

Simulation avancée de la trajectoire d'une fusée et application à du contrôle actif

Projet de Semestre



Eric Brunner & Emilien Mingard

Table des matières

1	Introduction	3
1.1	Sujet	3
1.2	La fusée	3
1.3	Les aérofreins	4
2	Repères et Modèles Physiques	6
2.1	Définition de la géométrie du véhicule	6
2.2	Modèles physiques	6
2.2.1	Traînée	6
2.2.2	Portance	13
2.2.3	Coefficient de moment correctif	17
2.2.4	Coefficient du moment d'amortissement	17
2.2.5	Poussée	18
2.2.6	Atmosphère	19
2.2.7	Humidité	19
2.2.8	Masse	20
2.2.9	Inerties principales	21
2.2.10	Gravité	22
3	Analyse de stabilité	23
3.1	Stabilité d'une fusée	23
3.2	Equations générales	23
3.3	Equation simplifiée	24
3.3.1	Vent latérale	24
3.3.2	Rafale de vent	25
3.4	Critère de stabilité	26
3.5	Résultats	27
3.6	Discussion	27
4	Simulation d'une fusée restreinte à une dimension	29
4.1	Equation	29
4.2	Résultats	31
4.3	Discussion	32
4.4	Application - Contrôle des Aérofreins	33
4.4.1	Formatage des données de vol	33
4.4.2	Génération des données de vol	34
4.4.3	Utilisation réelle en conditions de vol	35

5 Simulation d'une fusée restreinte à un mouvement plan	36
5.1 Equation	36
5.2 Résultats	42
5.3 Discussion	43
6 Cinématique d'une fusée à six degrés de liberté	47
6.1 Repères	47
6.2 Équations	48
6.2.1 Quaternions	48
6.2.2 Matrices de rotation	50
6.2.3 Calcul des forces	51
6.2.4 Dynamique	52
6.3 Résultats	55
6.4 Discussion	55
6.4.1 Validation	55
6.4.2 Drift	58
6.4.3 Points d'amélioration	59
7 Test en Soufflerie	60
7.1 Référentiel de mesure et forces	60
7.2 Données de test	61
7.3 Résultats	62
7.3.1 Angle d'attaque	62
7.3.2 Test des shuriken	62
7.4 Discussion	63
8 Conclusion	66

Chapitre 1

Introduction

1.1 Sujet

L'EPFL Rocket Team est une équipe d'étudiants réalisant une fusée destinée à participer dans une compétition étudiante aux Etats-Unis. C'est la deuxième participation d'une équipe suisse à la compétition. Cette année, le lanceur est complètement fabriqué par des étudiants à l'exception du moteur. L'objectif est de réaliser un lanceur, de type fusée sonde, permettant d'amener une charge utile de 4kg à une altitude précise de 10'000 pieds, soit 3048m. Le concours, Spaceport America Cup, se déroulera au Nouveau Mexique. Il regroupe plus de 100 équipes venant du monde entier.

Afin de remplir au mieux cet objectif, il est important de pouvoir décrire et prédire le comportement de la fusée pendant son vol. Ce travail présentera les différentes équations qui régissent son mouvement, comment les forces sont estimées, les capacités du simulateur développé et ses applications. Pour commencer, nous parlerons de la stabilité d'une fusée lorsque celle-ci vole à basse vitesse, i.e en phase de décollage. Ensuite nous essaierons de représenter au mieux les effets de frottement et de portance qui excluent la fusée d'un simple vol balistique. Finalement, l'objectif ultime est d'atteindre l'altitude souhaitée. Pour ce faire, l'équipe a choisi d'implémenter un aéro-frein capable de se déployer si la fusée semble aller trop haut, trop vite.

1.2 La fusée

En guise d'introduction, les caractéristiques de la fusée analysée sont présentées. En effet, ce travail d'analyse permet de fournir des résultats importants sur les choix de design qui ont été effectués en amont de ce projet. L'idée est de valider les équations pour un lanceur et une séquence de vol bien définie. Un rendu CAD de la fusée, nommée Matterhorn, est proposé en figure 1.1. La figure 1.2 présente les dimensions générales de Matterhorn.

En bref, le nez de la fusée accueille l'électronique de redondance. Le tube supérieur maintient en place la charge utile jusqu'à son éjection. En-dessous de celle-ci se trouve le parachute qui sera déployé à l'apogée. Le second tube contient et maintient en place le moteur. Au-dessus du moteur se trouve le module d'aéofreins. A



FIGURE 1.1 – Rendu CAD de Matterhorn

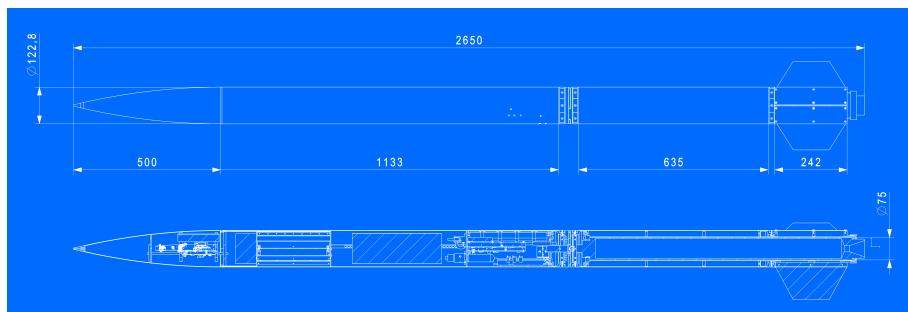


FIGURE 1.2 – Dimensions de Matterhorn

l’arrière se trouve le module d’aileron, ceux-ci peuvent être modifiés à tout instant. Suite à ce projet, il n’est pas impossible que ces derniers soient modifiés en raisons des résultats obtenus. Après intégration de la structure et tous les sous-systèmes, le lanceur pèse 23.6 kg.

La fusée a été complètement dessinée et réalisée par les étudiants de l’EPFL Rocket Team dans le but de satisfaire au mieux le cahier des charges. Les PCBs permettant le monitoring des données, l’estimation de l’état, le transfert de données par radio et la correction par les aérofreins ont été réalisés dans le cadre de projets de semestre, Loic Amez-Droz, Clément Nussbaumer, Leandro Kieliger. L’estimateur d’états est en cours de réalisation en tant que projet de bachelor, celui-ci se base sur deux projets de semestre réalisés par Grégoire Besson et Emilien Mingard. La structure émane des nombreux résultats provenant d’un projet de bachelor et de projets du cours ”Modélisation et Simulation par éléments finis”, générés par Eric Brunner, Maxime Eckstein, Jonathan Burkard, Julien Rey et Emilien Mingard.

1.3 Les aérofreins

L’objectif principal de la compétition est d’atteindre une altitude précise. Pour remplir au mieux cet objectif, l’équipe a décidé d’insérer un module d’aérofreins, ceux-ci pouvant contrôler activement l’altitude de l’apogée. La fusée Matterhorn illustrée en figure 1.1 présente un module rouge situé entre les deux tubes carbone, s’agissant du dit module. Le concept d’aérofreins volant à la compétition s’appelle ”shuriken” à cause de sa ressemblance avec l’arme de point japonaise quand les

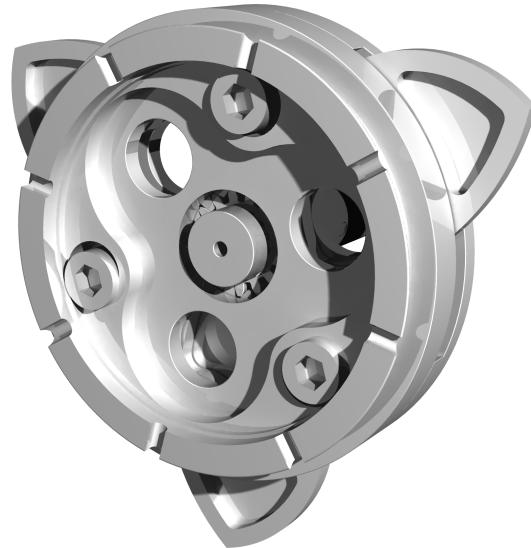


FIGURE 1.3 – Aéro-frein à ouverture latérale

surfaces de freinage sont déployées. Le principe est présenté en figure 1.3. Le grand avantage de cette solution est la faible résistance d'ouverture, puisque le mouvement est perpendiculaire au flux. Le respect des tolérances et un ajustement précis des pièces assure un déploiement facile. En contre-partie, la surface disponible ne peut pas être supérieure à la section coupée de la fusée et une fois déployée, celle-ci se trouve en majeure partie contenue dans la couche limite, résultant en une traînée relativement faible par rapport à celle de la fusée.

Chapitre 2

Repères et Modèles Physiques

2.1 Définition de la géométrie du véhicule

La géométrie de fusée analysée est décrite par la figure 2.1. Des corps aérodynamique de révolution seront analysés avec un empennage de forme trapézoïdal. La géométrie est caractérisée par étage d'un certain diamètre D_i et commençant à une distance Z_i de la pointe du cône. Entre les étages, le diamètre évolue linéairement. Certaines grandeurs comme le diamètre maximal D_m , le diamètre au niveau des ailerons D_f et la position du bord d'attaque à la racine de l'aileron Z_f sont également mis en évidence.

2.2 Modèles physiques

2.2.1 Traînée

Les données expérimentales sur l'aérodynamique des fusées sondes étant assez éparses, des notions venant de l'aviation et du développement de missiles ont été empruntées dans le passé pour estimer le coefficient de traînée. Celui-ci prend sa définition habituelle adimensionnelle,

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho A_{ref} U_\infty^2}, \quad (2.1)$$

où D est la force de traînée s'appliquant au centre de pression dans la direction du vent, ρ est la densité de l'air, A_{ref} est l'aire de référence de la fusée, généralement la section de plus gros diamètre ou la section à la base du cône. Finalement, U_∞ est la vitesse du vent incident.

La détermination du modèle de traînée est largement inspirée de la méthode suivie par Mandell dans "Topics of Advanced Model Rocketry" [5] (Part 2).

Le coefficient de traînée y est décomposé en sa composante à angle d'attaque nulle C_{D0} et à angle d'attaque non nulle $C_{D\alpha}$ tel que,

$$C_D = C_{D0} + \alpha C_{D\alpha} \quad (2.2)$$

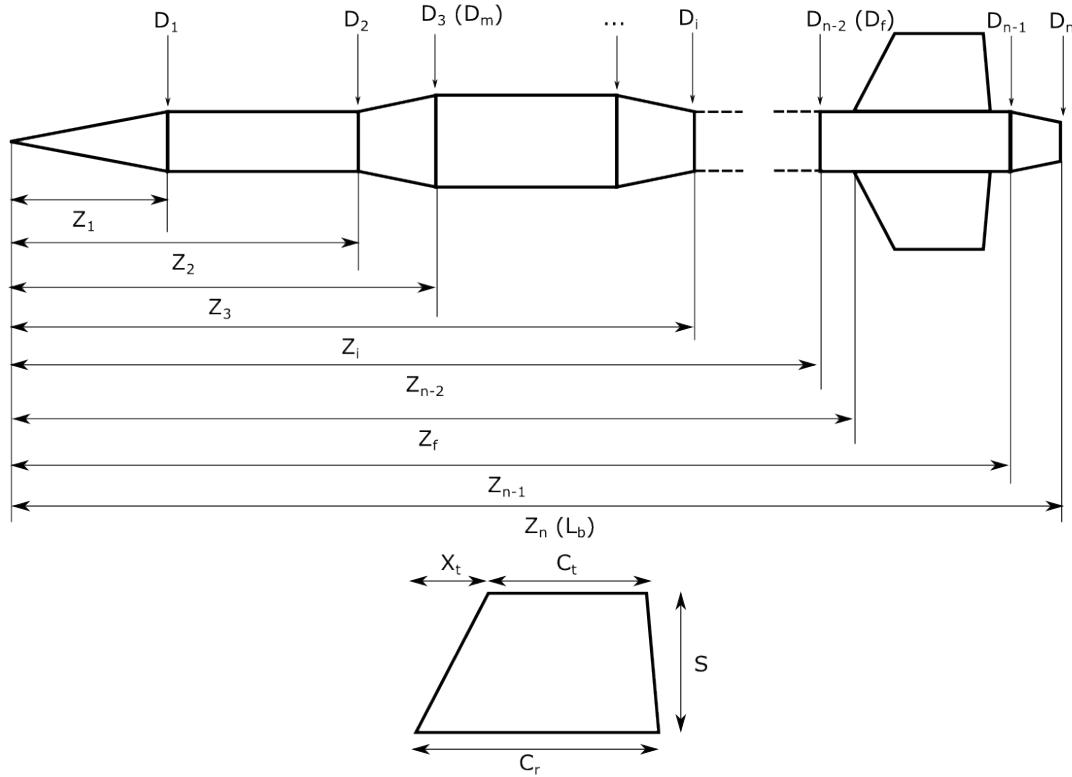


FIGURE 2.1 – Définition d'une géométrie de fusée généralisée à ailerons trapézoïdaux.

Écoulements turbulents et coefficients de friction

Divers coefficients de frictions sont déterminés par analyse théorique de l'écoulement dans la couche limite tel que décrit par les équations de Prandtl et par la solution au premier ordre de Blasius. Ces coefficients sont corrigés par des mesures empiriques et modifiés selon si l'élément concerné de la fusée se trouve en régime laminaire ou transitoire. Deux nombres de Reynolds sont déterminants afin de connaître la nature de l'écoulement, soit celui du corps,

$$Re_{L_b} = \frac{U_\infty L_b}{\nu}, \quad (2.3)$$

et celui des ailerons,

$$Re_c = \frac{U_\infty c}{\nu}, \quad (2.4)$$

avec $c = (C_r + C_t)/2$ la corde moyenne d'un aileron. Les valeurs critiques de transitions à un écoulement turbulent sont prise à $(Re_{L_b})_c = 5e5$ et $(Re_c)_c = 5.14e6$. Les coefficients de friction pour les ailerons et le corps sont déterminés de façon similaire. Basé sur les coefficients de friction turbulent et laminaire pour des plaques,

$$\begin{aligned} (C_f)_{turb} &= \frac{0.074}{(Re)^{1/5}} \\ (C_f)_{lam} &= \frac{1.328}{(Re)^{1/2}}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Les coefficients de friction pour les ailerons sont ensuite calculés avec $Re = Re_c$ et pour le corps avec $Re = Re_{L_b}$. Plus tard dans le rapport, les suffixes $(.)_F$ et

$(.)_B$ seront utilisés pour se référer aux coefficients des ailerons ("Fins") et de corps ("Body"). L'expression des équations pour les coefficients en régime laminaire et transitoire sont :

$$\begin{aligned} (C_f) &= \frac{1.328}{\sqrt{Re}} && \text{si } Re < Re_{crit} \\ (C_f) &= \frac{0.074}{(Re)^{1/5}} - \frac{B}{Re} && \text{si } Re \geq Re_{crit}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Finalement, la variable B est déterminée par :

$$B = Re_{crit}[(C_f)_{turb} - (C_f)_{lam}] \quad (2.7)$$

Méthode DATCOM

Développé par la USAF ("United States Air Force"), la collection de méthodes semi-empiriques connue sous le nom de "Stability and Control Datcom" (pour "Data Compendium") permet à Mandel d'estimer le coefficient de traînée à angle d'attaque nulle dû à la traînée de peau et de pression sur le corps et les ailerons. Celui-ci se décompose à son tour en deux coefficients,

$$(C_{D0})_{FB} = (C_{D0})_F + (C_{D0})_B, \quad (2.8)$$

avec $(C_{D0})_F$ la traînée des ailerons et $(C_{D0})_B$ la traînée du corps.

Le coefficient de traînée des ailerons est déterminé par la formule :

$$(C_{D0})_F = 2(C_f)_F \left(1 + 2\frac{t}{c}\right) \frac{S_F}{A_{ref}}, \quad (2.9)$$

où t est l'épaisseur de l'aileron, c la corde de l'aileron et S_F la somme des surfaces plane des ailerons (une seule face).

La traînée du corps est elle-même séparée en une traînée de peau et de pression,

$$(C_{D0})_B = (C_{Df})_b + C_{Db}. \quad (2.10)$$

Avec la traînée de peau ayant comme expression,

$$(C_{Df})_b = (C_f)_B \left(1 + \frac{60}{(L_b/d_m)^3} + 0.0025 \frac{L_b}{d_m}\right) \frac{S_s}{A_{ref}}, \quad (2.11)$$

et la trainée de pression à la base de la fusée,

$$C_{Db} = \frac{0.029(d_b/d_m)^3}{\sqrt{(C_{Df})_b}}, \quad (2.12)$$

où d_b est le diamètre à l'étage le plus éloigné du cône. Le calcul de la surface du corps, S_s , est effectué à partir de la définition suivante :

$$S_s = \int_0^{L_b} P(x) dx \quad (2.13)$$

Autres contributions à la traînée

Une fusée modélisme ne peut pas être considérée complètement lisse. Quoique la rugosité de sa surface puisse déclencher des instabilités de l'écoulement plus tôt que prévues et donc affecter la traînée, ce n'est pas de ce genre de protubérance auquel on s'intéresse. Ce sont plutôt les guidages afin que la fusée puisse être glissée dans un rail au démarrage qui apportent une traînée supplémentaire non négligeable. Quelques données expérimentales existent à ce sujet et sont à nouveau relatées dans l'ouvrage de Mandell. L'auteur suggère la formule suivante pour estimer la traînée d'un guide de diamètre exposé d_g ,

$$(C_D)_g = 5.75 \left(\frac{d_g}{d_m} \right)^2. \quad (2.14)$$

Traînée à angle d'attaque non-nul

Pour le moment, les forces de résistance de l'air ont uniquement été considérées pour un vent incident parallèle à l'axe de la fusée. Hors, lorsque la fusée oscillera en vol autour de son point d'équilibre, une surface plus importante de la fusée est exposée à l'écoulement ce qui laisse entendre une force de traînée plus élevée. L'analyse se décompose à nouveau en une traînée du corps et une traînée des ailerons.

Par l'analyse des écoulements potentiels, les forces normales au corps de la fusée sont déterminées jusqu'à des angles d'attaque d'environ 2 degrés. Dans l'ouvrage de Mandell, la composante normale à la fusée induite par le vent incident est estimée au moyen du coefficient de portance,

$$(C_L)_B(\alpha) = \frac{2(k_2 - k_1)S_0}{S_m} \alpha, \quad (2.15)$$

avec $(k_2 - k_1)$ des coefficients de pondération issus de l'étude potentielle, illustrés dans la figure 2.2a. Aussi, S_0 est la section à l'étage de position $x_0 = 0.55x_1 + 0.36L_b$, tel que x_1 est le premier étage où le taux de changement de section passe au minimum.

Au delà d'un angle d'attaque de 2 degrés, le décollement de l'écoulement induit des effets non linéaires sur la valeur de la portance. Ceux-ci sont estimés par la correction suivante à l'équation 2.15,

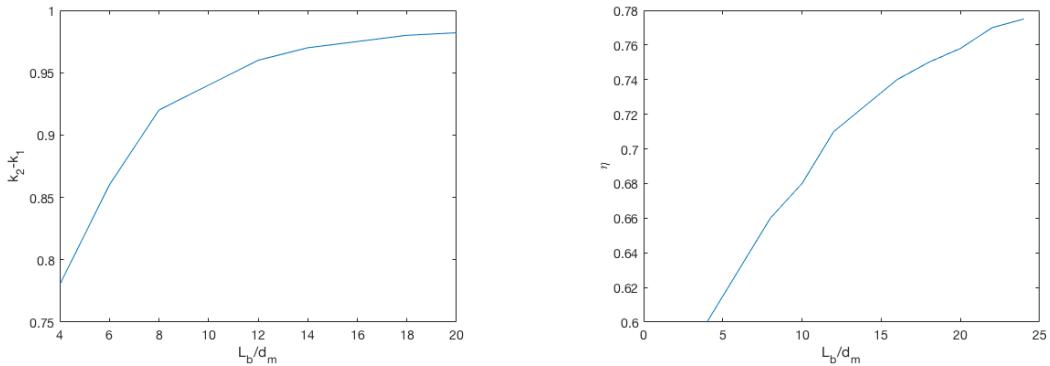
$$(C_L)_B(\alpha) = \frac{2(k_2 - k_1)S_0}{A_{ref}} \alpha + \frac{2\alpha^2}{A_{ref}} \int_{x_0}^{L_b} \eta r(z) C_{D_c} dz. \quad (2.16)$$

Les valeurs du coefficient η sont données par le graphe de la figure 2.2b, $r(z)$ est le rayon du véhicule à l'étage z et C_{D_c} est le coefficient de traînée latéral, valant généralement 1.2.

Pour les ailerons, l'expression empirique utilisée par Mandell est,

$$(C_D)_F(\alpha) = 1.2\alpha^2 \frac{S_F}{A_{ref}}, \quad (2.17)$$

où S_F est l'aire projetée latérale des ailerons.



(a) Valeurs des coefficients de pondération ($k_2 - k_1$) pour différentes valeurs du rapport de finesse.

(b) Valeurs du rapport de traînée d'un corps fini contre celui d'un corps infini pour différentes valeurs du rapport de finesse.

FIGURE 2.2

Il reste encore un facteur de traînée par interférence entre le corps et les ailerons, déterminé par la formule semi-empirique,

$$(C_{D_i})_F(\alpha) = (K_{F(B)} + K_{B(F)} - 1) \frac{dC_L}{d\alpha} \frac{S_F}{S_m} \alpha^2. \quad (2.18)$$

Les facteurs K sont les facteurs d'interférence du corps sur les ailerons et inversement. Leur valeur a été approximée par Hassan [1], au moyen de polynômes :

$$\begin{aligned} K_{F(B)} &= 0.8065R_s^2 + 1.1553R_s, \\ K_{B(F)} &= 0.1935R_s^2 + 0.8174R_s + 1, \end{aligned} \quad (2.19)$$

avec $R_s = (d_f)/(2S + d_f)$.

