第 5 章　非粘性圧縮性流体

染矢真好

2021 年 6 月 13 日

今回[*1] は，非粘性の圧縮性流体の支配方程式（特に 1 次元）を考える。

なお，粘性を考慮した場合はオイラー方程式ではなくナヴィエ・ストークス方程式になるが，粘性の影響は物体付近で効いてくるので，大域的には非粘性のオイラー方程式で通用する（ほんとか？)。

5.1　オイラー方程式

以下，3 次元でベクトル表記する必要があるときは $\boldsymbol{v} = (u, v, w)$ である。

質量保存則（連続の式）

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \boldsymbol{v}) = 0$$

特に 1 次元では

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0$$

運動量保存則（オイラーの運動方程式）

$$\rho \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \rho(\boldsymbol{v} \cdot \mathrm{grad})\boldsymbol{v} = -\,\mathrm{grad}\, p$$

これを保存系に書き換える。しばらく，つまらない添字計算が続く。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} &= v_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} \\
&= -v_i \frac{\partial(\rho v_j)}{\partial x_j} + \left(-\rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) \\
&= -\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j) - \frac{\partial p}{\partial x_i} \\
&= -\frac{\partial}{\partial x_j}(p\delta_{ij} + \rho v_i v_j)
\end{aligned}$$

途中で，オイラー方程式はもちろん，連続の式も用いた。

ここで，運動量流束テンソルを $\mathit{\Pi}_{ij} \equiv p\delta_{ij} + \rho v_i v_j$

$$(\mathit{\Pi}_{ij}) = \begin{pmatrix} p + \rho u^2 & \rho uv & \rho uw \\ \rho uv & p + \rho v^2 & \rho vw \\ \rho uw & \rho vw & p + \rho w^2 \end{pmatrix}$$

[*1] この本は，話題があちこち飛んだりしていて読みづらいと（私は）思うが，特に第 5 章は整理不足が過ぎる。もうちょっと話の順序を考えてほしかった。

で定義すると，

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \boldsymbol{v}) = -\nabla \cdot \overleftrightarrow{\mathit{\Pi}}$$

となる。これを

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho \boldsymbol{v} dV = -\int_S \overleftrightarrow{\mathit{\Pi}} \cdot \boldsymbol{n} dS$$

と書けば，表面 S 上の単位面積を出て行く運動量が $\overleftrightarrow{\mathit{\Pi}} \cdot \boldsymbol{n}$ であることがわかる。

なお，1 次元だと簡単になって，

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(p + \rho u^2) = 0$$

エネルギー保存則

$\mathcal{U}$ を単位質量あたりの内部エネルギーとし，$e = \dfrac{1}{2}\rho \boldsymbol{v}^2 + \rho \mathcal{U}$ を単位**体積**あたりの全エネルギーとする。このとき

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \mathrm{div}[(e+p)\boldsymbol{v}] = 0$$

が成り立つ。

証明

証明はただ式変形するだけだが，式の使いどころを間違えると大変な泥沼にハマるので，注意が必要である。とにかく，連続の式と運動方程式が出てくるように頑張る。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial e}{\partial t} + \mathrm{div}[(e+p)\boldsymbol{v}] &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho \boldsymbol{v}^2 + \rho\mathcal{U}\right) + \mathrm{div}\left[\left(\frac{1}{2}\rho \boldsymbol{v}^2 + \rho\mathcal{U} + p\right)\boldsymbol{v}\right] \\
&= \frac{\boldsymbol{v}^2}{2}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\left(\rho\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\right) + \mathcal{U}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} \\
&\quad + \frac{\boldsymbol{v}^2}{2}\mathrm{div}(\rho\boldsymbol{v}) + \rho\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}\,\frac{\boldsymbol{v}^2}{2} + \mathcal{U}\,\mathrm{div}(\rho\boldsymbol{v}) + \rho\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}\,\mathcal{U} + p\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}\,p \\
&= \frac{\boldsymbol{v}^2}{2}\left(\cancel{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\boldsymbol{v})}\right) + \boldsymbol{v}\cdot\left(\cancel{\rho\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \rho\,\mathrm{grad}\,\frac{\boldsymbol{v}^2}{2}} + \mathrm{grad}\,p\right) \\
&\quad + \mathcal{U}\left(\cancel{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\boldsymbol{v})}\right) + \left[\rho\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} + \rho\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad}\,\mathcal{U} + p\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}\right]
\end{aligned}$$

ただし，途中でベクトル解析の公式 $\mathrm{grad}\,\dfrac{\boldsymbol{v}^2}{2} = (\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{grad})\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\times\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}$ および $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{v}\times\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}$ の内積が 0 であることを用いている。

残った項を消すため，熱力学第 1 法則を用いる。s を単位質量あたりのエントロピーとして

$$d\mathcal{U} = -pd\left(\frac{1}{\rho}\right) + Tds = \frac{p}{\rho^2}d\rho + Tds$$

