Série 11

Correction de l'exercice 11.1 : TRANSFORMÉES DE FOURIER

On présente les calculs sous la forme d'un tableau.

1)

Temps	Fréquence
$\mathrm{sign}(t)$	$\frac{2}{\mathrm{j}\omega}$
$\mathrm{sign}(5t-1)$	$\frac{2}{\mathrm{j}\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega/5}$
$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi t}$	$2\pi\delta(\omega+2\pi)$
$f(t)\cdot g(t)$	$\frac{1}{2\pi}F(\omega) * G(\omega)$
$h_1(t)$	$\frac{1}{2\pi}\left(\frac{2}{\mathrm{j}\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega/5}\right) * (2\pi\delta(\omega+2\pi))$

En simplifiant la dernière expression, on obtient finalement $H_1(\omega) = \frac{2}{\mathrm{j}(\omega+2\pi)}e^{-\mathrm{j}\frac{\omega+2\pi}{5}}$.

2) On commence par retravailler l'expression de $h_2(t)$ pour obtenir des quantités présentes dans les tables.

$$\begin{aligned} h_2(t) &= t^2\mathrm{e}^{-t}(u(t)-u(t-1)) \\ &= t^2\mathrm{e}^{-t}u(t) - \delta(t-1) * \left((t+1)^2\mathrm{e}^{-(t+1)}u(t)\right) \\ &= t^2\mathrm{e}^{-t}u(t) - \mathrm{e}^{-1}\delta(t-1) * \left((t^2+2t+1)\mathrm{e}^{-t}u(t)\right). \end{aligned}$$

Temps	Fréquence
$t^n\mathrm{e}^{-t}u(t)$	$\frac{n!}{(\mathrm{j}\omega+1)^{n+1}}$
$t^2\mathrm{e}^{-t}u(t)$	$\frac{2}{(\mathrm{j}\omega+1)^3}$
$(t^2+2t+1)\mathrm{e}^{-t}u(t)$	$\frac{2}{(\mathrm{j}\omega+1)^3} + \frac{2}{(\mathrm{j}\omega+1)^2} + \frac{1}{(\mathrm{j}\omega+1)}$
$\mathrm{e}^{-1}\delta(t-1) * ((t^2+2t+1)\mathrm{e}^{-t}u(t))$	$\mathrm{e}^{-1-\mathrm{j}\omega}\left(\frac{2+2(\mathrm{j}\omega+1)+(\mathrm{j}\omega+1)^2}{(\mathrm{j}\omega+1)^3}\right)$

Et donc, finalement, $H_2(\omega) = \frac{2-e^{-1-\mathrm{j}\omega}\left(2+2(\mathrm{j}\omega+1)+(\mathrm{j}\omega+1)^2\right)}{(\mathrm{j}\omega+1)^3}$.

3) On remarque tout d'abord que $t^2 - 4\mathrm{j}t - 4 = -(\mathrm{j}t)^2 - 4(\mathrm{j}t) - 4 = -(\mathrm{j}t+2)^2$. On obtient alors les résultats suivants notamment en utilisant la formule de dualité.

Temps	Fréquence
$tu(t)\mathrm{e}^{-2t}$	$\frac{1}{(\mathrm{j}\omega+2)^2}$
$h_3(t) = \frac{-1}{-(\mathrm{j}t)^2-4\mathrm{j}t-4} = \frac{1}{(\mathrm{j}t+2)^2}$	$2\pi(-\omega)u(-\omega)\mathrm{e}^{-2(-\omega)}$

On a obtenu $H_3(\omega) = -2\pi\omega u(-\omega)e^{2\omega}$.

4) Une méthode consiste à utiliser la formule de la transformée de Fourier après multiplication par un monôme (voir table A-7).

Temps	Fréquence
$tf(t)$	$jF'(\omega)$
$\mathrm{e}^{-3\|t\|}$	$\frac{6}{\omega^2+9}$
$t\mathrm{e}^{-3\|t\|}$	$j\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\frac{6}{\omega^2+9}$

Après calcul de la dérivée, on obtient $H_4(\omega) = -\frac{12\mathrm{j}\omega}{(\omega^2+9)^2}$.

