UNIVERSITATEA *TRANSILVANIA* BRAŞOV
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ
PROGRAM DE STUDIU: INFORMATICĂ ID – ANUL II

Prof. univ.dr. Marin Marin

ECUATII DIFERENTIALE
ŞI
SISTEME DINAMICE

Brasov 2016-2017

Introducere

Este greu de gasit un fenomen care sa nu poata fi modelat cu ajutorul unei ecuatii diferentiale, respectiv un sistem de ecuatii diferentiale (sistem dinamic).

De asemenea, orice optimizare, care este principala ratiune de existenta a informaticianului, este intrinsec legata de o ecuatie diferentiala.

Disciplina **Ecuatii diferentiale** este una dinre cele mai vechi si mai ample ramuri ale matematicii. Terminologia, metodele si tehnicile de lucru pentru demonstratii de rezultate teoretice precum si pentru rezolvarea efectiva a ecuatiilor diferentiale, se bazeaza pe elemente la vârf din alte ramuri ale matematicii, precum Analiza matematica clasica, Topologie, Geometrie diferentiala, Mecanica, etc.

Abordarea ecuatiilor diferentiale este uneori ingreunata mai ales de faptul ca sunt necesare notiuni si rezultate de la frontiera disciplinelor enumerate.

Aproape ca nu exista fenomen in fizica, mecanica, in tehnica in general si, si mai general, in orice domeniu al stiintelor naturii, care sa nu poata fi modelat printr-o ecuatie diferentiala.

Simplificat spus, o ecuatie diferentiala este o ecuatie in care functia necunoscuta apare macar sub o derivata. Deci, in ecuatia respectiva apare atât functia necunoscuta cât si derivata ei. Ordinul maxim de derivare sub care apare functia necunoscuta este **ordinul ecuatiei**. Astfel, vom spune ca avem o ecuatie diferentiala de ordinul I, II, etc., daca in ecuatia diferentiala respectiva apare doar derivata intâi a functiei necunoscute, derivata a doua, etc.

Daca functia necunoscuta dintr-o ecuatie diferentiala depinde de o singura variabila independenta, spunem ca avem o **ecuatie diferentiala ordinara**, iar daca functia necunoscuta depinde de mai multe varibile, spunem ca care avem o **ecuatie diferentiala cu derivate partiale**.

Daca intr-o ecuatie functia necunoscuta apare sub o integrala, avem o **ecuatie integrala**. In sfârsit, daca functia necunoscuta apare si sub o derivata si sub o integrala, spunem ca avem o **ecuatie integro-diferentiala**.

Acest curs este conceput special pentru studentii de la programul de studiu Informatica-ID, anul II. Este o varianta mai accesibila si mai scurta a cursului similar dedicat studentilor din anul II de la programele de studii de la cursurile de zi.

Din acest motiv invitam studentii de la ID care vor sa aprofundeze cunostintele legate de ecuatii diferentiale, respectiv sisteme dinamice, sa consulte notile de curs si bibliografia indicate studentilor din anul II de la zi.

Octombrie 2016 M. Marin

Pentru principalele tipuri de ecuatii sintetizate in introducere, indicam cateva exemple elementare.

Exemple.

1) Ecuatie diferentiala ordinara:

$$mx'' = F(t,x),\ x = x(t),\ t \in [a,b];$$

2) Ecuatie diferentiala cu derivate partiale:

$$P(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = R(x,y)\ u = u(x,y),\ (x,y) \in \Omega \subset R^2;$$

3) Ecuatie integrala:

$$x(t) + \lambda \int_0^t k(\tau, x)x(\tau)d\tau = 0,\ t \in [0,a],\ \lambda = parametru;$$

4) Ecuatie integr-o diferentiala:

$$x(t) + \alpha \dot{x} = \lambda \int_0^t k(\tau, x)x(\tau)d\tau,\ t \in [0,a],\ \alpha, \lambda = parametri;$$

Obiectivele cursului

Cursul intitulat *Sisteme dinamice* are ca obiectiv principal îmbogăţirea cunoştinţelor din sfera disciplinelor fundamentale ale studenţilor Programului de studii Informatica, forma de învăţământ ID.

În acest sens, la sfârşitul acestui curs, studenţii vor stapani notiunile de baza ale teoriei ecuatiilor diferentiale, a principalelor probleme care se pun in aceasta teorie. Dupa parcurgerea cursului, vor identifica principalele tipuri de ecuatii diferentiale si vor stapani noţiunile de baza privind sistemele de ecuatii diferentiale (mai scurt, sisteme dinamice).

In final, vor deprinde tehnici de rezolvare a ecuatiilor diferentiale si a sistemelor dinamice si vor recunoasca probleme concrete ce pot fi modelate cu ajutorul ecuatiilor diferentiale si a sistemelor dinamice.

In acest sens, la sfarsitul fiecarui paragraf este rezolvat cate un exemplu concret de ecuatie diferentiala, respectiv, sistem dinamic.

Competenţe conferite

În acest sens, la sfârşitul acestui curs, studenţii vor fi capabili să:

- opereze cu notiunile de baza ale teoriei ecuatiilor diferentiale, a principalelor probleme care se pun in aceasta teorie;
- sa identifice principalele tipuri de ecuatii diferentiale;
- sa aiba noţiuni privind sistemele de ecuatii diferentiale (mai scurt, sisteme dinamice);
- sa identifice tehnici de rezolvare a ecuatiilor diferentiale si a sistemelor dinamice;
- sa recunoasca probleme concrete ce pot fi modelate cu ajutorul ecuatiilor diferentiale si a sistemelor dinamice.

Resurse si mijloace de lucru

Parcurgerea unităţilor de învăţare aferente acestui curs nu necesită existenţa unor mijloace sau instrumente de lucru. Este suficient suportul de curs, pentru rezultatele teoretice, precum si o culegere (indicata la bibliografie) pentru exemplificari concrete, dupa modelul expus la sfarsitul fiecarui paragraf.

Structura cursului

Cursul **Sisteme dinamice** este structurat în patru module, astfel: primul modul *Ecuatii diferentiale ordinare* cuprinde cinci unităţi de învăţare. Modulul al doilea cuprinde *Sisteme dinamice,* al treilea modul este dedicat *Ecuatiilor diferentiale cu derivate partiale de ordinul I.*

Ultimul modul cuprinde notiuni de *Stabilitate,* iar la final am inclus o serie de *Teme aplicative*, adica exercitii aplicative concrete, pentru fiecare modul in parte. Aplicatiile sunt rezolvate in intregime

La rândul său, fiecare unitate de învăţare cuprinde: obiective, aspecte teoretice privind tematica unităţii de învăţare respective, exemple, teste de autoevaluare precum şi probleme propuse spre discuţie şi rezolvare.

La sfârşitul fiecărui modul sunt indicate două teme de control. Rezolvarea acestor două teme de control este obligatorie. Acestea vor fi încărcate de către studenţi pe platforma e-learning până la odată prestabilită.

Cerinţe preliminare

Disciplinile necesare a fi parcurse si promovate inaintea disiplinei *Sisteme dinamice* sunt: Analiza Matematica, Algebra liniara si abstracta, Geometria analitica, Geometria curbelor si suprafeteleor. Pe de alta parte, cursul de Sisteme

dinamice este indispensabil pentru disciplinile:
Ecuatiile fizicii matematice, Mecanica, Geometrie diferentiala, Analiza functionala

Evaluarea

La sfârşitul semestrului, fiecare student va primi o notă, care va cuprinde: un examen scris, ce va conţine întrebări teoretice din materia prezentată în cadrul acestui material, examen ce va deţine o pondere de 60% în nota finală şi notele aferente celor două teme de control, realizate pe parcursul semestrului, care vor deţine o pondere de 20% fiecare.

Spor la treaba !

Modulul 1. Ecuatii diferentiale ordinare

Cuprins

Introducere

Ecuatiile diferentiale sunt ecuatiile in care functia necunoscuta apare macar sub o derivata. Ordinul maxim sub care apare derivata functiei necunoscute este *ordinul* *unei ecuatii*. Ecuatiile diferentiale din acest prim modul sunt de ordinul I pentru ca functia necunoscuta apare sub o derivata de ordinul I.

Se expune algoritmul de rezolvare a ecuatiilor direct cuadrabile, pentru fiecare tip in parte, sau dupa caz, cum se reduce o ecuatie diferentiale la un tip anterior studiat. Acestea sunt, de fapt, cele mai intalnite, in probleme practice concrete, ecuatii diferentiale.

Pentru fiecare tip de ecuatie diferentiala se poate gasi un exemplu de aplicatie concreta, in capitolul *Teme aplicative*, rezolvata in intregime.

Competenţe

La sfârşitul acestui modul studenţii vor fi capabili să:

- rezolve ecuatii diferentiale cu variabile separabile;
- expuna algoritmul pentru rezolvarea ecuatiilor diferentiale omogene
- reduca unele ecuatii diferentiale la ecuatii diferentiale omogene;
- rezolve ecuatii diferentiale cu diferentiala totala;
- reduca ecuatiile diferentiale cu factor integrant la ecuatii diferentiale cu diferentiala totala;
- rezolve, printr-una din doua metode, ecuatiile diferentiale liniare;
- reduca ecuatiile diferentiale de tip Bernoulli si Riccati la ecuatii diferentiale liniare;
- rezolve ecuatii diferentiale cu parametru;
- reduca ecuatiile diferentiale de tip Lagrange si Clairaut la ecuatii diferentiale cu parametru in general si sa le rezolve

Unitatea de învăţare M1.U1. Ecuatii diferentiale de ordinul I

Cuprins

M1.U1.1. Introducere

Se expune algoritmul de rezolvare a ecuatiilor direct cuadrabile, pentru fiecare tip in parte, sau dupa caz, cum se reduce o ecuatie diferentiale la un tip anterior studiat. Acestea sunt, de fapt, cele mai intalnite, in probleme practice concrete, ecuatii diferentiale.

M1.U1.2. Competente

Această unitate de învăţare îşi propune ca obiectiv principal o iniţiere a studenţilor în rezolvarea ecuatiilor diferentiale elementare.

La sfârşitul acestei unităţi de învăţare studenţii vor fi capabili să:

- înţeleagă algoritmul de rezolvare a ecuatiilor diferentiale ordinare
- înţeleagă procedeul de rezolvare a principalelor tipuri de ecuatii direct integrabile
- sa reduca rezolvarea unei ecuatii diferentiale la un tip anterior studiat.

M1.U1.3. Ecuatii diferentiale cu variabile separabile

O ecuatie diferentiala ordinara are forma generala

$$F\left(x, y(x), y^{'}(x), y^{''}(x), \ldots, y^{(n)}(x)\right) = 0,$$

$$unde\ x \in [a,b],\ y^{(k)}(x) = \frac{d^k y}{dx^k}.$$

Functia F, care depinde de $n+2$ variabile,

$$F : \Delta \to R, \Delta \subset R^{n+2},$$

este cunoscuta si suficient de regulata pentru a permite operatiile care se fac asupra ei pentru a rezolva ecuatia. Cazul cel mai simplu este

$$F\left(x, y(x), y^{'}(x)\right) = 0,\ y = y(x),\ x \in [a,b],\ F : \Delta \to R, \Delta \subset R^3.$$

In mod uzual, ecuatiile diferentiale sunt puse sub forma "normala", in care se expliciteaza derivata de ordin maxim

$$y^{(n)}(x) = f\left(x, y(x), y^{'}(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)\right),$$

sau, in cazul particular $1-$dimensional, de mai sus,

$$y'(x) = f(x, y(x)). \qquad (1)$$

In continuare, in afara unei precizari exprese, se fac consideratii numai asupra ecuatiilor de forma (1).

Se numeste **solutie** *a ecuatiei diferentiale (1), o functie*

$$\varphi : (a,b) \to R, \varphi \in C^1(a,b),$$

care inlocuita in ecuatia (1) o transforma pe aceasta in identitate, deci

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \equiv 0.$$

Consideram, ca un exemplu foarte simplu, ecuatia diferentiala

$$y'(x) = x^2, \, sau \quad \frac{dy}{dx} = x^2.$$

Prin integrare directa, se obtine solutia

$$y(x) = \frac{x^3}{3} + C, \, C = constanta; \, C \in R.$$

Exemplul dat ofera si un exemplu de solutie, si o metoda de rezolvare a unei ecuatii diferentiale si, in plus, anticipeaza si faptul ca o aceiasi ecuatie diferentiala poate avea mai multe solutii, care sunt numite **curbe integrale**, denumire sugerata de modul in care au fost obtinute solutiile, adica prin integrare. Multimea solutiilor este generata de variatia constantei C, numita constanta de integrare.

Când constanta C nu este precizata, spunem ca avem **solutia generala**. Prin particularizarea constantei C se obtin **solutii particulare**. Daca o ecuatie diferentiala admite o solutie care nu se obtine prin particularizarea constantei C, atunci spunem ca avem o **solutie singulara**.

Principalele probleme care se urmaresc, atunci când se abordeaza o ecuatie diferentiala, sunt:

i) existenta solutiei, adica in ce conditii o ecuatie diferentiala admite macar o solutie;

ii) unicitatea solutiei, adica ce trebuie pretins suplimentar unei ecuatii diferentiale pentru ca aceasta sa admita numai o solutie;

iii) constructia efectiva a solutiei. Termenul este folosit pentru a surprinde metoda prin care este determinata solutia ecuatiei diferentiale.

O modalitate concreta prin care se elimina arbitrariul din solutia generala a unei ecuatii diferentiale consta in a obliga curba integrala sa treaca printr-un punct precizat din plan (x_0, y_0), deci $y_0 = y(x_0)$. Astfel constanta C capata valoare concreta si solutia devine unica.

In mod firesc, in cazul general al unei ecuatii diferentiale de ordinul n, curbele integrale depind de n constante de integrare si atunci pentru eliminarea lor sunt necesare conditii suplimentare.

Conditiile suplimentare care se impun unei ecuatii diferentiale pentru determinarea constantelor de integrare se numesc **conditii Cauchy**.

Se numeste **Problema Cauchy**, problema integrarii unei ecuatii diferent- iale si determinarea constantelor de integrare.

Precizam acum, pe scurt, care sunt alte probleme care se pun in studiul unei ecuatii diferentiale.

