Cours de Signaux et Systèmes

Correction du questionnaire à choix multiples

1. Systèmes linéaires analogiques invariants dans le temps (LIT)

Vrai	Faux	
☐	☑	Le signal constant $f(t) = 1$ est l'élément neutre de la convolution. Justification: L'élément neutre de la convolution est $\delta(t)$.
☑	☐	$\mathrm{tri}(t) * \mathrm{tri}(t) = \mathrm{rect}(t) * \mathrm{tri}(t) * \mathrm{rect}(t)$. Justification: Commutativité de la convolution.
☐	☑	Un système LIT est BIBO-stable si et seulement si sa réponse impulsionnelle $h(t)$ vérifie $\int_{\mathbb{R}} \|h(t)\|^2 \, \mathrm{d}t < +\infty$. Justification: Un système est BIBO-stable si et seulement si $\int_{\mathbb{R}} \|h(t)\| \, \mathrm{d}t < +\infty$, *cf.* slide 2.42. Cette condition n'est pas équivalente à celle proposée. Par exemple, si $h(t) = \frac{1}{t}u(t-1)$, on a $\int_{\mathbb{R}} \|h(t)\|^2 \, \mathrm{d}t < +\infty$ mais $\int_{\mathbb{R}} \|h(t)\| \, \mathrm{d}t = +\infty$.
☑	☐	Les sinusoïdales complexes sont les fonctions propres des systèmes LIT. Justification: *cf.* slide 2.48.
☑	☐	L'opération de convolution est linéaire. Justification: *cf.* slide 2.24 (distributivité).
☑	☐	Soit $h(t)$ la réponse impulsionnelle d'un système causal non nul. Il est possible de trouver une entrée $x(t)$ pour laquelle la sortie $(h * x)(t)$ est non-causale. Justification: Soit $a \geq 0$ tel que le support de $h(t)$ commence en a. Pour $x(t) = \delta(t + a + 1)$, $(h * x)(t) = h(t + a + 1)$ est non-causal.
☑	☐	Un système RIF avec réponse impulsionnelle $h(t)$ et $\max \|h(t)\| = M < \infty$ est toujours BIBO-stable. Justification: Soit $[a, b]$ le support de $h(t)$, alors $\int_{\mathbb{R}} \|h(t)\| \mathrm{d}t \leq \int_a^b M \mathrm{d}t = M(b - a) < +\infty$.
☐	☑	Soient f et g, deux signaux dont les supports sont respectivement $[a, b]$ et $[c, d]$. Le support de $f * g$ est exactement égal à $[a - c, b - d]$. Justification: Prendre par exemple $f = g = \mathrm{rect}$. De plus, le support de $f * g$ est $[a + c, b + d]$, *cf.* Résultat Général 2 de la correction de la Série 1.

☐ ☑ Soit un système dont la réponse impulsionnelle est donnée par $h(t)$ et la fonction de Green par $\phi(t)$. Alors, $h(t) * \phi(t) = 1$.

Justification: $h(t) * \phi(t) = \delta(t)$

☑ ☐ La réponse impulsionnelle du système défini par l'équation differentielle $y''(t) + 2y'(t) + y(t) = x(t)$, où y est la sortie et x l'entrée, est causale et RII.

Justification: Le systéme s'écrit $(D^2 + 2D + I)\{y\}(t) = x(t)$, ou encore $y(t) = (D + I)^{-2}\{x\}(t)$. Donc $h(t) = t_+e^{-t}$, qui est causale et RII.

☑ ☐ $(f(t) * \delta(t - t_0)) \cdot \delta(t - t_0) = f(0)\delta(t - t_0)$.

Justification :

$$\begin{aligned}(f(t) * \delta(t - t_0)) \cdot \delta(t - t_0) &= f(t - t_0) \cdot \delta(t - t_0) \\ &= f(t_0 - t_0) \cdot \delta(t - t_0) \\ &= f(0)\delta(t - t_0).\end{aligned}$$

☐ ☑ Un système instable est nécessairement à réponse impulsionnelle infinie.

