数値流体ゼミ 4-4～4-6

油滴

May 24, 2021

渦無し圧縮性流体 1

少し理論面から入ろう。圧縮ありの完全流体を扱う。

渦無し流れおいては速度ポテンシャルが Φ 存在し

$$\vec{\mathbf{u}} = grad\Phi \tag{1}$$

と書ける。
定常流ではさらにベルヌーイの定理と連続の式が成り立つ。

$$\frac{1}{2}q^2 + \int \frac{\mathrm{d}p}{\rho} = 0 \tag{2}$$

$$\nabla \cdot (\rho \vec{\mathbf{u}}) = 0 \tag{3}$$

渦無し圧縮性流体 2

連続の式を変形すると

$$\rho \boldsymbol{\nabla} \cdot (\vec{\mathbf{u}}) + \vec{\mathbf{u}} \cdot \boldsymbol{\nabla} \rho = 0 \tag{4}$$

である。音速 $c = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}}$ とベルヌーイの定理を微分した $q\mathrm{d}q + \frac{\mathrm{d}p}{\rho} = 0$ をもちいると $\frac{\partial \rho}{\partial x}$ は

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial x} &= \frac{\partial \rho}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial q^2}\frac{\partial q^2}{\partial x} \qquad (5)\\
&= \frac{1}{c^2}\left(-\frac{\rho}{2}\right)\frac{\partial q^2}{\partial x} \qquad (6)\\
&= -\frac{\rho}{2c^2}\frac{\partial q^2}{\partial x} \qquad (7)
\end{aligned}$$

渦無し圧縮性流体3

y,z についても同様に行うと結局連続の式は

$$\rho \nabla \cdot (\vec{\mathbf{u}}) = \frac{\rho}{2c^2}\left(u\frac{\partial q^2}{\partial x} + v\frac{\partial q^2}{\partial y} + w\frac{\partial q^2}{\partial z}\right) \tag{8}$$

$$\Delta \Phi = \frac{1}{2c^2}\left(u\frac{\partial q^2}{\partial x} + v\frac{\partial q^2}{\partial y} + w\frac{\partial q^2}{\partial z}\right) \tag{9}$$

と整理される。
これが定常な圧縮性流体力学の中心となる式である。

渦無し圧縮性流体 4

これをさらに変形すると

$$\frac{\partial q^2}{\partial x} = 2u\frac{\partial u}{\partial x} + 2v\frac{\partial v}{\partial x} + 2w\frac{\partial w}{\partial x} \tag{10}$$

をもちいて

$$\Delta\Phi = \frac{1}{2c^2}\left(u\frac{\partial q^2}{\partial x} + v\frac{\partial q^2}{\partial y} + w\frac{\partial q^2}{\partial z}\right) \tag{11}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{c^2}(u^2\frac{\partial u}{\partial x} + v^2\frac{\partial v}{\partial x} + w^2\frac{\partial w}{\partial x} \\ &\quad uv\frac{\partial u}{\partial y} + uv\frac{\partial v}{\partial x} + vw\frac{\partial v}{\partial z} + vw\frac{\partial w}{\partial y} + wu\frac{\partial w}{\partial x} + uv\frac{\partial u}{\partial z}) \end{aligned} \tag{12}$$

渦無し圧縮性流体 5

Φ で書き直して整理すると

$$\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\left(1-\frac{w^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} -\frac{2uv}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}-\frac{2vw}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial z}-\frac{2wu}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial x}=0 \tag{13}$$

渦無し圧縮性流体 6

ここで流れが二次元であり、ほぼ一様流であるとする。

$$\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}-\frac{2uv}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} \tag{14}$$

である。この時、一様流と擾乱に分けると

$$u=U_0(1+\bar{u}) \qquad \bar{u}<<1 \tag{15}$$

$$v=U_0\bar{v} \qquad \bar{v}<<1 \tag{16}$$

渦無し圧縮性流体 7

第三項と第二項の v^2 は微小だから落とし、$\frac{u}{c} \simeq \frac{U_0}{c} = M_\infty$ より

$$(1 - M_\infty^2)\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \tag{17}$$