Conclusion sur la traînée de la fusée

En reprenant tous les coefficients calculés dans cette section et en les insérant dans l'équation 2.2, on obtient,

$$C_D(\alpha) = (C_{D0})_F + (C_{D0})_B + (C_D)_g + \alpha ((C_L)_B(\alpha) + (C_D)_F(\alpha) + (C_{D_i})_F(\alpha)). \quad (2.20)$$

Traînée des aérofreins

L'estimation de la traînée ajoutée par les aérofreins s'effectue au moyen de données expérimentales recensées dans l'ouvrage de Hoerner, *Fluid-Dynamic Drag* [12]. Celui-ci s'intéresse à la traînée de plaques inclinées dans un écoulement. Le coefficient de traînée d'une plaque mince tridimensionnelle est donné à la page 3-15, valant $C_{D0} = 1.17$ et restant relativement constant pour des angles par rapport à l'écoulement entre $\phi = 90^\circ$ et $\phi = 45^\circ$. A la page 7-17 nous apprenons que le coefficient de force normale sur une plaque inclinée est donné par

$$C_N = C_{D0} \sin^2(\phi). \quad (2.21)$$

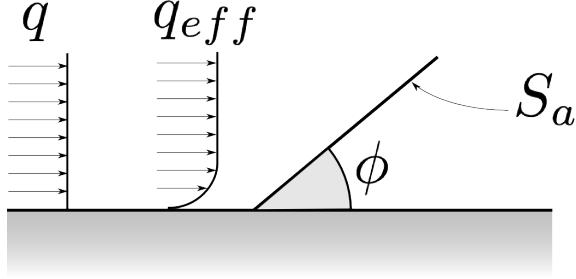


FIGURE 2.3 – Schéma du model d'aéofreins

Projeté dans la direction du vent, la traînée s'exprime alors comme,

$$C_D = C_{D0} \sin^3(\phi). \quad (2.22)$$

Pour prendre en compte l'effet du corps sur la traînée due aux aéofreins, la différence de quantité de mouvement a été prise en compte tel qu'illustrée dans la figure 2.3.

Pour comprendre la différence de quantité de mouvement entre l'écoulement avec et sans couche limite, il faut tout d'abord un modèle du profil de vitesse. Une approximation polynomiale dans la couche limite turbulente est proposée par Schlichting [11] (p.601) :

$$\frac{u}{U_{\text{inf}}} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}}, \quad (2.23)$$

où δ est l'épaisseur de la couche limite turbulente calculée selon le développement de Mandel [5] (p.340) :

$$\delta = 0.37 z_a R_{ez_a}^{-\frac{1}{5}}, \quad (2.24)$$

avec z_a la position des aéofreins le long de la fusée.

En intégrant le profil sur la hauteur d'influence de l'aéofrein h ,

$$S_e q_{eff} = \int_0^h \frac{1}{2} \rho u(y)^2 dS, \quad (2.25)$$

$dS = l(y)dy$, $l(y)$ étant la largeur de l'aéofrein le long de la hauteur de celui-ci. Pour le shuriken, cette largeur est variable alors que pour le flaps, elle est constante. Afin de déterminer une fonction $l(y)$ pour le shuriken, une linéarisation de la géométrie a été employée tel qu'illustrée dans la figure 2.4. Une hypothèse majeure est que la base reste de la même largeur b et que la hauteur est définie entre celle-ci et la pointe de l'ailette. La loi linéaire régissant la largeur de l'aéofrein en fonction de sa hauteur est donc

$$l(y) = b(1 - \frac{y}{h}). \quad (2.26)$$

L'intégrale 2.25 devient alors pour le shuriken :

$$S_e q_{eff} = \frac{1}{2} U_{\text{inf}}^2 \rho b \left[\int_0^\delta \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{2}{7}} \left(1 - \frac{y}{h}\right) dy + \int_\delta^h \left(1 - \frac{y}{h}\right) dy \right], \quad (2.27)$$

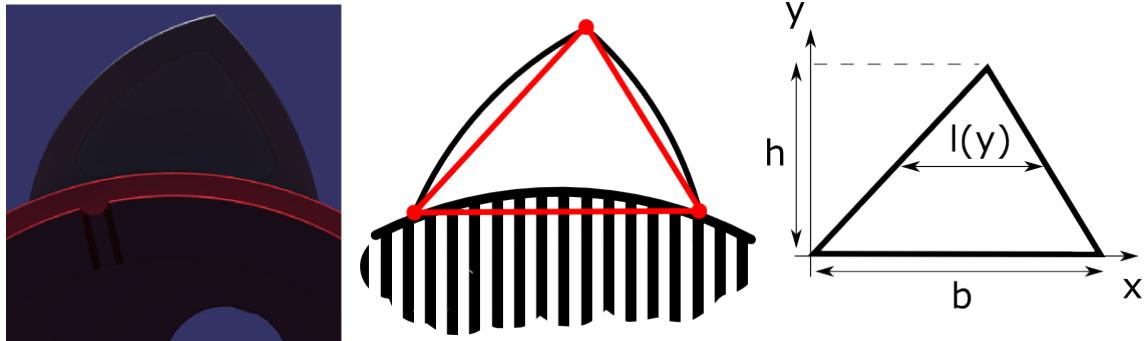


FIGURE 2.4 – Méthode de caractérisation des aérofreins de type shuriken par la linéarisation de la géométrie.

Si $h < \delta$ alors la deuxième intégrale tombe et la borne supérieure de la première devient h . Cela engendre deux résultats, qui simplifiés par $q = \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 bh$, donnent,

$$\frac{q_{eff}}{q} = \begin{cases} \frac{49}{72} \left(\frac{h}{\delta}\right)^{2/7} & \text{si } h < \delta \\ 1 - \frac{4}{9} \frac{\delta}{h} + \frac{1}{8} \left(\frac{\delta}{h}\right)^2 & \text{si } h > \delta \end{cases} \quad (2.28)$$

D'un point de vue qualitatif, cette méthode a tendance à sous estimer la traînée du shuriken, vu que les zones de basse vitesse d'écoulement à la base de l'ailette sont sur-évaluées tandis que les bords supérieurs où l'écoulement est rapide ont des surfaces négligées.

Pour la version flaps des aérofreins, une méthode similaire est utilisée, sauf que cette fois la hauteur est définie par l'angle d'ouverture et la largeur w ,

$$h = \sin(\phi)w. \quad (2.29)$$

La largeur, quant à elle, reste constante tout du long de l'ailette, $l(y) = b, y \in [0, h]$. Un facteur correctif pour la quantité de mouvement est alors établi,

$$\frac{q_{eff}}{q} = \begin{cases} \frac{7}{9} \left(\frac{w \sin(\phi)}{\delta}\right)^{2/7} & \text{si } \phi < \arcsin(\delta/w) \\ 1 - \frac{2}{9} \left(\frac{\delta}{w \sin(\phi)}\right) & \text{si } \phi > \arcsin(\delta/w) \end{cases} \quad (2.30)$$

Pour les deux types d'aérofreins, on peut à présent corriger l'expression (2.22) par le facteur de réduction de la quantité de mouvement incidente sur la surface de freinage et normaliser le coefficient à l'aire de référence,

$$C_D = \frac{q_{eff}}{q} C_{D0} \sin^3(\phi) \frac{S_a}{A_{ref}}, \quad (2.31)$$

où S_a est l'aire planaire de la surface de freinage.

En utilisant les résultats des calculs précédents, les courbes de traînée en fonction de l'ouverture ont été déterminées pour les deux modèles d'aérofreins. Celle-ci sont présentées dans la figure 2.5.

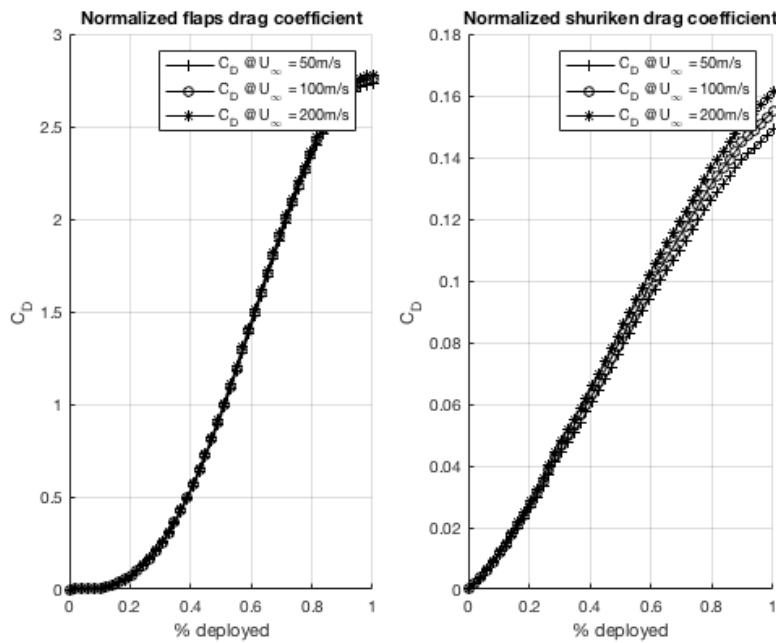


FIGURE 2.5 – Coefficient de traînée estimé en fonction de la fraction d'aérofrein déployé et de la vitesse du vent incident.

2.2.2 Portance

La portance est définie comme la force aérodynamique normale à l'axe de la fusée s'exerçant au centre de pression, soit le point d'application de la résultante des forces normales sur chaque élément de la fusée. Effectivement, grâce au travail de Jame S. Barrowman et Judith A. Barrowman [2], les équations de mécanique des fluides ont pu être suffisamment simplifiées pour permettre une estimation analytique de ces forces. Chaque élément de la fusée tel que le cône, les ailerons ou la queue ont un effet sur la position du centre de pression et l'intensité de la force résultante caractérisé par un coefficient de force normale $C_{N\alpha}$ et son point d'application depuis le haut de l'élément Z_{CP} . Dans la suite de l'analyse, le suffixe $(.)_e$ indique un coefficient de l'élément. Les tubes cylindriques n'ont aucun effet dans l'analyse proposée par Barrowman, ce n'est que plus tard, dans un rapport de Robert Galejs que leur effet sur la position du centre de pression à angles d'attaque non-nulle est mis en évidence [4].

Portance du corps

L'analyse de Barrowman part de la considération suivante sur la force normale appliquée à un corps de révolution soumis à un écoulement perpendiculaire de vitesse w ,

$$n(x) = \rho U_\infty \frac{\partial}{\partial x} (S(x) w(x)). \quad (2.32)$$

$S(x)$ est la section du lanceur à l'étage x . L'écoulement est essentiellement considéré comme constant le long de la fusée, donc $w(x) = U_\infty \sin(\alpha)$.

De la définition d'un coefficient aérodynamique adimensionnel, on reformule l'expression de la force normale comme,

$$C_N(x) = \frac{n(x)}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 A_{ref}} = \frac{2 \sin(\alpha)}{A_{ref}} \frac{\partial S(x)}{\partial x}. \quad (2.33)$$

Intégrée sur tout le corps, on obtient,

$$(C_N)_e = \frac{2 \sin(\alpha)}{A_{ref}} \int_0^{L_e} \frac{\partial S(x)}{\partial x} dx = \frac{2 \sin(\alpha)}{A_{ref}} (S(L_e) - S(0)). \quad (2.34)$$

Afin d'obtenir le coefficient de taux de variation de la portance avec l'angle d'attaque $C_{N\alpha}$, il faut encore diviser le résultat précédent par α :

$$(C_{N\alpha})_e = \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} \frac{2}{A_{ref}} (S(L_e) - S(0)). \quad (2.35)$$

De façon analogue, le coefficient de moment aérodynamique est déterminé,

$$(C_{M\alpha})_e = \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} \frac{2}{A_{ref}d} (L_e S(L_e) - V) \quad (2.36)$$

La position du centre de pression est donné par le rapport du coefficient de moment et du coefficient de force normale.

$$(Z_{cp})_e = \frac{C_{M\alpha}}{C_{N\alpha}} = \frac{L_e S(L_e) - V}{S(L_e) - S(0)}. \quad (2.37)$$

Pour ce qu'il en est des corrections apportées par Robert Galejs, des coefficients supplémentaire de force normale et des points d'application de ces forces supplémentaires sont calculés pour chaque élément de corps,

$$(C_{N\alpha G})_e = K \frac{S_{plan}}{A_{ref}} \sin^2(\alpha), \quad (2.38)$$

$$(Z_G)_e = \frac{1}{S_{plan}} \int_0^{L_e} z 2r(z) dz, \quad (2.39)$$

avec le facteur K déterminé expérimentalement comme étant ~ 1.1 . L'aire latérale exposée est donnée par S_m .

Portance des ailerons

La portance des ailerons suit la méthode utilisée par Barrowman avec des corrections employées par Sampo [9] dans son modèle aérodynamique pour le programme de simulation de trajectoire Open Rocket. Pour mieux comprendre les expressions qui suivent, la figure 2.6 illustre les paramètres définissant un aileron trapézoïdal.

Initialement proposé par Barrowman, l'expression du coefficient de force normale est :

$$(C_{N\alpha})_1 = \frac{2\pi(S^2/A_{ref})}{1 + \sqrt{1 + (\frac{S^2}{S_F \cos(\sigma)})^2}}, \quad (2.40)$$

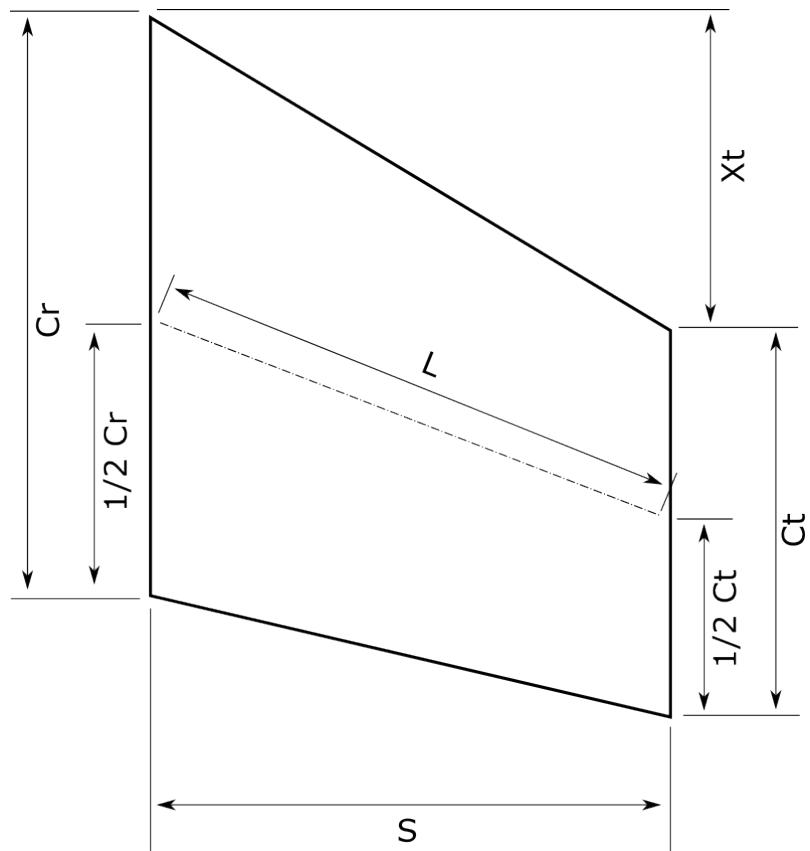


FIGURE 2.6 – Aileron trapézoïdal et les paramètres qui le définissent.

où σ est l'angle de mi-corde. Sampo remarque que basé sur la théorie de portance de plaques minces corrigée pour les écoulements compressibles, la portance est donnée par,

$$C_{N\alpha 0} = \frac{2\pi}{\beta}, \quad (2.41)$$

avec $\beta = \sqrt{1 - M^2}$, pour $M < 1$.

Cela engendre une version corrigée de l'équation 2.40,

$$(C_{N\alpha})_1 = \frac{2\pi(S^2/A_{ref})}{1 + \sqrt{1 + (\frac{S^2}{S_F \cos(\sigma)})^2}}. \quad (2.42)$$

Barrowman propose encore une modification à l'expression de la portance pour tenir compte de l'interférence entre le corps et les ailerons. Soit en multipliant 2.42 par le facteur $K_{T(B)} = 1 + \frac{d_f}{2S+d_f}$.

Etant donné que la position relative de chaque aileron par rapport à l'écoulement n'est pas la même, il faut encore calculer un facteur qui puisse estimer l'effet total de l'empennage. L'angle d'attaque local d'un aileron est donné par,

$$\alpha_i = \alpha \sin^2(\theta_i), \quad (2.43)$$

ce qui engendre pour le coefficient de force normale,

$$(C_{N\alpha})_i = (C_{N\alpha})_1 \sin^2(\theta_i) \quad (2.44)$$

En somme, pour N ailerons uniformément répartis autour de la fusée, le coefficient total de force normale est :

$$(C_{N\alpha})_F = \sum_{i=1}^N (C_{N\alpha})_i \sin^2\left(\frac{2\pi}{N}i + \theta_1\right). \quad (2.45)$$

En ce qui concerne le centre d'application de la force normale, Barrowman propose la formule suivante :

$$(Z_{CP})_F = \frac{X_t}{3} \frac{C_r + 2C_t}{C_r + C_t} + \frac{1}{6} (C_r + C_t + \frac{C_r C_t}{C_r + C_t}). \quad (2.46)$$

Il est important de noter que ces résultats restent correcte pour des vitesses sub-soniques uniquement.

Conclusion sur la portance

Globalement, le facteur de force normale de la fusée est la somme de tous les facteurs. Soit pour une fusée composée de n éléments,

$$C_{N\alpha} = \sum_{e=1}^n (C_{N\alpha})_e + (C_{N\alpha G})_e. \quad (2.47)$$

Pour la position du centre de pression, une moyenne pondérée par les coefficients de force normale est appliquée :

$$Z_{cp} = \frac{\sum_{e=1}^n (Z_{cp})_e (C_{N\alpha})_e + (Z_G)_e (C_{N\alpha G})_e}{C_{N\alpha}} \quad (2.48)$$

2.2.3 Coefficient de moment correctif

Le moment correctif M_1 est au mouvement de rotation de la fusée ce que la portance est au mouvement de translation. Comme nous venons de voir en section 2.2.2, une force normal s'applique sur le corps de la fusée au centre de pression. Si celui-ci ne se trouve pas au centre de masse, alors la portance exercera un moment de force. Le moment exercé est de la forme suivante :

$$M_1 = C_1 \alpha \quad (2.49)$$

C_1 est le coefficient de moment correctif[6], d'unités Nm/rad et α l'angle d'attaque. En effet, si celui-ci est nul, aucun moment de correction s'applique sur le corps de la fusée. Le coefficient se calcul de la manière suivante :

$$C_1 = \frac{1}{2} \rho A_{ref} U_\infty^2 C_{N\alpha} (Z_{cg} - Z_{cp}) = \frac{F_n}{\alpha} \Delta Z \quad (2.50)$$

L'équation 2.50 met en évidence la force de portance F_n et l'espacement entre le centre de gravité et le centre de pression, ΔZ .

2.2.4 Coefficient du moment d'amortissement

Le moment d'amortissement M_2 est défini de la manière suivante :

$$M_2 = C_2 \dot{\alpha} = (C_{2A} + C_{2B}) \dot{\alpha} \quad (2.51)$$

C_2 est le coefficient du moment d'amortissement[7] d'unités Nms/rad . Une fusée présentant un mouvement oscillatoire autour de son centre de masse lors d'un vol perd de l'énergie par deux phénomènes :

- C_{2A} : perte aérodynamique
- C_{2B} : amortissement par les gaz du moteur

Amortissement aérodynamique

Chaque partie du corps de la fusée est freinée par la présence de l'air. Plus cette partie est loin du centre de masse (Centre de rotation), plus l'effet de frein est important. L'équation 2.52 détaille l'effet du gaz sur le coefficient.

$$C_{2A} = \frac{1}{2} \rho A_{ref} U_\infty \sum_{e=1}^n (C_{N\alpha})_e ((Z_{cp})_e - Z_{cg})^2 \quad (2.52)$$

Moteur	Dimensions [mm]	Impulsions [Ns]	Poussée Max [N]	Masse [kg]
M1850W	D75 L923	7658	4489	6.693
M685W	D75 L923	7561	1517	7.008

TABLE 2.1 – Liste des moteurs potentiellement utilisés

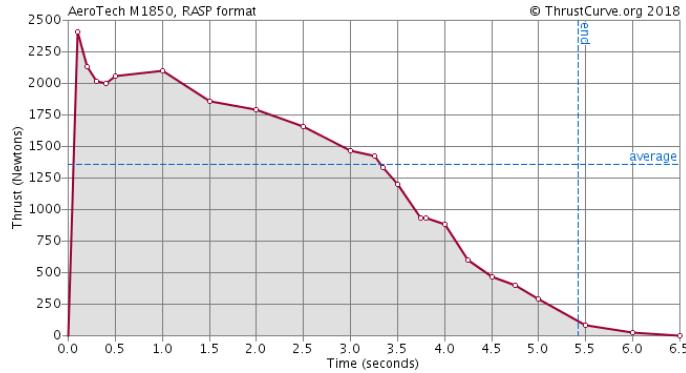


FIGURE 2.7 – Courbe typique de poussée, moteur M1850W

Amortissement de poussée

Plus il y a de gaz échappé, plus l'amortissement est important. La contrepartie du moteur est la suivante :

$$C_{2B} = \dot{m}(Z_{nozzle} - Z_{cg})^2 \quad (2.53)$$

Où Z_{nozzle} est la position de la tuyère et \dot{m} la masse de la fusée.

2.2.5 Poussée

Jusqu'à présent, aucune force permettant à la fusée d'accélérer n'a été considérée. Il y en a pourtant une seule et il s'agit de la poussée procurée par le moteur. Dans ce genre de lanceur, les moteurs sont sous forme solide. Cela veut dire qu'il est composé d'un combustible et d'un oxydant mélangés et durcis. Suite à l'allumage, le moteur brûle sans contrôle jusqu'à ce que la réaction soit complète.