1) Odata ce am demonstrat existenta si unicitatea solutiei pentru o ecuatie diferentiala,

se pune problema determinarii intervalului maxim pe care aceasta este definita. Apare astfel notiunea de **solutie saturata**.

2) Se poate pune problema daca solutia este definita pe un interval in jurul punctului fixat in problema Cauchy, sau daca este definita pe o semiaxa incepând de la acel punct, sau, chiar pe intreaga axa a numerelor reale.

3) Se poate apoi urmari care este legatura intre schimbarea unor date din ecuatia diferentiala, sau a conditiei Cauchy, si schimbarea solutiei. Apare astfel notiunea de **dependenta continua de date**.

4) In cazul in care solutia unei ecuatii diferentiale este definita pe o semiaxa, sau pe axa intreaga, se pune problema comportarii solutiei la infinit.

Ecuatii diferentiale de ordinul I

Dupa cum s-a precizat mai sus, in cazul acestor ecuatii diferentiale, functia necunoscuta apare doar sub derivata de ordinul intâi. Forma generala a aestor ecuatii diferentiale este

$$F\left(x, y(x), y^{'}(x)\right) = 0, \quad sau \quad y^{'}(x) = f\left(x, y(x)\right),$$

in care functia f este data si suficient de regulata pentru a permite operatiile matematice ce se fac asupra ei pentru a integra ecuatia data.

In cele ce urmeaza expunem catalogul celor mai cunoscute ecuatii diferentiale de ordinul I care sunt direct integrabile, prin simple cuadraturi.

Ecuatii cu variabile separabile

Sunt acele ecuatii diferentiabile pentru care functia din membrul drept au forma

$$f(x, y(x)) = g(x)h(y),$$

deci

$$y^{'}(x) = \frac{dy}{dx} = f(x, y(x)) = g(x)h(y).$$

Solutia se obtine foarte usor, dupa separarea variabilelor, dupa cum urmeaza

$$\frac{dy}{h(y)} = g(x)dx \Rightarrow \int_{y_0}^{y} \frac{ds}{h(s)} = \int_{x_0}^{x} g(s)ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G\left(y(x)\right) - G\left(y_0\right) = \int_{x_0}^{x} g(s)ds \Rightarrow$$

$$y(x) = G^{-1}\left(G\left(y_0\right) + \int_{x_0}^{x} g(s)ds\right).$$

Exemplu

Sa consideram ecuatia:

$$y' = \frac{xy(1+y^2)}{1+x^2}.$$

Procedând ca in cazul theoretic putem separa variabilele. Astfel, obtinem:

$$\frac{dy}{y(1+y^2)} = \frac{x}{1+x^2}dx \Rightarrow \left(\frac{1}{y} - \frac{y}{1+y^2}\right)dy = \frac{x}{1+x^2}dx$$

Acum variabilele sunt separate, deci putem integra in ambii membri:

$$lny - \frac{1}{2}ln(1+y^2) = \frac{1}{2}(1+x^2) + lnC \Rightarrow \frac{y^2}{1+y^2} = C(1+x^2).$$

unde C este o constanta reala arbitrara.

Ecuatii omogene si reductibile la omogene

Sa reamintim mai intâi ca o functie $f = f(x,y)$ este numita **functie omogena de grad n**, in sens Euler, daca satisface relatia

$$f(tx,ty) = t^n f(x,y), \forall t \geq 0.$$

In cazul particular când $n = 0$ se obtine functia omogena de grad 0, sau, simplu, omogena: $f(tx,ty) = f(x,y)$. Relatia este similara pentru o functie de n variabile $f = f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

O ecuatie diferentiala $y' = f(x,y)$ se numeste omogena daca functia "membru drept" este functie omogena de grad 0, in sens Euler. Pentru rezolvarea unei astfel de ecuatii, se da factor comun x si se face schimbarea de functie necunoscuta : $y/x = u(x)$ sau $y = xu(x)$. Se obtine o noua ecuatie diferentiala in functia necunoscuta $u = u(x)$ care este o ecuatie diferentiala cu variabile separabile.

Exemplu

Se considera ecuatia:

$$xy' - y = xtg\,\frac{y}{x}.$$

Putem sa scriem:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + tg\,\frac{y}{x}$$

.

Tema de control trebuie să fie alcătuite din TO DO
In forma de mai sus, se recunoaste o ecuatie diferentiala omogena.
Cu schimbarea de functie $y = xu(x)$, in care derivam in raport cu x, deci,

$$y' = u + xu',$$

se obtine ecuatia $xu'(x) = tgu$, care este cu variabile separabile. Acesta se rezolva dupa modelul de mai sus, se obtine functia $u(x)$ si apoi $y(x) = xu(x)$

Exemplificaţi alte fenomene fizice, sau de alta natura, care pot fi modelate cu ajutorul ecuatiilor diferentiale..

Ecuatii reductibile la ecuatii omogene

Au forma generala

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right).$$

Se disting trei cazuri:

i) $c_1^2 + c_2^2 = 0$, deci $c_1 = c_2 = 0$ si atunci

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y}{a_2x + b_2y}\right) = f\left(\frac{a_1 + b_1\frac{y}{x}}{a_2x + b_2\frac{y}{x}}\right) = g\left(\frac{y}{x}\right),$$

adica s-a obtinut direct o ecuatie omogena.

ii) Cel putin una dintre constantele c_1 si c_2 este nenula iar dreptele de ecuatii $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ si $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ sunt concurente, adica $a_1b_2y - a_2b_1 \neq 0$.

Fie (x_0, y_0) punctul de intersectie al celor doua drepte. Se face schimbarea de variabila independenta si de functie necunoscuta

$$\begin{cases} x = x_0 + t \Rightarrow dx = dt \\ y = y_0 + u \Rightarrow dy = du \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dt} = f\left(\frac{a_1 t + b_1 u + a_1 x_0 + b_1 y_0 + c_1}{a_2 t + b_2 u + a_2 x_0 + b_2 y_0 + c_2} \right) =$$

$$= f\left(\frac{a_1 t + b_1 u}{a_2 t + b_2 u} \right) = g\left(\frac{u}{t} \right),$$

adica am ajuns la cazul i).

iii) Cele doua drepte sunt paralele, deci $a_1 b_2 y = a_2 b_1$. Se face schimbarea numai de functie

$$a_2 x + b_2 y = u \tag{1}$$

Atunci

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = a_1 x + \frac{a_1 b_2}{a_2} y + c_1 = \frac{a_1}{a_2} u + c_1.$$

Derivam acum in relatia (1) in raport cu x si obtinem $a_2 + b_2 y' = u'$ si atunci ecuatia devine

$$\frac{u' - a_2}{b_1} = f\left(\frac{\frac{a_1}{a_2} u + c_1}{u + c_2} \right),$$

adica o ecuatie diferentiala cu variabile separabile.

Ecuatii cu diferentiala totala exacta

Aceste ecuatii diferentiale au forma generala

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \tag{2}$$

care poate fi scrisa in forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M(x, y)}{N(x, y)},$$

in care semnificatia noilor functii $M(x, y)$ si $N(x, y)$ este clara.

Nu orice ecuatie de forma (2) este cu diferentiala totala. Conditia necesara si suficienta ca membrul drept din (2) sa fie o diferentiala totala exacta este ca functiile $P(x, y)$ si $Q(x, y)$ sa admita derivate partiale de ordinul I si aceste derivate sa satisfaca conditia

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Acesta conditie asigura existenta unei functii $F(x, y)$ astfel incâ t

$$dF(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$$

in care

$$P(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}, Q(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Atunci ecuatia ecuatia devine $dF(x, y) = 0$, de unde obtinem $F(x, y) = C$, adica solutia ecuatiei diferentiale este o curba integrala data sub forma implicita. Pentru a gasi efectiv forma functiei F, fixam un punct $A_0(x_0, y_0)$ si luam un punct arbitrar $A(x, y)$. Deoarece expresia

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

este o diferentiala totala, atunci interala acestei expresii intre A_0 si A nu depinde de drumul ce le uneste, ci numai de capetele A_0 si A. Integram atunci intre $A_0(x_0, y_0)$ si $B(x, y_0)$, pe un drum paralel cu axa Ox, apoi intre $B(x, y_0)$ si $A(x, y)$, pe un drum paralel cu axa Oy. Atunci

$$\int_{A_0}^{A} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{A_0}^{A} dF(x, y) = F(x, y) = C.$$

Exemple

Ecuatia diferentiala care modeleaza dezintegrarea radioactiva este o ecuatie diferentiala cu variabile separabile. De asemenea, ecuatia care modeleaza miscarea unei parasute, este o ecuatie diferentiala omogena..

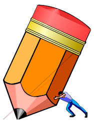
Tema de control trebuie să fie alcătuite din TO DO

Exemplificaţi alte fenomene fizice, sau de alta natura, care pot fi modelate cu ajutorul ecuatiilor diferentiale..

M1.U1.6. Rezumat

Principalele tipuri de ecuatii diferentiale direct integrabile sunt: ecuatiile diferentiale cu variabile separabile, ecuatiile diferentiale omogene, ecuatiile diferentiale reductibile la ecuatiile omogene, ecuatiile diferentiale cu diferentiala totala si ecuatiile diferentiale cu factor integrant.

Se poate preciza, inca o data, algoritmul de rezolvare pentru fiecare tip de ecuatie diferentiala in parte.



M1.U1.7. Test de evaluare a cunoştinţelor

Din temele aplicative, se selecteaza cate un exemplu de ecuatie diferentiala, din fiecare tip in parte si se solicita algoritmul pentru aflarea efectiva a solutiei ecuatiei respective.

Temă de control

I. Subiecte teoretice:

- 1. expuneti algoritmul de rezolvare a ecuatiilor diferentiale cu variabile separabile;
- 2. Reduceti o ecuatie diferentiala la o ecuatie omogena.

II Subiecte aplicative:

- 1. rezolvati o ecuatie diferentiala omogena;
- 2. rezolvati o ecuatie diferentiala cu factor integrant

Unitatea de învăţare M1.U2. Ecuatii diferentiale liniare si reductibile la ecuatii diferentiale liniare

Cuprins

M1.U2.1. Introducere

Ecuatiile diferentiale liniare sunt ecuatiile in care functia necunoscuta si derivata ei apar doar liniar, deci numai la puterea intai.

Pentru fiecare tip de ecuatii diferentiala se da un exemplu, rezolvat in intregime.

M1.U2.2. Obiectivele unităţii de învăţare

Această unitate de învăţare îşi propune ca obiectiv principal o iniţiere a studenţilor în rezolvarea ecuatiilor diferentiale de ordinul I precum si deprinderea reducerii altor tipuri de ecuatii diferentiale la ecuatii diferentiale liniare..

Prezentarea ecuatiei diferentiale liniara de ordinul I si a doua metode de rezolvare a acesteia.

Sunt prezentate principalele tipuri de ecuatii diferentiale de ordinul I, care se pot reduce la ecuatii diferentiale liniare (ecuatii de tip Bernoulli si Riccati).

Sunt prezentate pe scurt ecuatiile diferentiale cu parametru precum si cele mai cunoscute astfel de ecuatii: ecuatiile Lagrange si ecuatiile Clairaut.

Prezentarea rezultatului central al teoriei ecuatiilor diferentiale liniare de ordinul I: teorema privind existenta si unicitatea solutiei unei astfel de ecuatii, teorema datorata lui Picard.

Competenţe conferite

La sfârşitul acestei unităţi de învăţare studenţii vor fi capabili să:

- înţeleagă algoritmul de rezolvare a ecuatiilor diferentiale liniare
- sa reduca rezolvarea unei ecuatii diferentiale de tip Bernoulli la una liniara;
- sa reduca rezolvarea unei ecuatii diferentiale de tip Riccati la una liniara.

Durata medie de parcurgere a primei unităţi de învăţare este de 4 ore.

Ecuatii diferentiale liniare de ordinul I

Obiective:

Denumirea de ecuatii liniare este data de faptul ca la astfel de ecuatii atâ t functia necunoscuta câ t si derivata ei apar doar la puterea intâ i. Aceste ecuatii au forma generala

$$y' + P(x)y = Q(x). \tag{1}$$

In cazul in care $Q(x, y) \equiv 0$ spunem ca avem o ecuatie omogena, deci

$$y' + P(x)y = 0.$$

Vom indica doua metode de rezolvare a ecuatiei (1).

Metoda 1.

Se rezolva intâ i ecuatia omogena, folosind tehnica de la ecuatiile cu variabile separabile:

$$y' + P(x)y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -P(x)y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -P(x)dx.$$

De aici, prin integrare, in ambii membri

$$\int_{y_0}^{y} \frac{ds}{s} = -\int_{x_0}^{x} P(t)dt,\ y_0 = y(x_0) \Rightarrow lny - lny_0 = -\int_{x_0}^{x} P(t)dt$$

$$\Rightarrow y = y_0 e^{-\int_{x_0}^{x} P(t)dt}$$

Notam cu $C = y(x_0)$ si cu $y_0(x)$ solutia generala a ecuatiei omogene. Asadar

$$y_0(x) = Ce^{-\int_{x_0}^{x} P(t)dt}.$$

Pentru determinarea solutiei generale a ecuatiei neomogene, vom folosi **metoda variatiei constantele**. Asta inseamna ca vom presupune ca C din expresia solutiei ecuatiei omogene devine functie. Vom cauta o solutie particulara a ecuatiei neomogene sub forma

$$y_p(x) = C(x)y_0(x).$$

Functia $C(x)$ se determina prin fortarea acestui $y_p(x)$ sa fie efectiv solutie pentru ecuatia neomogena:

$$C'y_0 + Cy_0' + PCy_0 = Q \Rightarrow C'y_0 = Q \Rightarrow C' = \frac{Q}{y_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x} C'(t)dt = \int_{x_0}^{x} \frac{Q(t)}{y_0(t)} dt.$$

Folosim acum faptul ca

$$C(x_0) = y_0$$

si tinem cont de expresia lui $y_0(x)$, astfel ca obtinem

$$C(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} Q(t) e^{\int_{x_0}^{s} P(\tau)d\tau} dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_p(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} P(t)dt} \left[y_0 + \int_{x_0}^{x} Q(t) e^{\int_{x_0}^{s} P(\tau)d\tau} dt \right].$$

Metoda 2.

