

Simularea sistemelor dinamice. Anul II ID

Curs online

Ecuatii diferențiale de ordin superior

Forma generală a unei ecuații diferențiale de ordinul n cu coeficienți constanți este:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(x), \quad (1)$$

unde, cum se știe de la cursul de analiză matematică:

$$y^{(k)} = \frac{d^k y}{dx^k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Vom aborda mai întâi ecuații omogene, adică:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0. \quad (2)$$

Pentru aceste ecuații se caută soluții de forma:

$$y(x) = e^{rx}, \quad (3)$$

în care parametrul r se determină obligând y din (3) să satisfacă ecuația (2). Astfel, avem:

$$y' = e^{rx}, \quad y'' = r^2 e^{rx}, \dots, y^{(n)} = r^n e^{rx},$$

și atunci ecuația (2) devine:

$$\begin{aligned} a_n r^n e^{rx} + a_{n-1} r^{n-1} e^{rx} + \dots + a_1 r e^{rx} + a_0 e^{rx} &= 0, \Rightarrow \\ \Rightarrow (a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0) e^{rx} &= 0 \Rightarrow \\ a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0 &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

ecuația (4) numindu-se ecuația caracteristică.

Cu fiecare soluție, să zicem, r_1 a ecuației caracteristice (4) ne întoarcem la (3) și găsim o soluție a ecuației diferențiale inițiale.

Cu cunoștințele de algebră de clasa a IX-a, ecuația (4) poate să aibă:

- rădăcini reale simple;
- rădăcini reale multiple;
- rădăcini complexe simple;
- rădăcini complexe multiple;

I. Dacă ecuația caracteristică are toate rădăcinile reale simple, r_1, r_2, \dots, r_n , atunci soluția generală a ecuației diferențiale (2) este

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \dots + C_n e^{r_n x},$$
$$C_1, C_2, \dots, C_n = \text{constante reale arbitrare.}$$

II. Dacă ecuația caracteristică are o rădăcină reală simplă, r_1 , multiplă de ordinul m , atunci ecuația diferențială (2) admite soluția:

$$y(x) = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \dots + C_m x^{m-1}) e^{r_1 x},$$
$$C_1, C_2, \dots, C_m = \text{constante reale arbitrare.}$$

III. Dacă ecuația caracteristică are o rădăcină complexă, $r_1 = \alpha + i\beta$, atunci și conjugata ei, $\overline{r_1} = \alpha - i\beta$, este rădăcină pentru ecuația caracteristică și atunci ecuația diferențială (2) admite soluția:

$$y(x) = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x),$$
$$C_1, C_2 = \text{constante reale arbitrare.}$$

IV. Dacă ecuația caracteristică are o rădăcină complexă, $r_1 = \alpha + i\beta$, multiplă de ordinul m , atunci și conjugata ei, $\overline{r_1} = \alpha - i\beta$, este rădăcină pentru ecuația caracteristică, tot multiplă de ordinul m și atunci ecuația diferențială (2) admite soluția:

$$y(x) = e^{\alpha x} \left[(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \dots + C_m x^{m-1}) \cos \beta x + \right. \\ \left. + (B_1 + B_2 x + B_3 x^2 + \dots + B_m x^{m-1}) \sin \beta x \right],$$
$$C_i \text{ și } B_i = \text{constante reale arbitrare, } i = \overline{1, m}.$$

1. Să se integreze ecuația:

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

2. Aflați soluția generală a ecuației:

$$y'' - 2y' = 0.$$

3. Aflați soluția generală a ecuației:

$$4y'' + 4y' + y = 0.$$

4. Aflați soluția generală a ecuației:

$$y'' - 4y' + 5y = 0.$$

5. Aflați soluția generală a ecuației:

$$y'' + 4y = 0.$$

6. Aflați soluția generală a ecuației:

$$y'''' - y = 0.$$

7. Aflați soluția generală a ecuației:

$$y'''' + 64y = 0.$$

8. Aflați soluția generală a ecuației:

$$y^V - 2y^{IV} - 16y' + 32y = 0.$$

9. Să se integreze ecuația:

$$y'''' + 2y'' + y = 0.$$

10. Să se integreze ecuația:

$$y'' - 2y' - 3y = e^{4x}.$$

11. Aflați soluția generală a ecuației:

$$y'' - y = 2e^x - x^2.$$

12. Aflați soluția generală a ecuației:

$$y'' - 3y' + 2y = \sin x.$$

Propuneri de soluții

1. Să se integreze ecuația:

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

Rezolvare:

Avem o ecuație omogenă cu coeficienți constanți. Ecuația caracteristică atașată este:

$$r^2 + r - 2 = 0.$$

$$\Delta = 1 + 8 = 9$$

$$r_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow r_1 = -2 \in R, r_2 = 1 \in R.$$

Avem rădăcini reale și atunci

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} \Rightarrow$$

$$y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x.$$

Observație: Ecuația caracteristică se scrie astfel:

$$y^{(n)} \rightarrow r^n, y \rightarrow 1$$

din ecuația inițială.

