Pagina 1 Tema 2

1. În spațiul (E_3) se consideră reperul ortonormat $R = \{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ și punctele $A(3,-2,1)$, $B(1,3,2)$, $C(-1,-3,4)$ și $D(-2,2,5)$

a) Să se scrie vectorii $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ și să se calculeze $\|\vec{AB}\|, \|\vec{AC}\|, \|\vec{AD}\|$

$\vec{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k} = (1-3)\vec{i} + (3+2)\vec{j} + (2-1)\vec{k} = (-2, 5, 1)$

$\vec{AC} = (x_C - x_A)\vec{i} + (y_C - y_A)\vec{j} + (z_C - z_A)\vec{k} = (-1-3)\vec{i} + (-3+2)\vec{j} + (4-1)\vec{k} = (-4, -1, 3)$

$\vec{AD} = (x_D - x_A)\vec{i} + (y_D - y_A)\vec{j} + (z_D - z_A)\vec{k} = (-2-3)\vec{i} + (2+2)\vec{j} + (5-1)\vec{k} = (-5, 4, 4)$

$\|\vec{AB}\| = \sqrt{(-2)^2 + 5^2 + 1^2} = \sqrt{4+25+1} = \sqrt{30}$

$\|\vec{AC}\| = \sqrt{(-4)^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{16+1+9} = \sqrt{26}$

$\|\vec{AD}\| = \sqrt{(-5)^2 + 4^2 + 4^2} = \sqrt{25+16+16} = \sqrt{57}$

b) Calculați $\vec{AB}\cdot\vec{AC}$, $\vec{AB}\times\vec{AC}$, $(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})$

$\vec{AB}\cdot\vec{AC} = (-2,5,1)(-4,-1,3) = 8-5+3 = 6$

$$\vec{AB}\times\vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 5 & 1 \\ -4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 15\vec{i} + 2\vec{k} - 4\vec{j} + 20\vec{k} + \vec{i} + 6\vec{j} = 16\vec{i} + 2\vec{j} + 22\vec{k} = (16, 2, 22)$$

$$(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}) = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 1 \\ -4 & -1 & 3 \\ -5 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 8-16-75-5+24+80 = 16$$

c) Determinați $\cos \widehat{ABC}$, aria ΔABC, și înălțimea din B în ΔABC

$\cos \widehat{ABC} = \dfrac{\vec{BA}\cdot\vec{BC}}{\|\vec{BA}\|\cdot\|\vec{BC}\|}$; $\vec{BA} = -\vec{AB} = (2,-5,-1)$; $\|\vec{BA}\| = \|\vec{AB}\| = \sqrt{30}$

$\vec{BC} = (x_C - x_B)\vec{i} + (y_C - y_B)\vec{j} + (z_C - z_B)\vec{k} = (-1-1)\vec{i} + (-3-3)\vec{j} + (4-2)\vec{k} = (-2, -6, 2)$

$\vec{BA}\cdot\vec{BC} = (2,-5,-1)(-2,-6,2) = -4+30-2 = 24$

$\|\vec{BC}\| = \sqrt{(-2)^2 + (-6)^2 + 2^2} = \sqrt{4+36+4} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{24}{\sqrt{30}\cdot 2\sqrt{11}} = \frac{12\sqrt{330}}{330} = \frac{2\sqrt{330}}{55}$$

aria $\Delta ABC = \dfrac{1}{2}\|\vec{AB}\times\vec{AC}\| = \dfrac{1}{2}\sqrt{16^2+2^2+22^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{256+4+484} = \dfrac{1}{2}\sqrt{744}$

$= \dfrac{2\sqrt{186}}{2} = \sqrt{186}$

Pagina 2 Tema 2

$$A_{\Delta} = \frac{b\cdot h}{2} \Rightarrow A_{\Delta ABC} = \frac{\|\vec{AC}\|\cdot H_B}{2} \Rightarrow H_B = \frac{2\cdot A_{\Delta ABC}}{\|\vec{AC}\|} = \frac{2\cdot\sqrt{186}}{\sqrt{26}} = \frac{2\sqrt{186}\sqrt{26}}{26} =$$

$$= \frac{\sqrt{186}\sqrt{26}}{13}$$

d) Calculați volumul tetraedrului ABCD și lungimea înălțimii din D în acest tetraedru

