第 3 章　スカラー移流方程式における時間積分法

染矢真好

2021 年 5 月 11 日

移流方程式

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

を離散化する際，陽関数的なスキームにするか陰関数的なスキームにするか，それらはどういうコンセプトなのか，を知るのが今日のテーマである。

3.1　時間陽解法 vs 時間陰解法

移流方程式を離散化したものを

$$\begin{aligned} q_j^{n+1} &= q_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(\tilde{f}_{j+1/2}^n - \tilde{f}_{j-1/2}^n) \\ &= q_j^n - \Delta t R_j(q^n) \end{aligned}$$

と書こう（以下，$R_j(q^n)$ は時間微分項をまとめたものとする）。$R_j(q^n)$ の中には時刻 n での値しか入っていない。つまり

$$(\text{時刻}\, n+1\, \text{での値}) = (\text{時刻}\, n\, \text{での値})$$

これを**時間陽解法**という。一方，

$$q_j^{n+1} = q_j^n - \Delta t R_j(q^n, q^{n+1})$$

という R_j の中に時刻 $n+1$ での値が入るようなスキームもあるだろう。これを**時間陰解法**という。

3.2　主な時間陽解法

時間陽解法には $\nu \leqq 1$ という制約がある。

2 段階時間陽解法

$$\begin{cases} q_j^* = q_j^n - \Delta t R_j(q^n) \\ q_j^{n+1} = q_j^n - \Delta t \dfrac{R_j(q^n) + R_j(q^*)}{2} \end{cases}$$

（直感的解釈）

j（x_j）が固定されているので，実質 t の ODE である。まず 1 段階法で時刻 $n+1$ での値 q_j^* を求め，q_j^n から推定した傾きと q_j^* から推定した傾きの平均で次の点を推定する。ホイン法に似ている。

2 段階ルンゲクッタ法

$$
\begin{cases}
q_j^{(1)} = q_j^n - \dfrac{1}{2}\Delta t R_j(q^n) \\
q_j^{n+1} = q_j^n - \Delta t R_j(q^{(1)})
\end{cases}
$$

4 段階ルンゲクッタ法

$$
\begin{cases}
q_j^{(1)} = q_j^n \\
q_j^{(2)} = q_j^n - \dfrac{1}{2}\Delta t R_j(q^{(1)}) \\
q_j^{(3)} = q_j^n - \dfrac{1}{2}\Delta t R_j(q^{(2)}) \\
q_j^{(4)} = q_j^n - \Delta t R_j(q^{(3)}) \\
q_j^{n+1} = q_j^n - \dfrac{\Delta t}{6}\left[R_j(q^{(1)}) + 2R_j(q^{(2)}) + 2R_j(q^{(3)}) + R_j(q^{(4)})\right]
\end{cases}
$$

1 段階 LW 法

ここでは $f = cq$ とする。

$$
q_j^{n+1} = q_j^n - \frac{\nu}{2}(q_{j+1}^n - q_{j-1}^n) + \frac{\nu^2}{2}(q_{j+1}^n - 2q_j^n + q_{j-1}^n)
$$

2 段階 LW 法

$$
\begin{cases}
q_{j+1/2}^{n+1/2} = \dfrac{q_{j+1}^n + q_j^n}{2} - \dfrac{\nu}{2}(q_{j+1}^n - q_j^n) \\
q_j^{n+1} = q_j^n - \nu(q_{j+1/2}^{n+1/2} - q_{j-1/2}^{n+1/2})
\end{cases}
$$

（直感的解釈？）
まず Lax 法的に[*1] 時刻 $n + 1/2$，位置 $j + 1/2$ における q を推定する。求めた $q_{j+1/2}^{n+1/2}$ などに c をかけた $cq_{j+1/2}^{n+1/2}$ などを，時刻 n における数値流束 $\tilde{f}_{j+1/2}^n$ などとみなす。

（ここに図を入れようかな？）

MacCormack 法

$$
\begin{cases}
\overline{q_j} = q_j^n - \nu(q_{j+1}^n - q_j^n) \\
q_j^{n+1} = \dfrac{q_j^n + \overline{q_j}}{2} - \dfrac{\nu}{2}(\overline{q_j} - \overline{q_{j-1}})
\end{cases}
$$

