数値流体ゼミ 7章

油滴

August 2, 2021

一次元システム方程式に置ける解法1

この章は3章でスカラー方程式に対して適応した解法を応用することが基本になる。3章にもう一度目を通しておくと良い。
ここでは、スカラーでの方程式

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

にたいして、オイラー方程式

$$\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x} = 0 \tag{2}$$

を考える。

一次元システム方程式に置ける解法2

時間発展はやや抽象的に書くと陽解法では

$$\boldsymbol{Q}_j^{n+1} = \boldsymbol{Q}_j^n - \Delta t \ F_j(\boldsymbol{Q}^n) \tag{3}$$

と書ける。ここで右辺の F は $\boldsymbol{Q}^n$ から求まる値であり、例えば数値流速で

$$F_j(\boldsymbol{Q}^n) = \frac{\bar{\boldsymbol{E}}_{j+1/2}^n - \bar{\boldsymbol{E}}_{j-1/2}^n}{\Delta x} \tag{4}$$

等と書ける。F が $\boldsymbol{Q}^{n+1}$ にも依存すると陰解法となる。

一次元システム方程式に置ける解法3

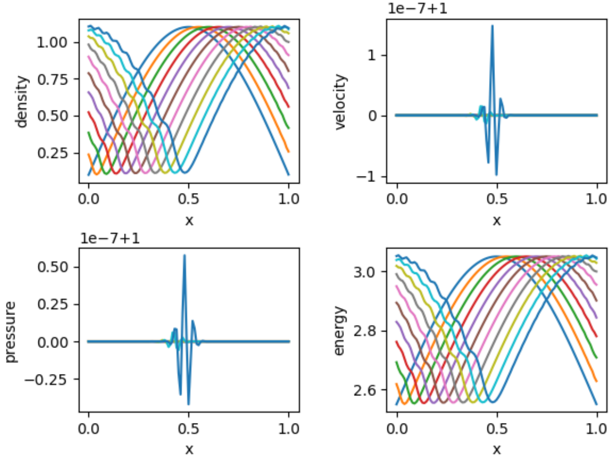

Figure: 完全陽解法 (FTCS)

システム方程式の陽解法1

スカラーの場合に陽解法には CFL 条件という制約があり、クーラン数が1を超えると正しく計算出来なかった。このため、刻み幅が小さくならざるを得なかったがシステム方程式でも同様のことが言える。
先ほどの方程式を $A = \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \boldsymbol{Q}}$ を用いて書き直す。

$$\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial t} + A\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial x} = 0 \tag{5}$$

システム方程式の陽解法2

$A = R^{-1}DR$ と対角化すると

$$R\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial t} + DR\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial x} = 0 \tag{6}$$

となる。D は対角に固有値が並んでおり、これらは情報の伝達速度を表しているから D のうち最も絶対値が大きい固有値（スペクトル半径）に対して $|\lambda|_{max} < \frac{\Delta x}{\Delta t}$ が成立する必要がある。これがシステム方程式に置ける CFL 条件である。
具体的には

$$|u| + c < \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{7}$$

である。

システム方程式の陽解法3

具体的な陽解法としてはクランクニコルソン法

$$\boldsymbol{Q}_j^* = \boldsymbol{Q}_j^n - \Delta t\ F_j(\boldsymbol{Q}^n) \tag{8}$$

$$\boldsymbol{Q}_j^{n+1} = \boldsymbol{Q}_j^n - \frac{\Delta t}{2}(F_j(\boldsymbol{Q}^n) + F_j(\boldsymbol{Q}^*)) \tag{9}$$

がある。
オイラー法で n+1 ステップ目を暫定的に求め、n ステップ目と暫定の n+1 ステップ目を平均して F を出している。n+1 ステップ目を陰的に解くものではないので注意。
system_cn.py に実装。中心差分で計算。

システム方程式の陽解法4

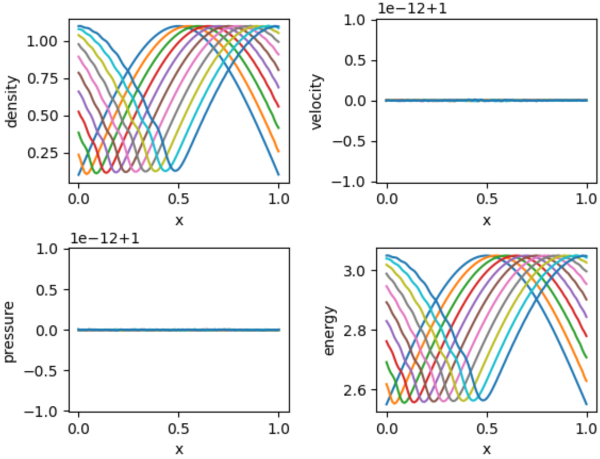

Figure: クランクニコルソン法

システム方程式の陽解法5

また、二段階法

$$\boldsymbol{Q}_j^{(1)} = \boldsymbol{Q}_j^n - \frac{\Delta t}{2} F_j(\boldsymbol{Q}^n) \tag{10}$$

$$\boldsymbol{Q}_j^{n+1} = \boldsymbol{Q}_j^n - \Delta t \, F_j(\boldsymbol{Q}^{(1)}) \tag{11}$$