Inmultim in ambii membri ai ecuatiei neomogene initiale cu

$$e^{\int_{x_0}^{x} P(\tau)d\tau}$$

si obtinem succesiv:

$$y' e^{\int_{x_0}^{x} P(\tau)d\tau} + P(x) y e^{\int_{x_0}^{x} P(\tau)d\tau} = Q(x) e^{\int_{x_0}^{x} P(\tau)d\tau} \Rightarrow$$

$$\frac{d}{sx}\left[y e^{\int_{x_0}^{x} P(\tau)d\tau} \right] = Q(x) e^{\int_{x_0}^{x} P(\tau)d\tau} \qquad \mod 2cm$$

Integram acum in ambii membri :

$$y e^{\int_{x_0}^{x} P(\tau)d\tau} - C = \int_{x_0}^{x} Q(s) e^{\int_{x_0}^{s} P(\tau)d\tau} ds$$

Pentru $x = x_0$ obtinem $y(x_0) - C = 0$ si deci $C = y(x_0) = y_0$ astfel ca, in final, solutia devine

$$y(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} P(\tau)d\tau} \left[y_0 + \int_{x_0}^{x} Q(s) e^{\int_{x_0}^{s} P(\tau)d\tau} ds \right].$$

Ecuatii diferentiale reductibile la ecuatii liniare

Ecuatii Bernoulli

Aceste ecuatii diferentiale au forma generala

$$y' + P(x)y = Q(x)y^{\alpha}, \alpha \neq 0 \ si \ \ \alpha \neq 1.$$

Sa remarcam faptul ca restrictia $\alpha \neq 0{,}1$ nu este esentiala, este impusa doar de metoda de abordare a ecuatiilor Bernoulli. Daca $\alpha = 0$ sau $\alpha = 1$ se obtin direct ecuatii diferentiale liniare.

Primul pas in abordarea ecuatiilor Bernoulli este inmultirea in ambii membri ai formei geberale cu $y^{-\alpha}$, deci:

$$y^{-\alpha} y' + P(x)y^{1-\alpha} = Q(x).$$

Se face apoi schimbarea de functie

$$y^{1-\alpha}(x) = z(x),$$

relatie in care se deriveaza in raport cu x si se obtine

$$(1-\alpha)y^{-\alpha}y' = z'.$$

Atunci ecuatia initiala devine

$$\frac{1}{1-\alpha}z' + P(x)z = Q(x) \Rightarrow$$
$$z' + (1-\alpha)P(x)z = (1-\alpha)Q(x),$$

adica o ecuatie diferentiala liniara.

Să ne reamintim...

Din forma ultimei ecuatii diferentiale liniare de mai sus se vede necesitatea ipotezei ca $\alpha \neq 1$, altfel nu ar avea sens impartirea cu $1-\alpha$.

Ecuatii Riccati

Sunt ecuatii diferentiale a caror forma generala este

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x).$$

Pentru a afla solutia generala a ecuatiilor Riccati, trebuie sa se cunoasca o solutie particulara a lor. Daca nu este data explicit o astfel de solutie particulara, atunci se poate tatona o solutie particulara, cautând-o de forma functiilor $P(x)$, $Q(x)$ sau $R(x)$. In cele ce urmeaza vom presupune cunoscuta o solutie particulara pe care o notam cu y_1. Pentru a reduce o ecuatie Riccati la o ecuatie liniara vom indica doua metode.

Metoda 1.

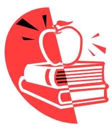
Se face schimbarea de functie

$$z(x) = y(x) - y_1(x),$$

relatie din care, prin derivare, conduce la $z' = y' - y_1'$. Introducem in ecuatia Riccati initiala si obtinem

$$\begin{aligned}
&z' = Py^2 + Qy + R - (Py_1^2 + Qy_1 + R) \Rightarrow \\
&z' = zPy + zPy_1 + zQ \Rightarrow \\
&z' - (2Py_1 + Q)z = Pz^2,
\end{aligned}$$

adica am obtinut o ecuatie Bernoulli cu $\alpha = 2$, din care se va obtine apoi o ecuatie liniara.



- Se poate rezolva o ecuatie Riccati prin aceasta metoda

Tema de control trebuie să fie alcătuite din TO DO

Alegeti de la *Teme aplicative* o ecuatie diferentiala Riccati si reduceti-o la una liniara

Metoda 2.

Notam cu y_1 o solutie particulara a ecuatiei Riccati si facem schimbarea de functie

$$y(x) = y_1(x) + \frac{1}{z(x)} \Rightarrow y' = y_1' - \frac{z'}{z^2}.$$

Introducem in ecuatia initiala si, dupa reducerea termenilor asemenea, se obtine

$$-\frac{z'}{z^2} = P\frac{1}{z^2} + 2y_1P\frac{1}{z} + Q\frac{1}{z^2}.$$

In aceasta ultima ecuatie inmultim cu $-z^2$ si obtinem

$$z' + \big(2P(x)y_1(x) + Q(x)\big) = -P(x).$$

Se observa ca prin metoda a doua se obtine direct o ecuatie diferentiala liniara.

▪ Se poate rezolva o ecuatie Riccati prin metoda a doua.

Tema de control trebuie să fie alcătuite din TO DO

Alegeti de la *Teme aplicative* o ecuatie diferentiala Riccati si reduceti-o direct la una liniara, folosind metoda a doua expusa mai sus.

Să ne reamintim...

▪ Cele doua metode de rezolvare a unei ecuatii diferentiale liniara;

▪ Cum se reduce o ecuatie de tip Bernoulli la una liniara;

▪ Cum se reduce o ecuatie de tip Riccati la una liniara.

▪

Rezumat

Această unitate de învăţare îşi propune ca obiectiv principal o iniţiere a studenţilor în rezolvarea ecuatiilor diferentiale de ordinul I precum si deprinderea reducerii altor tipuri de ecuatii diferentiale la ecuatii diferentiale liniare..

Prezentarea ecuatiei diferentiale liniara de ordinul I si a doua metode de rezolvare a acesteia.

Sunt prezentate principalele tipuri de ecuatii diferentiale de ordinul I, care se pot reduce la ecuatii diferentiale liniare (ecuatii de tip Bernoulli si Riccati).

Sunt prezentate pe scurt ecuatiile diferentiale cu parametru precum si cele mai cunoscute astfel de ecuatii: ecuatiile Lagrange si ecuatiile Clairaut.

Prezentarea rezultatului central al teoriei ecuatiilor diferentiale liniare de ordinul I: teorema privind existenta si unicitatea solutiei unei astfel de ecuatii, teorema datorata lui Picard.

M1.U1.7. Test de evaluare a cunoştinţelor

I. Subiecte teoretice:

- 1. Expuneti o metoda de rezolvare a unei ecuatii diferentiale liniara.
- 2. Reduceti o ecuatie Bernoulli la una liniara.

II. Subiecte aplicative:

-1 Rezolvati, prin una din cele doua metode, o ecuatie liniara

-2. Rezolvati o ecuatie Riccati, reducandu-o la una liniara.

Temă de control

Alegeti de la *Teme aplicative* exemple de ecuatii liniare si reductibile la ecuatii liniare

Unitatea de învăţare M1.U3. Ecuatii diferentiale cu parametru

Cuprins

M1.U3.1. Introducere

Denumirea acestor ecuatii diferentiale este sugerata de faptul ca in rezolvarea acestor ecuatii se introduce intotdeauna un parametru, de obicei notat cu p.
De asemenea, solutia acestor ecuatii are forma parametrica:

$$\begin{cases} x = x(p) \\ y = y(p) \end{cases}$$

Ecuatiile cu parametru sunt usor de recunoscut, caci in locul formei cunoscute $y' = f(x, y)$ ele au forma $y = f(x, y')$. Dupa ce se face notatia $y' = p$ o ecuatie cu parametru se transforma intr-o ecuatie diferentiala de un tip anterior studiat.

M1.U3.2. Competenţe conferite

La sfârşitul acestei unităţi de învăţare studenţii vor fi capabili să:

- înţeleagă algoritmul de rezolvare a ecuatiilor diferentiale cu parametru
- rezolve o ecuatie cu parametru de tip Lagrange;
- rezolve o ecuatie cu parametru de tip Clairaut.

Durata medie de parcurgere a primei unităţi de învăţare este de 4 ore.

Ecuatii diferentiale cu parametru

Denumirea este sugerata de faptul ca in rezolvarea acestor ecuatii se introduce intotdeauna un parametru, de obicei notat cu p. De asemenea, solutia acestor ecuatii are forma parametrica:

$$\begin{cases} x = x(p) \\ y = y(p) \end{cases}$$

Ecuatiile cu parametru sunt usor de recunoscut, caci in locul formei cunoscute $y' = f(x, y)$ ele au forma $y = f(x, y')$. Dupa ce se face notatia $y' = p$ o ecuatie cu parametru se transforma intr-o ecuatie diferentiala de un tip anterior studiat.
Cu notatia $y' = p$ ecuatia capata forma $y = f(x, p)$. Avem

$$y' = p \Rightarrow \frac{dy}{dx} = p \Rightarrow dy = pdx.$$

Apoi din

$$y = f(x,p) \Rightarrow dy = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial p}dp.$$

Egalam cele doua expresii ale lui dy :

$$dy = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial p}dp \Rightarrow \left(p - \frac{\partial f}{\partial x}\right)dx + \frac{\partial f}{\partial p}dp = 0.$$

Aceasta este o ecuatie diferentiala in care functia necunoscuta este x iar variabile este p. Tipul ecuatiei este unul anterior studiat. Solutia va fi $x = \varphi(p)$ iar din $y = f(x,p)$ se va obtine

$$y = f(\varphi(p), p) = \psi(p),$$

adica solutia finala va fi data in forma parametrica. Sunt consacrate doua tipuri de ecuatii diferentiale cu parametru: ecuatia Lagrange si ecuatia Clairaut.

Ecuatia Lagrange.

Are forma generala

$$y = xf(y') + g(y') \tag{1}$$

cu conditia $f(x) \neq x$. Se face deci notatia $y' = p$ si atunci din (1) avem

$$y = xf(p) + g(p).$$

Egalam, ca in cazul general, cele doua expresii pentru dy si obtinem

$$\begin{aligned}
&dy = \frac{\partial}{\partial x}\left(xf(p) + g(p)\right)dx + \frac{\partial}{\partial p}\left(xf(p) + g(p)\right)dp \Rightarrow \\
&dy = f(p)dx + xf'(p)dp + g'(p)dp = pdx \Rightarrow \\
&\left(f(p) - p\right)dx + \left(xf'(p) + g'(p)\right)dp = 0 \Rightarrow \\
&\left(f(p) - p\right)\frac{dx}{dp} + xf'(p) = -g'(p) \Rightarrow \\
&\frac{dx}{dp} + \frac{f'(p)}{f(p) - p}x = -\frac{g'(p)}{f(p) - p}.
\end{aligned}$$

Ultima ecuatie este o ecuatie diferentiala lineara, in functia necunoscuta x, de variabila p, si deci va da solutia $x = \varphi(p)$. Apoi functia y se determina cu formula

$$y = \varphi(p)f(p) + g(p) = \psi(p).$$

Asadar, solutia ecuatiei Lagrange este una parametrica.

Ecuatia Clairaut

Are forma generala

$$y = xy' + g(y'), \tag{1}$$

adica surprinde tocmai situatia exceptata de la ecuatia Lagrange. Din $y' = p$ obtinem $dy = pdx$ iar din

$$y = xp + g(p)$$

avem

$$dy = pdx + \left(x + g'(p)\right)dp.$$

Egalam cele doua expresii ale lui dy si reducem termenul pdx, care apare in ambii membri. Se obtine ecuatia

$$\left(x + g'(p)\right)dp = 0.$$

Atunci $dp = 0$ de unde $p = C =$ constanta.
Deci $y' = C$ de unde rezulta

$$y = Cx + C_1, C_1 = \text{ constanta.}$$

Avem astfel un exemplu de solutie singulara.

Să ne reamintim...

Solutia singulara este acea solutie a unei ecuatii diferentiale care nu se obtine din solutia generala a ecuatiei prin particularizarea constantei de integrare.

Pe de alta parte, din

$$x + g'(p) = 0$$

se obtine

$$x = -g'(p) = \varphi(p)$$

si atunci

$$y = -pg'(p) + g(p) = \psi(p),$$

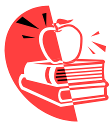
adica, din nou, solutia este parametrica.

In cele ce urmeaza vom demonstra un rezultat central in teoria ecuatiilor diferentiale. Este un rezultat calitativ care asigura existenta si unicitatea solutiei pentru problema Cauchy asociata unei ecuatii diferentiale ordinare, de ordinul I. Reamintim ca pentru problema Cauchy se fixeaza un punct x_0 in plan si se noteaza $y_0 = y(x_0)$. Deci problema Cauchy este :

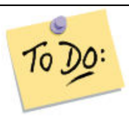
$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y_0 = y(x_0). \end{cases} \tag{2}$$

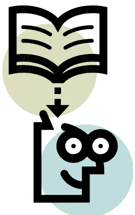
Pentru $a > 0$ si $b > 0$ se considera dreptunghiul D dat de urmatorul produs cartezian $D = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$, adica

$$D = \{(x, y) \in R^2 / |x - x_0| \le a, |y - y_0| \le b\}.$$



▪ Se poate rezolva o ecuatie Lagrange si una Clairaut, ca exemple de ecuatii diferentiale cu parametru

	Tema de control trebuie să fie alcătuite din TO DO Alegeti de la *Teme aplicative* o ecuatie diferentiala Lagrange si una Clairaut si Rezolvati-le complet, folosind procedurile expuse mai sus.



Să ne reamintim...

Deosebirea esentiala intre o ecuatie Lagrange si una Clairaut: Ecuatia Clairaut surprinde tocmai cazul exceptat la ecuatia Lagrange.

Teorema lui Picard

Teorema 1. *Presupunem satisfacute ipotezele:*

i) f este functie continua pe domeniul D in ambele variabile;

ii) f este functie Lipschitz in raport cu variabila y, pe D.

Atunci, problema Cauchy (2) admite o solutie $y = \varphi(x)$ definita pe intervalul $|x - x_0| \le h$, unde

$$h = min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}, M = \sup_{(x,y)\in D} |f(x, y)|.$$

In plus, solutia problemei este unica.

