

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI UDINE  
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E INFORMATICA  
CORSO DI LAUREA IN TECNOLOGIE WEB E MULTIMEDIALI

TESI DI LAUREA

# Verifica di proprietà locali su BRS

CANDIDATO:  
Luca Geatti

RELATORE:  
Prof. Marino Miculan

CO-RELATORE:  
Dott. Marco Peressotti

Anno Accademico 2014-2015

Dipartimento di Matematica e Informatica  
Università degli Studi di Udine  
Via delle Scienze, 206  
33100 Udine  
Italia



Ai miei genitori



---

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>ix</b>
<b>1 Bigrafi e BRS</b>	<b>1</b>
1.1 Definizione informale di Bigrafo . . . . .	1
1.1.1 Esempio . . . . .	2
1.2 Definizione formale di Bigrafo . . . . .	5
1.2.1 Place Graph . . . . .	5
1.2.2 Link Graph . . . . .	6
1.2.3 Bigrafo . . . . .	8
1.3 Operazioni sui Bigrafi . . . . .	8
1.3.1 Traduzione di Supporto . . . . .	9
1.3.2 Composizione . . . . .	9
1.3.3 Giustapposizione . . . . .	11
1.4 L'algebra dei bigrafi . . . . .	12
1.4.1 Placing elementari . . . . .	13
1.4.2 Linking elementari . . . . .	13
1.4.3 Ioni . . . . .	14
1.4.4 Forma normale discreta . . . . .	15
1.5 Bigraphical Reactive Systems . . . . .	16
1.5.1 Esempio . . . . .	17
1.5.2 Regole di reazione parametriche . . . . .	19
1.5.3 BRS . . . . .	21
1.5.4 Esempio . . . . .	21
<b>2 Isomorfismo tra bigrafi</b>	<b>25</b>
2.1 Esempio . . . . .	25
2.2 Formulazione del problema . . . . .	26
2.2.1 Complessità . . . . .	27

2.3	Strategia di soluzione . . . . .	29
2.3.1	Esempi . . . . .	30
2.4	Vincoli . . . . .	32
2.4.1	Vincoli per il place graph . . . . .	32
2.4.2	Vincoli per il link graph . . . . .	36
2.4.3	Vincoli di coerenza . . . . .	40
2.4.4	Implementazione con Choco . . . . .	42
2.5	Benchmarks . . . . .	45
2.6	Grafo degli stati . . . . .	47
2.6.1	Esempio . . . . .	48
<b>3</b>	<b>Model Checker per bigrafi</b>	<b>53</b>
3.1	Model Checker . . . . .	53
3.1.1	Generazione degli stati . . . . .	54
3.2	Logica per i bigrafi . . . . .	57
3.2.1	Sintassi . . . . .	57
3.2.2	Semantica . . . . .	58
3.3	Dettagli Implementativi . . . . .	59
3.3.1	Property Matcher . . . . .	60
3.3.2	Regole di Reazione con Proprietà . . . . .	60
3.4	Esempi . . . . .	61
3.4.1	Moltiplicazione . . . . .	61
3.4.2	Router . . . . .	62
<b>4</b>	<b>Casi di studio</b>	<b>67</b>
4.1	NFA . . . . .	67
4.2	Problema dei filosofi a cena . . . . .	74
4.2.1	Prima strategia . . . . .	76
4.2.2	Seconda strategia . . . . .	81
4.3	Politiche di sicurezza . . . . .	83
4.3.1	Segnatura . . . . .	84
4.3.2	Prima politica . . . . .	84
4.3.3	Seconda strategia . . . . .	90

---

<b>Conclusioni</b>	<b>93</b>
<b>A Notazione dei vari capitoli</b>	<b>95</b>
A.1 Notazione della sezione 1.2 . . . . .	95
A.2 Notazione della sezione 1.4 . . . . .	95
<b>Bibliografia</b>	<b>97</b>





---

## Elenco delle figure

1.1	Un semplice bigrafo. . . . .	2
1.2	Le due strutture ortogonali del bigrafo B. . . . .	2
1.3	Il bigrafo C. . . . .	4
1.4	Bigrafo C. . . . .	4
1.5	Il bigrafo A . . . . .	4
1.6	Bigrafo A. . . . .	5
1.7	Link Graph decomposto. . . . .	7
1.8	Esempio di bigrafo. . . . .	8
1.9	Placing elementari. . . . .	13
1.10	Linking elementari. . . . .	14
1.11	$K_{\vec{x}}$ . . . . .	14
1.12	Atomo e molecola discreti. . . . .	15
1.13	Esempio. . . . .	17
1.14	Prima regola di reazione . . . . .	18
1.15	Seconda regola di reazione . . . . .	18
1.16	Terza regola di reazione . . . . .	19
1.17	Moltiplicazione tramite bigrafi . . . . .	22
1.18	Caso ricorsivo . . . . .	22
1.19	Caso Base . . . . .	23
1.20	Match decomposto . . . . .	24
1.21	Bigrafo finale . . . . .	24
2.1	Bigrafi Isomorfi: $(4 * 2) = (2 * 4)$ . . . . .	31
2.2	Bigrafi non Isomorfi . . . . .	31
2.3	Place Graph e Link Graph del bigrafo 2.2 . . . . .	32
2.4	Rete di flusso per l'isomorfismo tra place graphs. . . . .	32
2.5	Soluzione della rete di flusso . . . . .	34
2.6	Esempio per il primo vincolo . . . . .	34

2.7	Esempio per il secondo vincolo . . . . .	35
2.8	Esempio per il vincolo sul flusso in uscita . . . . .	36
2.9	Esempio per il vincolo sul flusso in entrata . . . . .	36
2.10	Esempio di rete di flusso per il problema di isomorfismo tra link graphs. . . . .	37
2.11	Esempio per il primo vincolo. . . . .	38
2.12	Esempio per il secondo vincolo. . . . .	39
2.13	Esempio per i due vincoli sul flusso in uscita. . . . .	40
2.14	Esempio per i due vincoli sul flusso in entrata. . . . .	40
2.15	Implementazione del vincolo sul flusso in uscita. . . . .	44
2.16	Implementazione del secondo vincolo strutturale . . . . .	45
2.17	Loading Time . . . . .	46
2.18	Working Time . . . . .	46
2.19	Esempio di grafo degli stati. . . . .	47
2.20	Grafo degli stati infinito. . . . .	48
2.21	Regola di inoltra tra router. . . . .	49
2.22	Bigrafo di partenza . . . . .	50
2.23	Bigrafo dopo l'applicazione della regola $R_0$ . . . . .	50
2.24	Grafo degli stati infinito. . . . .	51
2.25	Grafo degli stati finito. . . . .	51
3.1	Grafo degli stati. . . . .	54
3.2	Esempio di generazione Breadth First. . . . .	55
3.3	Esempio di generazione random. . . . .	56
3.4	Regola di inoltra tra router. . . . .	60
3.5	Bigrafo per il numero 8 . . . . .	61
3.6	Model Checker. . . . .	62
3.7	Bigrafo di partenza . . . . .	62
3.8	Regola di inoltra tra router. . . . .	63
3.9	Esempi di predicati . . . . .	63
3.10	Grafo degli stati . . . . .	64
3.11	Predicato con proprietà . . . . .	65
4.1	Automa per il linguaggio $(a(a + b))^*$ . . . . .	67

4.2	Bigrafo per l'automa A . . . . .	68
4.3	Bigrafo per la stringa "abaa" . . . . .	69
4.4	Istanza del problema: la stringa "abaa" viene accettata dall'automa A? . . . . .	70
4.5	Regola di reazione $R_0$ . . . . .	71
4.6	Bigrafo B . . . . .	72
4.7	Traccia d'esecuzione di $MC_{big}$ . . . . .	73
4.8	Grafo degli stati . . . . .	74
4.9	Codifica in bigrafi di un'istanza del problema . . . . .	75
4.10	Regole per prendere le forchette . . . . .	76
4.11	Regole per lasciare le forchette . . . . .	77
4.12	Bigrafo B: proprietà di stallo . . . . .	78
4.13	Due bigrafi isomorfi . . . . .	80
4.14	Bigrafo per il problema della sicurezza dell'azienda . . . . .	85
4.15	regola per l'entrata in una stanza ( $R_0$ ) . . . . .	85
4.16	regola per l'uscita da una stanza ( $R_1$ ) . . . . .	85
4.17	regola per il collegamento ad un computer ( $R_2$ ) . . . . .	86
4.18	regola per il trasferimento di un token da un computer ad uno smartphone ( $R_3$ ) . . . . .	86
4.19	regola per iniziare una connessione tra due smartphones ( $R_4$ ) . . . . .	87
4.20	regola per trasferire un Token fra due smartphones ( $R_5$ ) . . . . .	87
4.21	Applicazione delle regola $R_0, R_2$ e $R_3$ . . . . .	88
4.22	Applicazione delle regole $R_1, R_4$ e $R_5$ . . . . .	89
4.23	Applicazione delle regole $R_1, R_4$ e $R_5$ . . . . .	89
4.24	regola per l'entrata sicura in una stanza ( $secureR_0$ ) . . . . .	90
4.25	regola per l'uscita sicura da una stanza ( $secureR_1$ ) . . . . .	90



---

# Introduzione

Il lavoro riportato in questa tesi nasce dal problema di verificare delle proprietà in un Sistema Reattivo Bigrafico (BRS). In particolare, si è studiato il modo di controllare il sistema durante la sua evoluzione e dunque di fermare quest'ultima appena le proprietà desiderate siano state raggiunte. Questo tipo di verifica va sotto il nome di “Model Checking”.

I Sistemi Reattivi Bigrafici (BRS) sono un nuovo formalismo con il quale si possono rappresentare sistemi distribuiti, di qualsiasi tipo essi siano: da un sistema di smartphones ad un sistema biologico [1]. I BRS sono basati su un'importante struttura matematica: i bigrafi. Sono questi che permettono una facile trattazione dei vari “oggetti distribuiti” che compongono il sistema, e di come essi interagiscono tra di loro.

L'importanza dei bigrafi la si può riscontrare nella loro flessibilità: essi costituiscono un *meta-modello*, con cui è possibile rappresentare sistemi di qualsiasi dominio si voglia. Di recente i bigrafi sono stati usati per creare delle Reti di Petri [2], come anche per controllare un sistema mobile di robot [4].

Un altro punto di forza dei bigrafi sta nella loro capacità di evolversi, potendo così rappresentare lo stato del sistema anche quando questo cambia. Si ha così a disposizione un Sistema Reattivo Bigrafico.

Questa tesi tratta il problema di come poter sapere se un dato BRS rispetti certe proprietà. Per esempio: se rappresentiamo una rete con un BRS, ci possiamo chiedere se, dato uno stato iniziale in cui il pacchetto parte dal mittente A, esso arrivi o meno al destinatario B che si trova a vari router di distanza da A. Oppure, cambiando dominio del problema, ci possiamo domandare se un automa rappresentato tramite bigrafi riconosca o meno una data stringa.

Il problema affrontato in questa sede prescinde quindi dal particolare dominio del problema, ed offre una soluzione generale, valida per qualsiasi BRS. Per fare questo,

si sono dovute affrontare varie problematiche. Tra le più importanti figurano:

- quando due bigrafi sono uguali? Un BRS evolve senza memoria degli stati precedenti in cui si è trovato. Questo problema, in concreto, può potenzialmente causare evoluzioni infinite del BRS: per esempio, il pacchetto nella rete può girare all'infinito tra due router, perchè il BRS si "dimentica" da dove il pacchetto è arrivato.
- come rappresentare le proprietà da verificare nel BRS? In particolare, posso rappresentare con un solo formalismo vari tipi di proprietà, dall'arrivo a destinazione di un pacchetto al riconoscimento di una stringa? Il problema maggiore è il fatto che il modo per rappresentarle deve essere generale tanto quanto i BRS. In sostanza si è scelto un modo che astraesse ancora una volta dal dominio scelto.

La struttura della tesi rispetta dunque queste problematiche:

Nel capitolo 1 verranno presentate formalmente le nozioni di Bigrafo e di BRS. Con esse, verrà anche descritta un'algebra per creare nuovi bigrafi a partire da bigrafi base.

Nel capitolo 2 si affronta il primo dei due principali problemi, che va sotto il nome di "isomorfismo tra bigrafi". La risoluzione di questo problema ci permetterà di poter affermare quando due bigrafi sono uguali o meno, e quindi di evitare evoluzioni infinite del BRS.

Si affronterà nel capitolo 3 il secondo problema, cioè quello delle proprietà. Esse verranno espresse sul calcolatore tramite una semplice logica a predicati. Si potranno così esprimere tutte le proprietà desiderate, indipendentemente dal dominio del sistema. Grazie a queste proprietà, si arriverà all'implementazione di un Model Checker per i bigrafi.

Nel capitolo 4 verranno presentati alcuni esempi, presi da vari domini. Si potrà apprezzare l'importanza di avere un Model Checker e della semplicità con cui si

possono esprimere le proprietà da verificare.

Infine (capitolo 5), si sono tratte le conclusioni sull'intero lavoro. Verranno presentate alternative per l'implementazione dell'isomorfismo e delle proprietà.





---

# 1

## Bigrafi e BRS

In questo capitolo vengono presentate le descrizioni formali di bigrafo e di Sistema Reattivo Bigrafico. Si vedrà come l'importanza dei bigrafi risieda nel fatto di rappresentare contemporaneamente i concetti di *località* e *connessione*.

L'algebra dei bigrafi è stata per gran parte costruita sulla base della Teoria delle Categorie, che in questa sede non verrà introdotta. Le definizioni ed i teoremi sono stati presi da [3], a cui si rimanda per i dettagli sulla Teoria delle Categorie. Infine si rimanda all'Appendice A per la descrizione della terminologia usata.

### 1.1 Definizione informale di Bigrafo

L'idea fondamentale alla base della loro teoria, è che ogni bigrafo sia composto da due strutture del tutto *indipendenti* sullo *stesso* insieme di nodi. Queste due strutture si chiamano *Place Graph* e *Link Graph* e modellano rispettivamente la località e la connessione.

Nell'introduzione, si è accennato al fatto che i bigrafi sono flessibili e adatti a rappresentare ogni dominio. Questo è possibile grazie al concetto di *segnatura*, che è l'analogo ad una grammatica per un linguaggio.

**Definizione 1** (Segnatura e Controllo). *Una segnatura è una coppia  $(K, ar)$ , dove  $K$  è un insieme di tipi di nodi chiamati controlli, e  $ar : K \rightarrow \mathbb{N}$  è una mappa che associa ad ogni tipo di nodo (cioè ad ogni controllo) un numero naturale chiamato arietà.*

Quindi, dare una segnatura ad un bigrafo significa associare ad ogni nodo sia un tipo sia il suo numero di porte. L'equivalente grafico consiste nel disegnare nodi diversi con simboli diversi.

**Notazione** (Segnatura). *Da qui in avanti, una segnatura  $(K, ar)$  verrà indicata nel seguente modo:*

$$K = \{K_1 : a_1, \dots, K_n : a_n\}$$

dove ogni nodo di tipo (controllo)  $K_i$  ha arietà  $a_i$ .

### 1.1.1 Esempio

Diamo un primo esempio informale di bigrafo.

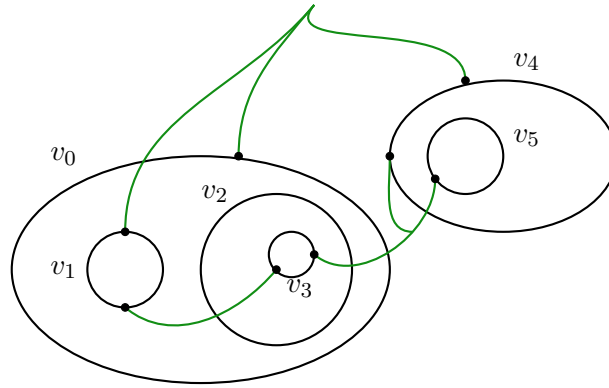


Figura 1.1: Un semplice bigrafo.

In figura 1.1 vediamo un bigrafo  $B$ , con una data segnatura. Si vede subito come ci siano dei controlli diversi. Per esempio, il nodo  $v_0$  ha una sola porta mentre il nodo  $v_1$  ne ha due. L'informazione che quest'ultimo sia contenuto in  $v_0$  è rappresentata nel place graph di figura 1.2.a. Le interconnessioni dei vari nodi sono invece riportate nel rispettivo link graph di figura 1.2.b.

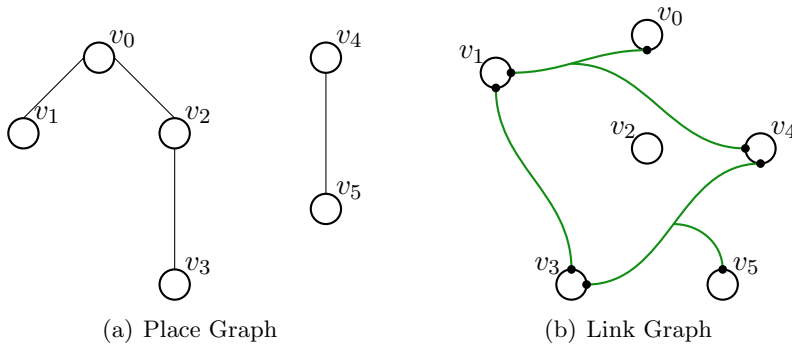


Figura 1.2: Le due strutture ortogonali del bigrafo  $B$ .

Un'importante caratteristica dei bigrafi e della loro algebra è la possibilità di essere composti, cioè di formare un nuovo bigrafo da due bigrafi di partenza. Questo è equivalente al problema di considerare un bigrafo *parte* di un altro. Si vedrà che questa operazione va sotto il nome di *composizione*. Se prendiamo il bigrafo  $B$  di cui sopra, allora è possibile scrivere un'equazione di questo tipo:

$$B = A \circ C$$

Per renderla possibile dobbiamo aggiungere struttura ai bigrafi. Si introducono quindi le interfacce interne ed esterne, sia per il place graph sia per il link graph:

- L'interfaccia esterna ed interna del place graph sono un numero naturale  $n$  che possiamo trattare come un ordinale: l'interfaccia  $n$  indica l'insieme  $\{0, \dots, n-1\}$ . Se l'interfaccia esterna è  $k$ , allora si dice che ci sono  $k$  radici. Se l'interfaccia interna è  $h$ , allora si dice che ci sono  $h$  siti.
- Per il link graph, invece, le interfacce sono *insiemi* di nomi, come per esempio  $\{x, y\}$ . Se un link graph ha un'interfaccia esterna del tipo  $\{a, b, c\}$ , allora diciamo che ci sono tre *outernames* chiamati  $a, b$  e  $c$ . Se l'interfaccia interna è del tipo  $\{x, y\}$ , allora diciamo che il bigrafo ha due *innername* chiamati  $x$  e  $y$ .

Il concetto fondamentale delle interfacce è che servono per l'unione dei due bigrafi. Per esempio, prendendo il place graph, nell'operazione di composizione  $A \circ C$ , i siti di  $A$  dovranno *concordare* (vedremo una descrizione formale di questo concetto) con le radici di  $C$ . Per il link graph il concetto è lo stesso: gli innername di  $A$  dovranno unirsi con gli outernames di  $C$ .

Si consideri per esempio il bigrafo della figura 1.1. Se vogliamo trovare due bigrafi  $A$  e  $C$  tali che  $B = A \circ C$ , allora dobbiamo rispettare le condizioni con cui si può effettuare l'operazione di composizione. Le figure 1.3 e 1.5 rappresentano rispettivamente i due bigrafi  $C$  ed  $A$ . Si noti ancora una volta che le radici di  $C$  si *uniscono* ai siti di  $A$ , e gli outernames di  $C$  fanno lo stesso con gli innername di  $A$ .

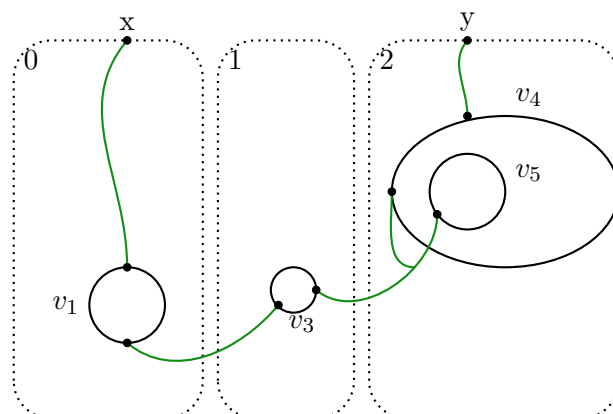


Figura 1.3: Il bigrafo C.

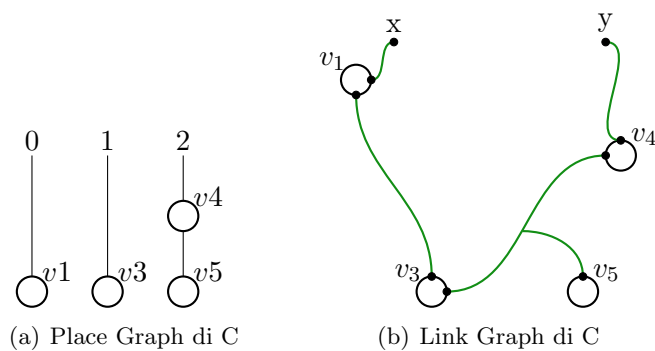


Figura 1.4: Bigrafo C.

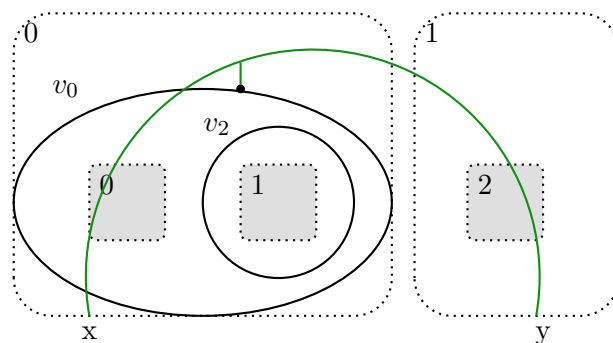


Figura 1.5: Il bigrafo A

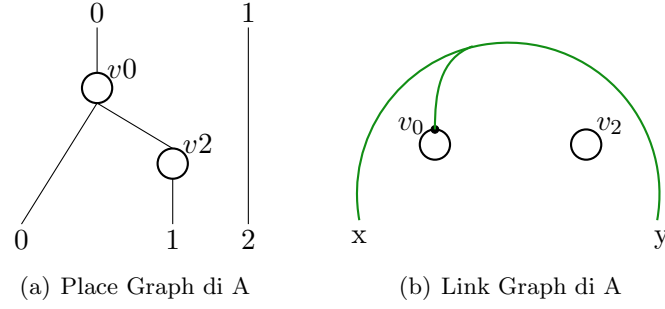


Figura 1.6: Bigrafo A.

## 1.2 Definizione formale di Bigrafo

Siamo ora pronti per definire separatamente i concetti di *Place Graph* e *Link Graph*. Quelli descritti, che noi chiameremo semplicemente bigrafi, in realtà si chiamano *concrete bigraphs*, per distinguerli da quelli astratti. In questa sede si tratterà solo di bigrafi concreti.

Si rimanda all'appendice A per la notazione usata.

### 1.2.1 Place Graph

Il place graph è una delle due strutture fondamentali di ogni bigrafo. E' una *foresta* e rappresenta l'informazione di *nesting*, ovvero quali nodi si trovano all'interno di altri. Come già notato in figura 1.2.a, le radici ed i siti sono *ordinati*, essendo essi rappresentati da un ordinale. In definitiva, quindi, il place graph è una foresta ordinata, in cui solo le radici ed i siti sono ordinati.

**Definizione 2** (Place Graph). *Un place graph*

$$F = (V_F, ctrl_F, prnt_F) : m \rightarrow n$$

è una tripla avente un'interfaccia interna  $m$  ed un'interfaccia esterna  $n$ , entrambe ordinali finiti. Queste indicano rispettivamente i siti e le radici del place graph.  $F$  ha un insieme finito  $V_F$  di nodi, una control map  $ctrl : V_F \rightarrow K$ , e una parent map

$$prnt : m \uplus V_F \rightarrow V_F \uplus n$$

che è aciclica, cioè se  $prnt_F^i(v) = v$  allora  $i = 0$ .

Questa definizione formale ricalca ciò che è già stato notato nell'esempio della sottosezione 1.1.1. Infatti, si noti che il place graph  $F$  ha  $m$  siti ed  $n$  radici, entrambi

ordinati, che costituiscono rispettivamente la sua interfaccia interna ed esterna. La funzione  $ctrl_F$  associa ad ogni nodo un controllo, cioè un nome. Come già notato, l'equivalente grafico sta nel disegnare con simboli diversi nodi con controllo diverso. Infine, la funzione  $prnt_F$  associa ad ogni nodo interno o sito il suo genitore, che può essere a sua volta un altro nodo interno o una radice. Questa funzione è di fondamentale importanza, in quanto è il cuore del place graph: rappresenta l'informazione di quali nodi si trovano all'interno di altri. E' *aciclica*, nel senso che  $n$  sue *composizioni* non porteranno mai al nodo di partenza. In formule:

$$prnt_F \circ prnt_F \circ \dots \circ prnt_F(v) \neq v$$

Questo è equivalente a dire che la struttura dati rappresentata dal place graph è una *foresta*.

### 1.2.2 Link Graph

La seconda struttura dati fondamentale è il link graph. Esso rappresenta l'informazione di *connessione* tra i nodi del bigrafo. E' un *ipergrafo*, infatti un arco può collegare due o più nodi.

**Definizione 3** (Link Graph). *Un link graph*

$$F = (V_F, E_F, ctrl_F, link_F) : X \rightarrow Y$$

è una quadrupla avente un'interfaccia interna  $X$  ed una interfaccia esterna  $Y$ , chiamate rispettivamente gli *inner names* e *outer names* del link graph.  $F$  ha un insieme finito  $V_F$  di nodi e  $E_F$  di archi (edges), una control map  $ctrl : V_F \rightarrow K$ , e una link map:

$$link_F : X \uplus P_F \rightarrow E_F \uplus Y$$

dove  $P_F = \{(v, i) \mid v \in V_F \wedge i \in ar(ctrl_F(v))\}$  è l'insieme delle porte di  $F$ . Quindi,  $(v, i)$  è l' $i$ -esima porta del nodo  $v$ . Chiamiamo  $X \uplus P_F$  i punti di  $F$ , mentre  $E_F \uplus Y$  i suoi link.

Notiamo subito come alcune nozioni rimangono invariate dal place graph. Per esempio,  $V_F$  e  $ctrl_F$  non cambiano. Si aggiungono però due concetti:

- $E_F$ : è l'insieme di archi del link graph  $F$ . Sono oggetti del tutto indipendenti dai nodi.

- $link_F$ : è la funzione che consente di creare l'*ipergrafo*.

Dalla definizione 1.1, sappiamo che un dato controllo ha un ben preciso numero di porte. La funzione  $ar : K \rightarrow \mathbb{N}$  consente di calcolare il numero di porte di un dato controllo:  $ar(ctrl_F(v))$  restituisce un numero naturale, che è il numero di porte del controllo del nodo  $v$ . Grazie alla funzione  $ar$ , nel link graph ci sleghiamo totalmente dal concetto di *nodo*, e siamo in grado di sostituirlo con il concetto di *porta*.

Introduciamo ora due concetti:

- l'insieme dei *punti* di  $F$  è l'insieme che comprende tutte le sue porte ( $P_F$ ) e tutti i suoi inner names ( $X$ ).
- l'insieme dei *link* di  $F$  è l'insieme che comprende tutti i suoi archi (edges) e tutti i suoi outer names ( $Y$ ).

La funzione  $link_F$  avrà come dominio l'insieme dei punti e come codominio l'insieme dei link. Possiamo quindi pensarla come è raffigurata in figura 1.7.b. La funzione  $link_F$  è perciò quella che crea il vero e proprio ipergrafo: associa ad ogni punto *uno ed un solo* link. Sfruttando la *non-iniettività* della funzione possiamo creare l'ipergrafo.

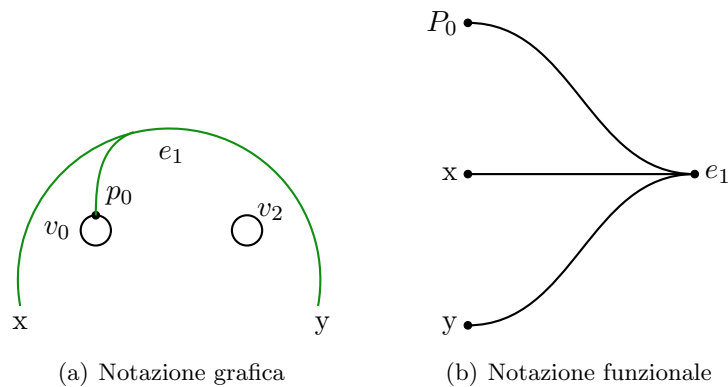


Figura 1.7: Link Graph decomposto.

In figura 1.7.a si vede il link graph nella sua notazione usuale, cioè con anche i nodi disegnati. Invece, in 1.7.b si vede la notazione sotto forma di funzione, dove si specifica dominio ( $p_0$ ,  $x$  e  $y$ ) e codominio ( $e_1$ ).

### 1.2.3 Bigrafo

Un bigrafo è semplicemente l'unione del place graph e del link graph. E' importante notare che esse condividono lo *stesso* insieme di nodi.

**Definizione 4** (Bigrfo). *Un bigrafo*

$$F = (V_F, E_F, ctrl_F, prnt_F, link_F) : \langle n, X \rangle \rightarrow \langle m, Y \rangle$$

*consiste in un place graph  $F^P = (V_F, ctrl_F, prnt_F) : n \rightarrow m$  e in un link graph  $F^L = (V_F, E_F, ctrl_F, link_F) : X \rightarrow Y$ .*

**Notazione** (Bigrfo). *Un bigrafo  $F$  viene spesso indicato tramite le sue interfacce:*

$$F = \langle n, X \rangle \rightarrow \langle m, Y \rangle$$

*stando ad indicare che  $F$  ha  $n$  siti,  $X$  inner names,  $m$  radici e  $Y$  outer names.*

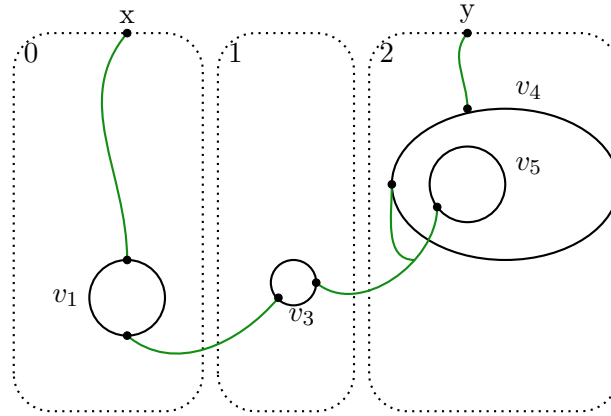


Figura 1.8: Esempio di bigrafo.

Il bigrafo della figura 1.8, rispettando la notazione, è scritto in questo modo:  
 $F = \langle 0, \emptyset \rangle \rightarrow \langle 3, \{x, y\} \rangle$

## 1.3 Operazioni sui Bigrafi

Nelle sezioni precedenti, si è definita formalmente la nozione di bigrafo. Ora, si studiano le varie operazioni possibili, ovvero come ottenere un nuovo bigrafo da due bigrafi di partenza. Queste operazioni saranno utili per la prossima sezione, che tratterà dell'algebra dei bigrafi.



