

# 具有迁移和脉冲接种的传染病模型的研究

作者：金福隆、韩梓宸

## 摘要

将考虑疫苗接种作为一恒定参常组数和一种脉冲接种因素，建立了两个斑块之间存在迁移关系的SIS模型。通过求解无病平衡时刻周期末的接种人数，使用Matlab软件绘图，当两地迁移率均取作常数时，求得无病周期解。接着探究了无病周期解在一个正周期内满足稳定性的条件，给出了两地无病周期解同时稳定的条件，从而在其他参数确定时得出最小接种正周期的最大值与迁移系数之间的关系不等式。

**关键词：**斑块迁移的SIS模型，脉冲接种，周期解、稳定性

# 引言

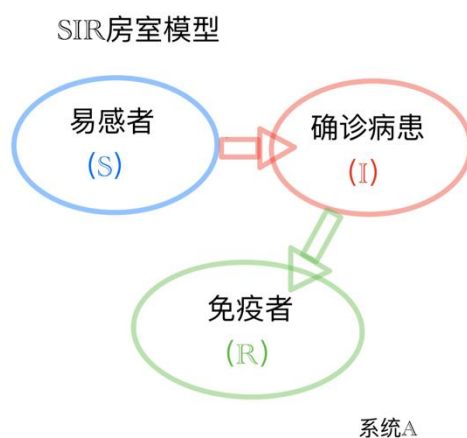
随着新冠疫情的影响在全世界范围内不断扩大，研究构建传染病数学模型产生了极大的时效性和社会价值，2019 年末，湖北省武汉市发生不明肺炎病例，这种被称为 COVID-19 的新型肺炎病毒在全国各个省份接连出现。建立合适的数学扩散模型，可以用来估计疫情状况并预测其发展趋势，对在防疫关键时期合理分配和高效使用医疗资源有着重要作用。由于传统的模型过于简单机械，它们只从传染病病理的角度，把人群划分为易感者、恢复者、患者却未考虑预防措施，尤其是目前针对新冠病毒的疫苗已经产出。本文对传统模型进行修正，构建出两个具有人口流动且具备脉冲式接种的“双城SIRS”。简单地将考虑疫苗接种作为一恒定参常数，不同于传统模型的连续人群到人群之间的变化构造，我们经过研究，发现周期地接种策略往往优于连续的策略，不止于优化的数学效果，这一点同时也考虑了实际情况。在固定时间隔点上，作用于易感者Susceptible, 使其部分转化为接种者Vaccinated且两个地区的同种群体相互迁移。我们很容易求解无病平衡时刻周期末的接种人数 $V_1(nT)$ ， $V_2(nT)$ ，给定部分参数，使用Matlab软件绘图，当两地迁移率均取作 $k_1, k_2$ 且求得

$$V_1^* = V_1^*(\varphi, \mu, \theta, k_1, k_2, T), V_2^* = V_2^*(\varphi, \mu, \theta, k_1, k_2, T)$$

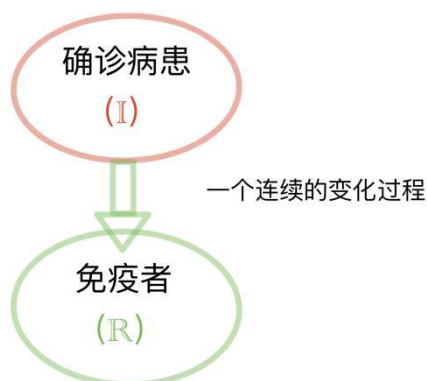
作为无病周期解，其中 $\varphi, \mu, \theta$ 分别表示接种率，自然死亡率，接种免疫丧失系数。接着探究无病周期解在一个正周期内满足稳定性的条件，给出了两地无病周期解同时稳定的所需满足的条件，从而在其他参数确定时得出最小接种正周期的最大值 $T_{\max}$ 与迁移系数 $k_1, k_2$ 之间的关系不等式。

