Simularea sistemelor dinamice. Anul II ID
Curs online

Curs nr. 3

Ecuaţii diferenţiale de ordin superior

Forma generală a unei ecuaţii diferenţiale de ordinul n cu coeficienţi constanţi este:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = f(x), \tag{1}$$

unde, cum se ştie de la cursul de analiză matematică:

$$y^{(k)} = \frac{d^k y}{dx^k},\ k = 0, 1, 2, ..., n.$$

Vom aborda mai întâi ecuaţii omogene, adică:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = 0. \tag{2}$$

Pentru aceste ecuaţii se cauta soluţii de forma:

$$y(x) = e^{rx}, \tag{3}$$

în care parametrul r se determină obligând y din (3) să satisfacă ecuaţia (2). Astfel, avem:

$$y' = e^{rx},\ y'' = r^2 e^{rx}, ..., y^{(n)} = r^n e^{rx},$$

şi atunci ecuaţia (2) devine:

$$
\begin{aligned}
a_n r^n e^{rx} + a_{n-1} r^{n-1} e^{rx} + ... + a_1 r e^{rx} + a_0 e^{rx} = 0, \Rightarrow \\
\Rightarrow \left(a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + ... + a_1 r + a_0 \right) e^{rx} = 0 \Rightarrow \\
a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + ... + a_1 r + a_0 = 0,
\end{aligned}
\tag{4}
$$

ecuaţia (4) numindu-se ecuaţia caracteristică.
Cu fiecare soluţie, să zicem, r_1 a ecuaţiei caracteristice (4) ne întoarcem la (3) şi gasim o soluţie a ecuaţiei diferenţiale iniţiale.
Cu cunoştinţele de algebră de clasa a IX-a, ecuaţia (4) poate să aibă:

- rădăcini reale simple;
- rădăcini reale multiple;
- rădăcini complexe simple;
- rădăcini complexe multiple;

1. Să se integreze ecuaţia:

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

2. Aflaţi soluţia generală a ecuaţiei:

$$y'' - 2y' = 0.$$

3. Aflaţi soluţia generală a ecuaţiei:

$$4y'' + 4y' + y = 0.$$

4. Aflaţi soluţia generală a ecuaţiei:

$$y'' - 4y' + 5y = 0.$$

5. Aflaţi soluţia generală a ecuaţiei:

$$y'' + 4y = 0.$$

6. Aflaţi soluţia generală a ecuaţiei:

$$y'''' - y = 0.$$

7. Aflaţi soluţia generală a ecuaţiei:

$$y'''' + 64y = 0.$$

8. Aflaţi soluţia generală a ecuaţiei:

$$y^V - 2y^{IV} - 16y' + 32y = 0.$$

9. Să se integreze ecuaţia:

$$y'''' + 2y'' + y = 0.$$

10. Să se integreze ecuaţia:

$$y'' - 2y' - 3y = e^{4x}.$$

11. Aflaţi soluţia generală a ecuaţiei:

$$y'' - y = 2e^x - x^2.$$

12. Aflaţi soluţia generală a ecuaţiei:

$$y'' - 3y' + 2y = \sin x.$$

Propuneri de soluţii

1. Să se integreze ecuaţia:

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

Rezolvare:

Avem o ecuaţie omogenă cu coeficienţi constanţi. Ecuaţia caracteristică ataşată este:

$$r^2 + r - 2 = 0.$$

$$\Delta = 1 + 8 = 9$$

$$r_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow r_1 = -2 \in R, r_2 = 1 \in R.$$

Avem rădăcini reale şi atunci

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} \Rightarrow$$

$$y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x}.$$

Observaţie: Ecuaţia caracteristică se scrie astfel:

$$y^{(n)} \to r^n, y \to 1$$

din ecuaţia iniţială.

■

2. Aflaţi soluţia generală a ecuaţiei:

$$y'' - 2y' = 0.$$

Rezolvare:

Avem o ecuaţie omogenă cu coeficienţi constanţi.
Ecuaţia caracteristică ataşată este:

$$r^2 - 2r = 0 \Rightarrow r_1 = 0, r_2 = 2 \Rightarrow$$

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2$$

■

3. Aflaţi soluţia generală a ecuaţiei:

$$4y'' + 4y' + y = 0.$$

Rezolvare:
Avem o ecuaţie omogenă cu coeficienţi constanţi.
Ecuatia caracteristică ataşată este:

$$4r^2 + 4r + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$r_1 = r_2 = -\frac{1}{2} \rightarrow$$

care are rădăcină dublă $\Rightarrow$

$$y(x) = C_1 e^{-\frac{1}{2}x} + C_2 x e^{-\frac{1}{2}x}.$$

■

4. Aflaţi soluţia generală a ecuaţiei:

$$y'' - 4y' + 5y = 0.$$

Rezolvare:

Avem o ecuaţie omogenă cu coeficienţi constanţi.
Ecuaţia caracteristică ataşată este:

$$r^2 - 4r + 5 = 0$$

$$\Delta = 16 - 20 = -4$$

$$r_{1,2} = \frac{4 \pm 2i}{2} \Rightarrow r_1 = 2 + i$$

$$r_2 = 2 - i.$$

Avem rădăcini complexe $a + bi$, rezultă:

$$y(x) = e^{ax}\left(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx\right),$$

rezultă:

$$y(x) = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

$\blacksquare$

5. Aflaţi soluţia generală a ecuaţiei:

$$y'' + 4y = 0.$$

Rezolvare:

Avem o ecuaţie omogenă cu coeficienţi constanţi.
Ecuaţia caracteristică ataşată este:

$$r^2 + 4 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \pm 2i$$

$$y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

$\blacksquare$

6. Aflaţi soluţia generală a ecuaţiei:

$$y'''' - y = 0.$$

Rezolvare:

Avem o ecuaţie omogenă cu coeficienţi constanţi.
Ecuaţia caracteristică ataşată este:

$$r^4 - 1 = 0 \Rightarrow \left(r^2 - 1\right)\left(r^2 + 1\right) = 0 \Rightarrow$$

$$r_{1,2} = \pm 1, r_{3,4} = \pm i \Rightarrow$$

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x.$$

$\blacksquare$

7. Aflaţi soluţia generală a ecuaţiei:

$$y'''' + 64y = 0.$$

Rezolvare:

Avem o ecuaţie omogenă cu coeficienţi constanţi.
Ecuaţia caracteristică ataşată este:

$$r^4 + 64 = 0 \Leftrightarrow r^4 + 16r^2 + 64 - 16r^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(r^2 + 8\right)^2 - (4r)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(r^2 - 4r + 8\right)\left(r^2 + 4r + 8\right) = 0$$

$$r^2 - 4r + 8 = 0$$

$$\Delta = 16 - 32 = -16 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{4 \pm 4i}{2} = 2 \pm 2i$$

$$r^2 + 4r + 8 = 0$$

$$\Delta = 16 - 32 = -16 \Rightarrow r_{3,4} = \frac{4 \pm 4i}{2} = -2 \pm 2i$$

rezultă:

$$y\left(x\right) = e^2\left(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\right) + e^{-2}\left(C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x\right).$$

■

8. Aflaţi soluţia generală a ecuaţiei:

$$y^V - 2y^{IV} - 16y' + 32y = 0.$$

Rezolvare:

Avem o ecuaţie omogenă cu coeficienţi constanţi.
Ecuaţia caracteristică ataşată este:

$$r^5 - 2r^4 - 16r + 32 = 0 \Leftrightarrow$$

$$r^4\left(r - 2\right) - 16\left(r - 2\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(r - 2\right)\left(r^4 - 16\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(r - 2\right)^2\left(r + 2\right)\left(r^2 + 4\right) = 0 \Rightarrow r_1 = 2 \rightarrow$$

rădăcină dublă

$$r_2 = -2,\ r_{3,4} = \pm 2i.$$

Rezultă:

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + C_3 e^{-2x} + C_4 \cos 2x + C_5 \sin 2x.$$

■

9. Să se integreze ecuaţia:

$$y'''' + 2y'' + y = 0.$$

Rezolvare:
Avem o ecuaţie omogenă cu coeficienţi constanţi.
Ecuaţia caracteristică ataşată este:

$$r^4 + 2r^2 + 1 = 0$$

$$\left(r^2 + 1\right) = 0$$

$$r^2 = -1 \Rightarrow r_1 = \pm i \rightarrow$$

rădăcină dublă şi atunci rezultă:

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 x \cos x + C_4 x \sin x.$$

■

10. Să se integreze ecuaţia:

$$y'' - 2y' - 3y = e^{4x}.$$

Rezolvare:

Avem o ecuaţie neomogenă căreia ii ataşăm ecuaţia omogenă:

$$y'' - 2y' - 3y = 0.$$

Ecuaţia caracteristică ataşată acesteia este:

$$r^2 - 2r - 3 = 0$$

$$\Delta = 4 + 12 = 16 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{2} \Rightarrow r_1 = 3$$

$$r_2 = -1$$

şi atunci rezultă:

$$y_o = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}.$$

Căutăm acum o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene. Deoarece termenul perturbant este e^{4x}, vom căuta o soluţie de tipul:

$$y_p = C_1 e^{4x}.$$

Calculăm derivatele de ordinul întii şi respectiv doi şi înlocuim în ecuaţia iniţială:

$$y_p' = 4C_1 e^{4x}$$

$$y_p'' = 16C_1 e^{4x}$$

Înlocuind în ecuaţia iniţială, obţinem:

$$16C_1 e^{4x} - 8C_1 e^{4x} - 3C_1 e^{4x} = e^{4x} \Leftrightarrow$$

$$5C_1 e^{4x} = e^{4x} \Leftrightarrow$$

$$5C_1 = 1 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{5}.$$

Rezultă:

$$y_p = \frac{1}{5} e^{4x}$$

În concluzie, soluţia generală este:

$$y_g = y_o + y_p \Leftrightarrow$$

$$y_g = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} + \frac{1}{5} e^{4x}.$$

■

11. Aflaţi soluţia generală a ecuaţiei:

$$y'' - y = 2e^x - x^2.$$

Rezolvare:

Avem o ecuaţie neomogenă. Îi ataşăm ecuaţia omogenă:

$$y'' - y = 0.$$

Ecuaţia caracteristică ataşată este:

$$r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \pm 1$$

şi atunci rezultă:

$$y_o = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Considerăm ecuaţiile

$$y'' - y = 2e^x$$

$$y'' - y = -x^2,$$

cărora le găsim soluţii particulare.
Pentru

$$y'' - y = 2e^x \quad (*)$$

căutăm

$$y_p = qe^x \Rightarrow$$

$$y_p' = qe^x$$

$$y_p'' = qe^x$$

înlocuind în $(*)$, obţinem:

$$qe^x - qe^x = 2e^x$$

care nu convine.
Cautam $y_p = qxe^x$. Avem:

$$y_p' = qe^x + qxe^x$$

$$y_p'' = qe^x + qe^x + qxe^x.$$

Înlocuind în $(*)$, obţinem:

$$2qe^x + qxe^x - qxe^x = 2e^x$$

$$q = 1 \Rightarrow y_{p_1} = xe^x.$$

Pentru ecuaţia

$$y'' - y = -x^2 \quad (***)$$

căutăm o soluţie particulară de forma

$$y_{p_2} = ax^2 + bx + c.$$

Avem:

$$y'_{p_2} = 2ax + b$$

$$y''_{p_2} = 2a.$$

Înlocuind în $(**)$, obţinem:

$$a - ax^2 - bx - c = -x^2.$$

Identificând coeficienţii rezultă:

$$-a = -1 \Rightarrow a = 1$$

$$-b = 0 \Rightarrow b = 0$$

$$2a - c = 0 \Rightarrow 2 - c = 0 \Rightarrow c = 2$$

şi atunci rezultă:

$$y_{p_2} = x^2 + 2$$

deci soluţia generală a ecuaţiei înitiale este:

$$y = y_o + y_{p1} + y_{p2}$$

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} + xe^x + x^2 + 2.$$

$\blacksquare$

12. Aflaţi soluţia generală a ecuaţiei:

$$y'' - 3y' + 2y = \sin x.$$

Rezolvare:

Avem o ecuaţie neomogenă. Ii ataşăm ecuaţia omogenă:

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

Ecuaţia caracteristică ataşată este:

$$r^2 - 3r + 2 = 0,$$

$$\Delta = 1 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow r_1 = 2,\ r_2 = 1.$$

Rezultă:

$$y_o = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

Căutăm soluţii particulare pentru ecuaţia neomogenă.

$$y_p = C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

$$y_p' = C_1 \cos x - C_2 \sin x$$

$$y_p'' = -C_1 \sin x - C_2 \cos x$$

Înlocuind în ecuaţia neomogenă, rezultă:

$$-C_1 \sin x - C_2 \cos x - 3\left(C_1 \cos x - C_2 \sin x\right) + 2\left(C_1 \sin x + C_2 \cos x\right) = \sin x$$

$$\left(-C_1 + 3C_2 + 2C_1\right) \sin x + \left(-C_2 - 3C_1 + 2C_2\right) \cos x = \sin x$$

Identificând coeficienţii, rezultă:

$$3C_2 + C_1 = 1$$

$$C_2 - 3C_1 = 0$$

şi acest sistem are soluţiile:

$$C_1 = \frac{1}{10},\ C_2 = \frac{3}{10}.$$

Atunci:

$$y_p = \frac{1}{10} \sin x + \frac{3}{10} \cos x \Leftrightarrow$$

$$y_g = y_o + y_p \Leftrightarrow$$

$$y_g = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{10} \sin x + \frac{3}{10} \cos x.$$

■