Demonstratie. Reamintim definitia functiei Lipschitz:

$\forall y_1, y_2 \in [y_0 - b, y_0 + b], \exists L > 0$ astfel incât

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le L|y_1 - y_2|, \forall x \in [x_0 - a, x_0 + a].$$

O presupusa solutie a problemei Cauchy $y = \varphi(x)$ trebuie sa satisfaca conditia Cauchy $\varphi(x_0) = y_0$ si inlocuita in ecuatie o transforma pe acesta in identitate:

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)).$$

Integram aceasta ecuatie pe intervalul $[x_0, x]$ si obtinem

$$\int_{x_0}^{x} \varphi'(\tau) d\tau = \int_{x_0}^{x} f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau \Rightarrow$$

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau.$$

Folosind conditia Cauchy, se obtine

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau. \tag{3}$$

Asadar, daca functia φ este o solutie a problemei Cauchy (2) atunci ea satisface ecuatia integrala (3). Vom demonstra acum si rezultatul reciproc si anume daca functia φ satisface ecuatia (3), atunci φ este o solutie a problemei Cauchy. Intr-adevar, daca in (2) inlocuim x cu x_0 se obtine

$$\varphi(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau = y_0.$$

Apoi, derivam in (2), membru cu membru si folosind regula de derivare a integralei cu parametru, obtinem

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)),$$

deci φ satisface si conditia Cauchy si ecuatia din problema Cauchy.

Demonstratia acestor doua rezultate ne da dreptul ca, in cele ce urmeaza, in loc sa rezolvam problema Cauchy (2) vom rezolva ecuatia integrala (3). Cu o sugestie data de forma ecuatiei (3) vom construi un sir de functii a carui limita este tocmai solutia ecuatiei (3), deci a problemei Cauchy (2). In ultima parte a demonstratiei vom arata ca solutia este unica. Pentru existenta solutiei vom construi sirul de functii $\{y_n\}_{n \in N}$ astfel:

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, y_0) d\tau,\ y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, y_{n-1}(\tau)) d\tau, n \ge 2.$$

Sirul este construit astfel incât $|x-x_0|\le h$. Se arata fara dificultate ca sirul este bine construit, in sensul ca argumentele functiei f sunt din domeniul D. Demonstram acum ca sirul este convergent. Folosind definitia lui M si faptul ca f este functie Lipschitz, obtinem succesiv:

$$|y_1(x)-y_0|\le M(x-x_0),$$
$$|y_2(x)-y_1(x)|\le \int_{x_0}^{x}|f(\tau,y_1(\tau)-f(\tau,y_0)|\,d\tau\le$$
$$L\int_{x_0}^{x}|y_1(\tau)-y_0|\,d\tau\le LM\int_{x_0}^{x}(\tau-x_0)d\tau=LM\frac{(x-x_0)^2}{2}.$$

Se demonstreaza imediat prin inductie matematica, prin analogie cu calculele de mai sus, ca:

$$|y_n(x)-y_{n-1}(x)|\le L^{n-1}M\frac{(x-x_0)^n}{n!}.$$

Este clar ca sirul poate fi scris in forma

$$y_n=y_n-y_{n-1}+y_{n-1}-y_{n-1}+\ldots+y_1-y_0+y_0=y_0+\sum_{k=1}^{n}(y_k-y_{k-1}).$$

Atunci sirul $y_{n\,n\in N}$ poate fi privit ca sirul sumelor partiale ale seriei

$$y_0+\sum_{k=1}^{\infty}(y_k-y_{k-1}).$$

Aceasta serie este convergenta deoarece este de o serie numerica convergenta, si anume de seria

$$|y_0|+\sum_{k=1}^{\infty}L^{k-1}M\frac{h^k}{k!}.$$

Se stie ca sirul sumelor partiale este chiar uniform convergent. Apoi un sir uniform convergent are proprietatea de "ereditate", adica transmite proprietatile termenilor sai si limitei. Deoarece termenii sirului sunt functii continue, deducem astfel ca si limita sa este functie continua. Notam cu $\varphi(x)$ limita sirului, deci

$$\varphi(x)=\lim_{n\to\infty}y_n(x).$$

Ne propunem sa aratam ca functia $\varphi(x)$, astfel definita, este solutia problemei Cauchy (2), adica conform cu prima parte a demonstratiei, $\varphi(x)$ este solutia ecuatiei (3). Daca trecem la limita in relatia de definitie a sirului $y_{n\,n\in N}$

$$y_n(x) = y_0 + \int f(\tau, y_{n-1}(\tau))d\tau$$

obtinem

$$\varphi(x) = y_0 + \int f(\tau, \varphi(\tau))d\tau.$$

Cum $\varphi(x_0) = y_0$, deducem ca φ satisface ecuatie (3). Sa demonstram acum unicitattea solutiei. Presupunem, prin reducere la absurd, ca ar mai fi o functie ψ care sa satisfaca problema Cauchy (2), deci si ecuatia (3). Atunci

$$\psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, \psi(\tau))d\tau.$$

Pe de alta parte, avem

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, y_{n-1}(\tau))d\tau.$$

Daca scadem ultimele doua relatii, obtinem

$$|y_n(x) - \psi(x)| \le \int_{x_0}^{x} |f(\tau, y_{n-1}(\tau)) - f(\tau, \psi(\tau))| d\tau \le$$

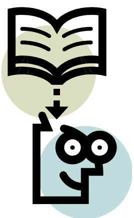
$$\le L\int_{x_0}^{x} |y_{n-1}(\tau) - \psi(\tau)| d\tau \le L^2 \int_{x_0}^{x} |y_{n-2}(\tau) - y_{n-1}(\tau)| d\tau.$$

Din aproape in aproape se obtine, in final

$$|y_n(x) - \psi(x)| \le L^{n-1} M \frac{h^n}{n!}.$$

Prin trecere la limita cu $n \to \infty$ deducem ca ψ este limita sirului $\{y_n\}_{n\in N}$ si cum limita unui sir este unica, deducem ca $\varphi \equiv \psi$.

Observatie. In demonstratia unicitatii solutiei este esential faptul ca f este functie Lipschitz. Daca se renunta la aceasta ipoteza, atunci problema Cauchy are solutie, dar aceasta nu mai este unica, asa cum afirma si rezultatul urmator, pe care il dam fara demonstratie.



Să ne reamintim...

Proprietatea functiei *f(x,y) d*e a avea proprietatea lui Lipschitz in raport cu x este esentiala in demonstrarea unicitatii solutiei problemei Cauchy. Daca se renunta la aceasta cerinta asupra functiei f atunci avem numai un rezultat de existenta a solutiei si nu si de unicitate, ca in teorema care urmeaza, datorata lui Peano.

Teorema 2. ***(Peano).*** *Consideram problema Cauchy (2), formulata ca in Teorema lui*

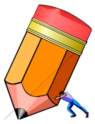
Picard, in care insa functia f este doar continua in ambele variabile (deci f nu este si functie Lipschitz). Atunci problema (2) are cel putin o solutie.

Rezumat

Denumirea acestor ecuatii diferentiale este sugerata de faptul ca in rezolvarea acestor ecuatii se introduce intotdeauna un parametru, de obicei notat cu p.
De asemenea, solutia acestor ecuatii are forma parametrica:

$$\begin{cases} x = x(p) \\ y = y(p) \end{cases}$$

Ecuatiile cu parametru sunt usor de recunoscut, caci in locul formei cunoscute $y' = f(x, y)$ ele au forma $y = f(x, y')$. Dupa ce se face notatia $y' = p$ o ecuatie cu parametru se transforma intr-o ecuatie diferentiala de un tip anterior studiat.



Test de evaluare a cunoştinţelor

Se poate propune ca test:

I. Subiecte teoretice:

- 1 O ecuatie generala cu parametru (pentru a vedea deosebirea fata de celelalte tipuri de ecuatii diferentiale studiate.

- 2. O ecuatii diferentiala cu parametru de tip Lagrange (sau Clairaut);

II. Subiecte aplicative:

- 1. O ecuatie generala cu parametru
- 2. O ecuatii diferentiala cu parametru de tip Clairaut (Lagrange).

Unitatea de învăţare M1.U4. Ecuatii diferentiale de ordin superior

Cuprins

M1.U4.1. Introducere

Se prezinta ecuatiile diferentiale de ordin superior cu coeficienti variabili si cu coeficienti constanti.

Pentru ecuatiile diferentiale de ordin superior omogene, sunt prezentate notiunile de independenta a solutiilor precum si sistemul fundamental de solutii pentru astfel de ecuatii. Independenta solutiilor este verificata cu ajutorul wronskianului

Este expusa metoda variatiei constantelor pentru aflarea unei solutii particulare pentru ecuatiile diferentiale de ordin superior neomogene.

Pentru ecuatiile diferentiale de ordin superior omogene, cu coeficienti constanti, se ataseaza ecuatia caracteristica si se analizeaza cazurile când ecuatia caracteristica are radacini reale simple, radacini reale multiple, radacini complexe simple si radacini complexe conjugate.

In cazul ecuatiile diferentiale de ordin superior neomogene sunt prezentate doua metode pentru determinarea unei solutii particulre si anume metoda variatiei constantelor si metoda sugestiva.

Ecuatia diferentiala Euler, care are coeficientii variabili, este prezentat algoritmul de reducere a acesteia la o ecuatie cu coeficienti constanti.

M1.U4.2. Competenţe

La sfârşitul acestui modul studenţii vor fi capabili să:

- rezolve ecuatii diferentiale cu variabile separabile;
- sa expuna algoritmul pentru rezolvarea ecuatiilor diferentiale omogene
- să reduca unele ecuatii diferentiale la ecuatii diferentiale omogene;
- rezolve ecuatii diferentiale cu diferentiala totala;
- sa reduca ecuatiile diferentiale cu factor integrant la ecuatii diferentiale cu diferentiala totala.

Ecuatii diferentiale liniare de ordinul *n*

Obiective:

1. *Se prezinta ecuatiile diferentiale de ordin superior cu coeficienti variabili si cu coeficienti constanti.*

2. *Pentru ecuatiile diferentiale de ordin superior omogene, sunt prezentate notiunile de independenta a solutiilor precum si sistemul fundamental de solutii pentru astfel de ecuatii.*

Definitia 3. *Se numeste ecuatie diferentiala de ordinul* n *liniara si neomogena o ecuatie de forma*

$$a_n(x)y^{(n)}(x)+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x)+\ldots+a_1(x)y'(x)+a_0(x)y(x)=f(x), \tag{1}$$

in care functia necunoscuta este $y=y(x),\ x\in[a,b]$. Coeficientii ecuatiei si membrul drept sunt functii date si continue pe $[a,b]$, deci $a_i, f \in C^0[a,b]$. Daca $f(x) \equiv 0$, obtinem ecuatia omogena, deci

$$a_n(x)y^{(n)}(x)+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x)+...+a_1(x)y'(x)+a_0(x)y(x)=0. \tag{2}$$

Pentru formularea problemei Cauchy, se adauga conditiile initiale:

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1, ...,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}, \tag{3}$$

in care $y_0, y_1,..., y_{n-1}$ sunt cantitati date, deci cunoscute. Punctul x_0 este fixat arbitrar, $x_0 \in [a,b]$. Conditiile initiale precizeaza, de fiecare data, valoarea initiala a functiei necunoscute si ale derivatelor sale până la ordinul de derivare $n-1$. In cazul de fata problema Cauchy este problema formata din ecuatia (1) si conditiile initiale (3).

Definitia 4. *Se numeste solutie a problemei Cauchy, data de (1) si (3), o functie $\varphi = \varphi(x), x \in [a,b]$, $\varphi \in C^n[a,b]$, care verifica conditiile initiale (3) si inlocuita in ecuatia (1) o transforma pe aceasta in identitate.*

Introducem operatorul diferential L prin

$$L = a_n \frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + ... + a_0 \frac{d}{dx} + a_0 \tag{7}$$

si atunci ecuatia (1) capata forma mai simpla

$$(1')\ \ Ly(x) = f(x), x \in [a,b]$$

Propozitia 5. *Operatorul diferential introdus in (7) este liniar:*

$$L(y_1 + y_2) = Ly_1 + Ly_2, L(\lambda y) = \lambda Ly \Leftrightarrow$$
$$L(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 Ly_1 + \lambda_2 Ly_2.$$

Demonstratie. Afirmatiile sunt imediate având in vedere liniaritatea operatiei de derivare:

$$(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}, (\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}.$$

Sa mai remarcam forma mai simpla a ecuatiei omogene, folosind operatorul L, introdus in (7), adica $Ly(x) = 0$. De asemenea, daca y_1, y_2,..., y_n sunt solutii pentru ecuatia omogena, atunci si functia $y = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i$, unde C_1, C_2,..., C_n sunt constante, este de asemenea solutie pentru ecuatia omogena. Intr-adevar, avem $Ly_i = 0$ (pentru ca y_i este solutie) si, in baza liniaritatii lui L,

$$Ly = L\left(\sum_{i=1}^{n} C_i y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} L(C_i y_i) = \sum_{i=1}^{n} C_i L(y_i) = 0.$$

Definitia 6. *Functiile* y_1, y_2,..., y_n *se numesc liniar independente pe intervalul* $[a,b]$ *daca nu exista o combinatie liniara a lor fara ca toti coeficientii combinatiei sa fie nuli, adica daca*

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + ... + \lambda_n y_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0.$$

Exemplu

Functiile $1, x, e^x$ sunt liniar independente pe R caci daca avem

$$\lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 e^x = 0, \ \forall x \in R$$

atunci $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Intr-adevar, dam lui x valorile $0, -1$ si 1 si obtinem un sistem liniar si omogen de ecuatii in necunoscutele λ_i al carui determinant este nenul, deci admite numai solutia banala.

Definitia 7. *Se numeste wronskian al functiilor* $y_1(x)$, $y_2(x)$,..., $y_n(x)$, *determinantul definit prin*

$$W(x) = W\big(y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)\big) =$$

$$= \begin{vmatrix} y_1(x), & y_2(x), & ... & y_n(x) \\ y_1'(x), & y_2'(x), & ... & y_n'(x) \\ - & - & - & - \\ y_1^{(n-1)}(x), & y_2^{(n-1)}(x), & ... & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Teorema 8 *Daca functiile* $y_1(x)$, $y_2(x)$,..., $y_n(x)$ *sunt liniar dependente, atunci wronskianul lor este nul, deci* $W(y_1, y_2, ..., y_n) = 0$, $\forall x \in [a,b]$.