無次元化した擾乱に対してのポテンシャル ψ も同様に

$$(1 - M_\infty^2)\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \tag{18}$$

を満たす。これが今回解きたい式である。

楕円型方程式の数値計算 1

上の方程式を薄翼の周辺で解いてみよう。
ガウスサイデル法を意識して中心差分で差分化すると

$$(1-M_\infty^2)\frac{(2\psi_{j,k}^{n+1}-\psi_{j-1,k}^{n+1}-\psi_{j+1,k}^{n})}{\Delta x^2}+\frac{(2\psi_{j,k}^{n+1}-\psi_{j,k-1}^{n+1}-\psi_{j,k+1}^{n})}{\Delta y^2}=0 \tag{19}$$

$$\begin{aligned}2\left[\frac{(1-M_\infty^2)}{\Delta x^2}+\frac{1}{\Delta y^2}\right]\psi_{j,k}^{n+1}\\ =\frac{(1-M_\infty^2)}{\Delta x^2}(\psi_{j-1,k}^{n+1}+\psi_{j+1,k}^{n})+\frac{1}{\Delta y^2}(\psi_{j,k-1}^{n+1}+\psi_{j,k+1}^{n})\end{aligned} \tag{20}$$

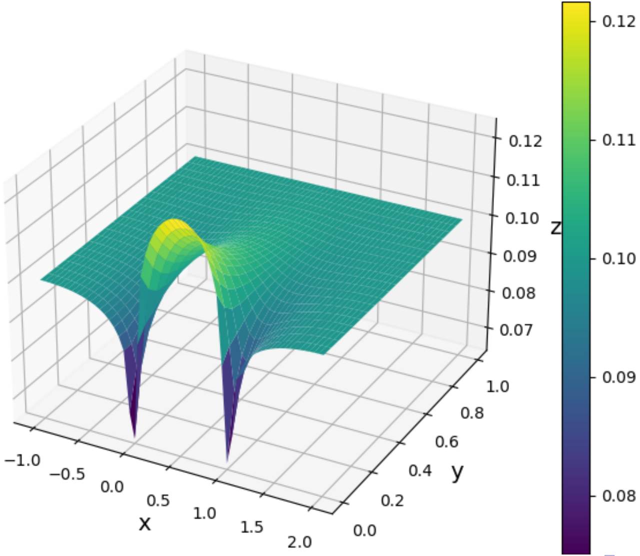
となる。

楕円型方程式の数値計算2

次に、境界条件を考えよう。
簡単にするために、$\Delta x = \Delta y$ とする。
翼を $y = 0.4x(1 - x) \quad 0 < x < 1$ とし、y>0 の範囲で考える。
翼から遠い領域の端では擾乱はないからそこでの境界条件は 0 とすればよい。

翼は薄いため、翼上での境界条件は $y = 0$ で与える。また、傾きが小さいので $\bar{v} = \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$ とすればよい。

楕円型方程式の数値計算 3



楕円型方程式の数値計算 4

今回の問題では $\bar{y} = \sqrt{(1 - M_\infty^2} y$ と変換すると

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{y}^2} = 0 \tag{21}$$

となるから結局、これを解けば任意のマッハ数での問題を解くことができる。(つまりこれらの解は相似である。)

Lax の同等定理 1

収束性について重要な定理として Lax の同等定理がある。ここではこの定理について述べる。

Lax の同等定理

線形の偏微分方程式の良設定問題において以下は同値
・差分スキームが安定性と適合性を持つ
・差分スキームが収束性を持つ

Laxの同等定理2

まず、良設定問題とは解が一意に存在しパラメータの連続的な変化に対して解も連続的に変化するような問題を言う。普通に解く方程式はこれを満たすが、膨張波が起こるところとかは扱えない。