等も考えられる。
また、F についてスカラーの場合と同様に精度を高めるには TVD 等の非線形スキームが必要になる。system_nidannkai.py に実装。
中心差分で計算。

システム方程式の陽解法6

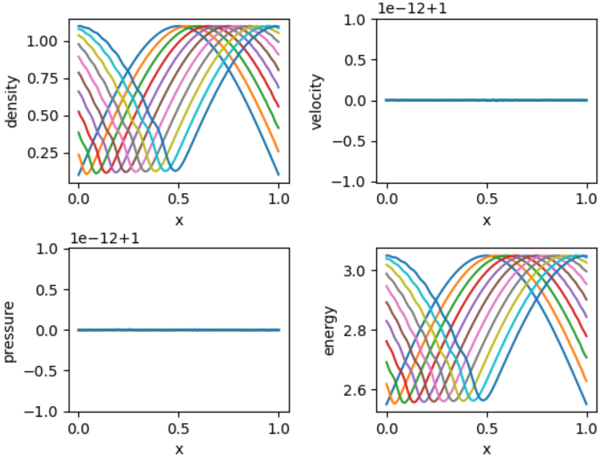

Figure: 二段階法

システム方程式の陰解法1

ここからは陰解法のいろいろなスキームに対してやって行くことになるが、その前に準備をする。

デルタ形式
ここからは $\boldsymbol{Q}_j^n$ ではなく、時間方向の変化量である $\Delta \boldsymbol{Q}_j^n = \boldsymbol{Q}_j^{n+1} - \boldsymbol{Q}_j^n$ で考える。たとえば完全陰解法

$$\boldsymbol{Q}_j^{n+1} = \boldsymbol{Q}_j^n - \Delta t \ F_j(\boldsymbol{Q}^{n+1}) \tag{12}$$

は

$$\Delta \boldsymbol{Q}_j^n = -\Delta t \ F_j(\boldsymbol{Q}^{n+1}) \tag{13}$$

となる。

システム方程式の陰解法2

元の方程式を差分化し、E を陰になるように n+1 ステップのものを取る。

$$\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x} = 0 \tag{14}$$

$$\Delta \boldsymbol{Q}_j^n = -\Delta t \left(\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x} \right)_j^{n+1} \tag{15}$$

この $\boldsymbol{E}^{n+1}$ を $\Delta \boldsymbol{Q}^n$ で展開する。

$$\boldsymbol{E}^{n+1} = \boldsymbol{E}^n + \left. \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \boldsymbol{Q}} \right|^n \Delta \boldsymbol{Q}^n + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial \boldsymbol{Q}^2} \right|^n (\Delta \boldsymbol{Q}^n)^2 + \ldots\ldots. \tag{16}$$

システム方程式の陰解法3

$A = \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \boldsymbol{Q}}$ は何度も取り上げた流速ヤコビアンである。
これを用いると, 高次項を打ち切って

$$\Delta \boldsymbol{Q}_j^n = -\Delta t \frac{\partial}{\partial x}\left[\boldsymbol{E}_j^n + \left.\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \boldsymbol{Q}}\right|_j^n \Delta \boldsymbol{Q}^n + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial \boldsymbol{Q}^2}\right|_j^n (\Delta \boldsymbol{Q}^n)^2 + \ldots\ldots\right] \tag{17}$$

$$\simeq -\Delta t \frac{\partial}{\partial x}\left[\boldsymbol{E}_j^n + A \Delta \boldsymbol{Q}^n\right] \tag{18}$$

と書ける。

システム方程式の陰解法4

整理すると

$$\left[I + \Delta t \frac{\partial}{\partial x} A \right]^n \Delta \boldsymbol{Q}_j^n = -\Delta t \left. \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x} \right|_j^n \tag{19}$$

です。ここで、$\frac{\partial}{\partial x}$ は $\Delta \boldsymbol{Q}$ にもかかることに注意。
左辺の差分を適当に取ると、行列反転に帰着できる。
(I は単位行列を表す)

システム方程式の陰解法5

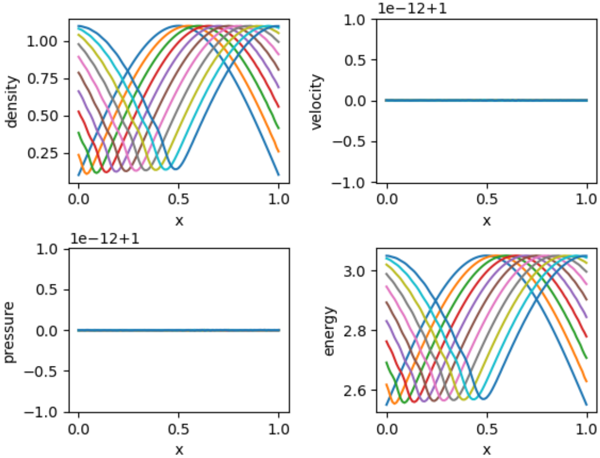

Figure: 反復法

近似 LU 分解 1

$$\left[I + \Delta t \frac{\partial}{\partial x} A\right]^n \Delta \boldsymbol{Q}_j^n = -\Delta t \left.\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x}\right|_j^n \tag{20}$$