Demonstratie Pentru ca functiile $y_1(x)$, $y_2(x)$,..., $y_n(x)$ sunt liniar dependente, deducem ca exista coeficientii λ_1, λ_2,..., λ_n, nu toti nuli, astfel incât sa avem $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + ... + \lambda_n y_n = 0$. Derivam aceasta relatie, succesiv, membru cu membru, si obtinem sistemul de ecuatii

$$\begin{cases} \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + ... + \lambda_n y_n = 0 \\ \lambda_1 y_1' + \lambda_2 y_2' + ... + \lambda_n y_n' = 0 \\ ------------ \\ \lambda_1 y_1^{(n-1)} + \lambda_2 y_2^{(n-1)} + ... + \lambda_n y_n^{(n-1)} = 0 \end{cases}$$

Am obtinut un sistem liniar si omogen in necunoscutele λ_1, λ_2,..., λ_n. Dar, conform cu ipoteza, acest sistem admite si solutii nenule.

Deducem astfel ca determinantul sistemului (care este tocmai wronskianul functiilor $y_1(x)$,

$y_2(x)$,..., $y_n(x)$) trebuie sa fie nul, deci $W(x)=0$.

Observatie. Folosind negarea in teorema anterioara, se obtine un alt rezultat care este mai util in aplicatii decât cel din Teorema 1. Asadar avem urmatorul rezultat.

Teorema 9. *Daca* $\exists x_0 \in [a,b]$ *astfel incât wronskianul lor este nenul,*

$$W\big(y_1(x_0), y_2(x_0),..., y_n(x_0)\big) \neq 0,$$

atunci functiile $y_1(x)$, $y_2(x)$,..., $y_n(x)$ sunt liniar independente pe $[a,b]$.

Un rezultat foarte important privind wronskianul unui sistem de functii este de urmatoarea teorema, datorata lui Liouville.

Teorema 10. (Liouville) *Daca exista un punct* $x_0 \in [a,b]$ *astfel incât sa avem* $W(x_0) \neq 0$, *atunci* $W(x) \neq 0$, $\forall x \in [a,b]$.

Demonstratie. Folosind regula de derivare a unui determinant, se obtine ecuatia

$$\frac{dW}{dx} = -\frac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)} W(x) \Rightarrow \frac{dW}{W} = -\frac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)} dx.$$

Se integreaza ultima ecuatie (care este cu variabile separabile) pe intervalul $[x_0, x]$ si se obtine

$$W(x) = W(x_0) e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{a_{n-1}(\tau)}{a_n(\tau)} d\tau}.$$

Având in vedere ipoteza ca $W(x_0) \neq 0$ si tinând cont ca functia exponentiala este strict pozitiva, se deduce ca $W(x) \neq 0$, $\forall x \in [a,b]$.

Având in vedere rezultatele din ultimele doua teoreme, deducem ca daca un sistem de functii este liniar independent intr-un punct $x_0 \in [a,b]$ atunci functiile sunt liniar independent pe intreg intervalul $[a,b]$.

Teorema 11. *Sa presupunem ca functiile* $y_1, y_2,..., y_n, y \in C^{n-1}[a,b]$ *satisfac conditiile* $W(y_1, y_2,..., y_n) \neq 0$ *pe intervalul* $[a,b]$ *si* $W(y_1, y_2,..., y_n, y) = 0$ *pe intervalul* $[a,b]$.

Atunci exista constantele $C_i, i = 1,2,...,n$ astfel incât sa avem

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n.$$

Demonstratie. In baza primei ipoteze, avem

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n & y \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' & y' \\ - & - & - & - & - \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} & y^{(n-1)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0.$$

Putem sa scriem

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n & y \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' & y' \\ - & - & - & - & - \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} & y^{(n-1)} \\ y_1^{(k)} & y_2^{(k)} & \dots & y_n^{(k)} & y^{(k)} \end{vmatrix} = 0, \forall k = 0,1,2,\dots,n$$

Dezvoltam acest determinat dupa ultima linie si obtinem

$$\lambda_1 y_1^{(k)} + \lambda_2 y_2^{(k)} + \dots + \lambda_n y_n^{(k)} + \lambda_0 y^{(k)} = 0, \tag{8}$$

in care λ_0 este tocmai wronskianul functiilor y_1, $y_2, \dots, y_n$ si care este nenul, in baza primei ipoteze a teoremei. Deci putem imparti cu $-\lambda_0$ in ecuatia (8), scrisa pentru $k = 0$ si obtinem

$$y = \frac{\lambda_1}{\lambda_0} y_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_0} y_2 + \dots + \frac{\lambda_n}{\lambda_0} y_n. \tag{9}$$

Folosind notatia

$$\frac{\lambda_i(x)}{\lambda_0(x)} = \mu_i(x),$$

relatia (9) devine

$$y = \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + \dots + \mu_n y_n. \tag{10}$$

Demonstratia se incheie daca aratam ca μ_i sunt constante, $\forall i = 1,2,\dots,n$. In acest scop derivam succesiv in (10) si, de fiecare data folosim (8) astfel ca se obtine sistemul de ecuatii

$$\begin{cases} \mu_1' y_1 + \mu_2' y_2 + \dots + \mu_n' y_n = 0 \\ \mu_1' y_1' + \mu_2' y_2' + \dots + \mu_n' y_n' = 0 \\ ------------ \\ \mu_1' y_1^{(n-1)} + \mu_2' y_2^{(n-1)} + \dots + \mu_n' y_n^{(n-1)} = 0 \end{cases}$$

Acesta este un sistem algebric liniar si omogen in necunoscutele μ_i' al carui determinant este tocmai wronskianul $W(y_1, y_2, \dots, y_n \neq 0$ si atunci sistemul admite doar solutia banala $\mu_i' = 0$ si deci $\mu_i = C_i =$constant, $\forall i = 1,2,...,n$.

Definitia 12. *Se numeste sistem fundamental de solutii pentru ecuatia omogena (3.2), un sistem de functii* y_1, $y_2,..., y_n$ *care au wronskianul nenul, deci*

$$W(y_1, y_2,..., y_n) \neq 0.$$

Dupa Teorema 4, daca se cunoaste un sistem fundamental de solutii y_1, $y_2,..., y_n$ pentru ecuatia omogena (2), atunci solutia generala a acestei ecuatii este

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n,$$

unde C_i sunt constante, $\forall i = 1,2,...,n$.

Exemplu

Fie ecuatia

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$$

care are solutiile $y_1 = x$, $y_2 = x^2$. Se constata imediat ca $W(y_1, y_2) = x \neq 0$ pe $R \setminus \{0\}$. Atunci y_1 si y_2 formeaza un sistem fundamental de solutii pentru ecuatia data si deci solutia generala a ecuatiei este

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2,$$

unde C_1 si C_2 sunt constante.

In incheierea acestui paragraf facem c â teva consideratii asupra problemei Cauchy data de ecuatia diferentiala omogena (2) si conditiile Cauchy (3).

Teorema 13. *Daca pentru ecuatia diferentiala omogena (2) se cunoaste un sistem fundamental de solutii, definite pe* $[a,b]$*, atunci exista o singura solutie a acestei ecuatii care sa satisfaca conditiile initiale (3).*

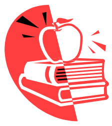
Demonstratie. Dupa Teorema 4, daca se cunoaste un sistem fundamental de solutii y_1, $y_2,..., y_n$ pentru ecuatia omogena (2), atunci solutia generala a acestei ecuatii este

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n,$$

unde C_i sunt constante, $\forall i = 1,2,...,n$. Obligam aceasta solutie sa verifice conditiile initiale si obtinem sistemul

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \ldots + C_n y_n(x_0) = y_0 \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + \ldots + C_n y_n'(x_0) = y_1 \\ ------------ \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

Am obtinut un sistem algebric liniar si neomogen in necunoscutele C_1, $C_2, \ldots, C_n$. Determinantul sistemului este wronskianul functiilor y_1, $y_2, \ldots, y_n$ si deci este nenul caci am presupus ca funstiile y_1, $y_2, \ldots, y_n$ formeaza un sistem fundamental de solutii. Deci sistemul admite solutie unica. Cum constantele C_1, $C_2, \ldots, C_n$ sunt unice, deducem ca solutia y de mai sus este unica.



Exemplu

Fie ecuatia

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$$

cu solutiile $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$, $y_3 = e^{3x}$. Se verifica imediat (cu ajutorul wronskianului) ca aceste functii formeaza un sistem fundamental de solutii. Atunci solutia generala a ecuatiei date este

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}.$$

Daca impunem conditiile Cauchy $y(0) = y'(0) = 0$ si $y''(0) = 1$ obtinem ca problema Cauchy are ca singura solutie functia

$$y = \frac{1}{2} e^x - e^{2x} + \frac{1}{2} e^{3x}.$$

In propozitia urmatoare, demonstram un rezultat prin care se poate reduce ordinul unei ecuatii diferentiale.

Propozitia 14. *Daca pentru ecuatia neomogena (1) se cunoaste o solutie* $y_1(x)$, *atunci ordinul ecuatiei devine* $n-1$ *daca se face schimbarea de functie*

$$z(x) = \frac{y(x)}{y_1(x)}.$$

Demonstratie. Avem succesiv

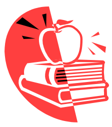
$$y = y_1 z \Rightarrow y' = y_1' z + y_1 z' \Rightarrow$$
$$y'' = y_1'' z + 2y' z' + y_1 z'.$$

Prin inductie matematica se obtine imediat

$$y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k y_1^{(n-k)} z^{(k)}.$$

Aceste derivate se inlocuiesc in ecuatia (1) si se obtine o ecuatie in functia z care are coeficientul lui z nul, pentru ca y_1 este solutie a ecuatiei (1).

Se noteaza apoi $z' = u$ si astfel se obtine o noua ecuatie diferentiala in functia necunoscuta u care are ordinul $n-1$.



Exemplu
Fie ecuatia de ordinul II

$$y'' + 2xy' - 2y = 0$$

Despre care stim ca admite solutia $y_1 = x$. Facem schimbarea de functie $y(x) = xz(x)$, calculam derivatele lui y, le inlocuim in ecuatie si obtinem noua ecuatie

$$xz'' + 2(1+x^2)z' = 0.$$

Facem o noua schimbare de functie $z'(x) = u(x)$ si obtinem ecuatia de ordinul I

$$xu' + 2(1+x^2)u = 0.$$

Ecuatii de ordin superior neomogene

Obiective:

1. *Este expusa metoda variatiei constantelor pentru aflarea unei solutii particulare pentru ecuatiile diferentiale de ordin superior neomogene.*
2. *Pentru ecuatiile diferentiale de ordin superior omogene, cu coeficienti constanti, se ataseaza ecuatia caracteristica si se analizeaza cazurile când ecuatia caracteristica are radacini reale simple, radacini reale multiple, radacini complexe simple si radacini complexe conjugate.*
3. *Pentru ecuatiile diferentiale de ordin superior neomogene sunt prezentate doua metode pentru determinarea unei solutii particulre si anume metoda variatiei constantelor si metoda sugestiva.*
4. *Pentru ecuatia diferentiala Euler, care are coeficientii variabili, este prezentat algoritmul de reducere a acesteia la o ecuatie cu coeficienti constanti.*

Forma generala a unei ecuatii diferentiale de ordinul n liniara si neomogena este

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x), \tag{11}$$

unde $x \in [a,b]$.
Daca introducem operatorul diferential L prin

$$L = a_n \frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{d}{dx} + a_0, \tag{12}$$

ecuatia capata forma

$$Ly(x) = f(x). \tag{13}$$

Teorema care urmeaza furnizeaza metoda de aflare a solutiei generale a ecuatii neomoege.

Teorema 15. *Solutia generala a ecuatiei neomogene se obtine adunând la solutia generala a ecuatiei omogene o solutie particulara a ecuatiei neomogene.*

Demonstratie. Deci, daca notam cu y_O solutia generala a ecuatie omogene, cu y_p o soluti particulara a ecuatie neomogene si y_G solutia generala a ecuatie neomogene, atunci avem de demonstrat relatia

$$y_G = y_O + y_p$$

Fie $y(x)$ o solutie a ecuatiei neomogene, $Ly(x) = f(x)$. Presupunem cunoscuta o solutie particulara a ecuatiei neomogene, y_p.
Facem schimbarea de functie $y(x) = y_p(x) + z(x)$. Atunci avem

$$L(y) = L(y_p + z) + L(y_p) + L(z),$$

adica

$$f(x) = f(x) + L(z)$$

astfel ca $L(z) = 0$, adica z este solutie a ecuatiei omogene. Dar orice solutie a ecuatiei omogene are forma

$$z(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n,$$

unde y_1, $y_2, \ldots, y_n$ este un sistem fundamental de solutii pentru ecuatia omogena. Revenind la schimbarea de functie de mai sus ca

$$y = y_p + C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$$

si demonstratia se incheie.

Urmeaza sa indicam o metoda pentru determinarea unei solutii particulare a ecuatiei neomogene. Cea mai generala metoda este cea propusa de Lagrange, numita **metoda variatiei constantelor**.

