Actuario Alejandro Alberto García de León Jiménez

Nota técnica de reserva siniestros ocurridos pero no reportados ramo diversos

Ejercicio 2026

Diciembre 2025

Índice

1 Introducción

Esta nota técnica tiene por objeto establecer la metodología para el cálculo de la reserva de siniestros ocurridos pero no reportados (SONOR) en un ejercicio hipotético.

Dado que se quieren mostrar los fundamentos básicos del cálculo de reservas se utilizará el método estatutario de la Circular Única de Seguros y Fianzas (CUSF) en su capítulo 5.3.

1.1 Fundamentos normativos

1. Señala la disposición 5.3.1 que se otorgará a la Institución de seguros un plazo de treinta días naturales a partir de la notificación de la Comisión para que esta efectué ajustes si el método empleado no refleja adecuadamente el nivel del valor medio de los flujos de obligaciones futuras que deben ser cubiertos por la reserva SONOR; igualmente si la institución no llevara a cabo estos ajustes o bien, la institución no cuente con un método Actuarial registrado, entonces la Comisión requerirá un plan de regularización y que la institución calcule y constituya sus reservas técnicas con base a este método (disposición 5.2). Este método recibe el nombre de método estatutario.

2. El método estatutario contempla para la valuación de las reservas los parámetros financieros y técnicos determinados con información de mercado previstos en Iso anexos 5.3.1 y 5.3.3 tanto a como b de la CUSF.

2 Definiciones básicas

Definición 1. *Se entiende por prima emitida originada (PEO_i) en un año calendario $i \in \mathbb{N}$, el monto de las primas emitidas por la Institución A tales que su inicio de vigencia fue el año calendario i y cuyo estado en dicho año haya sido en vigor*

Esta definición es básica, nos establece el ingreso de la institución aseguradora toda vez que la reserva tiene carácter de pasivo.

Definición 2. *Se entiende por siniestro, y su respectivo monto como el evento que debe indemnizar la compañía aseguradora y la cantidad en la unidad monetaria establecida en el contrato ($) que presentan discrepancia o diferencia entre la fecha en que ha ocurrido y en que se registró contablemente. Para efectos de control, se colocaran en el año de desarrollo cero, aquellos montos de siniestros ocurridos y si reportados y registrados en ese mismo año. Cuando un siniestro es reportado se le llama reclamación.*

Cuando ocurre un siniestros ciertos movimientos pueden incrementarlo o disminuirlo; se tiene que un siniestro satisface la ecuación $S_i = (E + A_+ - A_- + GA - S - R)(1 + GIA)$ donde E recibe el nombre de estimación inicial la cual es la proyección del valor de la reparación o indemnización en un primer momento por el perito ajustador, taller o valuador; A_+ y A_- son los ajustes de más y de menos respectivamente; GA, es el gasto directo del ajuste a la estimación inicial, S son las cantidades que se recuperan de los reponsables del mismo subrogandose en los derechos del asegurado; R son las recuperaciones obtenidas de la venta de bienes dañados por parte de la aseguradora y GIA es un porcentaje de Gasto indirecto de ajuste y costo bruto de siniestralidad obtenido de la información contable.

$$GIA = \frac{\text{Monto del Gasto indirecto de ajuste}}{\text{Costo bruto de siniestralidad}}$$

Puede considerarse el pago idealmente como $P = E+A_+-A_-$. La reserva de obligaciones pendientes por cumplir se define como $OPC = E+A_+-A_--P$. La regla de oro del registro de siniestros es $OPC \geq 0$ durante todo el periodo de vida del mismo.