を解くことを考える。
右辺についてはそのまま差分化して問題無いが、左辺では行列の反転等コストが大きい。よって右辺を差分で得た後に、左辺については別の方法で解くことを考える。

近似 LU 分解 2

ここではスカラー方程式の時に行った近似 LU 分解を行い左辺を計算する。
具体的には

$$\left[I + \Delta t \frac{\partial}{\partial x} A^{+} \right]^{n} \left[I + \Delta t \frac{\partial}{\partial x} A^{-} \right]^{n} \Delta \boldsymbol{Q}_j^n = -\Delta t \left. \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x} \right|_j^n \tag{21}$$

とする。
ここで

$$A^{\pm} = \frac{\partial \boldsymbol{E}^{\pm}}{\partial \boldsymbol{Q}} \simeq R \Lambda^{\pm} R^{-1} \tag{22}$$

と近似する。この近似の精度は二次であり精度の点では問題ない。
（ただし収束性が悪化する可能性があるらしい）

近似 LU 分解 3

$$\left[I+\Delta t\frac{\partial}{\partial x}A^{+}\right]^{n}\Delta\boldsymbol{Q}_j^{*}=-\Delta t\left.\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial x}\right|_j^n \tag{23}$$

$$\left[I+\Delta t\frac{\partial}{\partial x}A^{-}\right]^{n}\Delta\boldsymbol{Q}_j^{n}=\Delta\boldsymbol{Q}_j^{*} \tag{24}$$

これを一次精度で差分化すると

$$\left[I+\frac{\Delta t}{\Delta x}A_j^{+}\right]^{n}\Delta\boldsymbol{Q}_j^{*}=-\Delta t\left.\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial x}\right|_j^n+\left[\frac{\Delta t}{\Delta x}A_{j-1}^{+}\right]^{n}\Delta\boldsymbol{Q}_{j-1}^{*} \tag{25}$$

$$\left[I-\frac{\Delta t}{\Delta x}A_j^{-}\right]^{n}\Delta\boldsymbol{Q}_j^{n}=\Delta\boldsymbol{Q}_j^{*}-\left[\frac{\Delta t}{\Delta x}A_{j+1}^{-}\right]^{n}\Delta\boldsymbol{Q}_{j+1}^{n} \tag{26}$$

近似 LU 分解 4

ここで A^{+}, A^{-} でそれぞれ風上側が異なることに注意する。
第一スイープを j の小さいほうから、第二スイープを j の大きいほうから進めることで解くことができる。 これが近似 LU 分解であり, 以後はこれを改良していく。

実装したプログラムでは境界条件の設定が難しい。
なお、これ以降全く同じに見えるグラフがいくつか出てくるが不正をしたわけではない。どこか根本的に間違っているかもなので、是非実行して確かめてみてほしい。

近似 LU 分解 5

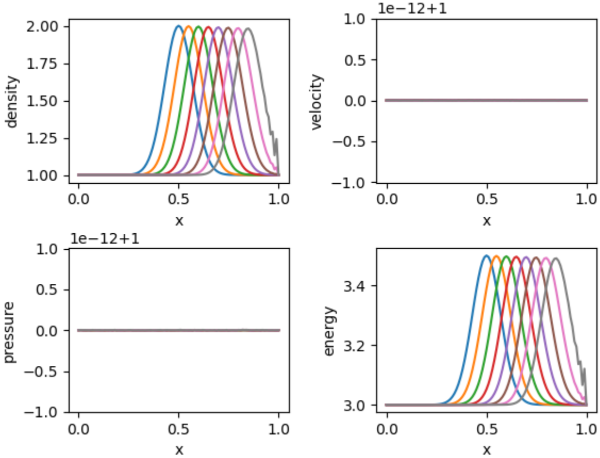

Figure: 近似 LU 分解

対角化法 1

ヤコビアン A を対角化すると右固有行列を R として

$$\left[I+\Delta t\frac{\partial}{\partial x}A\right]^n \Delta \boldsymbol{Q}_j^n = \left[I+\Delta t\frac{\partial}{\partial x}R\Lambda R^{-1}\right]^n \Delta \boldsymbol{Q}_j^n \tag{27}$$

$$\simeq R\left[I+\Delta t\frac{\partial}{\partial x}\Lambda\right]^n R^{-1}\Delta \boldsymbol{Q}_j^n \tag{28}$$

と近似できる。もとの右辺を $\boldsymbol{F}$ と置くと解きたい式は

$$\left[I+\Delta t\frac{\partial}{\partial x}\Lambda\right]^n R^{-1}\Delta \boldsymbol{Q}_j^n = R^{-1}\boldsymbol{F} \tag{29}$$

となる。

対角化法2

これは左辺の行列が対角成分しか持たないためにスカラー方程式として解くことができる。
この方法をPulliam-Chausseeの対角化法と呼ぶ。
1ループの手順は
右辺（$-dt * \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x}$ を差分化したもの) に左固有行列 R^{-1} をかける。
三本のスカラー方程式に対して行列反転を行う。
それに R をかけて ΔQ をもとめる。
となる。

