

人口模型

——课本习题 1.6

王军军——2013301020118——物基二班

摘要：人口模型有很大的研究价值，本习题的模型包括了新生人口项 aN 与死亡人口项 $-bN^2$ ，可以用欧拉方法对其进行模拟，得到不同 a 、 b 值的人口模型曲线，对其进行比较得到结论。

关键词：人口模型、欧拉方法

正文：

人口数随时间的变化有此关系式：

$$\frac{dN}{dt} = aN - bN^2$$

其中右边第一项表示新生人口项，第二项表示死亡人口项。对方程可采用求通积分的方法求得解析解。解法如下：

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= aN - bN^2 \\ \therefore \int \frac{dN}{aN - bN^2} &= t + C \Rightarrow \\ \int \left(\frac{1}{N(a - bN)} \right) dN &= t + C \Rightarrow \\ \ln \frac{bN}{bN - a} &= t + C\end{aligned}$$

当 $t=0$ 时，令 $N = N_0$ ，所以对上式进行变化可得：

$$N = \frac{ae^{at}}{\frac{a}{N_0} - b + be^{at}} = \frac{aN_0e^{at}}{a - bN_0 + bN_0e^{at}} = \frac{aN_0e^{at}}{a + bN_0(e^{at} - 1)}$$

从此解析式可看出，当 $t \rightarrow \infty$ 时， $N \rightarrow \frac{a}{b}$ ；当 $b = 0$ 时， $N = N_0e^{at}$ ，即人口呈指数增长。

