

# 数值流体力学 第四回

油滴

May 6, 2021

- 1 Burgers 方程式
- 2 保存型表示
- 3 多次元への拡張
- 4 Harten の流束修正法
- 5 MUSCL 法

# 全体における今回の位置付け

非線形方程式や高次元、TVD 法等、システム方程式を解く準備をしていく。

# Burgers 方程式 1

ここからはいよいよ非線形方程式に入っていく。まず単純な例として以下の Burgers 方程式を取り上げる。

$$\frac{\partial q}{\partial t} + q \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

これは、一次元波動方程式の速さ  $c$  を  $q$  に置き換えたものであり明らかに非線形である。

# Burgers 方程式 2

まず、差分化として一次精度風上法を適応してみると

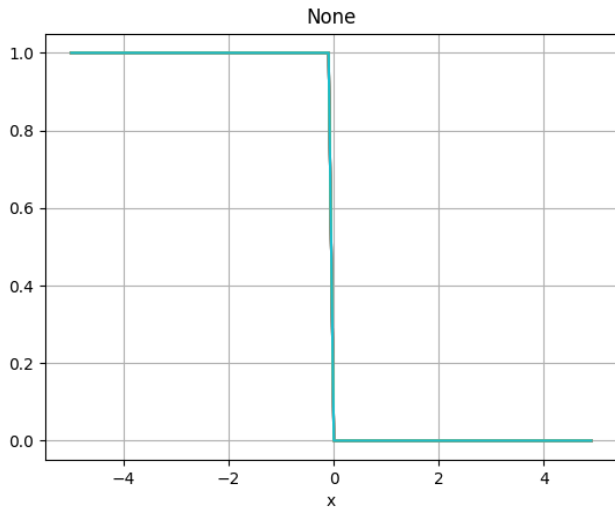
$$q_j^{n+1} = q_j^n - \Delta t \left( \frac{q_j^n + |q_j^n|}{2} \cdot \frac{q_j^n - q_{j-1}^n}{\Delta x} + \frac{q_j^n - |q_j^n|}{2} \cdot \frac{q_{j+1}^n - q_j^n}{\Delta x} \right) \quad (2)$$

となる。これを実装して初期値として

$$q(x) = \begin{cases} 1.0 & (x \leq 1 \text{ のとき}) \\ 0.0 & (x > 1 \text{ のとき}) \end{cases} \quad (3)$$

を与えると

# Burgers 方程式 3



# Burgers 方程式 4

これがうまくいかないのは当然である。というのも  $q = 0$  では輸送速度が0のままなため、未来永劫変化しないのである。

# 保存型表示 1

これを解決するものが前回導入した保存形式である。  
Burgers 方程式を変形して

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{q^2}{2} \right) = 0 \quad (4)$$

とする。式変形としては極めて単純だが考え方が変わっていることに着目してほしい。

これは物理量  $q$  の時間微分と物理量  $\frac{q^2}{2}$  の空間微分の和が 0 になっており何らかの保存則になっている。オイラー方程式等も保存形式を連立させたような形にすることができる。



# 保存型表示2

保存型表示については既に触れたので早速差分化していく

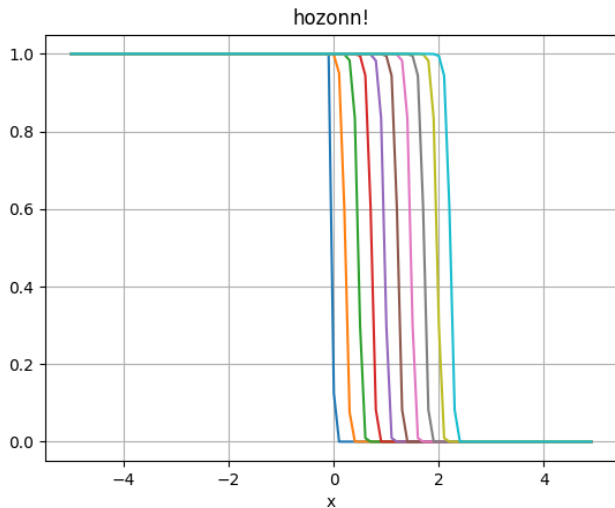
$$q_j^{n+1} = q_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\tilde{f}_{j+1/2}^n - \tilde{f}_{j-1/2}^n) \quad (5)$$

