Série 7

Correction de l'exercice 7.1 : ÉCHANTILLONNAGE ET PÉRIODISATION

1) En utilisant les tables de transformées de Fourier, on trouve directement que $F(\omega) = \mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{2}}$. On remarque ainsi que la transformée de Fourier d'une gaussienne (telle que $f(t)$) est également une gaussienne.

2) L'opération d'échantillonnage avec un pas T_0 se traduit par la multiplication par un train de dirac où $T = T_0$. En se rappelant de la propriété de multiplication par l'impulsion de dirac $f(t)\,\delta(t-\tau) = f(\tau)\,\delta(t-\tau)$, on a donc

$$\begin{aligned} f_{\text{éch}}(t) &= f(t) \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(t-kT_0) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(kT_0)\delta(t-kT_0). \end{aligned}$$

3) En utilisant la propriété de multiplication de la transformée de Fourier ainsi que les tables pour trouver la transformée de Fourier du train de dirac et en se souvenant que $f(t)*\delta(t-\tau) = f(t-\tau)$, on obtient

$$\begin{aligned} F_{\text{éch}}(\omega) &= \mathcal{F}\left\{ f(\cdot) \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(\cdot - kT_0) \right\}(\omega) \\ &= \frac{1}{2\pi} F(\omega) * \frac{2\pi}{T_0} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(\omega - n\frac{2\pi}{T_0}) \\ &= \frac{1}{T_0} \sum_{n\in\mathbb{Z}} F(\omega - n\frac{2\pi}{T_0}). \end{aligned}$$

On observe qu'il s'agit d'une périodisation de $F(\omega)$ à la période $\frac{2\pi}{T_0}$.

4) La périodisation d'une fonction à période T_1 correspond à une convolution avec un train de dirac où $T = T_1$. En se rappelant de la propriété de convolution par l'impulsion de dirac $f(t)*\delta(t-\tau) = f(t-\tau)$, on a donc

$$\begin{aligned} f_{per}(t) &= f(t) * \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(t-kT_1) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(t-kT_1). \end{aligned}$$

5) En utilisant la propriété de convolution de la transformée de Fourier ainsi que les tables pour trouver la transformée de Fourier du train de dirac et en se souvenant que $f(t)\,\delta(t-\tau) = f(\tau)\,\delta(t-\tau)$, on obtient

$$\begin{aligned} F_{per}(\omega) &= \mathcal{F}\left\{ f(\cdot) * \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(\cdot - kT_1) \right\} \\ &= F(\omega)\, \frac{2\pi}{T_1} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(\omega - n\frac{2\pi}{T_1}) \\ &= \frac{2\pi}{T_1} \sum_{n\in\mathbb{Z}} F(n\frac{2\pi}{T_1})\delta(\omega - n\frac{2\pi}{T_1}). \end{aligned}$$

On observe qu'il s'agit d'un échantillonnage de $F(\omega)$ à un pas $\frac{2\pi}{T_1}$.

6) Du fait que

— la convolution temporelle devienne une multiplication dans le domaine de Fourier,

— la multiplication temporelle devienne une convolution en fréquence,

— la transformée d'un train de dirac reste un train de dirac chez Fourier,

pour une fonction quelconque dans le domaine temporel, l'échantillonnage revient à périodiser sa transformée de Fourier en fréquence, et la périodisation correspond à un échantillonnage de sa transformée de Fourier. Il a en outre une relation inverse entre le pas d'échantillonnage et la période dans leurs domaines respectifs.

Correction de l'exercice 7.2 : INTERPOLATION

1) Par définition, $x_{\text{éch}}(t) = x(t) \cdot \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(t - kT)$. En utilisant la propriété bien connue que $f(t) \cdot \delta(t - t_0) = f(t_0) \cdot \delta(t - t_0)$, on en déduit que :

$$x_{\text{éch}}(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(kT)\delta(t - kT).$$

Sachant enfin que $\varphi(t) * \delta(t - t_0) = \varphi(t - t_0)$, on a de plus :

$$y(t) = \varphi(t) * x_{\text{éch}}(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(kT)\varphi(t - kT).$$