Correction de l'exercice 11.2 : ANALYSE DE SYSTÈME

1) (a) On a $(\mathrm{D}+10\mathrm{I})\{x\}(t) = x_2(t)$, ce qui donne, en appliquant la définition de chaque opérateur à $x(t)$,

$$x'(t) + 10x(t) = x_2(t).$$

(b) L'opérateur S_1 est égal à $\mathrm{D} + 10\mathrm{I}$. En terme de réponse impulsionnelle, cela donne

$$h_1(t) = \delta'(t) + 10\delta(t).$$

On trouve facilement la transformée de Fourier à l'aide des tables, soit

$$H_1(\omega) = \mathrm{j}\omega + 10.$$

(c) La réponse impulsionnelle $h_1(t)$ est composée de deux termes localisés en $t = 0$. Le système est donc causal.

2) (a) On va simplement chercher la transformée de Fourier de $h_2(t) = u(t)e^{-2t}\cos(t)$ en utilisant la méthode habituelle avec un tableau, comme suit.

Temps	Fréquence
$u(t)\mathrm{e}^{-2t}$	$\frac{1}{\mathrm{j}\omega+2}$
$\cos(t)$	$\pi(\delta(\omega+1)+\delta(\omega-1))$
$f(t)\cdot g(t)$	$\frac{1}{2\pi}F(\omega) * G(\omega)$
$h_2(t)$	$\frac{1}{2\pi}\pi\left(\frac{1}{\mathrm{j}\omega+2}\right) * (\delta(\omega+1)+\delta(\omega-1))$

En simplifiant la dernière expression, on obtient finalement $H_2(\omega) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2+j(\omega+1)} + \frac{1}{2+j(\omega-1)}\right)$.

(b) Pour analyser la stabilité du filtre, on peut utiliser directement la définition, soit vérifier que $\int_{\mathbb{R}} |h_2(t)|\mathrm{d}t < +\infty$.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |h_2(t)|\mathrm{d}t &= \int_{\mathbb{R}} |u(t)e^{-2t}\cos(t)|\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-2t}|\cos(t)|\mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^{+\infty} e^{-2t}\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}\Big|_0^{+\infty} \\
&= \frac{1}{2} < +\infty.
\end{aligned}$$

Le système est donc BIBO-stable.

3) (a) En utilisant les tables de transformées de Fourier, on trouve directement $h_3(t) = u(t)\mathrm{e}^{-2t}$.

(b) Dans le domaine de Fourier, on a la relation suivante

$$\begin{aligned}
& Y(\omega) = X_3(\omega)\,H_3(\omega) \\
\Rightarrow\ & Y(\omega)(\mathrm{j}\omega + 2) = X_3(\omega).
\end{aligned}$$

En repassant dans le domaine temporel, on trouve donc

$$\begin{aligned}
& (\mathrm{D} + 2\mathrm{I})\{y\}(t) = x_3(t) \\
\Rightarrow\ & y'(t) + 2y(t) = x_3(t).
\end{aligned}$$

(c) On peut facilement voir que le filtre est causal grâce au terme $u(t)$ dans la réponse impulsionnelle. Pour la stabilité, on peut soit constater que le pôle de $H_3(\omega)$ est dans le demi-plan complexe gauche, soit voir que l'exponentielle complexe décroissante présente dans $h_3(t)$ converge. Le filtre est donc BIBO-stable.

(d) i. On va travailler dans le domaine de Fourier. La transformée de Fourier de l'entrée peut être facilement trouvée via les tables, soit $X_3(\omega) = \mathrm{j}\omega + 2$. La sortie correspond donc à

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= H_3(\omega)X_3(\omega) \\ &= \frac{1}{\mathrm{j}\omega + 2}(\mathrm{j}\omega + 2) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Par transformée de Fourier inverse, on a donc $y(t) = \delta(t)$.