（直感的解釈？）
今度は逆で，まず一次風下で q_j^{n+1} を推定し，それを q_j^n を Lax 法的に組み合わせて q_j^{n+1} を推定する。

[*1] Lax 法のスキームは $q_j^{n+1} = \dfrac{q_{j+1}^n + q_{j-1}^n}{2} - \dfrac{\nu}{2}(q_{j+1}^n - q_{j-1}^n)$ であった。添字のずれ方が 1 ではなく 1/2 になっていると思えばよい。

3.3　時間陰解法（めんどう）

Crank-Nicolson 法

　移流方程式

$$\frac{\partial q}{\partial t} + c\frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

を考える。$\dfrac{\partial q}{\partial t} \simeq \dfrac{q_j^{n+1} - q_j^n}{\Delta t}$ は前と同じ。$\dfrac{\partial q}{\partial x}$ を中心差分するが，通常の

$$\frac{\partial q}{\partial x} \simeq \frac{q_{j+1}^n - q_{j-1}^n}{2\Delta x}$$

にひと手間加えて

$$q_{j+1}^n \to \frac{q_{j+1}^{n+1} + q_{j+1}^n}{2}, \quad q_{j-1}^n \to \frac{q_{j-1}^{n+1} + q_{j-1}^n}{2}$$

つまり次の時刻での q との平均で代用する。

$$c\frac{\partial q}{\partial x} \simeq c\frac{\dfrac{q_{j+1}^{n+1} + q_{j+1}^n}{2} - \dfrac{q_{j-1}^{n+1} + q_{j-1}^n}{2}}{2\Delta x} = \frac{c}{2}\left[\frac{q_{j+1}^{n+1} - q_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} + \frac{q_{j+1}^n - q_{j-1}^n}{2\Delta x}\right]$$

元の移流方程式（の Δt 倍）は

$$q_j^{n+1} - q_j^n + \frac{\nu}{4}\left[q_{j+1}^{n+1} - q_{j-1}^{n+1} + q_{j+1}^n - q_{j-1}^n\right] = 0$$

左辺に $n+1$ の項，右辺に n の項を持ってくる。

$$-\frac{\nu}{4}q_{j-1}^{n+1} + q_j^{n+1} + \frac{\nu}{4}q_{j+1}^{n+1} = \frac{\nu}{4}q_{j-1}^n + q_j^n - \frac{\nu}{4}q_{j+1}^n$$

これだと様子がわかりにくいので，$j = 1, 2, 3, \cdots, j_{max} - 1, j_{max}$ とした式を並べてみる（ただし $q_0 = q_{j_{max}+1} = 0$ と約束する)。

$$\begin{gathered}
0 + q_1^{n+1} + \frac{\nu}{4}q_2^{n+1} = 0 + q_1^n - \frac{\nu}{4}q_2^n \\
-\frac{\nu}{4}q_1^{n+1} + q_2^{n+1} + \frac{\nu}{4}q_3^{n+1} = \frac{\nu}{4}q_1^n + q_2^n - \frac{\nu}{4}q_3^n \\
\vdots \\
-\frac{\nu}{4}q_{j_{max}-2}^{n+1} + q_{j_{max}-1}^{n+1} + \frac{\nu}{4}q_{j_{max}}^{n+1} = \frac{\nu}{4}q_{j_{max}-2}^n + q_{j_{max}-1}^n - \frac{\nu}{4}q_{j_{max}}^n \\
-\frac{\nu}{4}q_{j_{max}-1}^{n+1} + q_{j_{max}}^{n+1} + 0 = \frac{\nu}{4}q_{j_{max}-1}^n + q_{j_{max}}^n - 0
\end{gathered}$$

行列で書けば

$$\begin{pmatrix}
1 & \nu/4 & & & & \\
-\nu/4 & 1 & \nu/4 & & & \\
 & -\nu/4 & 1 & \nu/4 & & \\
 & & & & \ddots & \\
 & & & & -\nu/4 & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} q_1^{n+1} \\ q_2^{n+1} \\ q_3^{n+1} \\ \vdots \\ q_{j_{max}}^{n+1} \end{pmatrix}
= \begin{pmatrix} \\ \\ R_j(q^n)\text{たち} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

一番左の行列を B，また

$$\begin{pmatrix} q_1^n \\ q_2^n \\ q_3^n \\ \vdots \\ q_{j_{max}}^n \end{pmatrix} \equiv \overrightarrow{q^n}$$

などとおけば

$$\mathsf{B}\overrightarrow{q^{n+1}} = \overrightarrow{R}$$

もしこれを $\overrightarrow{q^{n+1}} = \cdots$ の形にすることができれば，適切な初期条件のもとで（この場合はベクトル $\overrightarrow{q^0}$ を与えることで）各時刻での q_j が求まる。