2) La transformée de Fourier transforme une multiplication en convolution à un facteur 2π près (table A-7). On en déduit, en utilisant la transformée de Fourier d'un peigne de Dirac (table A-8) :

$$\begin{aligned} X_{\text{éch}}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} X(\omega) * \frac{2\pi}{T} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(\omega - \frac{2\pi n}{T}) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n\in\mathbb{Z}} X(\omega - \frac{2\pi n}{T}). \end{aligned}$$

On retrouve que l'échantillonnage dans le domaine temporel correspond à une périodisation dans le domaine fréquentiel. On en déduit enfin que

$$Y(\omega) = \Phi(\omega) X_{\text{éch}}(\omega) = \frac{1}{T}\Phi(\omega) \cdot \sum_{n\in\mathbb{Z}} X(\omega - \frac{2\pi n}{T}).$$

3) On vérifie sans difficulté que $\mathrm{S}_3\{\alpha f + g\}(t) = \alpha \mathrm{S}_3\{f\}(t) + \mathrm{S}_3\{g\}(t)$. En effet, puisque les opérations d'échantillonnage et de filtrage sont linéaires, leur mise en série l'est donc également.

Par contre, le système n'est pas invariant par translation. Pour le montrer, on commence par calculer la sortie du système à l'entrée $x_1(t) = \mathrm{rect}(2t)$. On a tout d'abord $x_{1,\text{éch}}(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{rect}(4k)\delta(t - 2k) = \delta(t)$ (en effet, $\mathrm{rect}(4k) = 1$ si $k = 0$ et 0 sinon). De là on déduit,

$$y_1(t) = x_{1,\text{éch}}(t) * \varphi_3(t) = \delta(t) * \mathrm{tri}(\frac{t}{2}) = \mathrm{tri}(\frac{t}{2}).$$

Par contre, comme $x_2(t) = x_1(t - \frac{1}{2}) = \mathrm{rect}(2t - 1)$, on a $x_{2,\text{éch}}(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{rect}(4k - 1)\delta(t - 2k) = 0$ (car $\mathrm{rect}(4k - 1) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$). Donc

$$y_2(t) = x_{1,\text{éch}}(t) * \varphi_3(t) = 0.$$

Autrement dit :

$$\mathrm{S}_3\{x_1(\cdot - 1/2)\}(t) = 0 \neq \mathrm{S}_3\{x_1\}(t - 1/2) = \mathrm{tri}\left(\frac{t - 1/2}{2}\right),$$

ce qui constitue un contre-exemple à l'invariance par translation.

4) Pour calculer les sorties, on cherche à utiliser la formule de la question **1)**. On calcule donc d'abord la valeur des $x(kT)$. On a $x(kT) = 12$ si $k = 1$, -16 si $k = 2$, -36 si $k = 3$ et 0 pour les autres valeurs de $k \in \mathbb{Z}$. On en déduit donc, en prenant comme réponse impulsionnelle les fonctions proposées :

$$\begin{aligned}
y_1(t) &= 12\delta(t-2) - 16\delta(t-4) - 36\delta(t-6),\\
y_2(t) &= 12\mathrm{rect}\left(\frac{t-2}{2}\right) - 16\mathrm{rect}\left(\frac{t-4}{2}\right) - 36\mathrm{rect}\left(\frac{t-6}{2}\right),\\
y_3(t) &= 12\mathrm{tri}\left(\frac{t-2}{2}\right) - 16\mathrm{tri}\left(\frac{t-4}{2}\right) - 36\mathrm{tri}\left(\frac{t-6}{2}\right).
\end{aligned}$$

Les graphiques sont représentés dans la feuille de réponses.

5) On a $y_{\text{éch}}(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} y(kT)\delta(t-kT)$ donc :

$$y_{\text{éch}}(t) - x_{\text{éch}}(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (y(kT) - x(kT))\delta(t-kT).$$

Cette somme de Diracs est nulle si et seulement si chacun des coefficients sont nuls, c'est-à-dire si et seulement si $\forall k \in \mathbb{Z}$, $x(kT) = y(kT)$. C'est le cas pour les systèmes S_2 et S_3 mais pas pour le systéme S_1. En effet, $y_1(kT)$ est infini pour $k = 1, 2, 3$ car $\delta(0) =$ "∞" (voir p. 2-13).

