Série 4

Correction de l'exercice 4.1 : SERIES DE FOURIER COMPLEXES

Les fonctions considérées sont 3-périodiques, soit $T = 3$. On a donc $\omega_0 = 2\pi/T = 2\pi/3$.

Pour les questions **1)** à **4)**, on va chercher à représenter directement les fonctions comme sommes d'exponentielles de la forme $\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0}$. Les pondérations de ces exponentielles seront donc directement les coefficients de Fourier désirés.

1) On utilise la formule d'Euler pour représenter le cosinus en somme d'exponentielles :
$f_1(t) = \cos(3\omega_0 t) = \frac{\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}3\omega_0 t} + e^{-\mathrm{j}3\omega_0 t}\right)}{2} \implies c[n] = \begin{cases} 1/2 & \text{si } n = \pm 3, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

2) $f_2(t) = 2\mathrm{e}^{\mathrm{j}0\omega_0 t} \implies c[n] = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

3) $f_3(t) = \cos(2\omega_0 t + \phi) = \frac{\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi} e^{\mathrm{j}2\omega_0 t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\phi} e^{-\mathrm{j}2\omega_0 t}\right)}{2} \implies c[n] = \begin{cases} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}}{2} & \text{si } n = 2, \\ \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\phi}}{2} & \text{si } n = -2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Pour les valeurs particulières de ϕ :

— $\phi = 0$: $f_3(t) = \cos(4\pi t/3)$ et $c[\pm 2] = \frac{1}{2}$,
— $\phi = \pi/2$: $f_3(t) = -\sin(4\pi t/3)$ et $c[\pm 2] = \pm\frac{\mathrm{j}}{2}$,
— $\phi = \pi/3$: $f_3(t) = \cos(4\pi t/3)/2 - \sqrt{3}\sin(4\pi t/3)/2$ et $c[\pm 2] = \frac{\mathrm{e}^{\pm \mathrm{j}\pi/3}}{2}$.

4) $f_4(t) = \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}}{2}\right)^2 = \frac{\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\omega_0 t} + 2 + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega_0 t}\right)}{4}$ donc $c[n] = \begin{cases} 1/2 & \text{si } n = 0, \\ 1/4 & \text{si } n = \pm 2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

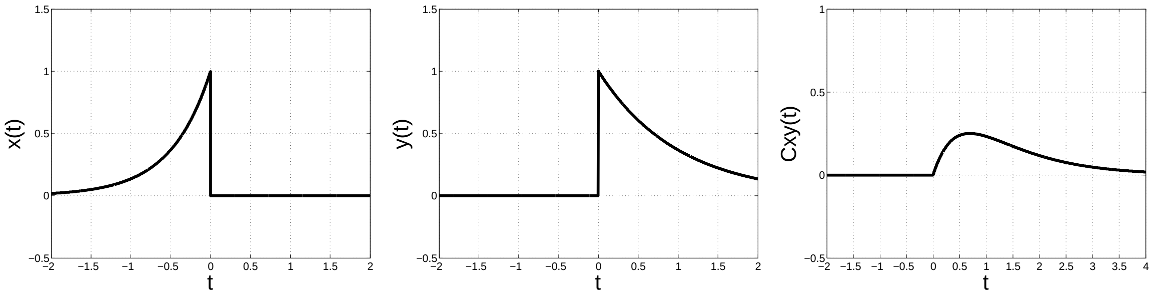
5) Pour $n \neq 0$:

$$\begin{aligned} c[n] &= \frac{1}{3}\int_{-3/2}^{3/2} \mathrm{rect}(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\, \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{3}\int_{-1/2}^{1/2} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0 t}\, \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{3}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega_0/2} - \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_0/2}}{-\mathrm{j}n\omega_0} \\ &= \frac{\sin(\pi n/3)}{\pi n}, \end{aligned}$$

en utilisant pour la dernière égalité la formule d'Euler pour le sinus et le fait que $\omega_0 = 2\pi/3$. Enfin, $c[0] = \frac{1}{3}\int_{-1/2}^{1/2} 1\, \mathrm{d}t = 1/3$.

