| Ex 3 de la pagina 18, paragraf 1.3

Fie funcțiile

$f : A \to B$

$g : B \to C$

Demonstrați că dacă ambele funcții sunt injective, atunci și $g \circ f$ este injectivă.

Arătați că dacă ambele funcții sunt surjective, atunci și $g \circ f$ este surjectivă.

Rezolvare:

$f : A \to B,\ g : B \to C \Rightarrow g \circ f : A \to C$

Știm:

$\left| \begin{array}{l} f \text{ injectivă} : f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2 \\ g \text{ injectivă} : g(b_1) = g(b_2) \Rightarrow b_1 = b_2 \end{array} \right.$

Demonstrăm:

| $g \circ f$ este injectivă, adică:
| dacă $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$
| să rezulte $x_1 = x_2$

Demonstrație:

$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ și g injectivă

$\Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ și f injectivă

$\Rightarrow x_1 = x_2$

$\Rightarrow g \circ f$ injectivă

Știm:

| f surjectivă, adică pentru $b \in B, (\exists)\ a \in A$ a.î. $f(a) = b$
| g surjectivă, adică pentru $c \in C, (\exists)\ b \in B$ a.î. $g(b) = c$

Demonstrăm:

g∘f este surjectivă, adică:
pentru $c \in C$, $(\exists)$ $a \in A$ a. î. $(g \circ f)(a) = c$

Demonstrație

Fie $c \in C$ și $g: B \to C$ surjectivă $\Rightarrow (\exists)$ $b \in B$ a. î. $g(b) = c$

Deoarece f surjectivă pentru $b \in B$, $(\exists)$ $a \in A$ a. î. $f(a) = b$

$g(b) = c$ și $f(a) = b \Rightarrow$

$\Rightarrow g(f(a)) = c$

$\Rightarrow (g \circ f)(a) = c$

$\Rightarrow g \circ f$ surjectivă

Ex 2 de la pagina 42, paragraf 3.3

Fie I un alfabet și $p, q, r \in L(I)$ astfel încat

$pq^3 = r^3p$

$l(p) = 37$

$l(r) = 3$

Arătați că $pq^n = r^np$ pentru orice număr natural n.

Rezolvare:

Etapa 1 (etapa verificării)

$n = 0$

$pq^0 = p \cdot 1 = p$ și $r^0p = 1 \cdot p = p$

$\Rightarrow pq^0 = r^0p$

$n = 1$

Trebuie să arătăm:

$pq^1 = r^1p$

Stim

$$pq^3 = p \cdot q \cdot q \cdot q$$
$$r^3 p = r \cdot r \cdot r \cdot p$$
$$pq^3 = r^3 p \Rightarrow \ell(pq^3) = \ell(r^3 p)$$
$$\cancel{\ell(p)} + 3 \cdot \ell(q) = 3 \cdot \ell(r) + \cancel{\ell(p)}$$
$$\Leftrightarrow \cancel{3} \cdot \ell(q) = \cancel{3} \cdot \ell(r) \ \Big|\ :3$$
$$\Leftrightarrow \ell(q) = \ell(r)$$

Stim

$$\ell(q) = \ell(r) \text{ și } \ell(r) = 3 \Rightarrow \ell(q) = 3$$

Cum

$$\ell(r) = 3 \Rightarrow \ell(r^3) = 9$$

Stim

$$pq^3 = r^3 p$$
$$\ell(p) = 37$$
$$\ell(r^3) = 9 < 37$$
$$pq^3 = r^3 p \ \Big|\ \cdot q^3$$
$$\Rightarrow pq^6 = r^3 p q^3$$
$$\Rightarrow pq^6 = r^3 r^3 p$$
$$\Rightarrow pq^6 = r^6 p \ \Big|\ \cdot q^6$$
$$\Rightarrow pq^{12} = r^6 p q^6$$
$$\Rightarrow pq^{12} = r^{12} p \ \Big|\ \cdot q^3$$
$$\Rightarrow pq^{15} = r^{12} p q^3$$
$$\Rightarrow pq^{15} = r^{15} p$$
$$\ell(p) = 37$$

$\ell(r^{15}) = 45 > 37 \Rightarrow p$ este un prefix de lungime 37 al cuvântului r^{15}, adică p este format din primele 37 de $\rightarrow$ page 5

page 3
$\rightarrow$ simboluri din cele 45 ale lui r^{15}.