## 一、主要研究问题

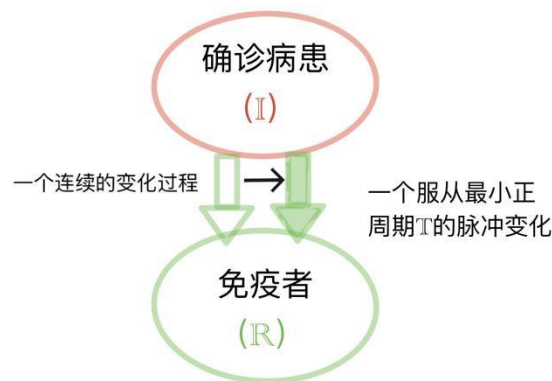
这里我们先对一些关键名词进行解释：S指Susceptible，代表易感人群，I指Infected，代表确诊人群，R指Recovered，代表自然免疫者，V指Vaccines，代表被接种人群。现在我们先考虑在一个斑块上的SIR模型：



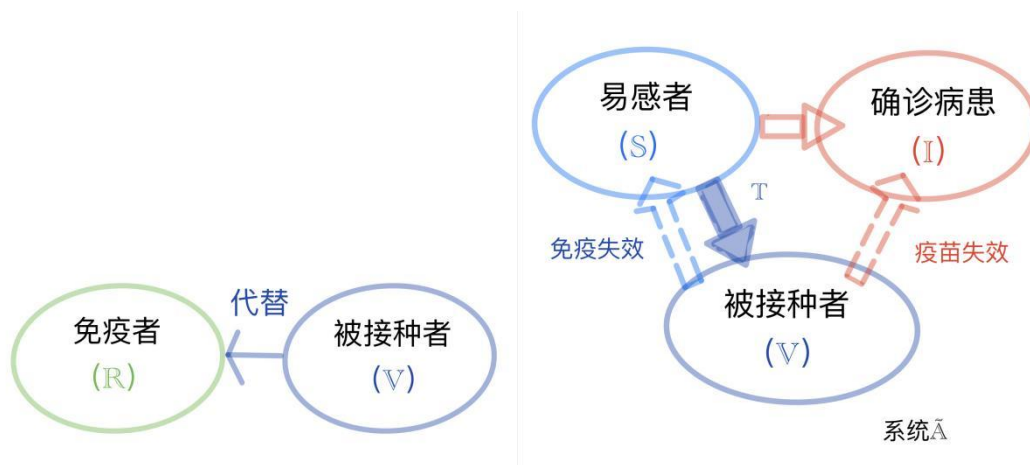
易感者的变化由感染、出生和死亡三个因素控制，在这里我们不考虑垂直传染，即出生来源于任何一类人群，都会被当作无免疫能力的易感人群。确诊人群的移出由自然恢复和死亡两个因素控制，增添由感染控制。免疫人群的增添由自然恢复控制，移出由死亡控制。



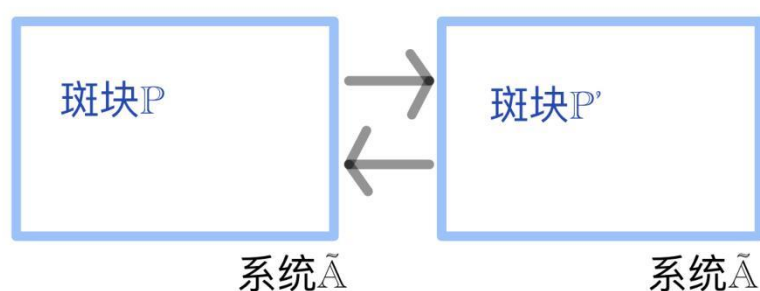
我们可以发现，确诊病患转移到免疫者的过程可以用一个连续的过程方程来进行描述。现在我们将其变化为一个脉冲的形式：



现在我们用被接种人群V来代替R，以便于更具体的人群归类与模型说明。V的产生来源从I的自然恢复变更为由S的接种产生。这里我们考虑两个因素，即疫苗的失效率与免疫获得后的失效率。疫苗失效代表S接种后并未能成功地加入V类人群，即依旧会被感染，是疫苗本身的特性，不随时间分布。免疫失效率代表随时间变化，一些V类人群的免疫能力会逐渐丧失，随时间分布地在一个最小接种正周期内连续移入S类人群：



最后，我们考虑斑块间的迁移效应。设两个斑块P与P' 均适合上述的系统A，考虑地区间适用于全体人群的两地区的迁移率 $k_1$ 与 $k_2$ ，我们获得了一个全局的结构：