連立 1 次方程式の反復解法について

連立 1 次方程式 A$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ を解く方法として一番最初に思いつくのが，A の逆行列を求める方法であろう。クラメルの公式で逆行列を求めようとすると計算量が大変なことになり（だいたい $(n^2-1)n!$），実用的ではない。このため掃き出し法に相当する「ガウスの消去法」あるいは LU 分解を使うのが一般的である（あとで出てくる)。しかし，今の問題のように疎行列（0 が多い行列）の場合，0 になるとわかっている計算をわざわざやることになり無駄が多い。そこで，疎行列の場合には，連立 1 次方程式を真正面から解くのではなく，適当な初期値ベクトル $\overrightarrow{x_0}$ から初めて解に収束させる方法（反復解法）を使うことが多い。

反復解法にはヤコビ法，ガウス・ザイデル法，SOR 法などがあり（これらがどんな方法であるかはこれ以上踏み込まない。もしかしたら計算機演習でやるかもしれない)，これらは

$$|B_{ii}| > \sum_{j=1}^{n} |B_{ij}| \quad (1 \leqq i \leqq n)$$

を満たす行列（狭義対角優位行列）に対し収束する。今の場合は $1 > \dfrac{|\nu|}{2}$ と取ればいいのでこれらの方法は使える。

【Crank-Nicolson 法の拡張：Beam-Warming 法】

$$\frac{q_j^{n+1} - q_j^n}{\Delta t} + c\left[\lambda \frac{q_{j+1}^{n+1} - q_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} + (1-\lambda)\frac{q_{j+1}^n - q_{j-1}^n}{2\Delta x}\right] = 0$$

Crank-Nicolson 法では q_{j+1}^n などを単純に平均（$\lambda = 1/2$）していたが，それを一般化したもの。$\lambda = 0$ で完全な時間陽解法（オイラー陽解法)，$\lambda = 1$ で完全な時間陰解法（オイラー陰解法）となる。

【デルタ形式】

時間方向の差 $\Delta q_j^n = q_j^{n+1} - q_j^n$ を変数に取る方法。この場合

$$-\frac{\nu}{4}q_{j-1}^{n+1} + q_j^{n+1} + \frac{\nu}{4}q_{j+1}^{n+1} = \frac{\nu}{4}q_{j-1}^n + q_j^n - \frac{\nu}{4}q_{j+1}^n$$

は

$$-\frac{\nu}{4}(\Delta q_{j-1}^n + q_{j-1}^n) + (\Delta q_j^n + q_j^n) + \frac{\nu}{4}(\Delta q_{j+1}^n + q_{j+1}^n) = \frac{\nu}{4}q_{j-1}^n + q_j^n - \frac{\nu}{4}q_{j+1}^n$$

$$-\frac{\nu}{4}\Delta q_{j-1}^n + \Delta q_j^n + \frac{\nu}{4}\Delta q_{j+1}^n = -\frac{\nu}{2}(q_{j+1}^n - q_{j-1}^n) \tag{3.16}$$

この方法で Δq_j^n が求まったら，$q_j^{n+1} = q_j^n + \Delta q_j^n$ により順次 $\{q_j^n\}$ が求まる。

なお時間定常問題では Δq_j^n は恒等的に 0 となるから，(3.16) の右辺（residual）は 0 にならないとおかしい。これを逆手に取り，residual が 0 になるか見ることで収束判定の代わりとすることができる。

時間陰解法と風上法（$c > 0$）

$f = cq$，$c > 0$ とし，$\lambda = 1$（オイラー陰解法）の風上法を考える。

$$\frac{q_j^{n+1} - q_j^n}{\Delta t} + c\frac{q_j^{n+1} - q_{j-1}^{n+1}}{\Delta x} = 0$$

いくつか余計な項を加える。

$$-c\frac{q_{j-1}^{n+1} - q_{j-1}^n}{\Delta x} + \frac{q_j^{n+1} - q_j^n}{\Delta t} + c\frac{q_j^{n+1} - q_j^n}{\Delta x} = -c\frac{q_j^n - q_{j-1}^n}{\Delta x}$$