■

2. Aflați soluția generală a ecuației:

$$y'' - 2y' = 0.$$

Rezolvare:

Avem o ecuație omogenă cu coeficienți constanți.

Ecuația caracteristică atașată este:

$$r^2 - 2r = 0 \Rightarrow r_1 = 0, r_2 = 2 \Rightarrow$$

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2$$

■

3. Aflați soluția generală a ecuației:

$$4y'' + 4y' + y = 0.$$

Rezolvare:

Avem o ecuație omogenă cu coeficienți constanți.
Ecuația caracteristică atașată este:

$$4r^2 + 4r + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$r_1 = r_2 = -\frac{1}{2} \rightarrow$$

care are rădăcină dublă \Rightarrow

$$y(x) = C_1 e^{-\frac{1}{2}x} + C_2 x e^{-\frac{1}{2}x}.$$

■

4. Aflați soluția generală a ecuației:

$$y'' - 4y' + 5y = 0.$$

Rezolvare:

Avem o ecuație omogenă cu coeficienți constanți.
Ecuația caracteristică atașată este:

$$r^2 - 4r + 5 = 0$$

$$\Delta = 16 - 20 = -4$$

$$r_{1,2} = \frac{4 \pm 2i}{2} \Rightarrow r_1 = 2 + i$$

$$r_2 = 2 - i.$$

Avem rădăcini complexe $a + bi$, rezultă:

$$y(x) = e^{ax} (C_1 \cos bx + C_2 \sin bx),$$

rezultă:

$$y(x) = e^{2x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

■

5. Aflați soluția generală a ecuației:

$$y'' + 4y = 0.$$

Rezolvare:

Avem o ecuație omogenă cu coeficienți constanți.

Ecuația caracteristică atașată este:

$$r^2 + 4 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \pm 2i$$

$$y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

■

6. Aflați soluția generală a ecuației:

$$y''' - y = 0.$$

Rezolvare:

Avem o ecuație omogenă cu coeficienți constanți.

Ecuația caracteristică atașată este:

$$r^4 - 1 = 0 \Rightarrow (r^2 - 1)(r^2 + 1) = 0 \Rightarrow$$

$$r_{1,2} = \pm 1, r_{3,4} = \pm i \Rightarrow$$

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x.$$

■

7. Aflați soluția generală a ecuației:

$$y'''' + 64y = 0.$$

Rezolvare:

Avem o ecuație omogenă cu coeficienți constanți.

Ecuatia caracteristică atașată este:

$$r^4 + 64 = 0 \Leftrightarrow r^4 + 16r^2 + 64 - 16r^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(r^2 + 8)^2 - (4r)^2 = 0 \Leftrightarrow (r^2 - 4r + 8)(r^2 + 4r + 8) = 0$$

$$r^2 - 4r + 8 = 0$$

$$\Delta = 16 - 32 = -16 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{4 \pm 4i}{2} = 2 \pm 2i$$

$$r^2 + 4r + 8 = 0$$

$$\Delta = 16 - 32 = -16 \Rightarrow r_{3,4} = \frac{4 \pm 4i}{2} = -2 \pm 2i$$

rezultă:

$$y(x) = e^2 (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + e^{-2} (C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x).$$

■

8. Aflați soluția generală a ecuației:

$$y^V - 2y^{IV} - 16y' + 32y = 0.$$

Rezolvare:

Avem o ecuație omogenă cu coeficienți constanți.

Ecuatia caracteristică atașată este:

$$r^5 - 2r^4 - 16r + 32 = 0 \Leftrightarrow$$

$$r^4(r - 2) - 16(r - 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(r - 2)(r^4 - 16) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(r - 2)^2(r + 2)(r^2 + 4) = 0 \Rightarrow r_1 = 2 \rightarrow$$

rădăcină dublă

$$r_2 = -2, \quad r_{3,4} = \pm 2i.$$

Rezultă:

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + C_3 e^{-2x} + C_4 \cos 2x + C_5 \sin 2x.$$

■

9. Să se integreze ecuația:

$$y'''' + 2y'' + y = 0.$$

Rezolvare:

Avem o ecuație omogenă cu coeficienți constanți.

