1. Bevezető

Az $\frac{1}{n^2}$ sorösszege:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Az $n!$ (n faktoriális) a számok szorzata 1-től n-ig, azaz

$$n! := \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n. \tag{1}$$

Konvenció szerint $0! = 1$.
Legyen $0 \leq k \leq n$. A binomiális együttható

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!},$$

ahol a faktoriálist (1) szerint definiáljuk.
Az előjel- azaz szignum függvényt a következőképpen definiáljuk:

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0, \\ -1, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

2. Determináns

Legyen

$$[n] := \{1, 2, \cdots, n\}$$

a természetes számok halmaza 1-től n-ig.
Egy n-edrendű *permutáció* σ egy bijekció $[n]$-ből $[n]$-be. Az n-edrendű permutációk halmazát, az ún. szimmetrikus csoportot, S_n-el jelöljük.
Egy $\sigma \in S_n$ permutációban inverziónak nevezünk egy (i, j) párt, ha $i < j$ de $\sigma_i > \sigma_j$.
Egy $\sigma \in S_n$ permutáció paritásának az inverziók számát nevezzük:

$$\mathcal{I}(\sigma) := \Big| \big\{ (i, j) \bigm| i, j \in [n], i < j, \sigma_i > \sigma_j \big\} \Big|.$$

Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, egy $n \times n$-es (négyzetes) valós mátrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Az A mátrix determinánsát a következőképpen definiáljuk:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} := \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\mathcal{I}(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma_i} \tag{2}$$

3. Logikai azonosság

Tekintsük az $L = \{0, 1\}$ halmazt, és legyenek $a, b, c, d \in L$. Belátjuk a következő azonosságot:

$$(a \wedge b \wedge c) \to d = a \to \big(b \to (c \to d)\big). \tag{3}$$

A következő azonosságokat bizonyítás nélkül használjuk:

$$x \to y = \bar{x} \vee y \tag{4a}$$

$$\overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y} \qquad \overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y} \tag{4b}$$

A (3) bal oldala, (4) felhasználásával

$$(a \wedge b \wedge c) \to d \underset{(4a)}{=} \overline{a \wedge b \wedge c} \vee d \underset{(4b)}{=} (\bar{a} \vee \bar{b} \vee \bar{c}) \vee d. \tag{5}$$

A (3) jobb oldala, (4a) ismételt felhasználásával

$$\begin{aligned} a \to \big(b \to (c \to d)\big) &= \bar{a} \vee \big(b \to (c \to d)\big) \\ &= \bar{a} \vee \big(\bar{b} \vee (c \to d)\big) \\ &= \bar{a} \vee \big(\bar{b} \vee (\bar{c} \vee d)\big), \end{aligned} \tag{6}$$

ami a $\vee$ asszociativitása miatt egyenlő (5) egyenlettel.

4. Binomiális tétel

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)\cdot\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k}\right) && \text{(7a)}\\
&= \cdots\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{(n+1)-k}b^{k}+\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^{(n+1)-k}b^{k} && \text{(7b)}\\
&= \cdots\\
&= \binom{n+1}{0}a^{n+1-0}b^{0}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^{(n+1)-k}b^{k}\\
&+\binom{n+1}{n+1}a^{n+1-(n+1)}b^{n+1}. && \text{(7c)}\\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^{(n+1)-k}b^{k}. && \text{(7d)}
\end{aligned}$$