Correction de l'exercice 4.2 : CORRÉLATION ET CONVOLUTION

1) D'après la relation entre intercorrélation et convolution :
$c_{xy}(\tau) = x^{\vee}(\tau) * y^*(\tau) = u(\tau)e^{-2\tau} * u(\tau)e^{-\tau} = u(\tau)(e^{-\tau} - e^{-2\tau})$

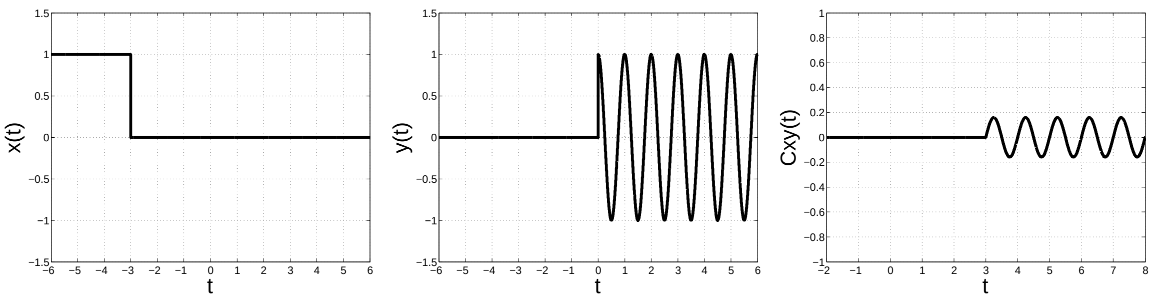


(a) $x(t) = u(-t)e^{2t}$ (b) $y(t) = u(t)e^{-t}$ (c) $c_{xy}(\tau) = u(\tau)(e^{-\tau} - e^{-2\tau})$

FIGURE 1 – Graphes pour la question **4.2.1**

2) Voici un calcul détaillé possible :

$$
\begin{aligned}
c_{xy}(\tau) &= x^{\vee}(\tau) * y^{*}(\tau) \\
&= u(\tau-3) * u(\tau)\cos(\omega\tau) \\
&= (\delta(\tau-3) * u(\tau)) * u(\tau)\cos(\omega\tau) \\
&= \delta(\tau-3) * (u(\tau) * u(\tau)\cos(\omega\tau)) \\
&= \delta(\tau-3) * \left(u(\tau) * u(\tau)\frac{1}{2}(e^{j\omega\tau} + e^{-j\omega\tau})\right) \\
&= \delta(\tau-3) * \left((u(\tau) * u(\tau)\frac{1}{2}e^{j\omega\tau}) + (u(\tau) * \frac{1}{2}u(\tau)e^{-j\omega\tau})\right) \\
&= \delta(\tau-3) * \left(u(\tau)\frac{e^{j\omega\tau}-1}{2j\omega} + u(\tau)\frac{e^{-j\omega\tau}-1}{-2j\omega}\right) \\
&= \delta(\tau-3) * u(\tau)\frac{e^{j\omega\tau} - e^{-j\omega\tau}}{2j\omega} \\
&= \delta(\tau-3) * u(\tau)\frac{1}{\omega}\sin(\omega\tau) \\
&= u(\tau-3)\frac{1}{\omega}\sin(\omega(\tau-3))
\end{aligned}
$$