Δt をかけて

$$-\nu\Delta q_{j-1}^n + (1+\nu)\Delta q_j^n = -\nu(q_j^n - q_{j-1}^n)$$

行列で書けば次のようになる。

$$\begin{pmatrix} 1+\nu & & & & \\ -\nu & 1+\nu & & & \\ & -\nu & 1+\nu & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta q_1^n \\ \Delta q_2^n \\ \Delta q_3^n \\ \vdots \\ \Delta q_{j_{max}}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ R_j(q^n)\text{たち} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

やはり狭義対角優位行列なので反復法が使える。

c の符号が不明な場合

$$f = f^+ + f^- = \frac{f + |f|}{2} + \frac{f - |f|}{2}$$

と分ける。これに対応して輸送速度も

$$c = c^+ + c^- = \frac{c + |c|}{2} + \frac{c - |c|}{2}$$

とする。移流方程式 $\dfrac{\partial q}{\partial t} + \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial q}{\partial t} + \dfrac{\partial f^+}{\partial x} + \dfrac{\partial f^-}{\partial x} = 0$ は

$$\frac{\Delta q_j^n}{\Delta t} + \left[\frac{f_j^+ - f_{j-1}^+}{\Delta x} + \frac{f_{j+1}^- - f_j^-}{\Delta x}\right]^{n+1} = 0$$

よって

$$\begin{aligned} \Delta q_j^n &= -\Delta t\left[\frac{c_j^+ q_j - c_{j-1}^+ q_{j-1}}{\Delta x} + \frac{c_{j+1}^- q_{j+1} - c_j^- q_j}{\Delta x}\right]^{n+1} \\ &= -\frac{\Delta t}{\Delta x}\left[\frac{c+|c|}{2}q_j - c^+ q_{j-1} + c^- q_{j+1} - \frac{c-|c|}{2}q_j\right]^{n+1} \\ &= -\frac{\Delta t}{\Delta x}\left[|c|q_j^{n+1} - c^+ q_{j-1}^{n+1} + c^- q_{j+1}^{n+1}\right] \\ &= -\frac{\Delta t}{\Delta x}\left[|c|(\Delta q_j^n + q_j^n) - c^+(\Delta q_{j-1}^n + q_{j-1}^n) + c^-(\Delta q_{j+1}^n + q_{j+1}^n)\right] \end{aligned} \tag{3.20}$$

q_j^n などを残して残りは左辺に持っていくと

$$-\frac{\Delta t}{\Delta x}c^+\Delta q_{j-1}^n + \left(1+\frac{\Delta t}{\Delta x}|c|\right)\Delta q_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta x}c^-\Delta q_{j+1}^n = -\Delta t \underbrace{\frac{|c|q_j^n - c^+q_{j-1}^n + c^-q_{j+1}^n}{\Delta x}}_{R^n(q_j)}$$

非線形方程式

再び $\dfrac{\partial q}{\partial t} + \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$ を考える。

$$\frac{q_j^{n+1} - q_j^n}{\Delta t} + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_j^{n+1} = 0$$

f^{n+1} を Taylor 展開して

$$\Delta q_j^n + \Delta t \frac{\partial}{\partial x}\left(f_j^n + \left.\frac{\partial f}{\partial q}\right|_j^n \Delta q^n + O(\Delta q^2)\right) = 0$$

2 次以上を無視すると

$$\left[1 + \Delta t \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial q}\right]_j^n \Delta q_j^n = -\Delta t \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_j^n$$

左辺の $\dfrac{\partial}{\partial x}$ は Δq_j^n まで作用することに注意[*2]。

もし特性速度が一定ならば $\dfrac{\partial f}{\partial q} = \dfrac{\partial(f^+ + f^-)}{\partial q} = c^+ + c^-$ であるから，

$$\left[1 + \Delta t \frac{\partial}{\partial x}c^+ + \Delta t \frac{\partial}{\partial x}c^-\right]_j^n \Delta q_j^n = -\Delta t \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_j^n = -\Delta t R_j(q^n) \tag{3.26}$$

となる[*3]。

近似 LU 分解

$(\Delta t)^2$ を無視する近似で，(3.26) は

$$\left(1 + \Delta t \frac{\partial}{\partial x}c^+\right)_j^n \left(1 + \Delta t \frac{\partial}{\partial x}c^-\right)_j^n \Delta q_j^n = -\Delta t R_j(q^n) \tag{3.27}$$