安定性は時間発展に伴って誤差が成長しないこと。
適合性は差分間隔を0に近づけた時に、差分方程式が微分方程式と一致すること。
収束性は差分間隔を0に近づけた時に、差分方程式の解が微分方程式の解と一致すること。(反復に伴う収束とは違う概念)

Lax の同等定理 3

収束性を言い換えると $\Delta t \to 0 \Rightarrow |u - \bar{u}| \to 0$ であり解の収束の速さを精度という。$|u - \bar{u}| = O(\Delta t^n)$ のとき n 次精度であるという。

精度を上げることと格子点を増やすこと、どちらをどの程度にするかは問題ごとに考える必要があるが CFD では最低でも 2 次精度が求められるようである。

Lax の同等定理 4

注意点として Lax の同等定理は丸め誤差等のステップを小さくとることで増える誤差については考えておらず、これらが効いてくる範囲では成り立たない。(があまり気にしなくてよい)

証明は関数空間（ノルムが導入されているのでバナッハ空間か？) 上での収束が論じられているが関数解析の知識が必要なのであきらめた。
論文は http://cms.dm.uba.ar/academico/materias/2docuat2018/Analisis_Numerico/paper_Lax.pdf にある。

非圧縮の流体力学1

まずは圧縮ありから考えよう。
粘性係数が定数の粘性流体は連続の式と N-S 方程式が基礎になる。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \rho \vec{\mathbf{u}} = 0 \tag{22}$$

$$\frac{\partial \vec{\mathbf{u}}}{\partial t} + (\vec{\mathbf{u}} \cdot \nabla)\vec{\mathbf{u}} = -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla} p + \frac{1}{\rho}\left(\chi + \frac{\eta}{3}\right)\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{u}}) + \frac{\eta}{\rho}\Delta\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{K}} \tag{23}$$

連続の式で ρ 定数だとすると $\boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{u}} = 0$ と速度の発散が 0 になる。

非圧縮の流体力学 2

ここから、N-S 方程式は

$$\frac{\partial \vec{\mathbf{u}}}{\partial t} + (\vec{\mathbf{u}} \cdot \nabla)\vec{\mathbf{u}} = -\frac{1}{\rho}\boldsymbol{\nabla} p + \frac{\eta}{\rho}\Delta\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{K}} \tag{24}$$

となる。外力をなくして (或いは圧力に組み込んで) 無次元化するとレイノルズ数 $Re = \frac{\rho U L}{\eta}$ を用いて

$$\frac{\partial \vec{\mathbf{u}}}{\partial t} + (\vec{\mathbf{u}} \cdot \nabla)\vec{\mathbf{u}} = -\boldsymbol{\nabla} p + \frac{1}{Re}\Delta\vec{\mathbf{u}} \tag{25}$$

とできる。(物理量は無次元化したもの)

非圧縮の流体力学 3

レイノルズ数は代表的な速さ、長さ U, L と密度、粘性率からなる無次元数で流れを特徴付ける数である。これが等しい流れは互いに相似になることが分かる。

非圧縮流れとみなせるのは音速と比べて速度が小さいときであり、この時連続の式と無次元化された N-S 方程式を解けばよい

非圧縮の流体力学3

二次元での方程式を書くと

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{26}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{27}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \tag{28}$$

u の式を x で微分し v の式を y で微分して足すと

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}\right)u+\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}\right)v\\ =\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right)\end{aligned} \tag{29}$$

非圧縮の流体力学 3

連続の式を用いて時間項を落とし、ベクトルで書いて整理すると

$$\Delta p = -div(V \cdot \nabla)V \tag{30}$$

ここから、圧力はその時点での速度のみから楕円方程式を解くことで求められる。この圧力をもって運動方程式から V を求めることで時間発展を計算することが出来る。
これを MAC 法といい非圧縮流れの代表的な計算法である。

一方、これを少し変更した SMAC 法では p の代わりに速度ポテンシャルを求めて p の発展を追うという形を取っている。