$\tilde{f}$  は数値流速であり、風上法を採用したとき

$$\tilde{f}_{j+1/2}^n = \begin{cases} \frac{(q_j^n)^2}{2} & (q_j^n + q_{j+1}^n > 0 \text{ のとき}) \\ \frac{(q_{j+1}^n)^2}{2} & (q_j^n + q_{j+1}^n \leq 0 \text{ のとき}) \end{cases} \quad (6)$$

となる。実装すると以下のようなになる。

# 保存型表示 3



# 保存型表示 4

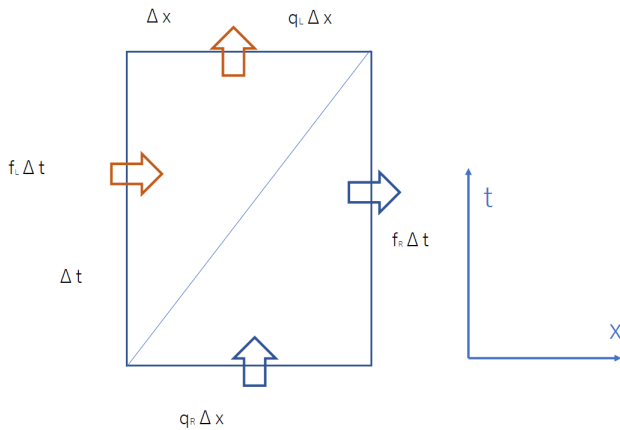
$q$  を速度とした場合、この波面は速度の不連続面であり衝撃波面である。 $q > 0$  を仮定して保存形式を変形すると

$$q_j^{n+1} = q_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} ((q_j^n)^2 - (q_{j-1}^n)^2) \quad (7)$$

$$= q_j^n - \frac{(q_j^n + q_{j-1}^n)}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} (q_j^n - q_{j-1}^n) \quad (8)$$

これを見ると衝撃波の速度は二点の平均で与えられる。

# 保存型表示 5



# 保存型表示 6

衝撃波付近の領域を拡大して見たのが上の図である。この領域での保存を考えると衝撃波の速度が

$$c = \frac{\Delta f}{\Delta q} = \frac{\frac{q_R^2}{2} - \frac{q_L^2}{2}}{q_R - q_L} = \frac{1}{2}(q_R + q_L) \quad (9)$$

となることが分かる。

# 保存型表示 7

衝撃波の発生について少し補足しておく、移流方程式では流速は一定だったため波形はそのまま伝わる。一方で、burgers 方程式においては場所ごとに流速が異なるために遅い部分と早い部分ができる。

平行になる。つまり波形がそのまま伝わる。

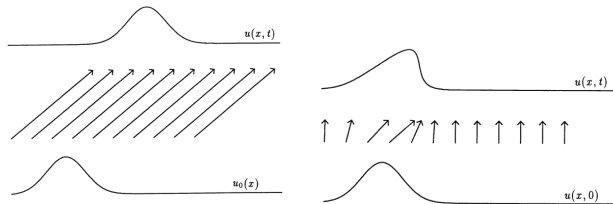


図 4.1 (左) 線形波動方程式と (右) Burgers 方程式の解と特性曲線 (教科書 Leveque 1992 より)

# 保存型表示 8

後ろからきた波が前に追いつきそれが極端になると衝撃波となり、この前後で物理量がほぼ不連続に変化してしまう。

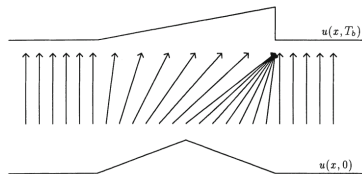


図 4.2 Burgers 方程式解の衝撃波突っ立ち (教科書 Leveque 1992 より)