$\ell(r) = 3 \Rightarrow r = a_1 a_2 a_3 \Rightarrow p = r^{12} a_1$ și $pq^{15} = r^{15} p$

$\Rightarrow pq^{15} = r^{15} r^{12} a_1$

$\Rightarrow r^{12} q q^{15} = r^{15} r^{12} a_1$

$\Rightarrow a_1 q^{15} = r^{3} r^{12} a_1$

$\Rightarrow a_1 q^{15} = r^{15} a_1$

$\Rightarrow a_1 q^{15} = a_1 a_2 a_3 (a_1 a_2 a_3)^{14} a_1$

$\Rightarrow q^{15} = a_2 a_3 (a_1 a_2 a_3)^{14} a_1$

$\Rightarrow q^{15} = (a_2 a_3 a_1)^{15}$

$\Rightarrow q = a_2 a_3 a_1$

Avem:

$p = r^{12} a_1 \mid \cdot q$

$\Rightarrow pq = r^{12} a_1 q$

$\Rightarrow pq = r^{12} a_1 a_2 a_3 a_1$

$\Rightarrow pq = (a_1 a_2 a_3)^{12} a_1 a_2 a_3 a_1$

$\Rightarrow pq = (a_1 a_2 a_3)^{13} a_1 = r^{13} a_1$

$\Rightarrow pq = r r^{12} a_1$

$\Rightarrow pq = rp$

Etapa 2 (etapa demonstrației)

Presupunem $pq^{k} = r^{k} p$ este adevarată

Demonstram $pq^{(k+1)} = r^{(k+1)} p$ este adevarată

Știm

$pq^{k} = r^{k} p \mid \cdot q$

$\Rightarrow pq^{(k+1)} = r^{k} pq$, dar $pq = rp$

$\Rightarrow pq^{(k+1)} = r^{k} r p$

$\Rightarrow pq^{(k+1)} = r^{(k+1)} p$, ceea ce trebuia demonstrat

page 4 $\longrightarrow$

page 4

$\longrightarrow$ Presupunerea făcută este adevărată $(\forall)\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow pq^n = r^n p \ (\forall)\, n \in \mathbb{N}$

| Ex 2 de la pagina 70, paragraf 4.5

Demonstrați că $f: \mathbb{Z}_{15} \to \mathbb{Z}_{20}$ definita prin

$f(\hat{k}) = [4 \cdot k]$ pentru orice $\hat{k} \in \mathbb{Z}_{15}$, unde am notat cu $[x]$

clasa de resturi modulo 20 a întregului x.

a) Arătați că f este corect definită, adică nu depinde de reprezentanți

b) Arătați că f este morfism între grupurile $(\mathbb{Z}_{15}, +)$ și $(\mathbb{Z}_{20}, +)$

c) Determinați $Ker(f)$ și $Im(f)$

d.1) Câte soluții are ecuația?:

$f(x) = [7]$

d.2) Dar ecuatia?:

$f(x) = [12]$

d.3) De ce?

Rezolvare:

Fie $f: \mathbb{Z}_{15} \to \mathbb{Z}_{20}$ definită prin $f(\hat{k}) = [4 \cdot k]\ (\forall)\ \hat{k} \in \mathbb{Z}_{15}$

a) f este corect definită $\Leftrightarrow (\forall)\ x = y$ în $\mathbb{Z}_{15}$ avem $f(x) = f(y)$ în $\mathbb{Z}_{20}$

$[4x] = [4y] \quad x = y$ în $\mathbb{Z}_{15} \to [4x] = [4y]$ în $\mathbb{Z}_{20}$

$15 \mid (x-y) \to 20 \mid (4x - 4y) = 20 \mid 4(x-y)$

$x - y = 15k, (\forall)\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow 20 \mid 4 \cdot 15k$

$\Rightarrow 20 \mid 4 \cdot 5 \cdot 3k$

$\Rightarrow \cancel{20} \mid \cancel{20} \cdot 3k$

$\Rightarrow 1 \mid 3k$

$\Rightarrow 1$ este divizor al lui $3k$ adevărat $\Rightarrow f$ este corect definită

page 5 $\longrightarrow$

page 5 →

b) Demonstrați că f este morfism între grupurile $(\mathbb{Z}_{15},+)$ și $(\mathbb{Z}_{20},+)$

$f:(\mathbb{Z}_{15},+)\to(\mathbb{Z}_{20},+)$ este morfism de grupuri dacă

$f(\hat{x}+\hat{y}) = f(\hat{x})+f(\hat{y}),\ (\forall)\ x,y\in\mathbb{Z}_{15}$

Fie $x,y\in\mathbb{Z}_{15}$

$$
\begin{aligned}
f(\hat{x}+\hat{y}) &= f(\hat{x})+f(\hat{y})\\
&= f(\widehat{x+y})\\
&= [4(x+y)]\\
&= [4x+4y]\\
&= [4x]+[4y]\\
&= f(\hat{x})+f(\hat{y})
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow f$ este morfism de grupuri