であるから，

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} = \dfrac{p}{\rho^2}\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + T\dfrac{\partial s}{\partial t} \\
\mathrm{grad}\,\mathcal{U} = \dfrac{p}{\rho^2}\,\mathrm{grad}\,\rho + T\,\mathrm{grad}\,s
\end{cases}$$

よって，

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial e}{\partial t} + \mathrm{div}[(e+p)\boldsymbol{v}] &= \rho \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} + \rho \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{grad}\, \mathcal{U} + p \,\mathrm{div}\, \boldsymbol{v} \\
&= \rho \left(\frac{p}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} + T \frac{\partial s}{\partial t} \right) + \rho \boldsymbol{v} \cdot \left(\frac{p}{\rho^2} \,\mathrm{grad}\, \rho + T \,\mathrm{grad}\, s \right) + p \,\mathrm{div}\, \boldsymbol{v} \\
&= \frac{p}{\rho} \left(\cancel{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{grad}\, \rho + \rho \,\mathrm{div}\, \boldsymbol{v}} \right) + \rho T \left(\frac{\partial s}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{grad}\, s \right) \\
&= \rho T \frac{Ds}{Dt}
\end{aligned}
$$

となる。完全流体の運動は断熱的であるため，エントロピーのラグランジュ微分は 0 である。したがって，この式は 0 になる。

なお，単位体積あたりのエンタルピーを $h = e + p$，単位質量あたりのエンタルピーを $H = \frac{h}{\rho} = \frac{e+p}{\rho} = \frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2 + \mathcal{U} + \frac{p}{\rho}$ とすると，エネルギー保存則は

$$
\frac{\partial e}{\partial t} + \mathrm{div}[h\boldsymbol{v}] = 0
$$

などとかける。

また，1 次元でのエネルギー方程式は

$$
\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left[(e+p)u\right] = 0
$$

状態方程式

このままでは未知数の数に対して方程式が足りないので解けない。通常，ここに状態方程式を加える。テキストでは

$$
p = (\gamma - 1)\left(e - \frac{1}{2}\rho \boldsymbol{v}^2 \right)
$$

という式を使っている。これは

$$
\mathcal{U} = \frac{1}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho}
$$

と同じことである。2 個目の式は，

$$
\frac{p}{\rho} = \tilde{R}T = (c_P - c_V)T = (\gamma - 1)c_V T = (\gamma - 1)\mathcal{U}
$$

と変形するとわかりやすいかもしれない。

ベクトル形式の方程式

これまで出てきた，状態方程式以外の式

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) &= 0 \\
\frac{\partial (\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(p + \rho u^2) &= 0 \\
\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left[(e+p)u\right] &= 0
\end{aligned}
$$

は，1 つのベクトル方程式にまとめることができる。

ベクトル $\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{E}$ を

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ e \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} \rho u \\ p + \rho u^2 \\ (e+p)u \end{pmatrix}$$

で定義すると

$$\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x} = \boldsymbol{0}$$

となる。

3 次元への拡張

3 次元ではかなり項が増えて

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ e \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} \rho u \\ p + \rho u^2 \\ \rho uv \\ \rho uw \\ (e+p)u \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ p + \rho v^2 \\ \rho vw \\ (e+p)v \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ p + \rho w^2 \\ (e+p)w \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x} + \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial y} + \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial z} = \boldsymbol{0}$$

となる。

また，ここでは完全流体しか扱っていないが，粘性流体では粘性項，熱伝導項も入ってきて大変賑やかになる。

さて，

$$\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial x} = \boldsymbol{0}$$

は見かけ上は移流方程式だが，式が入り組んでおり解きにくそうである。なんとかして独立な式に分解したい。

そこで，次のような非保存形で書くことにする。

$$\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial t} + \mathsf{A}\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial x} = \boldsymbol{0}$$

ただし A は以下で与えられる**流束ヤコビアン行列**である。

$$A_{ij} = \frac{\partial E_i}{\partial Q_j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{3-\gamma}{2}u^2 & (3-\gamma)u & \gamma - 1 \\ \left(\frac{\gamma-1}{2}u^2 - H\right)u & H - (\gamma-1)u^2 & \gamma u \end{pmatrix}$$

証明の概略

$\xi = \rho u$ とおいて独立変数を変更し，さらに状態方程式 $p = (\gamma - 1)\left(e - \frac{1}{2}\rho \boldsymbol{v}^2\right)$ を用いると

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \rho \\ \xi \\ e \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} \xi \\ (\gamma-1)\left(e - \frac{\xi^2}{2\rho}\right) + \frac{\xi^2}{\rho} \\ \left[e + (\gamma-1)\left(e - \frac{\xi^2}{2\rho}\right)\right]\frac{\xi}{\rho} \end{pmatrix}$$

