Série 5

Exercice 5.1 : (BASIQUE) CONVOLUTION

La transformée de Fourier est pour vous un nouvel outil pour l'étude des signaux qu'il faut apprendre à maîtriser. Elle permet notamment de calculer plus aisément les produits de convolution, ce qu'illustre cet exercice.

Soit la fonction $f(t) = \mathrm{e}^{st}u(t)$, où s est un paramètre réel strictement négatif.

1) Déterminer sa transformée de Fourier $F(\omega)$.

2) Soient $f_1(t) = \mathrm{e}^{-t}u(t)$ et $f_2(t) = \mathrm{e}^{-2t}u(t)$. Donner leurs transformées de Fourier $F_1(\omega)$ et $F_2(\omega)$. Développer le produit $F_3(\omega) = F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)$ en fractions simples par rapport à la variable $X = \mathrm{j}\omega$.

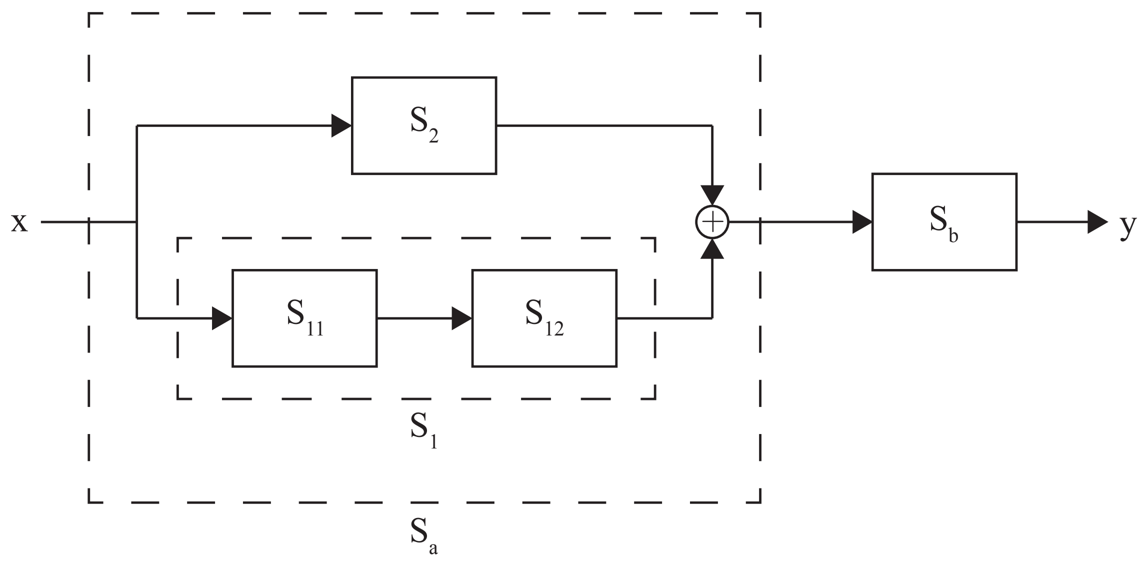
3) En utilisant les résultats des deux premières questions, donner la transformée de Fourier inverse $f_3(t)$ de $F_3(\omega)$.

4) Quelle relation lie les fonctions $f_1(t)$, $f_2(t)$ et $f_3(t)$ dans le domaine temporel ? Le vérifier en utilisant les tables de convolution.

Exercice 5.2 : (BASIQUE) ANALYSE DE SYSTÈME

Voici un nouvel exercice type d'analyse de système tel que déjà rencontré dans la série 2. La nouveauté réside ici dans le fait que l'on dispose désormais d'une nouvelle façon de représenter un système via la transformée de Fourier. On constatera que cet exercice pourrait aussi être en partie résolu en faisant les opérations dans le domaine temporel, mais nécessiterait des calculs plus laborieux qu'en utilisant l'analyse fréquentielle.

On considère le système représenté par le schéma-bloc ci-dessous. Pour simplifier son analyse, on traitera d'abord le sous-système S_1 composé de S_{11} et S_{12}, puis le système S_a constitué de S_1 et S_2. Enfin, on obtiendra le système complet S en mettant ensemble S_a et S_b.



1) Analyse de S_1.

$$\mathrm{S}_{11} : (3\mathrm{D} + 2\mathrm{I})\{y_{11}\}(t) = x_{11}(t)$$
$$\mathrm{S}_{12} : \frac{y_{12}(t)}{2} = x_{12}(t-6)$$

(a) Donner $h_{11}(t)$.
(b) Donner $H_{12}(\omega)$.
(c) Donner $H_1(\omega)$.

2) Analyse de S_a.

$$\mathrm{S}_2 : 6y_2'(t) + 4y_2(t) = x_2(t)$$

(a) Donner $h_2(t)$.
(b) Donner $H_a(\omega)$.

3) Analyse du système complet.

$$\mathrm{S}_b : (3\mathrm{D} + 2\mathrm{I})\{x_b\}(t) = y_b(t)$$

(a) Donner $h_b(t)$.
(b) Donner $H(\omega)$ ainsi que l'équation différentielle reliant x à y pour le système complet.
(c) Le système est-il causal ? BIBO-stable ? Justifier les réponses.
(d) Exprimer et dessiner les réponses du système complet aux entrées suivantes :
  i. $x(t) = \frac{1}{4}\mathrm{rect}(t+6)$
  ii. $x(t) = \mathrm{u}(\frac{t}{\sqrt{2}})$

Exercice 5.3 : (BASIQUE) DUALITÉ

La propriété de dualité permet de calculer la transformée de Fourier d'un signal si l'on sait qu'il est lui-même une tranformée de Fourier (Table A-7, ligne 2). Cette propriété fondamentale de la transformée de Fourier permet donc de doubler le contenu d'information de la table A-8 des transformées de Fourier des signaux de base. Cet exercice est une illustration typique de ce principe.

On considère la fonction $f(t) = \frac{2}{t^2+1}$.

1) Décomposer $f(t)$ en éléments simples par rapport à la variable $X = \mathrm{j}t$.
On rappelle que $t^2 + 1 = -(\mathrm{j}t - 1)(\mathrm{j}t + 1)$.

2) Donner la transformée de Fourier de $s_1(t) = u(t)\mathrm{e}^{-t}$.
Par renversement, en déduire celle de $s_2(t) = u(-t)\mathrm{e}^{t}$.

3) Utiliser la propriété de dualité ainsi que les deux questions précédentes pour montrer que la transformée de Fourier de $f(t)$ est $F(\omega) = 2\pi\mathrm{e}^{-|\omega|}$.

4) Par dualité, en déduire la transformée de Fourier de $g(t) = \mathrm{e}^{-|t|}$.

Exercice 5.4 : (BASIQUE) DÉCALAGE ET DILATATION

Dans cet exercice, on cherche à se familiariser avec les propriétés de la transformée de Fourier. En particulier, on travaille ici avec les équivalents dans le domaine fréquentiel des opérations sur les signaux vues lors des premières semaines de cours (décalage, dilatation, ...).

Soient les signaux $x(t) = \mathrm{rect}(t)$ et $y(t) = x(t - 1/2) + x(t + 1/2)$.

1) Déterminer la transformée de Fourier $X(\omega)$ de $x(t)$.

2) En déduire la transformée de Fourier $Y(\omega)$ de $y(t)$ sans faire l'intégrale.

3) Exprimer $y(t)$ à l'aide d'une version dilatée de $x(t)$.

4) Utiliser le résultat précédent pour vérifier la réponse donnée en **2)**.