### 1.3.1 Traduzione di Supporto

La prima operazione tratta di come si può ottenere un nuovo bigrafo avendo a disposizione un solo bigrafo base e una funzione biettiva. Si dimostra che applicando tale biiezione ai nodi e archi del bigrafo di partenza si determina *unicamente* il bigrafo risultante.

**Definizione 5** (Traduzione di Supporto). *Per ogni place graph, link graph e per ogni bigrafo è assegnato un insieme finito  $|F|$ , il suo supporto. Per un place graph, definiamo  $|F| = V_F$ , mentre per un link graph o un bigrafo definiamo  $|F| = V_F \uplus E_F$ . Per due bigrafi  $F$  e  $G$ , una traduzione di supporto  $p : |F| \rightarrow |G|$  da  $F$  a  $G$  consiste in due biiezioni  $p_V : V_F \rightarrow V_G$  and  $p_E : E_F \rightarrow E_G$  che rispettano la struttura, nel seguente senso:*

- $p$  preserva i controlli, cioè:  $ctrl_G \circ p_V = ctrl_F$ . Ne segue che  $p$  induce una biiezione sulle porte  $p_P : P_F \rightarrow P_G$ , definita da  $p_P((v, i)) = (p_V(v), i)$ .
- $p$  modifica le mappe sulla struttura ( $prnt$  e  $link$ ) in questo modo:

$$\begin{aligned} prnt_G \circ (id_m \uplus p_V) &= (id_n \uplus p_V) \circ prnt_F \\ link_G \circ (id_X \uplus p_P) &= (id_Y \uplus p_E) \circ link_F \end{aligned}$$

Come detto prima, data la biiezione  $p$  e il bigrafo  $F$ , queste condizioni determinano unicamente  $G$ , che denotiamo con  $p \cdot F$  e chiamiamo *traduzione di supporto di  $F$  tramite  $p$* . Chiamiamo  $F$  e  $G$  *support equivalent* ( $F \simeq G$ ) se esiste una tale traduzione di supporto.

Dati due bigrafi, il problema di trovare una traduzione di supporto tra i due è equivalente al problema di stabilire quando essi sono uguali. Per cui, da qui in seguito si userà il termine *traduzione di supporto* come sinonimo di *isomorfismo*.

**Definizione 6** (Isomorfismo). *Due bigrafi  $F$  e  $G$  si dicono isomorfi se e solo se esiste una traduzione di supporto tra  $F$  e  $G$ , cioè se e solo se  $F$  e  $G$  sono support equivalent ( $F \simeq G$ ).*

### 1.3.2 Composizione

L'operazione di *composizione* è denotata dal simbolo  $\circ$  e permette di scrivere equazioni del tipo  $B = A \circ C$ , come nell'esempio 1.1.1. La composizione necessita del

concetto di interfaccia: come già notato, l'interfaccia interna di  $A$  deve concordare con l'interfaccia esterna di  $C$ . Con una prima approssimazione, possiamo dire che  $C$  deve essere incluso *dentro*  $A$ .

**Definizione 7** (Composizione). *Si trattano separatamente i casi del place graph e del link graph:*

- Place Graph: Se  $F : k \rightarrow m$  e  $G : m \rightarrow n$  sono due place graph con supporti disgiunti ( $|F| \# |G|$ ), la loro composizione

$$G \circ F = (V, ctrl, prnt) : k \rightarrow n$$

ha i nodi  $V = V_F \uplus V_G$  e la control map  $ctrl = ctrl_F \uplus ctrl_G$ . La sua parent map  $prnt$  è definita come segue: se  $w \in k \uplus V_F \uplus V_G$  è un sito o un nodo di  $G \circ F$ , allora :

$$prnt(w) \stackrel{def}{=} \begin{cases} prnt_F(w), & \text{se } w \in k \uplus V_F \wedge prnt_F(w) \in V_F \\ prnt_G(j), & \text{se } w \in k \uplus V_F \wedge prnt_F(w) = j \in m \\ prnt_G(w), & \text{se } w \in V_G \end{cases}$$

Il place graph identità su  $m$  è  $id_m \stackrel{def}{=} (\emptyset, \emptyset, id_m) : m \rightarrow m$

Si noti come l'unione delle due interfacce (quella esterna di  $A$  e quella interna di  $B$ ) sia modellata dalla seconda riga. In particolare,  $prnt_F(w) = j$  sta ad indicare che  $j$  è una radice di  $F$  e  $w$  è uno dei suoi figli. Dato che  $j$  è una radice, essa sarà un intero nell'insieme  $\{0, \dots, m-1\}$ , e dovrà quindi appartenere anche all'interfaccia interna di  $G$ , dove  $j$  sarà un sito. La parent map di  $G \circ F$  su  $w$  sarà quella di  $G$  sul suo sito  $j$ . Quindi la seconda riga modella la seguente azione: mantengo la parent map per tutti i nodi interni dei due bigrafi, e al momento dell'unione delle due interfacce unisco la radice  $i$ -esima di  $F$  con il sito  $i$ -esimo di  $G$ , per ogni  $i \in \{0, \dots, m-1\}$ .

- Link Graph: Se  $F : X \rightarrow Y$  e  $G : Y \rightarrow Z$  sono due link graph con supporti disgiunti ( $|F| \# |G|$ ), la loro composizione

$$G \circ F = (V, E, ctrl, link) : X \rightarrow Z$$

ha  $V = V_F \uplus V_G$ ,  $E = E_F \uplus E_G$ ,  $ctrl = ctrl_F \uplus ctrl_G$  e la sua link map  $link$  è definita come segue: se  $q \in X \uplus P_F \uplus P_G$  è un punto di  $G \circ F$ , allora

$$link(q) \stackrel{def}{=} \begin{cases} link_F(q), & \text{se } q \in X \uplus P_F \wedge link_F(q) \in E_F \\ link_G(y), & \text{se } q \in X \uplus P_F \wedge link_F(q) = y \in Y \\ link_G(q), & \text{se } q \in P_G \end{cases}$$

Il link graph identità su  $X$  è  $id_X \stackrel{def}{=} (\emptyset, \emptyset, \emptyset, id_X) : X \rightarrow X$ . Anche qui, si noti come la seconda riga modella l'unione tra le interfacce. In particolare, se  $link_F(q) = y$  e  $y \in Y$ , si ha che il punto  $q$  del bigrafo  $F$  è collegato al suo outer name  $y$ . Dato che  $Y$  è anche l'interfaccia interna di  $G$ , si ha che  $y$  è un inner name di  $G$ . La seconda riga quindi rappresenta l'unione tra gli outernames di  $F$  e gli inner names di  $G$  che hanno lo stesso nome.

- Bigrafo: Se  $F : I \rightarrow J$  e  $G : J \rightarrow K$  sono due bigrafi con supporti disgiunti ( $|F| \# |G|$ ), la loro composizione

$$G \circ F \stackrel{def}{=} \langle G_P \circ F_P, G_L \circ F_L \rangle : I \rightarrow K$$

ed il bigrafo identità su  $I = \langle m, X \rangle$  è  $\langle id_m, id_x \rangle$ .

Si noti come l'operazione di composizione *unisca* le interfacce dei due bigrafi, creando un unico bigrafo risultato, cioè un'unica funzione *prnt* ed un'unica funzione *link*.

### 1.3.3 Giustapposizione

Si definisce ora un'altra operazione per creare un bigrafo da altri due base. Si chiama *giustapposizione* e consiste nell'affiancare un bigrafo ad un altro. Questa operazione è possibile solo se i due bigrafi sono *disgiunti*. Spesso viene anche chiamata *prodotto*.

**Definizione 8** (Bigrafi disgiunti). *Due place graphs  $F_i (i = 0, 1)$  sono disgiunti se  $|F_0| \# |F_1|$ . Due link graph  $F_i : X_i \rightarrow Y_i$  sono disgiunti se  $X_0 \# X_1$ ,  $Y_0 \# Y_1$  e  $|F_0| \# |F_1|$ . Due bigrafi  $F_i (i = 0, 1)$  sono disgiunti se  $F_0^P \# F_1^P$  e  $F_0^L \# F_1^L$ .*

L'operazione di giustapposizione è monoidale, cioè è associativa ed ha un'unità. Si definiranno quindi le proprietà dell'operazione e le sue unità.

**Definizione 9** (Giustapposizione). *Definiamo separatamente i casi del place graph e del link graph:*

- Place Graph: la giustapposizione di due interfacce  $m_i (i = 0, 1)$  è  $m_0 + m_1$  e l'unità è  $0$ . Se  $F_i = (V_i, ctrl_i, prnt_i) : m_i \rightarrow n_i$  sono place graphs disgiunti ( $i = 0, 1$ ), la loro giustapposizione  $F_0 \otimes F_1 : m_0 + m_1 \rightarrow n_0 + n_1$  è data da:

$$F_0 \otimes F_1 = (V_0 \uplus V_1, ctrl_0 \uplus ctrl_1, prnt_0 \uplus prnt'_1),$$

dove  $prnt'_1(m_0 + i) = n_0 + j$  ogni volta che  $prnt_1(i) = j$ .

Informalmente, affianco due place graph avendo come risultato una foresta. Le radici aumenteranno quindi di numero. Per questo motivo è necessaria la funzione  $prnt'_1$ : supponiamo che  $F_0$  abbia due radici e  $F_1$  una sola. I nodi figli diretti di  $F_1$  non possono più puntare alle loro vecchie radici, per esempio la radice 0, perchè ora essa è la radice di  $F_0$ . La parent map di  $F_1$  dovrà quindi venire traslata in questo modo: tutti i nodi di  $F_1$  che puntano alla sua radice 0, ora punteranno alla nuova radice  $0 + 2 = 2$ . Questo è quello che fa la funzione  $prnt'_1$ .

- Link Graph: la giustapposizione di due interfaccie disgiunte di due link graph è  $X_0 \uplus X_1$  e l'unità è  $\emptyset$ . Se  $F_i = (V_i, E_i, ctrl_i, link_i) : X_i \rightarrow Y_i$  sono due link graph disgiunti ( $i = 0, 1$ ), la loro giustapposizione  $F_0 \otimes F_1 : X_0 \uplus X_1 \rightarrow Y_0 \uplus Y_1$  è data da

$$F_0 \otimes F_1 = (V_0 \uplus V_1, E_0 \uplus E_1, ctrl_0 \uplus ctrl_1, link_0 \uplus link_1)$$

- Bigrafi: la giustapposizione di due interfacce disgiunte  $I_i = \langle m_i, X_i \rangle (i = 0, 1)$  è  $\langle m_0 + m_1, X_0 \uplus X_1 \rangle$  e l'unità è  $\varepsilon = \langle 0, \emptyset \rangle$ . Se  $F_i : I_i \rightarrow J_i$  sono bigrafi disgiunti ( $i = 0, 1$ ), la loro giustapposizione  $F_0 \otimes F_1 : I_0 \otimes I_1 \rightarrow J_0 \otimes J_1$  è data da:

$$F_0 \otimes F_1 = \langle F_0^P \otimes F_1^P, F_0^L \otimes F_1^L \rangle$$

Tutte queste tre operazioni saranno utili per definire l'algebra dei bigrafi della prossima sezione.

## 1.4 L'algebra dei bigrafi

In questa sezione verrà illustrato come poter ottenere nuovi bigrafi da bigrafi base tramite le operazioni di composizione, identità e prodotto (giustapposizione). Si definisce quindi una vera e propria *algebra* per la teoria dei bigrafi, in cui si dimostra che ogni bigrafo può essere derivato da alcuni bigrafi base. Si incomincia nelle prime tre sezioni ad illustrare i bigrafi base su cui si appoggerà l'algebra, ovvero placing, linking e ioni. Infine, si enuncia un importante risultato che è la decomponibilità di ogni bigrafo in una sua forma normale.

Si rimanda all'appendice A per i dettagli sulla notazione usata.

### 1.4.1 Placing elementari

**Definizione 10** (Placing, Permutazioni, Merge). *Un bigrafo senza nodi e senza link viene detto placing ( $\emptyset$ ). Un placing che è biiettivo dai siti alle radici è detto permutazione ( $\pi$ ). Un placing sono una radice e  $n$  siti è denotata da  $merge_n$ .*

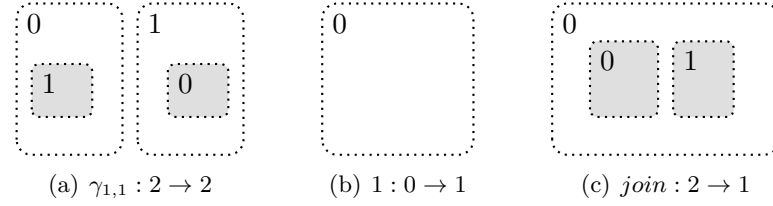


Figura 1.9: Placing elementari.

Un placing ha quindi solo siti e radici.

Il risultato importante è che si può ottenere qualsiasi *placing* dai tre *placing elementari* di figura 1.9, tramite le operazioni di composizione, identità e prodotto. In particolare:

- ogni permutazione  $\pi$  può essere ottenuta dalla simmetria elementare  $\gamma_{1,1}$ . Per esempio, se si vuole ottenere la permutazione di ordine 3 ( $\pi_3$ ), allora si può scrivere la seguente equazione:  $\pi_3 = (\gamma_{1,1} \circ \gamma_{1,1}) \otimes id_1$ .
- ogni placing  $\emptyset$  (e quindi anche ogni merge) può essere ottenuto dai tre placing elementari  $\gamma_{1,1}$ ,  $1$  e  $join$ . Per esempio:  $merge_0 = 1$  e  $merge_{n+1} = join \circ (id_1 \otimes merge_n)$ .

### 1.4.2 Linking elementari

**Definizione 11** (Linking, Sostituzioni, Chiusure). *Un bigrafo senza nodi e senza places è detto linking ( $\delta$ ). Una sostituzione ( $\sigma$ ) è il prodotto tra sostituzioni elementari (??). Una sostituzione biiettiva è detta rinomina ( $\alpha$ ). Una chiusura è il prodotto tra chiusure elementari(??).*

Un linking ha solo inner names e outer names.

Il risultato importante è che ogni *linking* può essere generato tramite composizione, prodotto e identità a partire dai due *linking elementari* di figura ??: sostituzioni elementari  $y/X$  e chiusure elementari  $/x : x \rightarrow \varepsilon$ .

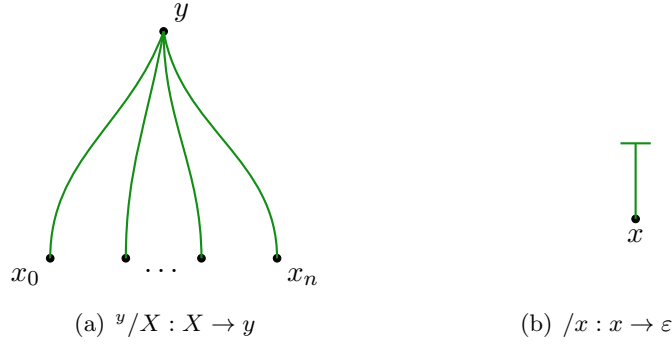
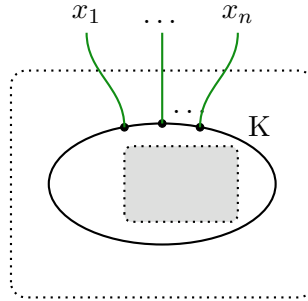


Figura 1.10: Linking elementari.

### 1.4.3 Ioni

Si descrive un altro tipo di bigrafo base: questa volta esso contiene nodi, a differenza dei placing e dei linking.

**Definizione 12** (Ione). *Per ogni controllo  $K : n$ , il bigrafo  $K_{\vec{x}} : 1 \rightarrow \langle 1, \{\vec{x}\} \rangle$  avente un singolo nodo di tipo  $K$  le cui porte sono collegate biettivamente con  $n$  distinti nomi  $\vec{x}$ , è chiamato un ione discreto.*

Figura 1.11:  $K_{\vec{x}}$ .

Riassumendo, i tre tipi di *bigrafi elementari* sono i placing, i linking e gli ioni. Tramite questi possiamo esprimere algebricamente ogni bigrafo in termini di composizione, prodotto e identità. Per esempio:

- per formare un atomo (vedi definizione 14) usiamo la composizione tra un ione ed un placing (1.12.a).
- per formare una molecola (vedi definizione 15) usiamo anche qui la composizione tra un ione e un bigrafo discreto, ottenuto a sua volta ricorsivamente usando solo placing, linking e ioni (1.12.b).

**Definizione 13** (Bigrafo Discreto). *Un bigrafo si dice discreto se non ha link chiusi e la sua link map è biiettiva.*

**Definizione 14** (Atomo). *Se il sito di un  $K$ -ione viene riempito dal placing  $1 : 1 \rightarrow 0$  (vedi 1.9.b), il risultato è un atomo discreto  $K_{\vec{x}} \circ 1$ .*

**Definizione 15** (Molecola). *Se il sito di un  $K$ -ione viene riempito da un bigrafo discreto  $G : I \rightarrow \langle 1, Y \rangle$ , il risultato è una molecola discreta  $(K_{\vec{x}} \otimes id_Y) \circ G$ .*

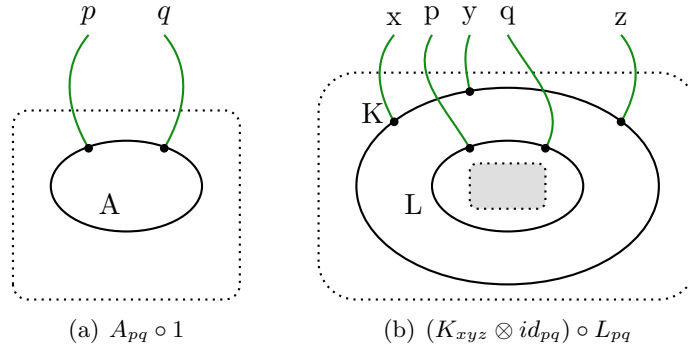


Figura 1.12: Atomo e molecola discreti.

**Teorema 1.** *Ogni bigrafo può essere costruito a partire da placing elementari, linking elementari e ioni tramite le tre operazioni di composizione, identità e giustapposizione.*

#### 1.4.4 Forma normale discreta

Si è ora arrivati al risultato principale: la scomponibilità di ogni bigrafo in più bigrafi base. Per descrivere questo enunciato, sono necessarie le definizioni di *bigrafo discreto* (definizione 13) e di *bigrafo primo*.

**Definizione 16** (Bigrafo primo). *Un bigrafo si dice primo se non ha inner names ed ha un'interfaccia esterna unaria. Esso prende la segue forma:  $m \rightarrow \langle X \rangle$ .*

Un importante esempio di bigrafo primo è  $merge_n : n \rightarrow 1$ , dove  $n \geq 0$ . L'assenza di inner names nei bigrafi primi è fondamentale: essa assicura che ci sia una ed una sola decomposizione di ogni bigrafo in linking e primi discreti, come segue:

**Proposizione 1** (Forma normale discreta). *Ogni bigrafo  $G : \langle m, X \rangle \rightarrow \langle n, Z \rangle$  può essere espresso univocamente, con al più una rinomina su  $Y$ , come:*

$$G = (id_n \otimes \lambda) \circ D$$

dove  $\lambda : Y \rightarrow Z$  è un *linking* e  $D : \langle m, X \rangle \rightarrow \langle n, Y \rangle$  è un *bigrafo discreto*. Inoltre, ogni *bigrafo discreto*  $D$  può essere fattorizzato univocamente, con al più una permutazione dei siti di ogni fattore, come

$$D = \alpha \otimes ((P_0 \otimes \cdots \otimes P_{n-1}) \circ \pi)$$

dove  $\alpha$  è una *rinomina*, ogni  $P_i$  è *primo e discreto*, e  $\pi$  è una *permutazione di tutti i siti*.

Questa proposizione è cruciale per dimostrare la completezza della teoria algebrica dei bigrafi, che risulta quindi sia corretta che completa.

## 1.5 Bigraphical Reactive Systems

Uno degli aspetti fondamentali di un bigrafo è la sua capacità di evolversi sulla base di regole ben precise. Un BRS (Bigraphical Reactive System) consente di fare evolvere lo stato di un sistema (bigrafo iniziale) e di dedurre nuove informazioni con specifiche regole di reazione. Un BRS costituisce quindi la *dinamica* dei bigrafi.

La definizione di un BRS richiede prima la definizione di altri concetti, come quello delle *occorrenza* e di *regola di reazione parametrica*.

**Definizione 17** (Occorrenza). *Un bigrafo  $F$  occorre in un bigrafo  $G$  se l'equazione  $G = C_1 \circ (F \otimes id_I) \circ C_0$  esiste per qualche interfaccia  $I$  e per qualche bigrafo  $C_0$  e  $C_1$ .*

L'identità  $id_I$  è importante: consente a  $C_1$  di avere figli in  $C_0$  e in  $F$ , e consente a  $C_0$  e  $C_1$  di condividere link che non riguardano  $F$ .

Il secondo concetto importante è quello di *regola di reazione*.

**Definizione 18** (Regola di reazione). *Una regola di reazione è della forma*

$$R \rightarrow R'$$

dove  $R$  si dice essere il *redex della regola*, cioè il *pattern da trovare e cambiare nel bigrafo a cui si applica la regola*, e  $R'$  è il *reactum*, cioè il *pattern che andrà a sostituire il redex*.

Redex e reactum sono entrambi bigrafi, e possono occorrere (secondo la definizione 17) nel bigrafo a cui si applica la regola di reazione. Le regole di reazione possono coinvolgere sia il link graph sia il place graph, come si può vedere da questo esempio.



### 1.5.1 Esempio

Nella figura 1.13 , è rappresentato un bigrafo che indica lo stato di un ambiente. Esso è formato da due costruzioni B (buildings), da quattro stanze R (rooms), da cinque agenti A e da quattro computer C. Il bigrafo ha le seguente segnatura:  $K = \{A : 2, B : 1, C : 2, R : 0\}$ .

Il bigrafo rappresenta lo stato dell'ambiente, in cui i cinque agenti A stanno tenendo una video conferenza: gli agenti che stanno partecipando sono collegati dal link  $e_0$ . Ogni agente che vuole partecipare deve essere collegato ad un computer. A sua volta i vari computer di una stessa costruzione sono collegati insieme, formando una LAN.

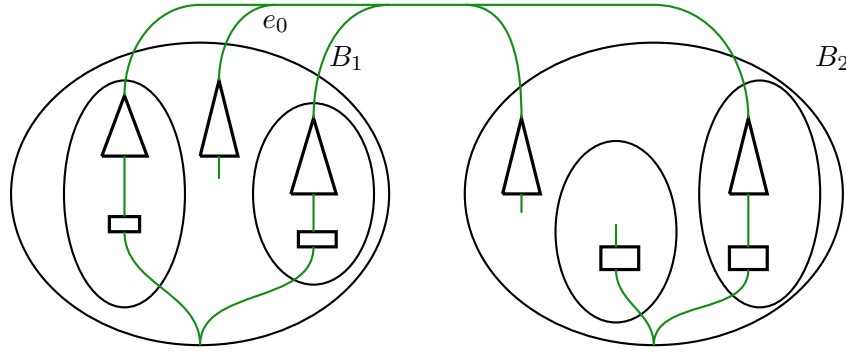


Figura 1.13: Esempio.

Alcune regole di reazione possono essere quelle delle figure 1.14, 1.15, 1.16. Esse agiscono sul bigrafo di partenza (figura 1.13) e sono così definite:

- La prima è la più semplice: un agente può lasciare la video chiamata. Il redex è la parte a sinistra della regola e può matchare qualsiasi agent. I due outernames del redex indicano che le porte dell'agent devono essere collegate (prima dello scatto della regola) a zero o più porte. Se l'agent è collegato ad altri in una videochiamata, egli verrà disconnesso, mantenendo però attivo il collegamento al computer: questa informazione è espressa dal reactum, la parte destra della regola.
- La seconda regola prevede di matchare solo gli agent che non sono collegati a nessun computer e che si trova nella loro stessa stanza. Il reactum prevede che l'agent si ricollegli a un tale computer. Se ci sono più computer nella stanza, la regola non si esprime su quale computer l'agent si debba ricollegare. Si noti

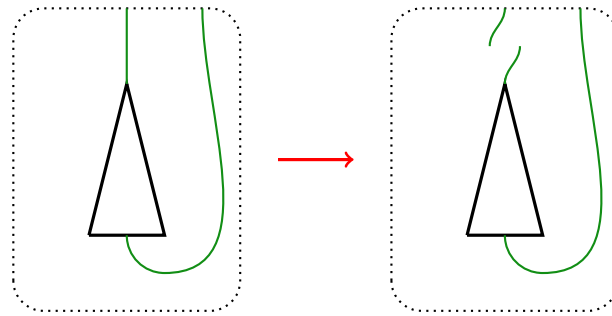


Figura 1.14: Prima regola di reazione

un' importante dettaglio: agent e computer si trovano sotto la stessa radice, e quindi la regola scatta solo se essi si trovano dentro la stessa stanza, o dentro entrambi dentro lo stesso building.

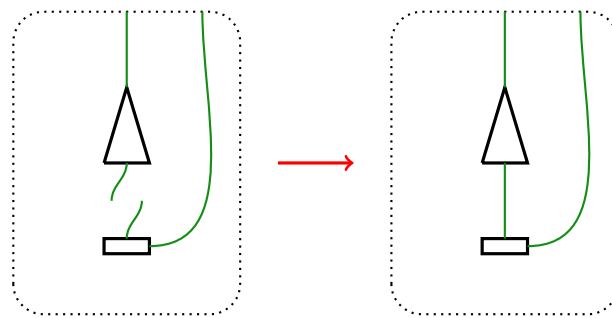


Figura 1.15: Seconda regola di reazione

- Mentre le prime due regole modificavano solamente il link graph, questa terza regola agisce anche sul place graph. Essa prevede lo spostamento di un agent in una stanza. Si noti ancora una volta che l'agent e la stanza si trovano sotto la stessa radice. Questo implica che se assumiamo che ogni stanza sia dentro una costruzione (building), allora questa regola scatta se e solo se l'agent si trova nella stesso building della stanza. In altre parole, non è possibile che un agent fuori da un building entri direttamente in una stanza. Infine, si noti il sito presente sia nel redex che nel reactum: esso rappresenta i parametri della regola. Dentro questo sito ci possono essere altri computer o altri agent. Se si togliesse tale sito dal redex, allora la regola scatterebbe solo se in tale stanza non ci fossero nè computer nè agenti, cioè solo se fosse vuota.

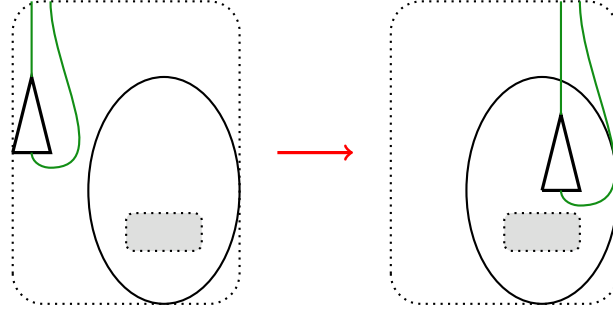


Figura 1.16: Terza regola di reazione

### 1.5.2 Regole di reazione parametriche

**Definizione 19** (Matching). *Il problema di trovare una o più occorrenze di un redex  $R$  all'interno di un bigrafo  $B$  si chiama matching. Nel caso in cui un match venga trovato, esso viene denotato tramite la seguente equazione:*

$$B = C \circ (R \otimes id_I) \circ D$$

dove  $C$  è detto il contesto e  $D$  sono i parametri del match.

I bigrafi e la loro teoria ereditano ed estendono molte caratteristiche del CCS (*Calculus of Communicating Systems*). Una di queste è la possibilità di isolare le zone che possono evolversi, cioè determinare quali nodi del bigrafo possono essere soggetti al processo di matching. Introduciamo quindi la nozione di *segnatura dinamica*.

**Definizione 20** (Segnatura dinamica). *Una segnatura è dinamica se assegna ad ogni controllo  $K$  uno stato nell'insieme  $\{\text{attivo}, \text{passivo}\}$ . Diciamo che un  $K$ -nodo è attivo se il suo controllo è assegnato allo stato attivo; lo stesso vale per lo stato passivo.*

*Un bigrafo  $G : \langle m, X \rangle \rightarrow \langle n, Y \rangle$  è attivo su  $i \in m$  se ogni nodo antenato del sito  $i$  è attivo. Un bigrafo  $G$  si dice attivo, se è attivo su ogni sito.*

Prima di scattare, una regola di reazione necessita del processo di matching, che trova l'occorrenza del redex della regola nel bigrafo. L'occorrenza sarà della forma  $B = C \circ (R \otimes id_I) \circ D$ . Se il contesto  $C$  è attivo, allora la regola scatta, sostituendo l'occorrenza del redex con il reactum. Altrimenti, la regola non scatta. In questo senso si riesce ad isolare parti del sistema che non si vogliono fare evolvere.

Si fornisce ora una definizione precisa di *regola di reazione*. Si tenga a mente l'esempio 1.5.1, in cui si presta particolare attenzione alla sostituzione del redex con il reactum.

**Definizione 21** (Regola di reazione). *Una regola di reazione  $R \rightarrow R'$ , dove il redex  $R$  e il reactum  $R'$  hanno la stessa interfaccia, è una trasformazione che, se applicata al bigrafo  $B$ , produce un nuovo bigrafo  $B'$  secondo questa relazione:*

$$B : C \circ (R \otimes id_I) \circ D \quad \rightarrow \quad B' : C \circ (R' \otimes id_I) \circ D$$

dove il contesto  $C$  è attivo.

Si noti che questa definizione richiede che  $R$  e  $R'$  abbiano la stessa interfaccia. Questo è in genere un vincolo troppo forte, che obbliga il progettista a scrivere regole di reazione limitative. Per esempio, non potrei copiare il contenuto, perchè i siti del reactum sarebbero uno in più di quelli del redex, rendendo la loro interfaccia interna diversa. Per indebolire questo vincolo, introduciamo il concetto di *mappa di istanziazione* che porterà al concetto di *regole di reazione parametriche*.

**Definizione 22** (Mappa di istanziazione). *Siano  $\langle m, X \rangle$  e  $\langle m', X \rangle$  le interfacce interne rispettivamente di  $R$  e  $R'$ . Una mappa di istanziazione è una funzione  $\eta : m \rightarrow m'$  che mappa siti di  $R'$  in siti di  $R$ .*

**Definizione 23** (Regola di riscrittura parametrica). *Una regola di reazione parametrica è una tripla della forma:*

$$(R : m \rightarrow I, R' : m' \rightarrow I, \eta)$$

dove  $R$  e  $R'$  sono rispettivamente il redex e il reactum della regola. Questa volta devono concordare solo sull'interfaccia esterna e sugli inner names.

La regola di reazione parametrica, se applicata al bigrafo  $B$ , produce la reazione:

$$B = C \circ (R \otimes id_I) \circ D \quad \rightarrow \quad B' = C \circ (R' \otimes id_I) \circ \bar{\eta}(D)$$

in cui la funzione  $\bar{\eta}$  è definita come segue:

sia  $g : \langle m, X \rangle$  un bigrafo la cui FND è  $g = \lambda \circ (d_0 \otimes \dots \otimes d_{m-1})$ , allora

$$\bar{\eta}(g) = \lambda \circ (d'_0 || \dots || d'_{m-1})$$

dove  $d'_i \simeq d_{\eta(i)}$

### 1.5.3 BRS

Si sono date tutte le nozioni necessarie per definire formalmente la dinamica di un bigrafo. Essa è costituita da un BRS (*bigraphical reactive system*), che fa evolvere il bigrafo di partenza sulla base di regole ben precise, contenute al suo interno. Ogni BRS è costituito da una segnatura e da un insieme di regole: risulta quindi essere un sistema deduttivo, perchè composto rispettivamente da sintassi e semantica.

