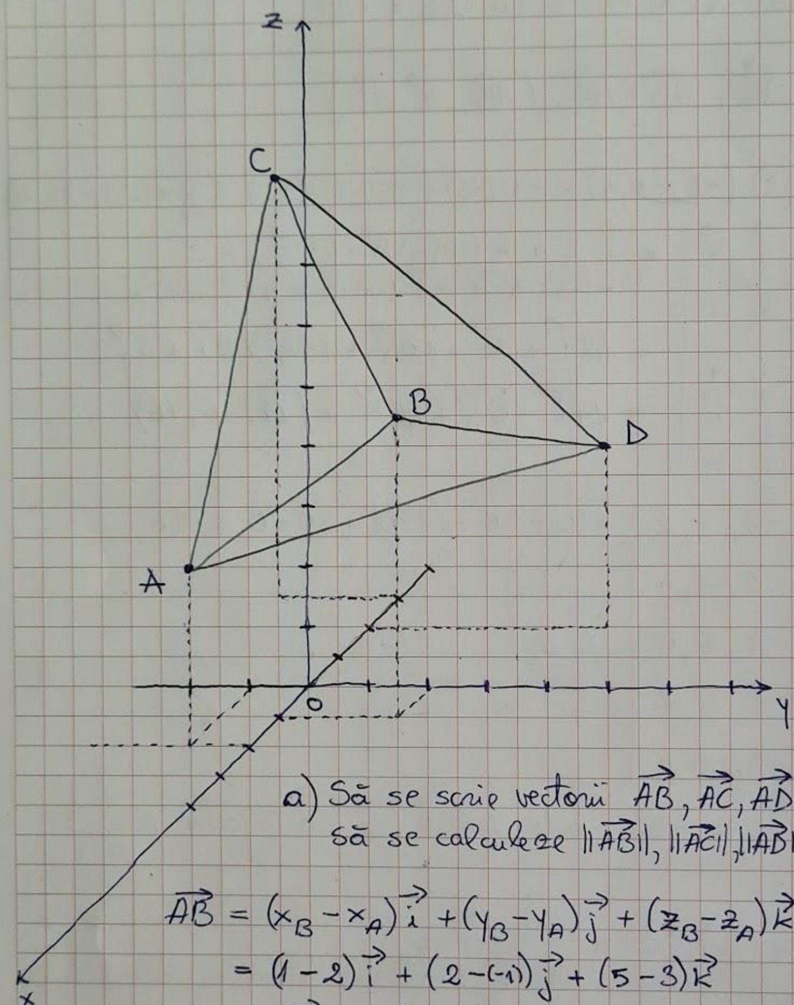
Pagina 1 Tema 1

1 În spațiul (E_3) se consideră reperul ortonormat $R=\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ și punctele $A(2,-1,3)$, $B(1,2,5)$, $C(-3,-2,7)$, și $D(-2,4,3)$



a) Să se scrie vectorii $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$
să se calculeze $\|\vec{AB}\|, \|\vec{AC}\|, \|\vec{AB}\|$

$$\vec{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}$$
$$= (1-2)\vec{i} + (2-(-1))\vec{j} + (5-3)\vec{k}$$
$$= -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k} = (-1, 3, 2)$$

$$\vec{AC} = (x_C - x_A)\vec{i} + (y_C - y_A)\vec{j} + (z_C - z_A)\vec{k}$$
$$= (-3-2)\vec{i} + (-2-(-1))\vec{j} + (7-3)\vec{k}$$
$$= -5\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k} = (-5, -1, 4)$$

$$\vec{AD} = (x_D - x_A)\vec{i} + (y_D - y_A)\vec{j} + (z_D - z_A)\vec{k}$$
$$= (-2-2)\vec{i} + (4-(-1))\vec{j} + (3-3)\vec{k}$$
$$= -4\vec{i} + 5\vec{j} + 0\vec{k} = (-4, 5, 0)$$