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|(\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD})\right| = \frac{|16|}{6} = \frac{8}{3}$$

$$V_{ABCD} = \frac{A_{\Delta ABC}\cdot H_D}{3} \Rightarrow H_D = \frac{3\cdot V_{ABCD}}{A_{\Delta ABC}} = \frac{\cancel{3}\cdot\frac{8}{\cancel{3}}}{\frac{\sqrt{186}\sqrt{26}}{13}} = \frac{8\cdot 13}{\sqrt{186}\sqrt{26}} = \frac{104}{\sqrt{4836}} = \frac{104}{2\sqrt{3}\sqrt{13}\sqrt{31}} =$$

$$= \frac{52}{\sqrt{3}\sqrt{13}\sqrt{31}} \Rightarrow H_D = \frac{\cancel{3}\cdot\frac{8}{\cancel{3}}}{\sqrt{186}} = \frac{8\sqrt{186}}{186} = \frac{4\sqrt{186}}{93}$$

2. În reperul ortonormat $R=\{O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ se consideră punctele $A(-2,3,-3)$, $B(3,-1,-2)$, $C(4,1,2)$ și dreapta $d: \frac{x+2}{3} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-3}{-5}$.

Să se determine:

a) ecuația planului (ABC) și ecuația dreptei AB;

$$(ABC): \begin{vmatrix} x-x_A & y-y_A & z-z_A \\ x_B-x_A & y_B-y_A & z_B-z_A \\ x_C-x_A & y_C-y_A & z_C-z_A \end{vmatrix} = 0 \qquad (ABC): \begin{vmatrix} x+2 & y-3 & z+3 \\ 5 & -4 & 1 \\ 6 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$(ABC): (x+2)(-4)(5) + 5(-2)(z+3) + 6(y-3) - (z+3)(-4)(6) - (-2)(x+2) - 5(y-3)(5) = 0$

$(ABC): -20x - 40 - 10z - 30 + 6y - 18 + 18z + 24z + 72 + 2x + 4 - 25y + 75 = 0$

$(ABC): -18x - 19y + 14z + 63 = 0$

$\vec{N}_{ABC} = (-18,-19,14)$

$$(AB): \frac{x-x_A}{x_B-x_A} = \frac{y-y_A}{y_B-y_A} = \frac{z-z_A}{z_B-z_A} \Rightarrow (AB): \frac{x+2}{5} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+3}{1}; \ \vec{AB} = (5,-4,1)$$

b) ecuația înălțimii din O în tetraedrul OABC

Fie H_O înălțimea în tetraedrul OABC

$$\Rightarrow \begin{cases} H_O \perp (ABC) \\ O \in H_O \end{cases}$$

$H_O \perp (ABC) \Rightarrow H_O \parallel \vec{N}_{ABC}$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \vec{v}_{H_O} \parallel \vec{N}_{ABC} \Rightarrow \vec{v}_{H_O} = (\underset{l}{-18}, \underset{m}{-19}, \underset{n}{14}) \\ O_{(0,0,0)} \in H_O \end{array}\right| \Rightarrow H_O = \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$$

$$H_O : \frac{x}{-18} = \frac{y}{-19} = \frac{z}{14}.$$

c) unghiul dintre fețele (OAB) și (OAC) ale tetraedrului OABC

$$(OAB): \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_A-x_0 & y_A-y_0 & z_A-z_0 \\ x_B-x_0 & y_B-y_0 & z_B-z_0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (OAB): \begin{vmatrix} x & y & z \\ -2 & 3 & -3 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$(OAB): -6x + 2z - 9y - 9z - 3x - 4y = 0$

$(OAB): -9x - 13y - 7z = 0$

$\vec{N}_{(OAB)} = (-9, -13, -7)$

$$(OAC): \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_A-x_0 & y_A-y_0 & z_A-z_0 \\ x_C-x_0 & y_C-y_0 & z_C-z_0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (OAC): \begin{vmatrix} x & y & z \\ -2 & 3 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$(OAC): 6x - 2z - 12y - 12z + 3x + 4y = 0$

$(OAC): 9x - 8y - 14z = 0$

$\vec{N}_{(OAC)} = (9, -8, -14)$

$$\cos\sphericalangle((OAB),(OAC)) = \left|\cos\sphericalangle(\vec{N}_{OAB}, \vec{N}_{OAC})\right| = \frac{|\vec{N}_{OAB} \cdot \vec{N}_{OAC}|}{\|\vec{N}_{OAB}\| \cdot \|\vec{N}_{OAC}\|}$$

$\vec{N}_{OAB} \cdot \vec{N}_{OAC} = (-9,-13,-7)(9,-8,-14) = -81 + 104 + 98 = 121$

$\|\vec{N}_{OAB}\| = \sqrt{(-9)^2 + (-13)^2 + (-7)^2} = \sqrt{81 + 169 + 49} = \sqrt{299}$

$\|\vec{N}_{OAC}\| = \sqrt{9^2 + (-8)^2 + (-14)^2} = \sqrt{81 + 64 + 196} = \sqrt{341}$

