OOPython

Задача 6. Численное решение УрЧП

Введение

В **lecture_9_pde.ipynb** рассматривался метод сведения решения УрЧП к решению системы ОДУ. Будем рассматривать следующие методы численного решения системы:

(1) явный метод Эйлера (явный, 1-й порядок аппроксимации; реализован в **lecture_8_scalar_ode.ipynb**)

(2) метод Хойна (явный, 2-й порядок аппроксимации; реализован в **lecture_8_scalar_ode.ipynb**)

(3) метод Рунге-Кутты (явный, 4-й порядок аппроксимации; реализован в **lecture_8_scalar_ode.ipynb**).

Задание

Определение классов

Для каждого из методов (1)-(3) реализовать соответствующий класс *MethodName*, минимизировав суммарное число строк кода с помощью наследования. В качестве заготовок можно использовать классы, иерархия которых реализована в **Задаче 5**. Каждый класс должен включать в себя как минимум следующее:

Поля:

- вектор-функция правой части системы ОДУ
- функцию-начальное условие
- множество точек сетки по времени и ее параметры: кол-во точек, отрезков, шаг сетки
- множество точек сетки по пространству и ее параметры: кол-во точек, отрезков, шаг сетки
- 2D-массив для хранения значений численного решения; если не хватит памяти – использовать 2 1D-массива для хранения значений численного решения на явном и неявном временных слоях (массивы потребуется «менять местами» после совершения каждого шага по времени).

Методы:

- конструктор: задать вектор-функцию правой части, функцию-начальное условие, параметры сеток по времени и пространству

- решить ОДУ («timestepping» - цикл по точкам сетки по времени)
- построить график численного решения в конечный момент времени T.

Использование классов

Каждым из методов (1)-(3) провести численное решение системы ОДУ, полученной путем применения метода прямых к уравнению теплопроводности, для которого поставлена смешанная задача (см. **lecture_9_pde.ipynb**).

Параметры смешанной задачи:

- коэффициент температуропроводности: $\kappa = 0.1$
- начальное условие – функция-«прямоугольник»:

$$u_0(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } 0.4 \le x \le 0.6 \\ 0, \text{ если } 0 < x < 0.4,\ 0.6 < x < 1 \end{cases}$$

- граничные условия: $b_l(t) \equiv 0,\ b_r(t) \equiv 0$.

Параметры расчетных сеток:

- шаг по пространству: $h = \frac{1}{25}$
- шаг по времени: $\Delta t = \frac{h^2}{200\kappa}$.

Построить графики численных решений, полученных каждым из методов в момент времени $T = 0.04$ (в одном графическом окне).

Примечания по реализации

- можно использовать в качестве заготовок классы, реализованные Вами в **Задаче 5**; потребуется ввести в них небольшие изменения, позволяющие работать с системами ОДУ
- функтор для правой части теперь должен на вход принимать массив (вектор неизвестных) и на выходе выдавать массив (вектор-функцию правой части)
- тела методов **AdvanceNextStep()** в каждом из классов можно оставить без изменений: операции, выполняющиеся внутри методов над массивами, будут векторизованными
- приводить матрицу системы к диагональному виду **не требуется**.