Teorema 16. *Daca functiile* $y_1, y_2, ..., y_n$ *formeaza un sistem fundamental de solutii pentru ecuatia omogena, atunci o solutie particulara a ecuatiei neomogene este*

$$y_p(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + ... + C_n(x)y_n(x), \tag{14}$$

unde functiile $C_1(x), C_2(x), ..., C_n(x)$ *verifica sistemul*

$$\begin{cases} y_1C_1' + y_2C_2' + ... + y_nC_n' = 0 \\ y_1'C_1' + y_2'C_2' + ... + y_n'C_n' = 0 \\ ------------ \\ y_1^{(n-2)}C_1' + y_2^{(n-2)}C_2' + ... + y_n^{(n-2)}C_n' = 0 \\ y_1^{(n-1)}C_1' + y_2^{(n-1)}C_2' + ... + y_n^{(n-1)}C_n' = \dfrac{f(x)}{a_n(x)} \end{cases} \tag{15}$$

Demonstratie. Deoarece functiile $y_1, y_2, ..., y_n$ formeaza un sistem fundamental de solutii pentru ecuatia omogena, atunci solutia generala a ecuatiei omogene este

$$z(x) = C_1y_1 + C_2y_2 + ... + C_ny_n$$

in care C_i sunt constante. Fie functia

$$y(x) = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + ... + C_n(x)y_n$$

obtinuta din z inlocuind constantele C_i cu functiile $C_i(x)$. Aratam ca daca functiile $C_i(x)$ verifica sistemul (15), atunci y este o solutie particulara a ecuatiei neomogene. Derivam succesiv in expresia lui y si, dupa ce folosim ecuatiile sistemului (15), obtinem urmatorul sistem

$$\begin{cases} y = C_1y_1 + C_2y_2 + ... + C_ny_n \\ y' = C_1y_1' + C_2y_2' + ... + C_ny_n' \\ ------------ \\ y^{(n-1)} = C_1y_1^{(n-1)} + C_2y_2^{(n-1)} + ... + C_ny_n^{(n-1)} \\ y^{(n)} = C_1y_1^{(n)} + C_2y_2^{(n)} + ... + C_ny_n^{(n)} + \dfrac{f(x)}{a_n} \end{cases}$$

Inmultim prima ecuatie cu a_0, a doua cu $a_1, ...,$ ultima cu a_n iar relatiile obtnute se aduna membru cu membru. Obtinem ecuatia

$$
\begin{aligned}
& a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = \\
& = C_1\left[a_n y_1^{(n)} + a_{n-1} y_1^{(n-1)} + \ldots + a_1 y_1' + a_0 y_1\right] + \\
& + C_2\left[a_n y_2^{(n)} + a_{n-1} y_2^{(n-1)} + \ldots + a_1 y_2' + a_0 y_2\right] + \\
& + \ldots + C_n\left[a_n y_n^{(n)} + a_{n-1} y_n^{(n-1)} + \ldots + a_1 y_n' + a_0 y_n\right] + f(x).
\end{aligned}
$$

Dar, parantezele drepte care sunt coeficienti pentru C_1, $C_2, \ldots, C_n$ sunt nule, deoarece functiile y_i sunt solutii pentru ecuatia omogena. Astfel, ecuatia de mai sus devine

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f(x),$$

ceea ce arata ca y este solutie pentru ecuatia neomogena.

Ecuatii diferentiale de ordin superior cu coeficienti constanti

Vom studia intâi ecuatiile diferentiale de ordinul n omogene, care au forma generala

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0,\ x \in [a,b] \tag{16}$$

in care $a_i =$ constant, $\forall i = 1,2,\ldots,n$.

Pentru astfel de ecuatii se poate determina intotdeauna un sistem fundamnetal de solutii. In acest scop, se cauta solutii sub forma $y(x) = Ae^{\lambda x}$ unde A este o constanta $A \neq 0$ iar λ este un parametru complex, $\lambda \in C$.

Derivam succesiv expresia lui y, derivatele obtinute se inlocuiesc in ecuatia (16) si gasim

$$Ae^{\lambda x}\left(a_n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0\right) = 0.$$

Deoarece $A \neq 0$ si $e^{\lambda x} \neq 0$ deducem ca

$$a_n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0. \tag{17}$$

In felul acesta am obtinut o ecuatie algebrica in necunoscuta λ care se numeste **ecuatie caracteristica** atasata unei ecuatii diferentiale de ordinul n. In cele ce urmeaza, vom aborda ecuatia (16) prin intermediul ecuatiei sale caracteristice (17). Distingem mai multe cazuri:

Cazul 1. Presupunem intâi ca ecuatia (17) are toate radacinile reale si simple $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \ldots \neq \lambda_n$. Atunci functiile

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x},\ y_2(x) = e^{\lambda_2 x}, \ldots,\ y_n(x) = e^{\lambda_n x}$$

formeaza un sistem fundamental de solutii pentru ecuatia (4.6) deoarece aceste functii au wronskianul nul. Intr-adevar, inlocuind in expresia wronskianului, vom obtine un determinant Vandermonde:

$$W(y_1, y_2, ..., y_n) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & - & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & - & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ - & - & - & - \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & - & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & - & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & - & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & - & \lambda_n^2 \\ - & - & - & - \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & - & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n)x} \prod_{1 \le j < i \le n} \left(a_i - a_j\right) \neq 0.$$

Cazul 2. Presupunem ca ecuatia caracteristica (17) are toate radacinile complexe, simple. Atunci ecuatia caracteristica are grad par. Daca admite radacina $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ atunci admite si radacina $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, care este complex conjugata primei radacini. Consideram cunoscute formula lui Euler de la numere complexe si regula de derivare a functiei exponentilae, de exponent complex

$$e^z = e^{x+iy} = e \left(\cos y + i \sin y\right)$$
$$\left(e^{\lambda x}\right)' = \lambda e^{\lambda x}, \lambda \in C.$$

Corespunzator celor doua radacini complexe ale ecuatiei caracteristice, pentru ecuatia diferentiala (16) se ia solutia

$$e^{\alpha x}\left(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x\right)$$

Analog pentru o alta radacina complexa a ecuatiei caracteristice. Atunci, intr-o maniera asemanatoare celei din cazul 1, se arata ca aceste functii au wronskianul nenul, deci formeaza un sistem fundamental de solutii pentru ecuatia omogena.

Cazul 3. Presupunem ca ecuatia caracteristica are o radacina reala λ_1, multipla de ordinul m. Atunci functiile

$$e^{\lambda_1 x},\ x e^{\lambda_1 x},\ x^2 e^{\lambda_1 x}, ...,\ x^{m-1} e^{\lambda_1 x}$$

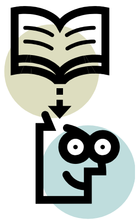
sunt liniar independente, ceea ce se poate constata cu ajutorul wronskianului. De asemenea, se folosesc relatiile

$$L\left(x^k e^{\lambda x}\right) = L\left(\frac{d^k}{d\lambda^k}\left(e^{\lambda x}\right)\right) = \frac{d^k}{d\lambda^k}\left(L\left(e^{\lambda x}\right)\right),$$

unde L este operatorul diferential introdus in prima parte a lectiei.

Cazul 4. Presupunem ca ecuatia caracteristica (17) are o radacina complexa multipla de ordinul m, $\lambda_1 = \alpha + i\beta$. Atunci ea admite si radacina $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, care este complex conjugata primei tot multipla de ordinul m. Atunci solutia ecuatiei diferentiale va fi

$$e^{\alpha x}\left[\left(C_0 + C_1 x + \ldots + C_{m-1}x^{m-1}\right)\cos \beta x + \right.$$
$$\left. + \left(B_0 + B_1 x + \ldots + B_{m-1}x^{m-1}\right)\sin \beta x\right]$$



Să ne reamintim...

Trebuiesc fixate bine cele patru cazuri privind natura radacinilor ecuatiei caracteristice, pentru ca in functie de acesta natura se defineste sistemul fundamental de solutii pentru ecuatia diferentiala de ordin superior.

Ecuatii diferentiale de ordinul n neomogene

O solutie particulara a ecuatiei neomogene se poate determina folosind metoda variatiei constantelor, expusa in prima parte a lectiei. Din cauza particularitatii ecuatiei de a avea coeficientii constanti, se poate folosi si o metoda "sugestiva", in sensul ca solutia particulara a ecuatiei neomogene sa fie cautata de forma termenul liber al ecuatiei, deci de forma functiei $f(x)$. Se disting urmatoarele cazuri.

Cazul 1. Presupunem ca functia termen liber a ecuatiei, $f(x)$, are forma

$$f(x) = e^{\alpha x}P(x),$$

unde $P(x)$ este o functie polinomiala. Se testeaza intâi daca α este radacina pentru ecuatia caracteristica. Daca nu este, atunci solutia particulara $y_p(x)$ se cauta de forma $y_p(x) = e^{\alpha x}Q(x)$, unde $Q(x)$ este o functie polinomiala, de acelasi grad cu P, dar cu alti coeficienti. Coeficientii lui Q se detrmina obligând y_p sa fie efectiv solutie pentru ecuatia diferentiala. Daca α este radacina pentru ecuatia caracteristica, multipla de ordinul m, atunci solutia particulara $y_p(x)$ se cauta de forma

$$y_p(x) = x^m e^{\alpha x}Q(x),$$

unde $Q(x)$ este o functie polinomiala in situatia de mai sus si care se determina la fel ca mai sus.

Cazul 2. Presupunem ca functia termen liber a ecuatiei, $f(x)$, are forma

$$f(x) = e^{\alpha x}\left[A(x)\cos\beta x + B(x)\sin\beta x\right],$$

unde $A(x)$ si $B(x)$ sunt functii polinomiale, nu neaparat de acelasi grad. Se testeaza intâi daca $\alpha + i\beta$ este radacina pentru ecuatia caracteristica. Daca nu este, atunci solutia particulara $y_p(x)$ se cauta de forma

$$y_p(x) = e^{\alpha x}\left[P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x\right],$$

unde $P(x)$ si $Q(x)$ sunt functii polinomiale, de acelasi grad si anume de

$$\text{grad} = \max\{gradA, gradB\}.$$

Daca $\alpha + i\beta$ este radacina pentru ecuatia caracteristica, multipla de ordinul m, atunci solutia particulara $y_p(x)$ se cauta de forma

$$y_p(x) = x^m e^{\alpha x}\left[P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x\right],$$

unde $P(x)$ si $Q(x)$ sunt functii polinomiale in situatia de mai sus. Coeficientii pentru P si Q se detrmina obligând y_p sa fie efectiv solutie pentru ecuatia diferentiala, si se procedeaza la identificare.

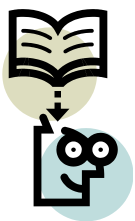
Cazul 3. Presupunem ca functia termen liber a ecuatiei, $f(x)$, are forma

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

unde au formele corespunzatoare cazurile 1, respectiv 2. Atunci solutia particulara $y_p(x)$ se cauta de forma

$$y_p(x) = y_{p1}(x) + y_{p2}(x),$$

unde $y_{p1}(x)$ si $y_{p2}(x)$ sunt solutiile particulare de la cazurile 1, respectiv 2.



Să ne reamintim...

Trebuiesc fixate bine cele trei cazuri privind functia termen liber, pentru ca in functie de acesta se construieste solutia particulara a ecuatiei neomogene.

De asemenea, trebuie retinut si cazul de „rezonanta”.

Ecuatii diferentiale de tip Euler

O ecuatie diferentiala de tip Euler este un exemplu de ecuatie cu coeficienti variabili pentru care se poate determina un sistem fundamental de solutii, pentru ecuatia omogena. Ecuatiile diferentiale de tip Euler au forma generala

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 x y' + a_0 y = f(x),$$

in care coeficientii a_i sunt constanti si dati, iar functia termen liber f este de asemenea data.

O ecuatie diferentiala de tip Euler este usor de recunoscut pentru ca monomul din fata unei derivate are acelasi grad cu ordinul de derivare al functiei necunoscute.

Se face schimbarea de variabila $x = e^t$, daca $x > 0$ sau $x = -e^t$, daca $x < 0$ si ecuatia Euler se transforma intr-o ecuatie cu coeficienti constanti. Dupa modelul de derivare expus mai jos

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{1}{x} = \frac{dy}{dt}e^{-t}$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}e^{-t}\right) =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}e^{-t}\right)e^{-t} = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right),$$

se obtine ca regula generala

$$y^{(k)} = e^{-kt}\left(\frac{d^k y}{dt^k} + b_{k-1}\frac{d^{k-1}y}{dt^{k-1}} + \ldots + b_1\frac{dy}{dt}\right),$$

in care coeficientii b_i sunt constanti. Coeficientul din fata lui $y^{(k)}$ este $x^k = e^{kt}$ si atunci când inlocuim in ecuatia initiala exponentialele dispar, deci se obtine o ecuatie cu coeficienti constanti.

Să ne reamintim...

O ecuatie diferentiala de ordin superior cu coeficienti variabili este de tip Euler daca coeficientii ecuatiei sunt monoame in care puterea variabilei coincide cu ordinul de derivare al functiei necunoscute.

Rezumat

Se prezinta ecuatiile diferentiale de ordin superior cu coeficienti variabili si cu coeficienti constanti.

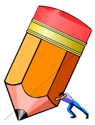
Pentru ecuatiile diferentiale de ordin superior omogene, sunt prezentate notiunile de independenta a solutiilor precum si sistemul fundamental de solutii pentru astfel de ecuatii.

Este expusa metoda variatiei constantelor pentru aflarea unei solutii particulare pentru ecuatiile diferentiale de ordin superior neomogene.

Pentru ecuatiile diferentiale de ordin superior omogene, cu coeficienti constanti, se ataseaza ecuatia caracteristica si se analizeaza cazurile când ecuatia caracteristica are radacini reale simple, radacini reale multiple, radacini complexe simple si radacini complexe conjugate.

Pentru ecuatiile diferentiale de ordin superior neomogene sunt prezentate doua metode pentru determinarea unei solutii particulre si anume metoda variatiei constantelor si metoda sugestiva.

Pentru ecuatia diferentiala Euler, care are coeficientii variabili, este prezentat algoritmul de reducere a acesteia la o ecuatie cu coeficienti constanti.



Test de evaluare a cunoştinţelor

Se poate propune ca test:

Subiecte teoretice:

- 1. Aflarea sitemului fundamental de solutii pentru o ecuatie omogena in cazul in care ecuatia caracteristica atasata are numai radacini reale simple;

- 2. Metoda variatiei constantelor pentru determinarea unei solutii particulare pentru ecuatia de ordin superior neomogena.

Subiecte aplicative:

- 1. O ecuatie de ordin superior cu coeficienti constanti in cazul in care ecuatia caracteristica atasata are o radacina reala multipla;

- 2. O ecuatie de ordin superior de tip Euler.

Modulul 2. Sisteme dinamice (Sisteme de ecuatii diferentiale)

Cuprins

Introducere

Sunt prezentate doua metode de rezolvare a sistemelor de ecuatii diferentiale liniare. Metoda reducerii este metoda prin care abordarea unui sistem de ecuatii diferentiale se reduce la rezolvarea unei ecuatii diferentiale de ordin superior.