这里我们要说明的是，多斑块间的迁移可以类似地用一个系数矩阵去描述，在此处我们要研究迁移率对无病平衡解产生的影响，因此只考虑两个斑块间的关系，对这一角度加以说明。

对于传染病的防控，我们往往在意通过构建人体免疫与控制人员两种方式进行抑制疾病的感染与传播。而对这两点与到达全局无病间定量关系的研究就显得极为重要。通过研究我们发现，考虑到达无病平衡点的时间与产生的经济负担，以最小正周期 $T$ 进行脉冲接种要优于连续接种方案，这一更优的证明过程此处不予赘述。现在我们对模型进行一定的简化，着重考虑这两个因素，以脉冲接种作为免疫生成策略，制作一个两斑块间的SIVS脉冲接种结构。

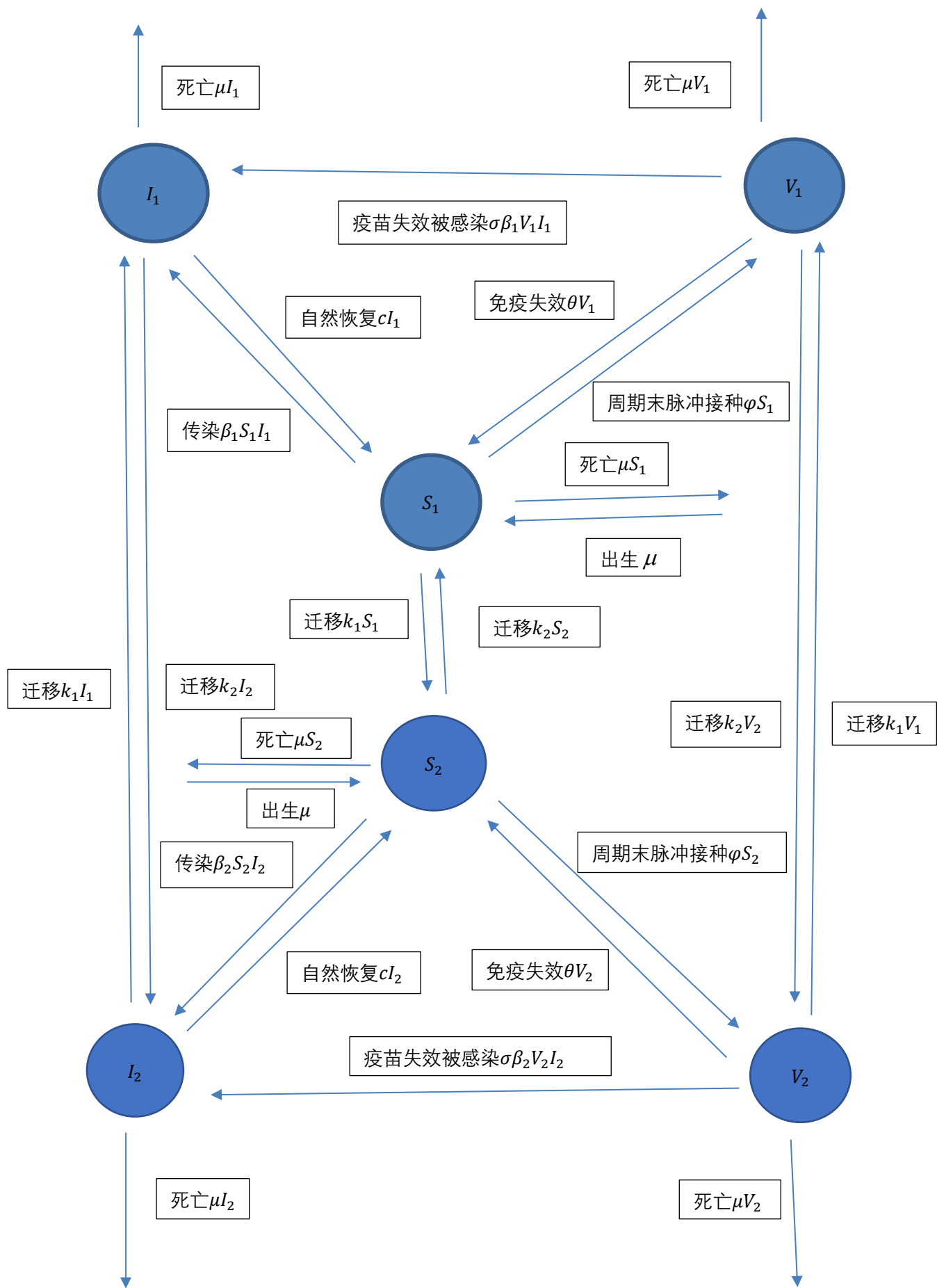
## 二、 方程构造与方程图解

我们构建的两地 SIVS 模型如下：

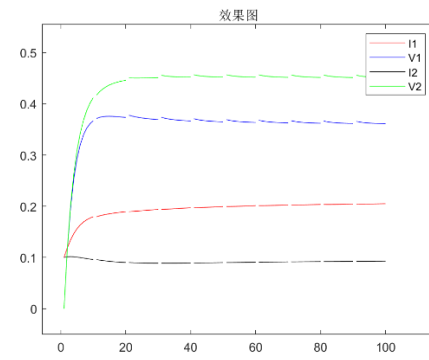
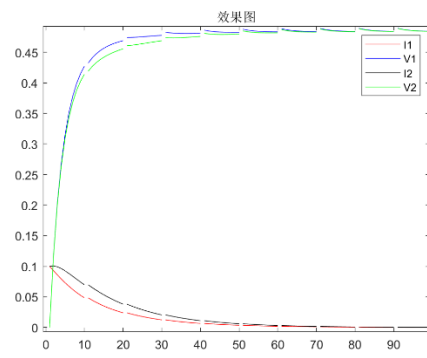
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS_1}{dt} = \mu - \beta_1 S_1 I_1 - (\mu + k_1) S_1 + c I_1 + \theta V_1 + k_2 S_2 \\ \frac{dI_1}{dt} = \beta_1 (S_1 + \sigma V_1) I_1 - (\mu + k_1 + c) I_1 + k_2 I_2 \\ \frac{dV_1}{dt} = -\sigma \beta_1 V_1 I_1 - (\mu + \theta + k_1) V_1 + k_2 V_2 \\ \frac{dS_2}{dt} = \mu - \beta_2 S_2 I_2 - (\mu + k_2) S_2 + c I_2 + \theta V_2 + k_1 S_1 \\ \frac{dI_2}{dt} = \beta_2 (S_2 + \sigma V_2) I_2 - (\mu + k_2 + c) I_2 + k_1 I_1 \\ \frac{dV_2}{dt} = -\sigma \beta_2 V_2 I_2 - (\mu + \theta + k_2) V_2 + k_1 V_1 \\ S_1(nT^+) = (1 - \varphi) S_1(nT) \\ I_1(nT^+) = I_1(nT) \\ V_1(nT^+) = V_1(nT) + \varphi S_1(nT) \\ S_2(nT^+) = (1 - \varphi) S_2(nT) \\ I_2(nT^+) = I_2(nT) \\ V_2(nT^+) = V_2(nT) + \varphi S_2(nT) \end{array} \right. \quad (1)$$