Definición 3. *Se entienden por ajustes a siniestros y gastos de ajuste, recuperaciones y salvamentos aquellos que provengan de un siniestro clasificado como ocurrido pero no reportado o bien que provengan de un siniestro que aún no clasificado como tal, este gasto o ajuste si establezca diferencia entre los años de registro contable y ocurrencia. Los gastos, ajustes, recuperaciones y salvamentos se registraran en el año 0 si son ocurridos y reportados en el mismo año.*

Definición 4. *El año de desarrollo en el caso de las definiciones anteriores es la diferencia*

$$\textit{Año de registro contable} - \textit{Año de ocurrencia del siniestro}$$

El año de origen será el año en el que siniestros o sus accesorios descritos antes para sus respectivas pólizas de las cuales provienen, iniciaron vigencia

3 Descripción del Método estatutario (CUSF 5.3.2)

Primero debe identificar el monto de primas emitidas originadas PEO_i. Se calcula a continuación para cada año de origen $i \in \mathbb{N}$ y año de desarrollo $j \in \mathbb{N}$ el indice de reclamaciones registradas por los años (i, j):

$$F_{i,j} = \frac{R_{i,j}}{PEO_i}$$

donde $R_{i,j}$ es el monto del siniestro, ajustes, gastos de ajuste, salvamentos y recuperaciones netos acomodados de la siguiente forma de manera ejemplificativa:

Cuadro 1: Triángulo superior de siniestros ocurridos pero no reportados (datos simulados)

Año de origen	**Año de desarrollo**							
	0	1	2	3	4	5	6	7
$n-7$	120	45	18	6	2	1	0	0
$n-6$	135	52	21	9	3	1	0	
$n-5$	150	60	28	11	4	2		
$n-4$	165	72	35	15	6			
$n-3$	180	85	42	18				
$n-2$	195	98	50					
$n-1$	210	110						

El periodo mínimo es de $n = 5$ años de experiencia aunque aquí se muestra tal cual en regulación donde pone al menos $n = 7$ periodos (inciso d) disposición 5.3.2 fracción I.

Se pide que la información sea confiable, pertinente y oportuna. Confiable en que sea veraz y refleje la realidad, pertinente en que se refiera a la información solicitada y oportuna información correcta y en cuanto a su registro y obtención. Para generar la simulación usando estos indices se utilizarán los métodos de proyección detallados en la siguiente sección.

Una vez aplicado el método de simulación se simularán las reclamaciones futuras a través de $\{F_{i,j}^{sim}\}$ mediante

$$r_{i,j} = F_{i,j}^{sim} \cdot PEO_i,$$

se suman por cada año de origen $i \in \mathbb{N}$, los montos de reclamaciones simuladas $r_i = \sum_j R_{i,j} + r_{i,j}$.

Se calculan los indices de siniestralidad última de la forma

$$FS_i = \frac{r_i}{PEO_i}$$

Esta será el k-ésimo escenario de la simulación para $k \in 1, \ldots N$ para $N \in \mathbb{N}$. Se entiende este proceso se repite hasta generar un total de N escenarios. Se denota FS_i^k el indice de siniestralidad última en la simulación k y en año de origen i.

3.1 Aplicación de N escenarios por los n años de origen

Después se obtienen la mejor estimación del indice de siniestralidad última

$$FS_{BEL}^{IBNR} = \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{n} \frac{FS_i^k}{N \cdot n}$$

La cláusula en el inciso g) *La simulación del índice de siniestralidad última, , de la Institución de Seguros o Sociedad Mutualista de que se trate, deberá considerar el número necesario de iteraciones para asegurar que la mejor estimación de dicho índice no difiera en más del 1.0 % de su verdadero valor;...* será explicada más adelante.

Ahora se obtienen los factores de devengamiento, los cuales serán calculados de la forma establecida en el inciso g):

- Se determina en términos porcentuales, el valor que puede tener la siniestralidad total, durante los n años de desarrollo,

  siniestralidad total = reclamaciones + gastos de ajuste, salvamentos, recuperaciones,

  ocurridas a lo largo de los n años de desarrollo.

- Se determina en términos porcentuales, el valor que puede tener la siniestralidad remanente, durante los periodos que abarcan año j hasta año n de desarrollo,

  siniestralidad remanente = reclamaciones + gastos de ajuste, salvamentos, recuperaciones,

  ocurridas en el periodo que abarca el año j hasta el año n de desarrollo.