A doua metoda, metoda ecuatiei caracteristice, este destul de asemanatoare cu cea din cazul ecuatiilor diferentiale de ordin superior.

Pentru sistemele de ecuatii diferentiale liniare nepmogene sunt expuse doua metode pentru a determina o solutie particulara. Prima metoda, metoda variatiei constantelor (metoda lui Lagrange) propune o solutie particulara pornind de la solutia generala a formei omogene a respectivului sistem de ecuatii diferentiale.

Prin a doua metoda, numita si metoda sugestiva, se propune o solutie particu-lara de forma vectorului termen liber.

De asemenea, se abordeaza sistemele dinamice autonome si sistemele simetrice. Rezolvarea acestora se reduce la aflarea unui numar, bine determinat, de integrale prime liniar independente. Se expun doua metode pentru aflarea integralelor prime si se indica matricea iacobiana prin care se stabileste independenta lor.

Competenţe

Dupa parcurgerea acestui modul studentii vor detine doua metode de rezolvare a unui sistem de ecuatii diferentiale:

- metoda reducerii, care consta in reducerea rezolvarii unui sistem de ecuatii la o singura ecuatie, cu o singura necunoscuta, dar de ordin superior. Ordinul ecuatiei este cel mult egal cu numarul de ecuatii diferentiale din sistemul initial;
- metoda ecuatiei caracteristice, care este o metoda general valabila, asemnatoare cu metoda de abordare a ecuatiilor diferentiale de ordin superior, cu coeficienti constanti.

De asemenea, studentii vor aborda sistemele dinamice autonome si sistemele simetrice. Rezolvarea acestora se reduce la aflarea unui numar, bine determinat, de integrale prime liniar independente. Se expun doua metode pentru aflarea integra-lelor prime si se indica matricea iacobiana prin care se stabileste independenta lor.

Unitatea de învăţare M2.U1. Sisteme dinamice liniare

Cuprins

M2.U1.1. Introducere

Sistemele liniare de ecuatii diferentiale se rezolva in trei etape:

1. se ataseaza forma omogena a respectivului sistem si sistemul omogen se rezolva

prin una din cele doua metode :

- metoda reducerii, care consta in reducerea rezolvarii unui sistem de ecuatii la o singura ecuatie, cu o singura necunoscuta, dar de ordin superior. Ordinul ecuatiei este cel mult egal cu numarul de ecuatii diferentiale din sistemul initial;
- metoda ecuatiei caracteristice, care este o metoda general valabila, asemnatoare cu metoda de abordare a ecuatiilor diferentiale de ordin superior, cu coeficienti constanti.

2. Se cauta o solutie particulara a sistemul de ecuatii, in forma neomogena. Aceasta se poate afla prin metoda variatiei constantelor sau prin metoda sugestiva, adica solutia particulara este sugerata de vectorul termen liber;
3. Solutia generala a sistemului neomogen se obtine insumand solutia generala a sistemului omogen cu solutia particulara a sistemului neomogen

	**Competenţe conferite** Dupa parcurgerea acestei unitati de invatare studentii vor detine doua metode de rezolvare a unui sistem de ecuatii diferentiale: - metoda reducerii, care consta in reducerea rezolvarii unui sistem de ecuatii la o singura ecuatie, cu o singura necunoscuta, dar de ordin superior. Ordinul ecuatiei este cel mult egal cu numarul de ecuatii diferentiale din sistemul initial; - metoda ecuatiei caracteristice, care este o metoda general valabila, asemnatoare cu metoda de abordare a ecuatiilor diferentiale de ordin superior, cu coeficienti constanti. Solutia generala a sistemului dinamic neomogen este suma dintre solutia generala a sistemului omogen si o solutie particulara a sistemului neomogen.

Sisteme de ecuatii diferentiale liniare

Obiective:

1. *Sunt prezentate doua metode de rezolvare a sistemelor de ecuatii diferentiale liniare. Metoda reducerii este metoda prin care abordarea unui sistem de ecuatii diferentiale se reduce la rezolvarea unei ecuatii diferentiale de ordin superior. A doua metoda, metoda ecuatiei caracteristice, este destul de asemanatoare cucea din cazul ecuatiilor diferentiale de ordin superior.*

2. *Pentru sistemele de ecuatii diferentiale liniare nepmogene sunt expuse doua metode pentru a determina o solutie particulara. Prima metoda, metoda variatiei constantelor (metoda lui Lagrange) propune o solutie particulara pornind de la solutia generala a formei omogene a respectivului sistem de ecuatii diferentiale. Prin a doua metoda se propune o solutie particulara de forma vectorului termen liber.*

Forma generala a unui sistem de ecuatii diferentiale liniare de ordinul I este

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ ----------- \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases} \tag{18}$$

in care functiile necunoscute sunt $y_i = y_i(x), i = 1,2,...,n$. Functiile $f_i(x), i = 1,2,...,n$ sunt date si suficient de regulate pentru a permite operatiile matematice ce se fac asupra lor pentru a rezolva sistemul sistemul de ecuatii. Daca toate functiile $f_i(x)$ sunt liniare in argumentele lor, atunci sistemul devine liniar si are forma generala

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1n}y_n + b_1 \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{2n}y_n + b_2 \\ ----------------- \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + ... + a_{nn}y_n + b_n \end{cases} \tag{19}$$

Si la sistemul (5.2) functiile necunoscute sunt $y_i = y_i(x), x \in [a,b]$ iar functiile coeficienti $a_{ij} = a_{ij}(x)$ si functiile termen liber $b_i = b_i(x)$ sunt date. Daca toti $b_i = 0$, $i = 1,2,...,n$, atunci sistemul capata forma sa omogena.

Un sistem de ecuatii diferentiale liniare de ordinul I capata o forma mai simpla daca folosim scrierea matriceala

$$Y' = AY + b,$$

$$unde\ Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ - \\ y_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & - & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & - & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & - & a_{nn} \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ - \\ b_n \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Ne propunem sa aratam ca o ecuatie diferentiala liniara de ordinul n se reduce la un sistem de n ecuatii diferentiale liniare de ordinul I cu n functii necunoscute. De exemplu, ecuatia de ordinul doi $y'' - ky = 0$ se reduce la un sistem de doua ecuatii diferentiale de ordinul I cu doua functii necunoscute. Intr-adevar, daca folosim notatiile $y_1(x) = y(x)$ si $y_2(x) = y_1'(x)$, obtinem sistemul liniar

$$\begin{cases} y_1'(x) = y_2(x) \\ y_2'(x) = ky_1(x) \end{cases}$$

In general, pentru ecuatia

$$a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + ... + a_1 y' + a_0 y = f$$

se folosesc notatiile

$$y_1 = y,\ y_2 = y',\ y_3 = y'',\dots,\ y_n = y^{(n-1)}$$

si atunci obtinem sistemul liniar

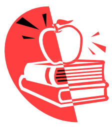
$$\begin{cases} y_1'(x) = y_2(x) \\ y_2'(x) = y_3(x) \\ y_{n-1}'(x) = y_n(x) \\ y_n'(x) = f(x) - \dfrac{1}{a_n}\left(a_0 y_1 + a_1 y_2 + \dots + a_{n-1} y_n\right) \end{cases}$$

Vom expune doua metode de rezolvare un sistem de n ecuatii diferentiale liniare de ordinul I.

Metode de rezolvare a sistemelor liniare de ecuatii diferentiale

Metoda 1.

Analogia de mai sus dintre o ecuatie diferentiala liniara de ordinul n si un sistem de n ecuatii diferentiale liniare de ordinul I sugereaza o prima metoda de rezolvare a sistemelor de ecuatii diferentiale liniare si pe care o vom numi **metoda reducerii**. Aceasta consta in reducerea sistemului la o ecuatie diferentiala cu o singura functie necunoscuta, in general de ordin egal cu numarul ecuatiilor din sistem. Mai precis, se fixeaza o functie necunoscuta, sa zicem y_n, si se expliciteaza celelalte functii necunoscute impreuna cu derivatele lor cu ajutorul lui y_n. Se obtine o ecuatie diferentiala de ordinul n in functia necunoscuta y_n.



Exemplu
Sa consideram sistemul particular

$$\begin{cases} y_1' = 4y_1 - y_2 \\ y_2' = 5y_1 + 2y_2 \end{cases}$$

Prin derivare obtinem

$$y_1'' = 4y_1' - y_2'$$
$$y_2'' = 5y_1' + 2y_2'$$

din care, prin combinatii evidente, rezulta

$$y_1'' - 6y_1' + 13y_1 = 0,$$

adica o ecuatie diferentiala de ordinul doi, cu o singura functie necunoscuta, y_1.

Daca scriem sistemul de ecuatii diferentiale in maniera vectoriala si se „uita" de semnificatia vectoriala a notatiilor, putem trata sistemul ca fiind o singura ecuatie diferentiala..

Metoda 2.

Vom expune acum o metoda care aminteste de rezolvarea ecuatiilor diferentiale cu coeficienti constanti. Se numeste **metoda ecuatiei caracteristice**. Pentru sistemul dat se cauta solutii de forma

$$Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ - \\ y_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ - \\ C_n \end{pmatrix}e^{\lambda x}=\begin{pmatrix} C_1e^{\lambda x} \\ C_2e^{\lambda x} \\ - \\ C_ne^{\lambda x} \end{pmatrix}$$

Se obliga acest Y sa fie efectiv solutie si dupa ce simplificam cu $e^{\lambda x}$ obtinem urmatorul sistem algebric, liniar si omogen

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)C_1+a_{12}C_2+\ldots+a_{1n}C_n=0 \\ a_{21}C_1+(a_{22}-\lambda)C_2+\ldots+a_{2n}C_n=0 \\ ------------ \\ a_{n1}C_1+a_{n2}C_2+\ldots+(a_{nn}-\lambda)C_n=0 \end{cases}$$

Pentru ca sistemul sa admita si solutii diferite de solutia banala, trebuie ca determinantul sistemului sa fie nul, adica

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & - & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & - & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & - & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

Dupa calcularea determinantului se obtine o ecuatie algebrica de gradul n in necynoscuta λ, de forma

$$\lambda^n+b_1\lambda^{n-1}+\ldots+b_{n-1}\lambda+b_0=0, \tag{21}$$

care se numeste **ecuatia caracteristica** a sistemului. Aici se vede analogia cu ecuatia caracteristica atasata ecuatiilor diferentiale de ordinul n. In felul acesta am redus problema rezolvarii sistemului de ecuatii diferentiale la rezolvarea ecuatiei sale caracteristice care este o ecuatie algebrica polinomiala.

Ca si in cazul ecuatiilor diferentiale de ordinul n, vom distinge mai multe cazuri, in functie de natura radacinilor ecuatiei caracteristice.

Cazul 1. Presupunem ca ecuatia caracteristica are o radacina reala simpla λ_1. Solutia sistemului se cauta de forma

$$y_1=C_1e^{\lambda_1 x},\ y_2=C_2e^{\lambda_1 x},\ldots,y_n=C_ne^{\lambda_1 x},$$

care se obliga sa verifice sistemul de ecuatii diferentiale. Se va obtine un sistem algebric de $n-1$ ecuatii in necunoscutele C_1, C_2, ..,C_n. Se vor explicita, de exemplu, constantele C_2, C_3,...,C_n in functie de C_1 iar, in final, se va lui C_1 o valoare particulara.

Cazul 2. Presupunem ca ecuatia caracteristica are o radacina complexa simpla $\lambda_1 = \alpha + i\beta$. Pentru ca ecuatia caracteristica are coeficienti reali, ea va admite si radacina complex conjugata $\lambda_2 = \alpha - i\beta$. Solutia sistemului se cauta de forma

$$Y = \begin{pmatrix} C_1 \cos \beta x + B_1 \sin \beta x \\ C_2 \cos \beta x + B_2 \sin \beta x \\ ----------- \\ C_n \cos \beta x + B_n \sin \beta x \\ \end{pmatrix} e^{\alpha x}$$

Introducem solutia gasita in sistemul de ecuatii diferentiale initial si, prin metoda identificarii, se obtine un sistem algebric din care se determina constantele C_2, B_2, C_3, B_3,...,C_n, B_n in functie de C_1 si B_1, iar in final se dau valori particulare pentru C_1 si B_1.

Cazul 3. Presupunem ca ecuatia caracteristica are o radacina reala, α, multipla de ordinul m. Cautam solutia sistemului de ecuatii diferentiale sub forma

$$Y = \begin{pmatrix} C_{11} + C_{12}x + ... + C_{1m}x^{m-1} \\ C_{21} + C_{22}x + ... + C_{2m}x^{m-1} \\ ----------- \\ C_{n1} + C_{n2}x + ... + C_{nm}x^{m-1} \end{pmatrix} e^{\alpha x}$$

Coeficientii C_{ij} se determina ca in cazul doi.

Cazul 4. Presupunem ca ecuatia caracteristica are o radacina complexa $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, (deci automat are si conjugata, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$), multipla de ordinul m. Cautam solutia sistemului de ecuatii diferentiale sub forma

$$Y = \begin{pmatrix} \left(C_{11} + .. + C_{1m}x^{m-1}\right)\cos \beta x + \left(B_{11} + .. + B_{1m}x^{m-1}\right)\sin \beta x \\ \left(C_{21} + .. + C_{2m}x^{m-1}\right)\cos \beta x + \left(B_{21} + .. + B_{2m}x^{m-1}\right)\sin \beta x \\ ----------------------- \\ \left(C_{n1} + .. + C_{nm}x^{m-1}\right)\cos \beta x + \left(B_{n1} + .. + B_{nm}x^{m-1}\right)\sin \beta x \end{pmatrix} e^{\alpha x}$$

Să ne reamintim...

Considerarea celor patru cazuri in legatura cu natura radacinilor ecuatiei caracteristice, este analoaga cu situatia ecuatiei caracteristice atasate unei ecuatii diferentiale de ordin superior.

Rezumat

Sunt prezentate doua metode de rezolvare a sistemelor de ecuatii diferentiale liniare. Metoda reducerii este metoda prin care abordarea unui sistem de ecuatii diferentiale se reduce la rezolvarea unei ecuatii diferentiale de ordin superior. A doua metoda, metoda ecuatiei caracteristice, este destul de asemanatoare cucea din cazul ecuatiilor diferentiale de ordin superior.

