Signaux et Systèmes – Examen Blanc 2016 - MT

QCM (20 min)

1. Système LIT

Vrai	Faux	
☐	☐	$\mathrm{rect}(t-1) * \mathrm{rect}(t-1) = \mathrm{tri}(t-1)$
☐	☐	La sortie d'un système LIT BIBO-stable à une entrée constante est constante.
☐	☐	La composition de deux systèmes causaux définit toujours un système causal.
☐	☐	$f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)$ pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$ et tout signal $f(t)$.
☐	☐	L'opérateur $(\mathrm{D}+3\mathrm{I})^{-1}$ n'est pas BIBO-stable.
☐	☐	Pour tout signal $x(t)$ on a $x(t) * \delta'(t) = x'(t)$.

2. Produit scalaire et série de Fourier

☐	☐	La famille $\left(\frac{1}{2}rect\left(\frac{t}{2}-n\right)\right)_{n\epsilon Z}$ est orthonormale pour le produit scalaire sur $L_2(\mathbb{R})$.
☐	☐	Si $y(t) = x(t-0.5)$ alors les autocorrélations de $x(t)$ et $y(t)$ sont égales.
☐	☐	Les coefficients de Fourier complexes du signal $x(t) = e^{j2\pi t}$ pour la période $T=1$ sont tous nuls sauf un.
☐	☐	La fonction $x(t) = j\sum_{n=-7}^{7} ne^{j2\pi nt}$ est 1-périodique et réelle.
☐	☐	Le coefficient de Fourier complexe c_0 d'un signal pair $x(t)\ \epsilon\ L_2([0,1])$ est toujours nul.

3. Transformée de Fourier

☐	☐	La transformée d'un signal constant $x(t) = 1/2$ est $X(\omega) = \pi\delta(\omega)$.
☐	☐	Le spectre d'un signal peut-être translaté en fréquence en convoluant la TF avec une sinusoïde complexe.
☐	☐	La TF d'un signal réel est réelle.
☐	☐	Le système de réponse fréquentielle $H(\omega) = 1/j\omega$ est BIBO-stable.
☐	☐	Le filtre $h(t) = \mathrm{sinc}(t/2\pi)\cos(t)$ est passe-bande.
☐	☐	Si $f(t)$ est un signal de TF $F(\omega)$, alors la TF de $F(t)$ est $f(-\omega)$.

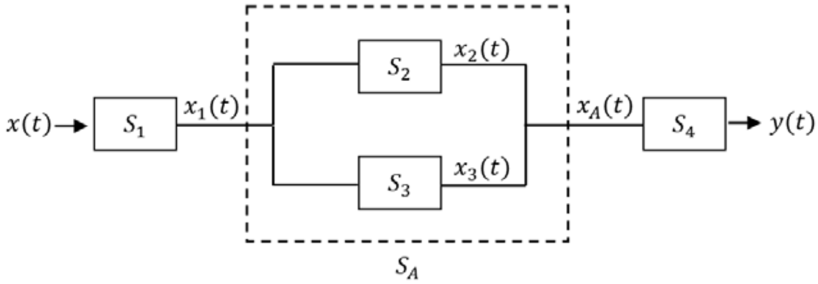
4. Echantillonnage et Modulation

☐	☐	La TF d'un signal périodisé est une somme pondérée d'impulsions de Dirac.
☐	☐	L'opération d'échantillonnage de pas $T=1$ qui, à un signal $x(t)$, associe $x_{éch}(t) = \sum_{n\epsilon Z} x(n)\delta(t-n)$ est linéaire mais pas invariante dans le temps.
☐	☐	$cos(\pi t/2) * sinc(t) = cos(\pi t/2)$

Signaux et Systèmes – Examen Blanc 2016 - MT

Problème I

On considère le système défini par le schéma bloc ci-dessous. Pour simplifier son analyse, on traitera d'abord le système S_1, puis le système S_A composé de S_2 et S_3 mis en parallèle, puis le système S_4. Puis on étudiera le système complet S.



Prenez soin de bien observer le schéma afin d'identifier les entrées et sorties des sous-systèmes !

Analyse de S_1

Le système de S_1 est caractérisé par l'équation suivante.

$$S_1 : 4x_1'(t) + 3x_1(t) = x(t)$$

1) Donner l'expression de $h_1(t)$, la réponse impulsionnelle de S_1.
2) Le système S_1 est-il causal ? BIBO-stable ? Justifier.
3) Donner l'expression de $H_1(\omega)$, la réponse fréquentielle de S_1.

Analyse de S_A

Les systèmes de S_2 et S_3 sont caractérisé par les équations suivantes.

$$S_2 : 2x_2(t) = x_1(t-3)$$

$$S_3 : \ x_3(t+3) = \left(\mathrm{D} + \frac{1}{2}\mathrm{I}\right)\{x_1\}(t)$$

4) Donner l'expression de $H_2(\omega)$, la réponse fréquentielle de S_2.
5) Donner l'expression de $h_3(t)$, la réponse impulsionnelle de S_3.
6) Donner l'expression de $H_3(\omega)$, la réponse fréquentielle de S_3.
7) Donner l'expression de $H_A(\omega)$, la réponse fréquentielle de S_A.