**Definizione 24 (BRS).** *Un sistema reattivo bigrafico (BRS) è definito attraverso una coppia  $(K, R)$ , dove  $K$  è una segnatura e  $R$  è un insieme di regole di reazione, e si indica con  $BG(K, R)$ .*

*L'insieme delle regole  $R$  è chiuso rispetto all'equivalenza sul supporto: se  $R \simeq S$  e  $R' \simeq S'$  e  $(R, R', \eta) \in R$  per un certo  $\eta$ , allora  $(S, S', \eta) \in R$ .*

Si indichi ora con  $B \rightarrow *B'$  il fatto che il bigrafo  $B'$  sia raggiungibile da  $B$  con zero o più regole di reazione. Si dimostra che, dato un bigrafo  $B$  la cui segnatura è  $K$ , il BRS denotato da  $BG(K, R)$  computa ogni bigrafo  $B'$  tale che  $B \rightarrow *B'$ . Se si considerano quindi tutti i possibili  $B'$ , si ha l'insieme di tutti i possibili stati in cui il sistema  $B$  può evolversi secondo le regole  $R$ .

### 1.5.4 Esempio

Vediamo ora un ultimo esempio, in cui si useranno le regole di reazione parametriche. Si vuole rappresentare l'operazione di moltiplicazione tramite i bigrafi. Incominciamo con la segnatura: ci sono tre controlli

- *Mul*, che rappresenta l'operazione di moltiplicazione. Ha arietà 0. Attivo.
- *Num*, che rappresenta il numero, anch'esso 0 porte. Passivo.
- *One*, rappresenta l'unità, con arietà 0. Passivo.

L'idea principale è che il nodo *mul* contiene due numeri, cioè due nodi *num*, che saranno quelli che dovranno essere moltiplicati. Si può anche optare per una versione ricorsiva, permettendo al nodo *mul* di contenere anche altri nodi *mul*. Infine, ogni numero è rappresentato come unione di varie unità. Per esempio, il numero 4 verrà rappresentato tramite il nodo *num* contenente quattro nodi *one*.

Se vogliamo operare la moltiplicazione fra 4 e 2, allora il bigrafo equivalente sarà quello di figura 1.17.

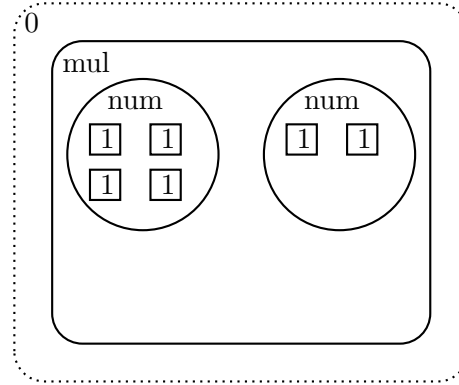


Figura 1.17: Moltiplicazione tramite bigrafi

Per eseguire la moltiplicazione si usano solamente due regole di reazione, ma in maniera *ricorsiva*. Esse ricalcano nel formalismo dei bigrafi questa semplice operazione:  $a * b = (a - 1) * b + b$ . Distinguiamo quindi fra caso ricorsivo e caso base.

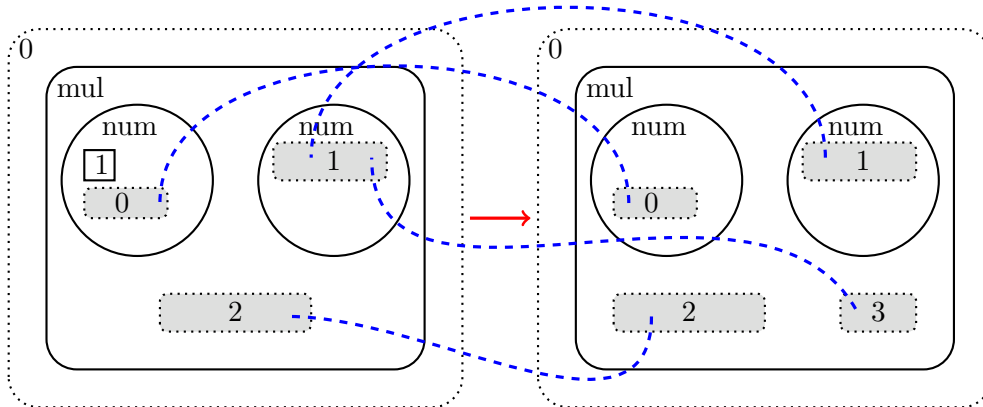


Figura 1.18: Caso ricorsivo

La regola del caso ricorsivo mette bene in evidenza l'importanza delle regole parametriche. Un sito del redex (1) viene copiato in una regione diversa, cioè dentro *mul*. Questo ci consente di *copiare* tutto il contenuto del secondo nodo *num* dentro il nodo *mul*. Infatti, il contenuto di *mul* al di fuori dei nodi *num* rappresenta la somma (+*b*) dell'uguaglianza  $a * b = (a - 1) * b + b$ .

Si noti che questa regola va applicata ricorsivamente fino a quando il primo nodo *num* ha contenuto vuoto, cioè fino a quando il caso base è applicabile.

Il caso base copia il contenuto di *mul* dentro un nuovo nodo *num*, che rap-

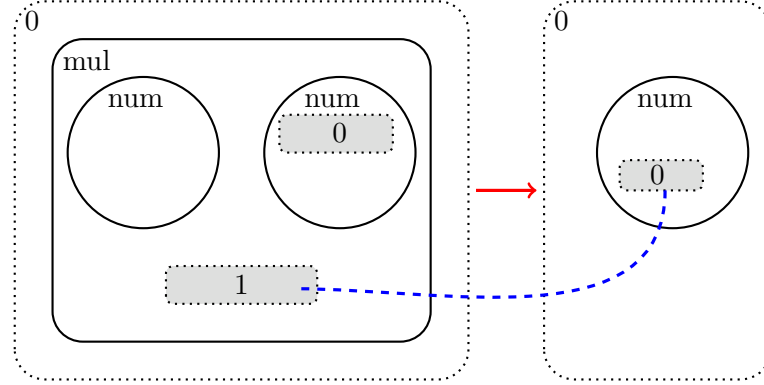


Figura 1.19: Caso Base

presenta il risultato della moltiplicazione. Nell'aritmetica classica, per risolvere ricorsivamente la moltiplicazione  $2 * 4$  si operano questi passi:

$$\begin{aligned}
 result &= 4 * 2 = (4 - 1) * 2 + 2 = 3 * 2 + 2 && \text{(caso ricorsivo)} \\
 3 * 2 &= (3 - 1) * 2 + 2 = 2 * 2 + 2 && \text{(caso ricorsivo)} \\
 2 * 2 &= (2 - 1) * 2 + 2 = 1 * 2 + 2 && \text{(caso ricorsivo)} \\
 1 * 2 &= (1 - 1) * 2 + 2 = 0 * 2 + 2 = 2 && \text{(caso base)}
 \end{aligned}$$

Seguendo la catena di uguaglianze, si trova che il risultato finale della moltiplicazione è:

$$result = 4 * 2 = (((0 * 2 + 2) + 2) + 2) + 2 = 2 + 2 + 2 + 2 = 8.$$

Vediamo ora l'applicazione della prima regola ricorsiva sul bigrafo di partenza (figura 1.17). La prima operazione da eseguire è trovare l'occorrenza del redex nel bigrafo, che formalmente significa rispettare l'equazione  $B = C \circ (R \otimes id_I) \circ D$ , dove  $C$  è il contesto,  $R$  è il redex e  $D$  sono i parametri. Dato che tutti e tre sono bigrafi, possiamo disegnarli, come è stato fatto in figura 1.20.

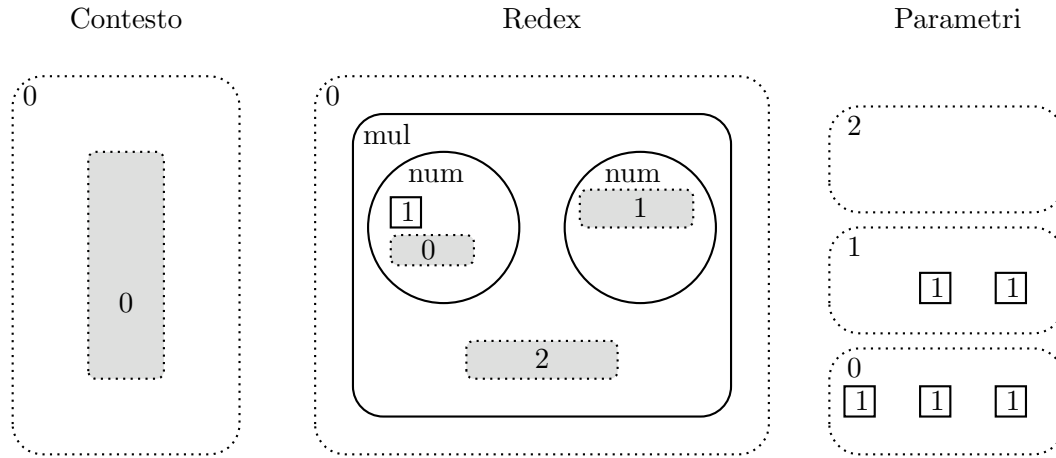


Figura 1.20: Match decomposto

Il bigrafo finale, dopo 3 applicazioni della regola ricorsiva ed una della regola base, sarà quello di figura 1.21.

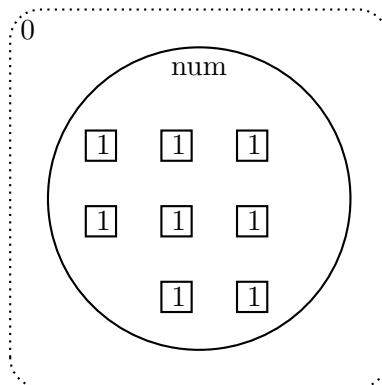


Figura 1.21: Bigrafo finale

L'implementazione di questo esempio si può trovare in ??.

Questo esempio mostra bene come le regole di reazione che formano il BRS rappresentano la semantica del sistema. Per evitare di sprecare memoria sul calcolatore, è necessario progettare con cura la signature e l'insieme di regole del BRS. Nell'esempio di cui sopra, le regole erano soltanto due e potevano essere applicate ricorsivamente. Questo è preferibile ad avere  $k$  regole e applicarle una dopo l'altra, appunto a causa dello spreco di memoria che si otterrebbe.



## Isomorfismo tra bigrafi

Si è visto nel precedente capitolo come un bigrafo sia capace di evolversi all'interno di un BRS. In alcune situazioni, si vuole evitare evoluzioni infinite di un bigrafo, perchè per esempio porterebbero sempre a stati uguali fra di loro.

Per tenere traccia all'istante  $t_k$  di tutti gli stati precedentemente assunti da un BRS  $(t_0 \dots t_{k-1})$ , si è costruita una struttura dati a grafo, dove ogni nodo è uno stato, cioè un bigrafo: si chiamerà questo grafo “*grafo degli stati*”. Se un BRS parte dallo stato  $S_0$ , è possibile che dopo  $K$  regole di reazione lo stato  $S_k$  sia uguale allo stato iniziale  $S_0$ . Questo significa che  $S_0$  e  $S_k$  hanno la stessa *semantica*, cioè rappresentano lo stesso stato del sistema. Per cui, nel grafo degli stati, essi dovranno essere lo stesso medesimo nodo.

Questo è equivalente a scrivere: “se lo stato  $S_k$  è stato ottenuto da  $S_{k-1}$  tramite la regola  $R$  e  $S_k$  e  $S_0$  sono isomorfi, allora da  $S_{k-1}$  si ottiene  $S_0$ ”

$$\text{se } S_{k-1} \xrightarrow{R} S_k \text{ e } S_k \simeq S_0 \quad \text{allora } S_{k-1} \xrightarrow{R} S_0$$

Capire quando due bigrafi sono isomorfi e quindi *semanticamente equivalenti* è di fondamentale importanza se si vogliono evitare i così detti *loop* fra regole: per evitare che fra  $S_i$  e  $S_{i+1}$  si continuino ad applicare sempre le due stesse regole  $R_1$  e  $R_2$  all'infinito, devo capire che:

- da  $S_i$ , tramite la regola  $R_1$ , ottengo un bigrafo isomorfo a  $S_{i+1}$
- da  $S_{i+1}$ , tramite la regola  $R_2$ , ottengo un bigrafo isomorfo a  $S_i$

Questo concetto verrà chiarito con gli esempi sottostanti.

### 2.1 Esempio

Si prenda l'esempio di una rete modellata tramite un bigrafo: si vuole fare in modo che, dato un pacchetto iniziale che ha come mittente l'host A, esso arrivi al destina-

tario B. Ci saranno quindi delle regole di reazione per i router, che permetteranno di inoltrare i pacchetti verso le sue interfacce di uscita. Poichè, utilizzando i soli bigrafi, servirebbero troppe regole di reazione per modellare il fatto che se il destinatario è X allora l'interfaccia di uscita del pacchetto è la numero N, si può pensare di inoltrare il pacchetto verso tutte le uscite in modo non deterministico. Così facendo, il pacchetto arriverà sicuramente al destinatario. I problemi sono ora due:

- il pacchetto arriverà a destinatari non corretti. Si può introdurre una regola di reazione che elimini dall'host ogni pacchetto che non ha come destinatario l'host stesso.
- se prendiamo il  $k$  -esimo router  $R_k$ , allora il pacchetto ritornerà al  $(k - 1)$  -esimo router  $R_{k-1}$ , che a sua volta lo inoltrerà verso tutte le sue interfacce, e quindi anche nuovamente verso  $R_k$ . Si ha così un ciclo infinito di pacchetti tra  $R_k$  e  $R_{k-1}$ .

In questa sede si tratterà il secondo di questi problemi, che ha un'apparentemente semplice soluzione: capire quando due bigrafi sono uguali. In questo esempio, è facile capire che per risolvere il problema basta verificare se gli stati  $S_{k+i}$  e  $S_{k-1}$  sono uguali: se  $S_k$  è il bigrafo in cui il pacchetto è nel router  $R_k$ , allora si applica la regola di inoltro e si generano tanti stati  $(S_{k+1} \dots S_{k+j})$  quanti sono i router vicini a  $R_k$ ; tra di questi ci sarà anche  $R_{k-1}$ . Quindi, se supponiamo che nello stato  $S_{k+i}$  il pacchetto torni indietro al router  $R_{k-1}$ , allora il problema è capire che  $S_{k+i}$  è uguale a  $S_{k-1}$ , cioè verificare che i due bigrafi siano isomorfi. In questo modo si sa che dallo stato  $S_{k-1}$  non si dovrà più applicare la regola di inoltro verso  $S_k$ , perchè questo causerebbe un ciclo infinito.

## 2.2 Formulazione del problema

Si è visto che il termine isomorfismo ci aiuta a capire quando due bigrafi sono uguali. Riportiamo di nuovo la sua definizione formale (6):

**Definizione 25** (Isomorfismo). *Due bigrafi  $F$  e  $G$  si dicono isomorfi se e solo se esiste una traduzione di supporto tra  $F$  e  $G$ , cioè se e solo se  $F$  e  $G$  sono support equivalent ( $F \simeq G$ ).*

Il problema consiste quindi nel trovare un funzione biettiva che ha come dominio i nodi e gli archi del primo bigrafo, come codominio quelli del secondo bigrafo e che

ne rispetti la struttura del primo. Come già visto, tale funzione si chiama *traduzione di supporto*.

Si noti come la traduzione di supporto consenta di ritenere isomorfi due bigrafi che sono uguali *modulo permutazione*: tale funzione può infatti operare una permutazione sui nomi dei nodi e degli archi, così come sugli inner names e outer names. In altre parole, non c'è nessun vincolo sui nomi, ma solo sulla struttura del bigrafo. Si capirà meglio questo concetto negli esempi che seguiranno.

### 2.2.1 Complessità

Stabilire la complessità del problema dell'isomorfismo tra bigrafi è molto importante, perchè relazionandolo con altri problemi è possibile trovare un algoritmo efficiente per risolverlo. Facciamo un esempio: ipotizziamo che il problema dell'isomorfismo tra bigrafi (che chiameremo  $P_{big}$ ) si trovi nella classe  $C$ , e che il problema  $P_c$  sia *completo* rispetto a questa classe. Per definizione di *completezza*, ogni istanza di ogni problema appartenente alla classe  $C$ , quindi anche ogni istanza di  $P_{big}$ , può essere tradotta (cioè *ridotta*) con una certa complessità al problema  $P_c$ .

L'importanza di questa considerazione risiede in questo fatto: se si riesce a scoprire un algoritmo che operi in tempo polinomiale per risolvere il problema  $P_c$  allora tutti i problemi della classe  $C$ , incluso  $P_{big}$ , sarebbero risolvibili in tempo polinomiale.

Si dimostrerà il seguente risultato:

**Teorema 2** (Complessità di  $P_{big}$ ). *Il problema dell'isomorfismo tra bigrafi è GI-completo.*

**Corollario 1.** *Il problema dell'isomorfismo tra bigrafi è **equivalente** al problema dell'isomorfismo tra grafi.*

**Dimostrazione.** *Per dimostrare l'equivalenza, procederemo in due direzioni: nella prima dimostreremo che esiste una riduzione in tempo polinomiale da  $P_{graph}$  a  $P_{big}$ , cioè che ogni istanza del problema  $P_{graph}$  può venire tradotta in un'istanza del problema  $P_{big}$ . Invece, nella seconda direzione, faremo l'inverso. Si dimostreranno quindi che esistono le seguenti riduzioni:*

$$\begin{cases} P_{graph} \leq P_{big} \\ P_{big} \leq P_{graph} \end{cases}$$

- $P_{graph} \leq P_{big}$ :

*Dando una particolare segnatura al bigrafo, ogni termine del  $\pi$ -Calcolo può essere tradotto in un bigrafo, quindi si ha che ogni istanza del problema  $\pi$ -SC ( $\pi$  Structural Conguence), che controlla quando due termini sono equivalenti, può essere tradotta in tempo polinomiale in un'istanza del problema  $P_{big}$ , che controlla quando due bigrafi sono isomorfi. Questa è una Karp-riduzione dal problema  $P_\pi$  a  $P_{big}$ . In [...] si dimostra che il problema di congruenza tra termini del  $\pi$ -Calcolo, cioè  $\pi$ -SC, è equivalente al problema dell'isomorfismo tra grafi,  $P_{graph}$ . Quindi, abbiamo trovato una riduzione che traduce ogni istanza del problema di isomorfismo tra grafi in un'istanza del problema di isomorfismo tra bigrafi.*

- $P_{big} \leq P_{graph}$ :

*Procediamo ora con la seconda parte della dimostrazione: vogliamo dimostrare che ogni istanza del problema  $P_{graph}$  può venire tradotta in tempo polinomiale in un'istanza del problema  $P_{big}$ . Si è visto nell'introduzione che ogni bigrafo è decomponibile in due strutture tra loro ortogonali (place graph e link graph), e che quindi l'isomorfismo può venire trattato separatamente per i due casi. Trattandosi di grafi, ogni istanza di  $P_{big}$  può venire ridotta a due istanze di  $P_{graph}$ . Abbiamo quindi trovato una riduzione da  $P_{big}$  a  $P_{graph}$ .*

*Si è quindi dimostrata l'equivalenza fra il problema dell'isomorfismo tra bigrafi e quella tra grafi, concludendo quindi che il problema  $P_{big}$  è equivalente al problema  $P_{graph}$ .*

E' noto che  $P_{graph}$  appartiene alla classe NP, ma non è ancora stato dimostrato che sia completo. Per qui si è creata una nuova classe di complessità, nota con il nome di GI, che raccoglie tutti i problemi che possono essere ridotti in tempo polinomiale al problema  $P_{graph}$ . Quindi si ha che  $P_{big} \in GI$ .

Come già accennato, l'importanza di trovare la classe di complessità a cui appartiene un dato problema è enorme: se si trovasse un algoritmo che risolve in tempo polinomiale un problema NP-completo (cioè se la famosa domanda *P is NP?* avesse risposta affermativa), allora tutti i problemi appartenenti alla classe NP, incluso  $P_{big}$ , potrebbero essere ridotti in tempo polinomiale al problema NP-completo di cui si ha l'algoritmo polinomiale. In questo modo, anche l'isomorfismo tra bigrafi sarebbe risolvibile in tempo polinomiale.

## 2.3 Strategia di soluzione

Dal punto di vista teorico, si è trattato questo problema come una *rete di flusso*: esse consentono di specificare in modo molto preciso delle condizioni sulla *struttura* dei grafi. Qui l'obiettivo è trovare una traduzione di supporto, che conservi la struttura e sia biettiva: quest'ultima caratteristica per esempio può essere espressa come il fatto che ogni nodo del primo bigrafo deve essere associato ad uno ed un solo nodo del secondo bigrafo. Tramite la rete di flusso, si può specificare questa condizione dicendo che il flusso in uscita da ogni nodo deve essere esattamente 1. Questo è un primo esempio del motivo per cui si è scelta una rete di flusso per la modellizzazione.

Si è scelto di trattare questo problema tramite la programmazione a vincoli. Questo paradigma permette di rappresentare al calcolatore un sistema di equazioni, che esso risolverà. Le equazioni saranno i vincoli che la rete di flusso dovrà rispettare. Nel nostro caso, ci basterà capire se esiste una soluzione al sistema, e non ci interessa sapere quali sono le sue soluzioni. Tutte le equazioni scritte sono lineari, con la conseguenza che si avrà un sistema lineare: questo permette di abbassare la complessità dell'algoritmo.

Si è usata la libreria Java *Choco vs 3.3.1* per esprimere tutti i vincoli.

Si è scelta il paradigma del *Constraint Programming* per i seguenti motivi:

- la programmazione a vincoli consente di ridurre notevolmente il tempo di sviluppo dell'algoritmo e il numero di errori, specie per problemi NP, come l'isomorfismo tra bigrafi.
- il motore che risolve il sistema di equazioni (in questo caso *Choco vs 3.3.1*) è di solito soggetto a molti test, ed è quindi affidabile. C'è anche la possibilità di imporre delle euristiche che migliorano notevolmente le prestazioni, rendendolo quindi anche efficiente.
- il motore può venire considerato come una *black box*, astraendosi quindi alla sua implementazioni interna, che può per esempio venire cambiata o migliorata nel tempo, evitando di affliggere il software che lo usa.

E' possibile che esista un algoritmo che risolva in modo più efficiente questo problema: se per esempio sarà inventato l'algoritmo che risolve in tempo polinomiale un isomorfismo tra grafi, allora per quanto dimostrato nella sottosezione 2.2.1 anche

questo problema potrà essere risolto in tempo polinomiale. Fino ad allora, la programmazione a vincoli, che può non risultare il metodo migliore per risolvere questo problema, crea un ottimo compromesso tra complessità dell'algoritmo e tempo di sviluppo.

Si è precedentemente visto che ogni bigrafo è formato da due strutture ortogonali e totalmente indipendenti, il place graph ed il link graph. Il problema dell'isomorfismo verrà quindi trattato separatamente per le due strutture: ci saranno dei vincoli solamente per il place graph, ed altri solamente per il link graph. Infine, gli ultimi vincoli serviranno per conciliare le due soluzioni: si vedrà che senza di questi il calcolatore riconoscerà come uguali due bigrafi che hanno lo stesso link graph e lo stesso place graph modulo permutazione ma che non sono isomorfi (figura 2.2).

La definizione di isomorfismo vista precedentemente può far credere che esso sia un termine puramente sintattico, cioè che riguardi solamente la struttura dei due bigrafi. L'isomorfismo è invece un'operazione che riguarda anche la semantica: due bigrafi strutturalmente uguali sono due bigrafi semanticamente equivalenti (figura 2.1).

### 2.3.1 Esempi

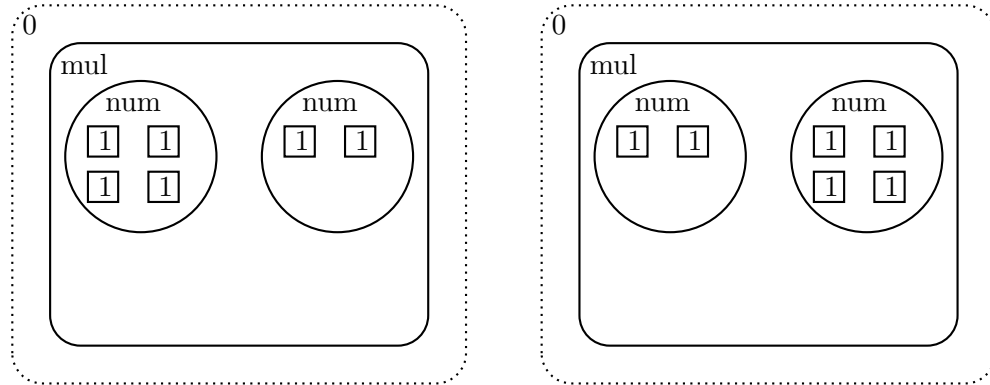
Non è sempre banale capire quando due bigrafi sono isomorfi. Si forniscono quindi alcuni esempi per acquisire familiarità con questo concetto.

Il primo riprende il bigrafo di figura 1.17 per la moltiplicazione tra numeri naturali. Si vuole mostrare che, semanticamente, l'operazione  $2 * 4$  è equivalente all'operazione  $4 * 2$ . In altre parole, non importa l'ordine dei nodi.

Incominciamo notando che i due link graph sono isomorfi, perchè non hanno archi e presentano lo stesso numero di nodi. Prendiamo ora in esame il place graph: se si ritorna alla sua definizione, si nota subito come i due place graph siano uguali perchè i nodi interni non sono ordinati.

Il fatto di dimostrare che i due bigrafi sono isomorfi e semanticamente equivalenti, dimostra che la proprietà commutativa della moltiplicazione vale anche nella sua versione bigrafica.

Presentiamo un altro esempio, questa volta su un caso negativo. Si è specificato che per risolvere il problema si trattano separatamente i casi del place graph e del link graph: questo approccio però necessita di avere dei vincoli di "coerenza"

Figura 2.1: Bigrafi Isomorfi:  $(4 * 2) = (2 * 4)$ 

che uniscano le due soluzioni. Senza questi vincoli, si può incorrere nel seguente problema.

Si considerino i due bigrafi di figura 2.2 e i loro relativi place graph e link graph (figura 2.3). Si nota subito che i due bigrafi *non* sono isomorfi. Prendendo però i due place graph ci si accerta che essi lo sono. Lo stesso vale per i due link graph: sono entrambi formati da tre nodi, in cui c'è solamente un edge che collega il cerchio ad un quadrato.

I casi separati del link graph e del place graph sembrano quindi suggerire che i due bigrafi siano isomorfi, mentre si vede subito che non è così. Quello che non abbiamo considerato sono appunto i *vincoli di coerenza*, che informalmente dicono che il quadrato collegato al cerchio (nel primo link graph) deve essere quello che contiene un altro quadrato (nel primo place graph). Aggiunta questa condizione, si nota che le due soluzioni sono *incompatibili*, avendo quindi che i due bigrafi *non* sono isomorfi.

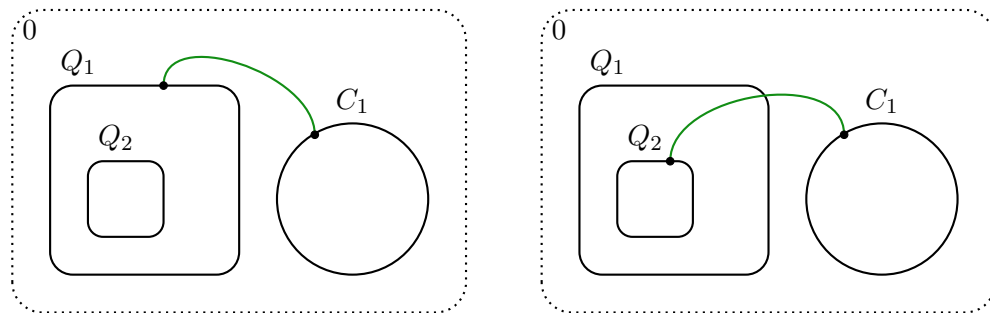


Figura 2.2: Bigrafi non Isomorfi

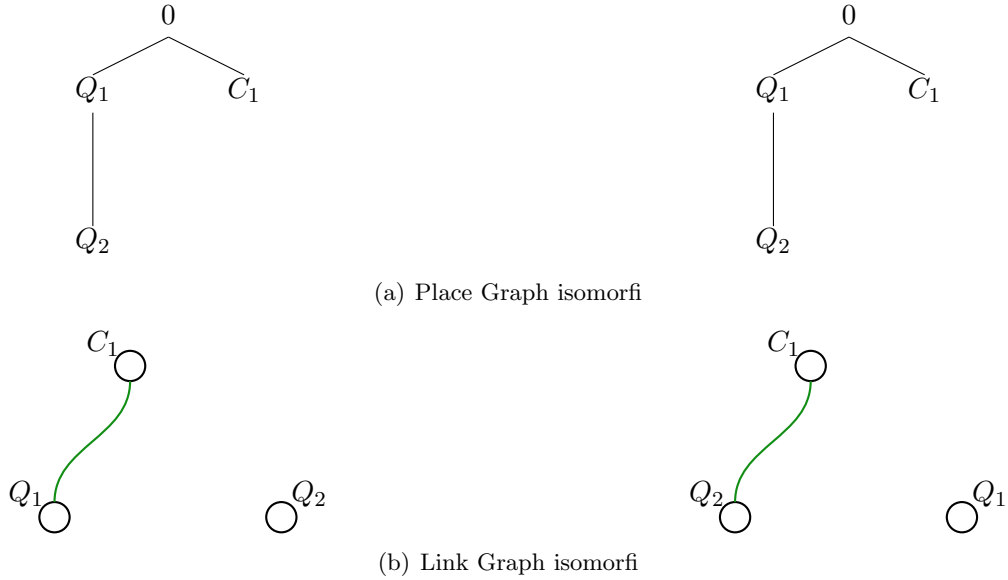


Figura 2.3: Place Graph e Link Graph del bigrafo 2.2

## 2.4 Vincoli

In questa sezione si presentano le equazioni necessarie per risolvere il problema dell'isomorfismo. Come già anticipato, si lavorerà sulle *reti di flusso*, che sono grafi orientati pesati. Distinguiamo le equazioni per il place graph, per il link graph e per la così detta coerenza.

### 2.4.1 Vincoli per il place graph

L'isomorfismo tra place graphs è un isomorfismo tra foreste. Si vuole infatti vedere quando la prima foresta è isomorfa alla seconda, a meno di permutazioni delle radici e dei siti. Una rete di flusso per questo problema è quella in figura 2.4.

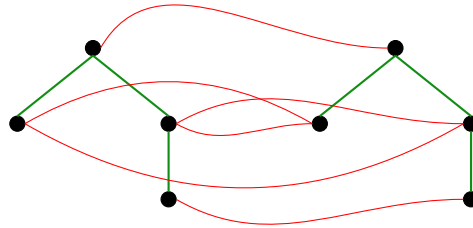


Figura 2.4: Rete di flusso per l'isomorfismo tra place graphs.



