15

ЗАКОНЫ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

Закон	Дизъюнкция	Конъюнкция
Переместительный	$A \vee B = B \vee A$	$A \wedge B = B \wedge A$
Сочетательный	$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$	$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$
Распределительный	$(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$	$(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$
Де Моргана		
Идемпотентности	$A \vee A = A$	$A \wedge A = A$
Исключения 3-го	$A \vee \neg A = 1$	$A \wedge \neg A = 0$
Операции с константами	$A \vee 1 = 1$ $A \vee 0 = A$	$A \wedge 1 = A$ $A \wedge 0 = 0$
Поглощения	$A \vee (A \wedge B) = A$ $A \vee (\neg A \wedge B) = A \vee B$	$A \wedge (A \vee B) = A$ $A \wedge (\neg A \vee B) = A \wedge B$
Склеивания	$(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge B) = B$	$(A \vee B) \wedge (\neg A \vee B) = B$

Закон Де Моргана

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

1) Элементами множества A являются натуральные числа. Известно, что выражение

$$((x \in \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}) \rightarrow \neg(x \in \{3, 6, 9, 12\})) \vee (x \in \text{A})$$

истинно (т. е. принимает значение 1) при любом значении переменной x.

2) Элементами множества А являются натуральные числа. Известно, что выражение

$$(x \in \{2, 4, 8, 12, 15\}) \rightarrow (\neg(x \in \{3, 6, 8, 15\}) \vee (x \in \mathrm{A}))$$

истинно (т. е. принимает значение 1) при любом значении переменной x. Определите наименьшее возможное значение произведения элементов множества А

3) Элементами множеств A, P и Q являются натуральные числа, причём P = { 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20} и Q = { 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50}. Известно, что выражение

$$((x \in A) \rightarrow (x \in P)) \land ((x \in Q) \rightarrow \neg(x \in A))$$

истинно (т. е. принимает значение 1) при любом значении переменной x. Определите наибольшее возможное количество элементов множества A.

4) Пусть **P** – множество всех 8-битовых цепочек, начинающихся с 11, **Q** – множество всех 8-битовых цепочек, оканчивающихся на 0, а **A** – некоторое множество произвольных 8-битовых цепочек. Сколько элементов содержит минимальное множество **A**, при котором для любой 8-битовой цепочки x истинно выражение

$$\neg(x \in A) \rightarrow (\neg(x \in P) \vee (x \in Q))$$

5) На числовой прямой даны два отрезка: P = [43; 49] и Q = [44; 53]. Укажите наибольшую возможную длину такого отрезка A, что формула

$$((x \in A) \to (x \in P)) \vee (x \in Q)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x.

6) На числовой прямой даны два отрезка: P = [25, 50] и Q = [32, 47]. Отрезок А таков, что формула

$$(\neg (x \in A) \to \neg(x \in P)) \to ((x \in A) \to (x \in Q))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x. Какова наибольшая возможная длина отрезка А?

7) Обозначим через ДЕЛ(n, m) утверждение «натуральное число n делится без остатка на натуральное число m». Для какого наибольшего натурального числа A формула

$$(\neg ДЕЛ(x, A) \to (ДЕЛ(x, 6)) \to \neg ДЕЛ(x, 3))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

8) Обозначим через ДЕЛ(n, m) утверждение «натуральное число n делится без остатка на натуральное число m». Для какого наименьшего натурального числа А формула

$$(\text{ДЕЛ}(x, 34) \land \neg\text{ДЕЛ}(x, 51)) \rightarrow (\neg\text{ДЕЛ}(x, A) \lor \text{ДЕЛ}(x, 51))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

— — —

9) (№ 3834) Обозначим через ДЕЛ(n, m) утверждение «натуральное число n делится без остатка на натуральное число m». Для какого наименьшего натурального числа A формула

$$ДЕЛ(A, 9) \land (ДЕЛ(280, x) \rightarrow (\neg ДЕЛ(A, x) \rightarrow \neg ДЕЛ(730, x)))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

10)
Определите наименьшее натуральное число A, при котором выражение
$(x \,\&\, A = 0) \land (x \,\&\, 41 \neq 0) \land (x \,\&\, 33 = 0)$
тождественно ложно (то есть принимает значение 0 при любом натуральном значении переменной x)?

11) (№ 4025) Введём выражение M & K, обозначающее поразрядную конъюнкцию M и K (логическое «И» между соответствующими битами двоичной записи). Определите наименьшее натуральное число A, такое что выражение

$$(X \& 41 = 0) \rightarrow ((X \& 119 \neq 0) \rightarrow (X \& A \neq 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной X)?

12) Определите **наибольшее** натуральное число A ***из интервала [43, 55]*** такое, что выражение

$$((x \,\&\, 17 \neq 0) \rightarrow ((x \,\&\, A \neq 0) \rightarrow (x \,\&\, 58 \neq 0))) \rightarrow ((x \,\&\, 8 = 0) \wedge (x \,\&\, A \neq 0) \wedge (x \,\&\, 58 = 0))$$

тождественно **ложно** (то есть принимает значение 0 при любом натуральном значении переменной x)?

13) Укажите наименьшее целое значение A, при котором выражение

$(y + 3x < A) \lor (x > 20) \lor (y > 40)$

истинно для любых целых положительных значений x и y.

14) Для какого наибольшего целого неотрицательного числа A выражение

$(220 \neq y + 2x + z) \vee (A < 6x) \vee (A < y) \vee (A < 2z)$

истинно при любых целых неотрицательных x, y, z?

15) Сколько существует различных комбинаций неотрицательных целых значений x и y, при которых истинно выражение

$\neg(\ ((x > 6) \wedge ((x + y) \geq 5)) \vee\ (y \geq 5)\ )$

16) Элементами множества A являются натуральные числа. Известно, что выражение

$(x \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}) \to (((x \in \{3, 6, 9, 12, 15\}) \text{and } \neg(x \in A)) \to \neg(x \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}))$

истинно (т. е. принимает значение 1) при любом значении переменной x.

Определите наименьшее возможное значение суммы элементов множества A.

17) Элементами множеств A, P и Q являются натуральные числа, причём P = { 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20} и Q = { 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50}. Известно, что выражение

$((x \in A) \to (x \in P)) \land ((x \in Q) \to \neg(x \in A))$

истинно (т. е. принимает значение 1) при любом значении переменной x. Определите наибольшее возможное количество элементов множества A.

18) Пусть P – множество всех 8-битовых цепочек, начинающихся с 11, Q – множество всех 8-битовых цепочек, оканчивающихся на 0, а A – некоторое множество произвольных 8-битовых цепочек. Сколько элементов содержит минимальное множество A, при котором для любой 8-битовой цепочки x истинно выражение

$\neg(x \in A) \rightarrow (\neg(x \in P) \land \neg(x \in Q))$

19) На числовой прямой даны два отрезка: P = [25; 50], Q = [54; 75]. Найдите наименьшую возможную длину отрезка A, при котором формула

$(x \in Q) \rightarrow (((x \in P) \equiv (x \in Q)) \vee (\neg(x \in P) \rightarrow (x \in A)))$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любых x.

20) На числовой прямой даны два отрезка: P=[25;37] и Q=[32;50]. Укажите наибольшую возможную длину такого отрезка A, что формула

$$((x \in A) \land \neg(x \in Q)) \to ((x \in P) \lor (x \in Q))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любых x.