# 保存型表示 9

逆に、ある地点の右で右向きに、左で左向きに速度を持つとこの領域は特性曲線法によっては解が求まらない。

物理的にはここは密度の低い膨張波といった現象が起こるが、数値的に解くと不連続な衝撃波（膨張衝撃波）が発生してしまう。

これは実際の流体ではエントロピー増大則から禁止されるためこの効果をスキームに取り込む必要がある。

それが以下に見る Godunov 法である。



# Godunov 法 1

Godunov 法は基本は保存形式の時と一緒にだが、 $q_j^n, q_{j+1}^n$  が  $q_j^n < 0 < q_{j+1}^n$  の時、すなわちある地点での右で右向きに、左で左向きに速度を持つときに  $\tilde{f}_{j+1/2} = 0$  と置く方法である。これは膨張波に相当する。

早速実装してみる

# Godunov 法 2

実装において分岐を避けるために

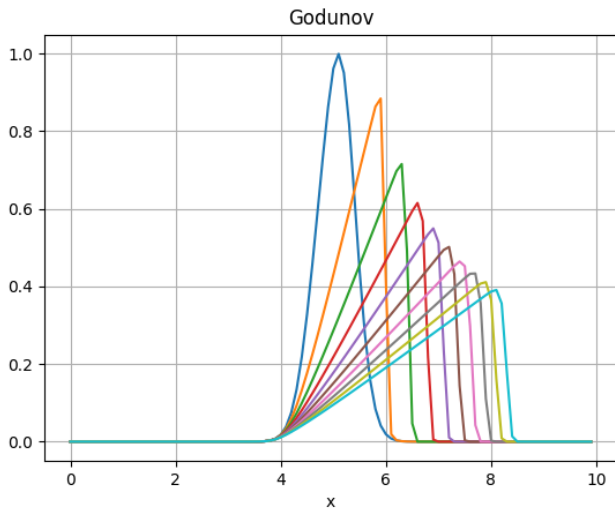
$$\tilde{f}_{j+1/2}^n = \max\left(\frac{1}{2}q_m^2, \frac{1}{2}q_p^2\right) \quad (10)$$

$$q_m = \frac{1}{2}(q_j^n + |q_j^n|) \quad (11)$$

$$q_p = \frac{1}{2}(q_{j+1}^n - |q_{j+1}^n|) \quad (12)$$

としている。また、見たいものの関係上初期値はガウス分布を選んだ。

# Godunov 法 3



# 多次元 1

これまでは一次元での問題のみを取り扱っていたが、実際解きたい流体の方程式は三次元である。

ここからは多次元化を見据えて取りあえず二次元での問題を取り扱う。

一次元で最初に取り扱った移流方程式を二次元に拡張した以下の方程式を考える。

$$\frac{\partial q}{\partial t} + c \frac{\partial q}{\partial x} + d \frac{\partial q}{\partial y} = 0 \quad (13)$$

ここで  $c, d$  はそれぞれ  $x, y$  方向の伝播速度である。  
以下これらを正に取る。

## 多次元2

まず、差分化を行う。基本的には一次元と変わらない。  
時間刻み、空間刻みを  $\Delta t, \Delta x, \Delta y$  ととる。

$t = n\Delta t, x = j\Delta x, y = k\Delta y$  での物理量を  $q_{j,k}^n$  と表す。

風上法を適応すると

$$q_{j,k}^{n+1} = q_{j,k}^n - c\Delta t \frac{q_{j,k}^n - q_{j-1,k}^n}{\Delta x} - d\Delta t \frac{q_{j,k}^n - q_{j,k-1}^n}{\Delta y} \quad (14)$$