Comme on peut le comprendre, si l'on n'est pas possible de contrôler le moteur, alors il faut pouvoir estimer la poussée produite en tout temps. Les forces en jeu sont relativement grande comparées aux forces de traînée et gravité. Cela implique que de larges erreurs sur l'état de la fusée peuvent apparaître si l'estimation est mauvaise. Il existe deux méthodes pour connaître la force de poussée :

- Procéder à une série de mesures tests
- Se fier aux données procurées par le fabricant

Pour des raisons de budget, il n'a pas été possible de mesurer la poussée des moteurs que nous utiliserons pour les lancements test. Le tableau 2.1 propose une liste des potentiels moteurs utilisés pour les différents vols. Pour chacun de ces moteurs, le fabricant propose un jeu de mesures présenté sous forme de tableau (Temps, Force). Une représentation graphique est proposée en figure 2.7.

Cependant, on souhaite connaître la poussée en tout temps. Connaissant quelques points caractéristiques de la courbe, on peut extrapoler les valeurs intermédiaires.

Les fabricants certifient que la force réelle se situe autour de la courbe à laquelle on rajoute une erreur de $\pm 10\%$ sur la valeur courante. En réalité, deux moteurs tirés dans des conditions identiques auront de très faibles différences en terme de résultats. Cependant, deux moteur allumés dans des conditions différentes (Désert du Nouveau-Mexique et la Suisse printanière) peuvent présenter des différences de performance et donc de poussée. En conclusion, il n'est pas intéressant d'interpoler les valeurs autre que linéairement vu que la précision dépend grandement de la fiabilité des valeurs.

2.2.6 Atmosphère

L'atmosphère standard américaine de 1977 est utilisée [8]. La température varie linéairement de $\frac{dT}{dh} = -6.5^\circ[K/km]$ jusqu'à une altitude de $10[km]$, correspondant à la limite de la troposphère. Le lieu du concours se trouvant à $1400[m]$ d'altitude, ce modèle suffit pour nos besoins. Les conditions initiales au niveau de la mer sont données par l'atmosphère standard :

- $T_0 = 288^\circ K$
- $p_0 = 101'325 Pa$
- $\rho_0 = 1.225 kg/m^3$

On définit également certaines constantes :

- $r = 287$, la valeur réelle de la constante des gaz parfaits pour l'air.
- $\gamma = 1.4$ le rapport des chaleurs spécifiques pour l'air.

La température évolue comme :

$$T = T_0 + \frac{dT}{dh} h / 1000,$$

où h est l'altitude en mètres. En faisant l'hypothèse d'une atmosphère hydrostatique, la pression est :

$$p = p_0 \left(1 + \frac{dT}{dh} \frac{h}{1000 T_0}\right)^{\left(\frac{-1000g}{r dT/dh}\right)}.$$

La densité est alors obtenue par l'équation d'état des gaz parfaits :

$$\rho = \frac{p}{rT}.$$

Finalement, pour calculer le nombre de mach il faut connaître la vitesse du son à chaque altitude :

$$a = \sqrt{\gamma r T}.$$

2.2.7 Humidité

L'humidité de l'air est un paramètre qui à priori doit être pris en compte. Il semble judicieux d'intégrer l'effet de celle-ci dans la valeur de la densité de l'air ambiante. En effet, lorsque l'environnement est humide, la densité de la vapeur d'eau modifie celle de l'air sec. Il est possible de définir la densité de l'air humide en connaissant le taux de vapeur d'eau dans l'air : $x [kg/kg]$. On peut écrire :

$$\rho = \rho_{as} \frac{1+x}{1+xR_w/R_a} \tag{2.54}$$

où ρ_{as} est la densité de l'air sec, R_w et R_a sont les constantes de gaz de la vapeur d'eau et de l'air respectivement.

x peut être exprimé à l'aide du taux d'humidité dans l'air ϕ et du taux de vapeur d'eau à saturation x_s :

$$x = x_s \phi \quad (2.55)$$

ϕ est généralement considéré comme la représentation usuelle de l'humidité. A titre d'exemple, un environnement tropical humide sera proche des 100%. Il est encore possible d'estimer le taux de vapeur d'eau à saturation :

$$x_s = \frac{0.62198 p_{ws}}{p_{atm} + p_{ws}} \quad (2.56)$$

Où p_{ws} est la pression saturante de la vapeur d'eau, explicitée en équation 2.57.

$$p_{ws} = \frac{e^{77.345 + 0.0057T - 7235/T}}{T^{8.2}} \quad (2.57)$$

2.2.8 Masse

La masse d'une fusée n'est pas triviale. Celle-ci change à chaque instant car la poussée est due à l'éjection de masse. Les fabricants de moteurs ne fournissent dans ce cas pas de données sur ce phénomène, probablement dû à la complexité d'une telle mesure. Comment modéliser le changement de masse ? Si on pense aux équations du mouvement, l'unique terme intéressant est la variation de masse : dm/dt .

En première hypothèse, on peut imaginer un modèle linéaire. La masse diminue avec le temps pendant la durée de poussée. Ainsi le terme d'intérêt s'écrit simplement :

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{\Delta m}{t_{burn}} \quad (2.58)$$

Une seconde option, plus complexe, se rapproche plus de la réalité. On peut imaginer que le changement de masse en un moment donné peut être proportionnel à la poussée :

$$\frac{dm}{dt} = \delta Thrust(t) \quad (2.59)$$

Où δ est une constante de proportionnalité. On peut exprimer cette constante en identifiant δ de l'équation suivante :

$$\Delta m = \delta \int_0^{t_{burn}} Thrust(t) dt \quad (2.60)$$

On verra lors des simulations de vol que ces deux hypothèses donnent des résultats différents. A titre de comparaison, le simulateur open source "Open Rocket" propose une solution linéaire au problème de variation de masse.

2.2.9 Inerties principales

Les inerties de rotations sont un point clé du mouvement d'une fusée. Celles-ci aident à décrire le mouvement en rotation de la fusée autour de ses axes principaux. Elles influencent notamment beaucoup le régime oscillatoire et ainsi la stabilité d'une fusée.

Pour connaître l'évolution au cours du temps, il faut comprendre quel élément de la fusée varie dans le temps. En effet, seul le moteur change de masse au cours du temps. De ce fait, plusieurs observations sont à préciser :

- Le centre de masse varie avec le temps
- L'inertie de rotation longitudinale est identique en yaw et pitch, elles varient avec la masse et le centre de masse
- L'inertie de rotation radiale varie avec la masse

Centre de Masse

Le centre de masse est calculé depuis le sommet du cône, celui-ci est toujours pris comme référence pour la position des éléments. Pour toutes ces analyses, nous considérons le corps de la fusée sans moteur comme un corps solide (Celui-ci ne variant pas avec le temps), nous chercherons alors le centre de masse de l'assemblage corps fusée et moteur. On peut exprimer le centre de masse de la manière suivante :

$$Cm = \frac{m_{\text{Fusée}} Cm_{\text{Fusée}} + m_{\text{Moteur}} Cm_{\text{Moteur}}}{m_{\text{Fusée}} + m_{\text{Moteur}}} \quad (2.61)$$

où Cm_{Moteur} peut se calculer en connaissant la longueur de la fusée et du moteur. Etant donné que la masse varie dans le temps, l'inertie varie elle aussi. Pour pouvoir exprimer le changement temporel de l'inertie, il faut connaître le changement temporel du centre de masse. Une fois les termes ré-arrangés, on obtient :

$$\frac{dCm}{dt} = \frac{dm}{dt} \frac{(Cm_{\text{Moteur}} - Cm)}{m} \quad (2.62)$$

Inertie longitudinale

A nouveau, nous considérons le corps de la fusée comme un corps solide, d'inertie connue $I_{L\text{Fusée}}$. Celle du moteur n'est pas connue et dépendra du modèle choisi. Nous ferons l'hypothèse que le moteur maintient une forme de cylindre creux de rayon externe R_e et de rayon interne R_i et de longueur L_{Moteur} . L'inertie longitudinale d'un cylindre de longueur L creux en son centre de gravité est la suivante :

$$I_L = m \left(\frac{L^2}{12} + \frac{R_e^2 + R_i^2}{4} \right) \quad (2.63)$$

Le moteur est composé de deux sous éléments à prendre en compte (Figure 2.8) :

- La boîte moteur, tube en aluminium qui maintient le moteur sous haute pression. C'est un cylindre à paroi fine situé autour du combustible. Celui-ci ne change pas avec le temps. L'équation 2.63 peut s'utiliser en posant $R_e = R_i$.

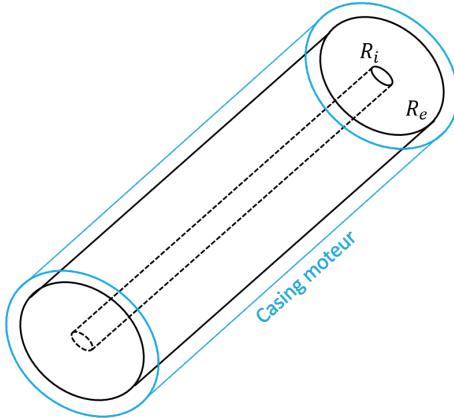


FIGURE 2.8 – Casing moteur avec combustible

- La force de poussée est produite par le combustible qui se trouve sous forme de grains dans la boîte moteur. Les grains se présentent sous forme de cylindre creux avec le rayon intérieur qui change. Leur masse diminue donc avec le temps. Pour simplifier les équations, nous considérons ce rayon comme constant. L'équation 2.63 peut s'utiliser.

Il est dorénavant possible d'exprimer l'inertie totale du lanceur :

$$I_L = I_{LCasing} + I_{LGrain} + I_{LFusée} + (m_{Casing} + m_{Grain})(Cm_{Moteur} - Cm)^2 + m_{Fusée}(Cm_{Fusée} - Cm)^2 \quad (2.64)$$

Les trois premiers termes sont les inerties de chaque élément autour de leur centres de masse respectif. Les termes suivants résultent du théorème de Steiner étant donné que chaque élément tourne autour du centre de masse de l'entier du système.

On peut écrire la dérivée temporelle de l'inertie de la manière suivante :

$$\frac{dI_L}{dt} = \frac{dI_{LGrain}}{dt} + 2m_{Fusée}(Cm - Cm_{Fusée})\frac{dCm}{dt} + \frac{dm}{dt}(Cm_{Moteur} - Cm)^2 + 2(m_{Casing} + m_{Grain})(Cm - Cm_{Fusée})\frac{dCm}{dt} \quad (2.65)$$

2.2.10 Gravité

Concernant la gravité, il existe une multitude de modèles adaptés à différentes situations. Puisque le vol considéré ne devrait pas dépasser 3000 [m] pour l'instant et 10000 [m] dans le futur, un simple modèle de base comprenant l'altitude est suffisant :

$$g(h) = \frac{GM_{terre}}{(h + R_{terre})^2} \quad (2.66)$$

où h est l'altitude de la fusée mesurée depuis le sol.

Chapitre 3

Analyse de stabilité

3.1 Stabilité d'une fusée

L'étude de stabilité d'une fusée est primordiale car si celle-ci ne l'est pas, il y a des risques pour qu'elle n'atteigne jamais son objectif principal, l'apogée souhaitée. De manière générale, la vitesse a sa part de responsabilité, c'est-à-dire que pour la plupart des fusées (i.e fine, allongée avec ailerons à la base), elles seront de toute manière stable passé une certaine vitesse dite vitesse critique.

En réalité, il existe une phase de poussée, correspondant au moment où le corps accélère. Il est guidé sur un rail le temps de prendre suffisamment de vitesse. Lorsqu'il quitte le rail, il faut s'assurer qu'il va assez vite pour être stable.

Cette section présente les éléments importants à prendre en compte lorsqu'on réalise une étude de stabilité. Des équations simplifiées et linéarisées sont proposées à des fins d'analyse et de performance. On cherchera à trouver quelle est la vitesse critique de la fusée présentée en section 1.2 basée sur un critère de stabilité proposé en section 3.4.

3.2 Equations générales

Une fusée évoluant dans les airs n'est rien d'autre qu'un corps doté d'inerties principales soumis à des efforts extérieurs. Ceux-ci existent par la présence de la vitesse de la fusée et du milieu dans lequel elle se trouve. Le jeu d'équations qui régissent le comportement vibratoire de la fusée est le suivant :

$$\begin{cases} I_L(t) \frac{\partial^2 \delta_1}{\partial t^2} + C_2(t, v) \frac{\partial \delta_1}{\partial t} + C_1(v) \delta_1 + I_R(t) \omega_z \frac{\partial \delta_2}{\partial t} = M_1 \\ I_L(t) \frac{\partial^2 \delta_2}{\partial t^2} + C_2(t, v) \frac{\partial \delta_2}{\partial t} + C_1(v) \delta_2 - I_R(t) \omega_z \frac{\partial \delta_1}{\partial t} = M_2 \end{cases} \quad (3.1)$$

I_R & I_L sont les inerties longitudinale et radiale de la fusée. ω_z est le taux de roll, la vitesse angulaire à laquelle la fusée tourne autour de son propre axe. En réalité, il existe une 3^e équation qui décrit l'évolution de ce taux. En première approximation, la fusée est symétrique et de ce fait, cette équation est triviale, le taux de roll ne change pas au cours du vol. Les termes C_1 & C_2 (Sect. 2.2.3 & 2.2.4) sont respectivement les moments correctifs liés à l'angle d'attaque (Rigidité) et à la vitesse angulaire (Amortissement).

Comme on peut le constater, la plupart des termes présents dans l'équation 3.1 dépendent soit du temps t , soit de la vitesse v ou encore des deux. La nature de ces coefficients non constants est telle qu'aucune solution analytique générale n'existe. Le recours à l'utilisation d'un solveur d'équation différentielle est exagérer dans le sens où plusieurs résolutions sont effectuées en boucle. Pour optimiser le calcul numérique, nous souhaitons développer des équations simples, représentant le même phénomène sous quelques hypothèses simplificatrices. Celles-ci modifient un peu la représentation du comportement de la fusée sans toute-fois changer les conclusions concernant la stabilité. En effet, nous verrons en section 3.3 que nous simplifions les équations de telle manière à ce que le pire des cas soit représenté.

3.3 Equation simplifiée

Selon les conditions initiales, le mouvement prescrit à l'équation 3.1 peut s'avérer très simple. En effet, si la rampe de lancement se tient droite et que la fusée ne tourne pas sur elle-même, alors la fusée continue son chemin tout droit. La compétition requiert une analyse précise du comportement lorsque les conditions initiales sont non nulles et/ou des moments supplémentaires sont appliqués.

Cela peut arriver lorsqu'il y a du vent en sortie de rail, la vitesse vue par la fusée est composée d'une vitesse ascensionnelle verticale et d'un vent relatif horizontal. L'angle entre le corps de la fusée et le vecteur total vitesse est alors non nul, ce qui peut induire des instabilités. La figure 3.1 schématisse les différents angles en jeu. Les équations que nous présentons sont toujours liées à l'angle δ , il s'agit de l'angle entre la verticale et l'axe de la fusée. L'angle β représente l'angle entre la verticale et la vitesse relative (i.e Vent + Vélocité). On voit que si l'angle δ est le même que β , alors aucun moment aérodynamique ne s'applique.

3.3.1 Vent latérale

Comme premières hypothèses, nous supposons que le vent agit comme un moment constant. Celui-ci peut se représenter par un saut escalier centré au temps où la fusée sort du rail. Aussi, nous considérons que la fusée ne tourne pas sur elle-même, phénomène souvent observé lors de vol tests. L'équation simplifiée peut alors s'écrire :

$$I_L(0) \frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} + C_2(0, V_0) \frac{\partial \delta}{\partial t} + C_1(0, V_0) \delta = M_1 \quad (3.2)$$

Comme on peut le remarquer, les coefficients C_1 & C_2 sont gardés constants, leur valeur est la valeur initiale. Sous cette hypothèse et si on se fie à l'expérience acquise, la valeur initiale est la limite inférieure. Cela veut dire que lorsque la fusée accélère, ces coefficients augmentent de manière à stabiliser la fusée.

Le moment M_1 est l'entrée escalier dû au vent. Son expression fait apparaître l'angle β : $M_1 = C_1(0, V_0)\beta$. Ainsi on voit que si ce terme se retrouve à gauche de l'égalité, alors le moment de rappel dû à l'écart angulaire est proportionnel au terme $\delta - \beta$. Cela se traduit par un moment nul lorsque $\delta = \beta$, comme déjà dit au début de cette section.

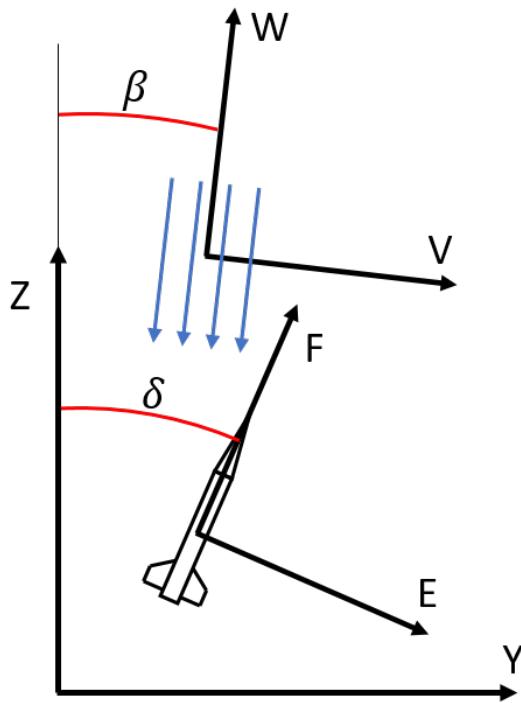


FIGURE 3.1 – Vent relatif vu par la fusée et angles descriptifs, Le vent incident est composé de la composante verticale de vitesse de la fusée et du vent horizontal. La vitesse horizontale de la fusée est négligée.

Afin de complètement définir cette équation, il reste à exprimer l'angle β . Son expression est donnée par un arc-tangente :

$$\beta = \arctan\left(\frac{V_{vent}}{V_0}\right) \quad (3.3)$$

Ce modèle est loin de la réalité mais suffit pour caractériser grossièrement la stabilité de la fusée. On néglige notamment la composante horizontale de la vitesse. Si on souhaite la prendre en compte, on ouvre le modèle à 3 degrés de liberté ; (X, Z, θ) . Les solutions analytiques, même lorsque les équations sont simplifiées, n'existent pas. Il faut avoir recours à une résolution numérique. Ce modèle sera décrit au chapitre 5.

3.3.2 Rafale de vent

Une deuxième source d'instabilité dû à l'environnement peut provenir d'une rafale de vent. Lors du vol, celle-ci pousse durant un court instant les ailerons, amenant le nez de la fusée à prendre de l'angle par rapport à son mouvement. La représentation théorique d'un tel phénomène est l'impulsion de Dirac. Or cette représentation est théorique, il est donc difficile de lier impulsion et rafale de vent. On procède à une approximation : la figure 3.2 illustre l'intensité d'une rafale. En effet, l'impulsion de Dirac est pratique pour une solution analytique mais il faut pouvoir lui appliquer une force. Celle-ci est approximée par une surface effective ; en effet on peut calculer l'intensité en multipliant le vitesse du vent par le temps d'application. Ainsi on définit l'intensité $H = V_{vent} * t_{exposition}$. On voit ainsi que si

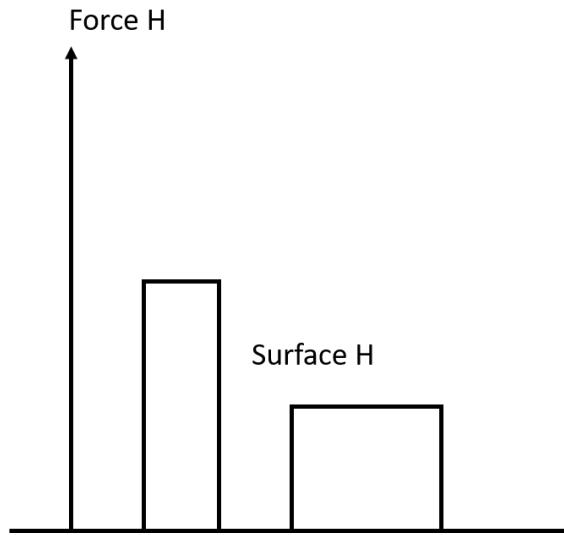


FIGURE 3.2 – Approximation d'une rafale par une impulsion

le temps d'exposition ou si la vitesse du vent est élevée, alors l'intensité est forte et la fusée aura tendance à fortement prendre de l'angle.

Comment intégrer ce phénomène dans l'équation ? Si on se base sur les équations de base d'un corps soumis à un moment M constant, on peut, par intégration, exprimer l'évolution temporelle de son angle et de sa vitesse par les équations suivante :

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2} \frac{Mt^2}{I} \\ w = \frac{Mt}{I} \end{cases} \quad (3.4)$$

On peut identifier les termes Mt qui peut, comme définit au paragraphe précédent, être remplacés par l'expression de l'impulsion $H = Mt$. Si le temps tend vers zéro mais que le moment augmente de manière à ce que H soit constant, alors la rafale produit les conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{2} \frac{Ht}{I} \rightarrow 0 \\ w_0 = \frac{H}{I} \end{cases} \quad (3.5)$$

L'équation qui décrit le mouvement observé est très proche de l'équation 3.2 à la différence où aucun moment n'est appliqué sur le corps. Le vent agit sur les conditions initiales. Les conditions initiales sont présentées à l'équation 3.5.

3.4 Critère de stabilité

La stabilité d'une fusée est un sujet sensible. En effet il n'y pas nécessairement besoin que la fusée se retourne sur elle-même pour qu'elle soit qualifiée d'instable. On qualifiera une fusée d'instable lorsque celle-ci présentera des oscillations, même amorties, dotées d'amplitude élevée.