Pagina 4 Tema 2

$$\cos \measuredangle((OAB),(OAC)) = \frac{121}{\sqrt{299}\sqrt{341}}$$

d) punctul de intersecție dintre planul (ABC) și dreapta d

$(d) \cap (ABC) = \{M\}$

$(d): \frac{x+2}{3} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-3}{-5}$

$(ABC): -18x - 19y + 14z + 63 = 0$

$$\begin{cases} \frac{x+2}{3} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-3}{-5} = k \\ -18x - 19y + 14z + 63 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x+2 = 3k \\ y-4 = -2k \\ z-3 = -5k \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 3k-2 \\ y = -2k+4 \\ z = -5k+3 \end{array}$$

$-18(3k-2) - 19(-2k+4) + 14(-5k+3) + 63 = 0$

$-54k + 36 + 38k - 76 + (-70k) + 42 + 63 = 0$

$-86k + 65 = 0 \Rightarrow k = \frac{65}{86} \Rightarrow x = 3\cdot\frac{65}{86} - 2 \Rightarrow x = \frac{195-172}{86} = \frac{23}{86}$

$y = -2\cdot\frac{65}{86} + 4 \Rightarrow y = \frac{-130+344}{86} = \frac{214}{86}$

$z = -5\cdot\frac{65}{86} + 3 \Rightarrow z = \frac{-325+258}{86} = -\frac{67}{86}$

$\Rightarrow M\left(\frac{23}{86}, \frac{214}{86}, -\frac{67}{86}\right)$

3. Se consideră conica:

$\Gamma: x^2 - 4y^2 - 12xy + 6x - 12 + 8 = 0$

a) Să se calculeze invarianții conicii și să se specifice genul și natura conicei

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 3 \\ -6 & -4 & -6 \\ 3 & -6 & 8 \end{pmatrix} \qquad S = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \det D = \begin{vmatrix} 1 & -6 & 3 \\ -6 & -4 & -6 \\ 3 & -6 & 8 \end{vmatrix} = -32 + 108 + 108 + 36 - 36 - 288 = -104$$

Pagina 5 Tema 2

$\delta = \det S = \begin{vmatrix} 1 & -6 \\ -6 & -4 \end{vmatrix} = -4 - 36 = -40$

$I = a_{11} + a_{22} = 1 - 4 = -3$

$\Delta \neq 0 \Rightarrow$ conică nedegenerata

$\delta < 0$

$\Rightarrow$ Hiperbolă

b) Să se determine vectorii și valorile proprii

$\lambda^2 - I\lambda + \delta = 0$

$\Rightarrow \lambda^2 + 3\lambda - 40 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 9 + 160 = 169 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \lambda_1 = \dfrac{-3+13}{2} = 5$

$\lambda_2 = \dfrac{-3-13}{2} = -8$

Valori proprii

Pentru $\lambda_1 = 5$ rez ec $(S - \lambda_1 I_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -6 & -4 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & -6 \\ -6 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} -4x - 6y = 0 & \mid : -2 \\ -6x - 9y = 0 & \mid : -3 \end{cases} \Rightarrow y = -\dfrac{2x}{3}$$

$V_{\lambda_1} = (x, y) = \left(x, -\dfrac{2x}{3}\right) \Rightarrow x\left(1, -\dfrac{2}{3}\right)$ prima comp poz

$V'_{\lambda_1} = \left(1, -\dfrac{2}{3}\right) \Rightarrow \|V'_{\lambda_1}\| = \sqrt{1^2 + \left(\dfrac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{1 + \dfrac{4}{9}} = \sqrt{\dfrac{13}{9}}$

$$e'_1 = \frac{1}{\|V'_{\lambda_1}\|} \cdot V_{\lambda_1} = \frac{1}{\sqrt{\frac{13}{9}}} \cdot \left(1, -\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{13}{9}}}, -\frac{2}{3\sqrt{\frac{13}{9}}}\right)$$

$$= \left(\frac{3}{\sqrt{13}}, -\frac{2}{\sqrt{13}}\right)$$

Pagina 6 Tema 2

Pentru $\lambda_2 = -8$ ~~re~~ rez ec $(S-\lambda_2 I_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -6 & -4 \end{pmatrix} + 8\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 9 & -6 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} 9x - 6y = 0 \mid :3 \\ -6x + 4y = 0 \mid :2 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{2y}{3}$$

$V_{\lambda_2} = (x, y) = \left(\frac{2y}{3}, y\right) \Rightarrow y\left(\frac{2}{3}, 1\right)$ a doua comp poz

$$V'_{\lambda_2} = \left(\frac{2}{3}, 1\right) \Rightarrow \|V'_{\lambda_2}\| = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{13}{9}}$$

$$e'_2 = \frac{1}{\|V'_{\lambda_2}\|} \cdot V_{\lambda_2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{13}{9}}} \cdot \left(\frac{2}{3}, 1\right) \Rightarrow e_2 = \left(\frac{2}{3\sqrt{\frac{13}{9}}}, \frac{1}{\sqrt{\frac{13}{9}}}\right) = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right)$$

