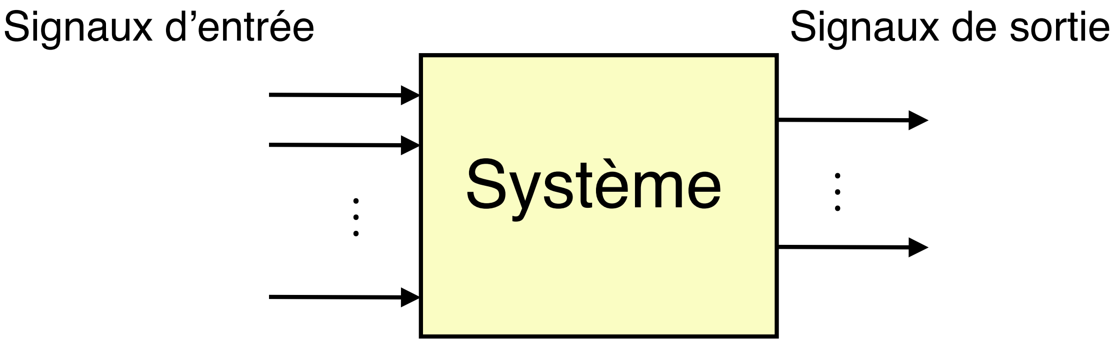
Chapitre 2

Systèmes analogiques linéaires: analyse temporelle

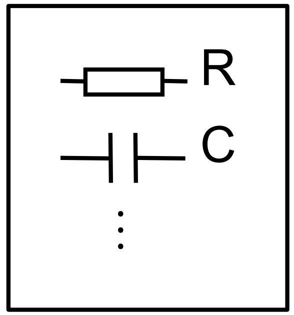
Septembre 2011

TABLE DES MATIERES

Motivation



Boîte noire ou représentation explicite ?



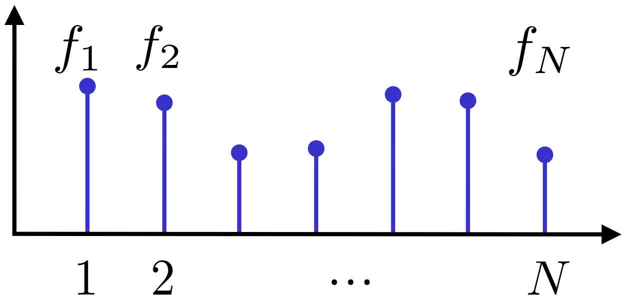
$h(t)$

- Types de systèmes
  - *Linéaire* vs. non-linéaire
  - *Univarié* vs. multivarié
  - *Invariant dans le temps* vs. variant dans le temps
  - *Causal* vs. non-causal
- But du chapitre
  - Analyse temporelle
  - Analogie avec l'algèbre linéaire
  - Description et caractérisation mathématique
  - Stabilité
  - Jusqu'où peut-on aller sans recourir à Fourier?

2.1 NOTIONS PRELIMINAIRES

- Analogie vecteurs/signaux
- Analogie matrice/système linéaire
- Notations et conventions
- Notions d'égalité

Analogie vecteurs/signaux



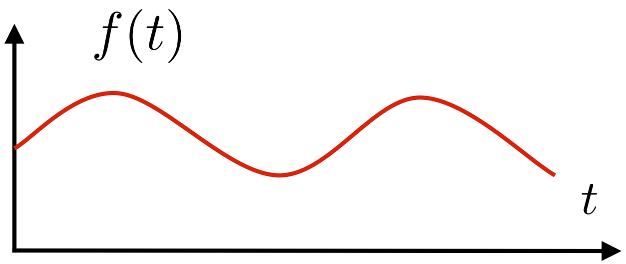
- Vecteur dans $\mathbb{R}^N$

  Notation: $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_N) \in \mathbb{R}^N$

  Structure d'espace vectoriel:

  $$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathbb{R}^N \quad \Rightarrow \quad \alpha\mathbf{f} + \beta\mathbf{g} \in \mathbb{R}^N$$

  Produit scalaire: $\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \sum_{n=1}^{N} f_n g_n$



- Signal continu = élement d'un espace fonctionnel

  Signal = fonction du temps: object mathématique de dimension infinie ("continuum")

  Notations: $\{f(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ ou $f(\cdot)$ ou $f \in V(\mathbb{R})$ ou, simplement, $f(t)$

  $V(\mathbb{R})$: Espace fonctionnel à définir (e.g., $L_2(\mathbb{R})$, $C^n(\mathbb{R})$, etc.)

  $$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad f, g \in V(\mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad \alpha f + \beta g \in V(\mathbb{R})$$

  Produit scalaire: $\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(t) \mathrm{d}t$

Analogie matrice/système linéaire

- Transformation linéaire: $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$

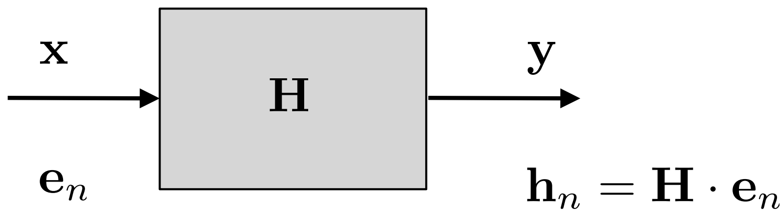
$$\mathbf{y} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{x} \quad \Leftrightarrow \quad y_m = \sum_{n=1}^{N} h_{m,n} x_n$$

  - Entrée: $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$
  - Sortie: $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_N)$
  - Matrice $\mathbf{H}$: $[\mathbf{H}]_{m,n} = h_{m,n}, \quad m, n \in \{1, \ldots, N\}$

Sytème linéaire en temps continu:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t,\tau) x(\tau) \mathrm{d}\tau$$

Sytème linéaire



- Identification du système matriciel

  - But: déterminer les éléments de la matrice $\mathbf{H} = [\mathbf{h}_1 \; \cdots \; \mathbf{h}_N]$
  - Méthode: série d'excitations élémentaires $\{\mathbf{e}_n\}_{n=1,\ldots,N}$
  - Propriété de la base canonique: $\forall \mathbf{f} \in \mathbb{R}^N, \quad \langle \mathbf{f}, \mathbf{e}_n \rangle = f_n$

$\Rightarrow$ Impulsion de Kronecker

$$\sum_{m=1}^{N} f_m \delta_{m-n} = f_n$$

Existe-t-il une contrepartie en temps continu?

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\delta(t - t_0)\mathrm{d}t = f(t_0)$$

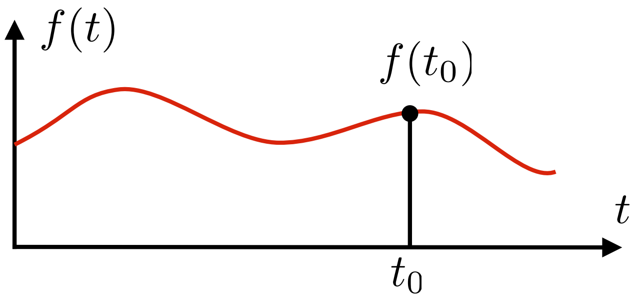
Notations et conventions

- Signaux continus et fonctions du temps
  - Notation usuelle: $f(t)$

    Convention implicite: l'utilisation de la variable t sous-entend "$\forall t \in \mathbb{R}$"

  - Notation concise ("mathématicien"): f

  - Valeurs ponctuelles: $f(t_0), f(t_1), \cdots$



- Produit de convolution
  - Définition: $$(h * f)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) f(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

  - Notation "ingénieur": $g(t) = h(t) * f(t)$

  - Notation concise: $g = h * f$

  - Ecriture avec un produit scalaire: $(h * f)(t) = \langle h, f(t - \cdot)\rangle$

Notion d'égalité (vecteurs)

Soit $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathbb{R}^N$

Trois formes d'égalités équivalentes

- Forme usuelle de l'égalité

$$\mathbf{f} = \mathbf{g} \quad \Leftrightarrow \quad f_n = g_n, \quad \forall n \in \{1, \dots, N\}$$

$$\Updownarrow$$

- Egalité en norme

$$\|\mathbf{f} - \mathbf{g}\|^2 = \langle \mathbf{f} - \mathbf{g}, \mathbf{f} - \mathbf{g} \rangle = \sum_{n=1}^{N} |f_n - g_n|^2 = 0$$

$$\Updownarrow$$

- Egalité des produits scalaires

$$\forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^N, \quad \langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{g}, \mathbf{u} \rangle$$

Interprétation: projection de l'égalité sur tous les axes possibles

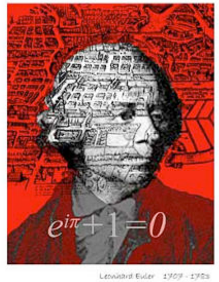
Notions d'égalité pour les fonctions

Trois formes non-équivalentes ...