Justification : Soit $h(t) = \mathrm{rect}(t - \frac{1}{2}) \cdot \frac{1}{t}$. Le système de réponse impulsionnelle $h(t)$ est RIF mais n'est pas stable car

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |h(t)|\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 \frac{1}{t}\mathrm{d}t \\ &= [\ln(t)]_0^1 \\ &= +\infty.\end{aligned}$$

☐ ☑ Soit la fonction $g : t \to u(-t)$. On a $\dfrac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t} = \delta(t)$.

Justification : $g'(t) = -u'(-t) = -\delta(-t) = -\delta(t)$.

☐ ☑ Une fonction f appartient à l'espace de fonctions L_1 si et seulement si elle vérifie $\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t < +\infty$.

Justification : Une fonction f appartient à l'espace de fonctions L_1 si et seulement si elle vérifie $\int_{\mathbb{R}} |f(t)|\,\mathrm{d}t < +\infty$. Lorsque son module au carré est intégrable, elle appartient à l'espace de fonctions L_2.

☑ ☐ L'amplification $g(t) = Af(t)$ d'un facteur $A \in \mathbb{R}$ préserve la causalité du signal f.

Justification : L'amplification par A implique un changement d'amplitude mais pas de décalage.

☐	☑	La fonction $h(t) = f(t) * u(t)$ est la réponse impulsionnelle d'un système BIBO-stable si $f(t) = \mathrm{e}^{-at}u(t)$ et $a > 0$. Justification : $h(t) = u(t)\frac{\mathrm{e}^{-at}-1}{-a}$, *cf.* Table A-4, 3ème ligne. On a $\int_{\mathbb{R}} \lvert h(t)\rvert \mathrm{d}t = \frac{1}{a}\int_0^{+\infty}(1-\mathrm{e}^{-at})\mathrm{d}t = +\infty$ car $\int_0^{+\infty} \mathrm{d}t = +\infty$.
☐	☑	Un système est BIBO-stable si et seulement si tous ses pôles ont une partie réelle positive. Justification : Un système est BIBO-stable si et seulement si tous ses pôles ont une partie réelle strictement négative.
☑	☐	Soient $h(t)$, $f(t)$ et $g(t)$, trois systèmes RIF. Alors, $z(t) = h(t) * f(t) * g(t)$ est RIF. Justification : La convolution de deux systèmes RIF donne un système RIF, *cf.* Résultat Général 2 de la correction de la Série 1. Cela se généralise facilement à un nombre quelconque de systèmes.
☐	☑	La fonction $h(t) = \mathrm{e}^{t}u(-t) + \delta(t-1)$ correspond à la réponse impulsionnelle d'un système causal BIBO-stable. Justification : La fonction $h(t)$ n'est pas causale à cause du terme $\mathrm{e}^{t}u(-t)$ qui ne l'est pas et qui n'est pas compensé par $\delta(t-1)$. En revanche, elle est BIBO-stable car c'est la somme de deux systèmes BIBO-stables.

2. Produits scalaires et séries de Fourier

Vrai	Faux	
☑	☐	Une fonction réelle paire f est toujours orthogonale à une fonction réelle impaire g. Autrement dit, le produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)g^*(t)\mathrm{d}t$ est toujours nul. Justification: Le produit $f(t)g^*(t)$ est une fonction impaire, donc son intégrale est nulle.
☑	☐	Soit $\phi_n(t) = \mathrm{rect}(t - \frac{1}{2} - \frac{n}{2})$. Alors, $\{\phi_n\}_{n=0,1,2,3}$ n'est pas une famille orthonormée. Justification: $\langle \phi_0, \phi_1\rangle = \frac{1}{2}$. Donc on n'a pas $\langle \phi_n, \phi_m\rangle = \delta_{n-m}$.
☐	☑	L'intercorrélation c_{xy} des signaux réels $x(t)$ et $y(t)$ est toujours égale à $(x * y)(t)$ si $y(t)$ est symétrique par rapport à un $t = t_0$ quelconque. Justification: On peut considérer par exemple $x(t) = u(t)$ et $y(t) = \delta(t)$.