Alle due foreste (cioè ai due place graph, costituiti da archi di colore verde), che chiameremo  $P_F$  e  $P_G$ , si sono aggiunti altri archi (quelli rossi) *solamente* tra nodi della stessa altezza, creando così un grafo. Questa è la vera e propria rete di flusso per il problema dell'isomorfismo tra place graph. Ogni arco rosso è *orientato*, perchè va dai nodi della prima foresta ai nodi della seconda, e *pesato*, perchè gli è assegnato un numero naturale  $p \in \{0, 1\}$ .

Nell'implementazione, trattata tramite la programmazione a vincoli, ogni arco rosso è una variabile. L'insieme delle variabili per il place graph sarà quindi:

$$\begin{aligned} M_{d,m,n} \in \{0, 1\} \quad & 0 \leq d \leq \text{depth} \\ & m \in P_F^d \\ & n \in P_G^d \end{aligned}$$

dove  $\text{depth}$  è l'altezza massima della prima foresta, e  $P_F^d$  e  $P_G^d$  indicano l'insieme di nodi/radici/siti che si trovano all'altezza  $d$  rispettivamente nel place graph  $P_F$  e  $P_G$ . In altre parole, creo una variabile che può assumere valore 0 o 1 per ogni coppia di nodi  $(a, b)$  che si trovano sulla stessa altezza, dove  $a$  appartiene al primo place graph mentre  $b$  al secondo.

I vincoli dovranno essere tali che, dopo l'esecuzione del sistema sul calcolatore, le variabili che assumeranno il valore 1 saranno quelle che *formeranno* la vera e propria traduzione di supporto. Ovvero:

**Proposizione 2.** *La variabile  $M_{d,m,n}$  assumerà il valore 1 se e solo se esiste una traduzione di supporto  $\rho$  tale che  $\rho(m) = n$ .*

Tutte le altre variabili dovranno assumere il valore 0. Un altro modo di vedere la soluzione è questa: la funzione di traduzione di supporto sarà definita da tutte e sole le variabili con valore 1. Infine:

**Terminologia.** *Quando la variabile  $M_{d,m,n} = 1$  diremo che  $m$  e  $n$  costituiscono un match.*

Nell'esempio di figura 2.4, la soluzione esiste ed è definita come in figura 2.5, dove i numeri sopra le variabili (archi rossi) indicano i valori che esse hanno assunto dopo la risoluzione del sistema di equazioni.

Riassumendo, dobbiamo tradurre in vincoli il fatto che la funzione di traduzione di supporto sia biettiva e che conservi la struttura del place graph  $P_F$ . Distingueremo quindi in vincoli di flusso, che serviranno per il primo problema, e in vincoli strutturali, per il secondo.

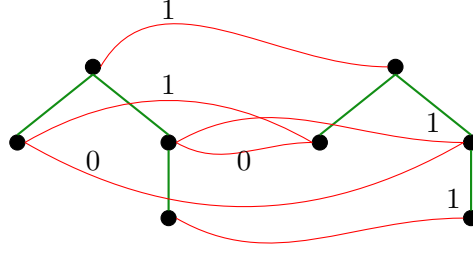


Figura 2.5: Soluzione della rete di flusso

Incominciamo con i **vincoli strutturali**: si è adottata una versione ricorsiva per i vincoli. Distinguiamo quindi in caso base e passo ricorsivo.

- *Caso Base*: due nodi della stessa altezza che hanno un numero diverso di figli *non* possono costituire un match. In formule:

$$M_{d,m,n} = 0 \quad \begin{aligned} &\text{se } |\text{prnt}_F^{-1}(m)| \neq |\text{prnt}_G^{-1}(n)| \\ &\forall d \leq \text{depth} - 1 \\ &\forall m \in P_F^d \text{ e } n \in P_G^d \end{aligned}$$

Nella figura sottostante, si vede subito che la variabile  $M_{0,r_0,r_0} = 0$  perchè  $\text{prnt}_F^{-1}(r_0) = 1 \neq 2 = \text{prnt}_G^{-1}(r_0)$ .

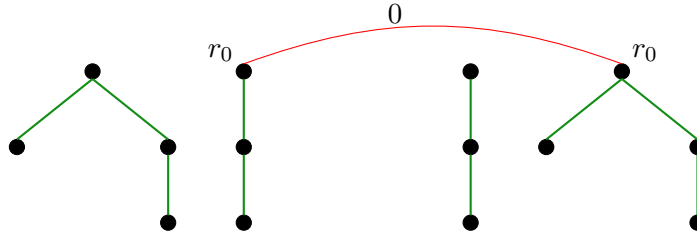


Figura 2.6: Esempio per il primo vincolo

Si noti che questo vincolo viene applicato a tutti i nodi tranne ai siti, come specificato dalla condizione  $\forall d \leq \text{depth} - 1$ .

- *Caso Ricorsivo*: se due nodi alla stessa altezza *non* costituiscono un match, allora neanche i loro figli lo fanno. In formule:

$$M_{d,m,n} \leq M_{d-1,\text{prnt}(m),\text{prnt}(n)} \quad \begin{aligned} &\forall d \geq 1 \\ &\forall m \in P_F^d \\ &\forall n \in P_G^d \end{aligned}$$

Questo vincolo modella la seguente implicazione:

$$M_{d-1,prnt(m),prnt(n)} = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{d,m,n} = 0$$

Esso costituisce il caso ricorsivo perchè vale per tutti i nodi tranne le radici, e le radici sono ricoperte dal caso base. Si veda la figura 2.7: la variabile  $M_{1,n_1,n_2} = 0$  perchè dalla figura 2.6 sappiamo che  $M_{0,r_0,r_0} = 0$  e perchè  $prnt_F(n_1) = r_0$  e  $prnt_G(n_2) = r_0$ . Lo stesso ragionamento vale per la variabile  $M_{1,n_1,n_3}$ .

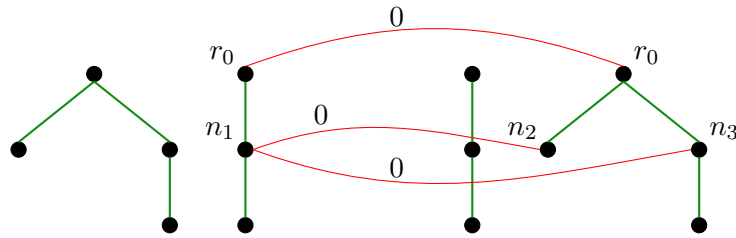


Figura 2.7: Esempio per il secondo vincolo

Questi vincoli non sono però sufficienti per determinare un isomorfismo tra i due place graph  $P_F$  e  $P_G$ . In particolare, la traduzione di supporto deve essere biettiva, cioè associare un nodo/radice/sito di  $P_F$  ad uno ed un solo nodo/radice/sito di  $P_G$ . Si sono quindi aggiunti i **vincoli di flusso**.

- *Flusso in uscita*: il flusso totale in uscita da ogni nodo deve essere esattamente pari a 1.

**Notazione.** Questo vincolo lo indicheremo con la notazione:  $\delta^+(m) = 1$ , dove  $m \in P_F^d$ .

Esso si traduce nel fatto che la somma di tutte le variabili in uscita da ogni nodo/radice/sito di  $P_F$  deve essere 1, ovvero: ogni nodo di F può costituire un match solamente con uno ed un solo altro nodo di G. In formule:

$$\sum_n M_{d,m,n} = 1 \quad \begin{array}{l} 0 \leq d \leq depth \\ m \in P_F^d \\ n \in P_G^d \end{array}$$

In figura 2.8 si può vedere come la somma degli archi in uscita dal nodo  $n_1$  sia 1, ovvero:  $M_{1,n_1,n_1} + M_{1,n_1,n_2} + M_{1,n_1,n_3} = 1$ .

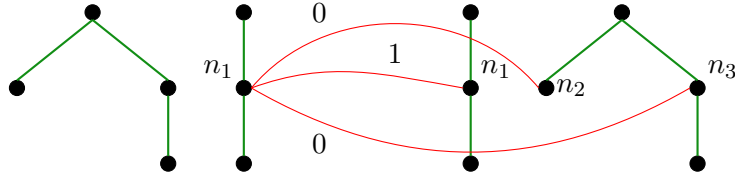


Figura 2.8: Esempio per il vincolo sul flusso in uscita

- *Flusso in entrata*: il flusso totale in entrata da ogni nodo deve essere esattamente pari a 1.

**Notazione.** Questo vincolo lo indicheremo con la notazione:  $\delta^-(n) = 1$ , dove  $n \in P_G^d$ .

Esso è equivalente a dire che la somma di tutte le variabili in entrata da ogni nodo/radice/sito di  $P_G$  deve essere 1. In altre parole: ogni nodo di  $G$  può costituire un match solamente con uno ed un solo altro nodo di  $F$ . In formule:

$$\sum_m M_{d,m,n} = 1 \quad \begin{array}{l} 0 \leq d \leq \text{depth} \\ m \in P_F^d \\ n \in P_G^d \end{array}$$

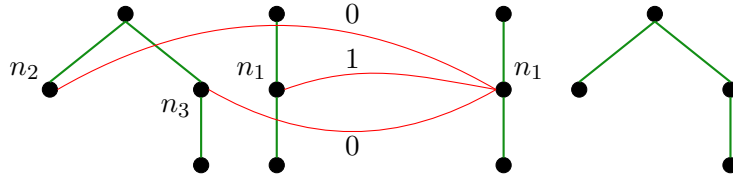


Figura 2.9: Esempio per il vincolo sul flusso in entrata

In figura 2.9, è stato espresso il vincolo che il flusso in entrata verso il nodo  $n_1$  deve essere 1, cioè:  $M_{1,n_1,n_1} + M_{1,n_2,n_1} + M_{1,n_3,n_1} = 1$ .

Si capisce bene come questi due ultimi vincoli assicurino che la traduzione di supporto sia rispettivamente iniettiva e suriettiva, rendendola quindi *biiettiva* come si voleva.

### 2.4.2 Vincoli per il link graph

L'isomorfismo tra link graph è un isomorfismo tra ipergrafi. In questo problema, sfruttiamo soprattutto la definizione di link graph: la sua struttura è definita dalla

funzione *link*, che collega Punti a Handles. I primi sono l'insieme delle porte e degli inner names, mentre i secondi sono l'insieme degli archi e degli outer names (sottosezione 1.2.2). Si può quindi vedere ogni link graph come una funzione che ha come dominio i Punti e come codominio gli Handles.

Sulla base di queste osservazioni, possiamo costruire la *rete di flusso* per questo problema nel seguente modo: innanzitutto chiamiamo i due link graph rispettivamente  $L_F$  e  $L_G$ , e le loro funzioni come  $link_F$  e  $link_G$  (definite dagli archi verdi di figura 2.10). Possiamo collegare tutti gli elementi del dominio di  $link_F$  a tutti gli elementi del dominio di  $link_G$ , creando così archi *orientati*, perchè vanno da punti di  $L_F$  a punti di  $L_G$ , e *pesati*, perchè possono assumere un valore  $p \in \{0, 1\}$ . Infine, facciamo lo stesso con i loro Handle: colleghiamo tutti gli elementi del codominio di  $link_F$  a tutti gli elementi del codominio di  $link_G$ .

Si è così creata la rete di flusso in figura 2.10, dove  $D_X$  (con  $X \in \{F, G\}$ ) indica il dominio di  $link_X$  e  $C_X$  il suo codominio.

Per chiarezza visiva, si sono omessi alcuni archi rossi, ma si deve immaginare che ogni elemento di  $D_F$  abbiamo tre archi verso ognuno degli elementi di  $D_G$ . Lo stesso vale per  $C_F$ .

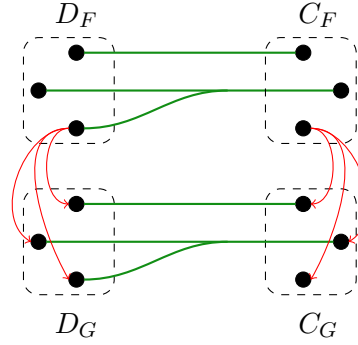


Figura 2.10: Esempio di rete di flusso per il problema di isomorfismo tra link graphs.

Incominciamo quindi con definire le variabili del sistema di equazioni:

$$\begin{aligned} x_{h,h'} &\in \{0, 1\} & h &\in C_F = Y_F \uplus E_F \\ & & h' &\in C_G = Y_G \uplus E_G \\ y_{p,p'} &\in \{0, 1\} & p &\in D_F = X_F \uplus P_F \\ & & p' &\in D_G = X_G \uplus P_G \end{aligned}$$

Si sono distinte le variabili che vanno dal dominio  $D_F$  a  $D_G$ , che vengono chiamate  $y$ , da quelle che vanno dal codominio  $C_F$  a  $C_G$ , chiamate  $x$ . Le soluzioni del

sistema hanno lo stesso significato che avevano nel place graph: dopo l'esecuzione, le variabili che assumeranno il valore 1 saranno solamente quelle che costituiranno la vera e propria traduzione di supporto. Quindi, anche per questo problema, valgono la proposizione 2 e la notazione 2.4.1.

I vincoli che si devono scegliere hanno il compito di “costituire” la funzione di traduzione di supporto, e devono quindi assicurare che essa sia biiettiva e che mantenga la struttura del primo link graph. Perciò, anche in questo caso, distinguiamo in *vincoli di flusso*, per il primo problema, e in *vincoli strutturali*, per il secondo.

Incominciamo con il definire i **vincoli strutturali**. Essi hanno il compito di definire una funzione che va dal primo link graph al secondo, che sia in grado di mantenere la struttura del primo. In altre parole, devono controllare che le due strutture siano *compatibili*. I vincoli strutturali fanno riferimento al caso negativo, cioè descrivono nel sistema quando due punti o due handle *non* possono costituire un match. Da qui i due vincoli:

- *Primo vincolo strutturale*: due handles (il primo di  $L_F$  e il secondo di  $L_G$ ) che hanno un numero diverso di pre-immagini *non* possono costituire un match. In altre parole: se l'handle  $h$  è immagine di due punti ma l'handle  $h'$  lo è di uno solo, allora  $h$  e  $h'$  non possono essere associati. In formule:

$$\begin{aligned} x_{h,h'} &= 0 & |link_F^{-1}(h)| &\neq |link_G^{-1}(h')| \\ h &\in C_F = Y_F \uplus E_F \\ h' &\in C_G = Y_G \uplus E_G \end{aligned}$$

In figura 2.11, si può vedere come la variabile  $x_{h_3,h_1}$  sia vincolata ad assumere il valore 0, infatti:  $|link_F^{-1}(h_3)| = 0$  ma  $|link_G^{-1}(h_1)| = 1$ , quindi  $x_{h_3,h_1} = 0$ .

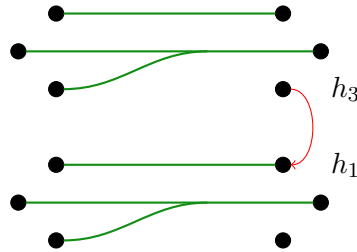


Figura 2.11: Esempio per il primo vincolo.

- *Secondo vincolo strutturale*: se due handles ( $h \in C_F$  e  $h' \in C_G$ ) non costituiscono un match, allora neanche i punti che hanno  $h$  e  $h'$  come immagine lo fanno. Questo vincolo modella la seguente implicazione:

$$x_{h,h'} = 0 \quad \Rightarrow \quad y_{p,p'} = 0$$

dove  $p \in \text{link}_F^{-1}(h)$  e  $p' \in \text{link}_G^{-1}(h')$ . Esso può essere tradotto tramite la seguente equazione.

$$\begin{aligned} y_{p,p'} &\leq x_{\text{link}_F(p), \text{link}_G(p')} & p &\in D_F = X_F \uplus P_F \\ & & p' &\in D_G = X_G \uplus P_G \end{aligned}$$

Si noti che questa equazione equivale all'implicazione precedente: se  $x = 0$ , allora deve per forza essere che anche  $y = 0$ .

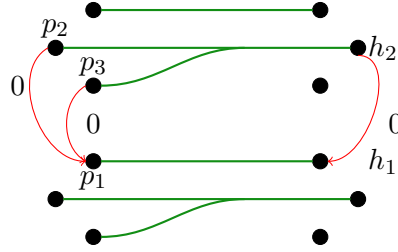


Figura 2.12: Esempio per il secondo vincolo.

In figura 2.12, si può vedere un esempio per questo vincolo. Dal primo vincolo sappiamo che  $x_{h_2, h_1} = 0$  perchè  $|\text{link}_F^{-1}(h_2)| = 2$  mentre  $|\text{link}_G^{-1}(h_1)| = 1$ . Aggiungendo il vincolo appena descritto, ricaviamo quindi che  $y_{p_2, p_1} = 0$  e  $y_{p_3, p_1} = 0$ . Infatti, si vede subito che i punti  $p_2$  e  $p_3$  non possono costituire un match con  $p_1$ .

Descriviamo adesso i **vincoli di flusso**, che consentono di avere una funzione biiettiva. Il caso è analogo a quello per il place graph e la notazione rimane la stessa.

- *Flusso in uscita:*

- $\delta^+(p) = 1$ : Dobbiamo assicurare che ogni punto di  $D_F$  sia associato ad uno e un solo punto di  $D_G$ , che si traduce in questa equazione:

$$\sum_{p'} y_{p,p'} = 1 \quad p \in X_F \uplus P_F \quad p' \in X_G \uplus P_G$$

- $\delta^+(h) = 1$ : E' l'analogo del caso precedente. Ogni handle di  $C_F$  deve essere associato ad uno e un solo handle di  $C_G$ . La rispettiva equazione è:

$$\sum_{h'} y_{h,h'} = 1 \quad h \in Y_F \uplus E_F \quad h' \in Y_G \uplus E_G$$

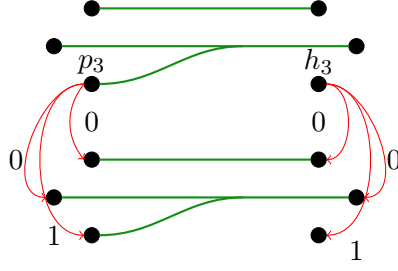


Figura 2.13: Esempio per i due vincoli sul flusso in uscita.

La figura 2.13 mostra un esempio di questi due vincoli.

- *Flusso in entrata:*

- $\delta^-(p') = 1$ : ogni punto di  $D_G$  può essere associato ad uno e un solo punto di  $D_F$ . In formule:

$$\sum_p y_{p,p'} = 1 \quad p \in X_F \uplus P_F \quad p' \in X_G \uplus P_G$$

- $\delta^-(h') = 1$ : ogni handle di  $C_G$  può essere associato ad uno e un solo handle di  $C_F$ . In formule:

$$\sum_h y_{h,h'} = 1 \quad h \in Y_F \uplus E_F \quad h' \in Y_G \uplus E_G$$

La figura 2.14 mostra un esempio per questi due vincoli.

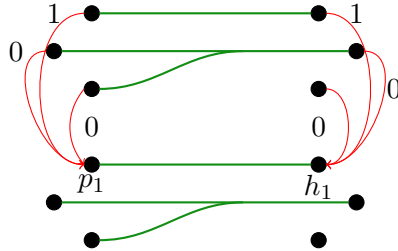


Figura 2.14: Esempio per i due vincoli sul flusso in entrata.

Si noti che i quattro vincoli di flusso assicurano la iniettività e la suriettività della funzione di traduzione di supporto, rendendola quindi *biiettiva*.

### 2.4.3 Vincoli di coerenza

Nella sottosezione 2.3.1, dedicata ad alcuni esempi, la figura 2.2 mostrava due bigrafi che, pur avendo i place graphs ed i link graphs isomorfi, *non* erano tali. Questo perchè il sistema di equazioni non era completo: non bastano cioè i vincoli visti fino



ad ora, e bisogna integrarli con dei **vincoli di coerenza** che sono dedicati all'unione delle due soluzioni.

Nell'esempio citato, si era già notato informalmente che il quadrato collegato al cerchio nel primo link graph deve essere quello più esterno nel primo place graph. Diamo ora le definizioni formali di questi vincoli:

- *Primo vincolo di coerenza*: due porte costituiscono un match nei due link graphs *se e solo se* i rispettivi nodi lo fanno nei due place graphs e le due porte hanno lo stesso indice. In formule:

$$\begin{aligned}
 y_{p,p'} &= M_{d,m,m'} & p &= (m, i) & p' &= (m', i) \\
 & & p &\in P_F & p' &\in P_G \\
 & & m &\in V_F & m' &\in V_G \\
 & & i &\in \mathbb{N}
 \end{aligned}$$

In altre parole, se due nodi  $m$  e  $m'$  non costituiscono un match nei due place graphs, allora neanche le loro porte lo fanno. D'altra parte, se  $m$  e  $m'$  costituiscono un match, cioè  $M_{d,m,m'} = 1$ , allora le porte con lo stesso indice devono costituire un match:  $y_{p,p'} = 1$ .

- *Secondo vincolo di coerenza*: due porte con indici diversi non possono costituire un match. In formule:

$$\begin{aligned}
 y_{p,p'} &= 0 & p &= (m, i) & p' &= (m', i) \\
 & & p &\in P_F & p' &\in P_G \\
 & & m &\in V_F & m' &\in V_G \\
 & & i, i' &\in \mathbb{N} & i &\neq i'
 \end{aligned}$$

- *Terzo vincolo di coerenza*: se due punti sono di tipo diverso, cioè il primo è una porta e il secondo un inner name, allora essi non possono costituire un match.

$$y_{p,p'} = 0 \quad p \in P_F \quad p' \in X_G$$

Banalmente, vale anche il caso speculare, dove il primo punto è un inner name mentre il secondo è una porta:

$$y_{p,p'} = 0 \quad p \in X_F \quad p' \in P_G$$

- *Quarto vincolo di coerenza*: se due handles sono di tipo diverso, cioè il primo è un arco e il secondo un outername, allora essi non possono costituire un match.

$$y_{h,h'} = 0 \quad h \in E_F \quad h' \in Y_G$$

Il caso speculare, dove il primo handle è un outer name name mentre il secondo è un arco, è dato dalla formula:

$$y_{h,h'} = 0 \quad h \in Y_F \quad h' \in E_G$$

- *Quinto vincolo di coerenza*: un nodo può costituire un match solo con un altro nodo. Lo stesso vale per le radici e per i siti. Perciò, è impossibile per esempio che esista una variabile con valore 1 da una radice verso un nodo. I vincoli che coprono tutti i possibili casi sono:

$$\begin{array}{ll} M_{d,a,b} = 0 & \text{se} \quad a \in n \quad b \in V_G \\ & \text{oppure se} \quad a \in n \quad b \in m \\ & \text{oppure se} \quad a \in m \quad b \in V_G \\ & \text{oppure se} \quad a \in m \quad b \in n \\ & \text{oppure se} \quad a \in V_F \quad b \in m \\ & \text{oppure se} \quad a \in V_F \quad b \in n \end{array}$$

- *Sesto vincolo di coerenza*: due nodi con controlli diversi non possono costituire un match. Per esempio, in figura 2.2 il quadrato più grande del primo bigrafo non può essere associato con il cerchio del secondo.

$$M_{d,a,b} = 0 \quad ctrl_F(a) \neq ctrl_G(b)$$

#### 2.4.4 Implementazione con Choco

Tutti i vincoli sono stati espressi sul calcolatore tramite la libreria Java *Choco vs 3.3.1*. Essa permette di rappresentare un sistema di equazioni che poi la stessa libreria risolverà. Forniamo quindi una panoramica della libreria ed alcuni esempi di vincoli che sono stati espressi.

La prima fase, che precede la definizione dei vincoli, riguarda la creazione delle variabili. Ad ogni variabile si deve obbligatoriamente assegnare anche un dominio, che, per quanto grande sia, deve essere finito. A titolo di esempio, in *Choco vs 3.3.1* possiamo creare le variabili  $x$  e  $y$  entrambe con dominio  $\{0, 1, 2, 3, 4\}$  con le seguenti istruzioni:

---

```
IntVar x = VariableFactory.enumerated("x", 0, 4, solver);
IntVar y = VariableFactory.enumerated("y", 0, 4, solver);
```

---

Si noti come ogni variabile venga associata ad un **solver**, che è il motore interno che risolverà il sistema. Sia  $x$  che  $y$  sono associate allo stesso solver: questo equivale a dire che apparterranno allo stesso sistema di equazioni. La sintassi dei metodi è chiara: come primo argomento c'è il nome della variabile, come secondo ci può essere un vettore (che enumera tutti gli elementi del dominio) oppure il primo estremo dell'intervallo del dominio; come terzo argomento abbiamo il limite superiore del dominio, ed infine c'è il solver al quale le variabili dovranno fare riferimento.

Esprimiamo ora degli esempi di vincoli, che sono appunto equazioni. Tutte le equazioni che appartengono allo stesso sistema, dovranno fare riferimento allo stesso solver. Nel solver di *Choco vs 3.3.1*, le equazioni vengono aggiunte al sistema tramite il suo metodo *post()*. Il sistema

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x \leq 3 \\ y > 1 \end{cases}$$

si può rappresentare con le seguenti istruzioni:

---

```
IntVar[] sumV = {x,y};
IntVar seven = VariableFactory.fixed("seven", 7, solver);
solver.post(ICF.sum(sumV, "=", seven));
solver.post(ICF.arithm(x, "<=", 3));
solver.post(ICF.arithm(y, ">", 1));
```

---

Si noti come tutti i vincoli facciano riferimento a “solver”, e che quindi faranno parte dello stesso sistema. Inoltre, con il metodo *sum* si è dovuto creare una costante che rappresentasse il numero 7 (nel metodo *arithm* questo non è necessario). Vediamo brevemente come si usano questi metodi: il metodo *fixed* serve per creare una costante; è simile ad *enumerated* e vuole come argomenti il nome della variabile, il valore della costante ed il solver al quale fare riferimento.

Il metodo *sum* accetta come primo argomento un vettore formato da tutte le variabili che costituiscono la somma, come secondo argomento l'operatore (per esempio  $=$  oppure  $\leq$ ) ed infine la variabile che nell'equazione sta a destra dell'operatore.

Il metodo *arithm* consente di esprimere le più comuni equazioni aritmetiche: il primo argomento è una variabile, il secondo un operatore ( $<, \leq, =, \geq, >$ ) ed il terzo una variabile o un numero naturale.

Con il seguente comando:

---

```
solver.findSolution();
```

---

la libreria cerca di risolvere il sistema di equazioni. Se esiste una soluzione ritorna `True`, altrimenti `False`. Si noti come in questa sede non ci interessino le soluzioni del sistema, che però potrebbero venire calcolate con il metodo:

---

```
var.getValue() //dove var è una IntVar
```

---

per ogni variabile *var* che fa parte del sistema.

Da quanto appena visto, l'implementazioni dei vincoli per l'isomorfismo tra bigrafi è una traduzione quasi immediata delle formule della sezione precedente. Forniamo quindi solo alcuni esempi:

- Il vincolo sul flusso in uscita ( $\delta^+(p) = 1$ ) da ogni punto del primo link graph è  $\sum_{p'} y_{p,p'} = 1$ . La sua traduzione nella libreria *Choco vs 3.3.1* usa il metodo *sum* visto prima. Si guardi la figura 2.15: se vogliamo esprimere questo vincolo su  $p_3$  allora la corrispondente istruzione sarà:

---

```
BoolVar p3_p1 = VF.bool("P3-P1", solver);
BoolVar p3_p2 = VF.bool("P3-P2", solver);
BoolVar p3_p3 = VF.bool("P3-P3", solver);
IntVar[] redArrows = {p3_p1, p3_p2, p3_p3};
IntVar one = VF.fixed("one", 1, solver);
solver.post(ICF.sum(redArrows, "=", one));
```

---

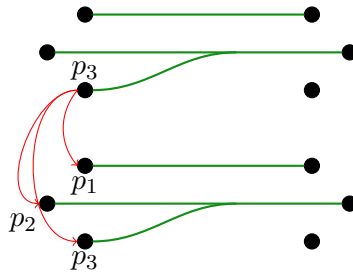


Figura 2.15: Implementazione del vincolo sul flusso in uscita.

VF è la semplice abbreviazione per *VariableFactory*. Come prima cosa, si sono create le tre variabili che corrispondono agli archi rossi della figura. Tutte

e tre hanno dominio  $\{0,1\}$ , per cui possiamo dichiararle direttamente come variabili booleane. Dato che c'è una sommatoria, dobbiamo usare il metodo *sum*: creiamo quindi il vettore con tutti i membri della somma (*redArrows*) e una costante per il numero 1 (*one*). L'ultima istruzione, aggiunge l'equazione  $\sum_{p'} y_{p,p'} = 1$  al sistema.

- Il vincolo  $y_{p,p'} \leq x_{link_F(p),link_G(p')}$  modella una semplice implicazione, come visto nella sezione precedente. Si prenda la figura 2.16: presi i due punti  $p_2$  e  $p_1$  rispettivamente del primo e del secondo link graph, si ha che questo vincolo può essere espresso tramite queste istruzioni:

---

```
BoolVar p2_p1 = VF.bool("P2-P1", solver);
BoolVar h2_h1 = VF.bool("H2-H1", solver);
solver.post(ICF.arithm(p2_p1, "<=", h2_h1));
```

---

Come si può vedere, la traduzione è quasi immediata: il metodo *arithm* consente di scrivere direttamente l'equazione, risultando quindi molto comodo.