ii. On peut ici appliquer directement les tables de convolution comme suit

$$\begin{aligned} y(t) &= u(t) * u(t)\mathrm{e}^{-2t} \\ &= \frac{u(t)}{2}(1 - \mathrm{e}^{-2t}). \end{aligned}$$

iii. On utilisera dans le cas présent la réponse d'un système LIT à une excitation sinusoidale. On sait que la sortie sera de la forme $y(t) = A|H_3(\omega_0)|\cos(\omega_0 t + \theta + \arg(H_3(\omega_0))$ pour une entrée de la forme $x_3(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta)$. Ici, on a $A = 3$, $\theta = 0$ et $\omega_0 = 2$. On connait en outre $H_3(\omega)$, on peut donc facilement trouver $|H_3(2)| = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ et $\arg(H_3(2)) = -\frac{\pi}{4}$ (cela constitute d'ailleurs un très bon exercice de calcul avec les nombres complexes). On a donc au final

$$y(t) = \frac{3}{2\sqrt{2}}\cos\left(2t - \frac{\pi}{4}\right).$$

4) (a) On sait que le système S est la mise en série des systèmes S_1, S_2 et S_3. On a donc

$$\begin{aligned} H(\omega) &= H_1(\omega)H_2(\omega)H_3(\omega) \\ &= (\mathrm{j}\omega + 10)\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2 + \mathrm{j}(\omega + 1)} + \frac{1}{2 + \mathrm{j}(\omega - 1))}\right)\left(\frac{1}{\mathrm{j}\omega + 2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{\mathrm{j}\omega + 10}{\mathrm{j}\omega + 2}\left(\frac{2 + \mathrm{j}\omega - \mathrm{j} + 2 + \mathrm{j}\omega + \mathrm{j}}{(2 + \mathrm{j}(\omega + 1))(2 + \mathrm{j}(\omega - 1))}\right) \\ &= \frac{\mathrm{j}\omega + 10}{\mathrm{j}\omega + 2}\left(\frac{2 + \mathrm{j}\omega}{(2 + \mathrm{j}(\omega + 1))(2 + \mathrm{j}(\omega - 1))}\right) \\ &= \frac{\mathrm{j}\omega + 10}{(2 + \mathrm{j}(\omega + 1))(2 + \mathrm{j}(\omega - 1))}. \end{aligned}$$

(b) Pour analyser la stabilité du système, on peut observer par exemple que les pôles de H ont tous une partie réelle négative. Le système est donc BIBO-stable. Concernant LIT, on constate d'abord que le système n'est composé que de convolutions, et qu'il est donc nécessairement linéaire. Enfin, on peut facilement montrer qu'il est invariant par translation. En effet, l'invariance par translation implique que $x(t - t_0) * h(t) = y(t - t_0)$. Chez Fourier, cela donne

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t_0}X(\omega)H(\omega) &= \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t_0}\left(X(\omega)\frac{\mathrm{j}\omega + 10}{(2 + \mathrm{j}(\omega + 1))(2 + \mathrm{j}(\omega - 1))}\right) \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t_0}Y(\omega) \end{aligned}$$

Il est donc facile de voir que cette équation est vérifiée et que le système est LIT.

(c) Afin de trouver à quel type de filtre correspond S, il faut observer le comportement de $|H(\omega)|$ lorsque $\omega = 0$ et lorsque ω tend vers l'infini, soit

$$|H(0)| = \frac{10}{(2+\mathrm{j})(2-\mathrm{j})} = \frac{10}{5} = 2,$$

et

$$\begin{aligned}
|H(\omega)| &= \frac{|\mathrm{j}\omega + 10|}{|5 + 4\mathrm{j}\omega - \omega^2|} \\
&= \frac{\sqrt{\omega^2 + 100}}{\sqrt{(5-\omega^2)^2 + 16\omega^2}} \\
&\sim_{\omega\to\infty} \frac{|\omega|}{\omega^2} = \frac{1}{|\omega|} \to 0.
\end{aligned}$$

On voit donc que ce filtre tend à couper les hautes fréquences et laisser passer les basses fréquences (autour de 0). En conséquence, le système S est passe-bas.

