数値流体ゼミ第 7 回

忝村顕史

6/2

今日のお品書き

1. 4.1 方程式の性質
2. 4.2 一次元熱伝導（拡散）方程式
3. 4.3 楕円型方程式の計算法

2 階までの偏微分方程式の分類

2 変数の 2 階偏微分方程式は一般に以下のように書ける.

$$A\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + D\frac{\partial \phi}{\partial x} + E\frac{\partial \phi}{\partial y} + F\phi = f(x, y)$$

各項の係数によって次のように分類できる.

偏微分方程式の分類

- 楕円型方程式
  $B^2 - 4AC < 0$
- 放物方程式
  $B^2 - 4AC = 0$
- 双曲型方程式
  $B^2 - 4AC > 0$

例えば，ポアソン方程式 $\dfrac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 q}{\partial y^2} = f$ は楕円型方程式.
今まで考えてきた移流方程式は，左右双方への伝播を組み合わせて考えることができ，

$$\left(\frac{\partial q}{\partial t} + c\frac{\partial q}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial t} - c\frac{\partial q}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = 0$$

から双曲型とわかる.

拡散方程式

以下のような拡散方程式を考える

$$\frac{\partial q}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = 0 \quad (\alpha > 0)$$

ここに空間 2 階微分項に対し，2 次精度の中心差分の式

$$\left.\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}\right|_j = \frac{q_{j+1} - 2q_j + q_{j-1}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x^2)$$

を適用すると次のように離散化ができる．

$$q_j^{n+1} = q_j^n + \alpha \cdot \Delta t \left(\frac{q_{j+1}^n - 2q_j^n + q_{j-1}^n}{\Delta x^2} \right)$$

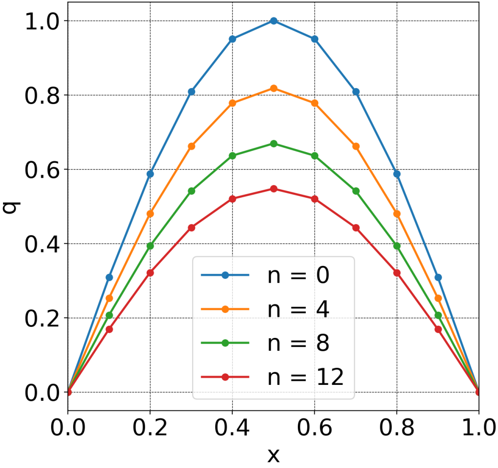
二次精度での計算

離散化した拡散方程式に初期条件と境界値を与えて計算してみる.

$$\begin{cases} \text{境界範囲：} & 0 \leq x \leq 1 \\ \text{境界条件：} & q(0,t) = 0, \quad q(1,t) = 0(\text{t は任意の実数}) \\ \text{初期条件：} & q(x) = \sin(\pi x) \end{cases}$$

この解が安定であるためには $\alpha \dfrac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq 0.5$ でないといけない.

計算結果



楕円方程式の離散化

楕円型方程式の代表として，ラプラス方程式を考える．

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} = 0$$

空間微分を中心差分で近似して離散化すると，

$$\frac{q_{j+1,k} - 2q_{j,k} + q_{j-1,k}}{(\Delta x)^2} + \frac{q_{j,k+1} - 2q_{j,k} + q_{j,k-1}}{(\Delta y)^2} = 0$$

となる．全ての点が互いにつながり合っているのが特徴（時間陰解法と同じような現象)．

楕円方程式の離散化

$\Delta x = \Delta y$ として整理すると

$$q_{j,k} = \frac{1}{4}(q_{j-1,k} + q_{j+1,k} + q_{j,k-1} + q_{j,k+1})$$

行列表示では次の通り

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & & & 1 & & & \\ 1 & -4 & 1 & & & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \ddots & \\ & & 1 & -4 & 1 & & & 1 \\ 1 & & & 1 & -4 & 1 & & \\ & 1 & & & 1 & -4 & 1 & \\ & & \ddots & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & & & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{1,1} \\ \vdots \\ q_{j-1,k} \\ q_{j,k} \\ q_{j+1,k} \\ \vdots \\ q_{jmax,kmax} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ RHS \\ \\ \end{bmatrix}$$

緩和法の利用：Point Jacobi 法

先程の行列を反転するのは現実的じゃないので緩和法を利用する.

(1) Point Jacobi 法 $n = 1$ での分布を初期値として与え,

$$q_{j,k}^{n+1} = \frac{1}{4}(q_{j-1,k}^{n} + q_{j+1,k}^{n} + q_{j,k-1}^{n} + q_{j,k+1}^{n})$$

で計算する方法. $|q_{j,k}^{n+1} - q_{j,k}^{n}|$ が十分小さくなるようにする考え方を緩和法という.

Gauss-Seidel 法，SOR 法

(2) Gauss-Seidel 法

$$q_{j,k}^{n+1} = \frac{1}{4}(q_{j-1,k}^{n+1} + q_{j+1,k}^{n} + q_{j,k-1}^{n+1} + q_{j,k+1}^{n})$$

で表される．(j,k) が小さい方から計算することにすれば，j か k が今考えている (j,k) より小さい部分の計算は既に終わっているので，多次元近似 LU 分解のように考えることができて収束性が良くなる．

(3) SOR 法

$$q_{j,k}^{n+1} = \frac{1}{4}\omega(q_{j-1,k}^{n+1} + q_{j+1,k}^{n} + q_{j,k-1}^{n+1} + q_{j,k+1}^{n})$$

で表される．ω は緩和係数で，通常は $1 < \omega < 2$ とする ($\omega = 1$ の場合は (2) と同じ)．ω を適切に設定すれば Gauss-Siedel 法より収束性が向上する．

楕円型方程式の緩和法と放物型方程式の時間発展解法の関係

緩和法の式を少し変形すると

$$
\begin{aligned}
q_{j,k}^{n+1} =& q_{j,k}^{n} + \Delta t \cdot \frac{\Delta x^2}{4\Delta t}\left(\frac{q_{j-1,k}^{n} - 2q_{j,k}^{n} + q_{j+1,k}^{n}}{\Delta x^2}\right) \\
&+ \Delta t \cdot \frac{\Delta y^2}{4\Delta t}\left(\frac{q_{j,k-1}^{n} - 2q_{j,k}^{n} + q_{j,k+1}^{n}}{\Delta y^2}\right)
\end{aligned}
$$

となり，先程の式が $\Delta x = \Delta y, \alpha = 1.0$ とした拡散方程式になっていることがわかる