- Egalité classique (au sens strict)

$$f(t) = g(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Contexte: fonctions continues.



$$\Downarrow$$

- Egalité au sens de la norme (ou “presque partout”)

$$\|f-g\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)-g(t)|^2 \mathrm{d}t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f = g \quad p.p.$$

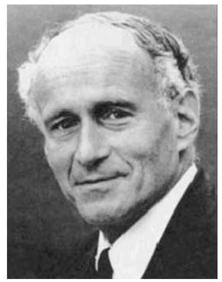
Contexte: fonctions à énergie finie, théorie de la mesure (Lebesgue, 1901)

$$\Downarrow$$

- Egalité faible (ou “au sens des distributions”)

$$\forall \phi \in \mathcal{S}, \quad \langle f, \phi \rangle = \langle g, \phi \rangle \quad \Leftrightarrow \quad f = g \quad \text{(au sens des distributions)}$$

  - Notation ”produit scalaire”: $\langle f, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\phi(t)\,\mathrm{d}t$
  - $\mathcal{S} \subset C^{\infty}(\mathbb{R})$: Espace des fonctions “test” de Schwartz à décroissanse rapide
  - Contexte: fonctions généralisées, théorie des distributions (Schwartz, 1950)



degré de généralité

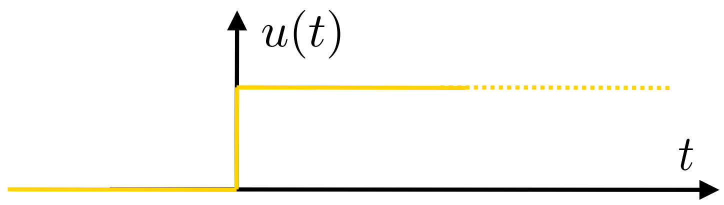
2.2 SIGNAUX FONDAMENTAUX

- Saut indiciel
- Impulsion de Dirac
- Fonction exponentielle

Saut indiciel

- Définition

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$
$$(= \tfrac{1}{2},\ t = 0)$$

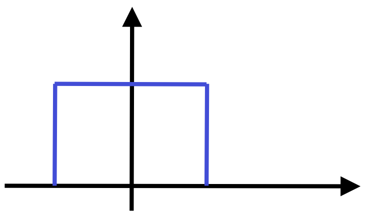


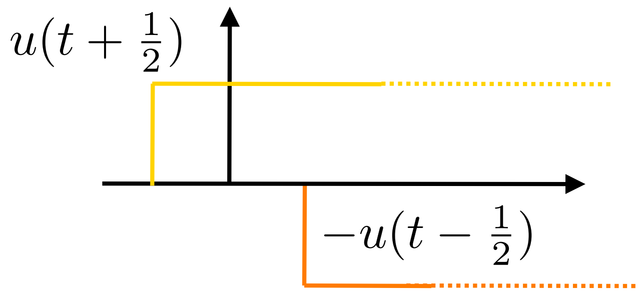
- Applications
  - Rendre un signal causal

$$f_+(t) = f(t) \cdot u(t) = \begin{cases} f(t), & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

  - Construction de signaux rectangulaires

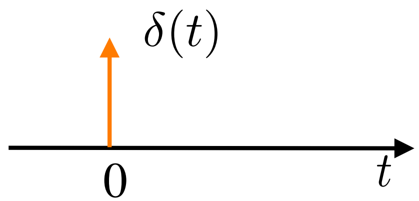
$$\mathrm{rect}(t) = \begin{cases} 1, & t \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} = u\left(t + \tfrac{1}{2}\right) - u\left(t - \tfrac{1}{2}\right)$$





Impulsion DELTA de Dirac

Définition abstraite



$$\forall f(t) \in C^0(\mathbb{R}), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)\,\mathrm{d}t = \langle \delta, f \rangle = f(0)$$

$\delta(t)$ n'est pas une fonction au sens classique du terme. C'est une distribution;

c.à d. une fonctionnelle linéaire qui associe un nombre $\langle \delta, f \rangle$ à chaque fonction $f(t)$.

Propriétés

- Intégrale: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,\mathrm{d}t = 1$ $\quad (f(t) = 1)$
- Echantillonnage: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t - t_0)\,\mathrm{d}t = f(t_0)$ $\quad$ Changement de variable: $\tau = t - t_0$
- Convolution: $\displaystyle(x * \delta)(t) = (\delta * x)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau)x(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = x(t)$ $\quad (f(\tau) = x(t-\tau))$
- Relation avec le saut indiciel: $\displaystyle\delta(t) = \frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$ $\quad$ (au sens des distributions)

$$\forall \phi \in \mathcal{S},\ \langle \phi, \delta \rangle = \left\langle \phi, \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \right\rangle = \phi(0)$$

Intégration par partie

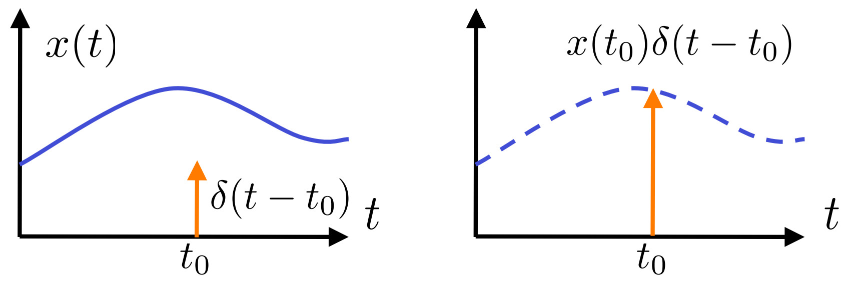
Propriétés des fonctions "test" de Schwartz:

$\forall \phi \in \mathcal{S}, \lim_{t \to \pm\infty} \phi(t) = 0$ et $|\phi(t)| < +\infty$

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}$: $\frac{\mathrm{d}^n \phi(t)}{\mathrm{d}^n t}, t^n \phi(t) \in \mathcal{S}$

Localisation ponctuelle de la distribution $\delta(t)$

Rappel: $\forall x \in C^0(\mathbb{R}), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t-t_0)\,\mathrm{d}t = x(t_0)$



Multiplication d'une fonction

$$x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$$

Preuve: égalité au sens des distributions

$$\forall \phi \in \mathcal{S},\ \langle \phi, x(\cdot)\delta(\cdot-t_0)\rangle = \int \phi(t)x(t)\delta(t-t_0)\,\mathrm{d}t = \phi(t_0)x(t_0)$$
$$\langle \phi, x(t_0)\delta(\cdot-t_0)\rangle = x(t_0)\int \phi(t)\delta(t-t_0)\,\mathrm{d}t = \phi(t_0)x(t_0)$$

Interprétation: $\delta(t)$ est entièrement localisée à l'origine:

$\delta(t) = 0$ pour $t \neq 0$ et $\delta(0) =$ "∞" car $\int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\,\mathrm{d}t = 1$

Construction explicite

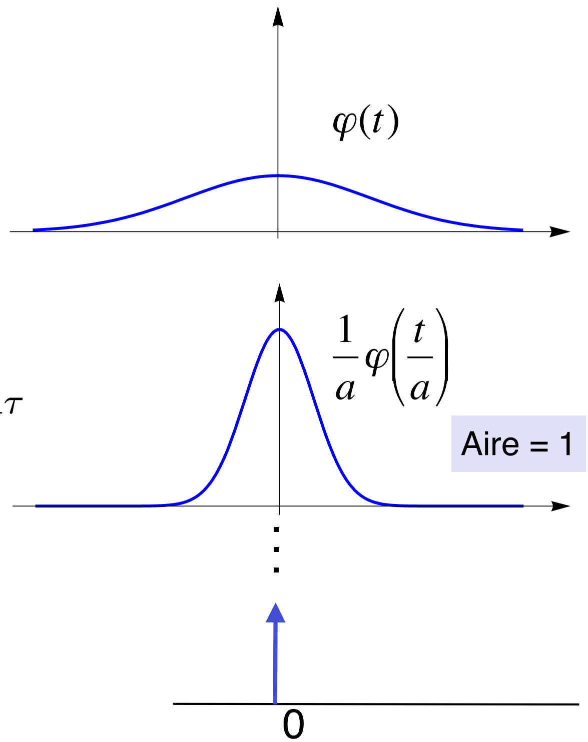
Soit une fonction $\varphi(t)$ t.q. $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 1$

$$\boxed{\delta(t) = \lim_{a\to 0_+} \left\{ a^{-1}\varphi\left(\frac{t}{a}\right) \right\}}$$

Changement de variable: $\tau = at$

$$\forall x \in C^0(\mathbb{R}): \quad x(0) = \lim_{a\to 0_+} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{x(at)}_{\to x(0)}\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{a\to 0_+} \int x(\tau)\frac{1}{a}\varphi\left(\frac{\tau}{a}\right)\,\mathrm{d}\tau$$

$$\Rightarrow \quad x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \lim_{a\to 0_+} \frac{1}{a}\varphi\left(\frac{\tau}{a}\right)\,\mathrm{d}\tau$$



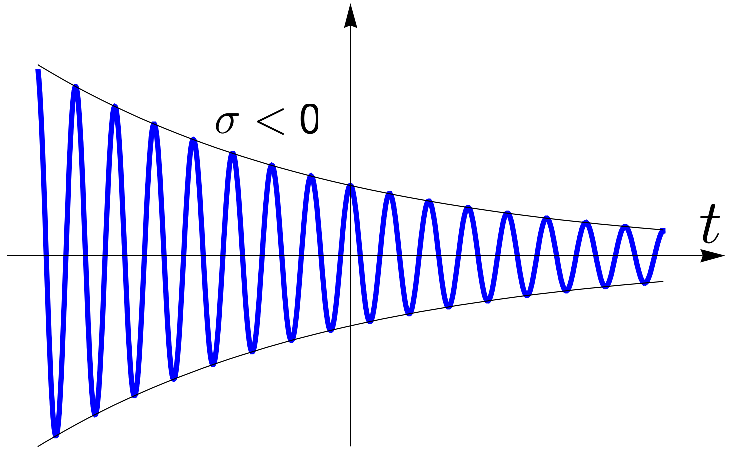
Fonction exponentielle e^{st}

- Exponentielle avec argument complexe

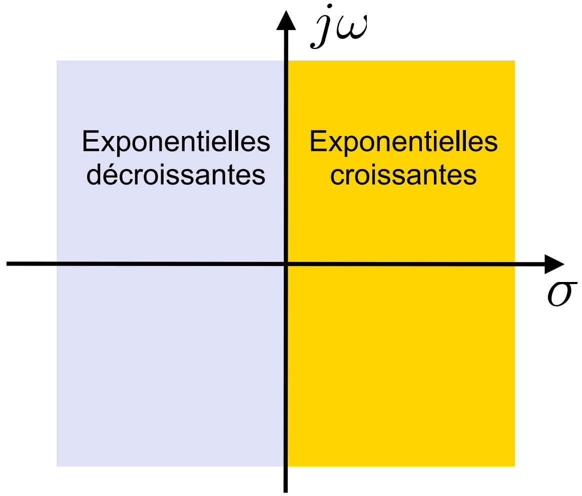
$$s = \sigma + j\omega \quad \in \mathbb{C}$$

$$e^{st} = e^{(\sigma+j\omega)t} = e^{\sigma t} e^{j\omega t} = e^{\sigma t}(\cos\omega t + j\sin\omega t)$$

$$e^{s^* t} = e^{(\sigma - j\omega)t} = e^{\sigma t}(\cos\omega t - j\sin\omega t) = (e^{st})^*$$



