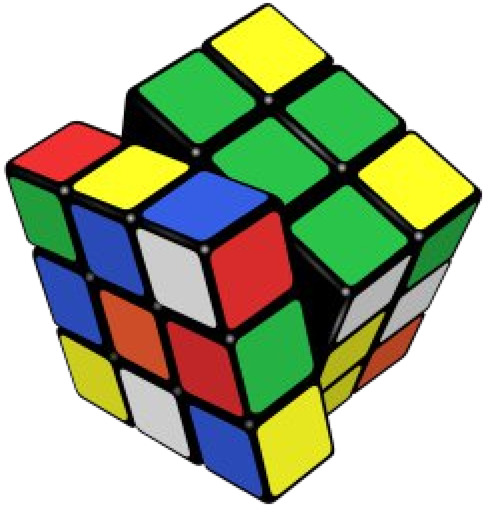
Элементы комбинаторики

Основные понятия и правила комбинаторики (правила суммы и произведения)

Перестановки

Сочетания



Размещения

Законы Комбинаторики:

Сложение используется тогда, когда мы выбираем элемент из нескольких пересекающихся подмножеств.

Правило сложения

Если элемент **A** можно выбрать **n** способами, и элемент **B — m** способами, то **A** или **B** можно выбрать **n + m** способами.

Умножение используется тогда, когда вы выбираете элементы последовательно, друг за другом.

Правило умножения

Если элемент **A** можно выбрать **n** способами, а элемент **B — m** способами, то пару **A** и **B** можно выбрать **n * m** способами.

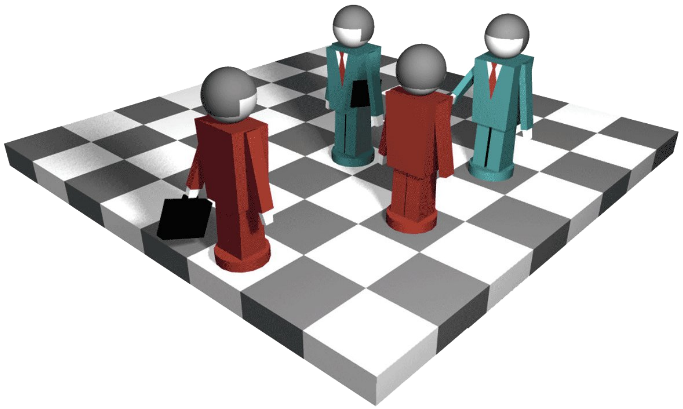
Законы Комбинаторики:

Вычитание используют для нахождения количества подходящих вариантов можно найти общее количество вариантов и вычесть из него все неподходящие варианты.

Правило вычитания:

Пусть существует **n** различных исходов некоторого события, среди которых некоторым свойством обладают **m** исходов. Тогда существует **n – m** исходов, не обладающих этим свойством.

Пример: кубик бросают трижды, среди всех возможных последовательностей результатов есть такие, в которых хотя бы один раз встречается шестёрка. Вместо того, чтобы считать нужное количество, можно вычесть из общего количества последовательностей все «плохие»: **63 – 53 = 91 способ**.



Перестановки

Перестановкой называется конечное множество, в котором установлен порядок элементов.

Число всевозможных перестановок из n элементов вычисляется по формуле:

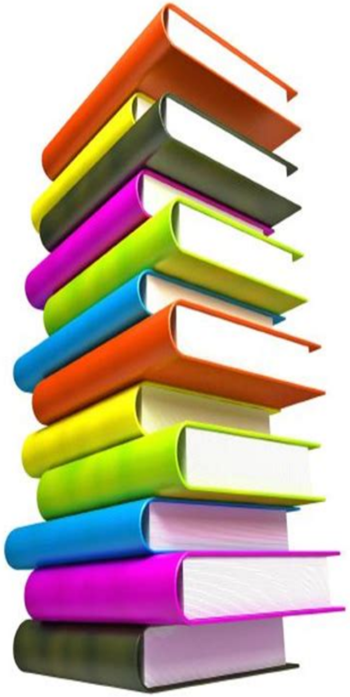
$$P_n = n!$$

Пример 1.
Сколькими способами могут быть расставлены восемь участниц финального забега на восьми беговых дорожках?

Решение: $P_8 = 8! = 40\ 320$

Пример 2.
Сколько различных четырёхзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, причём в каждом числе цифры должны быть разные?