(d) i. Puisque l'entrée est un simple $\delta(t)$, il s'agit ici de trouver la réponse impulsionnelle de S. En partant de l'expression de $H(\omega)$, on fait une décomposition en éléments simples, soit

$$\begin{aligned}
Y(\omega) &= H(\omega) \\
&= \frac{\mathrm{j}\omega + 10}{(2+\mathrm{j}(\omega+1))(2+\mathrm{j}(\omega-1))} \\
&= \frac{a}{2+\mathrm{j}(\omega+1)} + \frac{b}{2+\mathrm{j}(\omega-1)}.
\end{aligned}$$

En utilisant la méthode habituelle, on trouve $a = \frac{1}{2} + 4\mathrm{j}$ et $b = \frac{1}{2} - 4\mathrm{j}$ (on peut en outre simplifier les calculs en observant qu'on aura nécessairement, le filtre étant réel, $a = b^*$). On utilise ensuite les tables pour trouver la transformée de Fourier inverse, puis on simplifie pour obtenir la réponse finale, soit

$$\begin{aligned}
y(t) &= \left(\frac{1}{2} + 4\mathrm{j}\right) u(t)\mathrm{e}^{-(2+\mathrm{j})t} + \left(\frac{1}{2} - 4\mathrm{j}\right) u(t)\mathrm{e}^{-(2-\mathrm{j})t} \\
&= \frac{1}{2}u(t)\mathrm{e}^{-2t}(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}t} + \mathrm{e}^{\mathrm{j}t}) + 4\mathrm{j}u(t)\mathrm{e}^{-2t}(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}t} - \mathrm{e}^{\mathrm{j}t}) \\
&= u(t)\mathrm{e}^{-2t}(\cos(t) + 8\sin(t)) = h(t).
\end{aligned}$$

ii. La transformée de Fourier du signal d'entrée peut être facilement obtenue via les tables, soit $X(\omega) = \mathrm{j}(\omega-1) + 2$. On cherche ensuite la sortie, toujours dans le domaine de Fourier,

$$\begin{aligned}
Y(\omega) &= (\mathrm{j}(\omega-1)+2)\left(\frac{\mathrm{j}\omega + 10}{(2+\mathrm{j}(\omega+1))(2+\mathrm{j}(\omega-1))}\right) \\
&= \frac{\mathrm{j}\omega + 10}{2+\mathrm{j}(\omega+1)} \\
&= 1 + \frac{8-\mathrm{j}}{2+\mathrm{j}(\omega+1)}.
\end{aligned}$$

Notez que la dernière étape est obtenue en faisant une division euclidienne. Finalement, on peut repasser dans le domaine temporel en s'aidant des tables, et on trouve $y(t) = (8-\mathrm{j})u(t)\mathrm{e}^{-(2+\mathrm{j})t} + \delta(t)$.

Correction de l'exercice 11.3 : ÉCHANTILLONAGE ET RECONSTRUCTION

1) (a) On observe tout d'abord que $x_1(t)$ est 1-périodique et vaut 1 à tous les entiers, soit $x_1(t)|_{t=k} = \cos(2\pi t)|_{t=k} = 1, k \in \mathbb{Z}$. On voit ensuite que la sortie du système considéré ici correspond à la multiplication de l'entrée avec $p(t)$, une fonction composée de δ aux entiers pairs et de $-\delta$ aux entiers impairs. En se souvenant de la relation de multiplication par un dirac, $f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0)$, on peut conclure que $y_1(t)$ est simplement égal à $p(t)$ multiplié par les échantillons de $x_1(t)$ aux entiers, et donc

$$y_1(t) = x_1(t)p(t) = p(t).$$

(b) On constate que $x_2(t)$ est également 1-périodique : il s'agit simplement de $x_1(t)$ décalé de $\frac{1}{2}$. En utilisant les propriétés trigonométriques, on peut montrer que $x_2(t) = \cos(2\pi t - \pi) = -\cos(2\pi t)$. On peut donc facilement voir que les échantillons de $x_2(t)$ aux entiers, $x_2(t)|_{t=k} = -\cos(2\pi t)|_{t=k}, k \in \mathbb{Z}$, valent toujours -1. Suivant le même raisonnement qu'au point précédent, on en conclut donc que

$$y_2(t) = x_2(t)p(t) = -p(t).$$

2) Puisque $x_2(t) = x_1(t-\frac{1}{2})$ et que $y_2(t) = -p(t) = -y_1(t) \neq y_1(t-\frac{1}{2})$, on en déduit que le système n'est pas invariant par translation.