- Cas spéciaux
  - Constante: $c_0 e^{0t} = c_0 \qquad (s = 0)$
  - Exponentielle monotone: $e^{\sigma t} \qquad (s = \sigma \in \mathbb{R})$
  - Exponentielle modulée: $\frac{1}{2}\left(e^{st} + e^{s^* t}\right) = e^{\sigma t}\cos\omega t$ $(s = \sigma \pm j\omega)$
  - Cosinusoïde: $\cos\omega t \qquad (s = \pm j\omega)$



Plan des fréquences complexes

2.3 SYSTEMES LIT

LIT: Linéaire, invariant dans le temps
Linéaire, invariant par translation

- Systèmes linéaires
- Système linéaire: représentation intégrale
- Système linéaire invariant dans le temps
- Systèmes causaux

Systèmes linéaires

Signal d'entrée (input) Système Signal de sortie (ouput)

Notation «opérateur»

$y(t) = S\{x\}(t)$ Forme compacte: $y = S\{x\}$

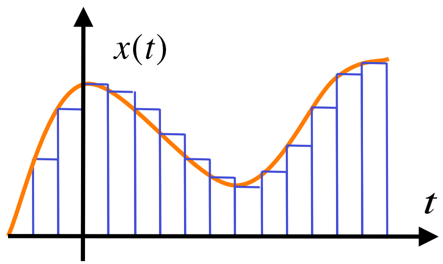
Linéarité

Système linéaire $\Leftrightarrow$ $S\{\lambda x_1 + x_2\} = \lambda S\{x_1\} + S\{x_2\} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$

Application: principe de superposition

Catalogue de réponses-type: $y_i = S\{x_i\}$

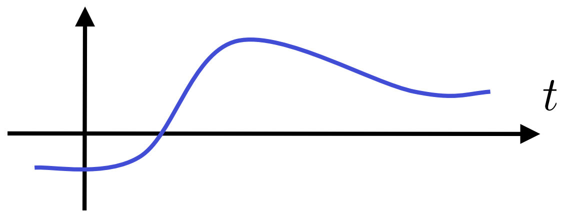
$$x = \sum_i a_i x_i \qquad \Rightarrow \qquad y = S\{x\} = \sum_i a_i y_i$$



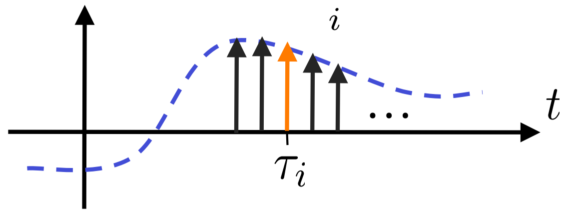
Système linéaire: représentation intégrale

- «Décomposition» de l'entrée

$$x(t) = (\delta * x)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$



$$x(t) \approx \sum_i x(\tau_i)\delta(t-\tau_i)\ \Delta\tau$$



- Réponse du système linéaire

linéarité

$$y(t) = S\{x(\cdot)\}(t) = S\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(\cdot-\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)S\{\delta(\cdot-\tau)\}(t)\,\mathrm{d}\tau$$

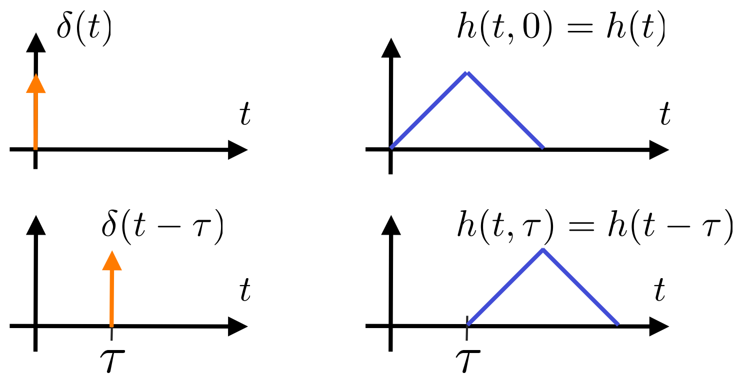
$$\Rightarrow \quad \boxed{y(t) = S\{x\}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,h(t,\tau)\,\mathrm{d}\tau} \qquad \text{avec} \quad h(t,\tau) = S\{\delta(\cdot-\tau)\}(t)$$

Système linéaire invariant dans le temps

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t,\tau)\, \mathrm{d}\tau$$

- Invariance dans le temps: définition

$$\forall \tau \in \mathbb{R}, \quad S\left\{x(\cdot - \tau)\right\}(t) = y(t-\tau)$$



- Caractérisation d'un système LIT

Réponse impulsionnelle: $h(t) = S\left\{\delta\right\}(t)$

Système LIT: $h(t,\tau) = h(t-\tau)$

$$\boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau}$$

et donc: $\boxed{y(t) = (x * h)(t) = (h * x)(t)}$

Conclusion:

Pour tout système linéaire invariant dans le temps (LIT), le signal de sortie est le *produit de convolution* du signal d'entrée avec la réponse *impulsionnelle*

Systèmes LIT: exemples

- Amplificateur

I{ }: identité

$$a \cdot \mathrm{I}\{f\}(t) = a \cdot f(t) \quad \Rightarrow \quad h(t) = a \cdot \mathrm{I}\{\delta\}(t) = a \cdot \delta(t)$$

- Retard

$$S_{t_0}\{f\}(t) = f(t - t_0) \quad \Rightarrow \quad h(t) = S_{t_0}\{\delta\}(t) = \delta(t - t_0)$$

- Dérivateur

$$f'(t) = \mathrm{D}\{f\}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(t)$$

$$\Rightarrow \quad h(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta(t) = \delta'(t)$$

Linéarité

$$\mathrm{D}\{\lambda f_1 + f_2\}(t) = \lambda f_1'(t) + f_2'(t)$$

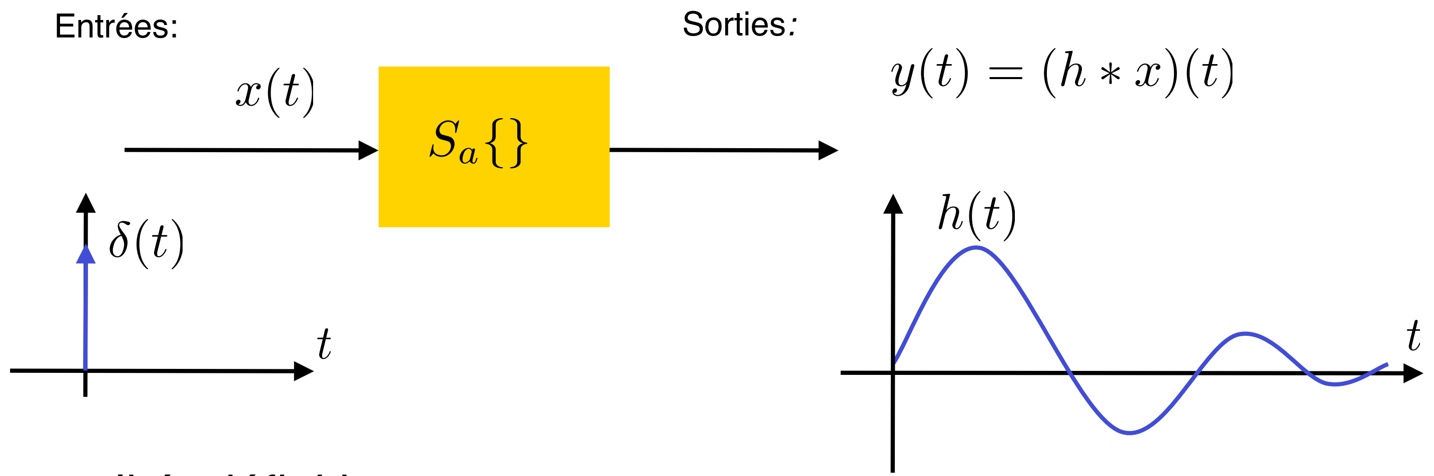
Invariance par translation

$$\mathrm{D}\{f(\cdot - t_0)\}(t) = f'(t - t_0)$$

- Intégrateur

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau) \cdot \mathrm{d}\tau = \mathrm{D}^{-1}\{f\}(t) \quad \Rightarrow \quad h(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau) \cdot \mathrm{d}\tau = u(t)$$

Système LIT causal



- Causalité: définition

Système LIT causal $\quad \Leftrightarrow \quad h(t) = 0, \quad t < 0$

- Notation: opérateur de causalité $\quad h_+(t) = u(t) \cdot h(t) = \begin{cases} h(t), & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$