- Ambas se basarán en la estadística consolidada de reclamaciones de mercado del anexo 5.3.1 de la CUSF la cual los muestra de manera ejemplificativa como sigue

Ramo/tipo	**Índice de siniestralidad última** $F_{\text{BEL}}^{\text{SONR}}$	**Percentil 99.5 %** $FD_{99,5}^{\text{SONR}}$	**Duración de las obligaciones** DU_{SONR}
Diversos	10.26 %	64.70 %	1.95

Factores de devengamiento					
Ramo/tipo	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Diversos	100 %	39.25 %	24.02 %	17.07 %	13.21 %

El factor de devengamiento será igual a

$$\frac{\text{siniestralidad remanente}}{\text{siniestralidad total}}.$$

3.2 Estimación de la reserva SONOR

La reserva de siniestros ocurridos pero no reportados (fracción IV de la sección 5.3.2 de la CUSF) se calcula con la siguiente fórmula

$$RSONOR = \sum_{i=1}^{5}(PTD_i \cdot FS_{BEL}^{SONOR}) \cdot FD_i^{SONOR} + MR$$

Aquí PTD_i es la prima emitida devengada de cada uno de los últimos cinco años de operación de la Institución A. A esto se le suma el margen de riesgo MR que se calcula con base al capítulo 5.4 de la CUSF.

3.3 Desviación de la siniestralidad última de OPC por siniestros ocurridos pero no reportados

Esta se calculará de la forma siguiente y es una medida de la dispersión del cálculo del 1 % del valor real a través de uso de cuantiles. Según información de mercado el cuantil por siniestralidad es $FS_{99,5}^{SONOR}$ y la diferencia $diff = \left|FS_{99,5}^{SONOR} - FS_{BEL}^{SONOR}\right|$ se integra multiplicando para cada año de desarrollo por la prima de tarifa devengada PTD_k y por el factor de devengamiento FD_k^{SONOR} así como el factor de retención FR_k^{SONOR}.

$$\Pi_k = diff \cdot FD_k^{SONOR} \cdot FR_k^{SONOR} \cdot PTD_k$$

Definición 5 (Prima de tarifa devengada de la póliza $\rho_{k,j}$). *$PTD_{k,j}$ se define como la j-ésima prima de tarifa devengadade la póliza $\rho_{k,j}$ con año de origen k de un portafolio con n_k pólizas al año de origen k. Entonces $PTD_{k,j}$ se calcula como sigue: Si $T_{\rho_{k,j}}$ es el plazo total de la póliza $\rho_{k,j}$ y $t_{\rho_{k,j}}$ es el plazo devengado de la misma entonces*

$$PTD_{k,j} = PT_{\rho_{k,j}} \cdot \frac{t_{\rho_{k,j}}}{T_{\rho_{k,j}}}$$

Definición 6 (Prima de tarifa devengada). *Finalmente la suma total de las primas de tarifa devengadas para cada póliza de la cartera $\{\rho_{k,j}\}_{j=1}^{n_k}$ es la prima de tarifa devengada con año de origen k.*

$$PTD_k = \sum_{j=1}^{n_k} PTD_{k,j}.$$

Definición 7 (Factor de retención). *FR_k^{SONOR} se define como*

$$FR_k^{SONOR} = \frac{\text{Prima retenida año k}}{\text{Prima emitida año k}}.$$

Definición 8 (Percentil al 99.5 %). *$FS_{99,5}^{SONOR}$ se define como el percentil al 99.5 % de la estadística de siniestralidad última de siniestros ocurridos o no completamente reportados y sus accesorios; es decir de los indices de siniestralidad FS_i^{SONOR} obtenidos como se mostró arriba.*

Con estas definiciones es fácil definir la desviación de la siniestralidad última de OPC por siniestros ocurridos pero no reportados como sigue:

$$\mathcal{D}_{SONOR} = \sum_{k=1}^{5} \Pi_k.$$

3.4 Margen de riesgo (MR)

Definición 9. *El margen de riesgo será el monto que sumado a la Mejor Estimación, garantice que el monto de las reservas sea equivalente al que las Instituciones de Seguros requerirán para asumir y hacer frente a sus obligaciones (SOLVENCIA).*