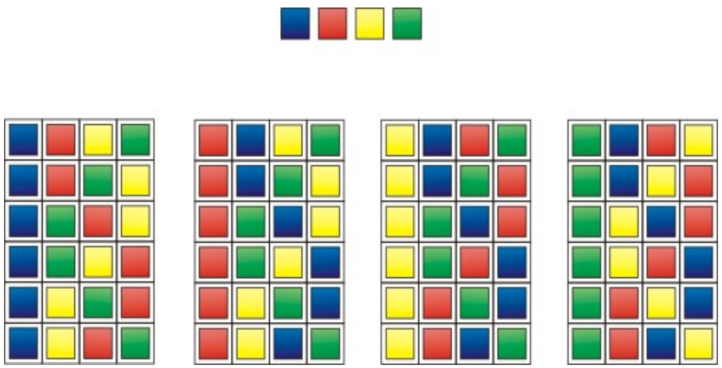
Решение: $P_4 - P_3 = 4! - 3! = 18.$



Пример 3.

Имеется 12 различных книг, среди которых есть четырёхтомник одного автора. Сколькими способами можно расставить эти книги на полке, если книги четырёхтомника должны находиться вместе, но в любом порядке?

Решение: $P_9 \cdot P_4 = 9! \cdot 4! = 8709120$



Размещения

Размещением A_n^k из ***n*** элементов конечного множества по ***k***, где $k \le n$, называют упорядоченное множество, состоящее из ***k*** элементов.

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Пример 1.

Из 13 учащихся нужно отобрать по одному человеку для участия в городских олимпиадах по математике, физике, истории и географии. Каждый из учащихся участвует только в одной олимпиаде. Сколькими способами это можно сделать?

Решение:

$$A_{13}^{4}=\frac{13!}{(13-4)!}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot 13}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}=10\cdot 11\cdot 12\cdot 13=17160$$

Пример 2.

Сколько существует семизначных телефонных номеров, в которых все цифры различны и первая цифра отлична от нуля? Решение:

$$A_{10}^{7} - A_{9}^{6} = \frac{10!}{3!} - \frac{9!}{3!} = \frac{9! \cdot 9}{3!} = 544\ 320$$

Пример 3.

Сколько существует трёхзначных чисел, составленных из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 (без повторений), которые НЕ кратны 3?

Решение:

$$A_{6}^{3} - 8 \cdot P_{3} = \frac{6!}{3!} - 8 \cdot 3! = 120 - 48 = 72$$

Сочетания

Подмножества, составленные из ***n*** элементов данного множества и содержащие ***k*** элементов в каждом подмножестве, называют ***сочетаниями*** из ***n*** элементов по ***k***. (Сочетания различаются только элементами, порядок их не важен: *ab* и *ba* – это одно и тоже сочетание).

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Пример 1.

Сколькими способами можно выбрать четырёх дежурных из класса, в котором 24 человек?

Решение:

$$C_{24}^{4} = \frac{24!}{4!\cdot 20!} = \frac{21\cdot 22\cdot 23\cdot 24}{24} = 10626$$

Пример 2.

Из вазы с цветами, в которой стоят 10 красных гвоздик и 5 белых, выбирают 2 красные гвоздики и одну белую. Сколькими способами можно сделать такой выбор букета?

Решение:

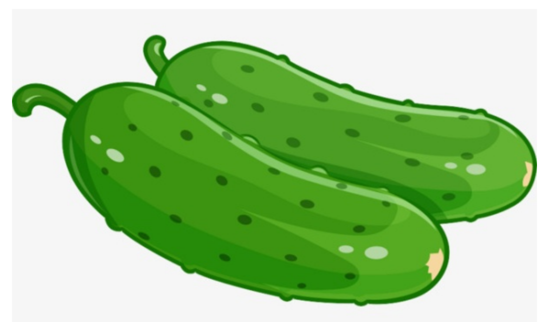
$$C_{10}^{2} \cdot C_{5}^{1} = \frac{10! \cdot 5!}{2! \cdot 8! \cdot 1! \cdot 4!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 5}{2} = 225$$

Пример 3.

Семь огурцов и три помидора надо положить в два пакета так, чтобы в каждом пакете был хотя бы один помидор и чтобы овощей в пакетах было поровну. Сколькими способами это можно сделать?

Решение:

$$C_3^1 \cdot C_7^4 = \frac{3! \cdot 7!}{1! \cdot 2! \cdot 4! \cdot 3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{2} = 105$$