Pagina 2 Tema 1

$\|\vec{AB}\| = \|(-1,3,2)\| = \sqrt{(-1)^2+(3)^2+2^2} = \sqrt{14}$

$\|\vec{AC}\| = \|(-5,-1,4)\| = \sqrt{(-5)^2+(-1)^2+4^2} = \sqrt{25+1+16} = \sqrt{42}$

$\|\vec{AD}\| = \|(-4,5,0)\| = \sqrt{(-4)^2+5^2} = \sqrt{16+25} = \sqrt{41}$

b) Calculați $\vec{AB}\cdot\vec{AC}$, $\vec{AB}\times\vec{AC}$, $(\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD})$

$\vec{AB}\cdot\vec{AC} = (-1,3,2)\cdot(-5,-1,4) = -1\cdot(-5) + 3\cdot(-1) + 2\cdot 4 = 5+(-3)+8 = 10$

$$\vec{AB}\times\vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 3 & 2 \\ -5 & -1 & 4 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i}\cdot 3\cdot 4 + (-1)(-1)\vec{k} + (-5)\vec{j}\cdot 2 - (-5)\cdot 3\cdot\vec{k} - \vec{i}\cdot(-1)\cdot 2 - 4\cdot\vec{j}\cdot(-1) =$$

$$= 12\vec{i} + \vec{k} - 10\vec{j} + 15\vec{k} + 2\vec{i} + 4\vec{j}$$

$$= 14\vec{i} - 6\vec{j} + 16\vec{k} = (14,-6,16)$$

$$(\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD}) = \begin{vmatrix} -1, & 3, & 2 \\ -5, & -1, & 4 \\ -4, & 5, & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ -5 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0-50-48-8+20+0 = -86$$

c) Determinați $\cos\sphericalangle \widehat{ABC}$, aria ΔABC, și înălțimea din B în ΔABC

$$\cos\sphericalangle\widehat{ABC} = \cos\sphericalangle(\vec{BA},\vec{BC}) = \frac{\vec{BA}\cdot\vec{BC}}{\|\vec{BA}\|\cdot\|\vec{BC}\|}$$

$\vec{BA} = -\vec{AB} = (1,-3,-2)$

$\vec{BC} = (x_C-x_B)\vec{i} + (y_C-y_B)\vec{j} + (z_C-z_B)\vec{k} = (7-5)\vec{k} + (-2-2)\vec{j} + (-3-1)\vec{i}$

$= (-4,-4,2)$

$\vec{BA}\cdot\vec{BC} = (1,-3,-2)(-4,-4,2) = -4+12-4 = 4$

$\|\vec{BA}\| = \|\vec{AB}\| = \sqrt{14}$

$\|\vec{BC}\| = \sqrt{(-4)^2+(-4)^2+2^2} = \sqrt{16+16+4} = \sqrt{36} = 6$

$$\cos\sphericalangle\widehat{ABC} = \frac{4}{\sqrt{14}\cdot 6} = \frac{2}{3\sqrt{14}} = \frac{2\sqrt{14}}{42} = \frac{\sqrt{14}}{21}$$

$$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AC}\| = \frac{1}{2} \|(14, -6, 16)\| = \frac{1}{2} \sqrt{(14)^2 + (-6)^2 + 16^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{196+36+256} = \frac{1}{2}\sqrt{488} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{122} = \sqrt{122}$$

$$A_{\Delta ABC} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{\|\vec{AC}\| \cdot h_B}{2} \Rightarrow h_B = \frac{2 \cdot A_{\Delta ABC}}{\|\vec{AC}\|} = \frac{2 \cdot \sqrt{122}}{\sqrt{42}} = \frac{\cancel{2}\sqrt{122} \cdot \sqrt{42}}{\cancel{42}_{21}}$$

$$= \frac{\sqrt{5124}}{21} = \frac{2\sqrt{1281}}{21}$$

d) Calculați volumul tetraedrului ABCD și lungimea înălțimii din D în acest tetraedru