Remarque 1 *Lorsque l'on représente graphiquement un signal échantilloné $x_{éch}(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(nT)\delta(t-nT)$, la hauteur de la flèche en nT correspond au coefficient $x(nT)$ du Dirac. Cependant, $x_{éch}(nT) \neq x(nT)$, car le Dirac prend une valeur infinie en ce point !*

Correction de l'exercice 7.3 : CONVOLUTIONS ET PRODUITS SCALAIRES DANS LE DOMAINE DE FOURIER

1) On utilise la propriété de convolution de la transformée de Fourier, soit

$$\mathcal{F}\{f(t) * g(t)\} = \mathcal{F}\{f(t)\} \cdot \mathcal{F}\{g(t)\}.$$

Les tables de transformées de Fourier nous donnent $\mathcal{F}\{\mathrm{sinc}(t)\} = \mathrm{rect}(\frac{\omega}{2\pi})$, d'où $X(\omega) = \mathrm{rect}(\frac{\omega}{2\pi}) \cdot \mathrm{rect}(\frac{\omega}{2\pi}) = \mathrm{rect}(\frac{\omega}{2\pi})$.
Finalement, $x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\} = \mathrm{sinc}(t)$.

Remarque 2 $\mathrm{rect}(\cdot)$ *ne prend que les valeurs* 0 *et* 1. *Puisque* $0^n = 0$ *et* $1^n = 1$, *on a donc* $\mathrm{rect}^n(\cdot) = \mathrm{rect}(\cdot)$ *pour tout* $n > 0$.

2) Les tables de transformées de Fourier nous donnent $\mathcal{F}\{\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(t-k)\} = 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(\omega - 2\pi k)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
X(\omega) &= \mathcal{F}\{\mathrm{sinc}(t)\} \cdot \mathcal{F}\left\{\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(t-k)\right\}\\
&= \mathrm{rect}(\frac{\omega}{2\pi}) \cdot 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(\omega - 2\pi k)\\
&= 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{rect}(\frac{\omega}{2\pi})\delta(\omega - 2\pi k)\\
&= 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{rect}(\frac{2\pi k}{2\pi})\delta(\omega - 2\pi k)\\
&= 2\pi\delta(\omega).
\end{aligned}$$

La dernière étape s'obtient en se rappelant que $\delta(\omega - \omega_0)f(\omega) = \delta(\omega - \omega_0)f(\omega_0)$, et en remarquant que $\mathrm{rect}(k) = 1$ si $k = 0$ et 0 sinon (pour k entier).
Pour finir, $x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\{2\pi\delta(\omega)\} = 1$ (par dualité).

3) Les tables de transformées de Fourier nous donnent $\mathcal{F}\left\{\sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta(t-3k)\right\} = \frac{2\pi}{3}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta(\omega-\frac{2\pi}{3}k)$. Ensuite,

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \mathrm{rect}(\frac{\omega}{2\pi})\cdot\frac{2\pi}{3}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta(\omega-\frac{2\pi}{3}k) \\ &= \frac{2\pi}{3}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\mathrm{rect}(\frac{2\pi k}{3\cdot 2\pi})\delta(\omega-\frac{2\pi}{3}k) \\ &= \frac{2\pi}{3}[\delta(\omega-\frac{2\pi}{3})+\delta(\omega)+\delta(\omega+\frac{2\pi}{3})]. \end{aligned}$$

Finalement, en utilisant à nouveau les tables, on a

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{2\pi}{3}\delta(\omega)\right\} + \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{2\pi}{3}[\delta(\omega-\frac{2\pi}{3})+\delta(\omega+\frac{2\pi}{3})]\right\} = \frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cos(\frac{2\pi}{3}t)$$