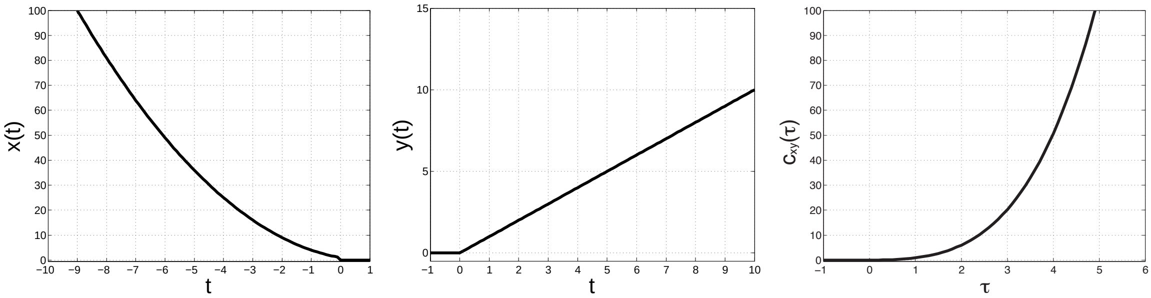


(a) $x(t) = u(-t-3)$ (b) $y(t) = u(t)\cos(2\pi t)$ (c) $c_{xy}(\tau)$

FIGURE 2 – Graphes pour la question **4.2.2**

3) On développe le terme $(\tau+1)^2$ dans l'expression ci-dessous, et on utilise le formulaire du cours pour calculer les convolutions $u(\tau)\tau^k * u(\tau)\tau$.

$$\begin{aligned}
c_{xy}(\tau) &= x^{\vee}(\tau) * y^*(\tau) \\
&= u(\tau)(-\tau-1)^2 * \tau u(\tau) = u(\tau)(\tau+1)^2 * \tau u(\tau) \\
&= u(\tau)(\tau^2+2\tau+1) * \tau u(\tau) \\
&= 2u(\tau)\frac{\tau^4}{24} + 2u(\tau)\frac{\tau^3}{6} + u(\tau)\frac{\tau^2}{2} \\
&= u(\tau)\left(\frac{\tau^4}{12} + \frac{\tau^3}{3} + \frac{\tau^2}{2}\right)
\end{aligned}$$



(a) $x(t) = u(-t)(t-1)^2$ (b) $y(t) = t\,u(t)$ (c) $c_{xy}(\tau)$

FIGURE 3 – Graphes pour la question **4.2.3**

4) On veut calculer $c_{xy}(\tau) = x^{\vee}(\tau) * y^*(\tau) = \int_{\mathbb{R}} y(t)x(t-\tau)\mathrm{d}t$. En traçant les produits $y(t)x(t-\tau)$ pour différentes valeurs de τ, on constate qu'il convient de distinguer quatre cas.

Pour (i) $\tau < 0$ et (ii) $\tau > 2$, les supports de $y(t)$ et $x(t-\tau)$ sont disjoints donc l'intégrale est nulle. Pour (iii) $0 \leq \tau \leq 1$, on voit sur le graphe de gauche de la Figure 4 que l'aire sous la courbe correspond à la somme de l'aire 1 du triangle, soit $\tau^2/2$, et de l'aire 2 du rectangle, soit $\tau(2-\tau)$. On a un raisonnement similaire pour le cas (iv) $1 \leq \tau \leq 2$, comme illustré sur le graphe de droite ci-dessous.