其中  $\beta_i, k_i, \sigma, \theta, \mu, c$  分别为感染率、迁移率、疫苗失效率、免疫失效率，出生率和死亡率（假设相等），自然恢复率总人口数为  $S + I + V = N = 1$ 。

下面我们画出方程建立图解



再来使用 matlab 画图，使用两组不同的参数，分别形成无病周期解和地方病周期解的效果图





### 三、对无病周期解的研究与相关系数不等式的确定

接下来我们研究无病周期解的存在性和稳定性。为了求解，只需令方程  $I_1 = 0, I_2 = 0$ ,

$$\begin{cases} \frac{dV_1}{dt} = -(\mu + \theta + k_1)V_1 + k_2V_2 \\ V_1(nT^+) = \varphi_1 + (1 - \varphi_1)V_1(nT) \\ \frac{dV_2}{dt} = -(\mu + \theta + k_2)V_2 + k_1V_1 \\ V_2(nT^+) = \varphi_2 + (1 - \varphi_2)V_2(nT) \end{cases} \quad (2)$$

可知当  $t_0 = nT \leq t < (n+1)T$ ，方程是存在解析解  $V_1(t), V_2(t)$  的，周期解存在性显然。

引理1 如果矩阵A具有n个线性无关的特征向量  $v_1, v_2, \dots, v_n$ ；它们相应的特征值为  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ （不必互不相同），则有矩阵  $\Phi(t) = [e^{\lambda_1 t} v_1, e^{\lambda_2 t} v_2, \dots, e^{\lambda_n t} v_n]$ ,  $-\infty < t < +\infty$

$$\begin{vmatrix} \lambda + (\mu + \theta + k_1) & -k_2 \\ -k_1 & \lambda + (\mu + \theta + k_2) \end{vmatrix} = 0 \quad (3)$$