となる。

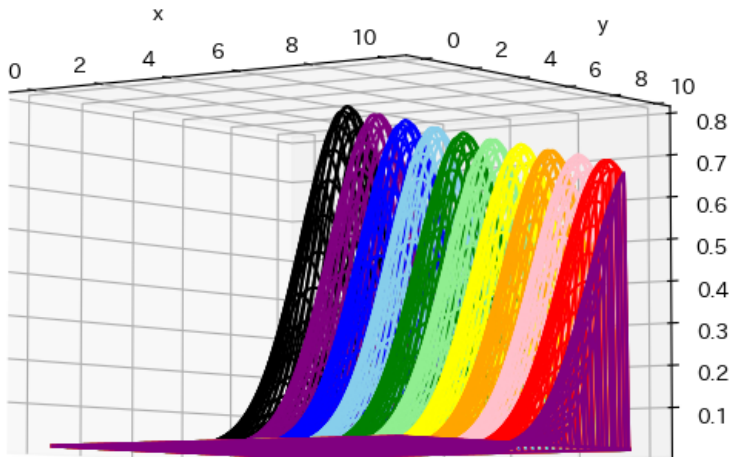
## 多次元3

このスキームで中心部が盛り上がったガウス分布の初期値からはじめた時間発展を考える。

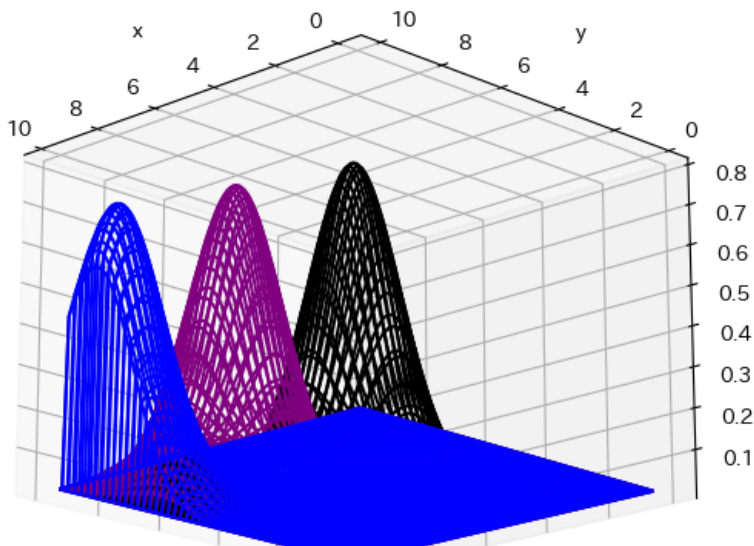
プログラムではに変数関数を表示する三次元グラフを使っている。計算時間はおおよそ、時間ステップ(空間ステップ)<sup>2</sup>程度であり一次元より時間がかかる。

多次元化はこれ以上はここでは扱わない。

# 多次元 4



# 多次元5





# 流束修正法 1

ここからは実戦的な計算法を考えていく。

前回、線形なスキームでは一次精度でしか単調性を維持できないことを見た。(Godnov の定理) ここでは単調性を維持してかつ二次以上の精度をもつ非線形なスキームを考えていく。その考えの核となるのが TDV 法と呼ばれるものである。

TDV 法に入る前にこれまでやったスキームを数値流束という点から見返してみる。

# 流束修正法2

数値流束の基本的な考え方は

$$q_j^{n+1} = q_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\tilde{f}_{j+1/2}^n - \tilde{f}_{j-1/2}^n) \quad (15)$$

であった。ここで  $f$  は数値流束であり

$$\tilde{f}_{j+1/2}^n = f_j^n \quad \text{風上法} \quad (16)$$

$$\tilde{f}_{j+1/2}^n = \frac{1}{2} [(1 - \nu)f_{j+1}^n + (1 + \nu)f_j^n] \quad \text{LW法} \quad (17)$$

となっている。

# 流束修正法3

LW 法を風上法との和にすると

$$\tilde{f}_{j+1/2}^n = f_j^n + \frac{1}{2}(1 - \nu)(f_{j+1}^n - f_j^n) \quad (18)$$

である。右辺第二項は風上法の流束を修正しているとも見ることも可能だからこれを修正流束という。

この考えを発展させ、場所によってこの修正流速を変化させることを考える。つまり、数値振動を引き起こすような物理量の変化が大きいところでは風上法に、それ以外では二次精度の LW 法を用いる。これは非線形計算法である。