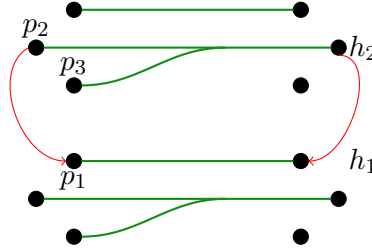


Figura 2.16: Implementazione del secondo vincolo strutturale

## 2.5 Benchmarks

Nella sottosezione 2.2.1 si è vista la complessità teorica del problema dell'isomorfismo tra bigrafi. Ora si vedranno dei test (benchmark) volti a misurare le prestazioni dell'algoritmo proposto. Tutti i test sono stati eseguiti su una macchina con queste caratteristiche:

- processore Intel Core i5 a 2.4GHz
- IDE: Eclipse Luna 4.4.2
- libreria per il constraint programming: *Choco vs 3.3.1*

La preparazione dei dati è stata condotta con attenzione: si è implementato un metodo che potesse generare bigrafi casuali con il numero di nodi richiesto, per fare

in modo che il tempo di risoluzione non dipendesse dalla struttura del bigrafo, che può essere semplice o complessa. Si vedranno due grafici:

- il primo rappresenta il *tempo di preparazione* (figura 2.17): è la misura di quanto l'algoritmo impiega per creare tutte le variabili ed i vincoli
- il secondo rappresenta il *tempo d'esecuzione* (figura 2.18), cioè quanto tempo impiega la libreria *Choco vs 3.3.1* per risolvere il sistema di equazioni

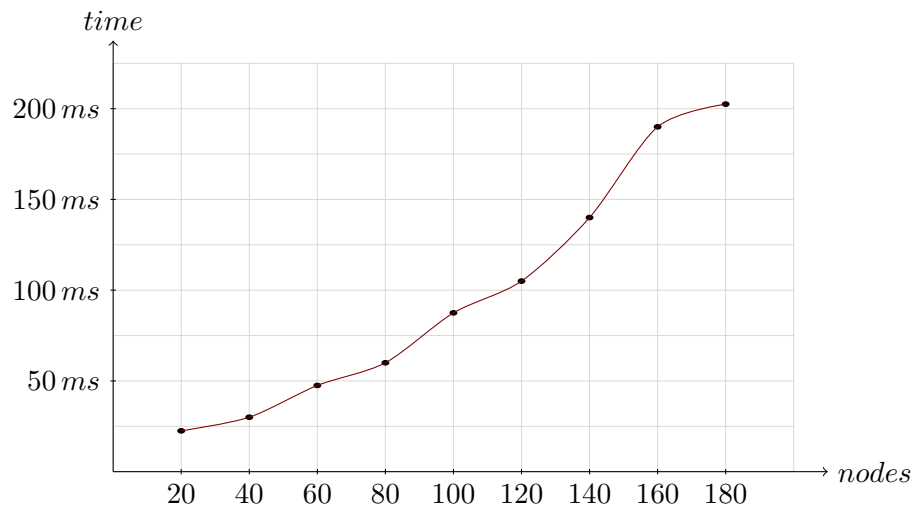


Figura 2.17: Loading Time

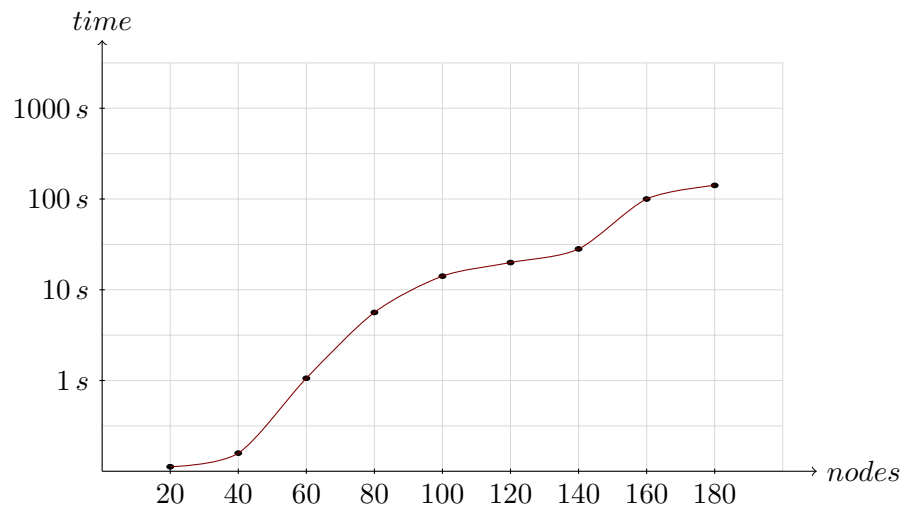


Figura 2.18: Working Time

Ogni grafico ha sulle ascisse il numero di nodi del problema: in altre parole, il problema testato in  $x = n$  verifica l'isomorfismo tra due bigrafi con  $n/2$  nodi ciascu-

no. Sulle ascisse c'è invece il tempo espresso in secondi. Il secondo grafico è in scala logaritmica: l'aumento del numero di nodi causa un'esplosione combinatoria tra i due bigrafi, che porta ad un aumento esponenziale del numero di vincoli e quindi anche del relativo tempo d'esecuzione.

Si noti come il tempo di preparazione cresca linearmente con il numero di nodi, rimanendo sempre sotto un secondo. Il tempo d'esecuzione invece aumenta drasticamente, arrivando fino a due minuti nel caso di due bigrafi con 90 nodi ciascuno.

## 2.6 Grafo degli stati

Sono stati elencati tutti i vincoli necessari per determinare l'isomorfismo tra bigrafi. Si è già visto che l'utilità di sapere quando due bigrafi sono uguali risiede nel fatto che è possibile fermare l'esecuzione del BRS, evitando così cicli infiniti tra due bigrafi uguali. Per memorizzare tutti gli stati assunti da un BRS durante la sua evoluzione, si è creato il *grafo degli stati*: è una struttura dati a grafo dove ogni nodo è a sua volta un bigrafo.

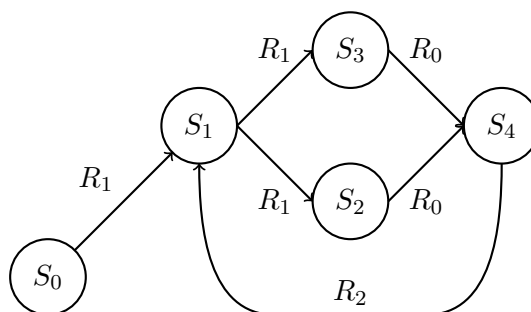


Figura 2.19: Esempio di grafo degli stati.

Come si può vedere dalla figura 2.19, ogni nodo è etichettato con la stringa  $S_i$ , perchè si tratta di uno stato, cioè di un bigrafo. All'interno di un BRS, abbiamo visto che un bigrafo può evolversi tramite le regole di reazione, motivo per cui ogni arco orientato del grafo degli stati è etichettato con il nome della regola che ha portato dal primo stato al secondo. Nell'esempio di cui sopra, dal bigrafo iniziale  $S_0$  si passa a  $S_1$  tramite la regola  $R_1$ .

Si noti un aspetto molto importante: da  $S_0$  a  $S_1$  la regola  $R_1$  ha generato un solo nuovo stato. Questo vuol dire che il redex di  $R_1$  ha una sola occorrenza in  $S_0$ , ed essa è stata sostituita dal reactum di  $R_1$ , creando così lo stato  $S_1$ . Però, se

prendiamo in considerazione quest'ultimo stato, si vede che ora la regola  $R_1$  porta a due nuovi stati. Questo perchè in  $S_1$  ci sono due occorrenze del redex di  $R_1$ , che vengono sostituite dal suo reactum, creando rispettivamente i due nuovi stati  $S_2$  e  $S_3$ . In altre parole: una regola di reazione può generare un diverso numero di stati a seconda del bigrafo a cui è applicata.

Infine, si presti attenzione all'arco tra  $S_4$  e  $S_1$ . Il significato è il seguente: applico la regola  $R_2$  al bigrafo  $S_4$ , generando un nuovo stato  $S_5$ . Esso è però isomorfo a  $S_1$ , cioè:  $S_1$  e  $S_5$  hanno la stessa *semantica*, per cui collego  $S_4$  a  $S_1$ . Se non ci fossimo accorti di questa proprietà, allora avremmo continuato ad applicare le regole  $R_0$ ,  $R_1$  e  $R_2$  all'*infinito*, generando sempre nuovi stati, come in figura 2.20. Ora invece, dato che ci siamo accorti che da  $S_4$  siamo ritornati ad  $S_1$ , non applichiamo più nessuna regola, avendo quindi un grafo degli stati *finito*, cioè quello di figura 2.19.

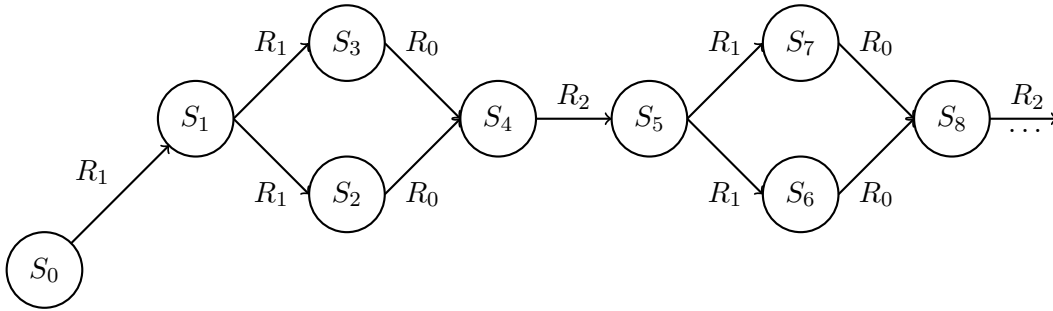


Figura 2.20: Grafo degli stati infinito.

### 2.6.1 Esempio

In questa sottosezione, viene fornito un esempio concreto di grafo degli stati, con particolare attenzione al problema dell'evoluzione infinita. Si riprende l'esempio della rete della sottosezione 2.6.1. L'implementazione la si può trovare in [...].

Si introduce solo la segnatura del pacchetto, del router e del dominio:  $K = \{\text{pacchetto} : 2, \text{router} : 2, \text{dominio} : 0\}$ . Chiameremo rispettivamente *Encap* e *Decap* le regole per l'incapsulamento e il decapsulamento dei pacchetto nei vari strati, per esempio da Http a Tcp, o da Ip a Ethernet. Ci concentriamo sulla regola di inoltro tra router, che è quella in figura 2.21.

La regola è molto semplice. Innanzitutto, incominciamo con i vari controlli. Figli diretti delle due radici sono i due rettangoli: essi sono i domini di cui fanno parte i



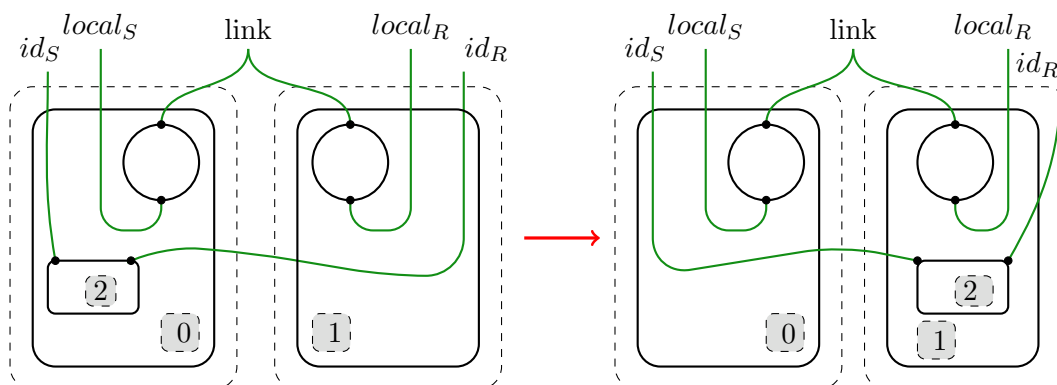


Figura 2.21: Regola di inoltra tra router.

due router. Questi ultimi, a loro volta, sono disegnati come circonferenze con due porte: la prima collegata a “link” e la seconda a “Local”. Infine, il pacchetto è rappresentato da un rettangolo, anch’esso con due porte: la prima, che è quella più a sinistra, è collegata al mittente, mentre la seconda al destinatario.

Passiamo ora a definire il ruolo degli outernome. “Link” è l’outernome dedicato alla connessione tra router: se un terzo router volesse collegarsi a questi due, allora dovrebbe collegare (nel vero senso della parola) la sua porta superiore con l’outernome “link”. Si ricordi quanto detto nella sottosezione 2.6.1: i router inoltrano non deterministicamente ogni pacchetto verso tutte le sue interfacce. Se tre router sono collegati all’outernome “link”, allora uno di questi inoltra il pacchetto verso tutti gli altri due. Per cui “link” rappresenta l’insieme di tutte le interfacce di un router.

Gli outernome “Local<sub>S</sub>” e “Local<sub>R</sub>” sono a disposizione solamente per gli host del dominio corrente. Per esempio, a “Local<sub>S</sub>” (che sta per *Local Sender*) si possono collegare solo gli host del dominio in cui si trova il primo router. Nella regola di figura 2.21, questi host vengono inglobati dal sito numero 0. Il medesimo discorso vale per “Local<sub>R</sub>”.

Il pacchetto è collegato a due outernome. Il primo, quello più a sinistra, è “id<sub>S</sub>” (*id Sender*), mentre il secondo è “id<sub>R</sub>” (*id Receiver*). Nella realtà, questi due outernome saranno gli identificativi del mittente e del destinatario. Se per esempio il pacchetto in questione è IP, allora id<sub>S</sub> sarà l’indirizzo IP del mittente, mentre id<sub>R</sub> quello del destinatario.

Infine, si noti anche il sito numero 2: si trova dentro il pacchetto e permette di astrarre al tipo di pacchetto. Per esempio: se è un pacchetto IP, allora è probabile che abbia incapsulato al suo interno un pacchetto TCP, che a sua volta contiene un pacchetto HTTP. Onde evitare di scrivere regole ad hoc per ogni tipo di pacchetto,

si introduce il sito numero 2, così che la regola trovi un'occorrenza (e quindi scatti) per qualsiasi tipo di pacchetto.

Vediamo ora un esempio reale, proposto in figura 2.22. Siano  $D_S$  e  $D_R$  i domini rispettivamente del mittente (sender) e del destinatario (receiver). Indicheremo con il triangolo il controllo per un host. Quindi  $h_1$  e  $h_2$  saranno rispettivamente all'interno di  $D_S$  e  $D_R$ . Lo stesso vale per i router, cioè  $R_S$  e  $R_R$ . Supponiamo che il pacchetto sia di tipo IP, e che  $h_1$  sia collegato per esempio a 158.110.3.46, e  $h_2$  a 158.110.144.31. Infine, per quanto detto prima a proposito di “ $Local_S$ ” e “ $Local_R$ ”, alla porta inferiore di  $R_S$  si collegherà  $h_1$ , mentre a quella di  $R_R$  si collegherà  $id_2$ .

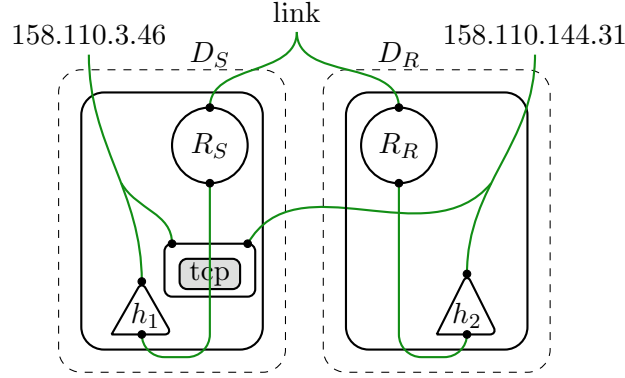


Figura 2.22: Bigrafo di partenza

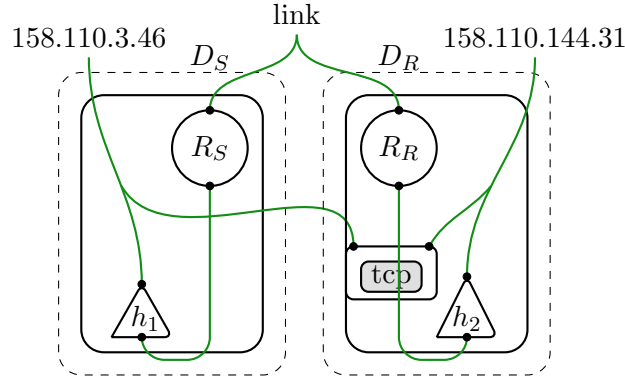


Figura 2.23: Bigrafo dopo l'applicazione della regola  $R_0$

Chiamiamo il bigrafo della figura 2.22 come  $S_0$ , cioè lo stato iniziale del grafo degli stati. Il nostro BRS è formato da una sola regola, cioè quella di figura 2.21, che chiameremo  $R_0$ . Si noti come il redex di  $R_0$  trovi una ed una sola occorrenza in  $S_0$ , e quindi genererà un solo stato, ovvero  $S_1$ , dove il pacchetto si è spostato in  $D_R$ , arrivando a destinazione. Si può vedere questo risultato nel bigrafo di figura

2.23, che sarà quindi  $S_1$ .

Di per sè, il BRS si dimentica degli stati precedenti, in questo caso  $S_0$ . Per cui, da  $S_1$  scatterebbe di nuovo la regola  $R_0$ , creando lo stato  $S_2$ . A sua volta, da  $S_2$ , eseguirebbe di nuovo  $R_0$  e causerebbe così un'esecuzione infinita, dando luogo al grafo degli stati in figura 2.24.

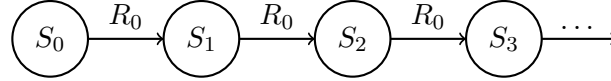


Figura 2.24: Grafo degli stati infinito.

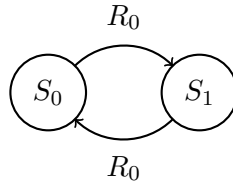


Figura 2.25: Grafo degli stati finito.

Grazie all'isomorfismo tra bigrafi, riusciamo a collegare lo stato  $S_1$  a  $S_0$ . Poichè da  $S_1$  tramite la regola  $R_0$  viene creato lo stato  $S_2$ , siamo ora in grado non doverlo più memorizzare, in quanto è uguale (o meglio, è semanticamente equivalente) allo stato  $S_0$ . Per cui, ritrovandoci di nuovo in  $S_0$ , sappiamo che non dobbiamo applicare più nessuna regola, pena un'esecuzione infinita del BRS. Tramite l'isomorfismo, si è potuto generare il *grafo degli stati* della figura 2.25.



---

# 3

## Model Checker per bigrafi

Nel capitolo precedente si è visto come il fatto di poter riconoscere quando due bigrafi sono uguali permetta di poter arrestare l'esecuzione del BRS, evitando sue evoluzioni infinite. In questo capitolo invece si vedrà l'altro principale problema: come poter verificare date proprietà sul BRS. Riprendendo l'esempio della rete, una proprietà che potremmo verificare è l'arrivo a destinazione di un pacchetto, oppure assicurarci che nessun pacchetto non autorizzato passi attraverso un firewall.

Come per l'isomorfismo, anche questo problema necessita di una soluzione generale, che prescinde dal dominio che i bigrafi rappresentano. Si è creata quindi una semplice logica a predicati, con cui è possibile esprimere le proprietà che si vuole verificare. Essa andrà a formare la *politica* per il Model Checker, che servirà a verificare le proprietà sul grafo degli stati visto nel capitolo precedente.

### 3.1 Model Checker

Un Model Checker (MC) è un metodo per verificare delle proprietà in un sistema formale. Nel nostro caso, si è costruito un MC basato sul grafo degli stati (come quello di figura 3.1): il problema sarà capire se un nodo rispetti le proprietà specificate.

Si è visto come nel *grafo degli stati* ogni nodo sia a sua volta un bigrafo. In figura 3.1 c'è il grafo degli stati dell'esempio 2.6.1 sullo scambio di pacchetti tra due router. Ci possiamo chiedere se in uno dei due nodi il pacchetto sia arrivato a destinazione, cioè se uno dei due stati  $S_i$  ( $i \in \{0,1\}$ ) il pacchetto sia nello stesso dominio dell'host destinazione.

Nei MC queste proprietà sono di solito esprimibili attraverso una qualche logica, per cui possiamo esprimere formalmente cosa significa che un MC verifichi una certa proprietà.

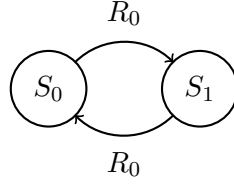


Figura 3.1: Grafo degli stati.

**Proposizione 3.** *Il problema della verifica di una proprietà da parte di un MC è esprimibile come:*

$$MC, S_0 \models p$$

dove  $MC$  è un model checker,  $S_0$  è lo stato iniziale e  $p$  è una proprietà espressa in una qualche logica.

Ovviamente, dallo stato  $S_0$  il MC evolverà secondo precise regole per formare tutti i possibili stati  $S_0 \dots S_n$ : nel nostro caso, ogni arco tra due nodi del *grafo degli stati* è una regola di reazione. Per cui il model checker controllerà l'intero grafo: appena trova uno stato  $S_i$  che soddisfa  $p$  ( $MC, S_i \models p$ ) ritorna True, altrimenti, cioè nel caso in cui *tutti* gli stati del grafo non rispettino la proprietà, ritorna False.

Queste considerazioni ci portano a definire il comportamento del MC:

**Proposizione 4.** *Il comportamento di un model checker  $MC$  è definito dalla seguente relazione:*

$$\begin{cases} \text{return } True & \text{if } \exists S_i \in MC : MC, S_i \models p \\ \text{return } False & \text{otherwise } (\forall S_i \in MC (MC, S_i \not\models p)) \end{cases}$$

Nell'esempio 3.1, il problema è quindi banale: il model checker ritorna vero se e solo se è vera la formula  $MC, S_0 \models p \vee MC, S_1 \models p$ .

### 3.1.1 Generazione degli stati

Si è appena visto che in un model checker si possono esprimere delle proprietà: ogni MC ha però anche un altro grado di libertà, che riguarda la generazione degli stati. Come creare il grafo degli stati? E con che ordine?

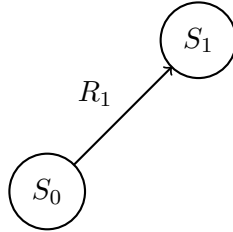
Nel MC costruito per questa tesi, che chiameremo  $MC_{big}$ , ci sono varie strategie ed ognuna è adatta per certi scopi. Vediamone alcune:

- *Strategia Breadth First*: per ogni stato  $S_i$  vengono generati tutti gli stati possibili adiacenti ad  $S_i$ . Per esempio, in figura 3.2, si mostrano i primi tre passi

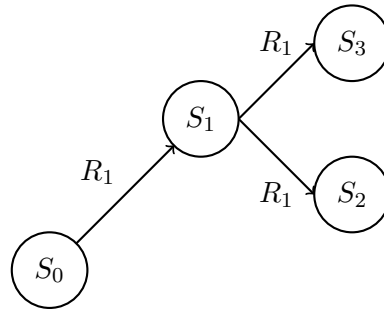
della strategia Breadth First. Il suo vantaggio è che non si tralascia nessuno stato, ottenendo un grafo degli stati *completo*. Inoltre, se un nodo porta ad un vicolo cieco (cioè se non genera nessun bigrafo tramite nessuna regola) allora questo viene semplicemente tolto dalla coda. Lo svantaggio è che può essere molto lenta: se da ogni stato si generano  $k$  stati (con  $k$  molto alto), allora prima di verificare la proprietà potrebbero volerci molte iterazioni.



(a) Primo passo



(b) Secondo passo



(c) Terzo passo

Figura 3.2: Esempio di generazione Breadth First.

- *Strategia Random*: se dallo stato  $S_i$  si possono applicare  $k$  regole allora viene scelto in maniera random un numero naturale  $m \in \{1 \dots k\}$  e si genera solamente lo stato  $S_m$ . Questo consente di non memorizzare l'intero grafo degli stati (che in certi casi può essere molto grande) e verificare al momento della generazione di  $S_k$  se  $MC, S_k \models p$ . Lo svantaggio è quello che l'esecuzione potrebbe andare avanti all'infinito, infatti il grafo *non è completo*. Per cui potenzialmente potrebbero occorrere infinite evoluzioni prima di verificare una proprietà. Un esempio di generazione con la strategia random è quello in figura 3.3.

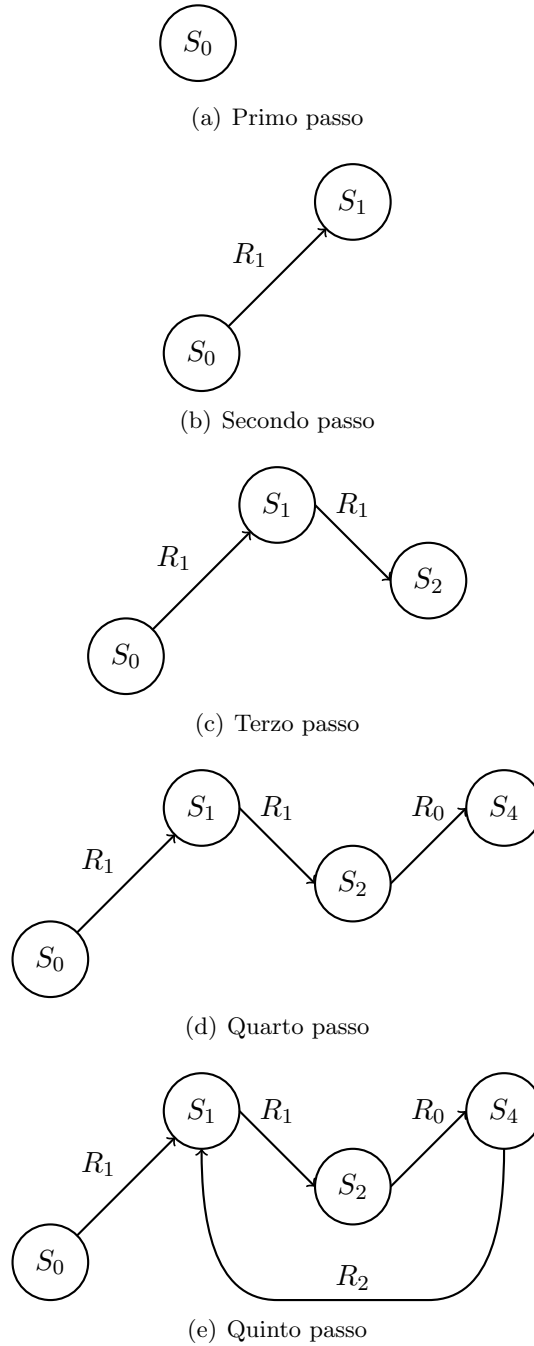


Figura 3.3: Esempio di generazione random.

E' possibile creare altre strategie a seconda degli scopi: in questa sede, se non specificato altrimenti, si assumerà che la strategia sia sempre quella Breadth First, che consente di computare l'intero grafo degli stati.



## 3.2 Logica per i bigrafi

Nella precedente sezione si è vista la struttura base del model checker per i bigrafi ( $MC_{big}$ ): il grafo degli stati. L'altro aspetto importante di ogni MC sono le proprietà: necessitiamo quindi di un linguaggio per esprimerle. Il primo problema riscontrato è stato quello riguardante la flessibilità: come fare ad avere un unico linguaggio che astraesce dal dominio scelto e che potesse essere adatto per qualsiasi BRS? In altre parole, è necessario scegliere un linguaggio che sia flessibile e allo stesso tempo espressivo.

La linea guida seguita per la scelta del linguaggio è stata quindi la sua *universalità*. Per esempio: si prendano gli esempi 1.5.4 sulla moltiplicazione e 2.6.1 sulla rete. Sia la proprietà  $p_1$  definita come “Il risultato è il numero 8”. Sia la proprietà  $p_2$  definita come “Il pacchetto è arrivato a destinazione”. Si noti come i domini dei due esempi siano totalmente differenti: il nostro linguaggio deve permettere di esprimere le due proprietà  $p_1$  e  $p_2$ , senza dover ricorrere ad altri formalismi.

Si capisce bene come un tale linguaggio così generale sia molto comodo per esprimere le proprietà da fare verificare al model checker  $MC_{big}$ . Infatti, in questo modo si crea uno strumento generale **valido per qualsiasi BRS**.

Si è scelto di usare una logica a predicati, esprimibile attraverso il linguaggio generato da una grammatica *Context Free*.

### 3.2.1 Sintassi

Incominciamo con il descrivere la sintassi del linguaggio.

**Proposizione 5.** *Il linguaggio  $L(G)$  per il model checker  $MC_{big}$  è generato dalla grammatica  $G = (V, T, P, S)$ , dove:*

- $V = \{\varphi, \sigma\}$  è l'insieme di variabili
- $U = \{T, \wedge, '(', ')', ', ', \neg, W, \pi, A \dots Z\}$  è l'insieme di simboli terminali
- $P$  è l'insieme di produzioni, definito dalle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}\varphi &\rightarrow T \mid \varphi \wedge \varphi \mid \neg \varphi \mid W_\sigma(\varphi, \varphi, \varphi) \mid \pi_\sigma \\ \sigma &\rightarrow A\sigma \mid \dots \mid Z\sigma \mid \varepsilon\end{aligned}$$

- $S = \{\varphi\}$  è il simbolo iniziale

Il nostro linguaggio sarà quindi definito dall'insieme

$$L(M) = \{w \in U^* : S \Rightarrow_*^G w\}.$$

Seguendo l'usuale definizione di grammatica CF, diamo ora alcuni esempi di stringhe generabili dalla grammatica  $G$ , cioè di formule appartenenti al linguaggio  $L(G)$ :

- $\varphi = W_B(T, T, T) \wedge \pi_C$
- $\varphi = W_B(\pi_X, \pi_Y, \pi_Z)$
- $\varphi = \neg \pi_B \wedge \pi_C$

### 3.2.2 Semantica

Definiamo ora la semantica del linguaggio, cioè specifichiamo il significato di ogni predicato. Si vedrà che quella presentata è una logica spaziale e non temporale, motivo per cui le proprietà verranno chiamate **proprietà locali**. Spesso nei model checker si usano logiche temporali o spazio-temporali. Nell'implementazione, si è comunque dato spazio a tali logiche, rendendo le classi flessibili. In futuro, sarà quindi possibile aggiungere una nuova logica a  $MC_{big}$ .

La semantica è definita come segue (ricordiamo che ogni stato  $S_i$  è un bigrafo):

**Proposizione 6.** *Siano  $S$  uno stato e  $\varphi$  una proprietà espressa nel linguaggio  $L(G)$ . La relazione  $S \models \varphi$  (lo stato  $S$  soddisfa la proprietà  $\varphi$ ) è definita per ricorsione sulla complessità di  $\varphi$ :*

- $S \models T$  sempre
- $S \models \varphi_1 \wedge \varphi_2 \Leftrightarrow \begin{cases} S \models \varphi_1 \\ S \models \varphi_2 \end{cases}$
- $S \models \neg \varphi \Leftrightarrow S \not\models \varphi$
- $S \models W_\sigma(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists C, D : S = C \circ (\sigma \otimes id_I) \circ D \\ C \models \varphi_1 \quad \sigma \models \varphi_2 \quad D \models \varphi_3 \end{cases}$
- $S \models \pi_\sigma \Leftrightarrow S \simeq \sigma$

Si dirà che la formula  $\varphi$  costituisce la *politica* per il model checker.

**Proposizione 7.** *Ogni formula del linguaggio  $L(G)$  viene chiamata **proprietà locale** perchè deriva da una logica spaziale e quindi può fare riferimento solamente ad aspetti spaziali/locali di un bigrafo.*

Analizziamo ora i vari predicati. I primi tre consentono le usuali operazioni della logica proposizionale, mentre il terzo è un predicato ad-hoc per questa logica:  $W_\sigma$  è detto “Wario Predicate”, e usa l’operazione di Match per controllare le tre proprietà che ha come argomento. Facciamo un esempio: sia  $W_B(T, T, T)$  un Wario Predicate. Lo stato  $S$  soddisfa questo predicato ( $S \models W_B(T, T, T)$ ) se e solo se esiste un match  $M$  di  $B$  nel bigrafo  $S$  tale che rispetti queste condizioni: il contesto del match  $M$  deve soddisfare  $\varphi_1$ , il redex di  $M$  deve soddisfare  $\varphi_2$  mentre i parametri di  $M$  devono soddisfare  $\varphi_3$ . Poichè  $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = T$ , si ha che  $S \models W_B(T, T, T)$  se e solo se esiste un match di  $B$  in  $S$ . Il Wario Predicate consente quindi di isolare contesto, redex e parametri e verificare le proprietà in modo indipendente per ognuno di questi tre bigrafi.

L’ultimo predicato,  $\pi_\sigma$ , controlla se esiste un isomorfismo tra due bigrafi. Per esempio, lo stato  $S_i$  soddisfa il predicato  $\pi_A$  (in formule  $S_i \models \pi_A$ ) se e solo se  $S_i$  è isomorfo al bigrafo  $A$ , cioè  $S_i \simeq A$ . Questo predicato è di particolare importanza: esso funge da simbolo di uguaglianza tra bigrafi, rendendo quindi la nostra logica una *logica con uguaglianza*.