4) Pour cette question et les suivantes, nous utilisont la relation de Parseval qui, pour des signaux de carré intégrable $f(t)$ et $g(t)$, donne :

$$\langle f(t),g(t)\rangle_{L_2(\mathbb{R})} \equiv \int_{\mathbb{R}} f(t)g^*(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\langle F(\omega),G(\omega)\rangle_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Ici, les tables de transformées de Fourier nous donnent $\mathcal{F}\{\mathrm{sinc}(t)\} = \mathrm{rect}(\frac{\omega}{2\pi})$, d'où $\mathcal{F}\{\mathrm{sinc}(t+5)\} = \mathrm{rect}(\frac{\omega}{2\pi})\mathrm{e}^{\mathrm{j}5\omega}$ (propriété de translation, cf. tables).
Alors,

$$\begin{aligned} \langle\mathrm{sinc}(t),\mathrm{sinc}(t+5)\rangle_{L_2(\mathbb{R})} &= \frac{1}{2\pi}\langle\mathrm{rect}(\frac{\omega}{2\pi}),\mathrm{rect}(\frac{\omega}{2\pi})\mathrm{e}^{\mathrm{j}5\omega}\rangle_{L_2(\mathbb{R})} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{rect}(\frac{\omega}{2\pi})\left[\mathrm{rect}(\frac{\omega}{2\pi})\mathrm{e}^{\mathrm{j}5\omega}\right]^*\,\mathrm{d}\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\mathrm{rect}(\frac{\omega}{2\pi})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}5\omega}\,\mathrm{d}\omega \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left\{\mathrm{rect}(\frac{\omega}{2\pi})\right\}(t)\Big|_{t=-5} \\ &= \mathrm{sinc}(t)|_{t=-5} = \mathrm{sinc}(-5) = 0. \end{aligned}$$

On a utilisé le fait que $\mathrm{rect}^2(\cdot) = \mathrm{rect}(\cdot)$, ainsi que la définition de la transformée de Fourier inverse (c.f. cours, p. 4-5).

5) Pour les signaux T-périodiques $f_T(t)$ et $g_T(t)$, la relation de Parseval devient

$$\langle f_T(t),g_T(t)\rangle_{L_2([0,T])} \equiv \frac{1}{T}\int_0^T f_T(t)g_T^*(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k d_k^*,$$

où c_k et d_k sont les coefficients des séries de Fourier de $f(t)$ et $g(t)$, respectivement (c.f. cours, pp. 4-56 et 4-57).
Dans cet exercice, la période $T=2$ implique que $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \pi$. Par la formule d'Euler, $\cos(3\pi t)$ peut être écrit comme $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}3\omega_0 t}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}3\omega_0 t}$, ce qui correspond aux coefficients de Fourier suivants :

$$c_k = d_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } k=\pm 3, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La relation de Parseval donne alors $\langle\cos(3\pi t),\cos(3\pi t)\rangle_{L_2([0,2])} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k d_k^* = \frac{1}{2}$.

6) En utilisant les même outils que précédemment, on trouve facilement que les coefficients de la série de Fourier de $\sin(4\omega_0 t)$ et $\sin(7\omega_0 t)$ avec $\omega_0 = \pi$, sont respectivement

$$c_k = \begin{cases} -\frac{\mathrm{j}}{2} & \text{si } k = 4, \\ +\frac{\mathrm{j}}{2} & \text{si } k = -4, \\ 0 & \text{sinon}\,; \end{cases} \quad \text{et} \quad d_k = \begin{cases} -\frac{\mathrm{j}}{2} & \text{si } k = 7, \\ +\frac{\mathrm{j}}{2} & \text{si } k = -7, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par conséquent, $\langle \sin(4\pi t), \sin(7\pi t)\rangle_{L_2([0,2])} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k d_k^* = 0$.

Correction de l'exercice 7.4 : ANALYSEUR SPECTRAL

1) Partons de la formule

$$x(t) = \mathrm{rect}(t) * \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(t-2k).$$

On doit calculer la transformée de Fourier d'une convolution : c'est le produit des transformées de Fourier. Le calcul se fait en utilisant la table A-8 et est résumé dans le tableau suivant.