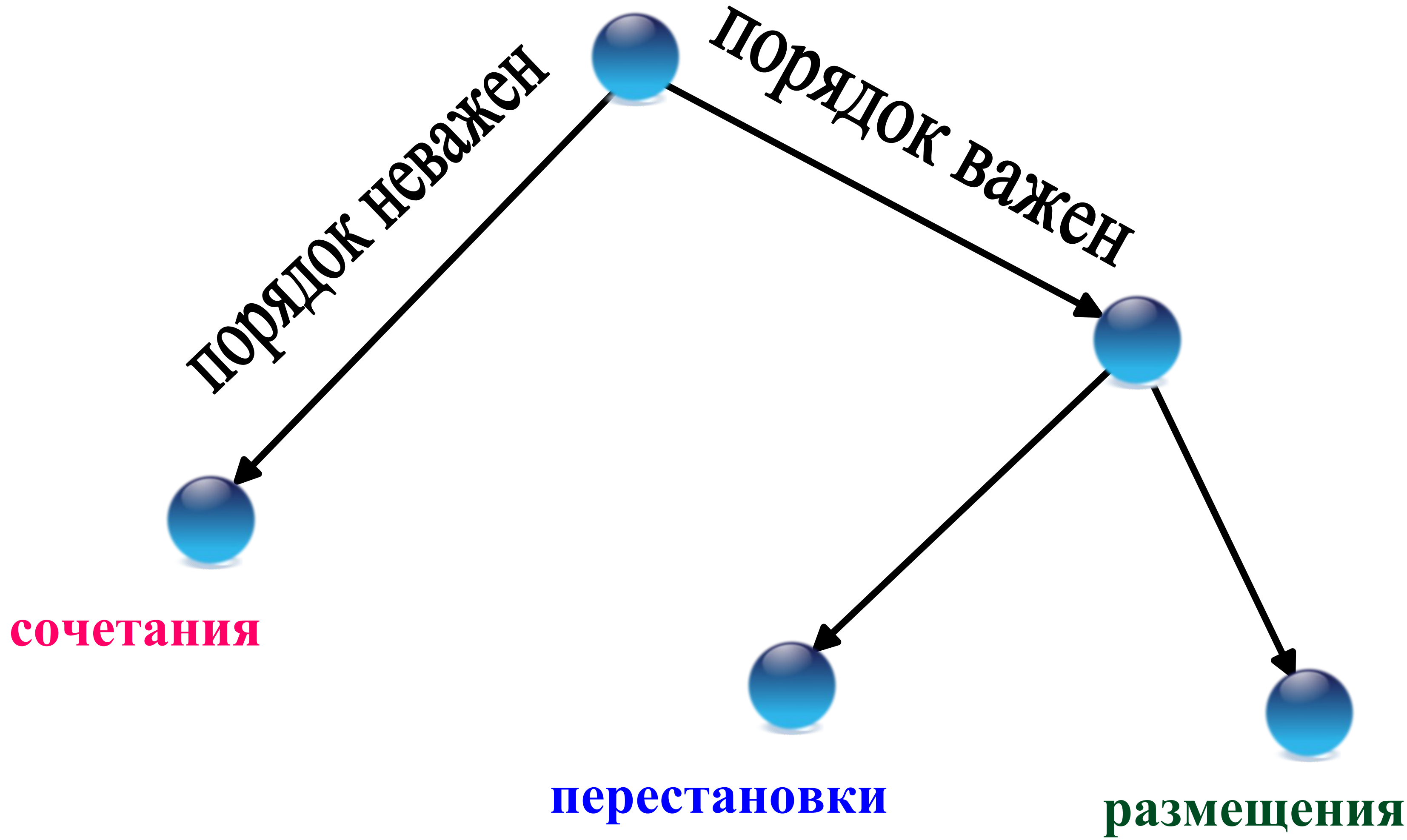
$$C_3^2 \cdot C_7^3 = \frac{3! \cdot 7!}{2! \cdot 1! \cdot 3! \cdot 4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{2} = 105$$

Равенство:

Число размещений, перестановок и сочетаний связаны равенством:

$$A_n^m = P_m \cdot C_n^m$$

Схема связи:


порядок неважен
порядок важен
сочетания
перестановки
размещения

Различия видов соединений

Перестановки из n элементов P_n	Сколькими способами можно с помощью фломастеров цвета зелёного, красного, жёлтого, синего, голубого, черного разукрасить грани кубика?	**Меняется только порядок расположения выбранных элементов**
Сочетания из m элементов по n элементов C_m^n	У лесника три собаки: Астра, Вега и Граф. На охоту лесник решил пойти с двумя собаками. Перечислите все варианты выбора лесником пары собак.	**Меняется только состав входящих в комбинацию элементов, порядок их расположения не важен**
Размещения из m элементов по n элементов A_n^m	Сколькими способами могут быть распределены золотые, серебряные и бронзовые медали между 18-ю командами соревнования?	**Меняется состав входящих в комбинацию элементов и важен порядок их расположения**

Различие между перестановками, размещениями, сочетаниями

- В случае **перестановок** берутся все элементы и изменяется только их местоположение.
- В случае **размещений** берётся только часть элементов и важно расположение элементов друг относительно друга.
- В случае **сочетаний** берётся только часть элементов и не имеет значения расположение элементов друг относительно друга.