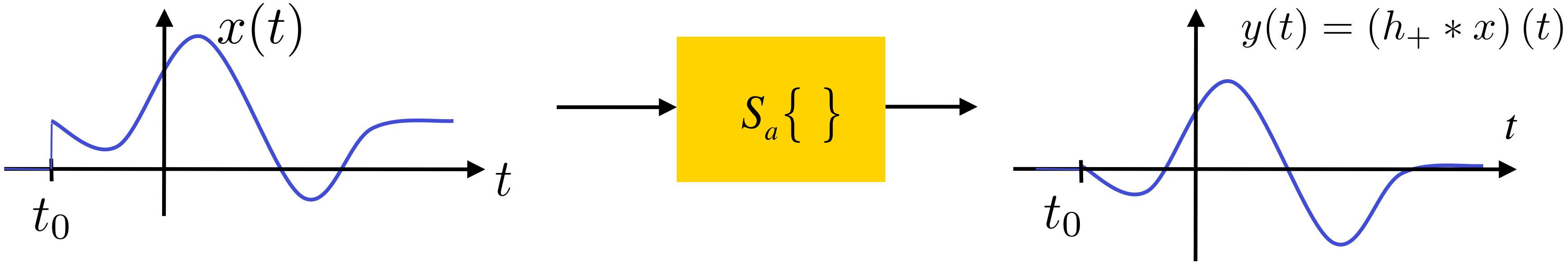
- Produit de convolution dans le cas causal

causalité

$$y(t) = (x * h_+)(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau) h_+(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau = (h_+ * x)(t) = \int_{0}^{+\infty} h_+(\tau) x(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau$$

commutativité (cf. 2-21) $\qquad$ causalité

Conséquence de la causalité



t_0: instant d'excitation

$$y(t) = (h_+ * x)(t) = \int_{t_0}^{t} x(\tau) h_+(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$$x(t) = 0,\ t < t_0 \quad \Rightarrow \quad y(t) = 0, \quad t < t_0$$

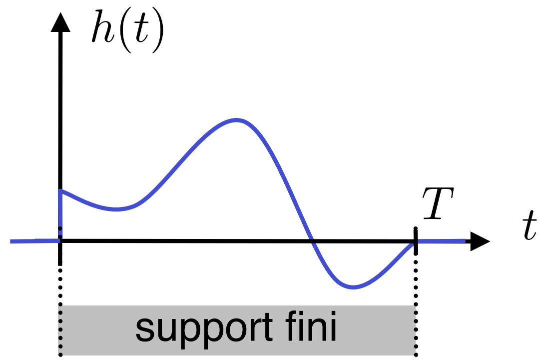
$x(t) = 0,\ t < t_0$

L'effet ne peut pas précéder la cause!

Note: Tous les systèmes physiques sont causaux par rapport au temps!

Système LIT causal RIF (c.à.d. à support fini)

RIF: Réponse Impulsionnelle Finie
Anglais: FIR (Finite Impulse Response)



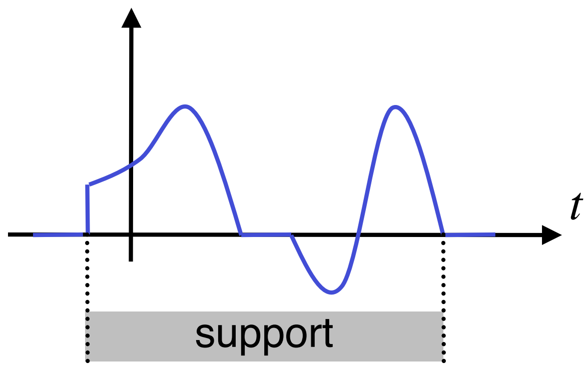
$$\underbrace{h(t) = 0,\ t < 0}_{\text{(causalité)}} \quad \text{et} \quad \underbrace{h(t) = 0,\ t > T}_{\text{(FIR)}}$$

versus

RII: Réponse Impulsionnelle Infinie
Anglais: IIR (Infinite Impulse Response)

- Support d'un signal

Support: intervalle temporel minimum à l'extérieur duquel le signal est identiquement nul



Filtre RII: réponse impulsionnelle à support infini

Filtre RIF: réponse impulsionnelle à support fini (ou compact)

2.4 CONVOLUTION

- Définition
- Exemple de calcul analytique
- Table de convolutions
- Interprétation « intégrale de surface »
- Interprétation « réponse d'un système »
- Algèbre des opérateurs de convolution

Convolution : définition

- ## Définition

$x(t)$ et $y(t)$: signaux réels ou complexes

$$(x * y)\,(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot y(t - \tau)\,\mathrm{d}\tau$$

La convolution de deux signaux temporels est également un signal temporel

- ## Propriétés élémentaires

  - Commutativité: $(x * y)\,(t) = (y * x)\,(t)$

    Preuve: changement de variable $u = t - \tau$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot y(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_{+\infty}^{-\infty} x(t-u) \cdot y(u)\,(-\mathrm{d}u) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(u) \cdot x(t-u)\,\mathrm{d}u$$

  - Distributivité ($a, b \in \mathbb{C}$): $\big((a \cdot x + b \cdot y) * z\big)(t) = a \cdot (x * z)(t) + b \cdot (y * z)(t)$

  - Associativité: $\big((x * y) * z\big)(t) = \big(x * (y * z)\big)(t)$

Hypothèses mathématiques: $x, y, z \in L_1(\mathbb{R})$ ou distributions ponctuelles (e.g., δ, δ')

Exemple de calcul analytique

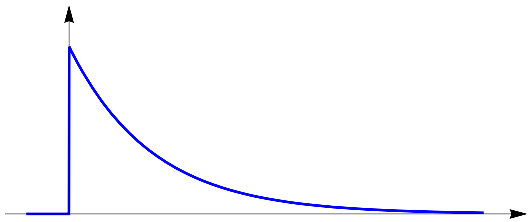
- Convolution de signaux causaux

$x_+(t-\tau)=0,\ \tau>t$

$$y_+(t)=(h_+ * x_+)(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} h_+(\tau)x_+(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau=\int_0^t h(\tau)x(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$h_+(\tau)=0,\ \tau<0$

- Exponentielles causales



$$h_+(t)=u(t)\cdot e^{s_1 t}$$

$$x_+(t)=u(t)\cdot e^{st}$$

$$y_+(t)=\int_0^t e^{s_1\tau}e^{s(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau=e^{st}\int_0^t e^{(s_1-s)\tau}\,\mathrm{d}\tau=e^{st}\cdot\left.\frac{e^{(s_1-s)\tau}}{s_1-s}\right|_0^t=\frac{e^{s_1t}-e^{st}}{s_1-s},\quad t>0$$

$$=\begin{cases} u(t)\cdot\left(\frac{e^{s_1t}-e^{st}}{s_1-s}\right), & s_1\neq s\\ t_+e^{st}, & s_1=s\end{cases}$$

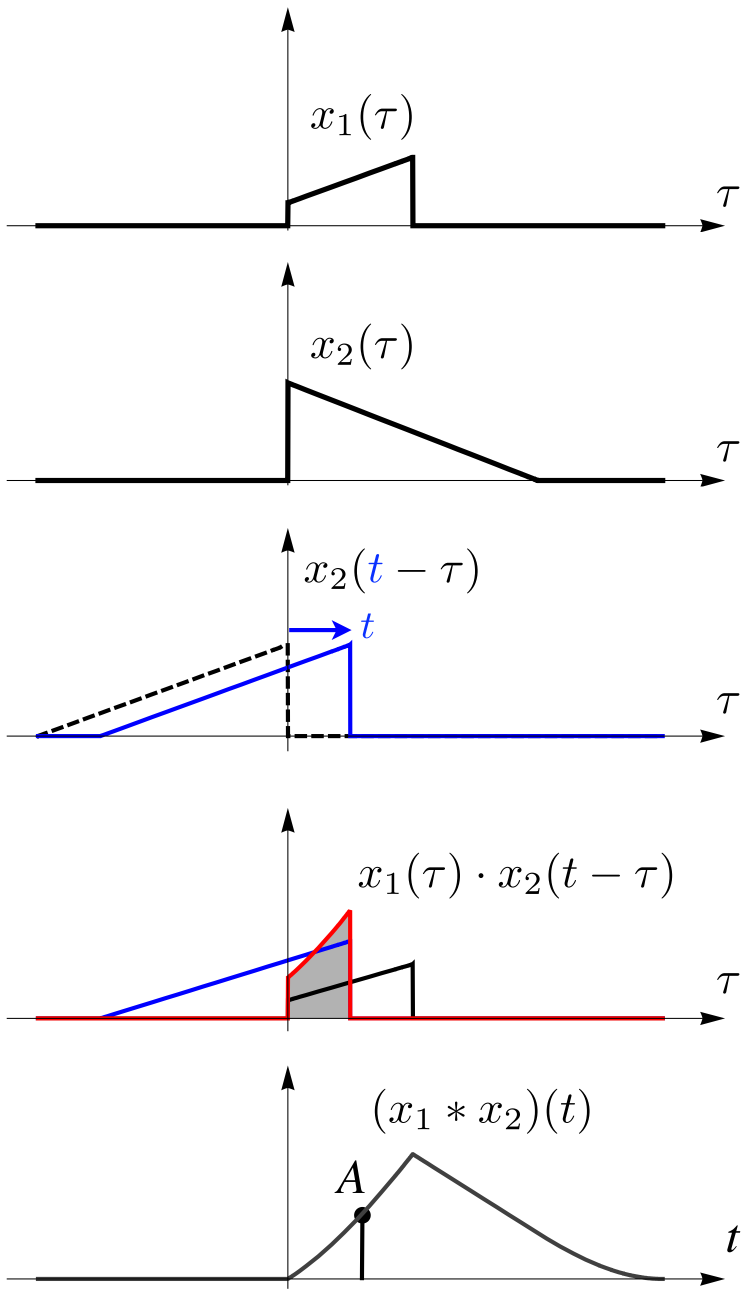
Convolution de deux exponentielles causales
= Somme pondérée des deux exponentielles

Table 2.1 : Convolution des signaux de base

$f_1(t)$	$f_2(t)$	$(f_1 * f_2)(t) = (f_2 * f_1)(t)$
$f(t)$	$\delta(t-T)$	$f(t-T)$
$u(t) \cdot e^{st}$	$u(t)$	$u(t) \cdot \left(\dfrac{e^{st}-1}{s}\right)$
$u(t) \cdot e^{s_1 t}$	$u(t) \cdot e^{s_2 t}$	$u(t) \cdot \left(\dfrac{e^{s_1 t} - e^{s_2 t}}{s_1 - s_2}\right) \quad s_1 \neq s_2$
$u(t)$	$u(t)$	$u(t) \cdot t = t_+$
$\mathrm{rect}(t)$	$\mathrm{rect}(t)$	$\mathrm{tri}(t) = \begin{cases} 1-\lvert t\rvert, & t \in [-1,1] \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$
$\dfrac{t_+^n}{n!}$	$\dfrac{t_+^m}{m!}$	$\dfrac{t_+^{m+n+1}}{(n+m+1)!}$
$\dfrac{t_+^n e^{st}}{n!}$	$\dfrac{t_+^m e^{st}}{m!}$	$\dfrac{t_+^{m+n+1} e^{st}}{(n+m+1)!}$
$\dfrac{t_+^n}{n!}$	$u(t) \cdot e^{st}$	$\dfrac{u(t)}{s^{n+1}} \left(e^{st} - \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(st)_+^k}{k!}\right)$