Si osservino tutti e cinque i predicati: dai i primi tre è possibile derivare ogni formula della logica proposizionale. Per esempio: se si vuole esprimere la formula  $\varphi_1 \vee \varphi_2$ , allora si possono usare le leggi di De Morgan e scrivere  $\neg(\neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2)$ . Oppure, se si vuole esprimere il falso, basterà la formula  $\neg T$ . Gli ultimi due predicati sono invece propri dei bigrafi. Si osservi la loro definizione: si può notare che il Wario Predicate fa riferimento alla struttura interna del bigrafo consentendo infinite scomposizioni. Tramite questo predicato posso quindi *isolare* qualsiasi parte del bigrafo ed esprimere proprietà su di essa. Si può pensare alla sua funzionalità in questo modo:  $W_\sigma$  permette di spostarci all’interno del bigrafo, scegliere una sua parte ( $\sigma$ ) e verificare se essa soddisfa una certa proprietà. Il predicato  $\pi_\sigma$ , come abbiamo già notato, ci consente di avere una logica con uguaglianza, permettendo quindi di aumentare la sua espressibilità.

### 3.3 Dettagli Implementativi

Nel codice sorgente di questa tesi, i bigrafi e i BRS, nonché la loro evoluzione, è stata modellata tramite *JLibbig* [...], una libreria Java che tra le altre cose consente di specificare le varie regole di reazione ed eseguirle sul bigrafo.

### 3.3.1 Property Matcher

*JLibbig* mette a disposizione la possibilità di assegnare ad ogni nodo delle proprietà. Per esempio, ai due router dell'esempio 2.6.1 si possono assegnare delle stringhe (in realtà qualsiasi tipo di oggetto) che descrivano il loro nome, per esempio  $R_S$  (Router Sender) e  $R_R$  (Router Receiver). Inoltre, è possibile estendere la classe *Matcher* e creare il proprio *Matcher* personale: in questa sede, si era interessati a definire un matcher in cui due nodi potessero *costituire* un match se e solo se avessero le stesse proprietà.

Il *Property Matcher* è molto comodo per esprimere le proprietà per il model checker: per esempio, potremmo essere interessati a sapere quando il pacchetto con destinazione 158.110.144.31 arrivi all'host con tale indirizzo IP. Quindi si potrebbe creare un Wario Predicate che consenta di capire quando il pacchetto e il destinatario sono dentro lo stesso dominio. Però, senza il *Property Matcher*, la presenza di più pacchetti creerebbe confusione. Infatti non sapremmo più a quale pacchetto fare riferimento. Essendo interessati *solamente* al pacchetto destinato a 158.110.144.31, ci occorre il *Property Matcher*.

### 3.3.2 Regole di Reazione con Proprietà

In *JLibbig* le regole di reazione non fanno alcun riferimento alle proprietà, il che significa che dopo l'applicazione di una regola ogni nodo coinvolto (cioè attivo) perde le sue proprietà. Si è creata quindi una classe che ne consenta il *mantenimento* anche dopo lo scatto della regola. Chiaramente, il modo in cui le proprietà si devono conservare è lasciato da definire all'utente, perchè è impossibile definirlo a priori. Per esempio: prendiamo la regola di figura 3.4, che inoltra e duplica un pacchetto.

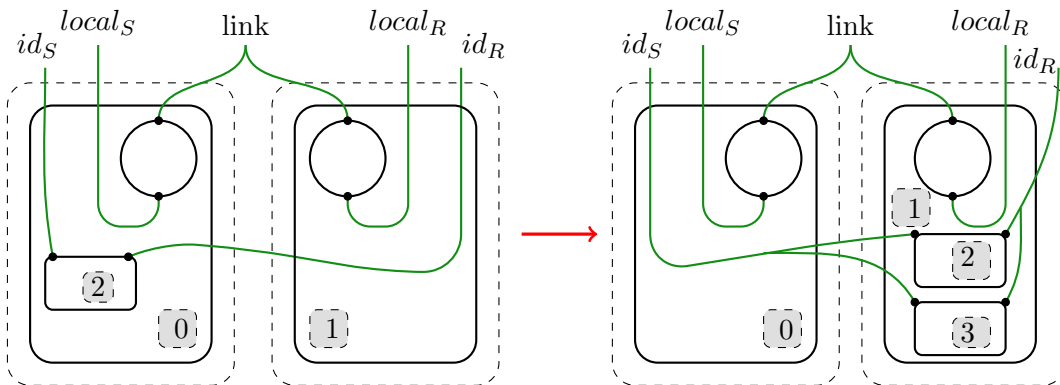


Figura 3.4: Regola di inoltro tra router.

Secondo la definizione di regola di reazione, il redex viene sostituito dal reactum: esso però è un *nuovo* bigrafo e quindi ha nuovi nomi per tutti gli outer e inner names, e tutti i suoi nodi sono privi di proprietà. Supponiamo che prima dell'esecuzione della regola il pacchetto del redex abbia come proprietà la stringa  $P_1$ . Dopo l'esecuzione si vuole che il primo pacchetto del reactum abbia tutte le proprietà di  $P_1$ , mentre il secondo abbia la nuova proprietà *Newpacket*. E' ovvio che tale scelta è arbitraria, ed è questo il motivo per cui la definizione del modo in cui le proprietà si conservano è stata lasciata all'utente.

Infine, creando delle regole di reazione che consentano il mantenimento delle proprietà, è possibile usare il *Property Matcher* anche dopo l'esecuzione di varie regole: di conseguenza lo possiamo usare anche nel model checker  $MC_{big}$ .

### 3.4 Esempi

Si vedranno ora degli esempi di formule e di come poterle usare con il model checker  $MC_{big}$ .

#### 3.4.1 Moltiplicazione

Il primo esempio che si propone riprende la moltiplicazione tra numeri naturali della sottosezione 1.5.4. Se rappresentiamo la moltiplicazione  $x * y$ , ci possiamo chiedere se il BRS funzioni correttamente con le regole che abbiamo definito e verificare che il risultato sia corretto. La proprietà da verificare è quindi questa: “Dati due numeri  $x$  e  $y$ , il risultato della loro moltiplicazione deve essere il numero  $x * y$ ”. Vediamo ora la formula corrispondente: sappiamo che con la segnatura iniziale (vedi 1.5.4) un numero naturale  $n$  è rappresentato da un nodo di tipo *num* che contiene  $n$  nodi di tipo 1. Per esempio, il numero 8 è il bigrafo di figura 3.5.

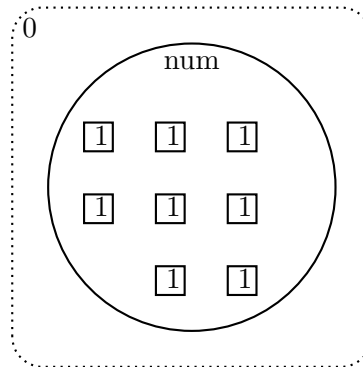


Figura 3.5: Bigrafo per il numero 8

Chiamiamo  $B$  il bigrafo di figura 3.5. La proprietà di cui sopra si può esprimere con la seguente formula logica:  $\varphi = \pi_B$ .

Diamo ora al model checker la formula  $\varphi$ .  $MC_{big}$  incomincerà a generare il grafo degli stati con la strategia Breadth First (se non specificato altrimenti), e per ogni nuovo stato  $S_i$  controllerà se  $MC, S_i \models \varphi$ . In questo esempio, il grafo generato sarà quello di figura 3.6. Per gli stati  $S_0$  e  $S_1$  il model checker troverà che la proprietà non è soddisfatta, perchè nessuno di questi stati è isomorfo a  $B$ . Arrivando però a  $S_2$ , la proprietà  $\varphi$  sarà soddisfatta, ovvero  $MC, S_2 \models \varphi$ , e  $MC_{big}$  ritornerà True.

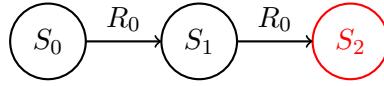


Figura 3.6: Model Checker.

### 3.4.2 Router

Il secondo esempio riprende quello della sottosezione 2.6.1. Vogliamo modellare una rete con quattro domini, come quella di figura 3.7. L'host  $h_1$  vuole comunicare con  $h_4$ , inviando un pacchetto IP. Tra questi due host ci sono due domini, con due router ciascuno. Prendiamo in considerazione il dominio  $D_2$ : l'arco tra  $R_{2.1}$  e  $R_{2.2}$  significa che i due router sono collegati e quindi, essendo nello stesso dominio, ogni pacchetto che arriverà a  $R_{2.1}$  arriverà anche a  $R_{2.1}$ .

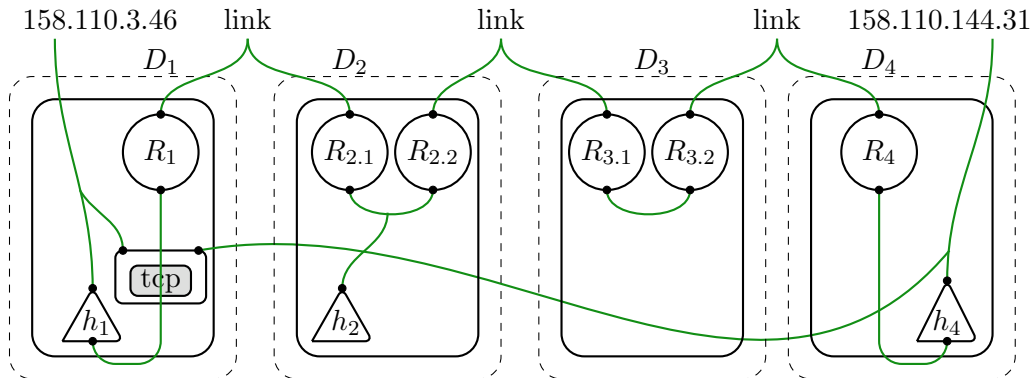


Figura 3.7: Bigrafo di partenza

Si ricordi che un router inoltra non deterministicamente ogni pacchetto verso tutte le uscite (interfacce). Questo permette di creare un compromesso tra numero di regole ed efficienza del BRS. Perciò, l'unica regola di cui abbiamo bisogno è quella di figura 3.8 (si rimanda alla sottosezione 2.6.1 per la sua descrizione).

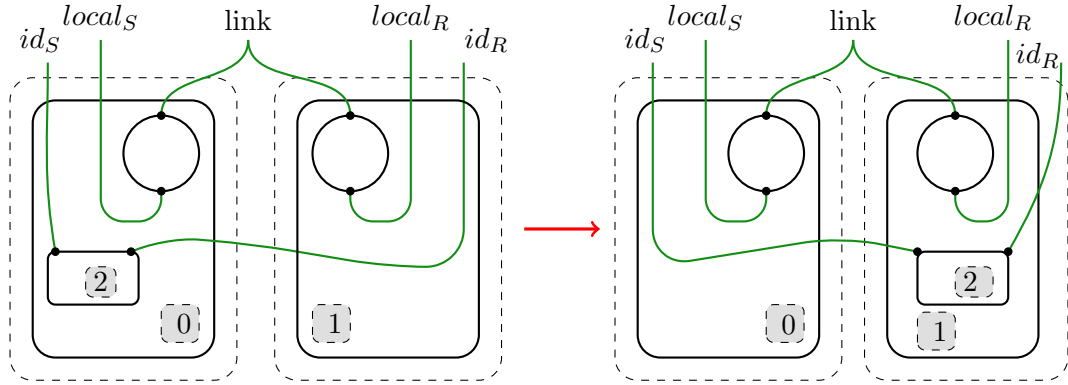


Figura 3.8: Regola di inoltro tra router.

Ora il problema di capire quando un pacchetto è arrivato a destinazione diventa più interessante. Ci sono tre host, e bisogna prestare attenzione a quale sia il corretto destinatario.

Per esempio, non si deve fare il seguente errore: vogliamo esprimere la proprietà “Il pacchetto è arrivato a destinazione”. Nella logica descritta precedentemente, si potrebbe sbagliare e creare una formula del genere:  $\varphi = W_B(T, T, T)$ , dove B è il bigrafo di figura 3.9.a.

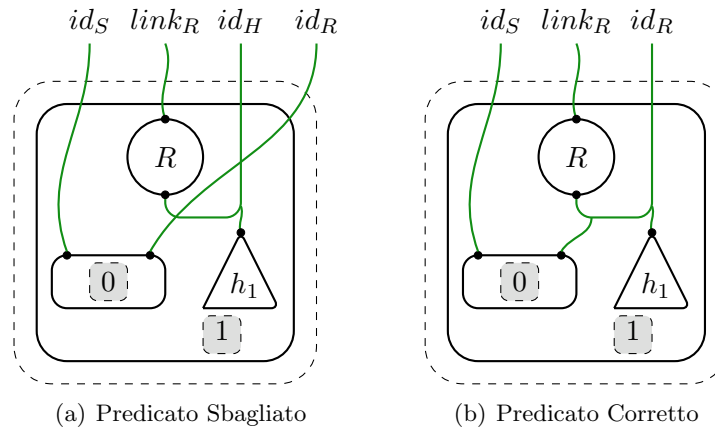


Figura 3.9: Esempi di predicati

Questa proprietà **non** verifica l'arrivo a destinazione di un pacchetto, infatti è soddisfatta anche esso si trova per esempio nel dominio  $D_2$ . Quello che non abbiamo

considerato sono gli outernames: quello del pacchetto e quello dell'host devono essere lo stesso outername; solo così il *Wario Predicate* sarà soddisfatto. Il predicato corretto è quindi quello di figura 3.9.a.

Testiamo ora la formula  $\varphi = W_B(T, T, T)$  sul bigrafo di partenza, cioè quello di figura 3.7, che sarà chiamato  $S_0$ . Per prima cosa, il model checker controlla se in questo stato iniziale la formula sia soddisfatta, ovvero se  $MC, S_0 \models \varphi$ . Non essendo soddisfatta continua. Inizialmente la regola  $R_0$  (in figura 3.8) trova un solo match, per cui il pacchetto viene inoltrato dal dominio  $D_1$  a  $D_2$ , dando origine allo stato  $S_1$ . E' utile guardare il grafo degli stati di figura 3.10 per tenere traccia di tutte le esecuzioni.

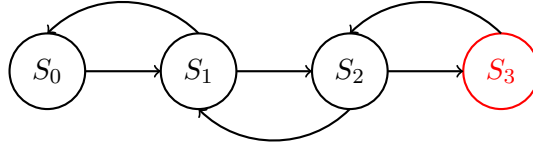


Figura 3.10: Grafo degli stati

In  $S_1$  la formula non è soddisfatta ( $MC, S_1 \not\models \varphi$ ), quindi  $MC_{big}$  continua. Dallo stato  $S_1$ , la regola  $R_0$  trova ora due match: il primo coinvolge il router  $R_{2,2}$  e manderà il pacchetto nel dominio  $D_3$ , mentre il secondo riguarda il router  $R_{2,1}$  e manderà il pacchetto indietro verso  $D_1$ . Quindi il grafo degli stati avrà rispettivamente gli archi:  $S_1 \rightarrow S_2$  e  $S_1 \rightarrow S_0$ . Il model checker ora dovrà duplicare le computazioni, cioè seguire sia il primo che il secondo arco.

Seguendo l'arco  $S_1 \rightarrow S_0$ , il MC trova il nodo  $S_0$  grazie all'algoritmo per l'isomorfismo e riconosce che appartiene già al grafo degli stati. La computazione di questo ramo **viene interrotta** perchè il model checker capisce che continuando si causerebbe un'esecuzione infinita.

Seguendo l'arco  $S_1 \rightarrow S_2$ , si genera invece un nuovo stato  $S_2$ . Il model checker cerca in tutto il grafo degli stati un nodo isomorfo a  $S_2$  e, se non lo trova, capisce che esso è un *nuovo* stato. Dato che  $MC, S_2 \not\models \varphi$ , la computazione di questo ramo quindi continua.

Applicando  $R_0$  a  $S_2$  il discorso è lo stesso: la computazione che segue l'arco  $S_2 \rightarrow S_1$  si interrompe, mentre quella che segue  $S_2 \rightarrow S_3$  continua. Si noti come la strategia *Breadth First* consenta di interrompere da subito le computazioni che causano cicli infiniti: è uno dei vantaggi di questa strategia.



Infine, lo stato  $S_3$  è il bigrafo in cui il pacchetto è dentro il dominio  $D_4$ . La regola  $R_0$  trova solamente un match, ed eseguendola rimanda il pacchetto indietro verso il dominio  $D_3$ , creando nel grafo degli stati l'arco  $S_3 \rightarrow S_2$ . Questa volta però lo stato  $S_3$  soddisfa la proprietà desiderata: il model checker trova che

$$MC, S_3 \models W_B(T, T, T) \quad \text{dove } B \text{ è il bigrafo di figura 3.9.b}$$

e quindi ritorna True.

Un'ultima osservazione: nel caso di più pacchetti si deve prestare attenzione ad un altro dettaglio. Se siamo interessati a verificare che il pacchetto spedito da 158.110.3.46 a 158.110.144.31 sia arrivato a destinazione, dobbiamo usare il Property Matcher. Definiremo quindi la formula sempre come  $\varphi = W_B(T, T, T)$ , ma ora il bigrafo  $B$  avrà nomi specifici nei suoi outernames, come in figura 3.11.

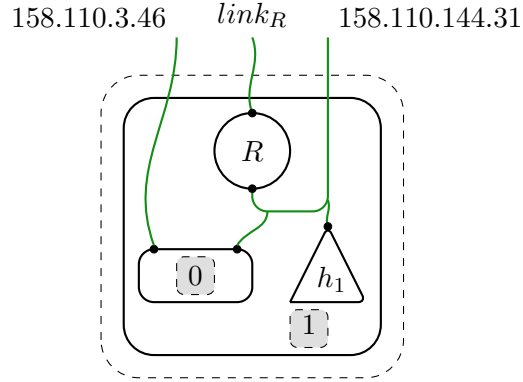


Figura 3.11: Predicato con proprietà



---

# 4

## Casi di studio

In questo capitolo vedremo degli esempi che riguarderanno principalmente il model checker  $MC_{big}$  e la sua logica. Si cambierà spesso dominio, mostrando come i bigrafi siano flessibili per rappresentare vari tipi di sistema.

### 4.1 NFA

In questa sezione si propone una codifica in bigrafi degli NFA (*non-deterministic finite automata*). Come noto, ogni automa  $A$  denota un linguaggio  $L(A)$ . Vedremo come l'implementazione di un automa con i bigrafi consenta di avere una sorta di analizzatore lessicale il cui motore interno funziona tramite BRS. In questa sede, si è costruito un modulo che accetta dall'utente una stringa  $x$  e restituisce `True` se  $x \in L(A)$ , altrimenti `False`.

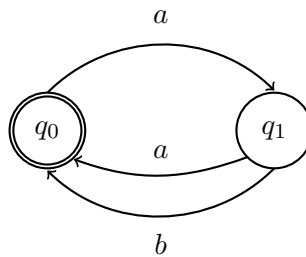


Figura 4.1: Automa per il linguaggio  $(a(a + b))^*$

Prendiamo l'automa di figura 4.1, che chiameremo  $A$ . Definiamolo formalmente:

**Proposizione 8.** *L'automa  $A$  è una quintupla  $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ , dove:*

- $Q = \{q_0, q_1\}$  è l'insieme finito di stati
- $\Sigma = \{a, b\}$  è l'alfabeto di input
- $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$  è la funzione di transizione definita come:

$$\delta(q_0, a) = \{q_1\}$$

$$\delta(q_1, a) = \{q_0\}$$

$$\delta(q_1, b) = \{q_0\}$$

- $q_0$  è lo stato iniziale
- $F = \{q_0\}$  è l'insieme di stati finali

A riconosce il linguaggio  $L(A) = (a(a+b))^*$ .

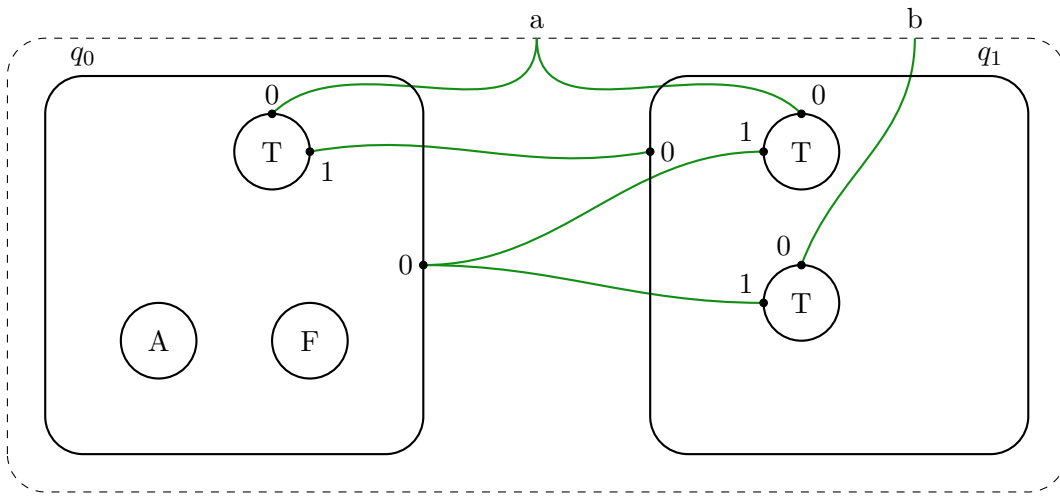


Figura 4.2: Bigrafo per l'automa A

Trattiamo ora il problema di come rappresentare gli automi tramite i bigrafi. Per prima cosa, guardiamo la figura 4.2. I due stati  $q_0$  e  $q_1$  sono stati modellati con dei rettangoli aventi una sola porta. Le transizioni sono i nodi di tipo T. Ogni stato  $q_i$  contiene al suo interno tutte le transizioni che partono da esso: per esempio  $q_0$  contiene solo un nodo T perchè la sola transizione che parte da  $q_0$  è  $q_0 \xrightarrow{a} q_1$ , mentre  $q_1$  contiene due nodi T, che modellano le transizioni  $q_1 \xrightarrow{a} q_0$  e  $q_1 \xrightarrow{b} q_0$ .

Ogni transizione è quindi modellata da un nodo di controllo T con due porte: la prima è collegata al carattere che fa scattare la transizione, mentre la seconda è collegata allo stato destinazione. Nella precedente figura, si prenda in considerazione il nodo T dentro  $q_0$ : esso simboleggia la transizione  $q_0 \xrightarrow{a} q_1$  perchè:

- T è dentro  $q_0$
- la prima porta di T è collegata all'outernome 'a'
- la seconda porta di T è collegata a  $q_1$

Lo stesso discorso vale per le altre transizioni. Si noti come l'alfabeto  $\Sigma$  sia rappresentato tramite *l'insieme degli outernames*. Il nodo  $A$  (Active) indica che lo stato  $q_i$  che lo contiene è quello attivo, ovvero: l'automa si trova nello stato  $q_i$  se e solo se  $q_i$  contiene il nodo  $A$ . Infine, lo stato  $q_i$  è uno stato finale ( $q_i \in F$ ) se e solo se contiene al suo interno il nodo di tipo  $F$  (Final). Queste considerazioni ci portano a definire la segnatura del bigrafo:

**Proposizione 9** (Segnatura per gli NFA). *La segnatura del bigrafo rappresentante un generico NFA è definita come segue, dove la notazione  $\text{Node} : n$  : significa che il nodo  $\text{Node}$  ha  $n$  porte:*

- *State* : 1
- *Transition* : 2
- *ActiveState* : 0
- *FinalState* : 0
- *String* : 0
- *Input* : 3

Dalla segnatura di sopra si scopre che ci sono due nuovi controlli: *String* e *Input*. Il nodo di tipo *String* è quello che dovrà contenere la stringa che l'utente immetterà per farla riconoscere dall'automa, mentre ogni nodo di tipo *Input* è un carattere della stringa.

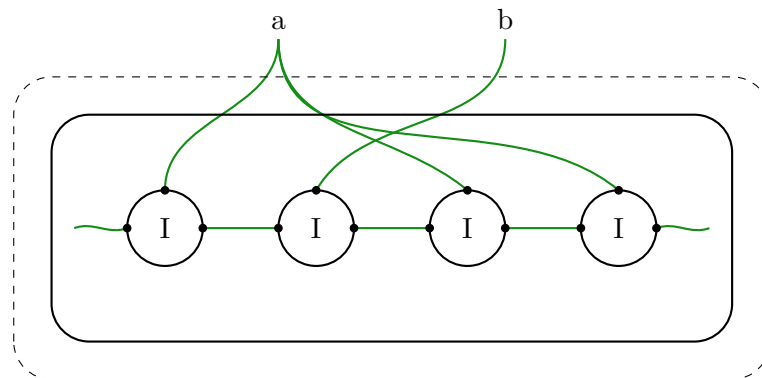


Figura 4.3: Bigrafo per la stringa “abaa”

Si prenda in considerazione la figura 4.3: ogni nodo di tipo *Input* ha tre porte, numerate da sinistra verso destra con 0, 1 e 2. La porta numero 0 è collegata al

carattere precedente: per esempio, il primo carattere  $a$  non è collegato a nessun altro nodo. La porta numero 2 è collegata al carattere successivo. Infine la porta numero 1 è collegata alla lettera (che è un outernome) che il carattere simboleggia. Così facendo si crea una *lista* di caratteri che forma la vera e propria stringa. Il nodo di tipo *String* raggruppa tutti questi caratteri al suo interno. Il bigrafo di figura 4.3 rappresenta dunque la stringa “abaa”. Nell’implementazione, si è costruito un modulo che accetta dall’utente una stringa e la trasforma nel bigrafo equivalente, secondo le regole appena citate.

Ora che si è definito come modellare un NFA e una sua stringa, rappresentiamo una istanza del problema. In particolare, costruiamo il bigrafo che ha come NFA l’automa di figura 4.2 e come stringa di input il bigrafo di figura 4.3. Il risultato è il bigrafo di figura 4.4.

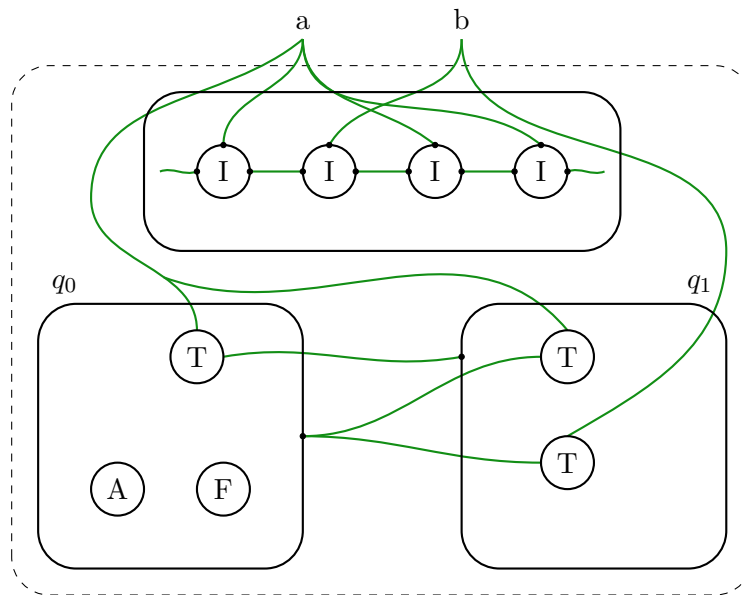
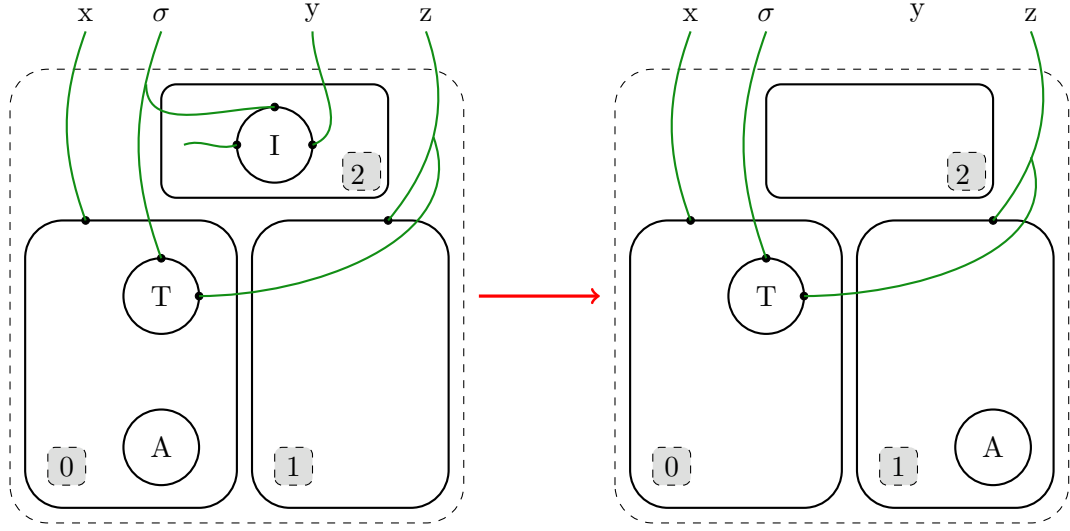


Figura 4.4: Istanza del problema: la stringa “abaa” viene accettata dall’automa A?

Vediamo ora come il bigrafo si può evolvere. L’idea principale è di far “consumare” al sistema un carattere alla volta. Si veda la regola della figura 4.5 che rappresenta la regola di reazione  $R_0$ : se il primo carattere della stringa è la lettera  $\sigma$  e se lo stato attivo possiede una transizione tramite la lettera  $\sigma$ , allora si elimina tale carattere dal bigrafo e si sposta il nodo *Active* nello stato destinazione.

La regola  $R_0$  è molto intuitiva: se per esempio prendiamo in considerazione il bigrafo di figura 4.4, allora applicando la regola si ha che il primo carattere ( $a$ ) viene eliminato ed il nodo  $A$  passa dentro lo stato  $q_1$ . Quindi il BRS per questo problema

Figura 4.5: Regola di reazione  $R_0$ 

è definito da una sola regola ( $R_0$ ), che itera finchè trova un match nel bigrafo, cioè si ferma solo quando il nodo di tipo *String* **non** contiene più nessun nodo *Input*.

Ora che abbiamo creato il BRS, è possibile usare il model checker  $MC_{big}$  definendo la formula che esso andrà a verificare. Nella teoria degli automi, vale la seguente preposizione:

**Proposizione 10.** *Una stringa  $x$  viene accettata se e solo se alla fine di essa l'automa si trova in uno stato finale.*

Nella nostra segnatura, tutti gli stati finali ( $q_F \in F$ ) vengono distinti tramite un nodo  $F$  all'interno di essi: essendo passivi, nessuna regola di reazione può modificarli. Per cui la proprietà da verificare sarà la seguente: “Il nodo di tipo *String* non deve contenere nessun altro nodo e il nodo  $A$  e il nodo  $F$  si devono trovare dentro lo stesso stato  $S$ ”. Nella logica di  $MC_{big}$ , questo si traduce nella formula:

$$\varphi = W_B(T, T, T)$$

dove  $B$  è il bigrafo di figura 4.6.