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu + \theta)(\lambda + \mu + \theta + k_1 + k_2) &= 0 \\ \lambda_1 &= -(\mu + \theta), \lambda_2 = -(\mu + \theta + k_1 + k_2) \\ v_1 &= (k_2, k_1)^T, v_2 = (1, -1)^T \end{aligned} \quad (4)$$

$$\Phi(t) = [e^{\lambda_1 t} v_1, e^{\lambda_2 t} v_2] [e^{\lambda_1 nT} v_1, e^{\lambda_2 nT} v_2]^{-1} \quad (5)$$

求得基解矩阵为：

$$\Phi(t) = \frac{1}{k_1 + k_2} \begin{pmatrix} k_1 e^{-(\mu + \theta + k_1 + k_2)(t-t_0)} + k_2 e^{-(\mu + \theta)(t-t_0)} & -k_2 e^{-(\mu + \theta + k_1 + k_2)(t-t_0)} + k_2 e^{-(\mu + \theta)(t-t_0)} \\ -k_1 e^{-(\mu + \theta + k_1 + k_2)(t-t_0)} + k_1 e^{-(\mu + \theta)(t-t_0)} & k_2 e^{-(\mu + \theta + k_1 + k_2)(t-t_0)} + k_1 e^{-(\mu + \theta)(t-t_0)} \end{pmatrix} \quad (6)$$

故当  $t_0 = nT \leq t < (n+1)T$  时

$$\begin{cases} V_1(t) = (\frac{k_1 e^{-(\mu+\theta+k_1+k_2)(t-t_0)} + k_2 e^{-(\mu+\theta)(t-t_0)}}{k_1+k_2})V_1(nT) + (\frac{-k_2 e^{-(\mu+\theta+k_1+k_2)(t-t_0)} + k_2 e^{-(\mu+\theta)(t-t_0)}}{k_1+k_2})V_2(nT) \\ V_2(t) = (\frac{-k_1 e^{-(\mu+\theta+k_1+k_2)(t-t_0)} + k_1 e^{-(\mu+\theta)(t-t_0)}}{k_1+k_2})V_1(nT) + (\frac{k_2 e^{-(\mu+\theta+k_1+k_2)(t-t_0)} + k_1 e^{-(\mu+\theta)(t-t_0)}}{k_1+k_2})V_2(nT) \end{cases} \quad (7)$$

终末时刻  $(n+1)T$  我们有:

$$\begin{cases} V_1((n+1)T) = \varphi + (1-\varphi)[(\frac{k_1 e^{-(\mu+\theta+k_1+k_2)T} + k_2 e^{-(\mu+\theta)T}}{k_1+k_2})V_1(nT) + (\frac{-k_2 e^{-(\mu+\theta+k_1+k_2)T} + k_2 e^{-(\mu+\theta)T}}{k_1+k_2})V_2(nT)] \\ V_2((n+1)T) = \varphi + (1-\varphi)[(\frac{-k_1 e^{-(\mu+\theta+k_1+k_2)T} + k_1 e^{-(\mu+\theta)T}}{k_1+k_2})V_1(nT) + (\frac{k_2 e^{-(\mu+\theta+k_1+k_2)T} + k_1 e^{-(\mu+\theta)T}}{k_1+k_2})V_2(nT)] \end{cases} \quad (8)$$

引理2 (*Banach*不动点定理)

设  $(X, d)$  为非空的完备度量空间。设  $T: X \rightarrow X$  为  $X$  上的一个压缩映射, 也就是说, 存在一个非负的实数  $q < 1$ , 使得对于所有  $X$  内的  $x$  和  $y$ , 都有  $d(Tx, Ty) < qd(x, y)$ , 则映射  $T$  在  $X$  内有且只有一个不动点  $x$ , 即  $Tx = x$