と書ける。あとは $A_{ij} = \frac{\partial E_i}{\partial Q_j}$ にしたがって偏微分を実行すればよい。

5.2 オイラー方程式の性質

これまで変数として e も使ってきたが,（状態方程式を用いて）e を消去し，基本変数として ρ, u, p を使った方程式に書き直す。

連続の式を

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

と書く。

運動方程式は，移流項をそのままにした（よく見る）形

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

を使う。

エネルギー方程式だけはちょっと面倒だが，頑張って計算すると

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \gamma p\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

途中計算

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left[(e+p)u\right] = 0$$

から e を消去する。これに $\gamma - 1$ をかけて状態方程式 $p = (\gamma-1)\left(e - \frac{1}{2}\rho u^2\right)$ を用いると，

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[p + \frac{\gamma-1}{2}\rho u^2\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\gamma p + \frac{\gamma-1}{2}\rho u^2\right)u\right] = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\gamma-1}{2}\left[u\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \rho u\frac{\partial u}{\partial t}\right] + \underline{\gamma u\frac{\partial p}{\partial x}} + \gamma p\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\gamma-1}{2}\left[u\frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2) + \rho u^2\frac{\partial u}{\partial x}\right] = 0$$

ここで $\gamma u\frac{\partial p}{\partial x} = (\gamma-1)u\frac{\partial p}{\partial x} + u\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\gamma-1}{2}u\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\gamma-1}{2}u\frac{\partial p}{\partial x} + u\frac{\partial p}{\partial x}$ に注意する。

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \gamma p\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\gamma-1}{2}u\left[\cancel{\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(p + \rho u^2)}\right]$$

$$+\frac{\gamma-1}{2}\rho u\left[\cancel{\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}}\right] = 0$$

よって

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \gamma p\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

以上の式は，次のようにまとめることができる。

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\rho\\ u\\ p\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}u & \rho & \\ & u & \frac{1}{\rho}\\ & \gamma p & u\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}\rho\\ u\\ p\end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

あるいは，$\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix}\rho\\ u\\ p\end{pmatrix}$ および流束ヤコビアン行列（移流方程式での輸送速度に対応する）$\mathsf{M} = \begin{pmatrix}u & \rho & \\ & u & \frac{1}{\rho}\\ & \gamma p & u\end{pmatrix}$

を用いて

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t} + \mathsf{M}\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial x} = \boldsymbol{0}$$

さて，行列 M を対角化しよう。固有値を λ とする。テキストでは右固有ベクトルとか左固有ベクトルとか出てくるが，とりあえず通常通り固有値と固有ベクトルを求めればよい[*2]。

$$\det\begin{pmatrix} u-\lambda & \rho & \\ & u-\lambda & \frac{1}{\rho} \\ & \gamma p & u-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(u-\lambda)^3 - \gamma\frac{p}{\rho}(u-\lambda) = 0$$

$c = \sqrt{\gamma\frac{p}{\rho}}$ を音速とすると

$$(u-\lambda)\left[(u-\lambda)^2 - c^2\right] = 0 \qquad \therefore \quad \lambda = u, u\pm c$$

となる。

- $\lambda = u$ のとき。

$$\begin{pmatrix} & \rho & \\ & & \frac{1}{\rho} \\ & \gamma p & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

  を解いて，固有ベクトルは $\begin{pmatrix} \rho \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

- $\lambda = u + c$ のとき。

$$\begin{pmatrix} -c & \rho & \\ & -c & \frac{1}{\rho} \\ & \gamma p & -c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

  を解いて，固有ベクトルは $\begin{pmatrix} \rho \\ c \\ \rho c^2 \end{pmatrix}$

- $\lambda = u - c$ のとき。

$$\begin{pmatrix} c & \rho & \\ & c & \frac{1}{\rho} \\ & \gamma p & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

  を解いて，固有ベクトルは $\begin{pmatrix} \rho \\ -c \\ \rho c^2 \end{pmatrix}$

以上より M は,

$$\mathsf{M} = \mathsf{R}_p \Lambda \mathsf{R}_p{}^{-1}$$

$$\mathsf{R}_p = \begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_1 & \boldsymbol{r}_2 & \boldsymbol{r}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho & \rho & \rho \\ -c & & c \\ \rho c^2 & & \rho c^2 \end{pmatrix}$$

[*2] 固有ベクトルの規格化は行わない。各成分の次元がバラバラだから，規格化してもあまり意味がない。

$$
\mathsf{R}_p{}^{-1} = \frac{1}{2\rho c^2}\begin{pmatrix} \boldsymbol{l}_1 \\ \boldsymbol{l}_2 \\ \boldsymbol{l}_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\rho c^2}\begin{pmatrix} & -\rho c & 1 \\ 2c^2 & & -2 \\ & \rho c & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\mathsf{\Lambda} = \begin{pmatrix} u-c & & \\ & u & \\ & & u+c \end{pmatrix}
$$