En présence de vent, le lanceur, lorsqu'il quitte le pas de tir, prends inévitablement un angle d'attaque autour duquel il présentera un mouvement oscillatoire. Dans le

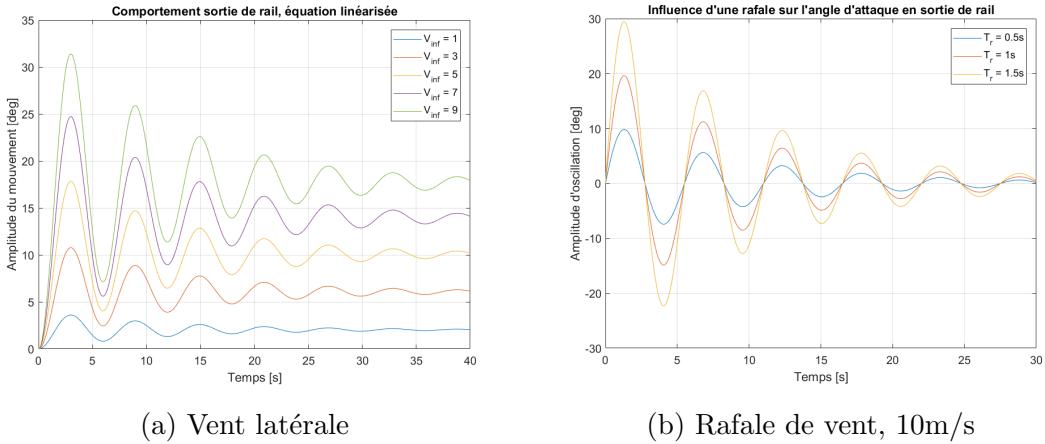


FIGURE 3.3 – Comportement de la fusée Matterhorn 2 en sortie de rail

cadre de la compétition qui se déroulera aux USA, les juges demandent une vitesse de sortie de rail d'au moins 30.5m/s. Il est toutefois possible d'aller moins vite si une analyse est présentée. D'expérience, les fusées de type niveau 1 oscillent d'une dizaine de degrés. Le critère d'instabilité sur l'amplitude que nous choisissons est le suivant :

$$A > 10^\circ \quad (3.6)$$

où A est l'amplitude d'oscillation autour de la trajectoire.

3.5 Résultats

La figure 3.3 présente les résultats de cette analyse appliquée sur la fusée qui volera au USA. Les simulations (Discutées plus loin dans le rapport) prédisent une sortie de rail aux alentour de 28m/s. Cette valeur est légèrement inférieure à ce que la compétition requiert (30.5m/s), par conséquent, une analyse plus approfondie doit être réalisée. La sous-figure 3.3a analyse le comportement en sortie de rail lorsque le vent est constant, pour plusieurs valeurs de celui-ci. La seconde sous-figure (3.3b) illustre la réponse à une excitation quasi-infinitésimale. Le vent est considéré à 10m/s, correspondant à environ deux fois la vitesse de vent maximale autorisée par la compétition.

3.6 Discussion

Commençons par le vent incident constant (ref. figure 3.3a) ; comme on peut l'observer, plus celui-ci est fort, plus l'amplitude est élevée. A première vue, l'amplitude semble élevée, cependant il faut retirer la composante constante dût au vent. Les juges estiment qu'on peut allumer le moteur lorsque le vent est inférieur à 20km/h, soit proche de 5m/s (Courbe jaune). Dans ce cas-ci, la fusée prend jusqu'à 18 degrés d'angle absolu, ce qui correspond à une amplitude d'environ 8 degrés par rapport à la composante constante. Le critère est validé dans ce cas précis. Il est important de mentionner qu'en tout temps, les équations sont basées sur l'état en sortie de rail

(notamment la vitesse). Afin de donner un ordre de grandeur, la fusée atteint sa vitesse maximale après 4 secondes. Celle-ci passe de 0 à 270m/s dans cet intervalle de temps, or nous gardons un état stable à 28m/s. Le facteur 10 entre les deux se traduit par un C1 100 fois plus grand, ainsi la fréquence d'oscillation est quant à elle multipliée d'un facteur 10 aussi (sans considérer le changement de masse). Tout cela veut simplement dire que la fréquence d'oscillation est loin d'être constante pendant la phase de poussée. Celle-ci change drastiquement en 4 secondes alors que la période initiale est d'environ 10 secondes. On peut conclure que l'amplitude maximale observée est surestimée et que la fusée est d'autant plus stable. Nous utiliserons le modèle à 2 dimensions pour conclure sur la stabilité exacte de Matterhorn 2.

Le second cas de charge est moins important mais reste toutefois assez intéressant. En effet, s'il y a des rafales de vent, alors la compétition est interrompue. Malgré tout, si la rafale est inattendue et longue, de larges amplitudes peuvent être observées, largement au-dessus du critère de stabilité. Pour reprendre ce qui a été dit précédemment, le temps que la fusée atteigne l'amplitude maximale (env. 2 secondes), sa vitesse aura plus que quadrupler. Le moment correctif aura déjà agit comme un frein pour éviter une telle amplitude. Par souci de prévention, ce cas de charge sera évité à tout prix lors du vol officiel.

Chapitre 4

Simulation d'une fusée restreinte à une dimension

Estimer le comportement d'une fusée au travers d'un simulateur n'est pas chose facile. Quels sont les phénomènes à prendre en compte ? Quels paramètres d'environnement sont pertinents ? Comment représenter une fusée par des équations mathématiques ?

Pour répondre à ces questions, ce travail propose de découper cette lourde tâche en plusieurs parties. La section présente se propose d'introduire les équations d'une fusée sous hypothèses simplificatrices. Au fur et à mesure des chapitres, nous réduirons le nombre d'hypothèse en complexifiant les équations.

Comme le chapitre l'indique, nous commençons par décrire le vol d'une fusée lorsque celle-ci apparaît comme un point matériel astreint à uniquement à se déplacer verticalement. L'orientation de la fusée est fixée de manière à ce que le cône regarde en tout temps le ciel. Cette approximation est grossière puisque la simple présence de vent latéral amènerait la fusée à prendre de l'angle pendant son vol. Cependant, les estimations produites sous cette hypothèse permettent de grossièrement caractériser les étapes de vol que la fusée subit comme notamment une prédiction de l'apogée et de la vitesse maximale.

4.1 Equation

Comme le mouvement est restreint à une ligne, nous utiliserons le référentiel présenté en figure 4.1, la gravité agissant contre l'axe Z. Le mouvement est relativement simple. Dans ce cas, la position (altitude) de la fusée est représentée par la variable z . Ainsi la vitesse d'ascension est \dot{z} .

Les forces que la fusée subit sont données au tableau 4.1. L'équation d'état de la fusée restreinte à un axe peut sans plus attendre s'écrire comme suit :

$$\ddot{z} = \frac{T(t) - F_t(t, z, \dot{z}) - \dot{m}(t)\dot{z}}{m(t)} - g(z) \quad (4.1)$$

Puisque le mouvement est bloqué le long de l'axe vertical, la poussée et la traînée sont elles aussi forcées le long de cet axe. Puisque la fusée ne peut pas prendre de l'angle, les résultat d'apogée et de vitesse seront une sur-estimation de la réalité. Ce

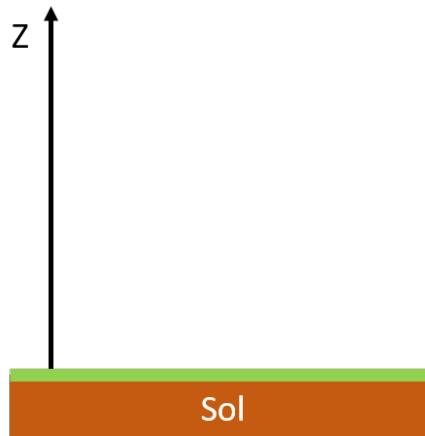


FIGURE 4.1 – Référentiel terrestre

Symbol	Nature de la force
T	Poussée du moteur
g	Gravité
F_t	Force de traînée
$\dot{m}\dot{z}$	Changement de masse

TABLE 4.1 – Définition des forces

simulateur nous permet déjà de conclure si la fusée devient supersonique. Auquel cas des modifications de design seraient nécessaires pour éviter toute vitesse proche de celle du son. Les modèles de traînée ne sont pas prévus pour une plage de vitesse si élevée. Les résultats finaux présenteraient trop d'erreur.

L'équation 4.1 est sous forme générale, les termes doivent être évalués un à un.

Poussée du moteur

La poussée dépend du moteur utilisé et des données que le fabricant peut nous donner telles que la courbe de force versus temps. Comme expliqué en section 2.2.5, la force est extrapolée linéairement entre les points donnés.

Gravité

Le modèle de gravité est présenté en section 2.2.10. Le paramètre h est remplacé par l'altitude z .

Force de traînée

L'expression de la force de traînée dépend de la vitesse \dot{z} de l'altitude z . La force de traînée est toujours définie dans le repère du vent (Plus de détails au chapitre 5). Sous les hypothèses actuelles, le repère du vent est identique au repère de la fusée.

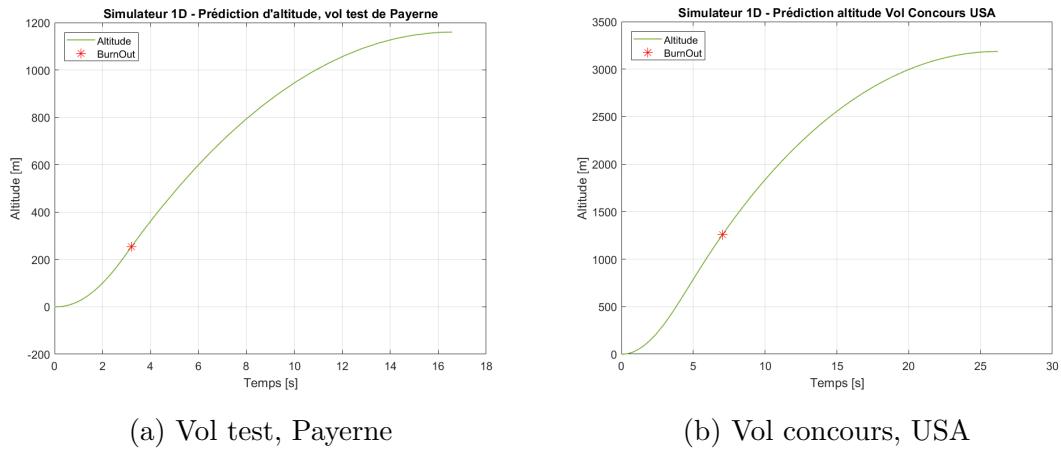


FIGURE 4.2 – Prédiction de l’apogée par le simulateur à un degré de liberté pour les deux vols

L'expression de la traînée est la suivante :

$$F_t = \frac{1}{2} \rho(z) A_{ref} U_\infty^2 (C_D(\alpha) + C_{DA}(\alpha, \phi)) \quad (4.2)$$

où ρ est la densité de l'air, A_{ref} est la surface de référence de la fusée, U_∞ est la vitesse du flux d'air vu par la fusée, qui est \dot{z} dans le modèle 1D.

$C_D(\alpha)$ est le coefficient de traînée de la fusée, quand $C_{DA}(\alpha)$ est celui de l'aéro-frein, ceux-ci dépendent de l'angle d'attaque (Angle entre le repère de la fusée et le repère du vent) comme expliqué en section 2.2.1. Sous les hypothèses actuelles, l'angle α est toujours nul. ϕ est l'angle d'ouverture des aéro-freins.

4.2 Résultats

Puisque le simulateur a été créé de toutes pièces, les résultats doivent être validés. Le simulateur restreint à une dimensions reflète mal la réalité, il rejette la rotation de la fusée, tant longitudinale que axiale. Toute l'énergie du moteur est transférée uniquement dans le l'axe rectiligne Z alors qu'en réalité, celle-ci serait transformée en déplacement horizontal, verticale et en rotations.

Les prédictions d'apogée pour le vol test et le vol officiel sont présentées en figure 4.2. L'espace aérien suisse étant un des plus encombré du monde, il n'était pas possible d'atteindre une altitude souhaitée de 3048m (10'000ft). Le moteur, plus petit, pousse moins, de telle manière qu'une apogée à 1160m est prédictée.

On trouve en figure 4.3 la mesure effectuée par l'électronique de bord du lanceur. Il s'agit d'une électronique achetée sur le marché. Nous considérons les valeurs comme assez fiables. On reporte une altitude de vol de 1109m pour un temps de vol jusqu'à apogée de 16.3 secondes.

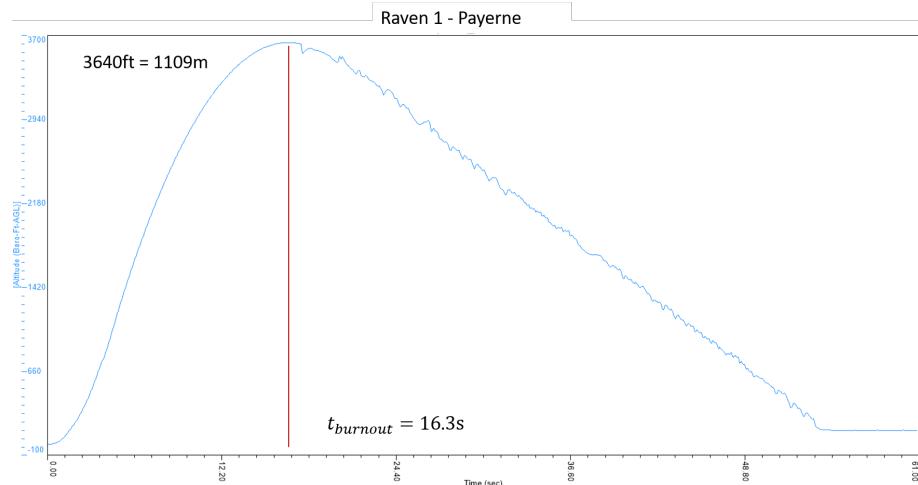


FIGURE 4.3 – Mesure embarquée d’altitude, basée sur baromètre. Système de mesure : Raven de FeatherWeight[10]

4.3 Discussion

Le premier point à observer est que la prédition dans le cadre du vol de Payerne n'est pas parfaite, une surestimation de l'apogée est faite par le simulateur 1D. Ce résultat est rassurant dans le sens où ce phénomène était attendu. Comme déjà dit, toute l'énergie du moteur est fournie le long d'un seul axe, ne considérant pas de pertes dans d'autres directions tel que le drift ou les rotations. Cet effet sera pris en compte dans les simulateurs à 3 et 6 degrés de liberté présentés dans la suite du rapport.

L'erreur d'estimation est de 4.6%. Cette valeur est importante pour la compétition qui requiert une précision de 10% sur l'altitude cible de 3048m. Plusieurs raisons peuvent expliquer cette différence : une masse initiale mal estimée, l'effet aérodynamique des jonctions et des vis qui ne sont pas pris en compte et l'atmosphère qui reste une inconnue importante. Ces effets ne seraient pas pris en compte par le modèle proposé. Ainsi, l'effet de la masse sur l'altitude est importante, d'après les simulations, un rajout de 300g diminue l'altitude estimée de 30m. Le projet repose sur la collaboration de 20 étudiants bénévoles, le poids total de la masse est donc une estimation plus qu'une certitude. Pour contre-carrer ce problème lors du concours, une personne sera responsable de la pesée de chaque composant de la fusée afin d'éviter toute incertitude. Concernant la traînée rajoutée par les vis, l'équipe collaboratrice de Zürich nous a fait remarquer que la présence de vis pouvait rajouter jusqu'à 3N en basse vitesse. On peut alors se demander si cette force ajoutée a de l'importance vis-à-vis de l'altitude, probablement que oui d'autant que la vitesse atteindra 800km/h ($F_{ajoutee} > 3N$). Par rapport à l'atmosphère qui reste inconnue, la température et les rafales de vent ont une influence importante sur le vol et peuvent difficilement être prévues à l'avance ou modélisées après coup.

Finalement et compte-tenu de ces informations, la fusée qui volera aux USA est réglée de façons à surestimer l'apogée prédictive. Nous prédisons une altitude de 3190m alors que nous souhaitons atteindre 3048m. De cette manière, l'erreur existante lors du vol test serait contre-balancée dans le meilleur des cas. Si par hasard ce n'est pas

le cas lors du vol, les aérofreins pourraient corriger le tir. Il est encore à noter que l'environnement est difficile à prédire tant il est changeant au cours du temps.

4.4 Application - Contrôle des Aérofreins

En collaboration avec Maxim Pavliv, les deux projets communs ont pour finalité de contrôler activement la balistique de la fusée afin d'atteindre une altitude cible. Les aérofreins présentés plus tôt jouent le rôle d'actuateurs de traînée. Pour s'y prendre, plusieurs méthodes existent. Chacune comportant des avantages et des désavantages. On pense notamment à :

- Actuation en boucle ouverte et intégration : A chaque instant, la vitesse, l'altitude et l'orientation sont mesurées. De là, un solveur numérique permet d'estimer l'ouverture d'aérofrein optimale à appliquer pour atteindre l'altitude cible. Les paramètres du modèle ne sont pas corrigés lors de l'ascension. La fiabilité du système repose sur un modèle fixé et stable. Cependant, cette méthode est gourmande en calculs et ne serait probablement pas implémentable sachant le temps caractéristique de vol d'une fusée très faible.
- Actuation en boucle fermée et intégration : A chaque instant, la vitesse, l'altitude et l'orientation sont mesurées. De là, un solveur numérique permet d'estimer l'ouverture d'aérofrein optimale à appliquer pour atteindre l'altitude cible. Dans ce cas ci, les paramètres du modèle sont ajustés pour essayer de correspondre au mieux à la réalité. Cette méthode peut présenter des instabilités tel que le modèle se fausse complètement. Le coût de calcul reste lui aussi très élevé.
- Actuation en boucle ouverte et valeurs tabulées : A chaque instant, la vitesse, l'altitude et l'orientation sont mesurées. De là, un tableau préparé à l'avance est chargé en mémoire du contrôleur dans lequel se trouve l'ouverture nécessaire à appliquer pour un trio (altitude,vitesse,orientation) donné. Le tableau est basé sur des simulations numériques faites en amont du vol. Cette méthode à l'avantage d'être simple à implémenter sur l'ordinateur de vol et stable.

Notre choix s'est porté sur la dernière méthode pour les avantages liés à l'intégration à bord de la fusée. Le processeur de calcul embarqué est un STM32, lequel offre suffisamment de place en mémoire pour stocker les données nécessaires.

4.4.1 Formatage des données de vol

Une première idée a été de créer une matrice 3D dans laquelle chaque direction serait une variable différente. Cela se traduit par le principe que 2 points p_1 et p_2 distincts dans la matrice correspondent à deux trios d'états différents (z_2, v_2, α_1) et (z_2, v_2, α_2) . Cependant, même si les équations permettant de créer la table ne sont pas exactes, la fusée ne passe pas par tous les états possibles, comme par exemple le trio $(3000\text{m}, 300\text{m/s}, 0\text{deg})$, qui ne fait pas sens. La matrice 3D est alors un gaspillage de place mémoire puisqu'elle est pour la majorité de l'espace remplie d'information de vol non compatible avec la physique de la fusée considérée.

TABLE 4.2 – Tableau de données stockées sur l'ordinateur de bord de la fusée

Altitude [m]	Vitesse [m/s]	Aérofreins [deg]
1000	700	ϕ_1
1000	750	ϕ_2
1000	:	:
1500	600	ϕ_1
1500	650	ϕ_2
:	:	:
3000	:	...
3000	20	ϕ_n

Pour résoudre ce problème, nous avons considérer d'écrire la matrice sous forme de tableau. La forme finale est présentée au tableau 4.2. Comme on peut le voir, le tableau est une suite successive de chaque donnée. La première référence se fait par rapport à une altitude. Pour chaque hauteur, les estimations donnerons une plage de vitesse possible. La plage est découpée en éléments discret. Pour chacun de ces élément est assignée une angle d'ouverture d'aérofrein ϕ optimale pour atteindre l'altitude cible de 3048m. En procédant de cette manière, il est aisément de fournir toute l'information nécessaire au contrôle des aérofreins sans toutefois consommer inutilement la mémoire disponible. Lorsqu'une mesure est reçue par le Kalman intégré, la commande est extrapolée du tableau. Ce principe est très utilisé dans la gestion moteur des voitures.

4.4.2 Génération des données de vol

Afin que le contrôle se rapproche le plus de l'idéal, les données doivent être correctement générées. Pour ce faire, nous utilisons le simulateur 1D développé dans le cadre de ce projet. On peut se demander pourquoi ne pas utiliser plus de données de vol telles que l'inclinaison de la fusée ou sa rotation propre. Considérant la poussée du moteur comme non constante d'une fois à l'autre, on ne peut pas se fier aux données du fabricant. Cela résulte en de différentes conditions initiales post poussée. L'idée est de simuler le vol en boucle, pour une condition post poussée donnée, tout en ajustant l'angle de l'aérofrein afin de toujours atteindre l'altitude cible de 3048m.

En réalité, le simulateur 1D présente un avantage indéniable. En effet, à chaque condition initial existe une et une seule apogée. Cela veut dire que lorsqu'on procède à une simulation inverse (depuis l'apogée vers le sol) avec un angle de l'aérofrein déterminé, on décrit une courbe que la fusée suivrait pour cette configuration. En réalisant une simulation pour plusieurs ouvertures d'aérofreins, il est possible de recréer un fuseau de vols proposant des trajectoires d'états possibles pour la fusée. Si celle-ci venait à croiser une de ces courbes, alors l'aérofrein s'ajusterait pour correspondre à l'ouverture simulée sur celle-ci. Un exemple de fuseau de courbes est présenté en figure 4.4.