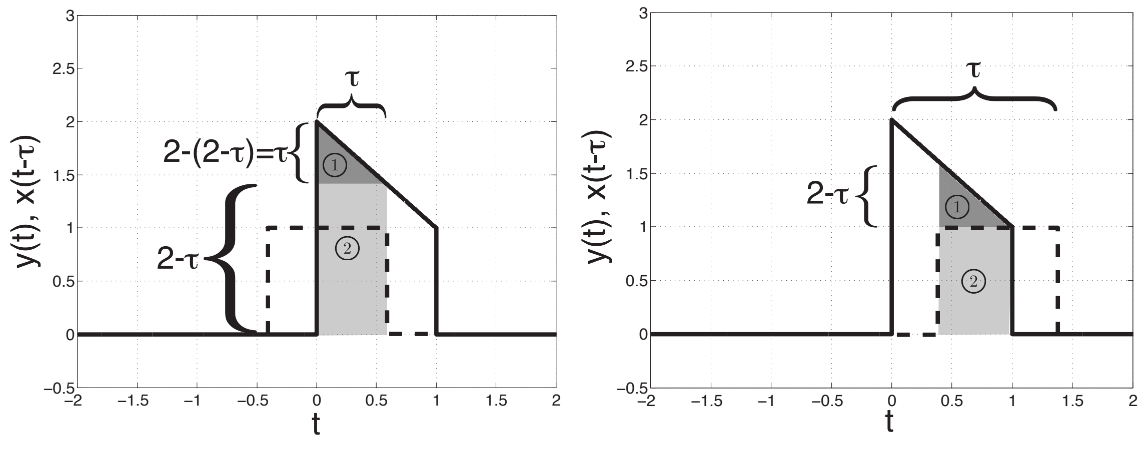
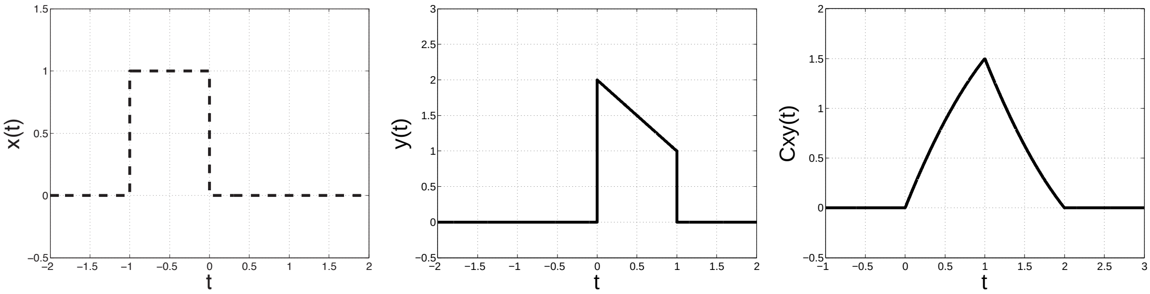


FIGURE 4 – Calcul de la correlation $c_{xy}(\tau)$ en utilisant l'interprétation "calcul d'aire" pour les cas $0 \leq \tau \leq 1$ (gauche) et $1 \leq \tau \leq 2$ (droite).

Finalement, on obtient après simplification

$$c_{xy}(\tau) = \begin{cases} 2\tau - \frac{\tau^2}{2}, \text{ si } 0 \le \tau \le 1, \\ (2-\tau) + \frac{1}{2}(2-\tau)^2, \text{ si } 1 < \tau \le 2, \\ 0, \text{ sinon.} \end{cases}$$



(a) $x(t)$ (b) $y(t)$ (c) $c_{xy}(\tau)$

FIGURE 5 – Graphes pour la question **4.2.4**

Correction de l'exercice 4.3 : FONCTIONS DE GREEN

1) Par définition, g, fonction de Green, doit vérifier l'équation : $g'(t) + 2g(t) = \delta(t)$, ce qu'on peut aussi noter $(\mathrm{D} + 2\mathrm{I})\{g\}(t) = \delta(t)$.

2) On calcule la dérivée de $g_1(t)$:
$$g_1'(t) = \frac{2}{3}u(-t)\mathrm{e}^{-2t} + \frac{1}{3}\delta(-t)\mathrm{e}^{-2t} - \frac{4}{3}u(t)\mathrm{e}^{-2t} + \frac{2}{3}\delta(t)\mathrm{e}^{-2t}.$$
De plus, $\delta(-t) = \delta(t)$ et $\mathrm{e}^{-2t}\delta(t) = \mathrm{e}^0\delta(t) = \delta(t)$. On en déduit que
$$g_1'(t) = \frac{2}{3}u(-t)\mathrm{e}^{-2t} - \frac{4}{3}u(t)\mathrm{e}^{-2t} + \delta(t) = -2g_1(t) + \delta(t).$$
Autrement dit, $g_1'(t) + 2g_1(t) = \delta(t)$. La fonction $g_1(t)$ est donc bien fonction de Green de T. Elle est non causale car elle n'est pas identiquement nulle pour $t < 0$ (par exemple, $g_1(-1) = -\frac{1}{3}\mathrm{e}^2 \neq 0$).