対角化法 3

左辺の差分化の際に中心差分として二次および四次の以下の式を良く用いる。

$$\text{二次}: \frac{\partial}{\partial x}\Lambda_j \simeq \frac{\Lambda_{j+1} - \Lambda_{j-1}}{2\Delta x} \tag{30}$$

$$\text{四次}: \frac{\partial}{\partial x}\Lambda_j \simeq \frac{-\Lambda_{j+2} + 8\Lambda_{j+1} - 8\Lambda_{j-1} + \Lambda_{j-2}}{12\Delta x} \tag{31}$$

これらを適応すると 3 行および 5 行の行列反転をすることになる。

対角化法4

プログラムでの注意。
境界条件を $j=0$ で $\Delta Q=0$ としこれをもとにスイープを実行する。
五行反転については $aa[i,m]$ が反転する五行対角行列 D の成分 $D_{i,i+m-2}$ を表している。

結果は以下
dx=0.02,dt=0.0005 で 700 ステップ表示した。

対角化法5

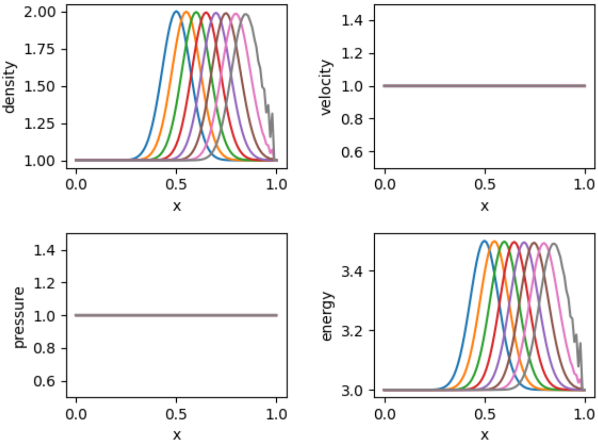

Figure: 対角化中心差分

対角化法 6

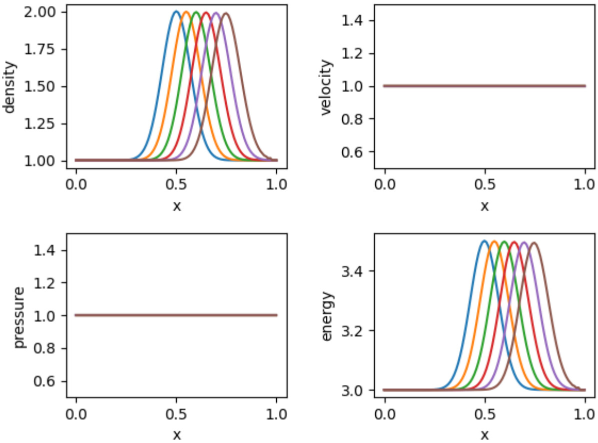

Figure: 対角化 5 点中心差分

LU-ADI1

ここからはさらにざっくりとした近似をとって評価していく。
まず、対角化の時に用いた式からはじめる。

$$\left[I + \Delta t \frac{\partial}{\partial x} \Lambda \right]^n R^{-1} \Delta \boldsymbol{Q}_j^n = R^{-1} \boldsymbol{G} \tag{32}$$

ここで左辺を近似 LU 分解すると

$$\left[I + \Delta t \frac{\partial}{\partial x} \Lambda^+ \right]^n \left[I + \Delta t \frac{\partial}{\partial x} \Lambda^- \right]^n R^{-1} \Delta \boldsymbol{Q}_j^n = R^{-1} \boldsymbol{G} \tag{33}$$

と書くことが出来、このまま差分化するとスキームは

LU-ADI2

$$\left[I + \frac{\Delta t}{\Delta x}\Lambda_j^+\right]^n \Delta \boldsymbol{Q}_j^* = R^{-1}\boldsymbol{G} + \left[\frac{\Delta t}{\Delta x}\Lambda_{j-1}^+\right]^n \Delta \boldsymbol{Q}_{j-1}^* \tag{34}$$

$$\left[I - \frac{\Delta t}{\Delta x}\Lambda_j^-\right]^n R^{-1}\Delta \boldsymbol{Q}_j^n = \Delta \boldsymbol{Q}_j^* - \left[\frac{\Delta t}{\Delta x}\Lambda_{j+1}^-\right]^n R^{-1}\Delta \boldsymbol{Q}_{j+1}^n \tag{35}$$