L'utilisation d'une simulation inverse permet un gain de temps dans le sens où les trajectoires optimales pour atteindre l'objectif sont directement intégrées depuis

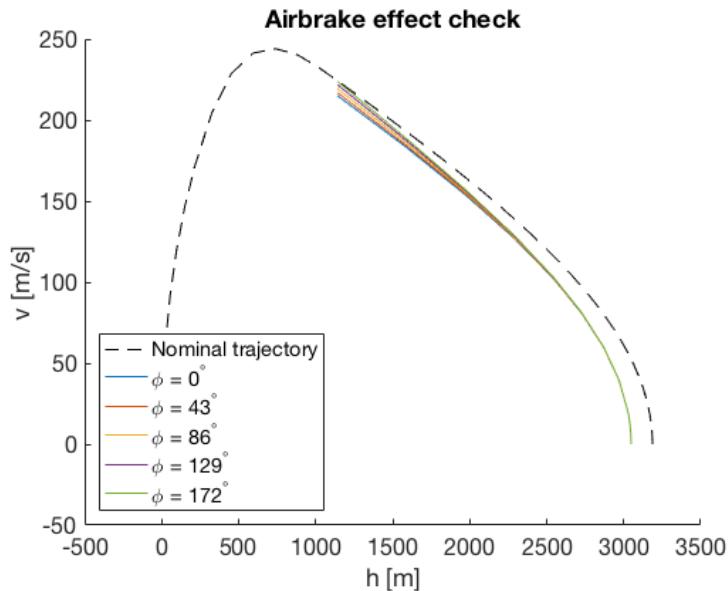


FIGURE 4.4 – Fuseau de courbe, l'aérofrein permet de modifier la traînée. Chaque courbe correspond à une traînée différente.

celui-ci au lieu de procéder par intégration conventionnelle et chercher, par itérations, les conditions initiales telles que l'objectif soit atteint. De cette façon, le minimum nécessaire de simulations sont faites. Cette optimalité du point de vue des calculs, permet la génération rapide d'une table de contrôle. Si l'on souhaitait ajouter un degré de liberté, comme par exemple l'angle de la fusée avec la verticale, il ne serait pas possible de simuler à l'envers car l'angle est imprévisible à l'apogée, soit le point de départ de la simulation inverse. Il faudrait alors, pour chaque configuration, utiliser un solveur non linéaire tel que "lsqnonlin" de Matlab pour trouver l'angle optimal d'aérofrein afin d'atteindre 3048m pour des conditions initiales données. Sans rentrer dans les détails, cela se traduirait par une multitude de simulations pour chaque ligne du tableau et donc un coût en calcul grandissant considérablement avec la taille du tableau. Aussi, il n'est pas assuré d'obtenir pour chaque altitude et chaque vitesse tous les angles possibles. En résumé, la génération d'une table basée sur le simulateur 2D est envisageable mais se repose trop sur des concept d'optimisation et de coût de calcul, sujet non traités dans ce projet.

4.4.3 Utilisation réelle en conditions de vol

L'objectif de ce tableau est d'être implémenté dans le processeur embarqué de la fusée. Que se passe-t-il lorsque celui-ci doit être utilisé. Sans entrer dans les détails, M. Pavliv, collaborateur à ce projet, sera en charge de prendre l'information contenue dans ce tableau lorsqu'une estimation de la vitesse et de l'altitude de la fusée est donnée. Afin d'arriver précisément à cette estimation, une part du temps de ce travail s'est vue consacrée à la réalisation d'un filtre de Kalman étendu implémenté en C. L'intérêt d'avoir écrit le filtre nous même est d'avoir les mêmes équations différentielles entre le simulateur et l'estimateur.

Chapitre 5

Simulation d'une fusée restreinte à un mouvement plan

Ce chapitre étudie le mouvement de la même fusée lorsque celle-ci se voit offrir plus de degré de libertés. En effet, nous considérons la rotation longitudinale de la fusée possible. De cette manière, un vent latérale peut amener la fusée à s'éloigner d'un mouvement vertical, celle-ci peut alors se déplacer dans un plan.

Ce simulateur permettra de vérifier et d'améliorer les résultats obtenus lors de l'analyse de stabilité (Sect. 3). En effet, lorsque la fusée ne tourne pas sur elle-même, l'orientation de la fusée est déterminée par un seul angle pour autant que le vent soit unidirectionnel. Le présent simulateur considère uniquement cet angle, celui-ci étant le même qu'emprunté dans l'analyse de stabilité. Nous avons aussi émis l'idée que plus la vitesse augmente, plus la fusée est stable ; c'est ce qu'on souhaite démontrer avec le simulateur plan.

En complexifiant les équations du mouvement rectiligne, on s'attend à observer un déplacement horizontal de la fusée. Celui-ci peut s'avérer grand si le vent est important. Comme on pourra le voir, il est possible de jouer sur l'angle de la rampe pour optimiser la trajectoire de la fusée et réduire le "drift" de celle-ci. Commençons par détailler les nouvelles équations.

5.1 Equation

Le modèle se complexifie, puisqu'une rotation est autorisée, le moteur peut se retrouver dans une situation où une partie de sa force pousse la fusée horizontalement. Il faut alors considérer trois degrés de liberté : mouvement horizontal y , mouvement vertical z et rotation longitudinale δ . Le référentiel terrestre (X,Y,Z), le repère de la fusée (D,E,F) et le repère du vent (U,V,W) sont présentés en figure 5.1. On mettra en évidence les différents angles :

- δ Angle de la fusée avec la verticale
- β Angle du flux d'air vu par la fusée avec la verticale

Ces deux angles, indépendants, suffisent à caractériser les forces en jeu. En effet, on peut calculer l'angle d'attaque :

$$\alpha = \delta - \beta \tag{5.1}$$

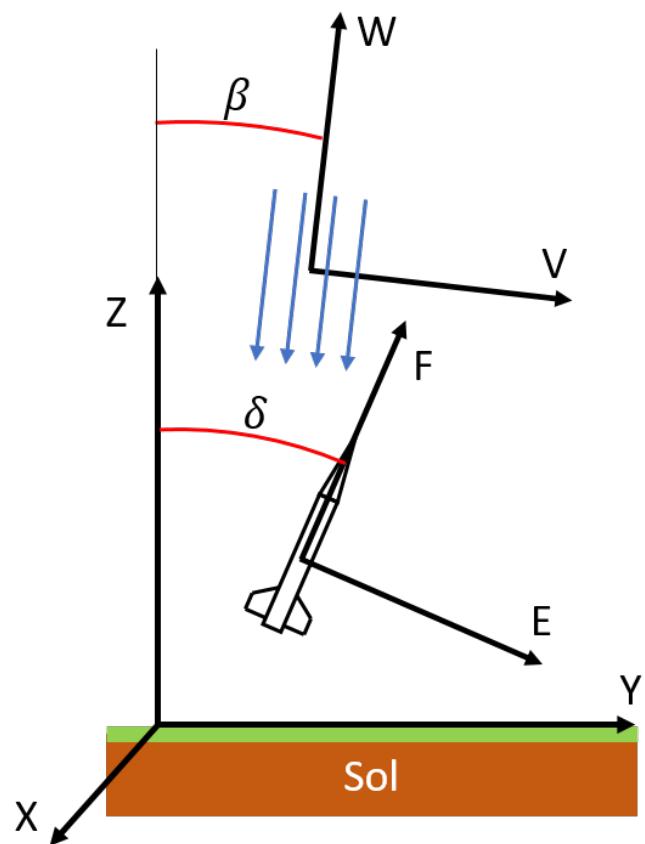


FIGURE 5.1 – Référentiel terrestre, repère du vent et repère de la fusée

Symbol	Nature de la force	Repère d'application
\vec{T}	Poussée du moteur	(D,E,F)
\vec{G}	Gravité	(X,Y,Z)
\vec{F}_t	Force de traînée	(U,V,W)
\vec{F}_n	Force de portance	(D,E,F)
$\dot{m}\vec{x}$	Changement de masse	(X,Y,Z)
	Nature du moment	Axe porteur
$\vec{C}_1\alpha$	Moment correctif	X=D=U
$\vec{C}_2\dot{\alpha}$	Moment d'amortissement	X=D=U

TABLE 5.1 – Définition des forces

Plusieurs repères sont utilisés car chaque force s'applique de manière différente. Par souci de généralité, les forces sont définies dans leur repère propre avant d'être projetées dans le référentiel inertiel terrestre. Pour s'y prendre, nous utilisons des matrices de rotations liées aux deux angles indépendants δ et β :

$$\begin{cases} (D, E, F) \rightarrow (X, Y, Z) : & Q_\delta \\ (U, V, W) \rightarrow (X, Y, Z) : & Q_\beta \end{cases} \quad (5.2)$$

Les forces, leur repère d'application et leur symbole sont listés dans le tableau 5.1. Avec toutes ces informations, on peut déduire les équations du mouvement :

$$\begin{cases} \ddot{\vec{x}} = \frac{Q_\delta(\vec{T}(t) + \vec{F}_n(\alpha, \vec{x}, \dot{\vec{x}}) + Q_\beta \vec{F}_t(\alpha, \phi, \vec{x}, \dot{\vec{x}}) - \dot{m}(t)\dot{\vec{x}})}{m(t)} + \vec{G}(z) \\ \ddot{\delta} = -\frac{C_1(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}})\alpha + C_2(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}})\dot{\alpha}}{I_L(t)} \end{cases} \quad (5.3)$$

où \vec{x} est le vecteur d'état en translation :

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

Plus de détails concernant les forces et leur repère d'application sont donnés :

Poussée

A nouveau, la force est extrapolée des données du fabricant. La figure 5.2 illustre cette force ainsi que le repère porteur de cette dernière. On rappelle que celui-ci est tourné d'un angle δ par rapport au référentiel terrestre. Toute les informations nécessaires sont données en section 2.2.5. Le vecteur force \vec{T} s'écrit :

$$\vec{T} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Thrust(t) \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

Gravité

On trouve en figure 5.3 un schéma de la force de gravité ainsi que le repère utilisé. En se basant sur le modèle de gravité présenté en section 2.2.10, le vecteur \vec{G} s'écrit :

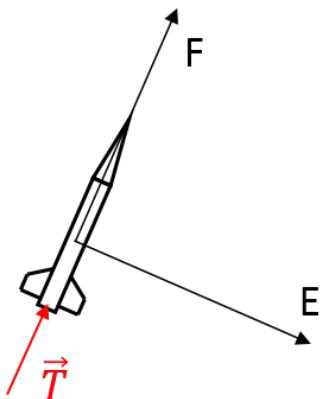


FIGURE 5.2 – Force de poussée, Repère de la fusée (D,E,F)

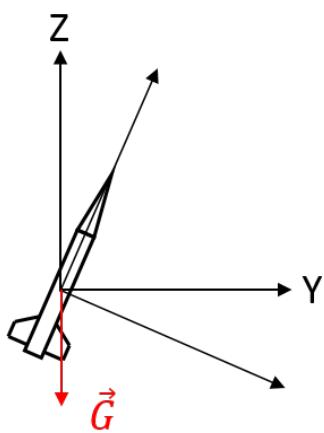


FIGURE 5.3 – Force de gravité, Référentiel terrestre (X,Y,Z)

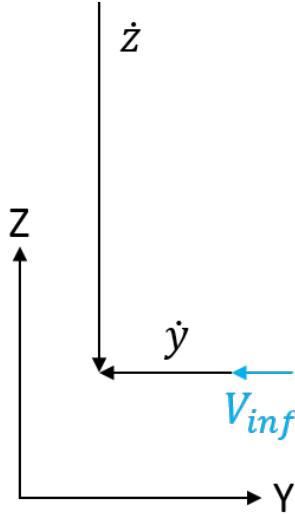


FIGURE 5.4 – Flux d'air total vu par la fusée

$$\vec{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g(z) \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

Force de traînée

L'équation 4.2 est une bonne base pour la force de traînée ressentie par la fusée lorsque celle-ci peut tourner ($\delta \neq 0$). Dans le cas du mouvement rectiligne, l'angle d'attaque α est considéré nulle, ce qui n'est plus le cas dans un mouvement plan, des termes supplémentaires décrits en section 2.2.1 apparaissent.

Le terme U_∞ est la vitesse effective du flux d'air sur le corps de la fusée. Une schématisation des composantes du flux d'air est présenté en figure 5.4. La norme de la vitesse se calcule comme suit :

$$U_\infty = \sqrt{(V_{inf} + \dot{y})^2 + \dot{z}^2}. \quad (5.7)$$

Les autres termes ont déjà été introduits en section 4.1. Cette force et son repère sont proprement présentés en figure 5.5. Le vecteur \vec{F}_t s'écrit :

$$\vec{F}_t = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}\rho(z)A_{ref}U_\infty^2(C_D(\alpha) + C_{DA}(\alpha, \phi)) \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

Force de portance

En augmentant le nombre de degrés de liberté, des forces peuvent apparaître. Lorsque la fusée présente un angle d'attaque, le flux d'air exerce sur le corps de celle-ci une force dite "Force Normale". La figure 5.6 illustre ce phénomène. La particularité de cette force est qu'elle existe par la présence du flux d'air mais elle

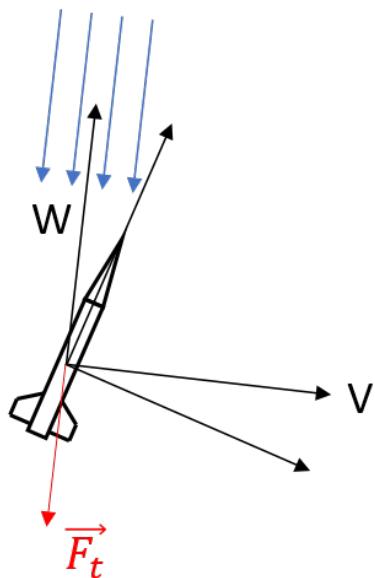


FIGURE 5.5 – Force de traînée, Repère du vent (U,V,W)

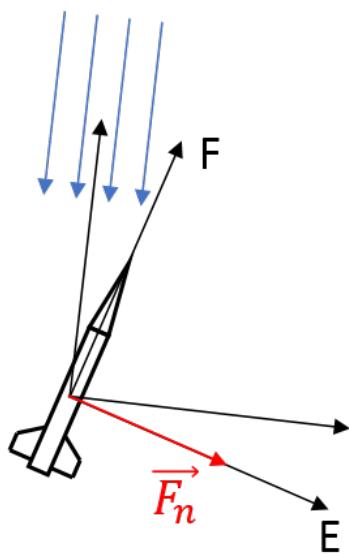


FIGURE 5.6 – Force de portance, Repère de la fusée (D,E,F)

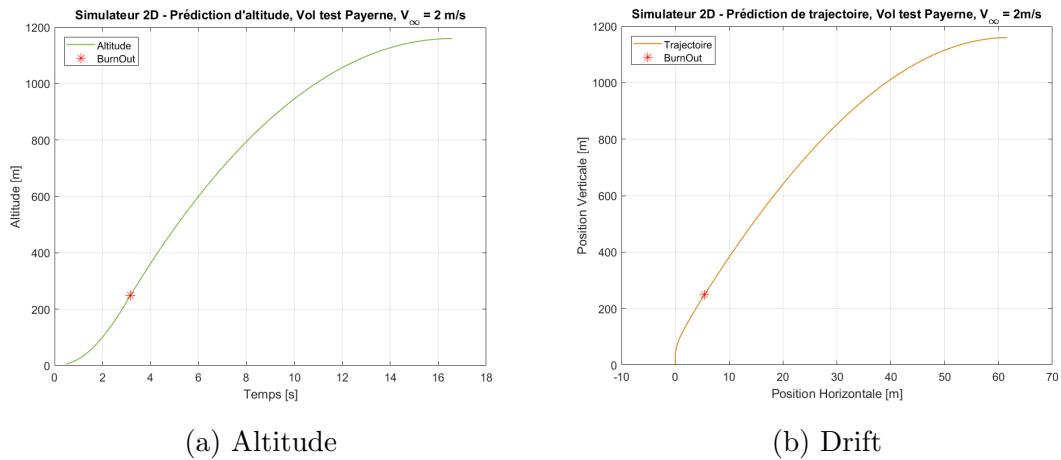


FIGURE 5.7 – Prédiction d'altitude et de drift pour la fusée de Payerne sous les conditions du jour : $V_\infty=2\text{m/s}$

s'exprime dans le repère de la fusée, ce qui n'est pas le cas de la traînée. Écrivons le vecteur de force \vec{F}_n :

$$\vec{F}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}\rho(z)A_{ref}U_\infty^2 C_{N\alpha}(\alpha)\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

$\rho(z)$, A_{ref} et U_∞ ont déjà été présentés. En revanche, le coefficient de portance est introduit. $C_{N\alpha}(\alpha)$ est un coefficient adimensionnel, présenté en section 2.2.2. Le tout est multiplié par l'angle d'attaque α , ainsi si ce dernier est nul, aucune force normale ne s'applique sur la fusée.

Moments

Les deux moments s'appliquant sur la fusée ont déjà été détaillés en sections 2.2.3 et 2.2.4. Ils s'orientent le long de l'axe X.

5.2 Résultats

Ce simulateur, doté de plus de degrés de liberté, permet d'observer des phénomènes jusqu'à invisibles tel que le déplacement horizontal (Drift) et une rotation propre (Angle avec verticale). Celui-ci est important pour décrire plus précisément la stabilité de la fusée (Déjà discutée au chapitre 3). Commençons par le vol test de Payerne, la figure 5.7 présente les estimations faites. On note une apogée estimée à 1058m. Une modélisation de la trajectoire est proposée lorsque le vent est de 2m/s, valeur fournie par le service météo de l'armée suisse à l'instant du vol.

Ensuite, le simulateur estime le comportement de la fusée aux USA. Une simple estimation d'altitude est réalisée afin de vérifier la compatibilité des résultats avec le simulateur unidirectionnel. Le graphe est proposé en figure 5.8. L'apogée est estimée à 3205m.

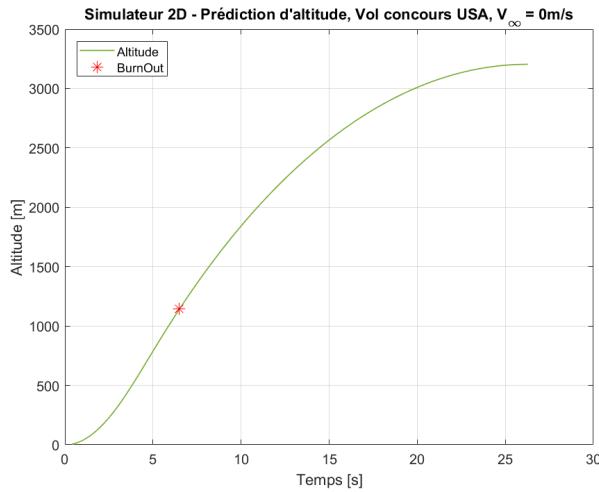
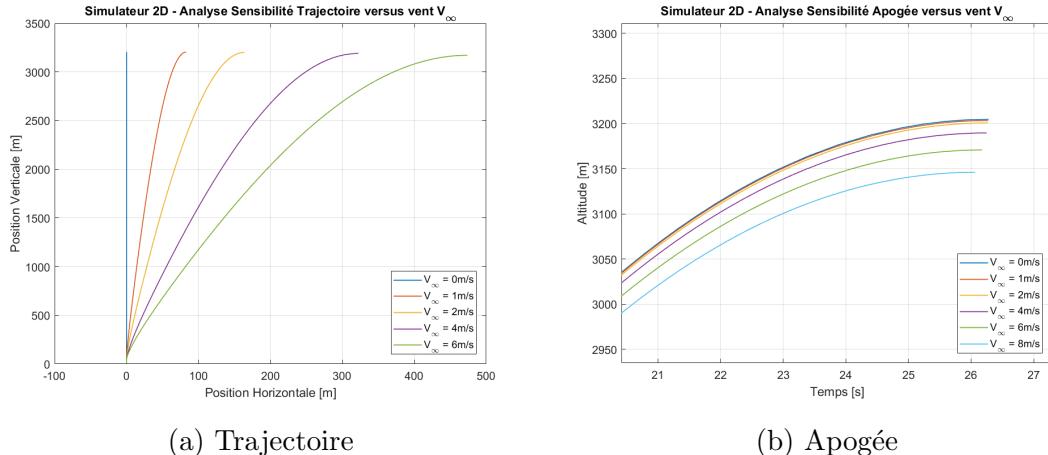


FIGURE 5.8 – Prédiction pour le vol officiel aux USA, considéré sans vent



(a) Trajectoire

(b) Apogée

FIGURE 5.9 – Analyse de sensibilité des résultats dû au vent V_∞

Comme déjà énoncé, le simulateur permet de jouer avec les conditions initiales telle que l'angle de la rampe de lancement. Changer celle-ci permet d'empêcher un drift de la fusée trop élevé. On retrouve en figure 5.9 une analyse de sensibilité de l'apogée et de la trajectoire face au vent. Elle permet de mettre en avant le phénomène de distribution de l'énergie totale selon les différents degrés de liberté sélectionnés. Finalement, on retrouve en figure 5.10 l'effet observé lorsque l'angle de la rampe est modifié, un vent de 4m/s est retenu pour l'exemple.

Finalement, afin de discuter et conclure sur la stabilité de la fusée, l'image 5.11 présente l'angle entre la fusée et la verticale selon le vent incident. Ces résultats seront directement comparés avec ceux en figure 3.3.

5.3 Discussion

Concernant la simulation du vol de Payerne, malgré un vent de 2m/s, la fusée atteint une altitude de 1058m, soit 2m de moins que pour le premier simulateur.