Señala la disposición 5.4.1 que se calculará determinando el costo neto de capital correspondiente a los Fondos Propios Admisibles requeridos para respaldar el Requerimiento de Capital de Solvencia, del periodo de vigencia. Se usará el Requerimiento de Capital de Solvencia del cierre del mes inmediato anterior a la fecha de valuación. La institución podrá realizar ajustes a dicho margen de riesgo que reconozcan el incremento o decremento que pudiera tener el mismo (de manera proporcional al incremento de sus obligaciones en el mes en forma posterior al cierre del mes anterior. En esto casos el reponsable de la valuación de las reservas técnicas informará el ajuste los procedimientos aplicados como parte del contenido de los archivos de certificación del RR-3.

- Se determinará por ramo, tipo de seguro, plazo y moneda del BEL (mejor estimación).

- La tasa de costo neto de capital es la tasa de interés adicional a la tasa libre de riesgo de mercado que la institución requerirá para cubrir el costo de capital exigido para mantener el importe de los Fondos Propios Admisibles que respalden el Requerimiento de Capital de Solvencia. Esta tasa será del 10 %.

- Se calculará la base de capital $BC_{RSONOR,ramo}$ [1]

$$BC_{RSONOR,ramo} = \frac{\mathcal{D}_{RSONOR,ramo}}{\sum_{ramo} \mathcal{D}_{RRC,ramo} + \sum_{ramo} \mathcal{D}^{LP}_{RRC,ramo} + \sum_{ramo} \mathcal{D}_{RSONOR,ramo}} \cdot RCS$$

- Posteriormente se calculará la duración $DU_{RSONOR,ramo}$ [2]

$$DU_{RSONOR} = \sum_{t=0}^{n-1} v^t \cdot F_{RSONOR}(t)$$

[1] **Prorratear el requerimiento de capital de solvencia con el riesgo subyacente de pérdidas por desviación de las obligaciones futuras por siniestros ocurridos pero no reportados.**

[2] Esta es una estimación del plazo en que se extinguirán los flujos de obligaciones por vencimiento, reclamación o cancelación de las mismas en el futuro de la operación, ramo o tipo de seguro respectivo. Se trata del valor presente de los costos futuros de la Base de capital BC_{MR} asociada a dichas obligaciones empleando yield cruves libres de riesgo del mercado empleando la fracción II de la Disposición 5.1.3.

Aquí $F_{RSONOR}(t) = \frac{\sum_{k=t}^{n} f_{RSONOR}(k)}{\sum_{k=1}^{n} f_{RSONOR}(k)}$ es una estimación de la proporción de obligaciones que se espera, se mantengan en persistencia hasta el año t por operación, ramo otipo de seguro.

- $f_{RSONOR}(k)$ es el flujo de obligaciones estimadas en el año k correspondientes a la reserva SONOR. v es el factor de valor presente a tasa libre de riesgo al tipo de moneda que estén nominadas las obligaciones del seguro que se trate.

- La fórmula del margen de riesgo es la siguiente:

$$MR_{SONOR,ramo} = R \cdot BC_{SONOR,ramo} \cdot DU_{SONOR,ramo}.$$

El margen de riesgo en reserva de obligaciones pendientes por cumplir por siniestros y oligaciones de monto conocido y la reserva de oligaciones pendientes de cumplir por administración de pagos y beneficios vencidos, será 0.

3.5 Importes recuperables de reaseguro asociados a la reserva SONOR

Con base en la disposición 5.3.5 de la CUSF fracción III se calculan los Importes recuperables de reaseguro tomando RSONOR sin el margen de riesgo, pero aplicando en cada año de origen la Proporción de riesgo cedido en contratos de reaseguro que impliquen una transferencia cierta de riesgo de seguro en el año i, RC_t y el Factor de calidad de reaseguro, el cual deberá determinarse como la diferencia entre la unidad y la probabilidad de incumplimiento $P_{default}$ que le corresponda al momento de la valuación de la reserva, a la institución de seguros o entidad reaseguradora con que se haya contratado la cobertura de reaseguro o coaseguro (FCR_t).