という形になる。
これを実装した結果が以下である。

LU-ADI3

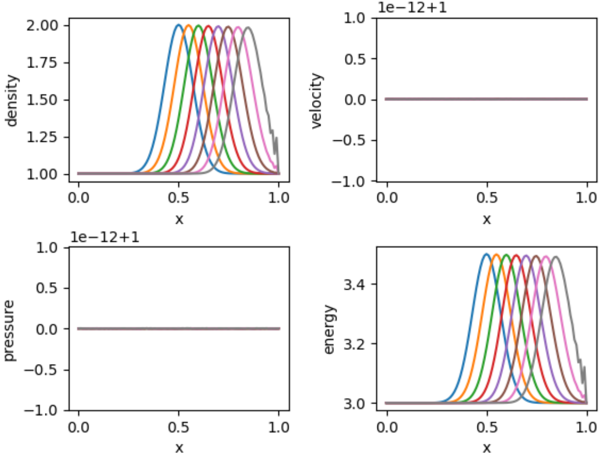

Figure: LUADI1

LU-ADI4

上では近似 LU を用いたが代わりに近似 LDU 分解を用いると対角優位性が増す。

$$\left[I-\frac{\Delta x}{\Delta t}\Lambda^{-}+\Delta t\frac{\partial}{\partial x}\Lambda^{+}\right]^{n}\left(\left[I+\Delta t\frac{\partial}{\partial x}\left(\Lambda^{+}-\Lambda^{-}\right)\right]^{n}\right)^{-1} \tag{36}$$

$$\left[I+\frac{\Delta x}{\Delta t}\Lambda^{+}+\Delta t\frac{\partial}{\partial x}\Lambda^{-}\right]^{n}R^{-1}\Delta\boldsymbol{Q}_{j}^{n}=R^{-1}\boldsymbol{G} \tag{37}$$

これを三つのスイープに分けると

LU-ADI5

$$\text{第一スイープ}:\left[I-\frac{\Delta x}{\Delta t}\Lambda^{-}+\Delta t\frac{\partial}{\partial x}\Lambda^{+}\right]^{n}\Delta\boldsymbol{Q}_j^{*}=R^{-1}\boldsymbol{G} \tag{38}$$

$$\text{第二スイープ}:\Delta\boldsymbol{Q}_j^{**}=\left[I+\Delta t\frac{\partial}{\partial x}\left(\Lambda^{+}-\Lambda^{-}\right)\right]^{n}\Delta\boldsymbol{Q}_j^{*} \tag{39}$$

$$\text{第三スイープ}:\left[I+\frac{\Delta x}{\Delta t}\Lambda^{+}+\Delta t\frac{\partial}{\partial x}\Lambda^{-}\right]^{n}R^{-1}\Delta\boldsymbol{Q}_j^{n}=\Delta\boldsymbol{Q}_j^{**} \tag{40}$$

となる。ここで第二スイープはただの行列の積になっている。これらを差分スキームにすると

LU-ADI6

$$\text{第一スイープ}: \left[I + \frac{\Delta t}{\Delta x}(\Lambda^+ - \Lambda^-)\right]^n \Delta \boldsymbol{Q}_j^* = R^{-1}\boldsymbol{G} + \frac{\Delta t}{\Delta x}\Lambda^+ \boldsymbol{Q}_{j-1}^* \tag{41}$$

$$\text{第二スイープ}: \Delta \boldsymbol{Q}_j^{**} = \left[I + \frac{\Delta t}{\Delta x}(\Lambda^+ - \Lambda^-)\right]^n \Delta \boldsymbol{Q}_j^* \tag{42}$$

$$\text{第三スイープ}: \left[I + \frac{\Delta t}{\Delta x}(\Lambda^+ - \Lambda^-)\right]^n R^{-1}\Delta \boldsymbol{Q}_j^n \tag{43}$$

$$= \Delta \boldsymbol{Q}_j^{**} - \frac{\Delta t}{\Delta x}\Lambda^- R^{-1}\boldsymbol{Q}_{j+1}^n \tag{44}$$