Si noti la semplicità di quest'ultima formula: il nodo di tipo *String* deve essere vuoto, il che significa che tutti i caratteri sono stati “consumati” dall'automa. Inoltre, il nodo attivo e il nodo finale si devono trovare nello stesso stato, assicurando che l'automa dopo aver letto tutta la stringa è finito in uno stato finale. Quindi possiamo affermare che:

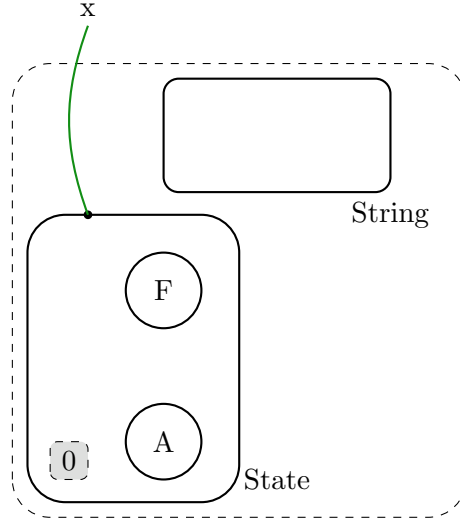


Figura 4.6: Bigrafo B

**Proposizione 11.** *Una stringa  $x$  viene accettata dall'automa  $A$  se e solo se  $MC, S_i \models \varphi$  per qualche  $i$ , dove  $\varphi = W_B(T, T, T)$ .*

Infine, si noti come l'automa modellato tramite bigrafi sia *non deterministico*: le transizioni sono modellate tramite regole di reazione che scattano dopo aver trovato un match. Il processo di matching però è per natura non deterministico, il che vuol dire che se nel bigrafo di partenza la regola  $R_0$  trova più di un match, allora sceglie uno dei due in maniera non deterministica. Si prenda il bigrafo di figura 4.4: se si aggiunge nel nodo  $q_0$  un'altra transizione collegata all'outernome 'a' che porta ad un terzo stato  $q_2$ , allora l'automa diventa non deterministico, perchè la regola  $R_0$  troverà sempre due match nel bigrafo e ne sceglierà uno in maniera casuale. Riassumendo: nella versione bigrafica, gli automi non deterministici si distinguono da quelli deterministici *solamente* perchè nei primi esiste almeno un nodo che ha due o più archi uscenti con la stessa etichetta.

Prendiamo l'istanza del problema in figura 4.4. Seguiremo una traccia d'esecuzione, cioè faremo tutti i passi che fa  $MC_{big}$  per verificare la proprietà desiderata. Vedremo come il grafo degli stati sarà molto semplice: questo spesso è un indice di buona progettazione. Vuol dire che il sistema è stato modellato correttamente, scegliendo poche regole ed evitando di costruire regole ad-hoc per casi particolari. Il nostro BRS è formato da una sola regola, il che evita per esempio che in uno stato  $S_i$  venga applicata la regola sbagliata creando nodi inutili nel grafo degli stati.



In figura 4.7, c'è la traccia d'esecuzione di  $MC_{big}$ , mentre in 4.8 c'è il corrispondente grafo degli stati.

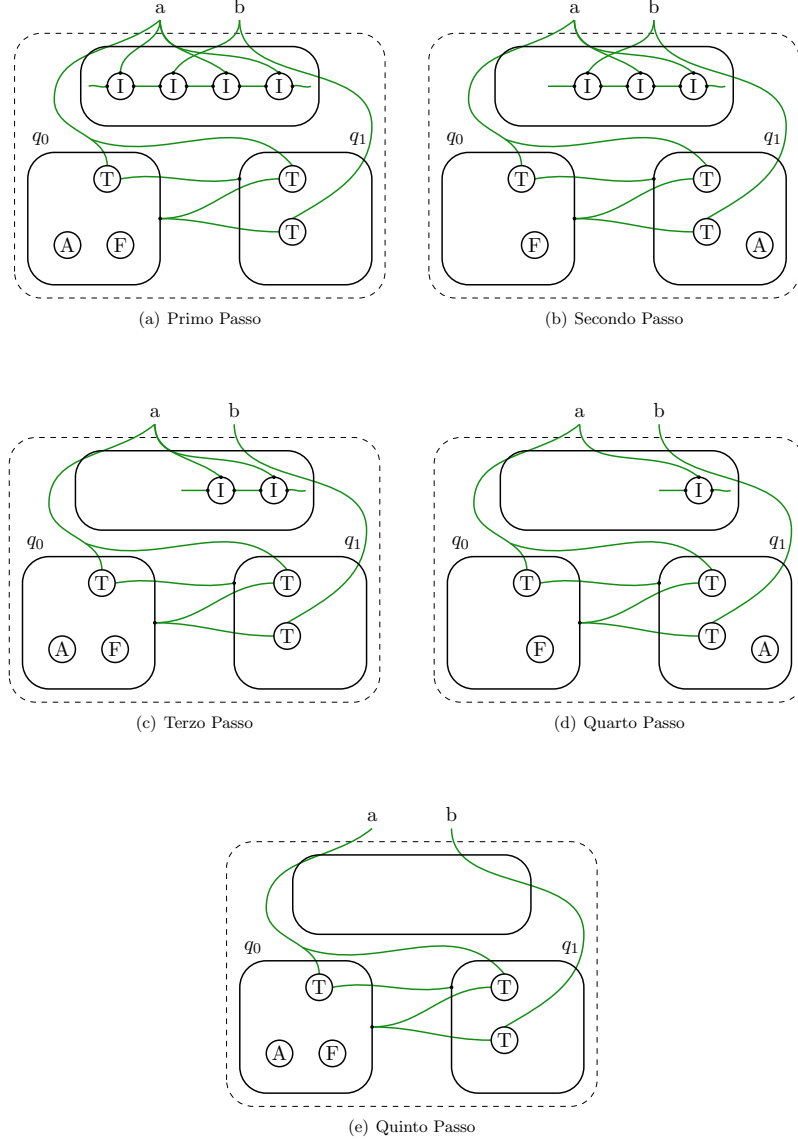


Figura 4.7: Traccia d'esecuzione di  $MC_{big}$

Si noti come l'ultimo stato  $S_4$  soddisfi la formula  $\varphi$ : il Wario Predicate  $W_B(T, T, T)$  è soddisfatto dallo stato  $S_4$ , in formule  $MC, S_4 \models W_B(T, T, T)$ , perchè il model checker trova in  $S_4$  un match del bigrafo B. Poichè tutti gli argomenti del Wario Predicate sono True, basta che questo match esista perchè il predicato sia soddisfatto. Quindi, la proposizione 11 è rispettata.

Questo esempio è molto importante perchè mostra due aspetti fondamentali:

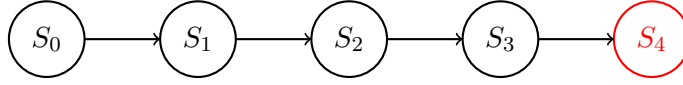


Figura 4.8: Grafo degli stati

- il primo è la flessibilità dei bigrafi: tramite una sola regola di reazione si è riusciti a modellare un NFA. Inoltre, si presti attenzione al grafo degli stati: è molto semplice e lineare. Come già scritto, questo è un indizio di buona progettazione, perchè significa che abbiamo creato una sola regola per tutti i casi possibili. Se avessimo creato una regola per casi particolari, allora ci sarebbero state diramazioni del grafo che avrebbero portato a vicoli ciechi, cioè rami in cui la foglia non rispetta la proprietà  $\varphi$ .
- il secondo è la generalità della logica per  $MC_{big}$ : si è espressa una proprietà di uno specifico dominio usando la logica generale creata per il model checker. In questo esempio si è usato il Wario Predicate, che permette di spostarsi all'interno del bigrafo e di verificare se una sua parte esiste e rispetta determinate proprietà. Nel NFA ci è bastato verificare che esistesse la parte denotata dal bigrafo B.

In questo esempio si è potuto apprezzare la comodità del model checker e della sua logica per verificare una generica proprietà, che rappresentano quindi uno strumento generale adatto per ogni BRS.

## 4.2 Problema dei filosofi a cena

In questa sezione si fornisce una codifica in bigrafi del problema dei filosofi a cena, introdotto da Dijkstra nel 1965 per esporre un problema di concorrenza tra processi paralleli.

**Proposizione 12** (Formulazione del problema). *Cinque filosofi sono seduti a cena ad una tavola rotonda. Ogni filosofo ha davanti il piatto in cui mangiare e due forchette, una a destra e l'altra a sinistra: per cui nel tavolo sono presenti cinque filosofi, cinque piatti e cinque forchette. Ogni filosofo alterna periodi in cui mangia ad altri in cui pensa. Per mangiare, ha bisogno di entrambe le forchette, ma deve prenderle una per volta. Quando ha finito di mangiare, lascia le forchette e continua a pensare.*

*Si progetti un algoritmo che eviti deadlock o starvation.*

Il problema chiede di progettare un algoritmo che eviti queste due situazioni:

- ogni filosofo ha una forchetta e aspetta l'altra dal suo vicino: la situazione si trova in uno stato di stallo (*deadlock*)
- una parte di filosofi riesce a mangiare e pensare ripetute volte, a discapito di un'altra parte che non riesce mai a mangiare perchè non ha mai due forchette, morendo di inedia (*starvation*).

Il problema è una metafora, dove i filosofi sono processi paralleli in un calcolatore: il momento in cui devono prendere le forchette corrisponde alla lettura dei dati, che possono per l'appunto essere condivisi tra più processi come le forchette; il momento in cui un filosofo mangia corrisponde al momento in cui un processo consuma i dati che ha appena recuperato. Si vedranno due strategie: la prima causerà una situazione di deadlock, mentre la seconda lo eviterà e sarà una soluzione al problema.

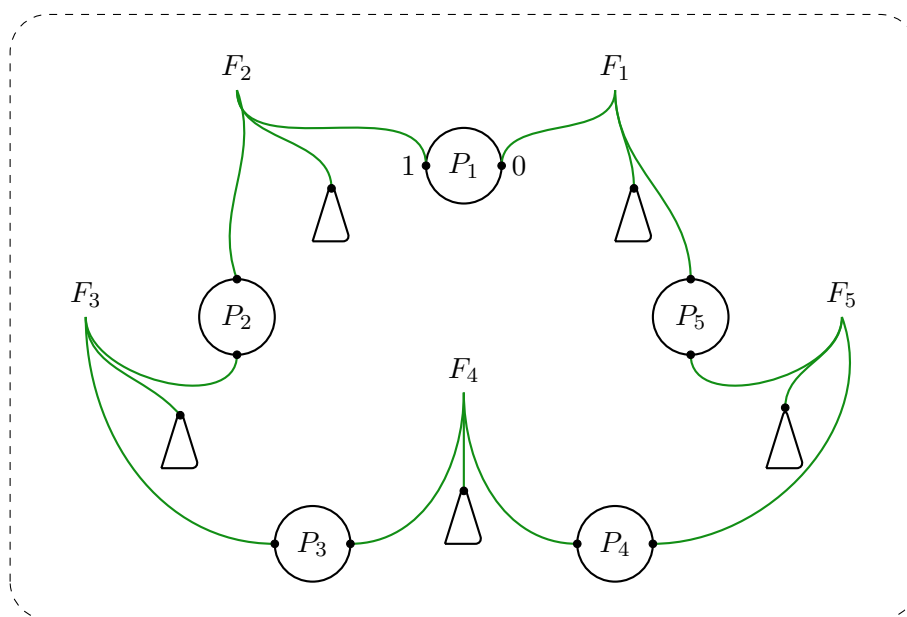


Figura 4.9: Codifica in bigrafi di un'istanza del problema

Per prima cosa, si definirà come il problema può essere tradotto in bigrafi. Si consideri la figura 4.9: ogni filosofo è rappresentato da un nodo circolare con due porte; si immagini che ogni filosofo sia rivolto verso il centro del tavolo: si ha che la porta a sinistra *dal punto di vista del filosofo* rappresenta la mano sinistra e la chiameremo *porta 0*, mentre la porta a destra rappresenta la mano destra (*porta 1*). Per esempio: la mano sinistra le filosofo  $P_1$  è quella collegata a  $F_1$ , mentre la mano destra è quella collegata a  $F_2$ .

Le forchette sono rappresentate come nodi triangolari e sono identificate tramite un outernome, per esempio  $F_4$ . Modelliamo il fatto che la forchetta sinistra di un filosofo sia  $F_i$  collegando la sua porta 0 all'outernome  $F_i$ . Per esempio: il filosofo  $P_4$  ha come forchetta sinistra  $F_4$  perchè la sua porta 0 è collegata a questo outernome, mentre come forchetta destra  $F_5$  perchè la sua porta 1 punta a  $F_5$ .

Inizialmente tutte le forchette sono posizionate sul tavolo. Modelliamo il fatto che un filosofo  $P_i$  abbia preso la forchetta  $F_k$  spostando quest'ultima all'interno di  $P_i$ .

#### 4.2.1 Prima strategia

Tramite la prima strategia, che causerà situazioni di stallo, vogliamo fare vedere come il model checker  $MC_{big}$  riesca ad individuare un deadlock. Essa prevede che ogni filosofo, per riuscire a mangiare, debba prendere prima la forchetta sinistra e poi quella destra, e le rimetta in ordine sul tavolo (prima la sinistra e poi la destra). Questa strategia causa un deadlock perchè  $P_i$  prende prima la forchetta  $F_i$  per  $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , e quindi ogni filosofo  $P_i$  aspetta che  $P_{i+1}$  liberi la forchetta causando uno stallo.

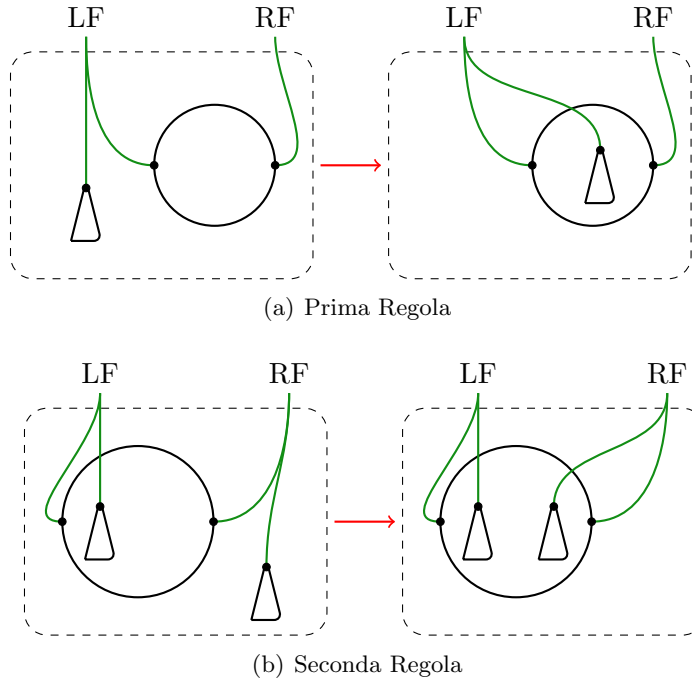


Figura 4.10: Regole per prendere le forchette

In figura 4.10, ci sono le regole che consentono ad un filosofo di prendere le for-

chette. Si noti come si debba prendere prima la forchetta sinistra e poi la destra: la seconda regola infatti scatta se e solo se il filosofo possiede già la forchetta sinistra, che a sua volta ha potuto prendere se e solo se non possedeva ancora nessuna forchetta (nella regola 4.10.a non c'è nessun sito dentro il nodo del filosofo).

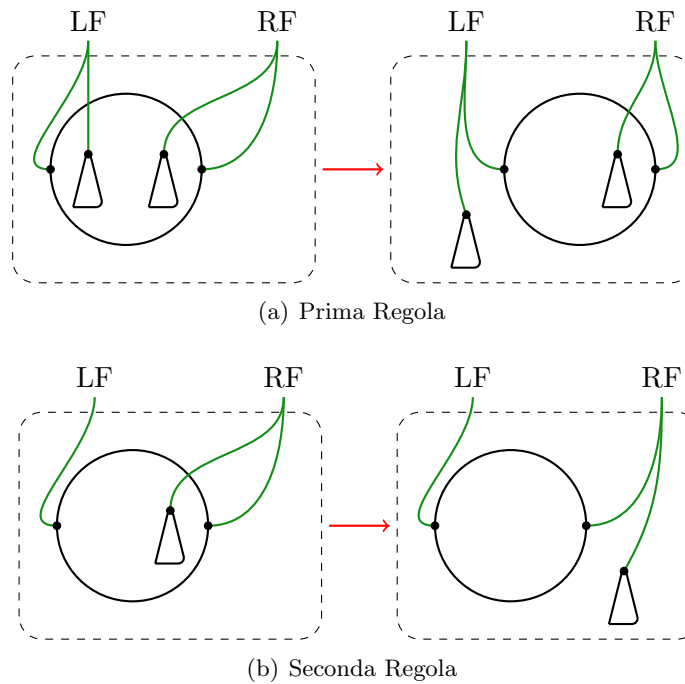


Figura 4.11: Regole per lasciare le forchette

Le regole per lasciare le forchette sono simili: quando un filosofo ha entrambe le forchette significa che ha mangiato e, grazie alla regola 4.11.a, lascia prima la forchetta a sinistra, come vuole la nostra strategia. Infine, tramite 4.11.b, lascia la forchetta destra.

Queste quattro regole andranno a formare il BRS per il nostro problema. Si noti come un BRS di questo tipo sia particolarmente adatto per il problema della cena tra filosofi: quest'ultimo è infatti un problema di sincronizzazione tra processi paralleli che viene modellato perfettamente dalle regole non deterministiche del BRS. Ogni filosofo decide autonomamente quando incominciare a mangiare: per cui può essere che incominci il terzo filosofo così come il primo. Questa è la stessa situazione in cui operano le regole: per esempio, in figura 4.9 la regola 4.10.a trova cinque match e ne sceglie in modo non deterministico uno solo. In altre parole, il BRS modella bene il caso reale in cui i processi decidono di leggere dati autonomamente, senza che ci sia alcun ordine tra di loro.

Ora si userà  $MC_{big}$  per capire se con questa strategia c'è pericolo di deadlock. In questo caso, la proprietà da fare verificare al model checker è una *IsoProperty*:

$$\varphi = \pi_G$$

dove  $G$  è il bigrafo di figura 4.12, in cui ogni filosofo  $P_i$  contiene solamente la forchetta  $F_i$ .

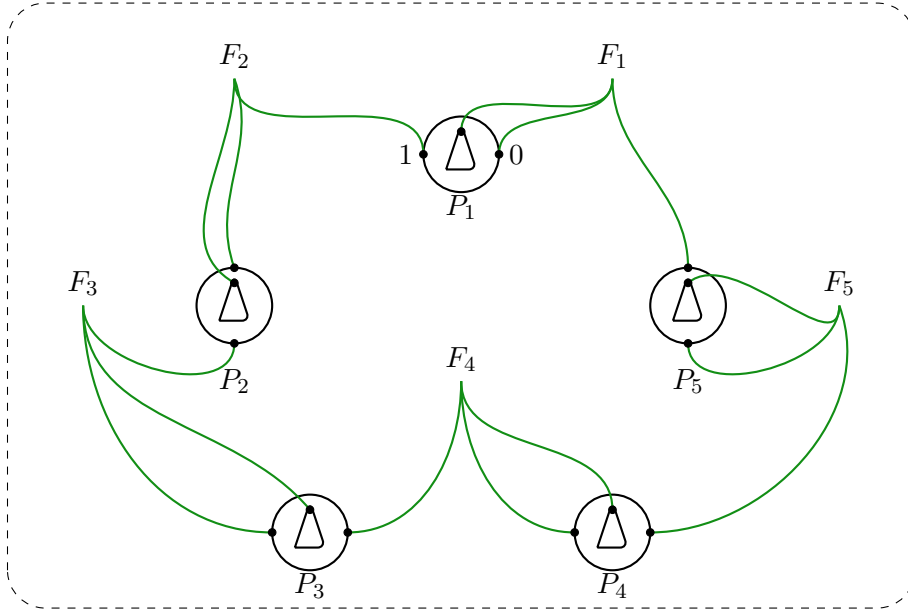


Figura 4.12: Bigrafo B: proprietà di stallo

In altre parole,  $MC_{big}$  incomincia a computare l'intero grafo degli stati: esso è **teoricamente infinito** perchè le quattro regole viste prima possono essere applicate un numero arbitrario di volte; per esempio, posso applicarle una dopo l'altra sempre sul filosofo  $P_1$ , facendolo mangiare e pensare all'infinito. Nella prossima sottosezione, vedremo invece che nella pratica il grafo degli stati è finito, pur rappresentando processi infiniti.

Quando  $MC_{big}$  trova la situazione di stallo di figura 4.12, il model checker smette di generare il grafo degli stati e ritorna False, perchè si è causato un deadlock:

**Proposizione 13.**  *$MC_{big}$  ritorna False se e solo se esiste almeno una situazione di deadlock.*

Per convincersi che il bigrafo B rappresenti una situazione di deadlock, si noti come su di esso non si possa applicare più nessuna delle quattro regole: poichè la proprietà è una *IsoProperty*,  $MC_{big}$  cerca un nodo che sia uguale a B, cioè a cui non

si possano applicare più regole. Un tale nodo del grafo degli stati si chiama **stato finale**.

Si noti come ad ogni passo ogni regola trovi molti match: il grafo degli stati sarà molto grande. Si consideri la figura 4.9: la regola 4.10.a può scattare su ognuno dei 5 filosofi; per esempio, ipotizziamo che scatti sul primo filosofo  $P_1$ . Ora, le possibilità sono molteplici:

- $P_1$  può prendere anche la forchetta destra: quindi scatta la regola 4.10.b
- uno qualsiasi degli altri quattro filosofi può prendere la propria forchetta sinistra: quindi scatta la regola 4.10.a

per un totale di 6 stati possibili. Si vede bene come l'**esplosione combinatoria** faccia aumentare in modo esponenziale il numero di nodi del grafo degli stati.

---

```
Insert the number of philosophers:
5
```

```
STRATEGY: Every philosopher takes first the left fork.
Are deadlocks avoided? NO
Number of nodes of the Model Checker: 93
```

```
STRATEGY: all the forks are enumerated. Every philosopher takes first the
fork with the lower index.
Are deadlocks avoided? YES
Number of nodes of the Model Checker: 189
```

---

Quello mostrato qui sopra è il risultato dell'esecuzione del software: si è implementato un modulo che costruisce il bigrafo con un numero di filosofi scelto dall'utente. In questo caso si è scelto di avere cinque filosofi come in figura 4.9. In seguito, il sistema informa quale strategia si sta adottando: per ora ci interessa solamente la prima strategia. Nella riga seguente il software ritorna il risultato (cioè se c'è o non c'è un deadlock), ed infine il numero di nodi del grafo degli stati.

Per verificare che la strategia in uso causa deadlock, con solamente cinque filosofi il model checker ha creato un grafo degli stati con 93 nodi. Questo è il risultato dell'esplosione combinatoria, che causa appunto un aumento esponenziale del numero di nodi che il model checker deve controllare.

In questo esercizio si è usato l'isomorfismo con proprietà (*Property Isomorphism*), il cui funzionamento, che è poco differente dal normale algoritmo, viene riportato qui sotto:

**Proposizione 14** (*Property Isomorphism*). *Due nodi costituiscono un match nel Property Isomorphism se e solo se lo fanno nel normale Isomorphism e hanno le stesse proprietà.*

Nella libreria *JLibbig*, c'è la possibilità di allegare ad ogni nodo delle proprietà. Si sono quindi dati degli identificativi per ogni filosofo ed ogni forchetta. In seguito, si sono usate le regole con proprietà introdotte nella sottosezione 3.3 per mantenerle anche dopo l'esecuzione delle quattro regole viste prima.

La creazione del *Property Isomorphism* è stato indispensabile: senza di esso il model checker avrebbe riconosciuto come uguali i due bigrafi in figura 4.13, causando un comportamento anomalo nella verifica delle proprietà.

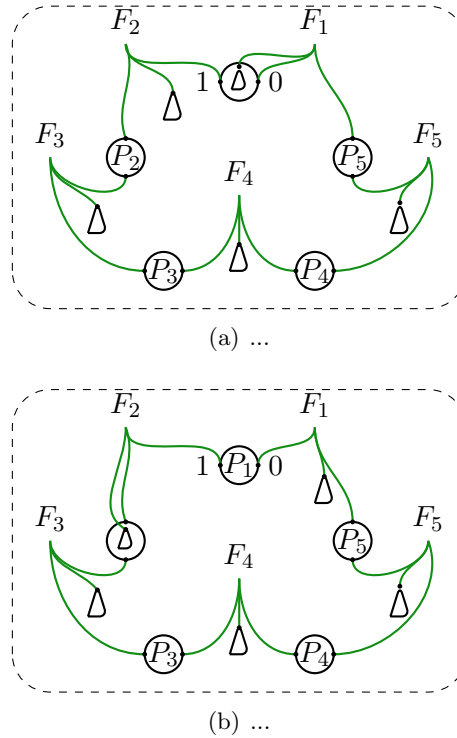


Figura 4.13: Due bigrafi isomorfi

Dalla figura 4.13 si capisce immediatamente che senza il *Property Isomorphism* il grafo degli stati sarebbe molto più piccolo, perchè non si esplorerebbero tutte le possibilità. Si guardi la figura ???: se  $S_0$  è lo stato iniziale, allora ipotizziamo che  $S_1$  sia lo stato in cui  $P_1$  prende la sua forchetta sinistra  $F_1$ . Però, da  $S_0$  si può anche



applicare la regola sul filosofo  $P_2$ , che prenderà la forchetta  $F_2$  dando vita allo stato  $S_2$ . Senza l'uso del *Property Isomorphism*, il model checker troverà che  $S_1 = S_2$ , memorizzando solamente il primo. Quindi il model checker non distingue tra le due situazioni, creando un grafo degli stati **incompleto**.

#### 4.2.2 Seconda strategia

Vediamo ora un modo per evitare i deadlock: si enumerino tutte le forchette presenti sul tavolo (nel nostro esempio consideriamo il pedice di  $F_i$ ); per mangiare, ogni filosofo deve prendere per prima la forchetta con indice minore. Una traccia d'esecuzione basata sulla figura 4.9 potrebbe essere questa: tutti i filosofi  $P_i$  ( $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ ) prenderanno la forchetta  $F_i$  tranne l'ultimo ( $P_5$ ), che dovrà prendere  $F_1$ , che ha indice minore; questa forchetta però è già occupata da  $P_1$  e quindi  $P_5$  dovrà aspettare, lasciando libera  $F_5$  che potrà essere utilizzata da  $F_4$ . Quest'ultimo riuscirà a mangiare e dopo un po' lascerà libera la forchetta  $F_4$ , che verrà presa da  $P_3$ , e così via. Infine, quando si libererà  $F_1$ , anche il filosofo  $P_5$  riuscirà a mangiare. Con questa soluzione, si evitano quindi sia i deadlock sia le situazioni di starvation.

Le regole sono uguali a quelle della strategia precedente con un'eccezione: si noti come l'ultimo filosofo debba prendere la prima forchetta (quella con indice minore) con la mano destra, mentre la seconda con la sinistra. Quindi si creano altre quattro regole ad-hoc per l'ultimo filosofo: deve prendere per prima la forchetta destra e per seconda quella sinistra, a differenza di tutti gli altri. Lo stesso vale per posare le forchette, per un totale di quattro nuove regole. La nuova strategia è quindi identica alla prima, modulo l'aggiunta di queste quattro regole. Il nodo finale viene identificato tramite un controllo  $L$  (Last) al suo interno.

Il BRS per questa strategia ha otto perciò regole. La proprietà da verificare resta la stessa:  $\varphi = \pi_B$ . Si vedrà però che ora  $MC_{big}$  non riuscirà ad identificare nessuna situazione di deadlock.

Prima però si deve precisare un'aspetto importante: si sarebbe tentati di pensare che in assenza di deadlock il model checker continui all'infinito a generare stati. Infatti, se al bigrafo di partenza, che chiameremo  $B_1$ , applichiamo le quattro regole sempre al filosofo  $P_1$ , allora quest'ultimo (in ordine):

- prende la forchetta sinistra
- prende la forchetta destra
- posa la forchetta sinistra

- posa la forchetta destra

Dopo la quarta regola, si ritorna ad uno stato uguale al primo, che chiameremo  $B_2$ , e nulla vieta che queste quattro regole continuino ad eseguire all'infinito. Tramite il *Property Isomorphism* si riesce ad evitare questa situazione: questo algoritmo riesce infatti a verificare che  $B_1$  e  $B_2$  sono uguali, evitando quindi di tornare ad eseguire tutte le regole. Grazie ad esso, si è riusciti ad avere **un grafo degli stati finito per un processo infinito**.

Riprendendo quanto detto nella sottosezione precedente sull'*Property Isomorphism*, si ha che esso porta i seguenti benefici:

- il model checker computa un grafo degli stati **completo**, senza dimenticare nessuna possibile situazione
- il model checker verifica le proprietà di un processo infinito su un grafo degli stati **finito**.

$MC_{big}$  riesce quindi a computare l'intero grafo degli stati e, dato che per ogni suo nodo  $S_i$  si ha che  $MC, S_i \not\models \varphi$ , ritorna True, a significare che la tecnica è priva di situazioni di deadlock o starvation.

**Proposizione 15.**  $MC_{big}$  ritorna True se e solo se ogni stato non rappresenta una situazione di deadlock.

---

```
Insert the number of philosophers:
5
```

```
STRATEGY: Every philosopher takes first the left fork.
Are deadlocks avoided? NO
Number of nodes of the Model Checker: 93
```

```
STRATEGY: all the forks are enumerated. Every philosopher takes first the
fork with the lower index.
Are deadlocks avoided? YES
Number of nodes of the Model Checker: 189
```

---

Il risultato ora è quello della seconda strategia. Si noti come l'assenza di deadlock causi un aumento del numero di stati, che ora ha raggiunto il valore 189. Aumentando il numero di filosofi ci si rende conto dell'andamento esponenziale dell'esplosione.

---

Insert the number of philosophers:  
7

STRATEGY: Every philosopher takes first the left fork.  
Are deadlocks avoided? NO  
Number of states of the Model Checker: 801

STRATEGY: all the forks are enumerated. Every philosopher takes first the  
fork with the lower index.  
Are deadlocks avoided? YES  
Number of states of the Model Checker: 1701

---

## 4.3 Politiche di sicurezza

In quest'ultimo esempio vedremo come tramite i bigrafi ed il model checker  $MC_{big}$  si possano testare delle politiche di sicurezza. In particolare, faremo riferimento alla seguente situazione: un edificio appartenente ad un'azienda contiene varie stanze, ognuna con un computer al suo interno. L'azienda ha importanti file segreti (token) da mantenere al sicuro dentro ogni computer. Ha anche vari dipendenti, che possono entrare liberamente in ogni stanza e collegarsi ai vari computer. Uno di questi dipendenti si chiama Alice. Lei ed il suo complice Bob vogliono rubare un segreto dell'azienda, seguendo questo piano:

- Alice, che essendo una dipendente può collegarsi ad un computer, ruba il file segreto e lo trasferisce sul proprio smartphone.
- Alice esce dalla stanza, pur rimanendo all'interno dell'azienda
- Alice tramite il suo smartphone stabilisce un collegamento con quello di Bob, che si trova al di fuori dell'azienda, e trasferisce il file segreto, che ora è di dominio pubblico

Il nostro compito è quello di stabilire una politica di sicurezza che eviti a qualsiasi token dell'azienda di diventare pubblico, in questo caso di diventare in possesso di Bob. Si vedranno quindi due politiche: la prima consentirà a Bob di ottenere il token, mentre la seconda lo eviterà assicurando la sicurezza dell'azienda.