$$IRR = \sum_{i=1}^{5} (PTD_i \cdot FS_{BEL}^{SONOR}) \cdot FD_i^{SONOR} \cdot RC_t \cdot FCR_t.$$

Definición 10 (Porción de riesgo cedido en el año de origen i)**.** *La porción de riesgo cedido en el año de origen i, es el porcentaje calculado como sigue:*

$$\frac{\mathcal{P}_R}{PEO_i},$$

donde $\mathcal{P}_R$ es la prima cedida o que se transfiere al reasegurador. También podrá calcularse como:

$$\frac{\mathcal{S}_R}{\mathcal{S}},$$

Aquí $\mathcal{S}_R$ y $\mathcal{S}$ son los siniestros recuperados y brutos del año en cuestión respectivamente.

Definición 11. *El factor de calidad de Reaseguro es definido como $1 - \mathcal{P}_{R,i,default}$. Aquí $\mathcal{P}_{R,i,default}$ es la probabilidad e incumplimiento que le corresponde a la reaseguradora R*

que proporciona el reaseguro. Si fuera más de una reaseguradora se ponderará cada porción de la prima cedida y

$$FCR_i = 1 - \sum_{R=1}^{K} \alpha_{R,i}\, \mathcal{P}_{R,i,default}$$

Dicha probabilidad será la que se base en el Anexo 8.20.2.

En el caso de la reserva de obligaciones pendientes de cumplir de pagos líquidos y exigibles, con monto conocido MPS_i, este se calcula:

$$IRR_i = MPS_i \cdot FCR_i.$$

3.6 Precisión de la simulación

El espíritu de la norma pide controlar la simulación para que el error de simulación sea suficientemente pequeño; esta cláusula puede entenderse en el siguiente sentido, el error relativo es pequeño:

$$\frac{\left|FS_i^k - \mu\right|}{\mu} \leq 1\,\%$$

Existen ciertos teoremas que garantizarán esto.

3.6.1. Teoremas y desigualdades

Los teoremas de aproximación que se necesitarán serán las desigualdades:

Teorema 1 (De Markov)**.** *Sea X una variable aleatoria con primer momento finito. Para cualquier $\epsilon > 0$,*

$$\mathbb{P}(X \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{\epsilon}$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \mathbb{E}[X1_{(X\geq\epsilon)} + X1_{(X<\epsilon)})] \\ &\geq \mathbb{E}[X1_{(X\geq\epsilon)} \\ &\geq \mathbb{E}[\epsilon 1_{(X\geq\epsilon)} \\ &\geq \epsilon\, \mathbb{P}(X \geq \epsilon) \end{aligned}$$

□

Teorema 2 (De Chebyshev)**.** *Sea X una variable aleatoria con segundo momento finito. Para cualquier $\epsilon > 0$,*

$$\mathbb{P}(|X - \mu| \geq \epsilon) \leq \frac{Var(X)}{\epsilon^2}$$

Demostración.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|X-\mu|^2] &= \mathbb{E}[|X-\mu|^2 1_{(|X-\mu|\geq\epsilon)} + |X-\mu|^2 1_{(|X-\mu|<\epsilon)}]\\ &\geq \mathbb{E}[|X-\mu|^2 1_{(|X-\mu|\geq\epsilon)}]\\ &\geq \mathbb{E}[\epsilon^2 1_{(|X-\mu|\geq\epsilon)}\\ &\geq \epsilon^2\,\mathbb{P}(|X-\mu|\geq\epsilon)\end{aligned}$$

□

Si la varianza no fuere constante entonces otra versión de la desigualdad puede ser generada.