采用欧拉方法模拟时，有：

$$\frac{N(i+1) - N(i)}{dt} = aN(i) - bN^2(i), \text{即}$$

$$N(i+1) = N(i)dt + [aN(i) - bN^2(i)]dt$$

选取不同的 a 和 b 值，得到不同的曲线，分别比较结果。

1、按照课本上的分别取

$N(0)=100$ 、 $a=10$ 、 $b=3$ 和 $N(0)=1000$ 、 $a=10$ 、 $b=0.01$ 得到如下曲线：

when $N_0=100, a=10, b=3$, population growth curve

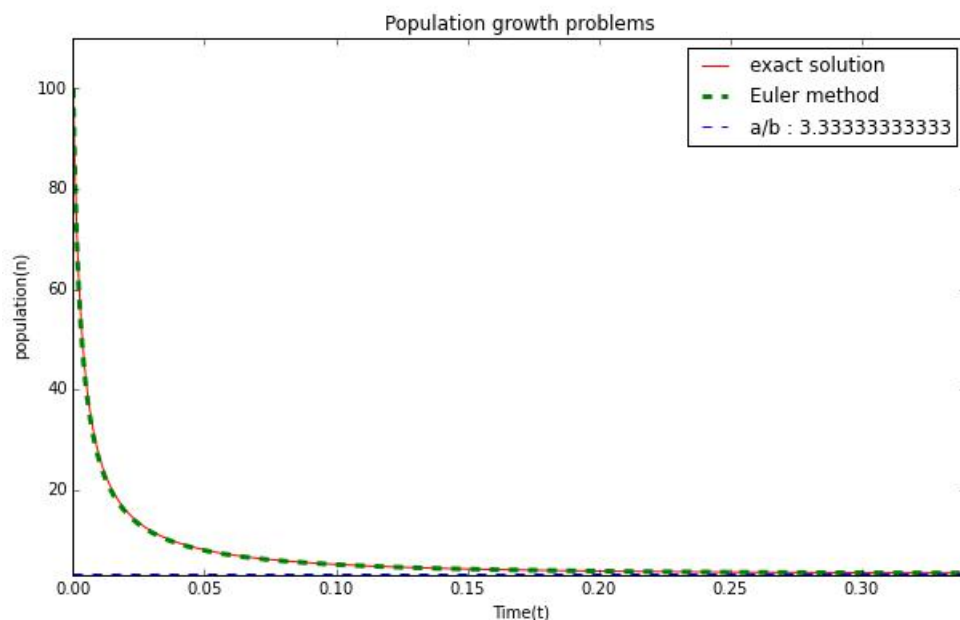


图 1

when $N_0=1000, a=10, b=0.01$, population growth curve

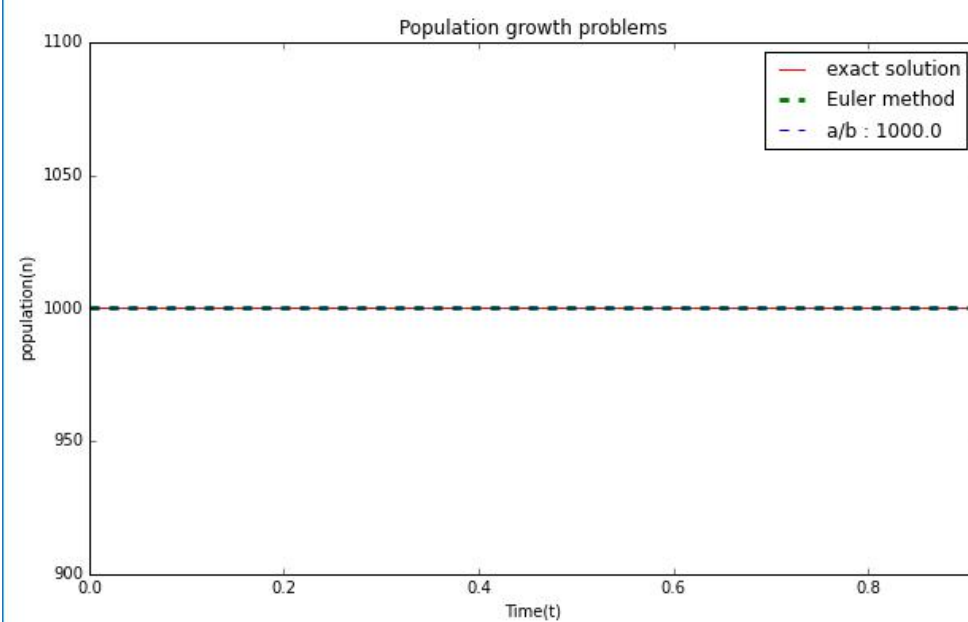


图 2

2、（1）对于同一 $a=1$ 值，若取不同 b 值，可得到如下结果：

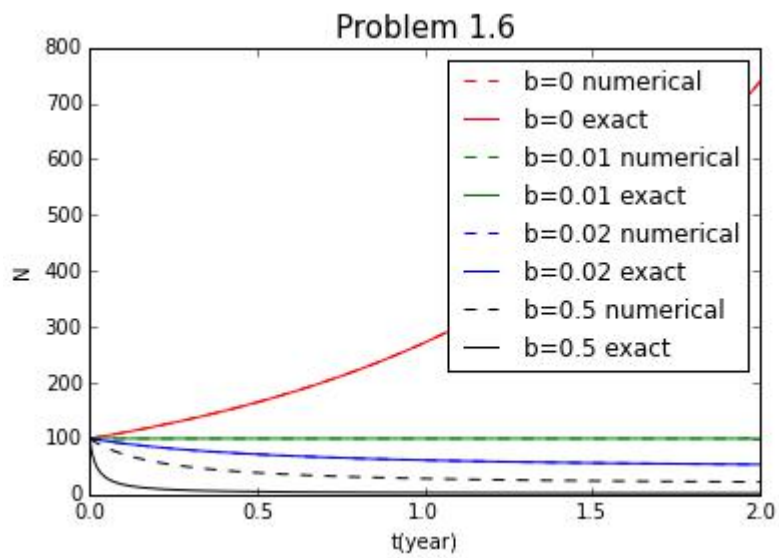


图 3