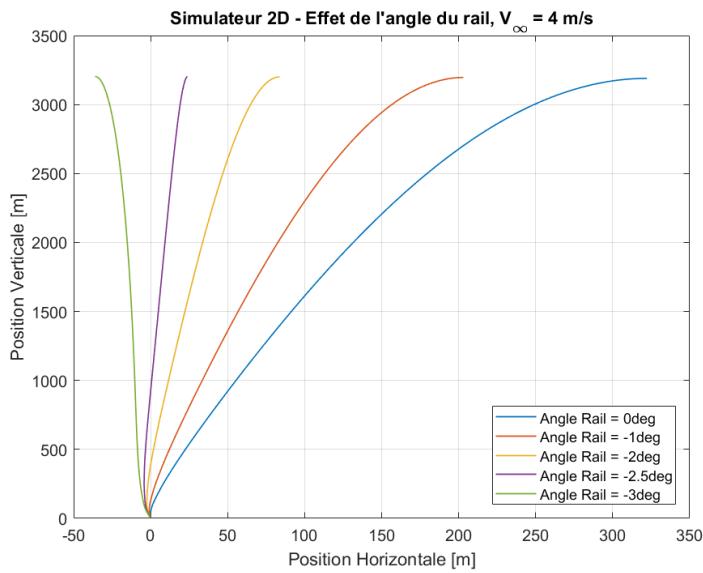


FIGURE 5.10 – Effet d'un changement d'angle initial, inclinaison de la rampe de lancement, $V_\infty = 4\text{m/s}$

Comme attendu, de l'énergie est dissipée en rotation et en translation. Celle-ci reste faible puisque l'apogée change très peu. Une fois de plus, on est loin de 1109m mesuré. Les explications restent les mêmes qu'en section 4.3 puisque les forces et la géométrie sont calculées à l'aide des mêmes fonctions, simplement projetées sur des axes différents. Le temps pour atteindre l'apogée est de 16.5 secondes contre 16.3 observé, ce qui en fait une estimation fiable. La sous-figure 5.7b nous montre que la fusée subit un déplacement horizontal de près de 60m dans la direction du vent (Celui-ci est toujours considéré positif s'il vient de la droite comme présenté dans la figure 5.4). Ce phénomène s'explique par le fait que les ailerons, positionnés en-dessous du centre de masse, forcent la fusée avec un moment la faisant pointer dans le vent.

De manière générale, le drift de la fusée est créé pendant la phase de poussée. En effet, tant que le moteur brûle, il pousse dans la direction de la fusée et donc dans la direction du vent relatif. Plus le temps de poussée est long, plus il y a de temps pour que le lanceur prenne de l'angle, ainsi plus d'énergie est transmise en rotation et en translation horizontale. Afin de réduire la sensibilité au vent, il est important de prendre le moteur avec le temps de poussée le plus court, si le choix existe. Cet effet est observé en figure 5.12. Le désavantage est alors que les efforts sur la structure sont bien plus importants. Puisque le temps est réduit, la poussée est plus élevée, pouvant rendre critique l'intégrité de la structure.

Concernant le vol du concours, l'apogée estimée pour un vent nul est légèrement plus élevée que prédit par le simulateur unidirectionnel. Toutefois cette différence est légère, peut-être explicable par la précision de l'intégration numérique. Comme dit précédemment, on essaie de viser plus haut afin d'avoir de la marge pour les aérofreins mais aussi parce que le simulateur semble légèrement sur-estimé l'apogée. Que se passe-t-il si du vent intervient ?

On peut observer en sous-figure 5.9a que le vent fait dévier la fusée de manière

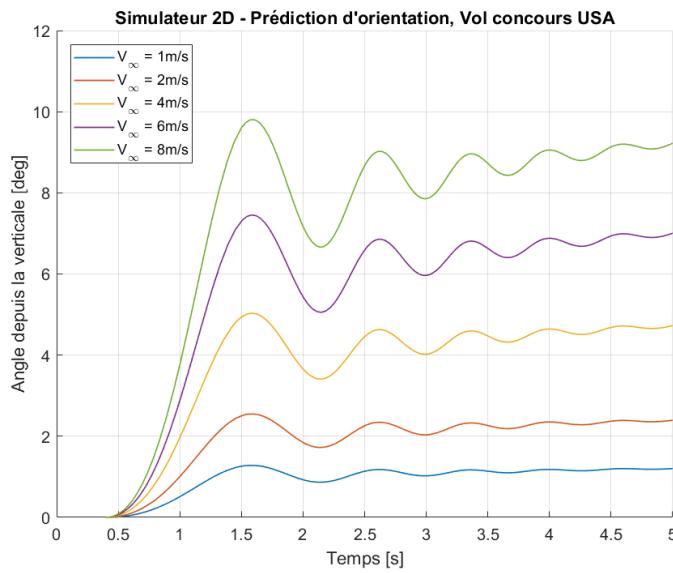


FIGURE 5.11 – Stabilité de la fusée en sortie de rail versus vent incident V_∞

non négligeable, on observe une drift pouvant atteindre près de 500m lorsque celui-ci atteint 6m/s. Bien que cette valeur soit au-delà des 20km/h critique, une couche limite peut biaiser le ressenti au sol, dans ce cas la fusée pourrait tout de même se retrouver dans un vent aussi fort. Le drift n'est pas important dans le cadre du concours, l'important reste l'apogée à tout prix. En figure 5.9b, on peut observer la variation du sommet lorsque le vent augmente. Effectivement, lorsque le vent atteint des valeurs de 8m/s, une perte de 50-60m est remarquée. Ce changement d'altitude n'est pas énorme mais se rajoute à tous les effets néfastes (Mauvais modèle, vis et aérodynamique, imprécision du moteur, ...). Le résultat pourrait être une apogée hors de la zone qui marque des points (3048+-300m). Comme à chaque fois, toutes les erreurs observées réduisent l'altitude réelle de la fusée en comparaison à la simulation. Cette observation renforce la volonté de prévoir un overshoot de 200m. Si toutes les erreurs mentionnées n'apparaissent pas, alors les aérofreins corrigeront le tir. Si effectivement les erreurs apparaissent, alors les aérofreins ne seront théoriquement pas actionnés. Que pouvons nous faire d'autre pour corriger la perte d'altitude due au vent ?

Comme présenté à la figure 5.10, il est possible d'agir sur un dernier degré de liberté, l'angle de la rampe. Ainsi les conditions initiales du mouvement peuvent être modifiées afin de concentrer toute l'énergie le long de l'axe vertical. Si le vent peut être déterminé le jour du lancement, alors il serait intéressant d'appliquer un angle permettant à la fusée de terminer le vol après poussée verticalement. La figure utilise un vent quelconque pour l'exemple ; un angle précis permet de d'assurer un vol quasi vertical (Courbe violette). On remarque aussi qu'il existe un angle limite au-delà duquel la fusée n'arrive pas revenir dans le vent, et de ce fait continue dans la direction initialement donnée (Courbe verte).

Finalement, il est intéressant de conclure la discussion initiée en section 4.3 concernant la stabilité de la fusée. Les résultats présentés en figure 5.11 sont cohérents sur certains points :

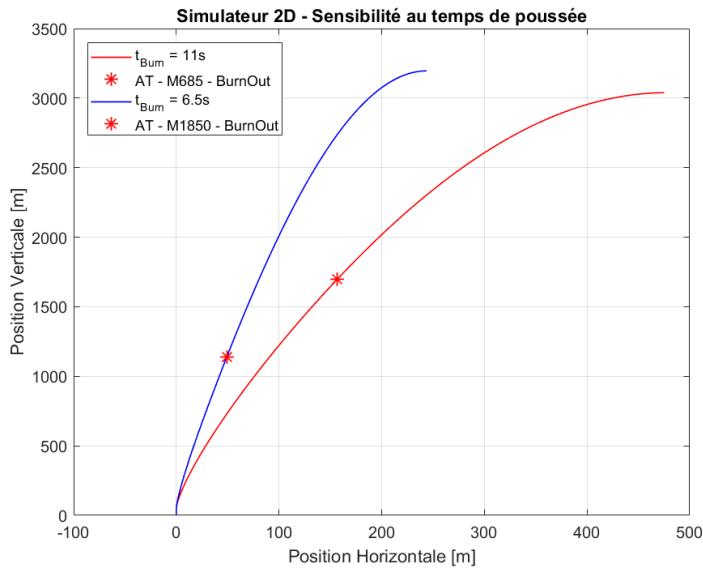


FIGURE 5.12 – Exemple de sensibilité au temps de poussée, deux moteurs équivalents sont comparés : AeroTech M865 et AeroTech M1850, $V_\infty = 3\text{m/s}$ pour l'exemple

- L'amplitude augmente avec la vitesse du vent
- La composante constante augmente avec la vitesse du vent
- La fréquence change au cours du temps

Cependant, on remarque que les amplitudes et périodes sont beaucoup plus petites que estimées. Cet effet s'explique par le fait que la vitesse change au cours du temps. Celle-ci change tellement rapidement que les coefficients présents dans l'équation 3.1 sont modifiés à chaque seconde. Comme énoncé précédemment, l'analyse de base est effectivement considérée comme pire cas. On observe que les amplitudes sont faibles et moins critiques qu'en section 4.3. Pour des vents atteignant 8m/s, l'angle constant est élevé mais l'amplitude d'oscillation est faible. Le vol de la fusée est par conséquence stable. Le design proposé est stable.

Chapitre 6

Cinématique d'une fusée à six degrés de liberté

Pour passer de 3 degrés de liberté (DDL) à 6 degrés de liberté, il est nécessaire d'introduire des nouveaux concepts mathématiques pour formaliser l'expression des équations tels que les matrices de rotation et le vecteur d'attitude, le quaternion. Grâce à cette expression le passage entre le repère terrestre et le repère de la fusée est simplifié.

Comme pour les simulations précédentes, 3 repères cartésiens sont également utilisés, celui de la terre (X, Y, Z), celui de la fusée (RA, PA, YA) et celui du vent (VA, VN, VP).

Vu que l'intérêt de faire une simulation à 6 DDL est entre autre de pouvoir prédir le lieu d'atterrissement de la fusée, la simulateur a été séparé en quatres phases :

1. Poussée sur le rail
2. Vol propulsé et libre
3. Descente sous parachute (Principal et Secondaire)
4. Descente balistique (Crash)

6.1 Repères

Les trois repères sont illustrés dans la figure 6.1. Le repère terrestre est orienté avec l'axe X pointant vers le sud, l'axe Y pointant vers l'est et l'axe Z pointant vers la verticale. L'intégration finale est menée dans ce repère, toutes les forces y sont donc rapportées.

Le repère de la fusée compte un axe aligné avec la longueur, RA ou "Roll Axis", et deux axes perpendiculaires à celui-ci, PA ou "Pitch Axis" et YA ou "Yaw Axis".

Le repère du vent est orienté avec l'axe VA ("Axial") pointant dans la direction de son origine, l'axe VP ("Perpendiculaire") perpendiculaire à VA et RA et finalement l'axe VN , perpendiculaire à VP et RA . Les forces aérodynamiques sont projetées le long de ses axes. L'angle entre VA et RA est nommé angle d'attaque, α .

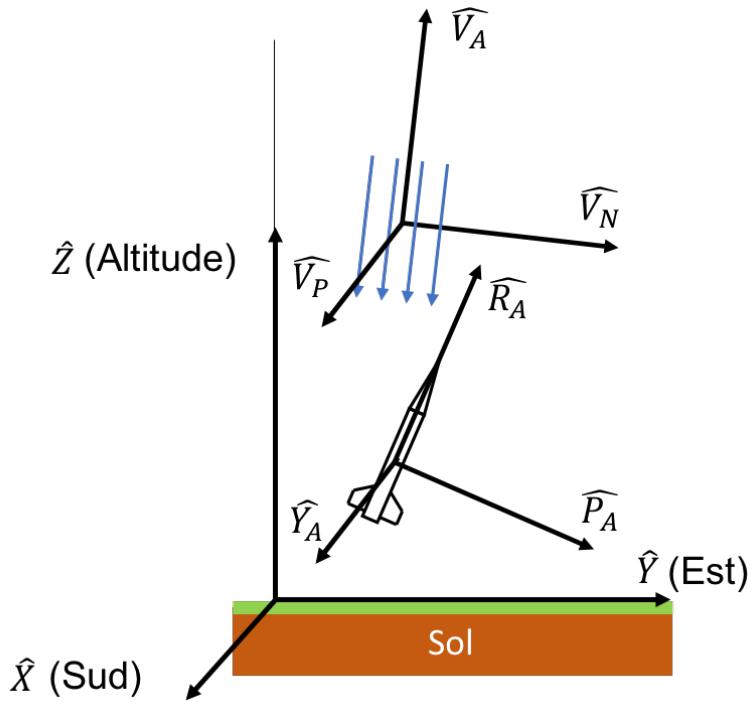


FIGURE 6.1 – Repères utilisés dans la simulation 3D

6.2 Équations

Les équations dynamiques de Newton en translation et en rotation sont employées pour décrire les équations d'état. La nomenclature utilisée dans la suite de l'exposé est résumée dans le tableau 6.1.

6.2.1 Quaternions

Les quaternions sont utilisés pour contourner les singularités dans l'expression de l'attitude par les angles d'Euler et éviter les erreurs d'arrondi dues à l'usage des fonctions trigonométriques. La théorie des quaternions n'est pas présentée en détail ici mais simplement les équations les plus utiles à notre analyse. Les formules ont été adaptées de l'ouvrage de Peter H. Zipfel sur la simulation numérique de véhicules aérospatiaux [13].

Le quaternion est un vecteur unitaire de quatres composantes :

$$\vec{q} = \{q_1, q_2, q_3, q_0\}^T \quad (6.1)$$

$$||\vec{q}|| = 1 \quad (6.2)$$

Les quaternions peuvent être reliés aux paramètres d'Euler, \vec{n} , l'axe de rotation et ϵ , l'angle de rotation par la relation suivante :

Symbol	Variables d'état	
\vec{X}	Position	
\vec{V}	Vitesse	
\vec{Q}	Orientation	
\vec{W}	Vitesse angulaire	
	Forces et Moments	Axe d'application
\vec{T}	Poussée du moteur	\hat{R}_A
\vec{G}	Gravité	$-\hat{Z}$
\vec{D}	Force de traînée	$-\hat{V}_A$
\vec{N}	Force de portance	\hat{P}_A
\vec{M}_N	Moment aérodynamique correctif	\hat{V}_P
\vec{M}_D	Moment d'amortissement aérodynamique	\hat{V}_P
	Inerties	dépendance
M	Masse de la fusée	t
\mathbf{I}	Tenseur d'inertie	t
C_m	Centre de masse	t
	Environnement	dépendance
T	Température de l'aire	
a	Vitesse locale du son	z, T
ρ	Densité de l'aire	z, T
ν	Viscosité de l'aire	T
\vec{V}_w	Vent horizontal	
	Coefficients aérodynamiques	dépendance
M_a	Nombre de Mach	V, a
$C_{N\alpha}$	Dérivée du coefficient de force normale	
C_2	Coefficient du moment d'amortissement	$C_{N\alpha}, \vec{T}$

TABLE 6.1 – Définition des forces

$$q_1 = \sin(\epsilon/2)n_1 \quad (6.3)$$

$$q_2 = \sin(\epsilon/2)n_2 \quad (6.4)$$

$$q_3 = \sin(\epsilon/2)n_3 \quad (6.5)$$

$$q_0 = \cos(\epsilon/2) \quad (6.6)$$

$$\quad \quad \quad (6.7)$$

Afin de faire le lien entre le repère de la fusée et le repère terrestre, la matrice de rotation peut être calculée,

$$R = \begin{pmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & 2(q_1 q_3 + q_0 q_2) \\ 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) \\ 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) & 2(q_2 q_3 + q_0 q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{pmatrix} \quad (6.8)$$

Finalement, l'évolution du quaternion dépend de la vitesse angulaire $\vec{W} = \{p, q, r\}^T$ moyennant une transformation de l'espace réelle à celui des quaternions, la théorie propose la formule,

$$\dot{\vec{q}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -p & -q & -r \\ p & 0 & r & -q \\ q & -r & 0 & p \\ r & q & -p & 0 \end{pmatrix} \vec{q} - k\lambda \vec{q} = \left(\frac{1}{2}\Omega(\vec{W}) - k\lambda I \right) \vec{q}, \quad (6.9)$$

avec $\lambda = 1 - \|\vec{q}\|^2$ et $k\Delta t < 1$ ainsi que I la matrice identité 3x3, afin de compenser pour les erreurs d'intégration qui éloigneraient le vecteur q de l'unité. Une autre méthode consiste en normaliser q tous les certains nombres d'itérations de l'intégrateur.

6.2.2 Matrices de rotation

La matrice de passage du repère de la fusée au repère terrestre est obtenue simplement par l'application de l'équation (6.8) à la variable d'état \vec{Q} . La matrice \mathbf{R}_{TR} ainsi obtenue permet la transformation de \vec{w} , un vecteur quelconque,

$$\vec{w}_{(\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z})} = \mathbf{R}_{TR} \vec{w}_{(\hat{R}_A, \hat{P}_A, \hat{Y}_A)}. \quad (6.10)$$

Le passage du référentiel du vent au référentiel terrestre se fait en passant par celui de la fusée. Entre le vent et la fusée il existe un angle d'attaque α dans le plan perpendiculaire à \hat{V}_P . Au moyen de la relation (6.3), en remplaçant $\vec{n} = \hat{V}_P$ et $\epsilon = \alpha$ le quaternion représentant la rotation peut être calculé. Puis, par l'équation (6.8), la matrice de rotation \mathbf{R}_{RV} est trouvée. La transformation de coordonnées est alors

$$\vec{w}_{(\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z})} = \mathbf{R}_{TR} \mathbf{R}_{RV} \vec{w}_{(\hat{V}_A, \hat{V}_N, \hat{V}_P)}. \quad (6.11)$$

Pour simplifier la notation, on écrit

$$\mathbf{R}_{TV} = \mathbf{R}_{TR} \mathbf{R}_{RV}. \quad (6.12)$$

On peut alors exprimer les vecteurs directeurs du repère de la fusée dans le référentiel terrestre,

$$\hat{R}_A = \mathbf{R}_{TR}\{0, 0, 1\}^T, \quad \hat{P}_A = \mathbf{R}_{TR}\{0, 1, 0\}^T, \quad \hat{Y}_A = \mathbf{R}_{TR}\{1, 0, 0\}^T, \quad (6.13)$$

ainsi que la direction du vent incident,

$$\hat{V}_A = \mathbf{R}_{TV}\{0, 0, 1\}^T \quad (6.14)$$

Les autres axes du référentiel du vent se calculent de la façon suivante :

$$\hat{V}_P = \hat{R}_A \wedge \hat{V}_A \quad (6.15)$$

$$\hat{V}_N = \hat{V}_A \wedge \hat{V}_P. \quad (6.16)$$

Finalement, la direction d'application de la force normale, perpendiculaire à l'axe de la fusée dans le plan du vent incident est donnée par

$$\hat{N}_A = \hat{R}_A \wedge \hat{V}_P. \quad (6.17)$$

6.2.3 Calcul des forces

La poussée du moteur s'opère de façon similaire au cas dans le plan. Le flux de gaz a une vitesse dans la direction opposée à l'axe de la fusée \hat{R}_A et d'intensité donné par le tableau de mesures $Thrust(t)$. La section 2.2.5 pourvoit d'avantage de détails sur la modélisation de cette force.

$$\vec{T} = Thrust(t)\hat{R}_A \quad (6.18)$$

La gravité est également modélisée comme précédemment. Elle est constante ($g_0 = 9.81m/s^2$) et orientée dans le sens opposé de \hat{Z} .

$$\vec{G} = -g_0\hat{Z} \quad (6.19)$$

Pour les forces aérodynamiques, il est important de connaître la vitesse relative du vent \vec{U}_∞ et l'angle formé entre celle-ci et l'axe de la fusée \hat{R}_A . Ces valeurs sont calculées en deux étapes, d'abord au centre de masse, puis extrapolées au centre de pression. La direction du vent relatif est donnée par

$$\vec{U}_\infty = \vec{V} - \vec{V}_w, \quad (6.20)$$

et l'angle d'attaque est alors

$$\alpha_{cm} = \arctan \left(\frac{\vec{U}_\infty \wedge \vec{V}}{\vec{U}_\infty \cdot \vec{V}} \right). \quad (6.21)$$

Or, cela donne la vitesse relative et l'angle d'attaque du centre de masse, pour préciser un peu les conditions d'écoulement sur la fusée, nous souhaitons connaître l'angle d'attaque et la vitesse du vent relatif au centre de pression en tenant compte

de la vitesse angulaire de la fusée autour de son centre de masse. La formule pour la vitesse du vent au centre de pression est donnée par [3]

$$V_{cp} = V + \bar{X} \sin(\arccos(\hat{R}_A \cdot \hat{W}))(\hat{R}_A \wedge \hat{W}), \quad (6.22)$$

avec \bar{X} la distance entre le centre de pression et le centre de masse (non normalisée).

En insérant ce résultat dans les équations 6.20 et 6.21, les conditions au centre de pression sont calculées. Celles-ci sont ensuite employées pour calculer les forces aérodynamiques.

La force de traînée dépend principalement de la vitesse du vent et de l'angle d'attaque elle est obtenue par combinaison des traînées des aérofreins et de la fusée. Au moyen de la formule de la normalisation des coefficients aérodynamiques, on a

$$\vec{D} = -\frac{1}{2}\rho(z)A_{ref}U_\infty^2(C_D(\alpha) + C_{DA}(\alpha, \phi))\hat{V}_A. \quad (6.23)$$

Comme la traînée, la force normale aérodynamique dépend avant tout de la vitesse du vent et de l'angle d'attaque. Elle s'applique dans le plan formé par le vent et l'axe de la fusée et est orientée perpendiculairement à \hat{R}_A , le long de \hat{P}_A . Celle-ci se calcule de la manière suivante :

$$\vec{N} = \frac{1}{2}\rho(z)A_{ref}U_\infty^2C_{N\alpha}(\alpha)\alpha\hat{N}_A. \quad (6.24)$$

Cette force est également utilisée dans le calcul du moment correctif,

$$\vec{M}_N = \bar{X}N\hat{V}_P \quad (6.25)$$

Finalement, le moment d'amortissement aérodynamique est calculé à partir du coefficient s'y rapportant,

$$\vec{M}_D = -\frac{1}{2}\rho(z)C_2A_{ref}U_\infty^2\hat{W} \quad (6.26)$$

6.2.4 Dynamique

Le vecteur d'état \vec{S} intégré est de la forme

$$\vec{S} = \{\vec{X}^T, \vec{V}^T, \vec{Q}^T, \vec{W}^T\}^T. \quad (6.27)$$

Pour rappel, la dynamique est calculée dans le référentiel terrestre, les transformations appropriées doivent donc être effectuées sur les forces s'appliquant dans d'autres référentiels. En translation, Newton nous permet de poser la dynamique suivante,

$$\dot{\vec{X}} = \vec{V}, \quad (6.28)$$

$$\dot{\vec{V}} = \frac{1}{M}(\vec{T} + \vec{G} + \vec{D} + \vec{N}) - M\vec{V}. \quad (6.29)$$

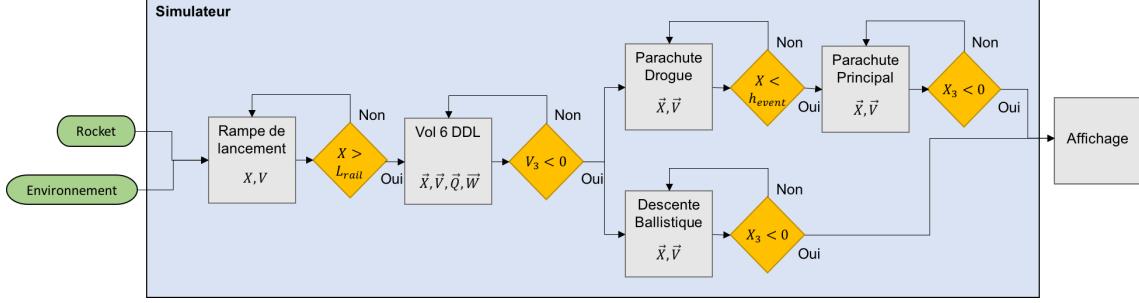


FIGURE 6.2 – Procédure d'une simulation en trois dimensions.