Interprétation "calcul de surface" (axe τ)

$$(x_1 * x_2)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$



- Réflection (ou renversement temporel)

$$x_2(\tau) \quad \longrightarrow \quad x_2^{\vee}(\tau) = x_2(-\tau)$$

- Décalage temporel

$$x_2^{\vee}(\tau) \quad \longrightarrow \quad x_2^{\vee}(\tau - t) = x_2(t-\tau)$$

- Calcul de surface

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

Interprétation "réponse d'un système" (axe *t*)

$$\left(x_1 * x_2\right)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

- Elément neutre de la convolution

$$\delta(t) \longrightarrow \boxed{x_2(t)} \longrightarrow x_2(t) = \left(\delta * x_2\right)(t)$$

- Excitation élémentaire à l'instant τ

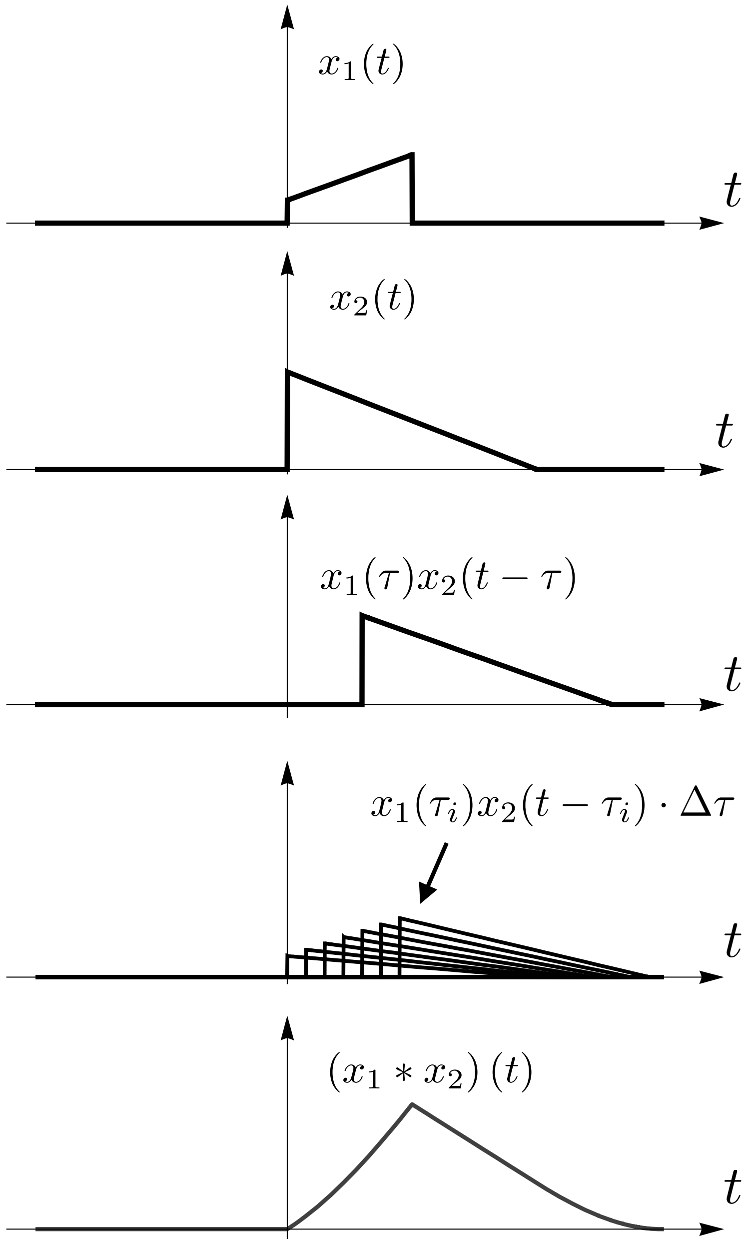
$$x_1(\tau)\delta(t-\tau) \longrightarrow \boxed{x_2(t)} \longrightarrow x_1(\tau)x_2(t-\tau)$$

"Force de frappe"

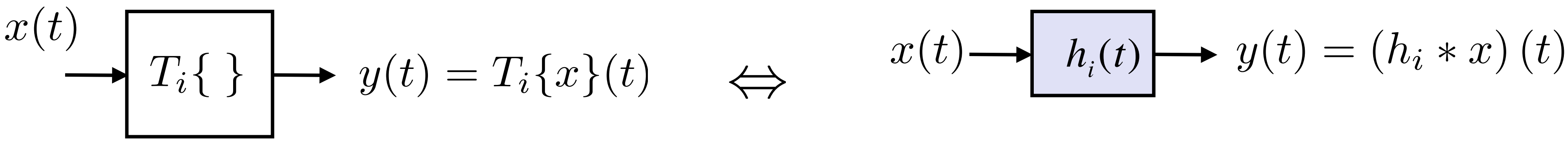
- Somme d'excitations élémentaires

$$\sum_i x_1(\tau_i)\delta(t-\tau_i)\cdot\Delta\tau \longrightarrow \boxed{x_2(t)} \longrightarrow \sum_i x_1(\tau_i)x_2(t-\tau_i)\cdot\Delta\tau$$

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau)\,\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau}_{x_1(t)} \qquad \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau}_{(x_1 * x_2)(t)}$$

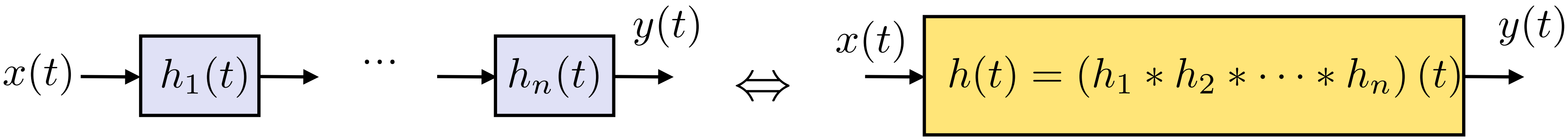


Composition de systèmes LIT

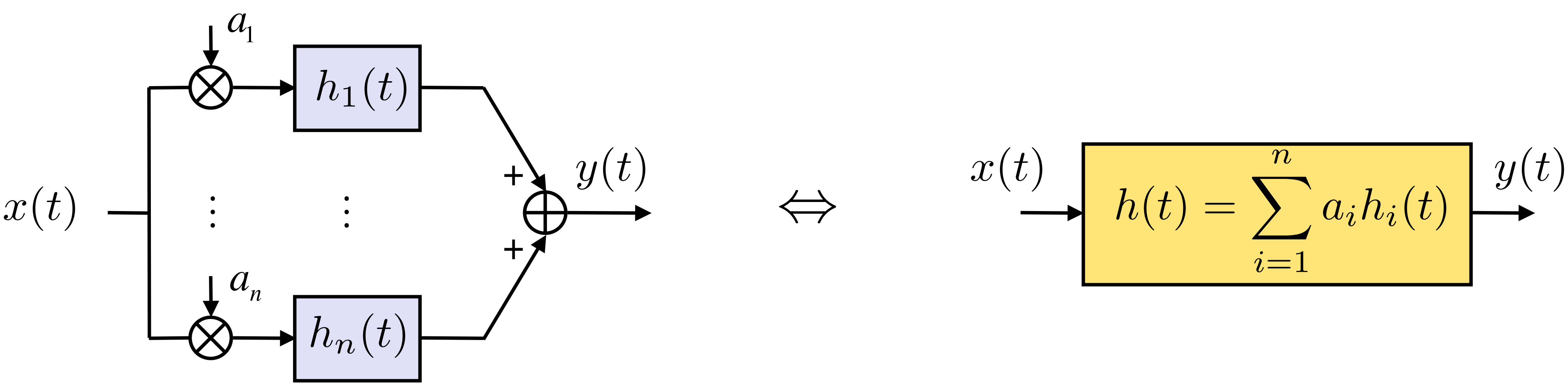


Réponses impulsionnelles: $h_i(t) = T_i\{\delta\}(t)$

- Mise en série (associativité)



- Mise en parallèle (distributivité)



Algèbre des opérateurs LIT

- Opérateur LIT: $\mathrm{T}\{\cdot\}$ (les variables d'entrée et de sortie sont des signaux)
- Composition: $\mathrm{T}_2\left\{\mathrm{T}_1\{f\}\right\}(t) = \mathrm{T}_2\mathrm{T}_1\{f\}(t)$
- Commutativité: $T_2T_1\{\} = T_1T_2\{\} \quad \Leftrightarrow \quad (h_1 * h_2)(t) = (h_2 * h_1)(t)$
- Distributivité: $(a_1\mathrm{T}_1 + a_2\mathrm{T}_2)\mathrm{T}\{\} = (a_1\mathrm{T}_1\mathrm{T} + a_2\mathrm{T}_2\mathrm{T})\{\}$

  $\Leftrightarrow \quad \left((a_1h_1 + a_2h_2) * h\right)(t) = a_1(h_1 * h)(t) + a_2(h_2 * h)(t)$
- Opérateur inverse: T^{-1} t. q. $\mathrm{T}^{-1}\mathrm{T}\{f\}(t) = \mathrm{I}\{f\}(t)$
- Itération (mise à la puissance): $\mathrm{T}\,\mathrm{T}\{\} = \mathrm{T}^2\{\}$

Opérateurs de différentiation:

$$\mathrm{D}^k\mathrm{D}^l = \mathrm{D}^{k+l} = \frac{\mathrm{d}^{k+l}}{\mathrm{d}t^{k+l}}$$