Teorema 3 (De Kolmogorov)**.** *Sean $\{X_i\}_{i=1}^n$ una variable aleatoria con segundo momento finito. Para cualquier $\epsilon > 0$,*

$$\mathbb{P}\left(max_{k=1}^n\left(\left|\sum_{i=1}^k X_i\right|\right) \geq \epsilon\right) \leq \frac{\sum_{i=1}^n Var(X_i)}{\epsilon^2}$$

Demostración.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|X-\mu|^2] &= \mathbb{E}[|X-\mu|^2 1_{(|X-\mu|\geq\epsilon)} + |X-\mu|^2 1_{(|X-\mu|<\epsilon)}]\\ &\geq \mathbb{E}[|X-\mu|^2 1_{(|X-\mu|\geq\epsilon)}]\\ &\geq \mathbb{E}[\epsilon^2 1_{(|X-\mu|\geq\epsilon)}\\ &\geq \epsilon^2\,\mathbb{P}(|X-\mu|\geq\epsilon)\end{aligned}$$

□

Teorema 4 (Del límite central)**.** *Sea X una variable aleatoria con segundo momento finito, y $\{X_i\}_{i=1}^n$ una muestra aleatoria de la variable anterior entonces Cuando $n \longrightarrow \infty$ se tiene que*

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}} \longrightarrow_{dist} \phi(0,1)$$

Es decir, la media muestral converge en distribución , al ser estandarizada, a una normal con media 0 y varianza 1.

3.6.2. Uso de los teoremas anteriores

Tenemos la media muestral por año de origen i.

$$FS_{BEL,i}^{SONOR} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^N FS_i^k.$$

La varianza de la media muestral es $\frac{Var(FS_i^k)}{N}$. Puede usarse la desigualdad de Markov o la de Chebyshev para determinar el tamaño de simulación:

```
N0 <- 5000
I_sim <- simular_indices(N0)
mean_I <- mean(I_sim)
var_I   <- var(I_sim)
```

Tomado por ejemplo la desigualdad de Chebyshev se calcula

```
var_I/(.05*(.001 \mu )^2)
```

Y se toma N como un entero mayor que este número; la fracción sin tomar en cuenta los factores media y varianza es 20,000,000. se multiplica por la varianza y se divide entre el cuadrado de la media. Claramente estas simulaciones se reducirán mientras mas grande sea la media y mas pequeña la varianza.

$$N \geq \frac{Var(FS_i^k)}{,05 \cdot (,001 \cdot \mathbb{E}[Var(FS_i^k])^2} = 20,000,000 \frac{Var(FS_i^k)}{(\mathbb{E}[Var(FS_i^k])^2} \tag{1}$$

Claro esta serían muchas simulaciones. Si se usa por ejemplo el teorema del límite central, puede reducirse este número de simulaciones de manera significativa.

Para usar el teorema del límite central necesitamos escoger N de tal forma que

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{FS_i^k - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}}\right| \leq z_{\alpha/2}\right)$$

Aquí $z_{\alpha/2}$ es el número tal que a la izquierda en la distribución normal estándar acumula $1 - \frac{\alpha}{2}$ donde $1 - \alpha = ,95$ es la confianza. En términos estrictos de valor absoluto para mantener una significancia del $0,05$ el error absoluto debe ser

$$\left|FS_i^k - \mu\right| \leq \frac{z_{\alpha/2}\sigma}{\sqrt{N}}.$$

El error relativo se obtiene así:

$$\frac{\left|FS_i^k - \mu\right|}{\mu} \leq \frac{z_{\alpha/2}\sigma}{\mu\sqrt{N}} \leq 1\,\%.$$

Despejando N pueden obtenerse el número de simulaciones.

4 Métodos de proyección para simular los factores de proyección

Se tienen varios métodos para simular los factores de proyección; hay que aclarar que el espíritu de la regulación es que la historia se repetirá exactamente en la misma medida en el futuro. Es decir no se modela realmente un pronóstico, simplemente se escoge un factor de aquellos ocurridos para un mismo año de desarrollo en el pasado; no se modelan nuevas extrapolaciones de las reclamaciones; de hecho no se proyectan los factores pasados integrándose en promedios como en los métodos clásicos razón con la cual esta el simil, se tira una moneda de tantas caras como años de origen y en cada tirada se escoge al azar un factor de proyección de entre todos los ocurridos por año de desarrollo.