De même, en rotation, la dynamique est telle que

$$\dot{\vec{Q}} = \left(\frac{1}{2} \Omega \vec{Q} - k \lambda I \right) \vec{Q} \quad (6.30)$$

$$\dot{\vec{W}} = \mathbf{I}^{-1} (\vec{M}_N + \vec{M}_D). \quad (6.31)$$

La variation de l'inertie avec le temps est négligée dans ce cas. Le vecteur d'état finalement intégré regroupe les quatres termes précédents,

$$\dot{\vec{S}} = \{\dot{\vec{X}}^T, \dot{\vec{V}}^T, \dot{\vec{Q}}^T, \dot{\vec{W}}^T\}^T. \quad (6.32)$$

Des variations sur cette formulation sont employées pour les autres phases du vol :

- **Rampe de lancement** : La fusée est limitée à se déplacer le long du rail avec les forces projetées selon son orientation définie par l'utilisateur. Seules les variables d'état X et V . La Force normale et les moments de force ne sont pas employés.
 - **Descente sous parachute** : Seul les équations dynamiques de translation sont conservées. Le terme de force normale n'est pas pris en compte et le coefficient de traînée ainsi que l'aire de référence sont modifiés pour correspondre à ceux du parachute. On ne connaît d'ailleurs pas ces deux termes séparément mais seulement multipliés l'un par l'autre, pour cette raison, le terme SC_d est utilisé dans le calcul de la traînée.
 - **Descente balistique** Au cas où la fusée ne parvenait pas à éjecter le parachute à l'apogée, elle suivrait une trajectoire balistique pour la descente. Estimer cette trajectoire est primordial pour essayer de retrouver le point d'impact sur le terrain. A cause de problèmes de stabilité de l'intégrateur, la collection complète d'équations n'a pas pu être employée pour estimer la trajectoire durant cette phase. De ce fait, nous avons du nous rabattre sur une simulation à 3DDL tenant compte uniquement des équations de translation.
- La force normale est également laissée de côté dans ce cas.

La procédure complète d'une simulation est présentée dans la figure 6.2. Plus de détails sur les étapes d'une itération de la simulation de vol à 6DDL sont présentés dans la figure 6.3.

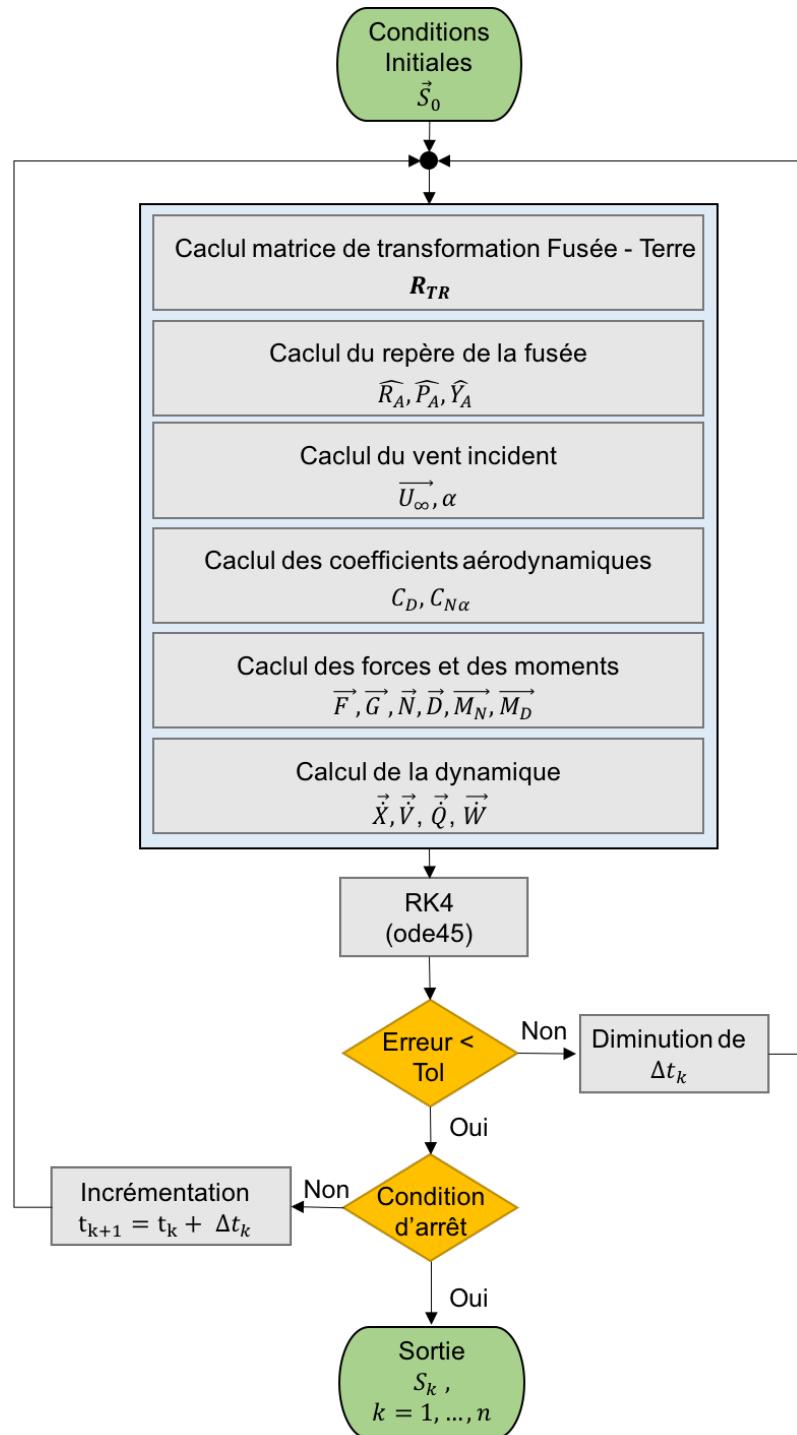


FIGURE 6.3 – Etapes de calculs pour une itération du simulateur de vol à 6DDL.

6.3 Résultats

Afin de valider la méthode développée pour calculer la trajectoire du vol à 6DDL de la fusée. Le résultat le plus important pour la compétition, la prédiction de l'apogée, est comparé aux résultats des simulateurs 1D, 2D, commercial Openrocket et dans le cas du vol de Payerne, aux données experimentales. Les résultats sont présentés dans la figure 6.4.

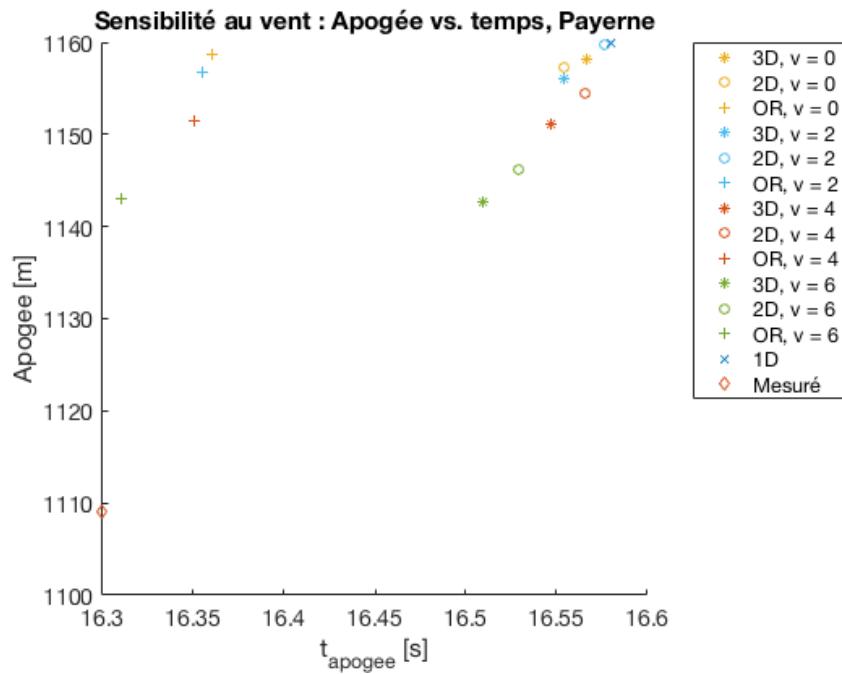
L'intérêt du simulateur 3D est avant tout de pouvoir visualiser le comportement de la fusée dans un espace reflétant la réalité au plus près. La distance du pas de tir à laquelle la fusée atterrira est d'intérêt primaire pour pouvoir définir un périmètre de sécurité et assister à la récupération du véhicule si on venait à perdre la communication avec celui-ci. A cette intention, une carte d'imagerie satellite est affichée sur le sol des représentations 3D de la trajectoire. Deux modes de descente nous intéressent, une descente nominale avec déploiement du parachute "drogue" et "main" ainsi que une descente balistique au cas où le parachute ne s'ouvrirait pas. Ce genre de visualisation aurait été utile au vol de test à Payerne où la fusée s'est écrasée. La figure 6.4a illustre l'effet de la direction du vent sur la trajectoire suivie. Le lieu d'atterrissement le jour même y est également indiqué.

Aux Etats-Unis, nous sommes concernés par la distance de dérive de la fusée sous le parachute. Le vol a donc été simulé pour des vitesses de vent entre 0 et 6 m/s et les résultats visualisés en 3D dans la figure 6.6. La distance du point d'atterrissement à la rampe de lancement est présentée en figure 6.7.

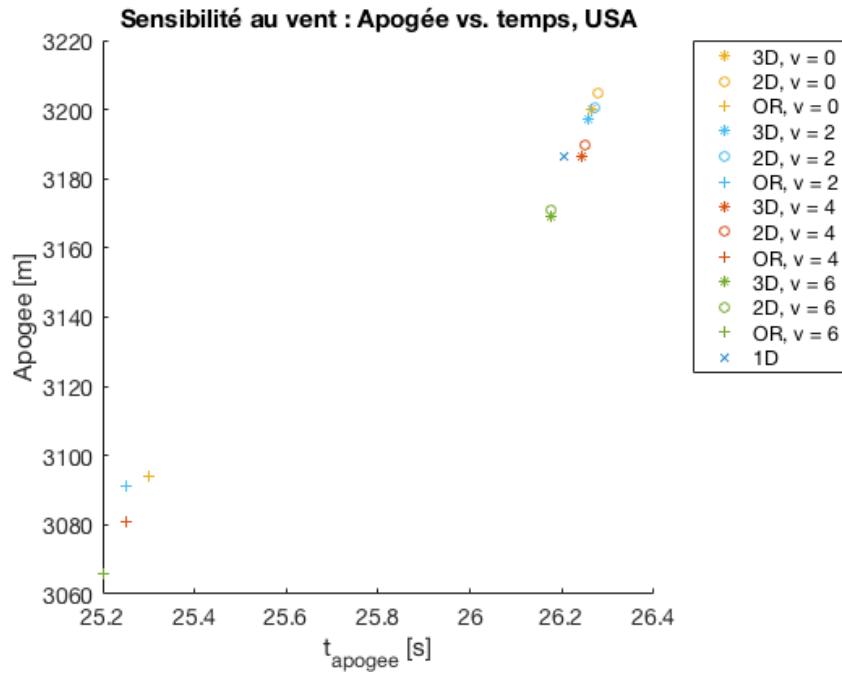
6.4 Discussion

6.4.1 Validation

En considérant les résultats présentés dans la figure 6.4, on observe que le simulateur surestime l'apogée par rapport à l'apogée effective par une erreur négative d'environ 4.2% (un vent d'environ 2m/s a été mesuré ce jour là). Cette erreur est non négligeable sachant que la compétition prévoit une plage de 10% autour de l'altitude cible où des points sont attribués à l'équipe. Cette différence peut s'expliquer par une mauvaise modélisation des propriétés aérodynamiques du véhicule et des hypothèses sur l'atmosphère comme un vent constant tout au long de l'ascension. L'aérodynamique peut être ajustée par les données de soufflerie, mais concernant l'atmosphère, il est plus compliqué d'estimer précisément une altitude correcte si celle-ci n'est pas connue à l'avance. Un travail important de recherche sur une modélisation plus réaliste de l'atmosphère et une approche stochastique à l'application de celle-ci tel qu'il a été fait par Box et al. [3], permettrait de mieux assurer que le véhicule atteigne l'objectif dans la plage fixée par la compétition. On remarque également que pour un vol à basse altitude tel que celui de Payerne, les résultats de Openrocket et du simulateur développé sont similaires pour l'apogée et relativement proche pour le temps d'ascension. Par contre, une nette différence se crée pour une apogée plus élevée telle que celle recherchée aux Etats-Unis. Une différence de 3% apparaît, ce qui est à nouveau non-négligeable par rapport à la précision requise. C'est en vue de ces incertitudes que nous souhaitons employer les aérofreins pour



(a)



(b)

FIGURE 6.4 – Comparaison des résultats de simulation des simulateurs 1D, 2D, 3D. Les données expérimentales sont incluses pour le vol de Payerne.

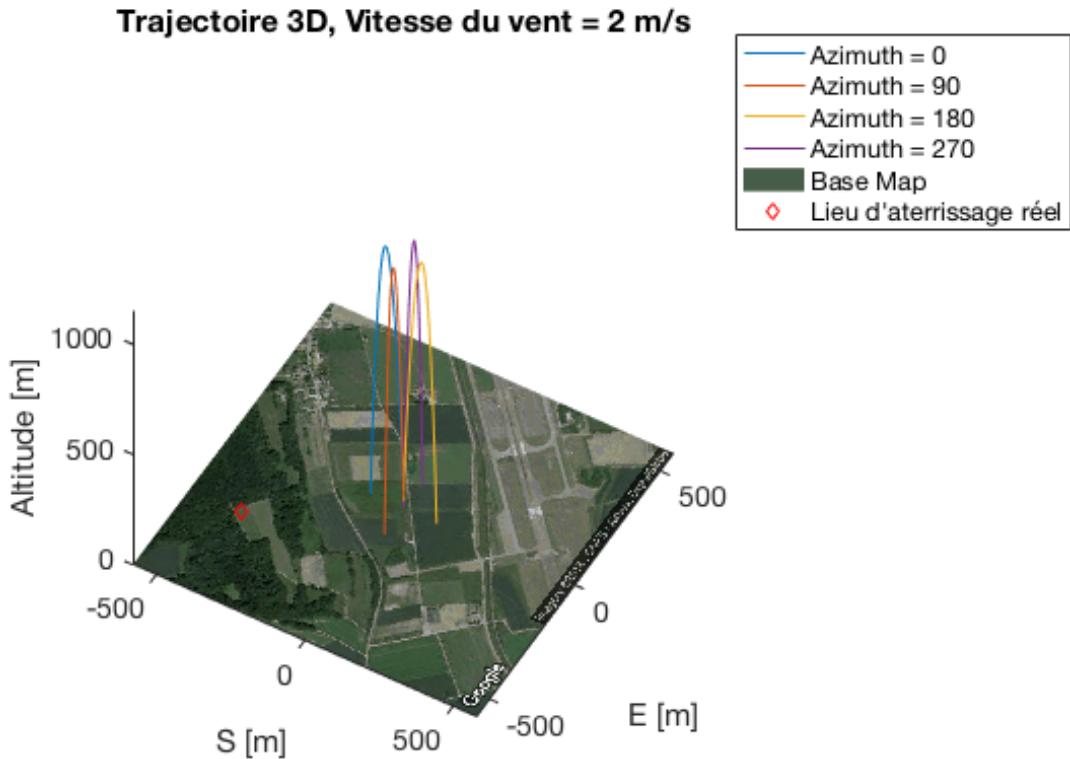
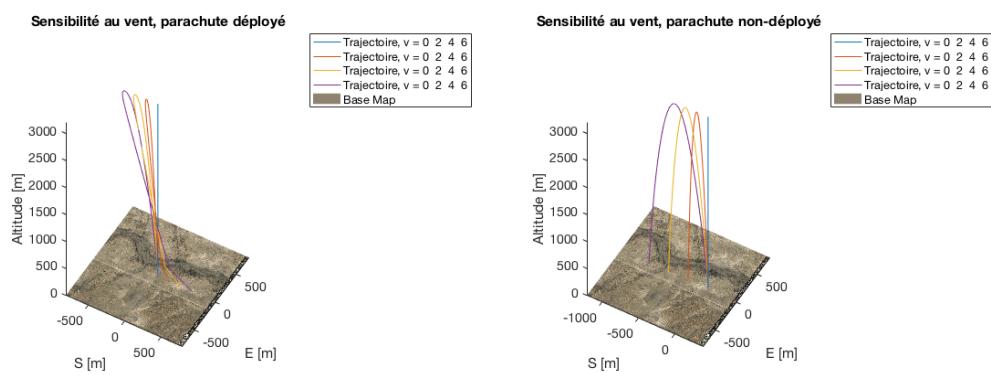


FIGURE 6.5 – Drift de la fusée pour des vents dirigés selon les 4 directions cardinales.



(a) Drift de la fusée pour un vol avec parachute. (b) Drift de la fusée pour un vol balistique

FIGURE 6.6

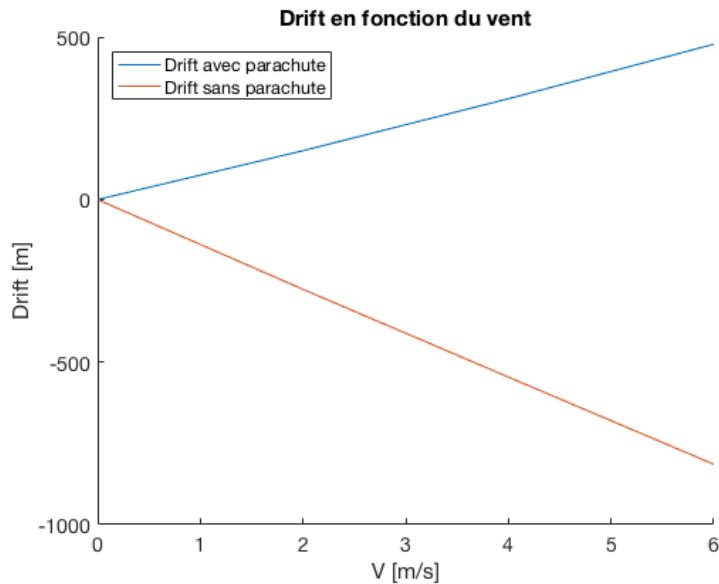


FIGURE 6.7 – Drift de la fusée pour le vol aux Etats-Unis.

réguler l’apogée en temps réel. Effectivement, ces différences pourront seulement être partiellement réduites par l’analyse des données de soufflerie et la comparaison avec des profils de vol réels, car l’incertitude de l’atmosphère persistera toujours. Pour terminer sur la validation du simulateur à 6 DDL, on peut observer, comme attendu, une légère réduction de l’apogée estimée entre le simulateur 2D et 3D plus les degrés de liberté augmentent. Le simulateur 1D donne la plus haute apogée estimée au vol de Payerne mais pas aux USA, indiquant que il reste intéressant à utiliser pour générer la table des aérofreins.

6.4.2 Drift

La dérive au sol de la fusée, ”Drift”, dépend du vent, de combien la fusée s’oriente dans le vent en sortie de rail et pour une descente sous parachute, de la traînée de celui-ci. La compétition tolère une dérive maximale de 5 Miles soit 8km. On voit en figure 6.6 et 6.7 que ces limites sont respectées pour un vol balistique ou nominal avec double déploiement de parachutes où la dérive est de maximum 800m pour un vent extrême de 6m/s (les lancements ne sont plus autorisés pour des vents supérieurs à 20 km/h). Ces résultats n’ont pas encore pu être validés, le vol de Payerne n’ayant pas permis de déterminer une zone d’atterrissage pour l’un des deux modes de descente considérés. Effectivement, la fusée est descendue séparée en deux morceaux et orientée perpendiculairement à la direction de chute, augmentant considérablement la traînée de celui-ci. La figure 6.5, illustre bien la différence entre la zone d’impact pour un vol ballistique et le point d’atterrissage effectif. Sans même connaître la vitesse exacte du vent, on sait que le simulateur n’aurait pas pu prédire un tel lieu d’atterrissage.

6.4.3 Points d'amélioration

Sachant que ce projet avait pour objectif d'aborder au même temps le développement et l'application d'un simulateur de fusée. Le programme du simulateur à 6DDL n'est qu'un premier jet d'un code qui a encore beaucoup de potentiel d'amélioration. Les points les plus importants étant :

- L'implémentation de la dynamique de roll (rotation autour de l'axe de la fusée), tel qu'elle a été faite dans d'autres simulateurs [9],[3]. La dissipation d'énergie dans ce degré de liberté aiderait également à compenser pour la surestimation de l'altitude et permettrait de faire apparaître des effets de stabilisation ou de résonance dû à la rotation.
- Une modélisation plus réaliste de l'atmosphère permettant d'intégrer des données de mesures prises par des ballons ou des stations météo, ainsi qu'une implémentation stochastique du profil de vent basé sur des modèles de turbulence atmosphérique comme celui de Von Karman.