$\mathrm{I} = \mathrm{D}^0 =$ identité

$$\mathrm{D}^{-1} = \int_{-\infty}^{t} \mathrm{d}t$$

Exemple de manipulation

$(\text{D-3I})^2 = \mathrm{D}^2 - 6\mathrm{D} + 9\mathrm{I}$

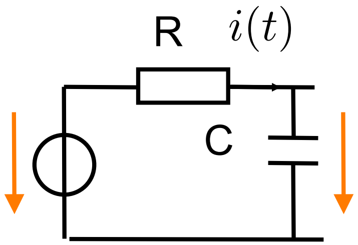
(mêmes règles que la multiplication des polynômes)

2.5 SYSTEMES ET EQUATIONS DIFFERENTIELLES

- Exemple: circuit RC
- Equations différentielles linéaires
- Recherche des solutions homogènes
- Polynôme caractéristique
- Factorisation d’opérateur différentiel
- Modes caractéristiques
- Fonction de Green et opérateur inverse
- Détermination de la réponse impulsionnelle

Exemple: circuit RC

$u_1(t) = x(t)$



$u_2(t) = y(t)$

$$\begin{cases} u_1(t) = R \cdot i(t) + u_2(t) \\ u_2(t) = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int_{-\infty}^{t} i(t)\,\mathrm{d}t \quad \Leftrightarrow \quad i(t) = C\dfrac{\mathrm{d}u_2(t)}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

- Equation différentielle

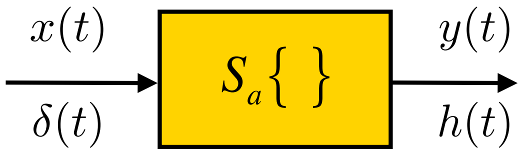
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{RC}x(t)}$$

- **Solution de l'équation homogène**

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}y(t) = 0 \qquad \text{condition initiale:} \quad y(0^+)$$

$$y(t) = y(0^+) \cdot e^{-t/RC}$$

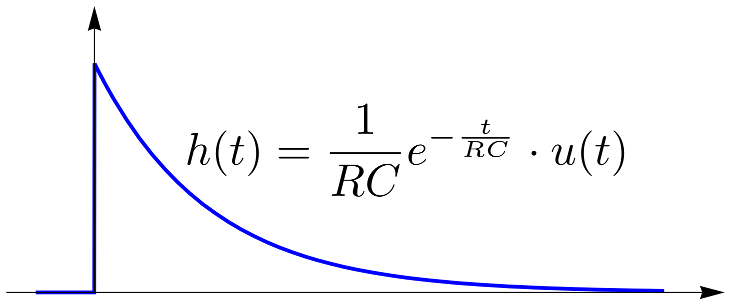
- Réponse impulsionnelle



$$x(t) = \delta(t) \quad \Rightarrow \quad i(t) = \delta(t)/R \quad \text{pour} \quad t \leqslant 0^+$$

$$\Rightarrow \quad y(0^+) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0^+} i(t)\,\mathrm{d}t = 1/RC$$

$$\Longrightarrow$$



Equations différentielles linéaires

- Equation différentielle linéaire d'ordre n (avec second membre)

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n} + a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + a_0 y = b_m \frac{\mathrm{d}^m x}{\mathrm{d}t^m} + \cdots + b_1 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + b_0 x$$

$x(t)$: excitation   Contraintes physiques: $n \geqslant m$

$y(t)$: réponse du système

- Notation «opérateur» $\boxed{\mathrm{D} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}}$

$$\mathrm{D}^n\{y\} + a_{n-1}\mathrm{D}^{n-1}\{y\} + \cdots + a_1\mathrm{D}\{y\} + a_0\mathrm{I}\{y\} = b_m\mathrm{D}^m\{x\} + \cdots + b_1\mathrm{D}\{x\} + b_0\mathrm{I}\{x\}$$

$$\boxed{Q(\mathrm{D})\,\{y\} = P(\mathrm{D})\,\{x\}}$$

$$Q(\mathrm{D}) = \mathrm{D}^n + a_{n-1}\mathrm{D}^{n-1} + \cdots + a_1\mathrm{D} + a_0\mathrm{I}$$

$$P(\mathrm{D}) = b_m\mathrm{D}^m + \cdots + b_1\mathrm{D} + b_0\mathrm{I}$$

Recherche des solutions homogènes

- Equation homogène: réponse à une entrée nulle

  $x(t) = 0$: excitation nulle

  $y(t)$: réponse du système due uniquement aux conditions initiales

  $$\boxed{Q(\mathrm{D})\,\{y\} = 0}$$

- Opérateur différentiel: $Q(\mathrm{D}) = \mathrm{D}^n + a_{n-1}\mathrm{D}^{n-1} + \cdots + a_1\mathrm{D} + a_0\mathrm{I}$

- Recherche d'une solution non-triviale $y(t) = e^{st}$

  $$Q(\mathrm{D})\,\{e^{s\cdot}\}\,(t) = s^n e^{st} + a_{n-1}s^{n-1}e^{st} + \cdots + a_1 s e^{st} + a_0 e^{st} = Q(s)\cdot e^{st}$$

  $$Q(s_i) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Q(\mathrm{D})\,\{e^{s_i\cdot}\}\,(t) = 0$$

Remarque: toute combinaison linéaire de solutions particulières satisfait également l'équation; *i.e.*

$$Q(\mathrm{D})\,\{y_1\} = 0 \quad \& \quad Q(\mathrm{D})\,\{y_2\} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q(\mathrm{D})\,\{c_1y_1 + c_2y_2\} = 0$$

Polynôme caractéristique

- Polynôme caractéristique

$$Q(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = \prod_{i=1}^{n}(s - s_i)$$

- Sous-espace des solutions de l'équation homogène

$$Q(\mathrm{D})\,\{y_0\} = 0$$

$$Q(\mathrm{D}) = \mathrm{D}^n + a_{n-1}\mathrm{D}^{n-1} + \cdots + a_1\mathrm{D} + a_0\mathrm{I}$$

Solution générale: $y_0(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{s_i t}$, avec $Q(s_i) = 0$

- Remarques
  - Nous supposons ici que les racines sont simples
  - La solution est une somme de modes «exponentiels» ou modes caractéristiques
  - Le sous-espace des solutions a n degrés de liberté
  - Il faut donc spécifier n *conditions initiales* indépendantes pour avoir une solution unique

Factorisation et modes caractéristiques

- Factorisation de l'opérateur différentiel

$$Q(\mathrm{D}) = \mathrm{D}^n + a_{n-1}\mathrm{D}^{n-1} + \cdots + a_1\mathrm{D} + a_0\mathrm{I} = (\mathrm{D} - s_n\mathrm{I})\cdots(\mathrm{D} - s_1\mathrm{I})$$

$$\rightarrow \boxed{Q(\mathrm{D})\{\ \}} \rightarrow \quad \Leftrightarrow \quad \rightarrow \boxed{\mathrm{D} - s_1\mathrm{I}} \rightarrow \ldots \rightarrow \boxed{\mathrm{D} - s_n\mathrm{I}} \rightarrow$$

s_i: racines du polynôme caractéristique $Q(s)$

- Modes caractéristiques: solutions de $(\mathrm{D} - s_n\mathrm{I})\cdots(\mathrm{D} - s_1\mathrm{I})\{y\}(t) = 0$
  - Modes exponentiels (racines simples réelles)

    $y(t) = c \cdot e^{s_i t}$ Solution de: $(\mathrm{D} - s_i\mathrm{I})\,\{y\}\,(t) = 0$

  - Modes mixtes (racine multiple d'ordre p)

    $y(t) = \left(c_1 + c_2 t + \cdots + c_p t^{p-1}\right) e^{s_1 t}$ Solution de: $(\mathrm{D} - s_1\mathrm{I})^p\,\{y\}\,(t) = 0$

  - Modes oscillants (deux racines complexes conjuguées)

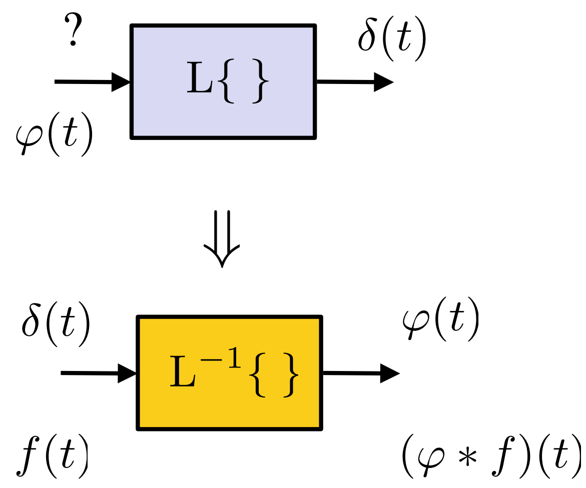
$$y(t) = \frac{c}{2}e^{j\theta} \cdot e^{(\alpha + j\beta)t} + \frac{c}{2}e^{-j\theta} \cdot e^{(\alpha - j\beta)t} = c \cdot e^{\alpha t} \cdot \cos(\beta t + \theta)$$

Solution réelle de: $\left((\mathrm{D} - \alpha\mathrm{I})^2 + \beta^2\mathrm{I}\right)\{y\}\,(t) = 0$

Fonction de Green et opérateur inverse

Définition: $\varphi(t)$ est la fonction de Green causale de l'opérateur différentiel linéaire $\mathrm{L}\{\ \}$ si et seulement si

$$\mathrm{L}\{\varphi\}(t) = \delta(t) \quad \text{et} \quad \varphi(t) = 0, \forall t < 0$$



- Opérateur inverse
  - Lorsque L est LIT avec φ bien définie, on spécifie l'opérateur inverse L^{-1}:

    $$\mathrm{L}^{-1}\{f\}(t) = (\varphi * f)(t)$$

  - Si $\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)| \mathrm{d}t < +\infty$, alors L^{-1} définit un système LIT stable t.q.

