# 数値流体ゼミ第 7 回

忝村顕史

6/2

# 今日のお品書き

1. 高解像度風上法
   - (6) 一次精度 FDS 法
   - (7) Harten-Yee の non-MUSCL 型 TVD 法
   - (8) van Leer の MUSCL 型 TVD 法
   - (9) FVS 法の改良
2. 多次元への拡張

# FDS 法

境界層内の数値粘性が小さくなっているので，ナヴィエ・ストークス方程式の計算によく用いられる．数値流束を $Q_j$ の時間発展を記述する作業として，FVS と同じ式から始める．

$$Q_j^{n+1} = Q_j^n - \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)(\tilde{E}_{j+1/2}^n - \tilde{E}_{j-1/2}^n)$$

数値流束を以下のように評価する

$$\tilde{E}_{j+1/2}^n = \frac{1}{2}[E_{j+1} + E_j - |A|_{j+1/2}(Q_{j+1} - Q_j)]$$

なお

$$|A|_{j+1/2} = R_{j+1/2}|\Lambda_{j+1/2}|R_{j+1/2}^{-1}$$

# FDS 法

オイラー方程式

$$Q_t + E_x = 0$$

これの保存系を外せば

$$Q_t + AQ_x = 0$$

ここに $A$ を代入すれば

$$R^{-1}Q_t + R^{-1}(R\Lambda R^{-1})Q_x = R^{-1}Q_t + \Lambda R^{-1}Q_x = 0$$

ここで $R^1 dQ$ なる変化量を考えると，各成分が 3 つのスカラー方程式における各変化量に対応.

# FDS 法

ここからは時空間の非線形性を一旦無視して話を進める．局所線形化を許容すれば

$$(R^{-1}Q)_t + \Lambda(R^{-1}Q)_x = 0$$

未知量を $R^{-1}Q$，固有値を $\Lambda$ とする式のスカラー方程式に一次精度風上法を適用する．数値流束は

$$(\Lambda R^{-1}Q)^n_{j+1/2} = \frac{1}{2}[(\Lambda R^{-1}Q)^n_{j+1} + (\Lambda R^{-1}Q)^n_j - |\Lambda|((R^{-1}Q)^n_{j+1} - (R^{-1}Q)^n_j)]$$

とかける．左から右固有マトリックスをかけると

$$(R\Lambda R^{-1}Q)^n_{j+1/2} = \frac{1}{2}[(R\Lambda R^{-1}Q)^n_{j+1} + (R\Lambda R^{-1}Q)^n_j - R_{j+1/2}|\Lambda|((R^{-1}Q)^n_{j+1} - (R^{-1}Q)^n_j)]$$

となるので，この結果を利用すれば

$$E^n_{j+1/2} = \frac{1}{2}[E^n_{j+1} + E^n_j - R_{j+1/2}|\Lambda|((R^{-1}Q)^n_{j+1} - (R^{-1}Q)^n_j)]$$

が得られる．

# Roe 平均

FDS 法を用いて演算を組み立てることはできたが，$j+1/2$ での値はどうやって得る？
→Burgers 方程式ではそのまま平均を取ればよかった
今回はそのまま平均を取れば良いわけではない →Roe 平均を利用する.

# Roe 平均

次の条件 (Property U) を満たすよう Roe さんが定義した平均を Roe 平均という.

(i) $E(Q_R) - E(Q_L) = A(Q_R, Q_L)(Q_R - Q_L) = A_{ave}(Q_R - Q_L)$

(ii) $A(Q_R, Q_L$ は実固有値と，線型独立な固有ベクトルを持つ

(iii) $A(Q, Q) = A(Q)$

Roe 平均は $Q_L$ と $Q_R$ が衝撃波や接触面の両側にあれば，計算結果が厳密解を与える.

# Roe 平均

$\omega = \sqrt{\rho}(1, u, H)^T$ という変数を定義することでその平均が Property U を満たすように分解することができる

$$
\begin{cases}
\rho_{ave} & = \sqrt{\rho_L \rho_R} \\
u_{ave} & = \dfrac{\sqrt{\rho_L} \cdot u_L + \sqrt{\rho_R} \cdot u_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \\
H_{ave} & = \dfrac{\sqrt{\rho_L} \cdot H_L + \sqrt{\rho_R} \cdot H_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}
\end{cases}
$$

ここで，$H$ は単位質量あたりの総エンタルピーで

$$
c_{ave}^2 = (\gamma - 1)\left(H_{ave} - \frac{1}{2}u_{ave}^2\right)
$$

# 高次精度 FDS 法その 1

システム方程式に対するこの手法は以下のようにかける.