4.1 Metrópolis Hasstings

A continuación se expone esta alternativa basados en los siguientes hechos:

- Se trata de un conjunto finito de factores de proyección por año de desarrollo $\{F_{i,j}\}_{i=1}^{n}$.
- Ubicándonos en un año de desarrollo j y origen i podriamos definir los pesos de la manera siguiente
$$\pi_{i,j} = \frac{F_{i,j}}{\sum_{i=1}^{n} F_{i,j}}.$$
- Claramente para cada año de desarrollo j la distribución
$$(\pi_{1,j}, \ldots, \pi_{n,j}),$$
Es una distribución de probabilidad que para cada año de desarrollo toma los valores
$$(F_{1,j}, \ldots, F_{n,j}),$$
con las probabilidades tal cual asignadas en el inciso anterior.

4.1.1. Definición del algoritmo

Supongamos que contamos con una matriz estocástica (renglones suman 1 y entradas no negativas) arbitraria cuadrada de tamaño n,

$$Q = \left\{ \begin{matrix} q_{1,1} & q_{1,2} & \cdots & q_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ q_{n-1,1} & q_{n-1,2} & \cdots & q_{n-1,n} \\ q_{n,1} & q_{n,2} & \cdots & q_{n,n} \end{matrix} \right\}$$

Supongase que se dispone de un método para simular los renglones. Se define pues el siguiente proceso estocástico:

Definición 12. *Se definirá el siguiente proceso estocástico X_t para $t \in \mathbb{N}$ a través de la siguiente regla:*

Si $X_t = i$ para $i, j \in S$ donde S es un espacio de estados discreto, se define:

$$X_{t+1} = \begin{cases} j & \text{con probabilidad } \alpha_{i,j}\text{, i.e. se acepta el valor generado} \\ i & \text{con probabilidad } 1-\alpha_{i,j}\text{, i.e. se rechaza el valor generado.} \end{cases}$$

Aquí $\alpha_{i,j} = \text{mín}\left(\frac{\pi_j}{\pi_i}, \frac{q_{j,i}}{q_{i,j}}, 1\right)$.

Cabe detenernos un momento, la relación de comunicación $i \longrightarrow j$ se da cuando o bien se rechaza j o $i = j$ y se acepta. Este proceso definido como tal es una cadena de Markov como se demuestra a continuación:

Teorema 5. *El proceso $\{X_t\}_{t=0}^{\infty}$ construido según la definición anterior es una cadena de Markov con espacio de estados S y matriz de probabilidades de transición:*

$$P = (p_{i,j}) = \begin{cases} \alpha_{i,j} \cdot q_{i,j} & \textit{si } i \neq i \\ 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{i,k} \cdot q_{i,k} & \textit{si } j = i. \end{cases}$$

Demostración. Por construcción, X_{t+1} solo depende de X_t, la matriz estocástica Q y la distribución objetivo $(\pi_1, \ldots, \pi_n)$. Entonces la propiedad de Markov se cumple. Para obtener las probabilidades de transición hay que distinguir dos casos:

Caso $j \neq i$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{t+1} = j | X_t = i) &= \mathbb{P}\bigg(\text{(aceptar j)}|X_t = i, \text{(”se generó el valor j”)}\bigg) \cdot \mathbb{P}(\text{generar j}|X_t = i) \\ &= \alpha_{i,j} \cdot q_{i,j}. \end{aligned}$$

Caso $j = i$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{t+1} = j | X_t = i) &= \mathbb{P}\bigg(\text{(generar y aceptar i)}|X_t = i\bigg) + \sum_k \mathbb{P}\bigg(\text{(generar y rechazar k)}|X_t = i\bigg) \\ &= \mathbb{P}\bigg(\text{(aceptar i)}|X_t = i, \text{(”se generó el valor i”)}\bigg) \cdot \mathbb{P}\bigg(\text{generar el valor i}|X_t = i\bigg) \\ &+ \sum_k \mathbb{P}\bigg(\text{(rechazar k)}|X_t = i, \text{(generar k)}\bigg) \cdot \mathbb{P}\bigg(\text{(generar k)}|X_t = i\bigg) \\ &= \alpha_{i,i}\ q_{i,i} + \sum_k q_{i,k}\ (1 - \alpha_{i,k}) \\ &= 1 - \sum_{k \neq i} q_{i,k} \cdot \alpha_{i,k}. \end{aligned}$$

$\square$

Claramente es una matriz estocástica pues la suma de cada renglón es 1. Ahora bien la distribución objetivo es una distribución estacionaria para la cadena recién definida.