(2) 对于另一 $a=0.5$ ，取不同 b 值有：

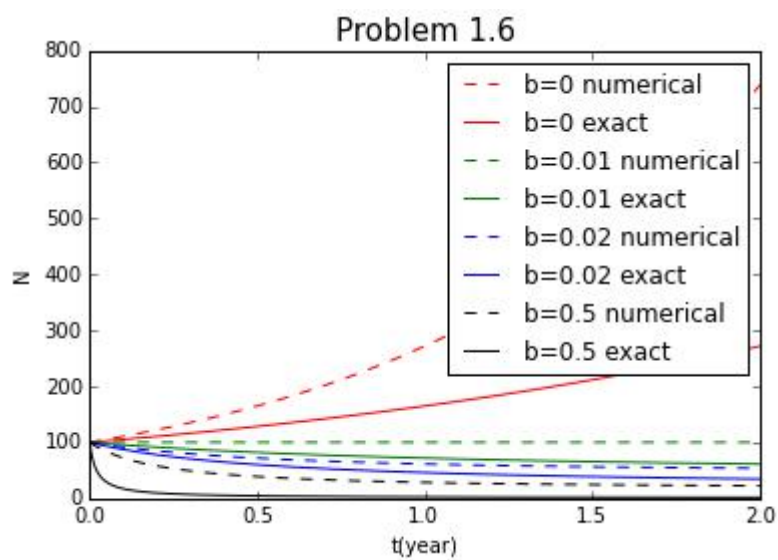


图 4

3、(1) 对于同一 $b=0.01$ ，不同 a 值有：

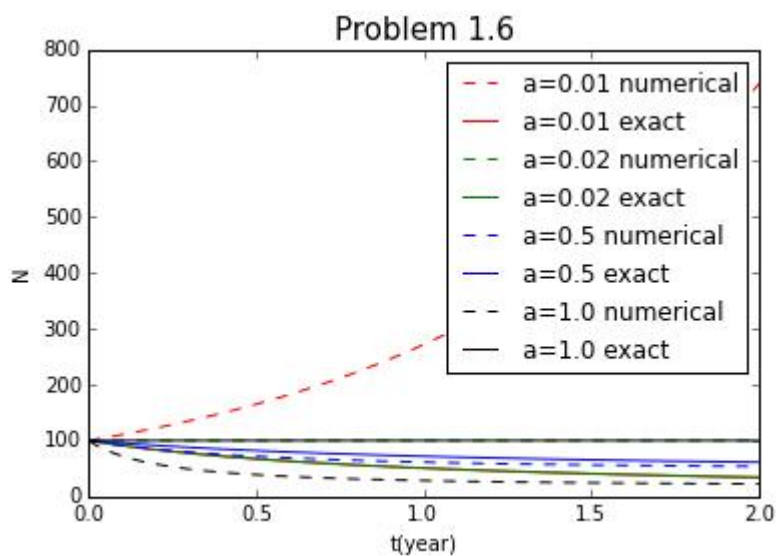


图 5

(2) 对于同一 $b=0.5$ ，不同 a 值有：

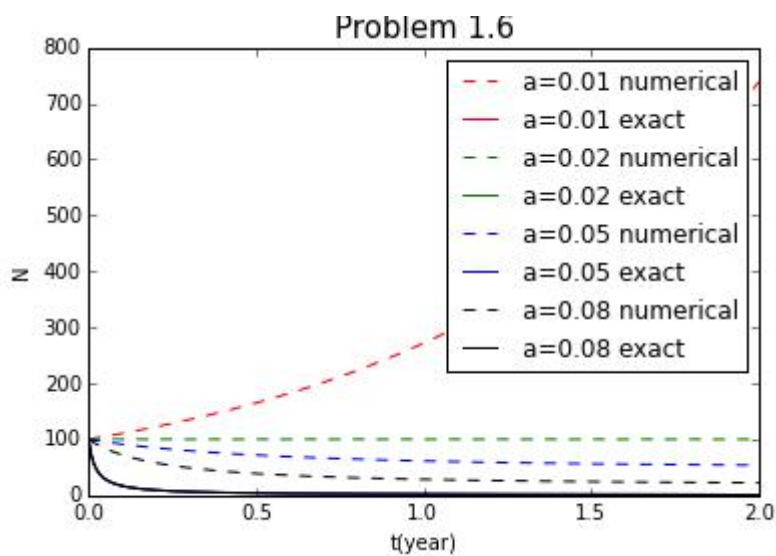


图 6

结论：

- 1、从图 1 和图 2 可看出当 a/b 较小时，人口会减少，死亡率大于增长率；当比值较大时，人口趋于稳定，此时的自然增长率趋于 0.
- 2、从图 3 和图 4 可看出，当 a/b 较大时，数值模拟和解析结果很吻合，当比值较大时，有较大偏差。且从图中可以粗略看出当 a/b 趋近于 50 时，人口趋于稳定；当小于 50 时，人口已经呈下降趋势；大于 50，呈上升趋势。图 5 和图 6 与图 3 和图 4 分析一样。

参考文献：

Nicholas J.Giordano, Hisao Nakanishi, 计算物理，清华大学出版社，2007 年 12 月第 1 版