Analyse de S_4

Le système de S_1 est caractérisé par l'équation suivante.

$$S_4 : h_4(t) = \frac{1}{3}u(t+3)e^{-\frac{3}{2}(t+3)}$$

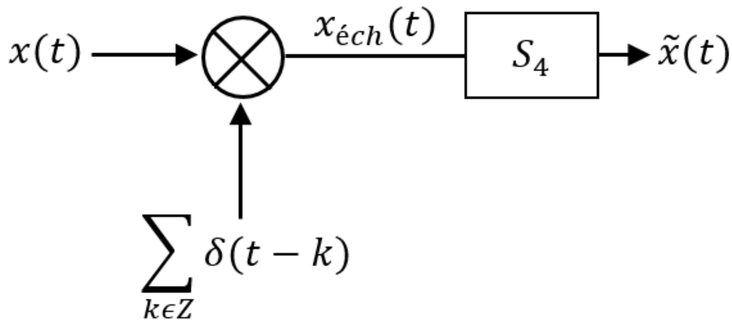
8) Le système S_4 est-il RIF ? Justifier.
9) Donner l'expression de $H_4(\omega)$, la réponse fréquentielle de S_4.
10) Exprimer S_4 sous la forme d'une équation différentielle.

Analyse du système complet S

11) Donner l'expression de $H(\omega)$, la réponse fréquentielle du système complet.
12) Donner l'expression de $h(t)$, la réponse impulsionnelle du système complet.

Problème II

On considère le système suivant avec comme entrée $x(t)$ et comme sortie $\tilde{x}(t)$



1) Soit $x(t) = \sum_{n \epsilon Z} \operatorname{tri}(t - 2n)$. Esquisser sur le même graph $x(t)$ et $x_{\acute{e}ch}(t)$.

2) Déduire du graphique l'expression de $x_{\acute{e}ch}(t)$.

3) Esquisser $X_{\acute{e}ch}(\omega)$, la transformée de Fourier de $x_{\acute{e}ch}(t)$.

4) On choisit $h(t)$ de telle façon que sa transformée de Fourier soit $H(\omega) = \operatorname{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)$. Donner l'expression de $\tilde{X}(\omega)$ pour $\omega_0 = \pi/2$, puis pour $\omega_0 = 3\pi/2$.

5) Esquisser $\tilde{x}(t)$ pour $\omega_0 = \pi/2$, puis pour $\omega_0 = 3\pi/2$.

6) Est-il possible de reconstruire parfaitement le signal $x(t)$ avec le système proposé ? Justifier la réponse et, le cas échéant, donner la valeur limite de ω_0 pour que ce soit possible.

Signaux et Systèmes – Examen Blanc 2016 - MT

Problème III

Dans tout cet exercice, on considère les fonctions sur $[-1,1]$. Soit la fonction

$$\phi(t) = \sum_{k \epsilon Z} (-1)^{\mathrm{k}} \mathrm{rect}\left(t - \frac{1}{2} - k\right)$$

Pour $t \in [-1,1]$ et la famille de fonctions, pour n $\in N$

$$\phi_n(t) = a_n \phi(2^n t)$$

où les a_n sont des coefficients positifs que l'on déterminera. L'espace des fonctions de carré intégrable est muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t) g(t) dt$.

1) Tracer les fonctions $\phi(2^n t)$ sur $[-1,1]$ pour $n = 0\,,1\,,2$.

2) Trouver les coefficients a_n positifs tels que les fonctions $\phi_n(t)$ soient normalisées

3) Par un raisonnement simple (on pourra s'inspirer des graphes de la question 1), montrer que la famille $\{\phi_n(t)\}_{n \epsilon N}$ est orthonormale.

On considère maintenant le signal suivant :

$$f(t) = 4\left[\mathrm{rect}\left(2t - \frac{1}{2}\right) - \mathrm{rect}\left(2t + \frac{1}{2}\right)\right]$$

On souhaite calculer la meilleure approximation $\tilde{f}(t)$ de $f(t)$ par la famille de fonctions $\{\phi_n(t)\}_{n \epsilon N}$.

4) Donner l'expression générique de $\tilde{f}(t)$.

5) Tracer la fonction $f(t)$.

6) Calculer l'énergie $\|f\|^2$ du signal.

7) Calculer le premier coefficient $\langle f, \phi_0\rangle$. Que vaut l'erreur d'approximation de $f(t)$ par la fonction $\phi_0(t)$?

8) Calculer le second coefficient $\langle f, \phi_1\rangle$. Que vaut l'erreur d'approximation de $f(t)$ par la famille de deux fonctions $\phi_0(t)$ et $\phi_1(t)$?

9) En déduire la meilleure approximation $\tilde{f}(t)$ de $f(t)$ par la famille de fonctions $\{\phi_n(t)\}_{n \epsilon N}$, ainsi que l'erreur d'approximation $\left\|f - \tilde{f}\right\|^2$.