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} \left| (\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}) \right|$$

$$(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}) = -86 \Rightarrow V_{ABCD} = \frac{|86|}{6} = \frac{43}{3}$$

$$V_{ABCD} = \frac{A_\Delta \cdot H}{3} = \frac{A_{\Delta ABC} \cdot H_D}{3}$$

$$H_D = \frac{3 \cdot V_{ABCD}}{A_{\Delta ABC}} = \frac{\cancel{3} \cdot \frac{43}{\cancel{3}}}{\sqrt{122}} = \frac{43\sqrt{122}}{122}$$

2. În reperul ortonormat $R = \{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ se consideră punctele $A(2, 4, -1)$, $B(3, -4, 2)$, $C(5, 3, -5)$ și dreapta $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z+4}{-4}$.

Să se determine:

a) Ecuația planului (ABC) și ecuația dreptei (AB);

$$(ABC): \begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \end{vmatrix} = 0$$

$$(ABC): \begin{vmatrix} x - 2 & y - 4 & z + 1 \\ 3 - 2 & -4 - 4 & 2 + 1 \\ 5 - 2 & 3 - 4 & -5 + 1 \end{vmatrix} = 0$$

Pagina 4 Tema 1

$$(ABC): \begin{vmatrix} x-2 & y-4 & z+1 \\ 1 & -8 & 3 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix} = \cancel{x+}(x-2)(-8)(-4) + (-1)(z+1) + 9y - 36$$
$$- (z+1)(-8)(3) - (3)(-1)(x-2) - (-4)(y-4) = 0$$

$$\begin{matrix} x-2 & y-4 & z+1 \\ 1 & -8 & 3 \end{matrix}$$

$$(ABC):\ 32x - 64 - z - 1 + 9y - 36 + 24z + 24 + 3x - 6 + 4y - 16 = 0$$

$$(ABC):\ 35x + 13y + 23z - 99 = 0$$
$$\vec{N}_{ABC} = (35, 13, 23)$$

$$(AB):\ \frac{x-x_A}{x_B-x_A} = \frac{y-y_A}{y_B-y_A} = \frac{z-z_A}{z_B-z_A} \Rightarrow (AB):\ \frac{x-2}{\cancel{3}\,1} = \frac{y-4}{-8} = \frac{z+1}{3}$$

$\vec{AB} = (1, -8, 3)$ vect director al AB

b) Ecuația înălțimii O în tetraedrul OABC

Fie H_o înălțimea în tetraedrul OABC $\Rightarrow \begin{cases} H_o \perp (ABC) \\ O \in H_o \end{cases}$

$$H_o \perp (ABC) \Rightarrow H_o \parallel \vec{N}_{ABC} \Rightarrow \vec{v}_{H_o} \parallel \vec{N}_{ABC} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \vec{v}_{H_o} = (\overset{l}{35}, \overset{m}{13}, \overset{n}{23}) \\ O_{(0,0,0)} \in H_o \end{array}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H_o = \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}\ ;\ H_o:\ \frac{x}{35} = \frac{y}{13} = \frac{z}{23}$$

c) Unghiul dintre fețele (OAB) și (OAC) ale tetraedrului OABC

$$\cos \measuredangle((OAB),(OAC)) = |\cos \measuredangle(\vec{N}_{OAB}, \vec{N}_{OAC})| = \frac{|\vec{N}_{OAB} \cdot \vec{N}_{OAC}|}{\|\vec{N}_{OAB}\| \cdot \|\vec{N}_{OAC}\|}$$

$$(OAB): \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_A-x_0 & y_A-y_0 & z_A-z_0 \\ x_B-x_0 & y_B-y_0 & z_B-z_0 \end{vmatrix} = 0$$

$$(OAB): \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Pagina 5 Tema 1

(OAB): $8x - 8z - 3y - 12z - 4x - 4y = 4x - 7y - 20z$; $\vec{N}_{OAB} = (4, -7, -20)$

$$(OAC): \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_A - x_0 & y_A - y_0 & z_A - z_0 \\ x_C - x_0 & y_C - y_0 & z_C - z_0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (OAC): \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 4 & -1 \\ 5 & 3 & -5 \end{vmatrix}$$