    $$\mathrm{L}^{-1}\mathrm{L} = \mathrm{L}\,\mathrm{L}^{-1} = \mathrm{I}$$

- Opérateur différentiel du 1er ordre: $\mathrm{L} = (\mathrm{D} - s_i\mathrm{I})$
  - $(\mathrm{D} - s_i\mathrm{I})\{\varphi_i\}(t) = \delta(t) \quad \Rightarrow \quad \varphi_i(t) = (\mathrm{D} - s_i\mathrm{I})^{-1}\{\delta\}(t)$
  - Solution causale (unique): $\varphi_i(t) = u(t) \cdot e^{s_i t}$ (partie causale du mode caractéristique)
  - Vérification: $\mathrm{D}\{u \cdot e^{s_i \cdot}\}(t) = \delta(t) + u(t) \cdot s_i e^{s_i t}$

    $$\mathrm{D}\{\varphi_i\}(t) - s_i\mathrm{I}\{\varphi_i\}(t) = \delta(t) + u(t) \cdot s_i e^{s_i t} - s_i u(t) \cdot e^{s_i t} = \delta(t)$$

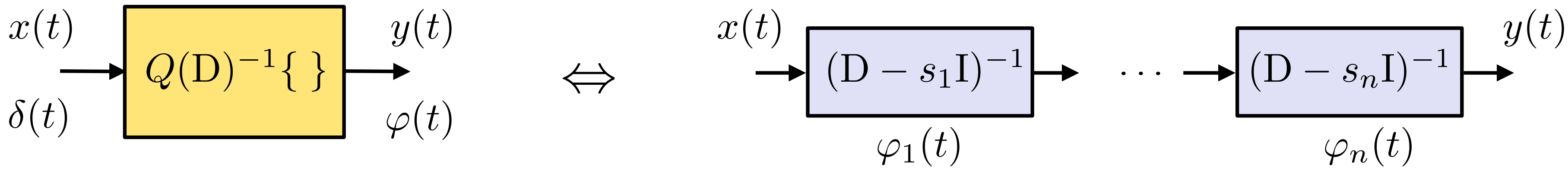
Inverse d'un opérateur différentiel d'ordre *n*

- Fonction de Green causale d'un opérateur différentiel d'ordre n

$$Q(\mathrm{D})\left\{\varphi\right\}(t)=\delta(t) \quad \Rightarrow \quad \varphi(t)=Q(\mathrm{D})^{-1}\left\{\delta\right\}(t) \quad ?$$

Solution $\varphi(t)=\left(\varphi_n*\cdots*\varphi_1\right)(t)$ avec $\varphi_i(t)=u(t)\cdot e^{s_i t}$

Implication $\varphi(t)$ = somme pondérée de modes caractéristiques (pour $t>0$)
(propriété de convolution des exponentielles causales)



Preuve:

$$Q(\mathrm{D})\left\{\varphi\right\}(t)=(\mathrm{D}-s_1\mathrm{I})\cdots(\mathrm{D}-s_n\mathrm{I})\left\{\varphi\right\}(t)=\delta(t)$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(t)=(\mathrm{D}-s_n\mathrm{I})^{-1}\cdots(\mathrm{D}-s_1\mathrm{I})^{-1}\left\{\delta\right\}(t) \qquad \text{(inverse de convolution)}$$

$$=\left(\varphi_n*\cdots*\varphi_2*\varphi_1\right)(t) \qquad \text{(composition des réponses impulsionnelles)}$$

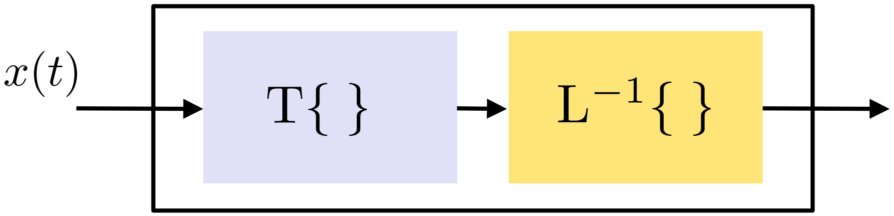
Forme générale de la réponse impulsionnelle

- Système différentiel généralisé

T: Opérateur LIT arbitraire (e.g., $\mathrm{T} = P(\mathrm{D})$)

$$\mathrm{L}\,\{y\}\,(t) = \mathrm{T}\{x\}(t)$$

$\mathrm{L} = Q(\mathrm{D})$: Opérateur différentiel d'ordre n



$$y(t) = \mathrm{L}^{-1}\mathrm{T}\{x\}(t) = (h * x)\,(t)$$

Opérateur inverse

Détermination de la réponse impulsionnelle

$$h(t) = \mathrm{L}^{-1}\mathrm{T}\{\delta\}(t) = \mathrm{T}\,\mathrm{L}^{-1}\{\delta\}(t) = \mathrm{T}\{\varphi\}(t) \quad \text{avec} \quad \mathrm{L}\{\varphi\} = \delta \text{ (fonction de Green)}$$

Commutativité

- Réponse impulsionnelle d'un système différentiel d'ordre n
  - Spécification: $\mathrm{L} = (\mathrm{D} - s_1\mathrm{I})\cdots(\mathrm{D} - s_n\mathrm{I})$ et $\mathrm{T} = P(\mathrm{D})$
  - $h(t) = P(\mathrm{D})\,\{\varphi_1 * \cdots \varphi_n\}(t)$ avec $\varphi_i(t) = u(t)\cdot e^{s_i t}$

    [= somme pondérée de modes caractéristiques ($+\, b_n\delta(t)$) pour $t \geq 0$]

  - **Explication intuitive**: L'excitation de Dirac revient à imposer des conditions initiales particulières. Ensuite, le système évolue librement.

Table 2.2 : Opérateurs de convolution

Opérateur	Notation	Réponse impulsionnelle
Générique	$\mathrm{T}\{\ \}$	$\mathrm{T}\{\delta\}(t)$
Identité	$\mathrm{I}\{\ \}$	$\delta(t)$
Décalage	$\mathrm{S}_\tau\{f\} = f(t-\tau)$	$\delta(t-\tau)$
Dérivée	$\mathrm{D}\{\ \} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$	$\delta'(t)$
Dérivée d'ordre n	$\mathrm{D}^n\{\ \} = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}$	$\delta^{(n)}(t)$
Intégrale	$\mathrm{D}^{-1}\{\ \} = \int_{-\infty}^{t}\ \mathrm{d}t$	$u(t)$
Intégrale multiple	$\mathrm{D}^{-n}\{\ \}$	$\frac{t_+^{n-1}}{(n-1)!}$
Intégrale fractionnaire	$\mathrm{D}^{-\alpha}\{\ \}$	$\frac{t_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$
Système différentiel simple	$(\mathrm{D}-s\mathrm{I})^{-1}\{\ \}$	$u(t)\cdot e^{st}$
Système différentiel itéré	$(\mathrm{D}-s\mathrm{I})^{-n}\{\ \}$	$\frac{t_+^{n-1}e^{st}}{(n-1)!}$
Différence finie	$\Delta_+\{f\}(t) = f(t) - f(t-1)$	$\delta(t) - \delta(t-1)$
Différences finies d'ordre n	$\Delta_+^n\{\ \}$	$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\delta(t-k)$
Système récursif avec délai	$(\mathrm{I}-z_0\mathrm{S}_\tau)^{-1}\{\ \}$	$\sum_{k=0}^{+\infty} z_0^k\delta(t-k\tau)$

2.6 STABILITE

- Stabilité BIBO
- Stabilité des systèmes causaux physiques
- Position des racines caractéristiques

Stabilité BIBO

- Système LIT: $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)h(\tau)\,\mathrm{d}\tau$
- Stabilité BIBO «Bounded Input Bounded Output»

$$|x(t)| \leqslant M_x < +\infty \quad \Rightarrow \quad |y(t)| \leqslant M_y < +\infty$$

Proposition: le système est stable BIBO si et seulement si $h \in L_1$; *i.e.*,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| \, \mathrm{d}\tau < +\infty$$

Preuve:

(a) Suffisant: $h \in L_1 \quad \Rightarrow$ Stabilité BIBO

$$|y(t)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)h(\tau)\,\mathrm{d}\tau \right| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t-\tau)| \cdot |h(\tau)|\,\mathrm{d}\tau \leqslant M_x \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| \, \mathrm{d}\tau = M_y < +\infty$$

(b) Nécessaire: Stabilité BIBO $\quad \Rightarrow \quad h \in L_1$

$x_0(t) = \pm M_x, \quad \forall t$ Excitation la plus défavorable pour $y_0(0)$: $\mathrm{sign}\,[x_0(-\tau)] = \mathrm{sign}\,[h(\tau)]$

$$y_0(0) = |y_0(0)| = \int_{-\infty}^{+\infty} M_x \, |h(\tau)| \, \mathrm{d}\tau = M_x \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| \, \mathrm{d}\tau \leqslant M_y$$

Donc $M_x, \; M_y < +\infty \quad \Rightarrow \quad h \in L_1$

Stabilité des systèmes causaux physiques

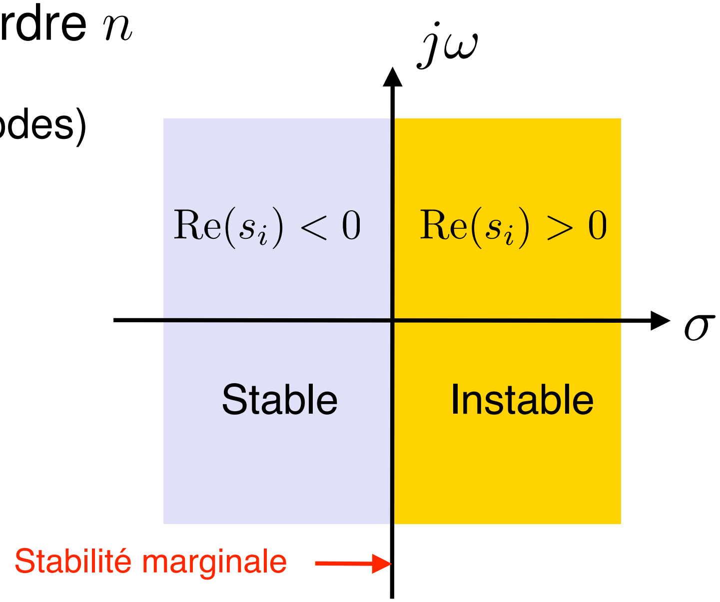
- Réponse impulsionnelle d'un système différentiel d'ordre n