☐ ☑ L'intercorrélation des signaux $x(t) = \sin(t)$ et $y(t) = \cos(t)$ est toujours égale à zéro.

Justification: L'intercorrelation, fonction d'une variable τ, est une mesure de similarité entre deux signaux (c.f. slide 3.13). On note que pour un déphasage de $\tau = -\frac{\pi}{2}$, le cosinus et le sinus sont en phase. L'intercorrelation est alors maximale et non nulle.

☐ ☑ La forme $\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)g^*(t-2)\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $L_2(\mathbb{R})$, l'espace des fonctions à énergie finie.

Justification: $\langle f, g\rangle$ n'est pas symétrique, ce qu'on vérifie par exemple avec $f(t) = \mathrm{rect}(t)$ et $g(t) = \mathrm{rect}(t-2)$.

☐ ☑ La meilleure approximation d'un signal pour la norme L_2 s'obtient par échantillonnage de la fonction aux entiers.

Justification: La meilleure approximation est obtenue avec la projection orthogonale *cf.* slide 3.4.

☑ ☐ Les coefficients c_n de la série de Fourier complexe d'un signal $x(t)$ de période T suffisent pour calculer l'énergie de $x(t)$ au sens de la norme associée à l'espace $L_2([-T/2, T/2])$.

Justification: L'énergie s'obtient comme $||x||^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2$ *cf.* slide 3.37.

☐ ☑ L'intercorrélation c_{xy} des signaux réels $x(t)$ et $y(t)$ est donnée par $c_{xy}(\tau) = x(-\tau) * y(\tau) = y(-\tau) * x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t-\tau)\,\mathrm{d}t$.

Justification : L'intercorrélation n'est pas commutative. On a $c_{xy}(\tau) = c^*_{yx}(-\tau)$, *cf.* slide 3.13.

☐ ☑ Soient deux signaux causaux $x(t)$ et $y(t)$. On a $c_{xy}(\tau) = 0$ pour $\tau < 0$.

Justification : Soient $x(t) = y(t) = \mathrm{rect}(t - \frac{1}{2})$.

$$\begin{aligned}
c_{xy}(\tau) &= x(-\tau) * y^*(\tau) \\
&= \mathrm{rect}(-\tau - \frac{1}{2}) * \mathrm{rect}(\tau - \frac{1}{2}) \\
&= \mathrm{rect}(\tau + \frac{1}{2}) * \mathrm{rect}(\tau - \frac{1}{2}) \text{ (car la fonction rect est paire)} \\
&= \mathrm{rect}(\tau) * \delta(\tau + \frac{1}{2}) * \mathrm{rect}(\tau) * \delta(\tau - \frac{1}{2}) \\
&= \mathrm{tri}(\tau).
\end{aligned}$$

La fonction tri n'est pas causale alors que x et y le sont.

☑ ☐ Le produit scalaire $\langle f, f\rangle_{L_2}$ est une mesure de l'énergie du signal f.

Justification : L'énergie du signal f est donnée par $||f||^2_{L_2} = \langle f, f\rangle_{L_2}$, *cf.* slides 3.6 et 3.7.

☑ ☐ L'approximation aux moindres carrés du signal $f \in L_2(\mathbb{R})$ par une famille orthonormale $\{\phi_n(t)\}$, donnée par $\tilde{f} = \sum_n \langle f, \phi_n\rangle_{L_2} \phi_n$, satisfait la relation $\sum_n |\langle f, \phi_n\rangle_{L_2}|^2 + \| f - \tilde{f} \|^2_{L_2} = \|f\|^2_{L_2}$

Justification : *Cf.* slide 3.19.