# 流速修正法 4

具体的には

$$\tilde{f}_{j+1/2}^n = f_j^n + \frac{1}{2} B_{j+1/2} (1 - \nu) (f_{j+1}^n - f_j^n) \quad (19)$$

と流束制限関数  $B$  を用いることで上記のものを達成するという方法で Harten の流束修正法と呼ばれる。これは TVD 条件を満たすようにすることが多い。

# TVD1

突然出てきた TVD について解説する。

前回やったように解が単調で無いと、数値振動が発生しうる。しかし、解の単調性は条件として厳しいというのと、非線形スキームではゴドノフの定理が適応できないため単調性を確かめるのも難しい。

そこで Harten によって提案されたものが TVD 条件である。これは以下に記す全変動が増加しないという意味である。  
(total variation diminishing)

$$TV(u^n) = \sum |u_{j+1}^n - u_j^n| \quad (20)$$

# TVD2

つまり TVD 条件は

$$TV(u^{n+1}) \leq TV(u^n) \quad (21)$$

と書くことができ、この式を見る限り数値振動が無限に大きくなるといったことはなさそうである。

簡単な議論として単調性の維持を考える。単調な時  $u_{j+1}^n - u_j^n$  の符号は  $j$  によらないから全変動は  $|u_{j_{\max}}^n - u_0^n|$  と端だけで決まる。仮に固定端だとすると（固定端でなくともおかしなふるまいをしなければ）単調性が崩れると全変動も増加するので TVD 条件を満たすスキーム（TVD スキーム）は単調性を維持できることが分かる。

# 流速修正法 5

流速制限関数に話を戻す。

移流方程式において流速制限関数  $B$  を TVD 条件を満たすようにと  
ることを考える。

そのためにここからは少し式変形をしていく。まず、

$$q_j^{n+1} = q_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\tilde{f}_{j+1/2}^n - \tilde{f}_{j-1/2}^n) \quad (22)$$

に

$$\tilde{f}_{j+1/2}^n = f_j^n + \frac{1}{2} B_{j+1/2} (1 - \nu) (f_{j+1}^n - f_j^n) \quad (23)$$

$$f_j^n = c q_j^n \quad (24)$$

を代入すると

# 流速修正法 6

$$q_j^{n+1} - q_j^n = -\nu(q_j^n - q_{j-1}^n) - \frac{\nu}{2}(1 - \nu)B_{j+1/2}(q_{j+1}^n - q_j^n) + \frac{\nu}{2}(1 - \nu)B_{j-1/2}(q_j^n - q_{j-1}^n) \quad (25)$$

$$\frac{q_j^{n+1} - q_j^n}{q_{j-1}^n - q_j^n} = \nu(1 - \frac{\nu}{2}(1 - \nu)B_{j-1/2}) + \frac{\nu}{2}(1 - \nu)B_{j+1/2} \frac{q_{j+1}^n - q_j^n}{q_{j-1}^n - q_j^n} \quad (26)$$



# 流速修正法 7

この式の右辺の値を  $C$  と置く。この  $C$  を用いると

$$q_j^{n+1} = (1 - C)q_j^n + Cq_{j-1}^n \quad (27)$$

であり、 $0 < C < 1$  は単調性維持の十分条件になっている。

保存型なのでこの時、TVD 条件を満たす。

よって  $C$  がこの範囲に収まるように流速制限関数を求めていく。

(はっきり言うところの時、TVD を持ち出す必要は微塵も無いが目標である流体の方程式を解くための練習なので...)