$h(t)$ = somme pondérée d'exponentielles causales (modes)

Modes simples: $y_i(t) = u(t) \cdot e^{s_i t}$

$$\lim_{t \to +\infty} \{e^{s_i t}\} = \begin{cases} 0, & \mathrm{Re}(s_i) < 0 \\ \infty, & \mathrm{Re}(s_i) > 0 \end{cases}$$

Modes multiples: $u(t) \cdot e^{s_i t},\ t_+ e^{s_i t},\ t_+^2 e^{s_i t}, \cdots, t_+^{p-1} e^{s_i t}$



Position des racines caractéristiques

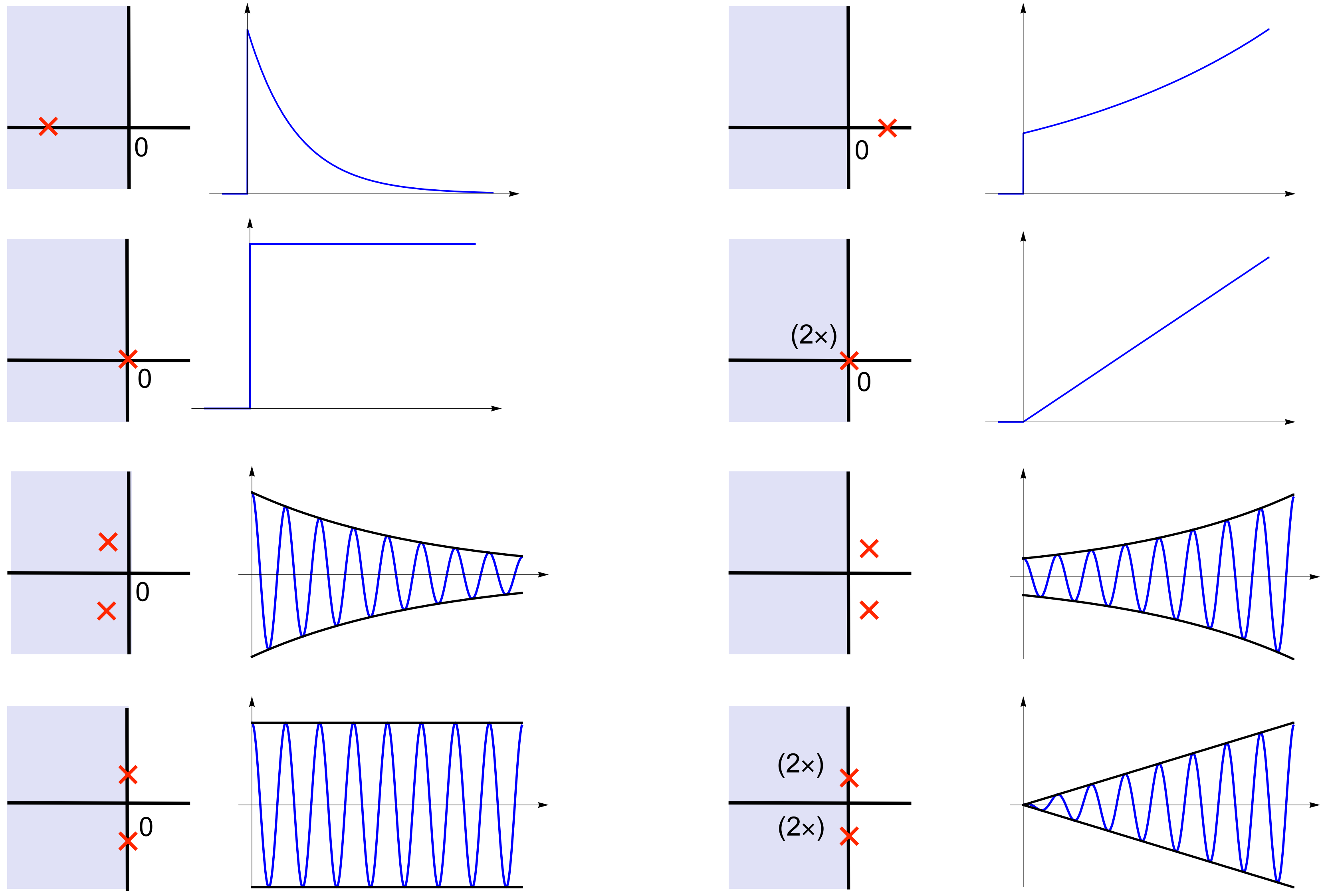
- Conditions de stabilité

(a) Le système est stable au sens BIBO si est seulement si toutes les racines caractéristiques sont strictement dans le demi-plan gauche

(b) Le système est instable si au moins une des racines est dans le demi-plan droit, ou s'il y a des racines multiples sur l'axe imaginaire.

(c) Le système est marginalement stable (oscillateur) s'il existe des racines simples sur l'axe imaginaire et qu'il n'y a pas de racines dans le demi-plan droit

Position des racines caractéristiques



2.7 COMPORTEMENT D'UN SYSTEME: Notions intuitives

- Effet des modes caractéristiques
- Phénomène de résonance
- Réponse à une excitation sinusoïdale

Effet des modes caractéristiques

Les modes caractéristiques d'un système s'atténuent, et pourtant. . .

Ils jouissent d'un statut spécial puisqu'ils peuvent subsister sans apport extérieur. De ce fait, la réponse du système est d'autant plus forte que le signal d'entrée est «semblable» au mode prépondérant.

- Cas d'un système du 1er ordre avec une excitation exponentielle

$$h(t) = u(t) \cdot e^{s_1 t}, \quad x(t) = u(t) \cdot e^{st}$$

$$y(t) = (h * x)(t) = \frac{u(t)}{s_1 - s}\left(e^{s_1 t} - e^{st}\right)$$

(*cf.* Table de convolution)

D'où la réponse s'amplifie lorsque $s \to s_1$. A la limite, on obtient le phénomène de **résonance**.

De façon converse, la réponse s'atténue lorsque le signal d'entrée est différent du mode naturel; c.à.d. quand $|s - s_1|$ est grand.

L'argument se généralise pour un système d'ordre n.

Phénomène de résonance

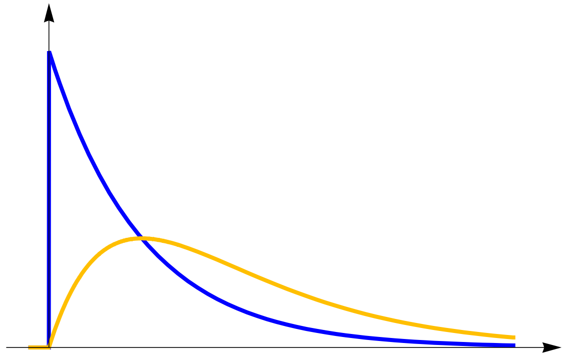
- Cas d'un système du 1^er ordre

$$h(t) = u(t) \cdot e^{s_1 t}, \quad x(t) = u(t) \cdot e^{(s_1-\varepsilon)t}$$

$$y(t) = (h * x)(t) = \frac{u(t)}{\varepsilon}\left(e^{s_1 t} - e^{(s_1-\varepsilon)t}\right)$$

En prenant la limite lorsque $\varepsilon \to 0$ (règle de l'Hospital), on obtient

$$\lim_{\varepsilon \to 0} y(t) = t_+ e^{s_1 t}$$

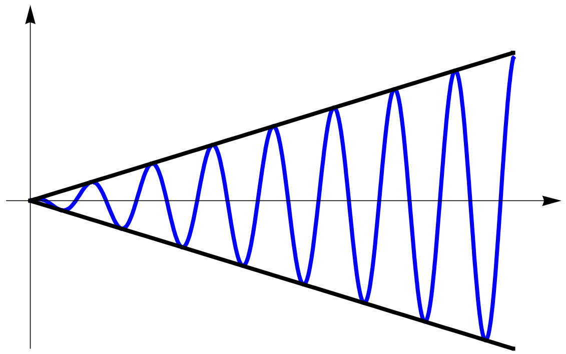


Bien que la réponse s'atténue toujours, elle contient maintenant un facteur d'amplification t.

- Danger du phénomène de résonance

Cas de l'oscillateur (marginalement stable)

$$s_1 = j\omega_1$$



Bien que $h(t) = u(t)e^{j\omega_1 t}$ et l'excitation soient bornées,
la réponse $y(t) = (h * x)(t) = t_+ e^{j\omega_1 t}$ est divergente.

Attention à la catastrophe!

Réponse à une excitation sinusoïdale

- Système LIT (cas général)

Réponse impulsionnelle: $h(t)$

Calcul de la réponse à une excitation sinusoïdale complexe $x(t) = e^{j\omega t}$

$$y(t) = \left(h * e^{j\omega\cdot}\right)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{j\omega(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau = e^{j\omega t}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau}_{H(\omega)=A\cdot e^{j\theta}} = A\cdot e^{j(\omega t+\theta)}$$

Pour ω fixe, $H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t = A\cdot e^{j\theta}$ est une constante complexe.

Implication: la réponse d'un système LIT à une excitation sinusoïdale complexe est une sinusoïde complexe de même fréquence avec un facteur d'atténuation A et un déphasage θ qui dépendent de la fréquence.

En faisant varier ω, on construit la **réponse fréquentielle** du système

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t$$

qui, comme nous le verrons au chapitre 5, permet une caractérisation complète du système dans le domaine des fréquences.