Ex 1-2, paragraf 3.5, pagina 156

Arătați că următoarele submulțimi ale spațiului vectorial $\mathbb{R}^3$ sunt subspații vectoriale:

$$V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0\}$$

$$U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 + x_3 = 0\}$$

Fie $x_2 = \alpha$ și $x_3 = \beta$ $\quad V: x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0$

$$\Rightarrow S_1 = \{(2\alpha + 3\beta, \alpha, \beta), \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{\underbrace{(2,1,0)}_{v_1}, \underbrace{(3,0,1)}_{v_2}\} \leq \mathbb{R}^3$$

S_1 are 2 generatori

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \text{ rang } A = 2 : \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3$$

Fie $x_1 = \alpha$ și $x_2 = \beta$ $\quad U: x_2 + x_3 = 0$

$$\Rightarrow S_2 = \{(\alpha, \beta, -\beta), \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{\underbrace{(1,0,0)}_{u_1}, \underbrace{(0,1,-1)}_{u_2}\} \leq \mathbb{R}^3$$

S_2 are 2 generatori

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \text{ rang } B = 2 : \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$S_1 \cap S_2 : \begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \text{ rang } C = 2$$

un minor principal fiind $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

Necunoscutele principale: x_1, x_2 ; Necunoscuta secundară: $x_3 = \alpha$

$$\begin{aligned} x_2 &= x_3 = \alpha \\ x_1 &= 5\alpha \end{aligned} \Rightarrow \{(5,1,1)\} \leq \mathbb{R}^3$$

$$S_1 + S_2 = \{\alpha v_1 + \beta v_2 + a u_1 + b u_2 \mid \alpha, \beta, a, b \in \mathbb{R}\}$$

$v_1 = (2,1,0)$

$v_2 = (3,0,1)$

$u_1 = (1,0,0)$

$u_2 = (0,1,-1)$

$$S_1 + S_2 = \{(\alpha + 3\beta + a,\ \alpha + \beta,\ \beta - b) \mid \alpha, \beta, a, b \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = \alpha + 3\beta + a,\ x_2 = \alpha + \beta,\ x_3 = \beta - b\}$$

Sistemul $\begin{cases} \alpha + 3\beta + a = x_1 \\ \alpha + \beta = x_2 \\ \beta - b = x_3 \end{cases}$ are matricea:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 1 + 0 - 0 - 0 - 0 = 1 \neq 0 \Rightarrow A \text{ are rang} = 3$$

$\Rightarrow \exists$ soluții pt $\forall x_1, x_2, x_3 \Rightarrow S_1 + S_2 = \mathbb{R}^3$

Ex 2, paragraf 4.2, pagina 163

Scrieți matricea transformării

$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$T(x) = (-x_1 + 3x_2 - x_3, -3x_1 + 5x_2 - x_3, -3x_1 + 3x_2 + x_3)$

în raport cu baza $B' = \{e_1' = (0,1,1), e_2' = (1,0,1), e_3' = (1,1,0)\}$

$T(x_1') = T(0,1,1) = (2,4,4)$

$T(x_2') = T(1,0,1) = (-2,-4,-2)$

$T(x_3') = T(1,1,0) = (2,2,0)$

Trebuie să găsim componentele vectorilor de mai sus în raport cu B', adică să rezolvăm sistemele:

$$\begin{cases} b + c = 2 \\ a + c = 4 \\ a + b = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} b + c = -2 \\ a + c = -4 \\ a + b = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} b + c = 2 \\ a + c = 2 \\ a + b = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$2c = 6 - 4 = 2$	$2c = -6 + 2 = -4$	$2c = 4$
$c = 1$	$c = -2$	$c = 2$
$a = 3$	$a = -2$	$a = 0$
$b = 1$	$b = 0$	$b = 0$

Matricea transformării T în raport cu baza B' este:

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$