(OAC): $-20x + 6z - 5y - 20z + 8x + 10y = -17x + 5y - 14z$; $\vec{N}_{OAC} = \cancel{(-17, +5, -14)}$
$= (-17, 5, -14)$

$\vec{N}_{OAB} \cdot \vec{N}_{OAC} = (4, -7, -20)(-17, 5, -14) = 4 \cdot (-17) + (-7) \cdot 5 + (-20)(-14)$
$= -68 - 35 + 280 = 177$

$\|\vec{N}_{OAB}\| = \sqrt{4^2 + (-7)^2 + (-20)^2} = \sqrt{16 + 49 + 400} = \sqrt{465}$

$\|\vec{N}_{OAC}\| = \sqrt{(-17)^2 + 5^2 + (-14)^2} = \sqrt{289 + 25 + 196} = \sqrt{510}$

$$\cos \measuredangle((OAB), (OAC)) = \frac{|177|}{\sqrt{465} \cdot \sqrt{510}}$$

d) Punctul de intersecție dintre planul (ABC) și dreapta d.

$(d) \cap (ABC) = \{M\}$

(d): $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-3}{-3} = \dfrac{z+4}{-4}$

(ABC): $35x + 13y + 23z - 99 = 0$

$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-3}{-3} = \dfrac{z+4}{-4} = k \\ 35x + 13y + 23z - 99 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow x + 1 = 2k \quad \Rightarrow x = 2k - 1$

$y - 3 = -3k \qquad y = -3k + 3$

$z + 4 = -4k \qquad z = -4k - 4$

$35(2k-1) + 13(-3k+3) + 23(-4k-4) - 99 = 0$

$\underline{70k} - 35 + \underline{(-39k)} + 39 + \underline{(-92k)} - 92 - 99 = 0$

$-61k - 187 = 0 \Rightarrow k = -\dfrac{187}{61}$

$$\Rightarrow x = 2\cdot\left(-\frac{187}{61}\right) - 1 = \frac{-374-61}{61} = \frac{-435}{61}$$

$$y = -3\cdot\left(-\frac{187}{61}\right) + 3 = \frac{561+61\cdot 3}{61} = \frac{622}{61} = \frac{561+183}{61} = \frac{744}{61}$$

$$z = -4\cdot\left(-\frac{187}{61}\right) - 4 = \frac{748-61}{61} = \frac{687}{61} = \frac{748-244}{61} = \frac{504}{61}$$

$$\Rightarrow \cancel{M}\left(\frac{-435}{61}, \frac{622}{61}, \frac{687}{61}\right) \Rightarrow M\left(-\frac{435}{61}, \frac{744}{61}, \frac{504}{61}\right)$$

3. Se consideră conica

$$\Gamma: x^2 + y^2 - 4xy + 6x - 12y + 8 = 0$$

a) Să se calculeze invarianții conicii și să se specifice genul și natura conicei.

$$\Gamma: f(x,y) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{13}y + a_{33} = 0$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -6 \\ 3 & -6 & 8 \end{pmatrix} \qquad S = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \det D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -6 \\ 3 & -6 & 8 \end{vmatrix} = 8 + 36 + \cancel{36} - 9 - \cancel{36} - 32 = 3$$

$$\delta = \det S = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3$$

$$I = a_{11} + a_{22} = 1 + 1 = 2$$

$\Delta \neq 0 \Rightarrow$ conică nedegenerată
$\delta < -3$
$\Rightarrow$ hiperbolă

Pagina 7 Tema 1

b) Să se determine vectorii și valorile proprii

$\lambda^2 - I\lambda + \delta = 0$

$\Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 4 + 12 = 16 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{2+4}{2} = 3$

$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0$ $\qquad \lambda_2 = \frac{2-4}{2} = -1$