となる。

LU-ADI7

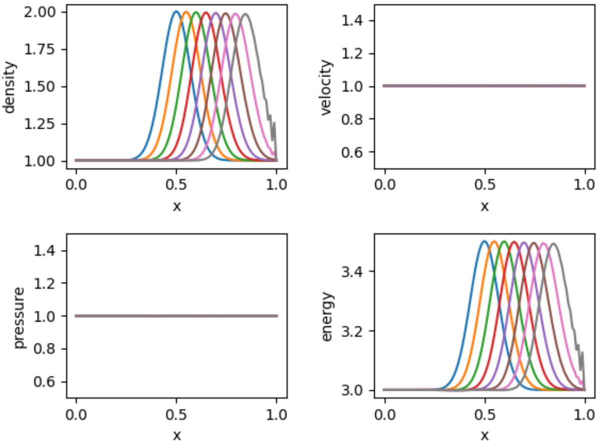

Figure: LUADI2

LU-ADI7

さらに

$$A^{\pm} = \frac{A \pm \sigma_x}{2} \tag{45}$$

と近似して LDU 分解する方法もあるが後に二次元で述べる LUSGS 法を一次元にしただけなのでここでは触れない。
system_LUADI3.py に実装

LU-ADI7

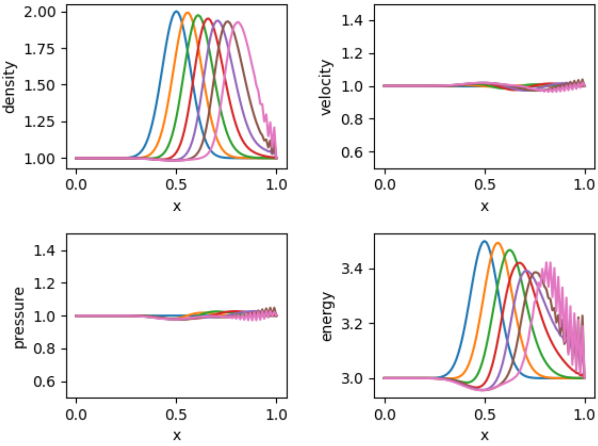

Figure: LUADI sgs

時間精度の向上 1

ここまでの方法では時間方向は一次精度の

$$\frac{\partial \boldsymbol{Q}_j^{n+1}}{\partial t} = \frac{\boldsymbol{Q}_j^{n+1} - \boldsymbol{Q}_j^n}{\Delta t} \tag{46}$$

$$\Delta \boldsymbol{Q}_j^n = -\Delta t \left(\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x} \right)_j^{n+1} \tag{47}$$

というものを考えてきた。
これまでのスキームに空間方向は Δt 二次精度があるため時間方向を二次精度後退差分に置き換えることで精度が向上する。

時間精度の向上2

具体的には

$$\frac{\partial \boldsymbol{Q}_j^{n+1}}{\partial t} = \frac{3\boldsymbol{Q}_j^{n+1} - 4\boldsymbol{Q}_j^n + \boldsymbol{Q}_j^{n-1}}{2\Delta t} \tag{48}$$

より

$$\frac{3}{2}\Delta \boldsymbol{Q}_j^n = -\Delta t \left(\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x}\right)_j^{n+1} + \frac{\boldsymbol{Q}_j^n - \boldsymbol{Q}_j^{n-1}}{2} \tag{49}$$

とすればよいことが分かる。

時間精度の向上3

スキームは

$$\left[I + \Delta t \frac{\partial}{\partial x} A\right]^n \Delta \boldsymbol{Q}_j^n = -\Delta t \left.\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x}\right|_j^n \tag{50}$$

から

$$\left[\frac{3}{2} I + \Delta t \frac{\partial}{\partial x} A\right]^n \Delta \boldsymbol{Q}_j^n = -\Delta t \left.\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x}\right|_j^n + \frac{\boldsymbol{Q}_j^n - \boldsymbol{Q}_j^{n-1}}{2} \tag{51}$$

へと変更される。この変更は比較的容易に行える。

時間精度の向上4

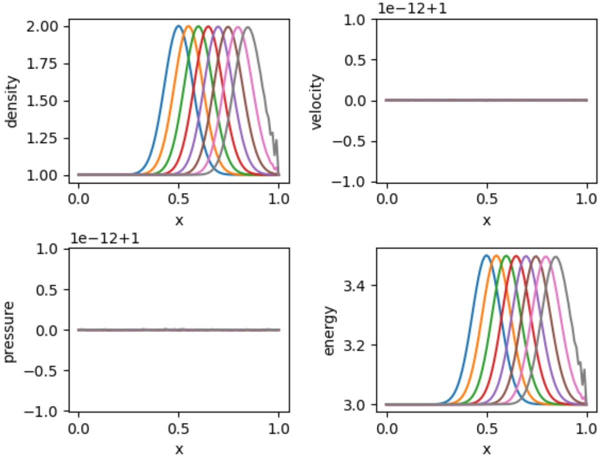

Figure: 時間二次精度 LU 分解

時間精度の向上 5

また、反復をもちいた時間発展も有用であり、特に近似が粗い場合に有効になる。
例えば

$$\left[I + \Delta t \frac{\partial}{\partial x} A\right]^{m-1} \Delta \boldsymbol{Q}_j^m = -(\boldsymbol{Q}_j^{m-1} - \boldsymbol{Q}_j^n) - \Delta t \left.\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x}\right|_j^{m-1} \tag{52}$$

$$\Delta \boldsymbol{Q}_j^m = \boldsymbol{Q}_j^m - \boldsymbol{Q}_j^{m-1} \tag{53}$$

という反復を考える。この時収束して $\Delta \boldsymbol{Q}_j^m{=}0$ となれば左辺は 0 だから $\boldsymbol{Q}_j^{n+1} = \boldsymbol{Q}_j^m$ とおけば

$$\boldsymbol{Q}_j^{n+1} = \boldsymbol{Q}_j^n - \Delta t \left.\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x}\right|_j^n \tag{54}$$

が成立する。

時間精度の向上 6

収束に時間がかかるため、厳密に収束せずともある程度の精度で反復を打ち切る事も多い。また、反復回数をあらかじめ設定しておいてもよい。

反復法は最後の形に左辺のオペレータが出てこないので収束させさえすれば左辺に依存せずに精度を出すことができる。
また、二次精度にする等も可能である。

多次元システム方程式1

ここまでやってきたのは一次のシステム方程式だったが、ここからはそれを多次元に拡張することを考える。
三次元と二次元では本質的な違いは少なく、無駄に複雑になるので三次元は避けて二次元でシステム方程式を考える。

