OOPython

Задача 2. Численное дифференцирование

Введение

В лекционном материале **lecture_5_classes_b.ipynb** рассматривалось представление производной f' в виде класса, экземпляры которого являются функторами:

```python
class DerivativeNum:

    def __init__(self, f, h):
        self.f = f
        self.h = h

    def __call__(self, x):
        f, h = self.f, self.h # для краткости
        return (f(x + h) - f(x - h))/(2.*h)
```

В методе **__call__** для приближенного вычисления производной f' используется формула центральной разности:

$$f'(x_0) \approx f'_{num}(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} \tag{1}$$

Существует множество формул различных порядков точности для расчета численной производной $f'_{num}(x_0)$. Ограничимся следующими:

- $f'_{num}(x_0) = \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ (2)
- $f'_{num}(x_0) = \dfrac{f(x_0) - f(x_0-h)}{h}$ (3)
- $f'_{num}(x_0) = \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$ (4)
- $f'_{num}(x_0) = \dfrac{4}{3}\dfrac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} - \dfrac{1}{3}\dfrac{f(x_0+2h) - f(x_0-2h)}{4h}$ (5)
- $f'_{num}(x_0) = \dfrac{3}{2}\dfrac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} - \dfrac{3}{5}\dfrac{f(x_0+2h) - f(x_0-2h)}{4h} + \dfrac{1}{10}\dfrac{f(x_0+3h) - f(x_0-3h)}{6h}$ (6)

Любую из вышеприведенных формул можно записать в общем виде:

$$f'_{num}\left(x_0\right)=\frac{1}{h}\sum_{i=-N}^{N}\alpha_i f\left(x_i\right) \tag{7}$$

где $\left\{\alpha_i\right\}_{i=-N}^{N}$ - набор коэффициентов, $\left\{x_i\right\}_{i=-N}^{N}$ - набор точек шаблона, $N=3$.

Задание

Определение классов

Для каждой из формул (2)-(7) программно реализовать соответствующий класс **DerivativeNum***Name*, минимизировав суммарное число строк кода с помощью наследования. Каждый класс должен включать в себя как минимум следующее:

Поля:

- дифференцируемая функция f
- шаг численного дифференцирования h
- набор коэффициентов $\left\{\alpha_i\right\}_{i=-N}^{N}$

Методы:

- конструктор
- задать коэффициенты $\left\{\alpha_i\right\}_{i=-N}^{N}$
- вычислить значение $f'_{num}\left(x_0\right)$ по формуле (7) (реализовать через магический метод **__call__**)

Использование классов

Использовать созданные классы для расчета численных производных: для каждой формулы (2)-(6) в точке $x_0=5$ построить графики абсолютного значения погрешности в зависимости от шага численного дифференцирования $h_n=\frac{1}{2^{n-1}}$, $n=1,...,21$ для следующих функций:

$$\sin\left(x^2\right),\ \cos\left(\sin\left(x\right)\right),\ \exp\left(\sin(\cos\left(x\right)\right),\ \ln\left(x+3\right),\ \sqrt{x+3}$$

Использовать логарифмический масштаб по обеим осям. Графики погрешностей для каждой функции строить в отдельном окне. Задействовать библиотеку **SymPy** для аналитического вычисления производных. Примеры реализации – см. в **lecture_5_classes_b.ipynb**.