と対角化される。$\boldsymbol{r}, \boldsymbol{l}$ は右固有ベクトル，左固有ベクトルであり，例えば $\boldsymbol{l}$ は $\boldsymbol{l}\mathsf{M} = \lambda \boldsymbol{l}$ を満たす。

さて，元の方程式

$$
\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t} + \mathsf{M}\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial x} = \mathbf{0}
$$

に左から $\boldsymbol{l}$ をかけると

$$
\boldsymbol{l} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t} + \boldsymbol{l} \cdot \mathsf{M}\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial x} = \mathbf{0}
$$

$$
\boldsymbol{l} \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t} + \lambda\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial x}\right) = \mathbf{0}
$$

$dx = \lambda dt$ なる特性曲線に沿っては，$\alpha \equiv \boldsymbol{l} \cdot d\boldsymbol{w} = 0$ となる。

3 つの固有ベクトルについて α を具体的に書き下してみよう。

- $\lambda = u - c$ のとき。$\dfrac{dx}{dt} = u - c$ に沿って

$$
\alpha_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ -\rho c \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d\rho \\ du \\ dp \end{pmatrix} = 0 \qquad \therefore \quad -\rho c du + dp = 0
$$

- $\lambda = u$ のとき。$\dfrac{dx}{dt} = u$ に沿って

$$
\alpha_2 \equiv \begin{pmatrix} 2c^2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d\rho \\ du \\ dp \end{pmatrix} = 0 \qquad \therefore \quad c^2 d\rho - dp = 0
$$

- $\lambda = u + c$ のとき。$\dfrac{dx}{dt} = u + c$ に沿って

$$
\alpha_3 \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ \rho c \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d\rho \\ du \\ dp \end{pmatrix} = 0 \qquad \therefore \quad \rho c du + dp = 0
$$

まとめると

$$
\boldsymbol{\alpha} \equiv \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & -\rho c & 1 \\ 2c^2 & & -2 \\ & \rho c & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d\rho \\ du \\ dp \end{pmatrix}
$$

衝撃波管と単純波

隔膜を破断すると，低圧側には圧縮波（$u+c$）が伝わり，高圧側には膨張波（$u-c$）が伝わる。隔膜のあった，元々の境界は接触面と呼ばれ，速度 u で移動する。

各特性線は独立して存在し，1 つの波だけが存在する領域（単純波領域）ができる。

特性線と固有ベクトルの意味

例として，$\dfrac{dx}{dt} = u$ なる特性線を考える。

この周辺にはこの波以外の波はない。特性線 $\dfrac{dx}{dt} = u$ に沿っては $\alpha_2 = 0$ であり，逆に特性線をまたぐときは α_2 は変化する。一方，α_1, α_3 は変化しない（ほんとか？）。

よって $\dfrac{dx}{dt} = u$ に沿って $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$ すなわち

$$\begin{cases} -\rho c du + dp = 0 \\ \rho c du + dp = 0 \end{cases} \qquad \therefore \quad dp = du = 0$$

であり，接触面の前後で圧力と速度は変わらず，密度のみが変化する。

他の場合も考えてみよう。$\dfrac{dx}{dt} = u + c$ については $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ より

$$\begin{cases} -\rho c du + dp = 0 \\ c^2 d\rho - dp = 0 \end{cases}$$

これを整理すると（途中計算は各自でどうぞ。そんなに長くない），

$$d(u+c) = \frac{\gamma+1}{2} du$$

これは波面をまたいで速度が $\left\{ \begin{array}{c} \text{増加} \\ \text{減少} \end{array} \right\}$ する（$du \gtreqless 0$）方向に特性曲線の傾きも $\left\{ \begin{array}{c} \text{増加} \\ \text{減少} \end{array} \right\}$ する。これにより $\left\{ \begin{array}{c} \text{膨張} \\ \text{圧縮} \end{array} \right\}$ 波が形成される。

まとめ

- 固有値，固有ベクトルを用いることで，多変数が入り組んだ方程式を，個別のスカラー方程式に分解できる。例えば TVD 法。
- クーラン数の扱いが微妙に変わる。以前は（陽解法なら）$\nu = c\dfrac{\Delta t}{\Delta x} \leqq 1$ であったが，今度は

$$\max\{|u-c|, |u|, |u+c|\} \frac{\Delta t}{\Delta x} \leqq 1$$

  が条件となる。ただし，絶対値最大の固有値（スペクトル半径）に合わせて $\dfrac{\Delta t}{\Delta x}$ を決めると，それ以外の固有値に対応する固有ベクトルの成長が遅れる。