# 流速修正法 8

この  $C$  についてさらに進めて見る。  $r_j = \frac{q_{j-1}^n - q_j^n}{q_{j+1}^n - q_j^n}$  と置くと  
 $0 < C < 1$  は

$$-\nu < -\frac{\nu}{2}(1-\nu)B_{j-1/2} + \frac{\nu}{2r_j}(1-\nu)B_{j+1/2} < 1-\nu \quad (28)$$

となる。以降、 $0 < \nu \leq 1$  を仮定する。これは CFL 条件から妥当である。

まず、左側から考える。

# 流速修正法 9

邪魔な定数で割って変形すると

$$\frac{2}{1-\nu} \geq B_{j-1/2} - \frac{B_{j+1/2}}{r_j} \quad (29)$$

右側も同じように

$$\frac{-2}{\nu} \leq B_{j-1/2} - \frac{B_{j+1/2}}{r_j} \quad (30)$$

となる。十分条件を  $0 \leq \nu \leq 1$  より求めて

# 流速修正法 10

$$-2 \leq B_{j-1/2} - \frac{B_{j+1/2}}{r_j} \leq 2 \quad (31)$$

さらに

$$0 \leq B_{j+1/2} \leq 2 \quad (32)$$

$$0 \leq \frac{B_{j+1/2}}{r_j} \leq 2 \quad (33)$$

が任意の  $j$  に対して成立する。この領域を図示すると下の図の白い部分にあたる。

37 / 47

# 流速修正法 12

この意味を少し考えて見る。

まず、 $r_j$  が負の時を考えるとこの時隣り合う差の符号が逆であり、数値振動を抑えるために  $B = 0$  に取る必要がある。

一方で、 $r > 0$  には自由度があり、ここでは精度を高めたいため二次精度となるように選ぶこととする。

四つの点から作る二次精度のスキームの自由度は 2 だから多少の自由があり、下の図の斜線部が該当する。

# 流速修正法 13

## 第3章 高次精度風上差分法

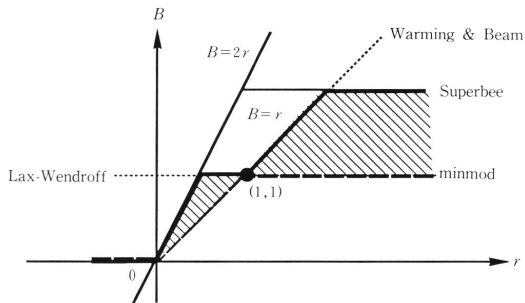


図 3.5 代表的な制限関数

# 流速修正法 14

ここからは Harten の流束修正法の実装を考える。  
まず、もとの数値流速は

$$\tilde{f}_{j+1/2}^n = \frac{1}{2}(f_j^n + f_{j+1}^n - |c|(q_{j+1}^n - q_j^n)) \quad (34)$$

であったがこれを  $f \rightarrow \tilde{f} = f + g, c \rightarrow \tilde{c} = c + \gamma$  と置き換えて結果的に流速制限関数が上で見た領域に入るように考える。



# 流速修正法 15

$g, \gamma$  を見ていくと

$$g_j = \minmod(\sigma(c)\Delta_{j+1/2}, \sigma(c)\Delta_{j+1/2}) \quad (35)$$

$$\sigma(z) = \frac{1}{2} \left[ |z| - \frac{\Delta t}{\Delta x} z^2 \right] \quad (36)$$

$$\gamma = \frac{g_{j+1} - g_j}{\Delta_{j+1/2}} \quad (\Delta_{j+1/2} = 0 \text{ のときは } 0) \quad (37)$$

さらに  $|z|$  は 0 にならないように

$$|z| = \begin{cases} |z| & (|z| > \delta \text{ のとき}) \\ \frac{z^2 + \delta^2}{2\delta} & (|z| \leq \delta \text{ のとき}) \end{cases} \quad (38)$$

ととる。

# 流速修正法 16

上で  $\text{minmod}$  は二つの符号が異なれば 0、同じなら絶対値が小さいほうを返す関数。

$\Delta_{j+1/2} = q_{j+1} - q_j$  と定義される。

この複雑なスキームをほぐしていこう。まず、修正流速の部分のみを取り出すと

$$\tilde{g}_{j+1/2} = \frac{1}{2}[(g_{j+1}^n + g_j^n) - |\gamma|(q_{j+1}^n - q_j^n)] \quad (39)$$