Temps	Fréquence
$\mathrm{rect}(t)$	$\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$
$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(t-2k)$	$\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(t-\pi k)$
$\mathrm{rect}(t) * \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(t-2k)$	$\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \cdot \pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(\omega-\pi k)$
	$= \pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) \delta(\omega-\pi k)$

On a utilisé la formule habituelle : $f(\omega).\delta(\omega-\omega_0) = f(\omega_0).\delta(\omega-\omega_0)$. La réponse est donc

$$X(\omega) = \pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) \delta(\omega-\pi k).$$

2) (a) Le graphique se trouve sur la feuille de réponses.

(b) On doit cette fois calculer la transformée de Fourier d'un produit : c'est la convolution des transformées de Fourier (à un facteur $\frac{1}{2\pi}$ près). On résume de nouveau les calculs par le tableau suivant.

Temps	Fréquence
$x(t)$	$\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) \delta(\omega-\pi k)$
$\mathrm{rect}(t/T)$	$T\,\mathrm{sinc}\left(T\omega/(2\pi)\right)$
$\mathrm{rect}\left(t/T\right) \cdot x(t)$	$\frac{1}{2\pi} T\,\mathrm{sinc}\left(T\omega/(2\pi)\right) * \pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) \delta(\omega-\pi k)$
	$= \frac{T}{2} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) \mathrm{sinc}\left(\frac{T}{2\pi}(\omega-k\pi)\right)$

On a cette fois utilisé que $f(\omega) * \delta(\omega-\omega_0) = f(\omega-\omega_0)$. Au final :

$$Y(\omega) = \frac{T}{2} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) \mathrm{sinc}\left(\frac{T}{2\pi}(\omega-k\pi)\right).$$

(c) On doit remarquer ici que $\mathrm{sinc}\left(\frac{k}{2}\right)$ vaut 1 si $k = 0$, 0 si k est pair (car sinc s'annule aux entiers) et non nul et égal à $(-1)^{\frac{k-1}{2}} \frac{2}{k\pi}$ si k est impair. Le graphique s'en déduit et se trouve sur la feuille de réponses.

(d) Le paramètre T contrôle la largeur du support de $Y(\omega)$. Lorsque T augmente, les sinc deviennent de plus en plus localisés autour des supports des diracs composant $X(\omega)$.

3) (a) C'est le même calcul que lors de la question **2)** (b). Toujours en utilisant un tableau :

Temps	Fréquence
$x(t)$	$\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) \delta(\omega - \pi k)$
$w_T(t)$	$W_T(\omega)$
$x(t) \cdot w_T(t)$	$\frac{1}{2\pi} W_T(\omega) * \pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) \delta(\omega - \pi k)$
	$= \frac{1}{2} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) W_T(\omega - k\pi)$

D'où : $Y(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) W_T(\omega - k\pi)$.

(b) Une méthode consiste à calculer la transformée de Fourier de $\mathrm{tri}(t) = \mathrm{rect}(t) * \mathrm{rect}(t)$ puis d'utiliser la propriété de dilatation de la transformée de Fourier (table A-7, ligne 6). On obtient ainsi :

Temps	Fréquence
$\mathrm{rect}(t)$	$\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$
$\mathrm{tri}(t) = \mathrm{rect}(t) * \mathrm{rect}(t)$	$\left(\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)\right)^2$
$\mathrm{tri}(t/20)$	$20\left(\mathrm{sinc}\left(\frac{20\omega}{2\pi}\right)\right)^2$

Finalement,

$$W_{20}(\omega) = 20\left(\mathrm{sinc}\left(\frac{20\omega}{2\pi}\right)\right)^2.$$

En remplaçant dans l'expression de la question précédente, on obtient :

$$Y(\omega) = 10 \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{sinc}\left(\frac{k}{2}\right)\left(\mathrm{sinc}\left(\frac{10}{\pi}(\omega - \pi k)\right)\right)^2.$$

(c) La nouvelle estimation de la réponse est beaucoup plus localisée autour des supports des dirac de la réponse fréquentielle idéale (celle de $x(t)$). Les "lobes" décroissent beaucoup plus rapidement.

4) La stratégie est d'utiliser une fenêtre de pondération dont la transformée de Fourrier a des "lobes" qui décroissent le plus rapidement possible. On a des exemples de telles fonctions à la page 4-73 du cours.