多次元システム方程式2

二次元のオイラー方程式は

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial \rho u}{\partial x}+\frac{\partial \rho v}{\partial y}=0 \tag{55}$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t}+\frac{\partial (p+\rho u^2)}{\partial x}+\frac{\partial \rho uv}{\partial y}=0 \tag{56}$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t}+\frac{\partial \rho uv}{\partial x}+\frac{\partial (p+\rho v^2)}{\partial y}=0 \tag{57}$$

$$\frac{\partial e}{\partial t}+\frac{\partial (e+p)u}{\partial x}+\frac{\partial (e+p)v}{\partial y}=0 \tag{58}$$

と書ける。これを一次元と同じように下のように書くこととする。

$$\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial t}+\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x}+\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial y}=0 \tag{59}$$

多次元システム方程式3

$A = \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \boldsymbol{Q}}, B = \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{Q}}$ とするとやはり

$$\left[I + \Delta t \frac{\partial}{\partial x} A + \Delta t \frac{\partial}{\partial y} B \right]^n \Delta \boldsymbol{Q}_{j,k}^n = -\Delta t \left. \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x} \right|_{j,k}^n - \Delta t \left. \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial y} \right|_{j,k}^n (= \boldsymbol{G}_{j,k}^n) \tag{60}$$

と書ける。なお、添え字が j, k の二つになっていることに注意。これを素直に差分化すると複雑な行列反転になってしまうため近似を導入する。

AF 法 1

複雑な行列反転を回避するために左辺のオペレータを近似的に分解することを考える。
具体的に

$$\left[I + \Delta t \frac{\partial}{\partial x} A + \Delta t \frac{\partial}{\partial y} B\right]^n = \left[I + \Delta t \frac{\partial}{\partial x} A\right]^n \left[I + \Delta t \frac{\partial}{\partial y} B\right]^n \tag{61}$$

として一次元の際の操作を二回繰り返す形に変形する。
この方法を近似因数分解法 (AF 法) といい、Δt の二次精度になっている。分解した後の処理は上でさんざんやったので扱わない。
プログラムに使用する A,B,E,F や固有値等は銀本の p145 等に載っている。

AF 法 2

プログラムでの初期条件としては
$t = x + y$ を座標として $t = 1$ を中心としたガウシアンとした。また u=v=1 を初期値として与えた。
つまり、斜め方向に座標を取っている。
表示は y=一定の線上での値を表示した。

これらは以下の二次元問題で共通である。

AF 法 3

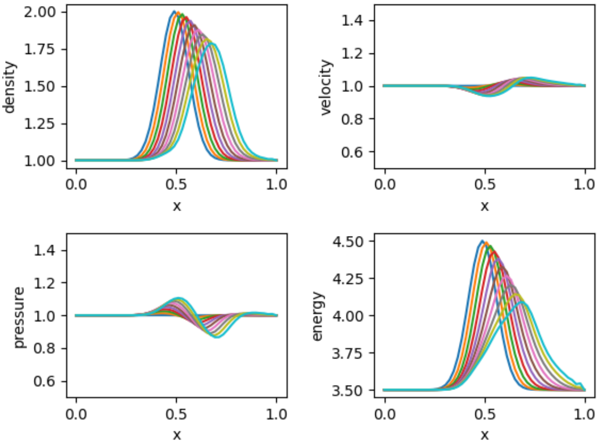

Figure: AF

二次元近似 LU 分解 1

一次元と同様に近似 LU 分解によっても解くことができる。つまり左辺のオペレータを

$$\left[I + \Delta t\frac{\partial}{\partial x}A + \Delta t\frac{\partial}{\partial y}B\right]^n =$$
$$\left[I + \Delta t\frac{\partial}{\partial x}A^+ + \Delta t\frac{\partial}{\partial y}B^+\right]^n\left[I + \Delta t\frac{\partial}{\partial x}A^- + \Delta t\frac{\partial}{\partial y}B^-\right]^n$$

とする。これは

二次元近似 LU 分解 2

$$
\begin{aligned}
&\left[I + \frac{\Delta t}{\Delta x} A^{+}_{j,k} + \frac{\Delta t}{\Delta y} B^{+}_{j,k}\right]^n \Delta \boldsymbol{Q}^{*}_{j,k} = \\
&\quad \boldsymbol{G}^n_{j,k} + \left[\frac{\Delta t}{\Delta x} A^{+}_{j-1,k}\right]^n \Delta \boldsymbol{Q}^{*}_{j-1,k} + \left[\frac{\Delta t}{\Delta y} B^{+}_{j,k-1}\right]^n \Delta \boldsymbol{Q}^{*}_{j,k-1} \\
&\left[I - \frac{\Delta t}{\Delta x} A^{-}_{j,k} - \frac{\Delta t}{\Delta y} B^{-}_{j,k}\right]^n \Delta \boldsymbol{Q}^{n}_{j,k} = \\
&\Delta \boldsymbol{Q}^{*}_{j,k} - \left[\frac{\Delta t}{\Delta x} A^{-}_{j+1,k}\right]^n \Delta \boldsymbol{Q}^{n}_{j+1,k} - \left[\frac{\Delta t}{\Delta y} B^{-}_{j,k+1}\right]^n \Delta \boldsymbol{Q}^{n}_{j,k+1}
\end{aligned}
$$