Tutte le possibili situazioni in cui Alice e Bob possono agire per rubare i file segreti verranno calcolate dal model checker  $MC_{big}$ , che alla fine dell'esecuzione dirà se la politica scelta sarà sicura o meno. Infine, si è costruito un modulo che offre all'utente la possibilità di visitare il grafo degli stati, consentendogli di ripercorrere tutte le azioni che hanno consentito a Alice e Bob di ottenere il file segreto.

### 4.3.1 Segnatura

Incominciamo con il definire la segnatura del bigrafo che modella il problema. Si consideri la figura 4.14: il nodo più grande è “*Building*” e rappresenta l'edificio dell'azienda. In questo esempio, sono presenti due stanze, ognuna con un computer all'interno. Ogni computer contiene un “*Token*”, che è uno dei file segreti dell'azienda.

I nodi per Alice e Bob sono modellati tramite due circonferenze, che però si trovano sotto radici diverse: Alice è dentro l'azienda, in quanto è una dipendente e può entrare a tutti gli effetti sia dentro il “*Building*” sia dentro le “*Room*”. Invece Bob si trova al di fuori dell'azienda, perchè non è un dipendente e quindi il suo accesso è vietato. Ai fini della verifica da parte del model checker, tutti i dipendenti verranno considerati con cattive intenzioni, ovvero: ogni dipendente sarà modellato da un nodo di controllo “*Alice*”. Allo stesso modo, ogni persona al di fuori dell'azienda verrà modellata con un nodo di controllo “*Bob*”. Sia Alice che Bob possiedono uno smartphone, che useranno per trasferire il “*Token*”.

Ogni smartphone ed ogni computer possiedono una porta per consentire il collegamento: uno smartphone si può collegare ad un altro smartphone oppure ad un computer. Stabilito il collegamento, è possibile trasferire il Token. Per distinguere il “*Building*” dalle “*Room*”, si è disegnato il primo tramite doppie linee.

### 4.3.2 Prima politica

Vediamo ora la prima politica, che come già anticipato **non** assicurerà la sicurezza dell'azienda. Nei BRS, una politica si traduce in un insieme di regole di reazione, che descrivono come ogni nodo deve comportarsi. Per esempio, una regola potrebbe coinvolgere una “*Room*”, obbligandola a chiedere un badge ad ogni dipendente che vuole entrare.

Le regole  $R_0$  e  $R_1$  modellano rispettivamente l'entrata e l'uscita da una stanza all'interno dell'azienda. Si noti come ogni dipendente, ovvero ogni nodo circolare all'interno dell'azienda, possa entrare liberamente in ogni stanza. La politica di

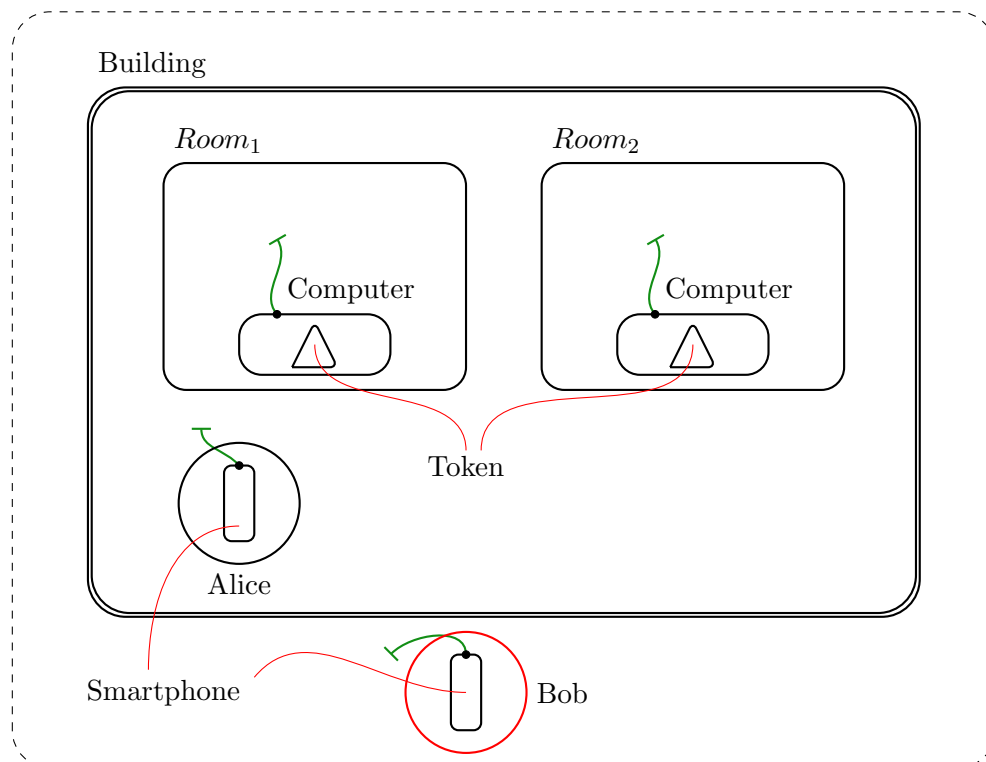
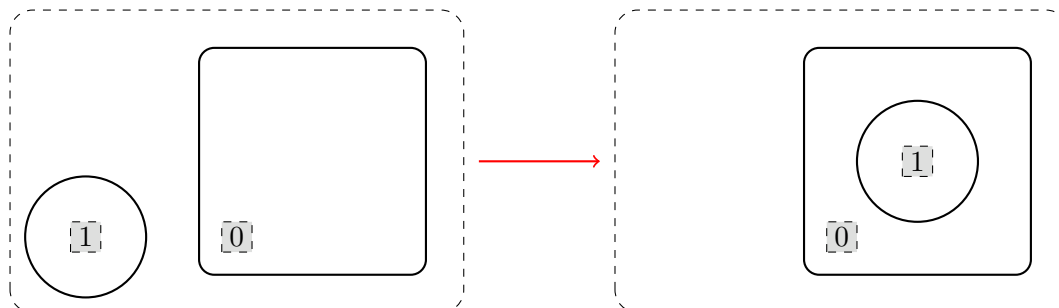
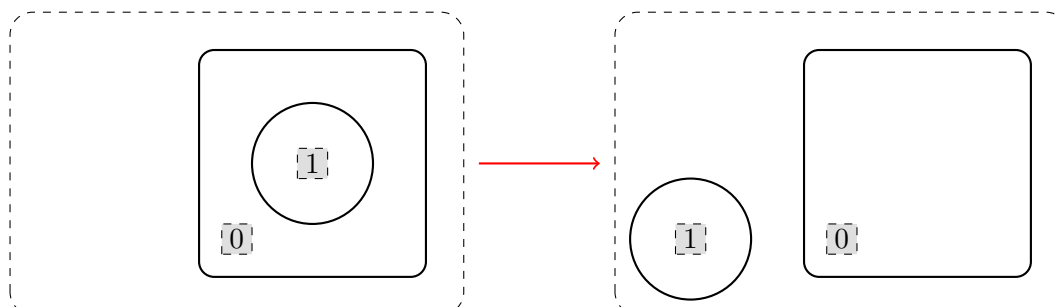


Figura 4.14: Bigrafo per il problema della sicurezza dell'azienda

Figura 4.15: regola per l'entrata in una stanza ( $R_0$ )Figura 4.16: regola per l'uscita da una stanza ( $R_1$ )

sicurezza è quindi **minima**, perchè non vengono fatti controlli e ogni dipendente può accedere al computer: in particolare, può collegarlo al suo smartphone e trasferire il Token. Se togliessimo il sito numero 1, allora si potrebbe entrare nella stanza solamente senza oggetti pericolosi: in altre parole, ogni dipendente non dovrebbe avere niente con sè per poter entrare in una stanza.

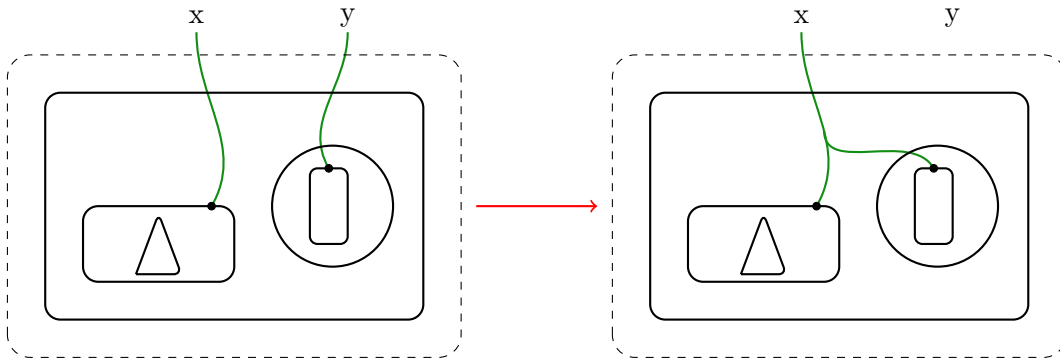


Figura 4.17: regola per il collegamento ad un computer ( $R_2$ )

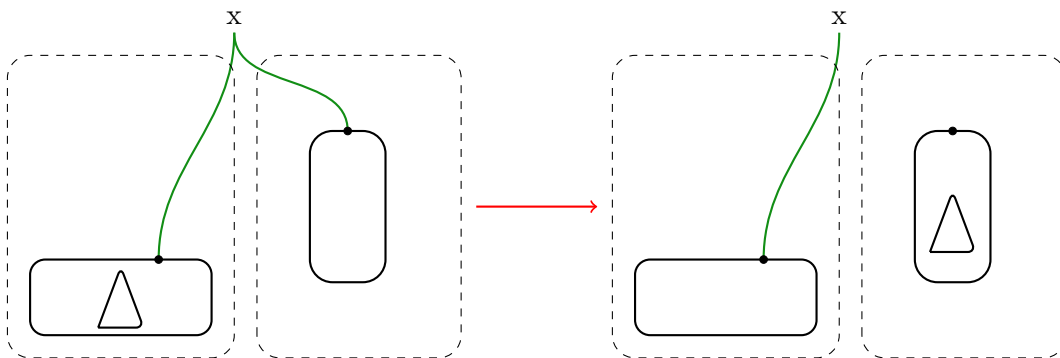
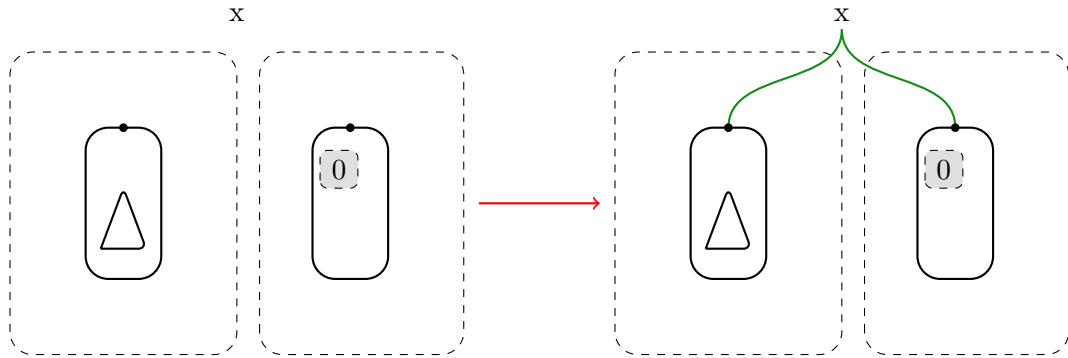
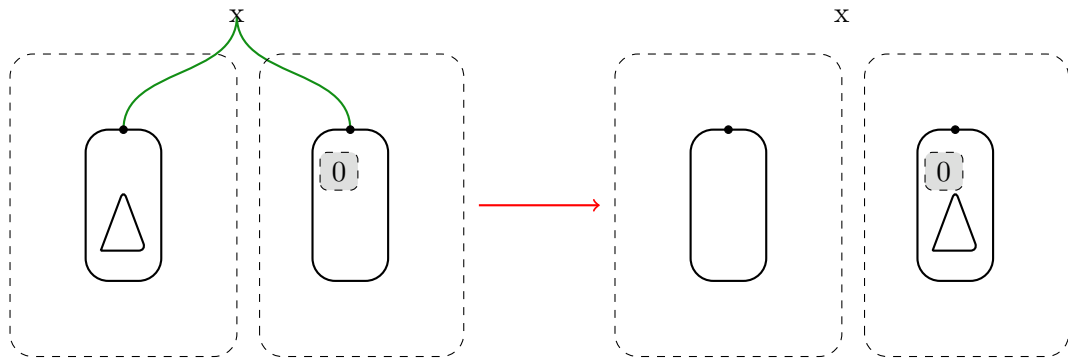


Figura 4.18: regola per il trasferimento di un token da un computer ad uno smartphone ( $R_3$ )

Le regole  $R_2$  e  $R_3$  trattano il trasferimento di un Token dal computer ad uno smartphone: la prima stabilisce una connessione mentre la seconda esegue lo spostamento del file segreto. Si noti come lo smartphone del dipendente non debba contenere nessun altro token: se Alice ha già rubato un file segreto, allora il prossimo computer a cui si connette se ne accorgerà e non le darà il file segreto al suo interno.

Infine, le regole  $R_4$  e  $R_5$  consentono allo smarthphone di Alice di stabilire una connessione con quello di Bob e di trasferire il Token, che ora si trova al di fuori del-

Figura 4.19: regola per iniziare una connessione tra due smartphones ( $R_4$ )Figura 4.20: regola per trasferire un Token fra due smartphones ( $R_5$ )

l'azienda. Alice può chiamare solo se ha ottenuto il Token, come suggerisce il redex della regola  $R_4$ . Si noti come, una volta ottenuto il Token, Alice possa connettersi a Bob anche dall'interno dell'azienda.

Vediamo ora l'applicazione delle regole sul bigrafo di figura 4.14, che chiameremo  $S_0$ . Applicando in ordine le regole  $R_0$ ,  $R_2$  ed  $R_3$  al bigrafo  $S_0$  si ottiene il bigrafo di figura 4.21: Alice è entrata nella prima stanza, ha collegato il suo smartphone al computer ed ha trasferito un file segreto dell'azienda dal computer allo smartphone. Dato che abbiamo applicato tre regole, chiameremo questo bigrafo  $S_3$ .

In figura 4.22, è raffigurato il bigrafo  $S_6$ , ottenuto tramite l'applicazione delle regole  $R_1, R_4$  e  $R_5$  al bigrafo  $S_3$ . In ordine: Alice è uscita dalla stanza con il Token, ha stabilito una connessione con Bob ed ha trasferito il file segreto. Si noti come non fosse necessario che Alice uscisse dalla stanza per chiamare Bob. Questa politica di sicurezza è quindi fallace, perchè consente a Bob o a qualsiasi persona esterna di ottenere un file segreto dell'azienda.

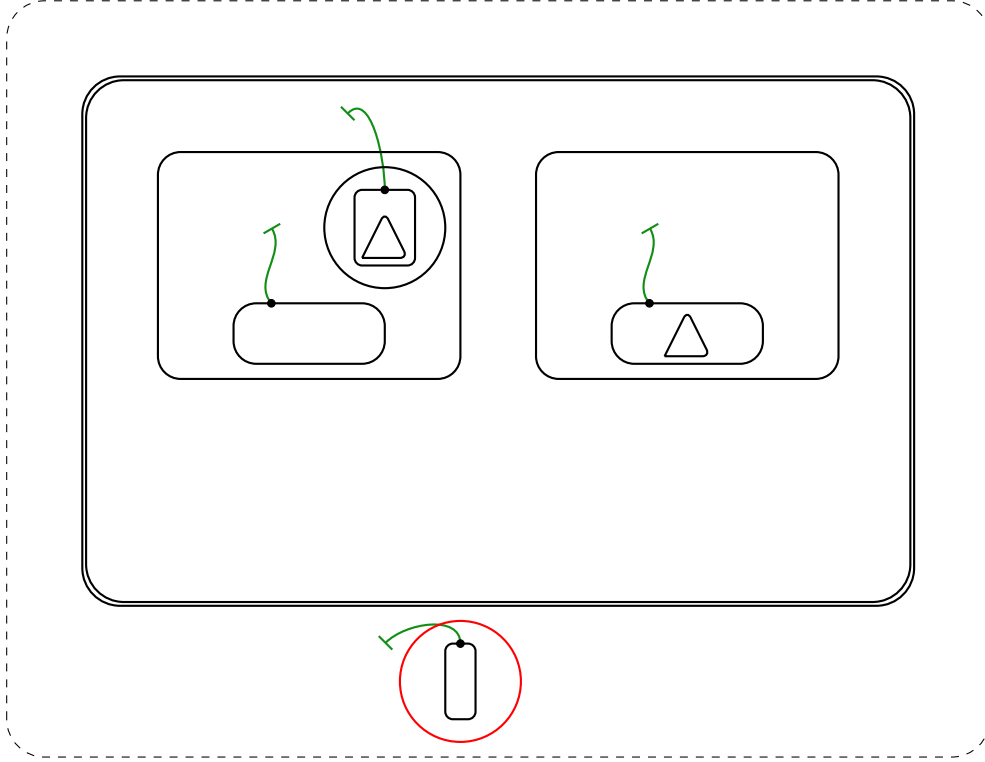


Figura 4.21: Applicazione delle regola  $R_0, R_2$  e  $R_3$

In molti casi l'azienda non ha un edificio semplice come quello di figura 4.14, e quindi c'è bisogno di uno strumento automatico, che affronti il problema anche quando nell'edificio sono presenti numerose stanze, computers e soprattutto numerosi dipendenti. Per questi motivi si è usato  $MC_{big}$  per la verifica: esso computa l'intero grafo degli stati, cioè considera tutte le possibili situazioni in cui l'azienda si può trovare, ed appena trova una situazione di pericolo ritorna False, a significare che la politica adottata dall'azienda non è sicura.

**Proposizione 16.** *Il model checker  $MC_{big}$  ritorna True se e solo se non c'è nessuna situazione di pericolo.*

La proprietà da far verificare al model checker è molto semplice:

$$\varphi = W_B(T, T, T)$$

dove B è il bigrafo di figura 4.23. Quindi la precedente proposizione, la possiamo tradurre in:

**Proposizione 17.** *Il model checker  $MC_{big}$  ritorna False  $\Leftrightarrow \exists S_i$  t.c.  $MC, S_i \models W_B(T, T, T)$ . Equivalentemente, ritorna True  $\Leftrightarrow \forall S_i (MC, S_i \not\models W_B(T, T, T))$ .*



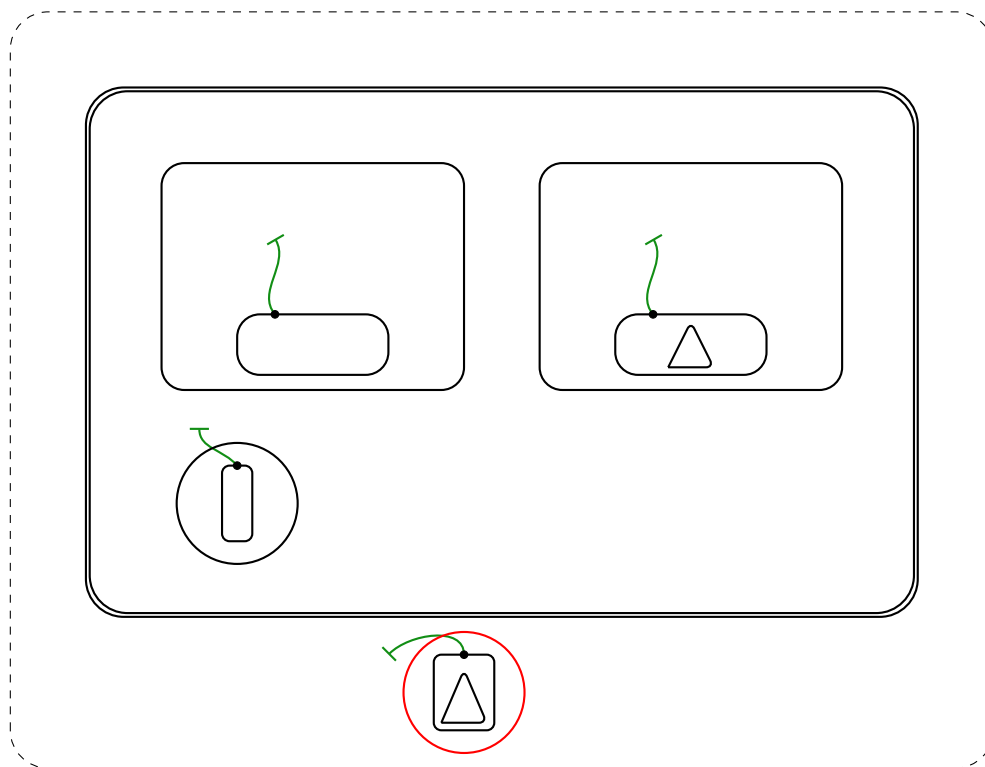


Figura 4.22: Applicazione delle regole  $R_1, R_4$  e  $R_5$

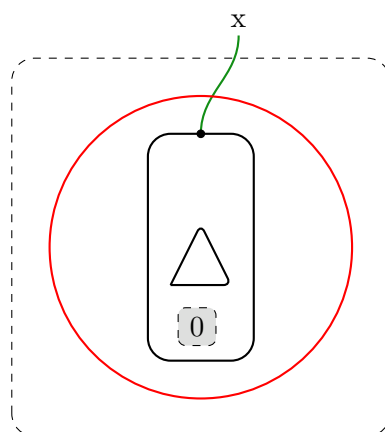


Figura 4.23: Applicazione delle regole  $R_1, R_4$  e  $R_5$

### 4.3.3 Seconda strategia

Si vedrà ora una strategia che, tramite l'introduzione di due nuove regole, riesce a garantire la sicurezza dell'azienda. Le regole sono le stesse del caso precedente, eccetto  $R_0$  e  $R_1$ , che ora sono state sostituite da  $secureR_0$  e  $secureR_1$ , in figura 4.24 e 4.25.

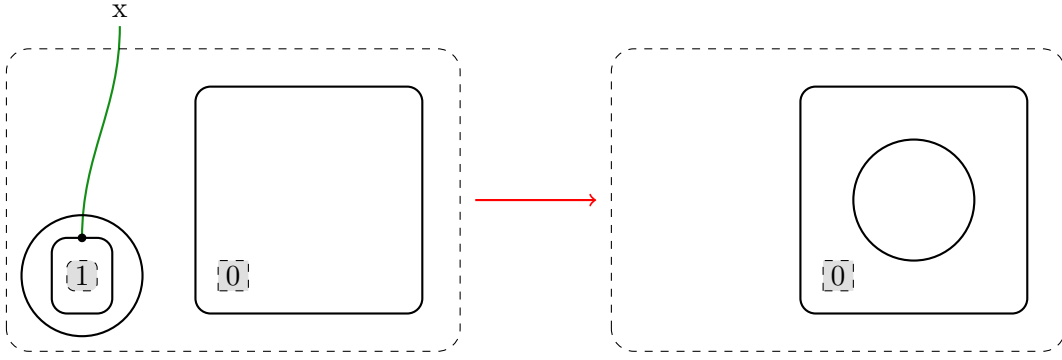


Figura 4.24: regola per l'entrata sicura in una stanza ( $secureR_0$ )

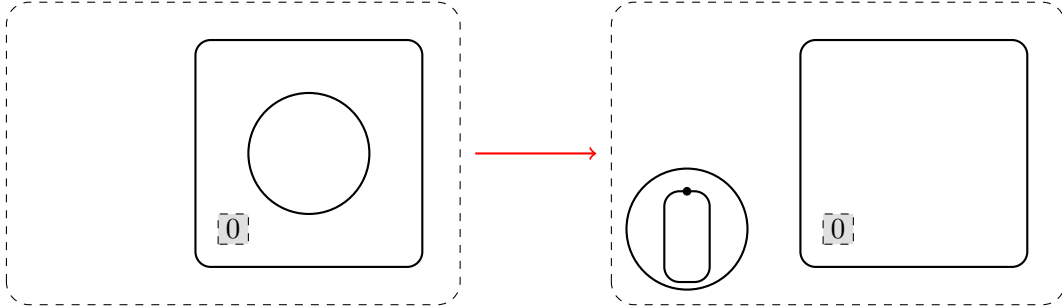


Figura 4.25: regola per l'uscita sicura da una stanza ( $secureR_1$ )

Ora Alice non può più trasferire il Token sul suo smartphone, e di conseguenza le uniche due regole applicabili sono  $secureR_0$  e  $secureR_1$ . La proprietà che  $MC_{big}$  dovrà verificare sarà sempre  $\varphi = W_B(T, T, T)$ : ora nessuno stato  $S_i$  del grafo sarà tale che  $MC, S_i \models \varphi$ , per cui, data la proposizione 17, il model checker ritornerà True. Questa politica rende sicura l'azienda.

Quest'ultimo esempio mostra particolarmente bene con i bigrafi ed i BRS siano flessibili per rappresentare qualsiasi dominio e la loro utilità in casi reali come questo.  $MC_{big}$  e la sua logica, implementati per questa tesi, sono quindi di aiuto sia per bigrafi che modellano un formalismo (come quello per gli NFA) sia per i bigrafi

---

*domain specific* (come quest'ultimo esempio), rendendo l'isomorfismo tra bigrafi, il model checker e la sua relativa logica degli strumenti generali adatti ad ogni dominio.



---

# Conclusioni

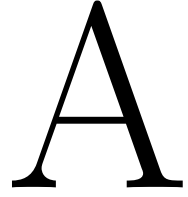
L'obiettivo principale di questa tesi è la creazione di uno strumento per la verifica di proprietà all'interno di un BRS, che è stato implementato risolvendo due problemi principali: l'isomorfismo tra bigrafi e la creazione di un model checker con una logica generale.

Il requisito principale su questo strumento di verifica è la sua *generalità*: esso deve permettere di esprimere le proprietà su qualsiasi dominio il BRS rappresenti. Questa tesi ha rispettato il requisito appena citato, grazie soprattutto alla semantica della logica creata, che risulta quindi sufficientemente generale. D'altra parte, potrebbe non risultare molto espressiva: essa è principalmente una logica spaziale, e quindi non tiene conto di fattori temporali che potrebbero aumentare la sua espressività. Si è però dato spazio a future logiche che potranno facilmente estendere  $MC_{big}$ .

L'isomorfismo tra bigrafi ha permesso invece la costruzione dello scheletro per il model checker: qualsiasi strumento di verifica deve permettere di evitare esecuzioni infinite quando è possibile. L'isomorfismo ha permesso quindi il raggiungimento di questo obiettivo. Il problema è stato risolto tramite la *programmazione a vincoli*, che ha ridotto notevolmente il tempo di sviluppo dell'algoritmo ma che potrebbe non essere la soluzione migliore in termini di complessità.

Il contributo principale di questa tesi è stato il model checker  $MC_{big}$ : i bigrafi sono considerati un *meta-modello* con cui si possono esprimere vari formalismi, come per esempio gli automi a stati finiti (che sono stati implementati in questa sede nell'esempio 4.1), il  $\pi$ -calcolo, il  $\lambda$ -calcolo e molti altri, come le Reti di Petri. Inoltre è possibile esprimere anche un bigrafo appartenente a un dominio specifico (come l'esempio 4.3). Avere a disposizione uno strumento come  $MC_{big}$  permette di verificare proprietà su tutti questi formalismi, sia *general-purpose* (come gli NFA) sia a *domain-specific* (come la rappresentazione di un edificio), risultando quindi **universale e flessibile** come lo sono i bigrafi.





# Notazione dei vari capitoli

Sono riportate le principali notazioni delle varie sezioni.

## A.1 Notazione della sezione 1.2

Il più delle volte si tratterà un intero come l'insieme di tutti i suoi precedenti, così che se si scriverà  $m$  in realtà si intende  $\{0, \dots, m-1\}$ .

Scriviamo  $S \# T$  per dire che i due insiemi  $S$  e  $T$  sono disgiunti. Scriviamo  $S \uplus T$  per descrivere l'unione dei due insiemi  $S$  e  $T$  dopo che sappiamo o assumiamo che siano disgiunti.

Se  $f$  ha dominio  $S$  e  $S' \subset S$ , allora denotiamo con  $f \upharpoonright S'$  la restrizione di  $f$  su  $S'$ . Per due funzioni  $f$  e  $g$  con dominio disgiunto  $S$  e  $T$ , scriviamo  $f \uplus g$  per la funzione con dominio  $S \uplus T$  tale che  $(f \uplus g) \upharpoonright S = f$  e  $(f \uplus g) \upharpoonright T = g$ .

## A.2 Notazione della sezione 1.4

I *posti* di  $G : \langle m, X \rangle \rightarrow \langle n, Y \rangle$  sono i suoi siti  $m$ , i suoi nodi e le sue radici  $n$ .

I *punti* di  $G$  sono le sue porte e i suoi inner names  $X$ .

I *link* di  $G$  sono i suoi archi (edge) e i suoi outer names  $Y$ .

Gli edges sono *link chiusi* mentre gli outer names sono *link aperti*. Un punto è detto *aperto* se il suo punto è aperto, altrimenti è detto chiuso.  $G$  è detto *aperto* se tutti i suoi link sono aperti (ovvero se non ha edges).

Un place senza figli o un link senza punti viene detto *idle*. Due places con lo stesso genitore o due link con lo stesso punto vengono detti *fratelli*.

Se un' interfaccia  $I = \langle m, X \rangle$  ha  $X = \emptyset$ , allora scriveremo  $I$  come  $m$ ; se  $m = 0$  o  $m = 1$ , scriveremo  $I$  come  $X$  e  $\langle X \rangle$  rispettivamente.

Si definisce l'unità  $\varepsilon$  come  $\varepsilon = \langle 0, \emptyset \rangle$ .

L'unico bigrafo con supporto vuoto in  $\varepsilon \rightarrow I$  viene scritto come  $I$ . Un bigrafo

$g : \varepsilon \rightarrow I$ , con dominio  $\varepsilon$ , viene detto *ground*. Useremo lettere minuscole per i bigrafi ground e li scriveremo come  $g : I$ .

Spesso si omette ' $\cdots \otimes id_I$ ' in una composizione del tipo  $(F \otimes id_I) \circ G$ , dove  $F$  non possiede un'interfaccia sufficiente per comporre con  $G$ . Si scriverà dunque, qualora non presenti ambiguità,  $F \circ G$ . Dato un linking  $\lambda : Y \rightarrow Z$ , potremmo volerlo applicare ad un bigrafo  $G$  con interfaccia esterna  $\langle m, X \rangle$  avente meno nomi, i.e.  $Y = X \uplus X'$ . Scriveremo allora  $\lambda \circ G$  per indicare  $(id_m \otimes \lambda) \circ (G \otimes X')$ , quando  $m$  e  $X'$  possono essere capiti dal contesto.



---

# Bibliografia

- [1] Troels C. Damgaard e Jean Krivine. A generic language for biological systems based on bigraphs, 2008.
- [2] Robin Milner. Bigraphs for petri nets. In *Lectures on Concurrency and Petri Nets, Advances in Petri Nets [This tutorial volume originates from the 4th Advanced Course on Petri Nets, ACPN 2003, held in Eichstätt, Germany in September 2003. In addition to lectures given at ACPN 2003, additional chapters have been commissioned]*, pp. 686–701, 2003.
- [3] Robin Milner. *The Space and Motion of Communicating Agents*. Cambridge University Press, 2009.
- [4] Eloi Pereira, Pedro Marques da Silva, Clemens Krainer, Christoph M Kirsch, Jose Morgado, e Raja Sengupta. A networked robotic system and its use in an oil spill monitoring exercise.