Valori proprii

Pentru $\lambda_1 = 3$ rezolvăm ec. $(S - \lambda_1 I_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\left[\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} -2x - 2y = 0 \\ -2x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow x + y = 0 \Rightarrow y = -x$

$V_{\lambda_1} = (x, y) = (x, -x) = x(1, -1)$ prima comp poz

$V'_{\lambda_1} = (1, -1) \Rightarrow \|V'_{\lambda_1}\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$e'_1 = \frac{1}{\|V'_{\lambda_1}\|} \cdot V'_{\lambda_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1) \Rightarrow e'_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Pentru $\lambda_2 = -1$ rez ec $(S - \lambda_2 I_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\left[\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - (-1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y$

$V_{\lambda_2} = (x, y) = (y, y) = y(1, 1)$ a doua comp

$V'_{\lambda_2} = (1, 1) \Rightarrow \|V'_{\lambda_2}\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$e'_2 = \frac{1}{\|V'_{\lambda_2}\|} \cdot V_{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1) \Rightarrow e'_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Pagina 8 Tema 1

Fie R' matricea vectorilor e_1', e_2' scriși pe coloană

$$\Rightarrow R' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} \\ -\frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} \end{pmatrix} \qquad \det R' = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} \\ \frac{-1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow R' \text{ matrice de rotație}$$

c) Să se aducă la forma canonică specificând rotația și translația

Rotația $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} \\ \frac{-1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt2} x' + \frac{1}{\sqrt2} y' \\ y = \frac{-1}{\sqrt2} x' + \frac{1}{\sqrt2} y' \end{cases}$$

Înlocuim în conică. În loc de $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy = (x^2 + y^2 - 4xy)$

obținem $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = 3x'^2 + y'^2$

$$\Rightarrow \Gamma': 3x'^2 + y'^2 + 6\left(\frac{1}{\sqrt2}x' + \frac{1}{\sqrt2}y'\right) - 12\left(\frac{-1}{\sqrt2}x' + \frac{1}{\sqrt2}y'\right) + 8 = 0$$

$$\Gamma': 3x'^2 - y'^2 + \frac{6}{\sqrt2}x' + \frac{6}{\sqrt2}y' + \frac{12}{\sqrt2}x' - \frac{12}{\sqrt2}y' + 8 = 0$$

$$\Gamma': \underline{3x'^2} - \underline{y'^2} + \underline{\frac{18}{\sqrt2}x'} - \underline{\underline{\frac{6}{\sqrt2}y'}} + 8 = 0$$

$$\Gamma': 3x'^2 + \frac{18}{\sqrt2}x' - y'^2 - \frac{6}{\sqrt2}y' + 8 = 0$$

$$3\left(x'^2 + \frac{\cancel{6}^{3}\sqrt2}{2\cdot\cancel{3}}\right)^2 + \frac{(-\cancel{6}^{3}\sqrt2)^2}{4\cdot\cancel{3}} - \left(y' + \frac{3\sqrt2}{2}\right)^2 - \left(\frac{3\sqrt2}{4}\right)^2 + 8 = \cancel{3}\left(\cancel{x'^2} + \frac{3\sqrt2}{\cancel{2}}\right)^2 - \left(y' + \frac{3\sqrt2}{\cancel{2}}\right)^2 + \cancel{+\frac{18}{4}} + \cancel{8}$$

$$= 3\left(x' + \frac{3\sqrt2}{2}\right)^2 + \left(y' + \frac{3\sqrt2}{2}\right)^2 - 1 = 0$$

Pagina 9 Tema 1

Translatia:

$$\begin{cases} x = x' + \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ y = y' + \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad \begin{matrix} x=0 \Rightarrow x' = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \\ y=0 \Rightarrow y' = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \end{matrix} \Rightarrow O'\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right) \text{ în } O'x'y'$$

$\Rightarrow \Gamma'': 3x^2 - y^2 + 1 = 0$ Hiperbolă

d) Să se reprezinte grafic

Rotatie $e_1' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ Translatie $O'\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

$e_2' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$