Fie R' matricea vectorilor e'_1, e'_2 scriși pe col

$$\Rightarrow R' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\frac{13}{9}}} & \frac{2}{3\sqrt{\frac{13}{9}}} \\ -\frac{2}{3\sqrt{\frac{13}{9}}} & \frac{1}{\sqrt{\frac{13}{9}}} \end{pmatrix} \Rightarrow \det R' = \frac{1}{\frac{13}{9}} + \frac{4}{9 \cdot \frac{13}{9}} = \frac{9}{13} + \frac{4}{13} = 1$$

$\Rightarrow R'$ matrice de rotație

c) Să se aducă la forma canonică specificând rotația și translația

Rotația $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\frac{13}{9}}} & \frac{2}{3\sqrt{\frac{13}{9}}} \\ -\frac{2}{3\sqrt{\frac{13}{9}}} & \frac{1}{\sqrt{\frac{13}{9}}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{\frac{13}{9}}} x' + \frac{2}{3\sqrt{\frac{13}{9}}} y' \\ y = -\frac{2}{3\sqrt{\frac{13}{9}}} x' + \frac{1}{\sqrt{\frac{13}{9}}} y' \end{cases}$$

Pagina 7 Tema 2

Dacă $\delta \neq 0$ forma canonică a conicei $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0$

$5x^2 - 8y^2 + \frac{-104}{-40} = 0$; $5x^2 - 8y^2 + \frac{13}{5} = 0$; $x^2 - \frac{8}{5}y^2 + 13 = 0$

Înlocuim în canonică

În loc de $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy = (x^2 - 4y^2 - 12xy)$

obținem $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = 5x'^2 - 8y'^2$

$$\Rightarrow \Gamma': 5x'^2 - 8y'^2 + 6\left(\frac{3}{\sqrt{13}}x' + \frac{2}{\sqrt{13}}y'\right) - 12\left(-\frac{2}{\sqrt{13}}x' + \frac{3}{\sqrt{13}}y'\right) + 8 = 0$$

$$\Gamma': 5x'^2 - 8y'^2 + \frac{18}{\sqrt{13}}x' + \frac{12}{\sqrt{13}}y' + \frac{24}{\sqrt{13}}x' - \frac{36}{\sqrt{13}}y' + 8 = 0$$

$$\Gamma': \underline{5x'^2} - \underline{\underline{8y'^2}} + \underline{\frac{42}{\sqrt{13}}x'} - \underline{\underline{\frac{24}{\sqrt{13}}y'}} + 8 = 0$$

$$\Gamma': 5\left(x' + \frac{\frac{42}{\sqrt{13}}}{10}\right)^2 + \frac{\left(-\frac{42}{\sqrt{13}}\right)^2}{20} - 8\left(y' + \frac{3}{2\sqrt{13}}\right)^2 - \frac{18}{13} + 8 = 0$$

$$\Gamma': 5\left(x' + \frac{21}{5\sqrt{13}}\right)^2 + \frac{1764}{260} - 8\left(y' + \frac{3}{2\sqrt{13}}\right)^2 - {}^{20)}\frac{18}{13} + {}^{260)}8 = 0$$

$$\Gamma': 5\left(x' + \frac{21}{5\sqrt{13}}\right)^2 - 8\left(y' + \frac{3}{2\sqrt{13}}\right)^2 + \frac{1764 - 360 + 2080}{260} = 0$$

$$\Gamma': 5\left(x' + \frac{21}{5\sqrt{13}}\right)^2 - 8\left(y' + \frac{3}{2\sqrt{13}}\right)^2 + \frac{67}{5} = 0$$

Translația

$$\begin{cases} x = x' + \frac{21}{5\sqrt{13}} \\ y = y' + \frac{3}{2\sqrt{13}} \end{cases}$$

$\Rightarrow \Gamma'': 5x^2 - \frac{8}{5}y^2 + 13 = 0$ Hiperbola

Pagina 8 Tema 2

d) Să se reprezinte grafic

Rot: $e_1' = \left(\frac{3}{\sqrt{13}}, -\frac{2}{\sqrt{13}}\right)$

$e_2' = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right)$

Trans: $x = 0 \Rightarrow x' = -\frac{21}{5\sqrt{13}}$

$y = 0 \Rightarrow y' = -\frac{3}{2\sqrt{13}}$

$\Rightarrow O'\left(-\frac{21}{5\sqrt{13}}, -\frac{3}{2\sqrt{13}}\right)$, în $O'x'y'$