3) La Mathématique nous assure que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène du premier ordre $f'(t) + 2f(t) = 0$ est formé par les fonctions $f(t) = C\mathrm{e}^{-2t}$ avec une constante C quelconque. Dans notre cas particulier, on cherche une solution vérifiant également $f(0) = \frac{1}{3}$ ce qui implique $f(0) = C\mathrm{e}^0 = C = \frac{1}{3}$. Ainsi, $f(t) = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-2t}$.

4) Pour montrer que $g_0(t)$ est une fonction de Green de T, on peut calculer $g_0'(t)+2g_0(t)$. Cependant, on peut aussi remarquer directement que $\mathrm{T}\{g_0\}(t) = \mathrm{T}\{g_1\}(t) + \mathrm{T}\{f\}(t) = \delta(t) + 0 = \delta(t)$. Ensuite, $g_0(t) = g_1(t) + f(t) = u(t)\mathrm{e}^{-2t}$ car f peut se décomposer en $f(t) = \frac{1}{3}u(t)\mathrm{e}^{-2t} + \frac{1}{3}u(-t)\mathrm{e}^{-2t}$. Donc $g_0(t)$ est causale car nulle pour $t < 0$.

Correction de l'exercice 4.4 : CORRÉLATION ET CONVOLUTION

1) $(\mathrm{rect} * \mathrm{rect})(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{rect}(\tau) \cdot \mathrm{rect}(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_{t-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} \mathrm{rect}(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \mathrm{tri}(t)$, avec

$$\mathrm{tri}(t) = \begin{cases} 1+t & \text{si } -1 < t < 0 \\ 1-t & \text{si } 0 < t < 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La convolution peut aussi se faire de façon graphique.

2) En utilisant la distributivité de la convolution et les propriétés du dirac, on a

$$\begin{aligned} f(t) &= (w * \mathrm{rect})\,(t) \\ &= \left(\sum_{k=-2}^{2} \delta(\cdot - 4k) * \mathrm{rect}\right)(t) \\ &= \sum_{k=-2}^{2} \left(\delta(\cdot - 4k) * \mathrm{rect}\right)(t) \\ &= \sum_{k=-2}^{2} \mathrm{rect}(t - 4k). \end{aligned}$$

La fonction f est donc une somme de rect décalés.

3) On transforme tout d'abord la correlation en convolution (voir page 3-13 du cours), puis on utilise la parité du rectangle (*i.e.* $\mathrm{rect}^{\vee}(t) = \mathrm{rect}(-t) = \mathrm{rect}(t)$) et le fait que f soit réelle. Ensuite, l'associativité de la convolution nous permet de réutiliser le résultat de la question précédente :

$$\begin{aligned} c_{\mathrm{rect},f}(t) &= \left(\mathrm{rect}^{\vee} * f^{*}\right)(t) \\ &= (\mathrm{rect} * f)\,(t) \\ &= \sum_{k=-2}^{2} \left(\mathrm{rect}(\cdot - 4k) * \mathrm{rect}\right)(t) \\ &= \sum_{k=-2}^{2} \left((\delta(\cdot - 4k) * \mathrm{rect}) * \mathrm{rect}\right)(t) \\ &= \sum_{k=-2}^{2} \left((\mathrm{rect} * \mathrm{rect}) * \delta(\cdot - 4k)\right)(t) \\ &= \sum_{k=-2}^{2} \left(\mathrm{tri} * \delta(\cdot - 4k)\right)(t) \\ &= \sum_{k=-2}^{2} \mathrm{tri}(t - 4k). \end{aligned}$$

4) La fonction $w(t)$ a un support fini de longueur 16, on peut la représenter graphiquement pour s'en convaincre. Sa convolution par un filtre de support L donnera donc un signal de support de longueur $16 + L$, comme nous l'avions démontré dans l'exercice **1.4** (série 1).