☑ ☐ Le signal $\sqrt{3}\cos(2\pi t)$ n'a que deux coefficients de Fourier complexes non nuls par rapport à la période $T = 1$.

Justification : $\sqrt{3}\cos(2\pi t) = \frac{\sqrt{3}}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi t}) = \frac{\sqrt{3}}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t})$. Les seuls coefficients de Fourier complexes non nuls sont donc $c_1 = c_{-1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Soit $x(t) = \sum\limits_{n=-3}^{3} n\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi n t}$.

Vrai Faux

☐ ☑ La fonction $x(t)$ est réelle.

Justification: $c_{-n} \neq c_n^\star$, *c.f.* slide 3.32.

☐ ☑ La fonction $x(t)$ est paire.

Justification: $x(-t) = \sum\limits_{n=-3}^{3} n\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi n t} = -\sum\limits_{n=-3}^{3} (-n)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi(-n)t} = -\sum\limits_{n=-3}^{3} n\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi n t}$.

On obtient $x(-t) = -x(t)$, la fonction est donc impaire.

☑ ☐ La valeur moyenne de la fonction $x(t)$ est nulle.

Justification: La valeur moyenne de $x(t)$ est donnée par $c_0 = 0$, ce qu'on voit directement dans la définition de c_0, *cf.* slide 3.28.

☑ ☐ La série de Fourier complexe de $x(t)$ par rapport à la période $T = 1$ possède 6 coefficients non nuls.

Justification: *cf.* Figure 1.

☐ ☑ $\int_0^1 |x(t)|^2\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

Justification: Avec Parseval (*c.f.*, slide 3-37), on obtient: $||x||^2 = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 = \sum\limits_{n=-3}^{3} n^2 = 28 \neq \sqrt{2}/3$.

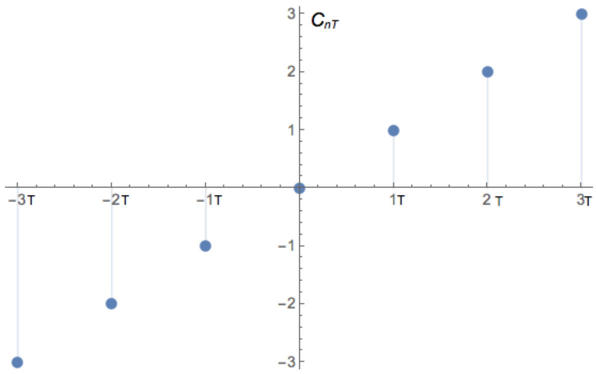

Figure 1: Coefficients de la série de Fourier complexe de $x(t)$.

Soit $x(t) = \sum_{n=-2}^{2} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi n t}$.

Vrai	Faux	
☑	☐	La série de Fourier complexe de $x(t)$ par rapport à la période $T = 2$ possède 5 coefficients non nuls. Justification : On a $x(t) = \sum_{n=-2}^{2} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 n t}$. Il y a donc bien 5 coefficients non nuls : $c_{-2} = c_{-1} = c_0 = c_1 = c_2 = 1$.
☑	☐	La fonction $x(t)$ est réelle. Justification : On a $c_{-n} = c_n^*$, la fonction est donc rélle, *cf.* slide 3.32.
☐	☑	La fonction $x(t)$ est impaire. Justification : On a $x(-t) = x(t)$, $x(t)$ est donc paire.
☐	☑	La fonction $x(t)$ est à valeur moyenne nulle. Justification : La valeur moyenne de $x(t)$ est donnée par $c_0 = 1$, *cf.* slide 3.28.
☐	☑	$\int_0^2 \lvert x(t)\rvert^2 \,\mathrm{d}t = 1$. Justification : Avec Parseval (*cf.*, slide 3.37), on obtient : $\lvert\lvert x\rvert\rvert^2 = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \lvert c_n\rvert^2 = 5 \neq 1$.