Ecuația caracteristică atașată este:

$$r^4 + 2r^2 + 1 = 0$$

$$(r^2 + 1) = 0$$

$$r^2 = -1 \Rightarrow r_1 = \pm i \rightarrow$$

rădăcină dublă și atunci rezultă:

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 x \cos x + C_4 x \sin x.$$

■

10. Să se integreze ecuația:

$$y'' - 2y' - 3y = e^{4x}.$$

Rezolvare:

Avem o ecuație neomogenă căreia îi atașăm ecuația omogenă:

$$y'' - 2y' - 3y = 0.$$

Ecuația caracteristică atașată acesteia este:

$$r^2 - 2r - 3 = 0$$

$$\Delta = 4 + 12 = 16 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{2} \Rightarrow r_1 = 3$$

$$r_2 = -1$$

și atunci rezultă:

$$y_o = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}.$$

Căutăm acum o soluție particulară a ecuației neomogene. Deoarece termenul perturbant este e^{4x} , vom căuta o soluție de tipul:

$$y_p = C_1 e^{4x}.$$

Calculăm derivatele de ordinul întâi și respectiv doi și înlocuim în ecuația inițială:

$$y'_p = 4C_1 e^{4x}$$

$$y''_p = 16C_1 e^{4x}$$

Înlocuind în ecuația inițială, obținem:

$$16C_1 e^{4x} - 8C_1 e^{4x} - 3C_1 e^{4x} = e^{4x} \Leftrightarrow$$

$$5C_1 e^{4x} = e^{4x} \Leftrightarrow$$

$$5C_1 = 1 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{5}.$$

Rezultă:

$$y_p = \frac{1}{5} e^{4x}$$

În concluzie, soluția generală este:

$$y_g = y_o + y_p \Leftrightarrow$$

$$y_g = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} + \frac{1}{5} e^{4x}.$$

■

11. Aflați soluția generală a ecuației:

$$y'' - y = 2e^x - x^2.$$

Rezolvare:

Avem o ecuație neomogenă. Îi atașăm ecuația omogenă:

$$y'' - y = 0.$$

Ecuația caracteristică atașată este:

$$r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \pm 1$$

și atunci rezultă:

$$y_o = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Considerăm ecuațiile

$$y'' - y = 2e^x$$

$$y'' - y = -x^2,$$

căroră le găsim soluții particulare.

Pentru

$$y'' - y = 2e^x \quad (*)$$

căutăm

$$y_p = qe^x \Rightarrow$$

$$y'_p = qe^x$$

$$y''_p = qe^x$$

înlocuind în (*), obținem:

$$qe^x - qe^x = 2e^x$$

care nu convine.

Cautăm $y_p = qxe^x$. Avem:

$$y'_p = qe^x + qxe^x$$

$$y''_p = qe^x + qe^x + qxe^x.$$

Înlocuind în (*), obținem:

$$2qe^x + qxe^x - qxe^x = 2e^x$$

$$q = 1 \Rightarrow y_{p_1} = xe^x.$$

Pentru ecuația

$$y'' - y = -x^2 \quad (***)$$

căutăm o soluție particulară de forma

$$y_{p_2} = ax^2 + bx + c.$$

Avem:

$$y'_{p_2} = 2ax + b$$

$$y''_{p_2} = 2a.$$

Înlocuind în (**), obținem:

$$a - ax^2 - bx - c = -x^2.$$

Identificând coeficienții rezultă:

$$-a = -1 \Rightarrow a = 1$$

$$-b = 0 \Rightarrow b = 0$$

$$2a - c = 0 \Rightarrow 2 - c = 0 \Rightarrow c = 2$$

și atunci rezultă:

$$y_{p_2} = x^2 + 2$$

deci soluția generală a ecuației inițiale este:

$$y = y_o + y_{p_1} + y_{p_2}$$

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} + xe^x + x^2 + 2.$$

■

12. Aflați soluția generală a ecuației:

$$y'' - 3y' + 2y = \sin x.$$

Rezolvare:

Avem o ecuație neomogenă. Ii atașăm ecuația omogenă:

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

Ecuația caracteristică atașată este:

$$r^2 - 3r + 2 = 0,$$

$$\Delta = 1 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow r_1 = 2, r_2 = 1.$$

Rezultă:

$$y_o = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

Căutăm soluții particulare pentru ecuația neomogenă.

$$y_p = C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

$$y'_p = C_1 \cos x - C_2 \sin x$$

$$y''_p = -C_1 \sin x - C_2 \cos x$$

Înlocuind în ecuația neomogenă, rezultă:

$$-C_1 \sin x - C_2 \cos x - 3(C_1 \cos x - C_2 \sin x) + 2(C_1 \sin x + C_2 \cos x) = \sin x$$

$$(-C_1 + 3C_2 + 2C_1) \sin x + (-C_2 - 3C_1 + 2C_2) \cos x = \sin x$$

Identificând coeficienții, rezultă:

$$3C_2 + C_1 = 1$$

$$C_2 - 3C_1 = 0$$

și acest sistem are soluțiile:

$$C_1 = \frac{1}{10}, C_2 = \frac{3}{10}.$$

Atunci:

$$y_p = \frac{1}{10} \sin x + \frac{3}{10} \cos x \Leftrightarrow$$

$$y_g = y_o + y_p \Leftrightarrow$$

$$y_g = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{10} \sin x + \frac{3}{10} \cos x.$$

■