Chapitre 7

Test en Soufflerie

Tous les concepts présentés dans ce rapport sont finalement pour la plus part basés sur des modèles empiriques. Une étape cruciale dans la réalisation d'un simulateur et de pouvoir vérifier les prédictions, qui sont quant à elles ancrées sur des modèles prédictifs. La soufflerie est un moyen élégant de vérifier la théorique des fluides.

Nous avons eu la chance, dans le cadre du projet étudiant, d'avoir eu l'accès dans l'une des plus grandes souffleries d'europe. Grâce à Sauber¹, l'un des sponsors du projet, nous avons pu accéder pendant plus de 4 heures à cette technologie de pointe. La soufflerie permet d'atteindre des vitesses de 80m/s, soit la vitesse de pointe d'une formule 1. Malheureusement la fusée atteint des vitesses 3 fois supérieur. Toute la plage de vitesse ne peut pas être testée. On note la présence d'une fausse route permettant de retirer la couche limite.

7.1 Référentiel de mesure et forces

On découvre le référentiel de mesure lié à la fusée en figure 7.1. Comme on peut le constater, l'axe Z est aligné en tout temps avec le nez de la fusée, il coïncide avec l'axe des tubes. Les efforts seront mesurés dans le plan (Y,Z) puisqu'en théorie aucun effort n'est à considérer selon X. En réalité ceux-ci ne sont pas nuls du au poids propre et au léger angle créé par ce poids. Dans le cadre de cette analyse nous les considérons nuls.

Pour simuler l'angle d'attaque α , le pilier maintenant la fusée en dard tourne sur lui-même, soit une rotation autour de X. Le référentiel plan est présenté en figure 7.2. On rappelle que les forces aérodynamiques considérées sont la traînée et la force de portance (Normale). Les référentiels dans lesquels elles sont exprimées sont présentés en figure 5.1.

Les forces projetées s'expriment de la manière suivante :

$$\begin{cases} F_z = -F_t \cos(\alpha) \\ F_y = -F_t \sin(\alpha) - F_n \end{cases} \quad (7.1)$$

où F_t est la force de traînée et F_n la force normale.

1. Ecurie de F1 suisse

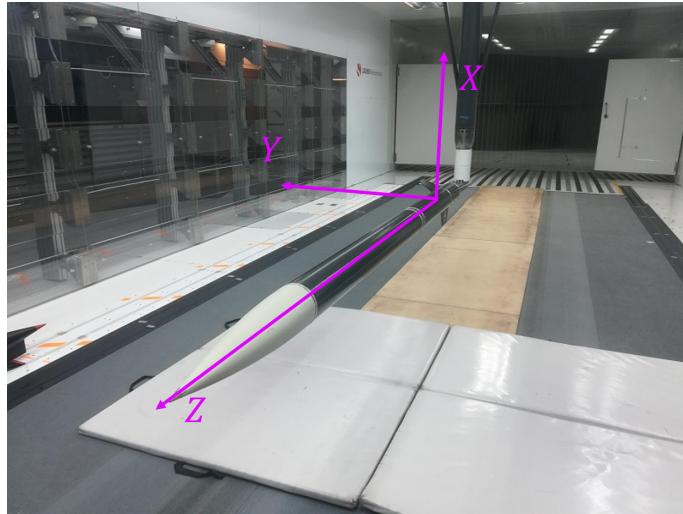


FIGURE 7.1 – Référentiel de mesure sur la fusée

7.2 Données de test

Afin de procéder rapidement avec l'analyse des données, nous avons souhaité recevoir les mesures brutes, sans traitement quelconque. Nous avons traité nous-mêmes le jeu de mesures. Reçues sous forme excel, elles ont été chargées sur Matlab pour analyse.

Afin de retirer le bruit lié à l'expérience, une mesure locale est appliquée sur 40 mesures, sachant que la fréquence d'échantillonage est de 50Hz et que le changement de vitesse est de l'ordre de 1m/s^2 , une valeur moyenne est calculée toute les 0.8 seconde. Ce temps est suffisamment court pour que la moyenne locale soit supposée correcte. Après ce traitement fait, il fallait retirer la valeur de l'offset. Celui-ci est différent pour chaque expérience.

Chaque expérience (Run) se déroule de la manière suivante :

1. Démarrage de la soufflerie (10s)
2. Attente à 1-2m/s de vent (30s)
3. Montée à 20m/s et attente (60-120s)
4. Montée/Descente 20-80-20m/s (120s)
5. Maintient à 20m/s et arrêt (30s)

L'étape 2 peut être utilisée pour calculer l'offset au début de chaque expérience. Ensuite les forces peuvent être exprimées soit en montée ($\dot{V}_\infty > 0$) ou soit en descente ($\dot{V}_\infty < 0$). Dans le cadre de cette analyse, nous avons souhaité regarder les forces lorsque la vitesse diminue. Ce choix s'explique puisque l'utilisation des aérofreins se fait uniquement après le burnout du moteur, soit lorsque la fusée perd en vitesse.

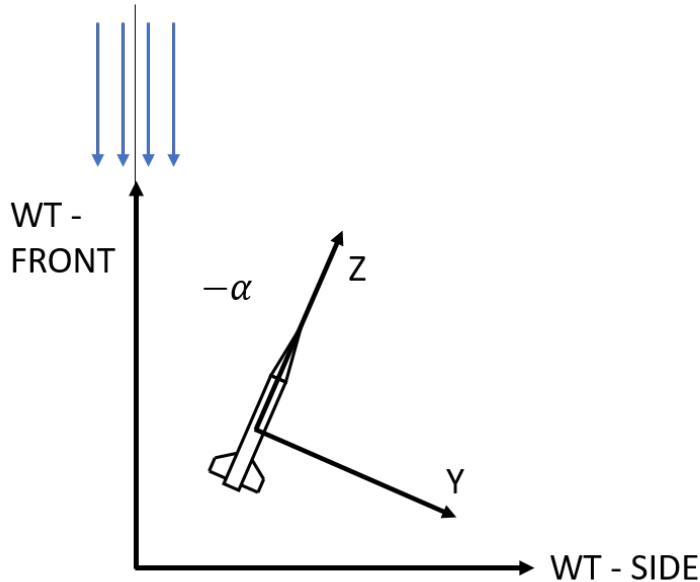


FIGURE 7.2 – Référentiel plan de mesure considéré (Vue de dessus)

7.3 Résultats

7.3.1 Angle d'attaque

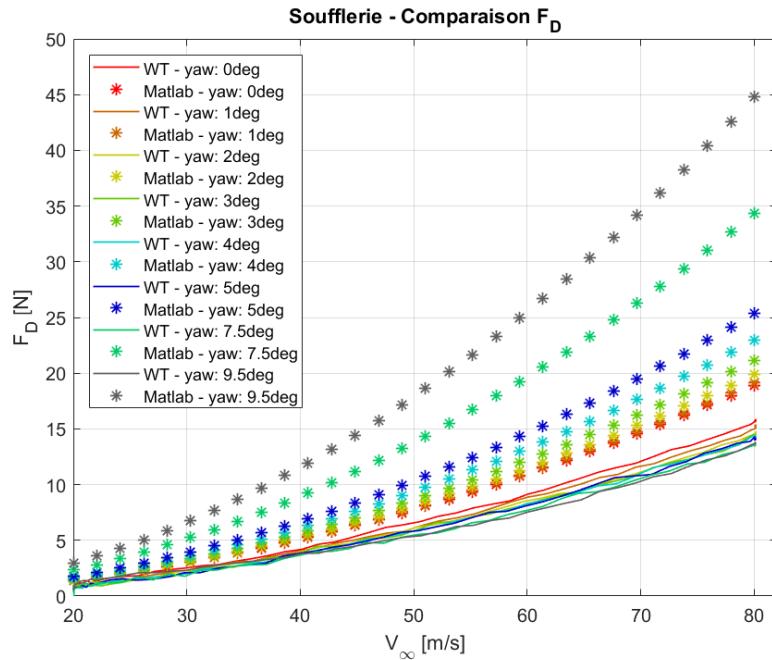
La première expérience permet de déterminer le comportement de la fusée lorsqu'elle prend de l'angle d'attaque, les aérofreins ne sont pas considérés. Comme on peut observer en figure 7.3, une comparaison entre le modèle et les mesures est faites pour la force de traînée.

En figure 7.4, on retrouve, basé sur le même principe, une comparaison entre les prédictions et le test concernant la force de portance. Les deux forces émanent des mêmes expériences (Run :49 à 56). Sur chacun des run étaient mesuré les forces de réaction lorsque le vent suit la courbe 20-80-20m/s pour un angle d'attaque différent. Nous avons considéré les angles jusqu'à 9.5 degré, soit une limite correspondant avec notre critère de stabilité mentionné au chapitre 3.

Nous retrouvons en figure 7.5 la force mesurée par la balance le long de l'axe Y. Nous avons souhaiter utiliser les forces modélisées (F_t et F_n) pour estimer la force que devrait mesurer la cellule. Nous utiliserons ce graphe pour discuter de la pertinence des résultats obtenu avec les forces le long de l'axe Z, que nous pensons être fausses.

7.3.2 Test des shuriken

La seconde expérience est dédiée à la comparaison du modèle d'aérofrein type shuriken. Nous représentons l'ouverture de l'aérofrein par un certain pourcentage, celui-ci correspond à l'angle appliqué sur le pignon central et non la surface rajoutée (Relation non linéaire). 10 expériences ont été menées et sont toutes représentées en figure 7.6.

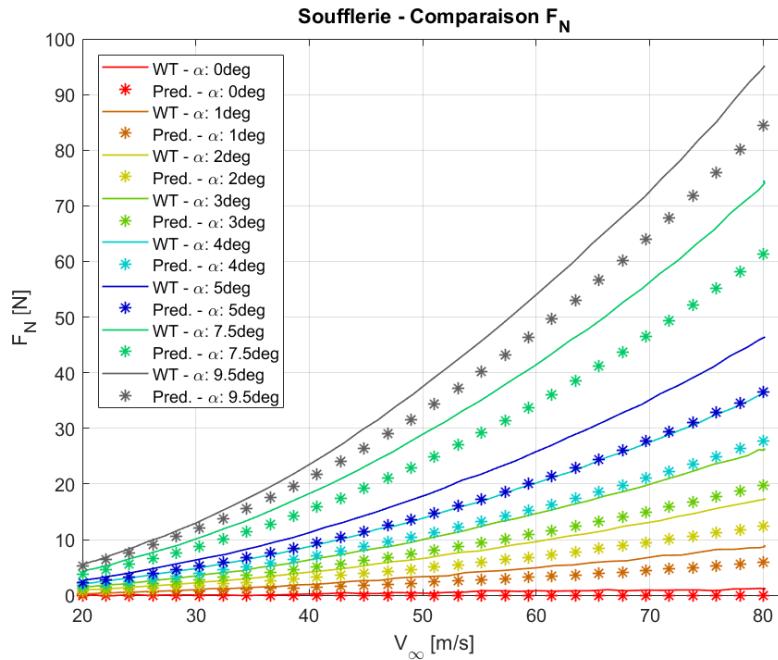
FIGURE 7.3 – Mesure de force de traînée F_t

7.4 Discussion

Commençons par la force de traînée. Les observations sont intrigantes puisqu'elles montrent une force le long de l'axe Z diminuant avec l'angle augmentant. Effectivement, la force de traînée est calculée en inversant la première équation de 7.1. Ainsi, pour de petits angles, le $\cos(\alpha)$ varie très peu, de telle manière qu'à ce que la force de traînée correspond grossièrement à la force mesurée F_z . Logiquement, le drag de la fusée doit augmenter avec l'angle, or on observe l'inverse. Les modèles prédisent une augmentation jusqu'à 30N pour un angle de 9.5 degré, au contraire les mesures montrent une chute de 3N. Après inspection des données de test (Fichier excel) et des photos prises le jour du test (Sur lesquelles on peut observer des valeurs), nous ne retrouvons aucune correspondance concernant l'axe Z.

Si nous observons la force de portance, celle-ci, selon l'équation 2 de 7.1, dépend majoritairement de la force F_y . Une faible contribution de la force F_z en fait partie ($\sin(\alpha)$). Comme on peut observer en figure 7.4, nous sous-estimons la force dans tous les cas. Etant donné que la force de traînée n'est pas correcte, celle-ci peut expliquer la sous-estimation de la force normale. A priori la force mesurée le long de l'axe Y semble être de meilleure qualité et plus en adéquation avec les observations personnelles faites le jour du test sur place.

Pour s'assurer de nos modèles et tenter de justifier les erreurs le long de l'axe Z, nous avons souhaité estimer la force F_y (ref. figure 7.5), comme prédicté en équation 7.1. Les résultats présentés montrent une légère sous-estimation mais sont toutefois bons, avec une erreur généralement en dessous de 10%. Ce graphe nous rassure dans l'idée que les mesures reçues sont correctes le long de l'axe Y. Aussi on peut penser que nos modèles ont le bon comportement, c'est-à-dire que la force de traînée est sensée augmenter avec l'angle d'attaque et non l'inverse comme les tests (Sûrement

FIGURE 7.4 – Mesure de force de portance F_n

erronés) nous le présentent. Un mail contenant le problème présenté a été envoyé à notre sponsors, à ce jour nous sommes dans l'attente d'une réponse.

Finalement, nous souhaitions mesurer la traînée rajoutée par les aérofreins. Malheureusement et comme déjà dit, les mesures le long de l'axe Z ne sont pas fiables, or comme les aérofreins ne sont pas testés avec un angle d'attaque, toute la force est reprise par la cellule de F_z . Nous observons toutefois que la force rajoutée par les aérofreins (ΔF entre 0% et 100% à 80m/s) est identique pour le modèle et les mesures. Cela n'est en aucun cas signe de bon modèle. Afin de conclure sur le test en soufflerie, les résultats disponibles à ce jour ne sont pas concluant et ne permettent pas de valider nos modèles. Ils ne sont toutefois pas éliminatoires. Nous nous baserons sur la seule expérience acquise durant l'année, le vol test. Nous espérons, après ce projet, réussir à régler le problème concernant les fausses mesures.

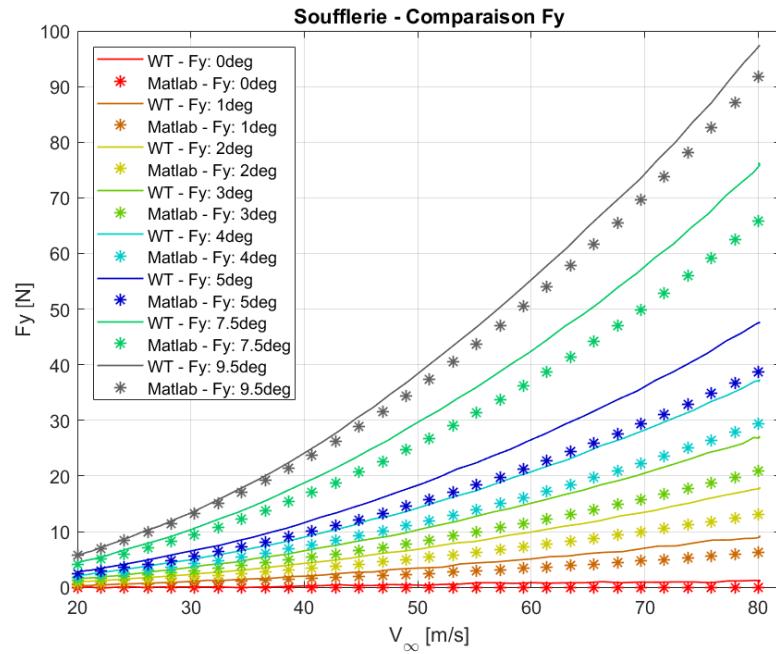
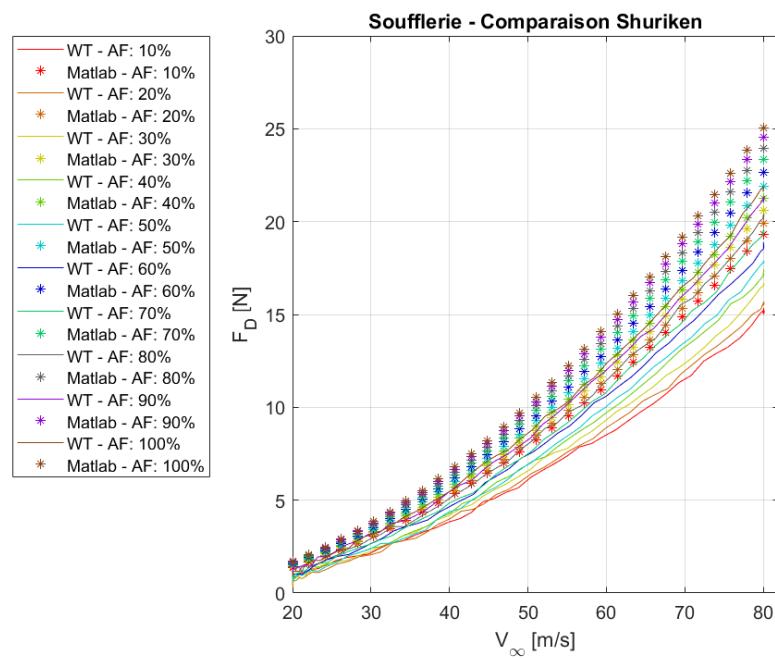
FIGURE 7.5 – Mesure de force le long de Y, F_y 

FIGURE 7.6 – Force rajoutée par l'aérofrein shuriken

Chapitre 8

Conclusion

Dans ce projet, la physique de la fusée a été prédite au moyen de modèles théoriques tirés de la littérature, les équations de dynamique ont ainsi pu être posées et intégrées numériquement. Les simulateurs ont ensuite pu être appliqués à des applications telles que le calcul d'une table de contrôle pour aérofreins et une prédition du lieu d'atterrissements du véhicule. Finalement, nous avons eu l'opportunité de tester l'aérodynamique de la fusée en soufflerie. Des problèmes d'enregistrement de données n'ont pas permis de tirer des conclusions pertinentes sur l'aérodynamique dans les délais impartis, mais certaines données indiquent que les modèles reflètent le comportement réelle de la fusée à basse vitesse et faible angle d'attaque.

Afin de découper le problème et de vérifier les équations par étapes, des simulateurs à 1, 3 et 6 DDL ont été conçus. Nous nous sommes particulièrement intéressés à la prédition de l'apogée car c'est cela qui rapporte la plupart des points à la compétition. La différence principale entre les simulateurs est dû à l'ajout de degrés de liberté où l'énergie peut se dissiper. Plus il y a de DDL, plus l'altitude prédite est faible. Cela est également dû au fait que l'ajout de DDL rend le véhicule sensible à des perturbations externes en particulier celles causées par le vent. Plus le vent est élevé, plus l'apogée est faible et la dérive élevée.

Entre les simulations et les données expérimentales du vol de Payerne, on a remarqué une surestimation de l'altitude de 4.2% au minimum avec le simulateur 6DDL. Cette surestimation de l'apogée est liée à une sous-estimation des forces aérodynamiques comme indiqué par les résultats préliminaires de la soufflerie, une estimation approximative de la masse dû à des changements fréquents et des balances peu précises et la modélisation très basique de l'atmosphère qui a un comportement imprédictible sur des petites échelles de temps.

Les solutions proposées à ces problèmes sont multiples. Tout d'abord, une résolution des problèmes liés à l'enregistrement des données de soufflerie permettra de précisément caractériser les coefficients aérodynamiques de la fusée. Ensuite, la masse de la fusée sera déterminée précisément sur les lieux de la compétition en pesant les éléments la constituant un à un. Finalement, pour répondre au problème d'incertitude de l'atmosphère, une approche stochastique au problème est proposée. L'élaboration d'un modèle de ce type requiert toutefois un investissement important de temps et pourrait faire l'objet d'un projet futur. Ce genre de développements sont facilités par la structure actuelle du simulateur permettant de greffer un tel modèle dessus.

Bibliographie

- [1] Hassan ARIF. *Identification and Control of a High Power Rocket*. EPFL, Laboratoire d'automatique, 2017.
- [2] James S. Barrowman ; Judith A. BARROWMAN. *The Theoretical Prediction of the Center of Pressure*. 1966.
- [3] Simon Box, Christopher M. BISHOP et Hugh HUNT. « Stochastic Six-Degree-of-Freedom Flight Simulator for Passively Controlled High-Power Rockets ». In : *TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT* (2013).
- [4] Robert GALEJS. *Wind Instability - What Barrowman left out*.
- [5] Gordon K. MANDELL, George J. CAPORASO et William P. BENGEN. *Topics in Advanced Model Rocketry*. MIT Press, 1973.
- [6] Tim Van MILLIGAN. « Basics of Dynamic Flight Analysis (Part 2) ». In : *Apogee Rocket Newsletter* 193 (2007), p. 2–7.
- [7] Tim Van MILLIGAN. « Basics of Dynamic Flight Analysis (Part 3) ». In : *Apogee Rocket Newsletter* 195 (2007), p. 2–7.
- [8] « NASA-TM-X-74335, US Standard Atmosphere 1976 ». In : (oct. 1976).
- [9] Sampo NISKANEN. *Development of an Open Source model rocket simulation software*. 2009.
- [10] *Raven Altimeter*. URL : <https://www.featherweightaltimeters.com/raven-altimeter.html> (visité le 11/06/2018).
- [11] Hermann SCHLICHTING. *Boundary Layer Theory, Seventh Edition*. McGRAW-HILL BOOK COMPANY, 1979.
- [12] S.F.HOERNER. *Fluid-Dynamic Drag, theoretical, experimental and statistical information*. 1965.
- [13] Peter H. ZIPFEL. *Modeling and Simulation of Aerospace Vehicle Dynamics*. AIAA, 2007.