今、考えている移流方程式では  $\sigma(c) = \frac{\varepsilon}{2}(1 - \nu)$  と定数になるので  $g$  は  $g_j = \frac{\varepsilon}{2}(1 - \nu)\text{minmod}(\Delta_{j+1/2}, \Delta_{j-1/2})$  と書ける。

# 流速修正法 17

$$\minmod(\Delta_{j+1/2}, \Delta_{j-1/2}) = \begin{cases} 0 & (r_j < 0) \\ \Delta_{j+1/2} & (0 \leq r_j < 1) \\ \Delta_{j-1/2} & (1 \leq r_j) \end{cases} \quad (40)$$

となる。例えば  $r_{j+1}, r_j$  が共に  $1 < r$  であるならば

$$\tilde{g}_{j+1/2} = \frac{c}{4}(1 - \nu)(\Delta_{j+1/2} + \Delta_{j-1/2}) - \frac{c}{4}(1 - \nu) \left| \frac{\Delta_{j+1/2} - \Delta_{j-1/2}}{\Delta_{j+1/2}} \right| \Delta_{j+1/2} \quad (41)$$

$$= \frac{c}{4}(1 - \nu)(1 + r_j - |1 - r_j|)\Delta_{j+1/2} \quad (42)$$

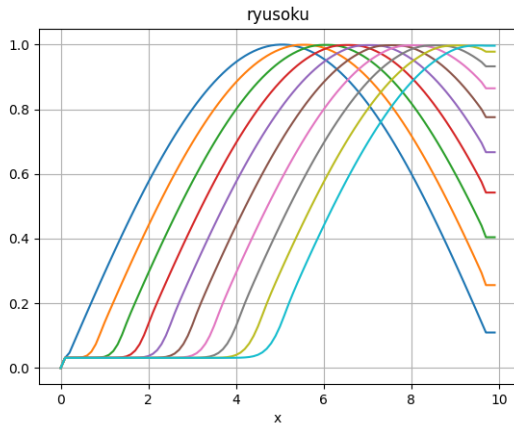
# 流速修正法 18

流速制限関数と修正流束は以下の関係にあったことを思い出すと

$$\tilde{g}_{j+1/2} = \frac{c}{2} B_{j+1/2} (1 - \nu) \Delta_{j+1/2} \quad (43)$$

$B_{j+1/2} = 1$  がわかり図の領域に入っていることが分かる。

# 流速修正法 19



# 流速修正法 20

このスキームをさらに変形して

$$\tilde{f}_{j+1/2}^n = \frac{1}{2}(f_{j+1}^n + f_j^n + \psi_{j+1/2}^n) \quad (44)$$

$$\psi_{j+1/2}^n = \sigma(c_{j+1/2})(g_j + g_{j+1}) - |c_{j+1/2} + \gamma_{j+1/2}|(q_{j+1}^n - q_j^n) \quad (45)$$

$$\gamma_{j+1/2} = \sigma(c_{j+1/2}) \frac{g_{j+1} - g_j}{\Delta_{j+1/2}} \quad (\Delta_{j+1/2} = 0 \text{ なら } 0) \quad (46)$$

としたものが Harten-Yee の風上型 TVD 法である。  
(??) 式との差を取ると Harten 法と一致することが分かる。

# MUSCL 法

流束修正法とは違った考え方で高次精度を維持するスキームとして MUSCL 法がある。

(Monotone Upstream-centered Schemes for Conservation Laws)

この方法の考え方は空間をセルに分け、物理量の  $j$  番目のセル内の平均を  $q_j^n$  と表す。

セルへの出入りは、セル境界の物理量を周囲のセル平均の内挿によって求めそこから数値流束を計算することで行う。

例えば、風上法では流れ込む風上側のセル平均を境界で用いることで数値流束を計算する。

セル内で物理量一定を仮定すると一次精度になるが、セル内で線形な分布を考えると二次精度、それ以上の分布によって高次精度を達成できる。また、TVD 条件を満たすように内挿に流束制限関数を導入することもできる。