显然  $\|\Phi((n+1)T^-)\| < 1$ , 故我们得出当  $n \rightarrow \infty$  时,

$$\begin{aligned} V_1^* &= \frac{\varphi - \varphi(1-\varphi)(\frac{2k_2}{k_1+k_2}e^{-(\mu+\theta+k_1+k_2)T} + \frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}e^{-(\mu+\theta)T})}{(1-\varphi)^2 e^{-(2\mu+2\theta+k_1+k_2)T} + (1-\varphi)(e^{-(\mu+\theta+k_1+k_2)T} + e^{-(\mu+\theta)T}) + 1} \\ V_2^* &= \frac{\varphi - \varphi(1-\varphi)(\frac{2k_1}{k_1+k_2}e^{-(\mu+\theta+k_1+k_2)T} + \frac{k_2-k_1}{k_1+k_2}e^{-(\mu+\theta)T})}{(1-\varphi)^2 e^{-(2\mu+2\theta+k_1+k_2)T} + (1-\varphi)(e^{-(\mu+\theta+k_1+k_2)T} + e^{-(\mu+\theta)T}) + 1} \end{aligned} \quad (9)$$

$(S_1^*, 0, V_1^*)$  和  $(S_2^*, 0, V_2^*)$  得求, 此后, 任何周期内都以这两者为初值进行变化, 令

$V_1(nT) = V_1^*, V_2(nT) = V_2^*$  带入 (7), 求得无病周期解  $\tilde{V}_1(t), \tilde{V}_2(t)$  的解析表达式求得,

$\tilde{S}_1(t) = 1 - \tilde{V}_1(t), \tilde{S}_2(t) = 1 - \tilde{V}_2(t)$  存在性得以验证。

下面来分析无病周期解的稳定性  
构造

$$\begin{cases} V_i(t) = \tilde{V}_i(t) + v_i \\ I_i(t) = \tilde{I}_i(t) + i_i \\ i = 1, 2 \end{cases} \quad (10)$$

带回 (1) 方程有：

$$\begin{cases} \frac{dv_1}{dt} = -\sigma\beta_1\tilde{V}_1i_1 - (\mu + \theta + k_1)v_1 + k_2v_2 \\ \frac{di_1}{dt} = \beta_1(1 - (1 - \sigma)\tilde{V}_1)i_1 - (\mu + k_1 + c)i_1 + k_2i_2 \\ \frac{dv_2}{dt} = -\sigma\beta_2\tilde{V}_2i_2 - (\mu + \theta + k_2)v_2 + k_1v_1 \\ \frac{di_2}{dt} = \beta_2(1 - (1 - \sigma)\tilde{V}_2)i_2 - (\mu + k_2 + c)i_2 + k_1i_1 \end{cases} \quad (11)$$

观察方程，先考虑如下两项

$$\begin{cases} \frac{di_1}{dt} = \beta_1(1 - (1 - \sigma)\tilde{V}_1)i_1 - (\mu + k_1 + c)i_1 + k_2i_2 \\ \frac{di_2}{dt} = \beta_2(1 - (1 - \sigma)\tilde{V}_2)i_2 - (\mu + k_2 + c)i_2 + k_1i_1 \end{cases} \quad (12)$$

我们考虑使用Lyapunov第二定理得：

$$P = \begin{pmatrix} \frac{k_1(k_1 - k_2) + (a + b)b}{2(a + b)(k_1k_2 - ab)} & \frac{-(ak_1 + bk_2)}{2(a + b)(k_1k_2 - ab)} \\ \frac{-(ak_1 + bk_2)}{2(a + b)(k_1k_2 - ab)} & \frac{k_2(k_2 - k_1) + (a + b)a}{2(a + b)(k_1k_2 - ab)} \end{pmatrix} \quad (13)$$

其中  $a = \beta_1(1 - (1 - \sigma)\tilde{V}_1) - (\mu + k_1 + c)$ ,  $b = \beta_2(1 - (1 - \sigma)\tilde{V}_2) - (\mu + k_2 + c)$

根据Sylvester准则矩阵P正定则稳定这等价于

$$ab - k_1k_2 \geq 0 \quad (14)$$

满足

$$\begin{aligned} & \beta_1\beta_2(1 - (1 - \sigma)\tilde{V}_1)(1 - (1 - \sigma)\tilde{V}_2) + (\mu + c)^2 + (k_1 + k_2)(\mu + c) \geq \\ & \beta_1(\mu + k_2 + c)(1 - (1 - \sigma)\tilde{V}_1) + \beta_2(\mu + k_1 + c)(1 - (1 - \sigma)\tilde{V}_2) \end{aligned} \quad (15)$$