と書ける（ただしスカラー方程式を考える限り，c の正負に応じて c^+，c^- のどちらかは 0 なので，これは厳密に成立する)。

さて，このままでは偏微分が残っているので，この部分も差分化しなければならない。そのためには，w を一般の関数（列）として

$$\begin{aligned} w_j - w_{j-1} &\equiv \delta^b w \qquad \text{(backward)} \\ w_{j+1} - w_j &\equiv \delta^f w \qquad \text{(forward)} \end{aligned}$$

[*2] 誤解を生まないように

$$\Delta q_j^n + \Delta t \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial q}\Delta q_j^n\right) = -\Delta t \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_j^n$$

と書けばいいのにとも思うが，あとで演算子を分解することを考えると最初の表記の方がいい。この辺りはなんともいえない。

[*3] テキストが $\dfrac{\partial c^+}{\partial x}$ とかいう書き方をするから，誤解を生むのである。上のように $\dfrac{\partial}{\partial x}c^+$ と書いておけば，まだ，$\dfrac{\partial}{\partial x}$ が Δq_j^n まで作用するというニュアンスが伝わると思うのだが。

で定義される「差分演算子」を使うと便利である。(3.27) は

$$\left(1+\frac{\Delta t}{\Delta x}\delta^b c^+\right)^n \underline{\left(1+\frac{\Delta t}{\Delta x}\delta^f c^-\right)^n \Delta q_j^n} = -\Delta t R_j(q^n)$$

（やはりこれらの差分演算子もはるか Δq_j^n にまで作用する。）下線部を 1 つのかたまりだと思って Δq_j^* とおくと，次の 2 つの式に分けることができる。

$$\left(1+\frac{\Delta t}{\Delta x}\delta^b c^+\right)^n \Delta q_j^* = -\Delta t R_j(q^n)$$
$$\left(1+\frac{\Delta t}{\Delta x}\delta^f c^-\right)^n \Delta q_j^n = \Delta q_j^*$$

今は風上差分だから

$$\delta^b c^+ \Delta q_j^* = (c^+\Delta q^*)_j - (c^+\Delta q^*)_{j-1}, \quad \delta^f c^- \Delta q_j^n = (c^-\Delta q^n)_{j+1} - (c^-\Delta q^n)_j$$

に注意すると，

$$\left(1+\frac{\Delta t}{\Delta x}c_j^+\right)^n \Delta q_j^* = -\Delta t R_j(q^n) + \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}c_{j-1}^+\right)^n \Delta q_{j-1}^* \tag{3.30a}$$

$$\left(1-\frac{\Delta t}{\Delta x}c_j^-\right)^n \Delta q_j^n = \Delta q_j^* - \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}c_{j+1}^-\right)^n \Delta q_{j+1}^n \tag{3.30b}$$

となる。手順としては，(3.30a) で Δq_j^* を求め（$j = 1, 2, 3, \ldots, j_{max}$），(3.30b) で Δq_j^n を求める（$j = j_{max}, j_{max}-1, \ldots, 2, 1$）。

この方法は**近似 LU 分解**と呼ばれる。

近似 LU 分解って何さ？

連立 1 次方程式のところでも触れたが，ここで LU 分解について簡単に説明しておく。

正方行列 A を LU 分解するとは，下三角行列 L と上三角行列 U を用いて

$$\mathsf{A} = \mathsf{LU}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \ldots \\ & & & u_{nn} \end{pmatrix}$$

と書くことである。これにより，連立 1 次方程式

$$\mathsf{A}\vec{x} = \mathsf{LU}\vec{x} = \vec{b}$$

$$\begin{pmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \ldots \\ & & & u_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

は

$$\mathsf{U}\vec{x} = \vec{y}, \quad \mathsf{L}\vec{y} = \vec{b},$$

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \ldots \\ & & & u_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

という簡単な形に帰着する。(3.30) はこの形になっているというので，「近似 LU 分解」と呼ぶのだと思っている。

近似 LDU 分解

(3.26) 再掲

$$\left[1+\Delta t\frac{\partial}{\partial x}c^{+}+\Delta t\frac{\partial}{\partial x}c^{-}\right]_j^n \Delta q_j^n = -\Delta t R_j(q^n) \tag{3.26}$$

左辺の () 内の演算子を次で近似する（テキストではところどころ分母の Δx が抜けているように思われる）。

$$\left[1+\Delta t\frac{\delta^b}{\Delta x}c^{+}+\Delta t\frac{\delta^f}{\Delta x}c^{-}\right]_j^n \simeq \left(1-\frac{\Delta t}{\Delta x}c_j^{-}+\frac{\Delta t}{\Delta x}\delta^b c^{+}\right)\left(1+\frac{\Delta t}{\Delta x}|c|\right)^{-1}\left(1+\frac{\Delta t}{\Delta x}c_j^{+}+\frac{\Delta t}{\Delta x}\delta^f c^{-}\right)$$