という二つのスイープとして計算すればよい。

二次元近似 LU 分解 3

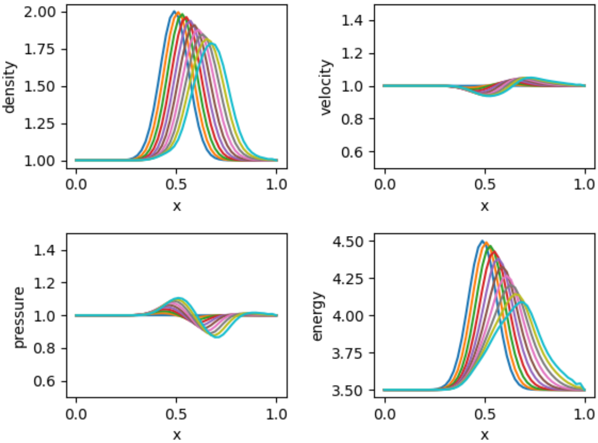

Figure: 2dLU

LU-SGS 法 1

一次元の際に最後に行ったものと同様に $A^{\pm}, B^{\pm}$ を

$$A^{\pm} = \frac{A \pm \sigma_x}{2}, B^{\pm} = \frac{B \pm \sigma_y}{2} \tag{62}$$

と大胆に近似する。
ここで σ は最大の固有値で $\sigma_x = |u| + c, \sigma_y = |v| + c$ である。
これと LDU 分解を組み合わせたものが LU-SGS 法である。

LU-SGS 法 2

具体的には以下のスイープである。

$$\text{第一スイープ}:\left[I+\frac{\Delta t}{\Delta x}(A^+_{j,k}-A^-_{j,k})+\frac{\Delta t}{\Delta y}(B^+_{j,k}-B^-_{j,k})\right]^n\Delta \boldsymbol{Q}^*_{j,k}=$$

$$\boldsymbol{G}^n_{j,k}+\frac{\Delta t}{\Delta x}A^+_{j-1,k}\boldsymbol{Q}^*_{j-1,k}+\frac{\Delta t}{\Delta y}B^+_{j,k-1}\boldsymbol{Q}^*_{j,k-1}$$

$$\text{第二スイープ}:\Delta \boldsymbol{Q}^{**}_j=$$

$$\left[I+\frac{\Delta t}{\Delta x}(A^+_{j,k}-A^-_{j,k})+\frac{\Delta t}{\Delta y}(B^+_{j,k}-B^-_{j,k})\right]^n\Delta \boldsymbol{Q}^*_{j,k}$$

LU-SGS 法 3

$$
\text{第三スイープ}:\left[I+\frac{\Delta t}{\Delta x}(A^{+}_{j,k}-A^{-}_{j,k})+\frac{\Delta t}{\Delta y}(B^{+}_{j,k}-B^{-}_{j,k})\right]^{n}\Delta \boldsymbol{Q}^{n}_{j}
$$
$$
=\Delta \boldsymbol{Q}^{**}_{j}-\frac{\Delta t}{\Delta x}A^{-}_{j+1,k}\boldsymbol{Q}^{n}_{j+1,k}-\frac{\Delta t}{\Delta y}B^{-}_{j,k+1}\boldsymbol{Q}^{n}_{j,k+1}
$$

となる。見ただけでめんどくさそうだが近似も大胆なので何とかなる。

LU-SGS 法 4

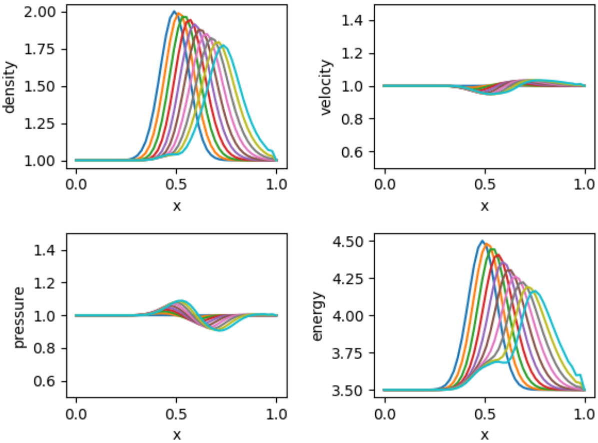

Figure: LUSGS

教科書の間違い箇所について 1

教科書の間違い箇所が多いので一応まとめました。
多分これ以外にもある。

(7.24) 無駄に R^{-1} がかかっている。

(7.26)A^+, A^- が一部逆

(7.29) 右辺第二項の Δt はいらない

教科書の間違い箇所について 2

p197 一番上の行 $B = \frac{\partial E}{\partial Q}$ ではなく $B = \frac{\partial F}{\partial Q}$ である。

(7.33) 意味不明

(7.37a) 左辺 B を割るのは Δy, 添え字の k が抜けてる。

(7.37b)A^{+}, B^{+} ではなく A^{-}, B^{-} 左辺の足し算は引き算

(7.40.c)+-逆