令  $x = (1 - (1 - \sigma)\tilde{V}_1)$ ,  $y = (1 - (1 - \sigma)\tilde{V}_2)$

$$\beta_1\beta_2xy+(\mu+c)^2+(k_1+k_2)(\mu+c)-\beta_1(\mu+k_2+c)x-\beta_2(\mu+k_1+c)y\geq 0 \quad (16)$$

考察上述二次曲线为0的情况，考虑三阶不变量  $I_3$  和二阶不变量  $I_2$

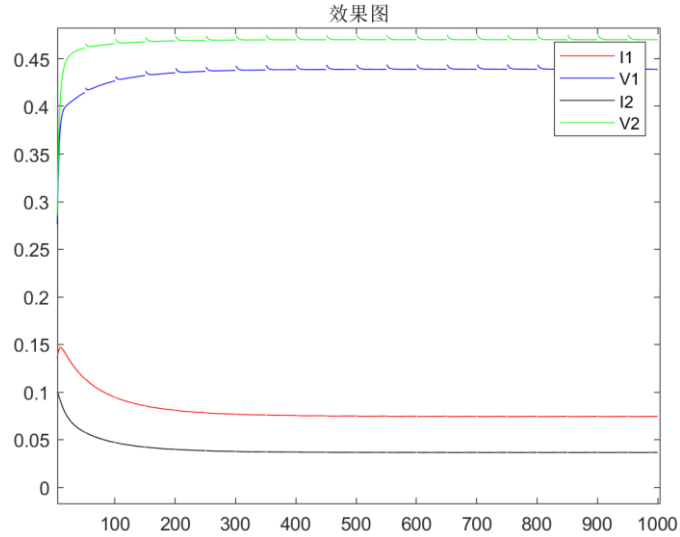
$$\frac{1}{2}\det\begin{pmatrix} 0 & \beta_1\beta_2 & -\beta_2(\mu+k_2+c) \\ \beta_1\beta_2 & 0 & -\beta_2(\mu+k_1+c) \\ -\beta_1(\mu+k_2+c) & -\beta_2(\mu+k_1+c) & (\mu+c)^2+(k_1+k_2)(\mu+c) \end{pmatrix} \quad (17)$$

二阶不变量  $I_2 = -\beta_1^2\beta_2^2 \leq 0$ ，三阶不变量  $I_3 \neq 0$ ，说明（16）满足双曲线的性质，

考察轨线可以找出满足（15）成立，即模型稳定性条件的图解范围。在代

数层面上，将  $\tilde{V}_1, \tilde{V}_2$  代入，可以得到  $T$  与迁移系数  $k_1, k_2$  之间的关系不等式，从而确

定防疫的接种策略与地区间人口交流的管控策略。这里加大接种的周期，其余参数模仿上文，发现形成了地方病：



## 四、 结果分析

将满足无病周期解初值条件(10)代入稳定性控制约束(15)与(18)，我们可以得到全局的基本再生数  $R$  归一化后满足的不等式条件，这里利用 Lyapunov 第二方法可以直接求得全局基本再生数而无需先分别计算斑块的基本再生数。根据这一不等式，策略可以基于最大接种周期  $T$  与迁移率  $k$  满足的关系进行确定。同时，我们给出了这一稳定性约束的可行域范围以及约束曲线的类型，对于已经确定的参数可以给出更容易的估计方法，亦可利用相关软件生成或绘制  $f(V(k, T))$  的图直接寻找一组满足稳定条件的点  $(k, T)$ 。

## 参考文献

- [1] 马知恩, 周义仓. 常微分方程定性及稳定性方法[M]. 科学出版社, 2001.
- [2] 靳楨, 马知恩. 具有连续和脉冲预防接种的 SIRS 传染病模型[J]. 中北大学学报(自然科学版), 2003, 24(004):235-243.
- [3] 冯浩, 刘桂荣. 复杂网络上具有出生和死亡的 SIS 模型及其分析[J]. 云南师范大学学报: 自然科学版, 2016, 36(4):9.
- [4] 罗荣桂, 江涛. 基于 SIR 传染病模型的技术扩散模型的研究[J]. 管理工程学报, 2006, 20(1):4.
- [5] 李文娟. 一类离散 SIRS 传染病模型的稳定性分析[D]. 山西大学, 2015.