3) La fonction $p(t)$ peut être vue comme la somme de deux trains de diracs : l'un, positif, aux entiers pairs, et l'autre, négatif, aux entiers impairs. Dans le domaine temporel, on a donc

$$p(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(t-2k) - \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(t-1-2k).$$

On utilise ensuite simplement les tables de transformées de Fourier pour trouver $P(\omega)$ puis un peu de trigonométrie pour simplifier l'expression, soit

$$\begin{aligned}
P(\omega) &= \pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(\omega - \pi n) - \pi \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(\omega - \pi n) \\
&= \pi(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}) \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(\omega - \pi n) \\
&= \pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} (1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi n}) \delta(\omega - \pi n) \\
&= \pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} (1-(-1)^n) \delta(\omega - \pi n) \\
&= 2\pi \sum_{n\in 2\mathbb{Z}+1} \delta(\omega - \pi n),
\end{aligned}$$

où $2\mathbb{Z}+1$ est l'ensemble des entiers impairs. On rappelle pour la dernière étape que $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi n} = (-1)^n$.

4) On se rappelle de la relation multiplication-convolution, soit $f(t)g(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2\pi}F(\omega) * G(\omega)$. En appliquant ceci au système considéré dans cet exercice avec $X(\omega)$ la transformée de Fourier d'une entrée $x(t)$ quelconque et $Y(\omega)$ la transformée de Fourier de la sortie $y(t)$ correspondante, on a

$$\begin{aligned}
Y(\omega) &= \frac{1}{2\pi} X(\omega) * P(\omega) \\
&= \frac{1}{2\pi} X(\omega) * 2\pi \sum_{n\in 2\mathbb{Z}+1} \delta(\omega - \pi n) \\
&= \sum_{n\in 2\mathbb{Z}+1} X(\omega - \pi n).
\end{aligned}$$

5) Au point précédent, on a vu que la transformée de Fourier $Y(\omega)$ de la sortie $y(t)$ du système à une entrée $x(t)$ correspond à une répétition de $X(\omega)$ à tous les multiples entiers impairs de π. Le graphe de $Y(\omega)$ pour la fonction donnée dans ce point est donc simplement cette même fonction répétée tous les $(2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$. Le résultat est représenté sur la figure 1.

6) On peut s'inspirer du résultat obtenu au point précédent pour résoudre cette question. Puisqu'avec un spectre entre $-\pi$ et π, il n'y a pas de recouvrement spectral (comme on le constate avec la fonction du point précédent), on peut utiliser un filtre idéal (le rect) pour récupérer une seule répétition du spectre. Cependant, puisque le spectre initial est autour de 0 et que les premières répétitions du spectre après filtrage sont en $-\pi$ et π, il faudra avant cela décaler le spectre de π. On a donc

$$\begin{aligned} X_{\text{rec}}(\omega) &= (Y(\omega) * \delta(\omega - \pi)) \cdot \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \\ &= Y(\omega - \pi)\text{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right). \end{aligned}$$

Dans le domaine temporel, cela donne

$$x_{\text{rec}}(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi t} y(t) * \text{sinc}(t).$$

On peut aussi représenter cette opération avec le schéma-bloc de la figure 2.

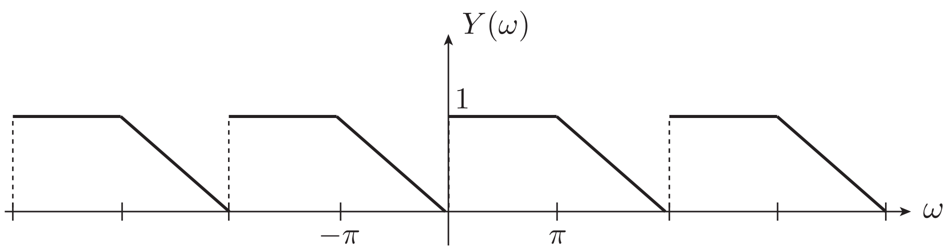


FIGURE 1 – Exercice **11.3.5** : $Y(\omega)$ pour la fonction $X(\omega)$ donnée dans l'exercice.