Teorema 6 (Ecuación de balance)**.** *En términos de las definiciones anteriores se cumple la siguiente ecuación para cada $i, j \in S$.*

$$\pi_i \cdot p_{i,j} = \pi_j \cdot p_{j,i}.$$

Demostración. Si $i = j$, es evidente, por ende se puede suponer sin pérdida de generalidad que $i \neq j$

$$\begin{aligned}
\pi_i \cdot p_{i,j} &= \pi_i \cdot \alpha_{i,j} \cdot q_{i,j} \\
&= \pi_i \cdot \text{mín}\left\{\frac{\pi_j}{\pi_i}, \frac{q_{j,i}}{q_{i,j}}, 1\right\} \cdot q_{i,j} \\
&= \text{mín}\left\{\pi_j \cdot q_{j,i}, \pi_i \cdot q_{i,j}\right\} \\
&= \pi_j \cdot \text{mín}\left\{\frac{\pi_i}{\pi_j}, \frac{q_{i,j}}{q_{j,i}}, 1\right\} \cdot q_{j,i} \\
&= \pi_j \cdot \alpha_{j,i} \cdot q_{j,i} \\
&= \pi_j \cdot p_{j,i}.
\end{aligned}$$

□

Teorema 7. *La distribución objetivo* $\left(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n, \ldots\right)$*, es una distribución estacionaria para la cadena* $P = (p_{i,j})$ *construida anteriormente.*

Demostración. Para cualquier $j \in S$,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} \pi_i \cdot p_{i,j} &= \sum_{i=1}^{\infty} \pi_j \cdot p_{j,i} \\
&= \pi_j \sum_{i=1}^{\infty} \cdot p_{j,i} \\
&= \pi_j.
\end{aligned}$$

□

La convergencia del algoritmo se da cuando la cadena de Markov tiene distribución límite, por ejemplo cuando la cadena es irreducible y aperiódica, por ejemplo si tiene todas sus entradas positivas. Estos resultados son los que proporcionarán el algoritmo de simulación deseado.

4.1.2. Ejemplo

Supongamos que tenemos 7 años de desarrollo y que ponderando los factores de proyección, obtenemos $(\pi_1^k, \ldots, \pi_k^k)$. para $k \in 1, \ldots 7$, aquí k representa el año de desarrollo

Podemos definir una matriz de $k \times k$ como la siguiente, para $k \geq 3$,

$$Q = \left\{\begin{matrix}
1/3 & 1/3 & 1/3 & \ldots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \ldots & 1/3 & 1/3 & 0 \\
0 & 0 & \ldots & 1/3 & 1/3 & 1/3
\end{matrix}\right\}$$

Esta matriz es irreducible y aperiódica y permite simular los años de desarrollo con más de 3 factores de proyección de historia. Se puede programar la cadena de Markov anterior y generar valores de la distribución objetivo. El siguiente algoritmo se aplica por año de desarrollo, para menos de tres factores claramente puede decidirse usando criterios sencillos de simulación como escenarios equiprobables por ejemplo.

- Se selecciona un valor inicial $f_i \in S$.
- Se hace $k = 1$
- Se genera un valor del renglón k renglón de la matriz Q.
- Se acepta o rechaza ese valor según $\alpha_{i,j}$ o $1 - \alpha_{i,j}$.
- Si se acepta se actualiza $k = k + 1$ y se repiten los anteriores pasos a menos que se deseé terminar el algoritmo.
- Si se rechaza, se vuelve al tercer paso.
- Se termina el algoritmo con una muestra $\{F_i^m\}_{m=1}^{m_1}$ simulados.