これが近似として正しいことは脚注に示した[*4] 。

この場合 (3.26) は次のようになる。

$$\left(1-\frac{\Delta t}{\Delta x}c_j^{-}+\frac{\Delta t}{\Delta x}\delta^b c^{+}\right)\underline{\left(1+\frac{\Delta t}{\Delta x}|c|\right)^{-1}\left(1+\frac{\Delta t}{\Delta x}c_j^{+}+\frac{\Delta t}{\Delta x}\delta^f c^{-}\right)\Delta q_j^n} = -\Delta t R_j(q^n)$$

下線部を Δq_j^* とおくとこの式は

$$\left(1-\frac{\Delta t}{\Delta x}c_j^{-}+\frac{\Delta t}{\Delta x}\delta^b c^{+}\right)\Delta q_j^* = -\Delta t R_j(q^n)$$

$$\left(1-\frac{\Delta t}{\Delta x}c_j^{-}\right)\Delta q_j^* + \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[(c^{+}\Delta q^*)_j-(c^{+}\Delta q^*)_{j-1}\right] = -\Delta t R_j(q^n)$$

$c^{+}-c^{-}=|c|$ であるから，

$$\left(1+\frac{\Delta t}{\Delta x}|c|_j\right)\Delta q_j^* = -\Delta t R_j(q^n)+\frac{\Delta t}{\Delta x}c_{j-1}^{+}\Delta q_{j-1}^* \tag{3.32a}$$

次に Δq_j^* の定義から

$$\left(1+\frac{\Delta t}{\Delta x}|c|_j\right)^{-1}\underline{\left(1+\frac{\Delta t}{\Delta x}c_j^{+}+\frac{\Delta t}{\Delta x}\delta^f c^{-}\right)\Delta q_j^n} = \Delta q_j^*$$

この下線部を Δq_j^{**} とおくと（分母にあるものを右辺に持ってきて）

$$\Delta q_j^{**} = \left(1+\frac{\Delta t}{\Delta x}|c|_j\right)\Delta q_j^* \tag{3.32b}$$

であり，Δq_j^{**} の定義の方からは

$$\left(1+\frac{\Delta t}{\Delta x}c_j^{+}+\frac{\Delta t}{\Delta x}\delta^f c_j^{-}\right)\Delta q_j^n = \Delta q_j^{**}$$

$$\left(1+\frac{\Delta t}{\Delta x}c_j^{+}\right)\Delta q_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[(c^{-}\Delta q^n)_{j+1}-(c^{-}\Delta q^n)_j\right] = \Delta q_j^{**}$$

$c^{+}-c^{-}=|c|$ であるから，

$$\left(1+\frac{\Delta t}{\Delta x}|c|_j\right)\Delta q_j^n = \Delta q_j^{**}-\frac{\Delta t}{\Delta x}c_{j+1}^{-}\Delta q_{j+1}^n \tag{3.32c}$$

[*4] もし c^{+} が値を持つなら c^{-} は 0 であり（このとき $c^{+}=|c|$），この近似式は

$$\frac{\left(1+\frac{\Delta t}{\Delta x}\delta^b c^{+}\right)\left(1+\frac{\Delta t}{\Delta x}c_j^{+}\right)}{1+\frac{\Delta t}{\Delta x}|c|} = 1+\frac{\Delta t}{\Delta x}\delta^b c^{+}$$

となる。逆の場合も同様。

これで必要な式が出揃った。改めて書いておくと，

$$\left(1+\frac{\Delta t}{\Delta x}|c|_j\right)\Delta q_j^* = -\Delta t R_j(q^n) + \frac{\Delta t}{\Delta x}c_{j-1}^+\Delta q_{j-1}^* \tag{3.32a}$$

$$\Delta q_j^{**} = \left(1+\frac{\Delta t}{\Delta x}|c|_j\right)\Delta q_j^* \tag{3.32b}$$

$$\left(1+\frac{\Delta t}{\Delta x}|c|_j\right)\Delta q_j^n = \Delta q_j^{**} - \frac{\Delta t}{\Delta x}c_{j+1}^-\Delta q_{j+1}^n \tag{3.32c}$$