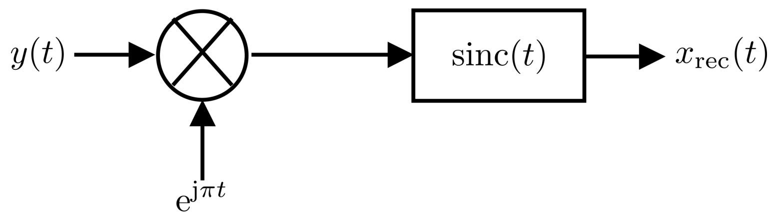
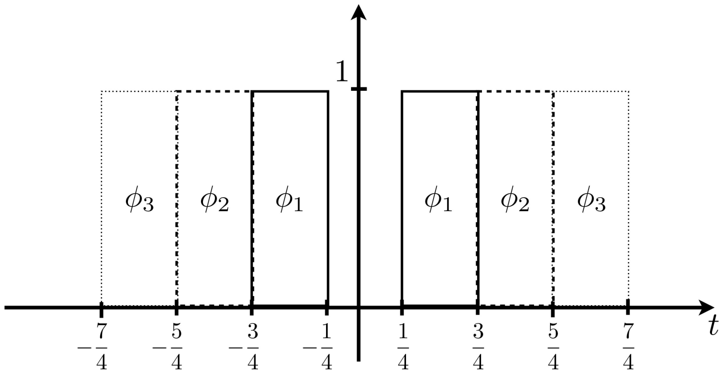


FIGURE 2 – Exercice **11.3.6** : Schéma-bloc correspondant à une solution possible pour retrouver le signal d'entrée, *i.e.* $x(t) = x_{\text{rec}}(t)$ lorsque ce dernier est à bande limitée dans $[-\pi, \pi]$.

Correction de l'exercice 11.4 : APPROXIMATION DE FONCTIONS

1) Le graphique est représenté ci-dessous.



2) On fixe deux entiers non nuls n et m. On part de la définition du produit scalaire : $\langle \phi_n, \phi_m \rangle = \int_{\mathbb{R}} \phi_n(t)\phi_m^*(t)\mathrm{d}t$. Le support de $\phi_n(t)$ est $[-\frac{n}{2}-\frac{1}{4}, -\frac{n}{2}+\frac{1}{4}] \cup [\frac{n}{2}-\frac{1}{4}, \frac{n}{2}+\frac{1}{4}]$. Si $n \neq m$, les supports de ϕ_n et ϕ_m sont alors disjoints, donc leur produit scalaire est nul. Si par contre $n = m$, on a

$$\begin{aligned}
\langle \phi_n, \phi_n \rangle &= \int_{\mathbb{R}} |\phi_n(t)|^2 \mathrm{d}t \\
&= \int_{[-\frac{n}{2}-\frac{1}{4}, -\frac{n}{2}+\frac{1}{4}]} 1^2 \mathrm{d}t + \int_{[\frac{n}{2}-\frac{1}{4}, \frac{n}{2}+\frac{1}{4}]} 1^2 \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.
\end{aligned}$$

On a montré que $\langle \phi_n, \phi_m \rangle = 1$ si $n = m$ et 0 sinon. Autrement dit, le système $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est orthonormal.

3) On effectue le calcul dans un tableau.

Temps	Fréquence
$\mathrm{rect}(t)$	$\mathrm{sinc}(\frac{\omega}{2\pi})$
$\mathrm{rect}(t-n)$	$\mathrm{sinc}(\frac{\omega}{2\pi})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}$
$\mathrm{rect}(2t-n)$	$\frac{1}{2}\mathrm{sinc}(\frac{\omega}{4\pi})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega n}{2}}$
$\mathrm{rect}(2t+n)$	$\frac{1}{2}\mathrm{sinc}(\frac{\omega}{4\pi})\mathrm{e}^{+\mathrm{j}\frac{\omega n}{2}}$

On en déduit

$$\begin{aligned}
\Phi_n(\omega) &= \mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{4\pi}\right)\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega n}{2}} + \mathrm{e}^{+\mathrm{j}\frac{\omega n}{2}}\right) \\
&= \mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{4\pi}\right)\cos\left(\frac{\omega n}{2}\right).
\end{aligned}$$

En utilisant la relation de Parseval, on sait en outre que $\langle \Phi_n, \Phi_m \rangle = 2\pi \langle \phi_n, \phi_m \rangle$. En remarquant donc que $f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Phi_n(t)$, on en déduit que $\langle f_n, f_m \rangle = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$ si $n = m$ et $\langle f_n, f_m \rangle = 0$ si $n \neq m$. Ainsi, la famille $(f_n(t))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bien orthonormale.