$$\tilde{E}_{j+1/2} = \frac{1}{2}[(E_{j+1} + E_j) + R_{j+1/2}\Phi_{j+1/2}]$$

なお，$\Phi$ は，三つの特性波に対応する上添字を $l$ として，

$$\phi^l_{j+1/2} = \sigma(c^l_{j+1/2})(g^l_j + g^l_{j+1}) - \psi(c^l_{j+1/2} + \gamma^l_{j+1/2})\alpha^l_{j+1/2}$$

$$\sigma(z) = \frac{1}{2}\left[\psi(z) - \frac{\Delta t}{\Delta x}z^2\right]$$

$$g^l_j = \mathrm{min\ mod}(\alpha^l_{j+1/2}, \alpha^l_{j-1/2})$$

$$\gamma^l_{j+1/2} = \begin{cases} \dfrac{\sigma^l(c_{j+1/2})\cdot(g_{j+1} - g_j)}{\alpha^l_{j+1/2}} & (\alpha^l_{j+1/2} \neq 0) \\ 0 & (\alpha^l_{j+1/2} = 0) \end{cases}$$

# 高次精度 FDS 法その 2

この手法は，流束ヤコビアンに関わるマトリックスの計算などが追加で必要だが，それ以外はスカラー方程式に対する MUSCL 型 TVD 法と同じ

$$Q_j^{n+1} = Q_j^n - \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)(\tilde{E}_{j+1/2}^n - \tilde{E}_{j-1/2}^n)$$

$$\tilde{E}_{j+1/2}^n = \frac{1}{2}[E_{j+1/2,R} + E_{j+1/2,L} - |A|_{ave}(Q_{j+1/2,Q} - Q_{j+1/2,L})]$$

# AUSM 法とその改良版

非線形の原因となる圧力項を除いて FVS による風上法を構築して計算する．まず，流束を速度に依存する項と圧力項に分離する．

$$F_{1/2} = u \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ p \\ 0 \end{pmatrix} = F^c_{1/2} + \begin{pmatrix} 0 \\ p \\ 0 \end{pmatrix}$$

例として M-Splitting AUSM 法を考える．質量流束項は次のように評価する．

$$F^c_{1/2} = \frac{1}{2} M_{1/2}[(\rho c \Phi)_L + (\rho c \Phi)_R] - \frac{1}{2}|M_{1/2}|[(\rho c \Phi)_R - (\rho c \Phi)_L]$$

なお $\Phi = (1, u, h)^T$ であり，

$$M_{1/2} = M_L^+ + M_R^- = \frac{u_L^+}{c_L} + \frac{u_R^+}{c_R}$$

# AUSM 法とその改良版

$M_L^+, M_R^-$ は，van Leer の FVS 法に従って

$$M^{\pm} = \begin{cases} \pm\dfrac{1}{4}(M \pm 1)^2 & (M \leq 0) \\ \dfrac{1}{2}(M \pm |M|)^2 & (otherwise) \end{cases}$$

と評価する．圧力の評価は $p_{1/2} = p_L^+ + p_R^-$ として，

$$p^{\pm} = \begin{cases} \pm\dfrac{p}{4}(M \pm 1)^2(2mM) & (|M| \leq 0) \\ \dfrac{p}{2}(M \pm |M|)^2/M & (otherwise) \end{cases}$$

となる．$M$ が 1 から離れていくとオリジナルの FVS 法に帰着する．

# 二次元の圧縮性オイラー方程式

二次元の圧縮性オイラー方程式

$$Q_t + E_x + F_y = 0$$

を考える．$p = (\gamma - 1)\left(e - \frac{1}{2}(\rho u^2 + \rho v^2)\right)$ として

$$Q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} \rho u \\ p + \rho u^2 \\ \rho u v \\ (e+p)u \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v u \\ p + \rho v^2 \\ (e+p)v \end{pmatrix}$$

y 方向の微分が加わり，y 方向の運動量保存が増え，方程式が 4 つになった．固有ベクトルは

$x$ 方向　$u$，$u$，$u + c$，$u - c$
$y$ 方向　$v$，$v$，$v + c$，$v - c$

## 二次元の圧縮性オイラー方程式

TVD 法を意識して数値流束で方程式を表すと,

$$Q_{j,k}^{n+1} = Q_{j,k}^{n} - \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)\left(\tilde{E}_{j+1/2,k}^{n} - \tilde{E}_{j-1/2,k}^{n}\right) - \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)\left(\tilde{F}_{j,k+1/2}^{n} - \tilde{F}_{j,k-1/2}^{n}\right)$$

最初に出てきた式に y 方向の成分が増えただけなことがわかる.
z 成分が増えても同じように考えられる.