---

c) Determinați $Ker(f)$ și $Im(f)$

$f:(G,\cdot)\to(G',\times)$

$Ker(f)=\{x\in G \mid f(x)=e_{G'}\}$; $e \leftarrow$ element neutru din G'

Arem:

$f:(\mathbb{Z}_{15},+)\to(\mathbb{Z}_{20},+)$

$$
\begin{aligned}
Ker(f) &= \{\hat{x}\in\mathbb{Z}_{15} \mid f(\hat{x})=[\hat{0}] \text{ în } \mathbb{Z}_{20}\}\\
&= \{\hat{x}\in\mathbb{Z}_{15} \mid [4x]=[\hat{0}]\}\\
&= \{\hat{x}\in\mathbb{Z}_{15} \mid 20 \mid 4x\}\\
&= \{\hat{x}\in\mathbb{Z}_{15} \mid \cancel{4}\cdot 5 \mid \cancel{4}\cdot x\}\\
&= \{\hat{x}\in\mathbb{Z}_{15} \mid 5\mid x\}
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow Ker(f) = \{\hat{0},\hat{5},\hat{10}\}$

$Im(f) = \{\hat{y}\in\mathbb{Z}_{20} \mid (\exists)\ \hat{x}\in\mathbb{Z}_{15} \text{ a.î. } f(\hat{x})=\hat{y}\}$

$f(x)=\hat{y}$

$\Rightarrow [4x]=\hat{0} \Rightarrow 5\mid\hat{x}$; $x \leftarrow$ multiplii de 5

page 6 →

page 6 →

$$x = 5k \Rightarrow f(x) = f(5k) = [4\cdot 5k] = [20k] = [\hat{0}]$$

$$x = 5(k+1) \Rightarrow f(x) = f(5(k+1)) = [4\cdot(5(k+1))] = [20k+4] = [\hat{4}]$$

$$x = 5(k+2) \Rightarrow f(x) = f(5(k+2)) = [4\cdot(5(k+2))] = [20k+8] = [\hat{8}]$$

$$x = 5(k+3) \Rightarrow f(x) = f(5(k+3)) = [4\cdot(5(k+3))] = [20k+12] = [\hat{12}]$$

$$x = 5(k+4) \Rightarrow f(x) = f(5(k+4)) = [4\cdot(5(k+4))] = [20k+16] = [\hat{16}]$$

$$\Rightarrow Im(f) = \{[\hat{0}], [\hat{4}], [\hat{8}], [\hat{12}], [\hat{16}]\}$$

---

d.1) Câte soluții are ecuatia?:

$$f(x) = [7]$$

$f(x) = [7]$ nu are soluții pentru că $[7] \notin Im(f)$

d.2) Dar ecuația?:

$$f(x) = [12]$$

$f(x) = [12] \in Im(f) \Rightarrow S = \hat{x}_0 + Ker(f)$ soluție particulară

Nr. de soluții este cand $Ker(f) = 3$

Ex 4 de la pagina 102, paragraf 6.5

Determinați $\sigma^{2017}(5)$ pentru:

a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 6 & 7 & 1 & 2 & 5 & 9 & 3 & 8 \end{pmatrix}$;

b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 9 & 5 & 8 & 7 & 2 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$;

Rezolvare:

a) $\sigma = \underbrace{(1,4)}_{\sigma_1}\underbrace{(2,6,5)}_{\sigma_2}\underbrace{(3,7,9,8)}_{\sigma_3}$

$$\sigma^{2017} = (1,4)^{2017}(2,6,5)^{2017}(3,7,9,8)^{2017}$$

page 7 $= (1,4)^{2\cdot 1008+1} (2,6,5)^{3\cdot 672+1} (3,7,9,8)^{4\cdot 504+1}$

$= (1,4)(2,6,5)(3,7,9,8)$

$\Rightarrow \sigma^{2017}(5) = 2$

$o(\sigma_1) = 2$

$o(\sigma_2) = 3$

$o(\sigma_4) = 4$

$o(\sigma) = [2,3,4] = 12$

b) $\sigma = \underbrace{(1,3,5,7)}_{\sigma_1}\underbrace{(2,9,4,8,6)}_{\sigma_2}$

$\sigma^{2017} = (1,3,5,7)^{2017} (2,9,4,8,6)^{2017}$

$= (1,3,5,7)^{4\cdot 504+1} (2,9,4,8,6)^{5\cdot 403+2}$

$= (1,3,5,7)(2,9,4,8,6)^2$

$= (1,3,5,7)(2,4,6,9,8)$

$\Rightarrow \sigma^{2017}(5) = 7$

$o(\sigma_1) = 4$

$o(\sigma_2) = 5$

$o(\sigma) = [4,5] = 20$