4) On doit calculée une transformée de Fourier inverse. Il suffit pour cela de remarquer que la transformée de Fourier de $\mathrm{e}^{-|t|}$ est $\frac{2}{1+\omega^2}$. On en déduit directement que $f(t) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|t|}$.

5) On effectue ici un calcul direct, les tables ne nous aidant pas sur ce coup là.

$$\langle f(t), \phi_n(t) \rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} e^{-|t|} \left(\mathrm{rect}(2t-n) + \mathrm{rect}(2t+n)\right) \mathrm{d}t$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} e^{-|t|}\mathrm{rect}(2t-n)\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} e^{-|t|}\mathrm{rect}(2t+n)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int_{\frac{n}{2}-\frac{1}{4}}^{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}} e^{-t}\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_{-\frac{n}{2}-\frac{1}{4}}^{-\frac{n}{2}+\frac{1}{4}} e^{t}\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{2}e^{-t}|_{\frac{n}{2}-\frac{1}{4}}^{\frac{n}{2}+\frac{1}{4}} + \frac{1}{2}e^{t}|_{-\frac{n}{2}-\frac{1}{4}}^{-\frac{n}{2}+\frac{1}{4}} \\
&= -\frac{1}{2}\left(e^{-\frac{n}{2}-\frac{1}{4}} - e^{-\frac{n}{2}+\frac{1}{4}}\right) + \frac{1}{2}\left(e^{-\frac{n}{2}+\frac{1}{4}} - e^{-\frac{n}{2}-\frac{1}{4}}\right) \\
&= \left(e^{-\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{4}\right)} - e^{-\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{4}\right)}\right)
\end{aligned}
$$

6) La famille (ϕ_n) étant orthonormale, on en déduit que la meilleure approximation $\tilde{f}(t)$ de $f(t)$ est donnée par la formule

$$
\begin{aligned}
\tilde{f}(t) &= \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \langle f, \phi_n\rangle \phi_n(t) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(e^{-\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{4}\right)} - e^{-\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{4}\right)}\right)\phi_n(t)
\end{aligned}
$$

L'erreur d'approximation est par définition $\|f-\tilde{f}\|_2^2$. On sait par le cours, toujours car la famille (ϕ_n) est orthonormale, que cette erreur est donnée par la formule

$$\|f-\tilde{f}\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \|\tilde{f}\|_2^2.$$

On doit donc calculer les deux termes $\|f\|_2^2$ et $\|\tilde{f}\|_2^2$. Allons-y. Utilisant tout d'abord l'expression de $f(t)$ obtenue en question **4)**, on a

$$
\begin{aligned}
\|f\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2|t|}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4}2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{-2}\mathrm{e}^{-2t}\right]_0^{+\infty} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

Pour l'autre terme, utilisant la relation de Parseval, on a

$$
\begin{aligned}
\|\tilde{f}\|_2^2 &= \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \langle f, \phi_n\rangle^2 \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(e^{-\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{4}\right)} - e^{-\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{4}\right)}\right)^2 \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(e^{-n+\frac{1}{2}} - 2e^{-n} + e^{-n-\frac{1}{2}}\right) \\
&= (e^{+\frac{1}{2}} - 2 + e^{-\frac{1}{2}}) \sum_{n\in\mathbb{N}^*} e^{-n} \\
&= (e^{+\frac{1}{2}} - 2 + e^{-\frac{1}{2}}) \left(\frac{1}{1-e^{-1}} - 1\right) \\
&= (e^{+\frac{1}{2}} - 2 + e^{-\frac{1}{2}}) \frac{e^{-1}}{1-e^{-1}}
\end{aligned}
$$

Finalement, l'erreur d'approximation est

$$\|f-\tilde{f}\|_2^2 = \frac{1}{4} - (e^{+\frac{1}{2}} - 2 + e^{-\frac{1}{2}})\frac{e^{-1}}{1-e^{-1}}.$$