Pentru sistemele de ecuatii diferentiale liniare nepmogene sunt expuse doua metode pentru a determina o solutie particulara. Prima metoda, metoda variatiei constantelor (metoda lui Lagrange) propune o solutie particulara pornind de la solutia generala a formei omogene a respectivului sistem de ecuatii diferentiale.

Prin a doua metoda se propune o solutie particulara de forma vectorului termen liber.

Test de evaluare a cunoştinţelor

Se poate selecta din *Teme aplicative* un sistem de ecuatii diferentiale care sa fie rezolvat prin ambele metode: metoda substitutiei (care solicita multa intuitie) si metoda ecuatiei caracteristice (care solicita multa munca).

Unitatea de învăţare M2.U2. Sisteme dinamice cu coeficienti constanti

M2.U2.1. Introducere

Deoarece algoritmul pentru determinarea solutiei generale a sistemului omogen a fost deja expus, a mai ramas sa indicam metode pentru a afla o solutie particulara a sistemului neomogen. Ca si in cazul ecuatiilor diferentiale de ordin superior, sunt doua metode: metoda variatiei constantelor, aceiasi ca in cazul sistemelor cu coeficienti variabili si metoda sugestiva.
C â t priveste aceasta ultima metoda, prezentam trei cazuri.

M2.U2.2 Competenţe conferite

Dupa parcurgerea acestei unitati de invatare, studentii stiu sa afle o solutie particulara pentru un sistem dinamic cu coeficienti constanti, atat prin metoda variatiei constantelor cat si prin metoda sugestiva.

Solutia particulara pentru sisteme cu coeficienti constanti

Prin analogie cu algoritmul de rezolvare al ecuatiilor diferentiale de ordin superior, algoritmul de rezolvare al sistemelor neomogene de ecuatii diferentiale este urmatorul:

i) se ataseaza sitemul omogen si se afla solutia sa generala;
ii) se afla o solutie particulara a sistemului neomogen;
iii) solutia generala a sistemului meomogen se obtine prin insumarea solutiei generale a sistemului omogen cu solutia particulara a sistemului neomogen.

Algoritmul pentru determinarea solutiei generale a sistemului dinamic omogen a fost deja expus.

Reamintim ca solutia generala a sistemului omogen se poate obtine prin una din cele doua metode: metoda reducerii si metoda ecuatiei caracteristice.

A mai ramas sa indicam metode pentru a afla o solutie particulara a sistemului neomogen. Ca si in cazul ecuatiilor diferentiale de ordin superior, sunt doua metode: metoda variatiei constantelor, aceiasi ca in cazul sistemelor cu coeficienti variabili si metoda sugestiva. Cât priveste aceasta ultima metoda, prezentam trei cazuri.

Metoda sugestiva

Cazul 1. Presupunem ca toti termenii liberi ai sistemului sunt polinoame, care pot fi de grade diferite, adica de forma

$$\left(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\right)^T = \left(P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x)\right)^T$$

Atunci o solutie particulara a sistemului neomogen va fi luata de forma

$$\left(y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)\right)^T = \left(Q_1(x), Q_2(x), \dots, Q_n(x)\right)^T$$

in care Q_i sunt polinoame de grade egale, si anume

$$grQ_1 = grQ_2 = \dots = grQ_n = \max\{grP_1, grP_2, \dots, grP_n\}.$$

Coeficientii polinoamelor Q_i se afla obligând vectorul coloana

$$\left(y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)\right)^T$$

sa verifice efectiv sistemul diferential neomogen, procedându-se apoi la identificare.

Cazul 2. Presupunem ca toti termenii liberi ai sistemului neomogen sunt de forma

$$\left(f_1(x), f_2(x),..., f_n(x)\right)^T = \left(P_1(x), P_2(x),..., P_n(x)\right)^T e^{\alpha x}$$

unde P_i sunt polinoame, care pot fi de grade diferite. Atunci o solutie particulara a sistemului neomogen va fi luata de forma

$$\left(y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)\right)^T = \left(Q_1(x), Q_2(x),..., Q_n(x)\right)^T e^{\alpha x}$$

daca α nu este radacina pentru ecuatia caracteristica atasata sistemului omogen. Aici, Q_i sunt polinoame de grade egale, si anume

$$grQ_1 = grQ_2 = ... = grQ_n = \max\{grP_1, grP_2,..., grP_n\}.$$

Coeficientii polinoamelor Q_i se afla oblig â nd vectorul coloana

$$\left(y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)\right)^T$$

sa verifice efectiv sistemul diferential neomogen, proced â ndu-se apoi la identificare. Daca α este radacina pentru ecuatia caracteristica atasata sistemului omogen, multipla de ordinul m, atunci o solutie particulara a sistemului neomogen va fi luata de forma

$$\left(y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)\right)^T = \left(Q_1(x), Q_2(x),..., Q_n(x)\right)^T x^m e^{\alpha x}$$

in care polinoamele Q_i sunt in situatia de mai sus si se determina in maniera expusa mai sus. Trebuie sa remarcam ca, prin particularizarea lui $\alpha = 0$, in cazul 2, obtinem cazul 1.

Cazul 3. Presupunem ca termenii liberi ai sistemului neomogen sunt de forma

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(f_1(x), f_2(x),..., f_n(x)\right)^T = \\ &= \left[\left(P_1(x),..., P_n(x)\right)^T \cos\beta x + \left(R_1(x),..., R_n(x)\right)^T \sin\beta x\right] e^{\alpha x} \end{aligned}$$

Daca $\alpha + i\beta$ nu este radacina pentru ecuatia caracteristica atasata sistemului omogen, atunci o solutie particulara a sistemului neomogen va fi luata de forma

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \left(y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)\right)^T = \\ &= \left[\left(Q_1(x),..., Q_n(x)\right)^T \cos\beta x + \left(S_1(x),..., S_n(x)\right)^T \sin\beta x\right] e^{\alpha x} \end{aligned}$$

Daca $\alpha + i\beta$ este radacina pentru ecuatia caracteristica atasata sistemului omogen, de ordin m, atunci o solutie particulara a sistemului neomogen va fi luata de forma

$$y_p(x) = \left(y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\right)^T =$$
$$= \left[\left(Q_1(x), \ldots, Q_n(x)\right)^T \cos \beta x + \left(S_1(x), \ldots, S_n(x)\right)^T \sin \beta x\right] x^m e^{\alpha x}$$

Polinoamele Q_i si S_i sunt in situatia expusa la cazul 2 si se determina in aceiasi maniera.

Exemple

Fenomenul de „rezonanta” este analog cu cel intalnit in cazul ecuatiilor diferentiale scalare de ordin superior cu coeficienti constanti, neomogene.

Se poate constata ca daca nu se tine cont de fenomenul de „rezonanta” nu poate fi determinata o solutie particulara pentru sistemul dinamic neomogen.

Acelasi lucru se poate constata in cazul unei ecuatii diferentiale cu coeficienti constanti neomogena.

Să ne reamintim...

Metoda sugestiva propusa pentru sistemele dinamice cu coeficienti constanti este foarte asemnatoare cu metoda sugestiva propusa pentru ecuatii diferentiale scalare cu coeficienti constanti neomogene.

Rezumat

Prin analogie cu algoritmul de rezolvare al ecuatiilor diferentiale de ordin superior, algoritmul de rezolvare al sistemelor neomogene de ecuatii diferentiale este urmatorul:

i) se ataseaza sitemul omogen si se afla solutia sa generala;
ii) se afla o solutie particulara a sistemului neomogen;
iii) solutia generala a sistemului meomogen se obtine prin insumarea solutiei generale a sistemului omogen cu solutia particulara a sistemului neomogen.

Deoarece algoritmul pentru determinarea solutiei generale a sistemului omogen a fost deja expus, a mai ramas sa indicam metode pentru a afla o solutie particulara a sistemului neomogen. Ca si in cazul ecuatiilor diferentiale de ordin superior, sunt doua metode: metoda variatiei constantelor, aceiasi ca in cazul sistemelor cu coeficienti variabili si metoda sugestiva. Cât priveste aceasta ultima metoda, prezentam trei cazuri.

De fixat cele trei cazuri in care functiile „termen liber” pot „sugera” o solutie particulara pentru sistemul dinamic neomogen

Test de evaluare a cunoştinţelor

Se poate alege din Teme aplicative un sistem dinamic neomogen si sa se determine o solutia particulara a sa, prin comparatie, atat prin metoda variatiei constantelor, cat si prin metoda sugestiva. Atentie la fenomenul de rezonanta !

Unitatea de învăţare M2.U3. Sisteme dinamice autonome si sisteme dinamice simetrice

Cuprins

M2.U3.1. Introducere

Se indica forma generala a unui sistem dinamic autonom si deosebirea dintre acesta si un sistem dinamic neautonom.

Este prezentata notiunea de integrala prima pentru sistemele autonome de ecuatii diferentiale liniare.

Se dovedeste care este numarul de integrale prime liniar independente pentru un sistem dinamic autonom, ca si pentru un sistem simetric.

Rezolvarea sistemelor autonome este redusa la rezolvarea sistemelor caracteristice atasate lor, iar rezolvarea acestora din urma se reduce la determinarea unui numar de integrale prime liniar independente.

Sunt prezentate sistemele simetrice de ecuatii diferentiale si se dovedeste echivalenta dintre acestea si sistemele autonome de ecuatii diferentiale.

	**Competenţe conferite** Dupa parcurgerea acestei unitati de invatare, studentii recunosc cand un sistem dinamic este autonom. Apoi pot determina un numar de *n-1* integrale prime si dovedesc ca acestea sunt independente. Determinarea integralelor prime se face prin una din cele doua metode: metoda multiplicatorilor si metoda separarii variabilelor. Folosind matricea iacobiana se decide daca integralele prime determinate sunt liniar independente. Dterminarea integralelor prime se face prin procedure asemanatoare si pentru sisteme dinamice simetrice. Stabilirea liniarei independente a integralelor prime se face tot prin intermediul matricei iacobiene.

Sisteme autonome de ecuatii diferentiale

Obiective:

1. *Este prezentata notiunea de integrala prima pentru sistemele autonome de ecuatii diferentiale liniare.*

2. *Rezolvarea sistemelor autonome este redusa la rezolvarea sistemelor caracteristice atasate lor, iar rezolvarea acestora din urma se reduce la determinarea unui numar de integrale prime liniar independente.*

3. *Sunt prezentate sistemele simetrice de ecuatii diferentiale si se dovedeste echivalenta dintre acestea si sistemele autonome de ecuatii diferentiale.*

Se considera functiile $f_i : D \to R, D \subset R^n, f_i \in C^1(D), i = 1,2,...,n$.

Definitia 17. *Se numeste sistem diferential autonom un sistem de ecuatii diferen- tiale de ordinul I, neliniare, de forma*

$$\begin{cases} y_1' = f_1(y_1, y_2, ..., y_n) \\ y_2' = f_2(y_1, y_2, ..., y_n) \\ ------------ \\ y_n' = f_n(y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases} \tag{1}$$

in care functiile f_1, f_2,..., f_n nu sunt simultan nule pe D.

Denumirea este sugerata de faptul ca functiile $f_i(x), i = 1,2,...,n$ nu depind explicit de variabila x. Reamintim ca ecuatiile diferentiale ale unui sistem neautonom au forma

$$y_i' = f_i(x, y_1, y_2, ..., y_n),$$

deci variabila x apare explicit.

Definitia 18. *Functia $\varphi : D \to R, \varphi \in C^1(D)$ se numeste integrala prima pentru sistemul autonom (1) daca pentru solutie $(y_1, y_2, ..., y_n)$ a sistemului avem $\varphi(y_1, y_2, ..., y_n) = C$, unde C este o constanta.*

Nu trebuie inteles ca functia φ este constanta, ci valoarea ei calculata pentru o solutie a sistemului este constanta. De exemplu, functia $\varphi(x, y) = \sin x + y$ este integrala prima pentru un sistem diferential autonom de doua ecuatii cu doua necunoscute care admite solutia $y_1 = \arcsin x$, $y_2 = 2 - x$. Intr-adevar, $\varphi(y_1, y_2) = \sin y_1 + y_2 = x + 2 - x = 2$. Valoarea constantei C depinde de solutia sistemului pentru care se calculeazafunctia φ, deci pentru alta solutie a sistemului, valoarea functiei φ va fi alta constanta.

Anticipam ca rezolvarea unui sistem autonom de ecuatii diferentiale se reduce la aflarea unui anumit numar de integrale prime ale sale. Vom incepe prin a indica tehnici pentru a afla integrale prime.

Teorema 1. *Functia $\varphi : D \to R, \varphi \in C^1(D)$ este integrala prima pe D pentru sistemul autonom (1) daca si numai daca φ satisface ecuatia*

$$f_1(y_1, ..., y_n)\frac{\partial \varphi}{\partial y_1} + f_2(y_1, ..., y_n)\frac{\partial \varphi}{\partial y_2} + ... + f_n(y_1, ..., y_n)\frac{\partial \varphi}{\partial y_n} = 0, \quad \forall (y_1, ..., y_n) \in D. \tag{2}$$

Demonstratie. Necesitatea Presupunem ca functia φ este integrala prima pentru sistemul (1), deci, pentru orice solutie $(y_1, y_2, ..., y_n)$ a sistemului, avem

$$\varphi(y_1, y_2, ..., y_n) = C.$$

Prin diferentiere, obtinem

$$d\varphi(y_1, y_2, ..., y_n) = 0,$$

adica

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}y_1^{'}+\frac{\partial\varphi}{\partial y_2}y_2^{'}+...+\frac{\partial\varphi}{\partial y_n}y_n^{'}=0.$$

Insa din ecuatiile sistemului avem $y_k^{'}=f_k$ si atunci ecuatia de mai sus devine

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}f_1+\frac{\partial\varphi}{\partial y_2}f_2+...+\frac{\partial\varphi}{\partial y_n}f_n=0,$$

adica tocmai ecuatia (2).

Suficienta. Presupunem ca functia φ satisface ecuatia (2). Trebuie sa aratam ca φ este integrala prima pentru sistemul (1). Luam o solutie oarecare a sistemului, $(y_1, y_2,..., y_n)$ si vrem sa aratam ca $\varphi(y_1, y_2,..., y_n)=C$. De fapt, aratam ca $d\varphi(y_1, y_2,..., y_n)=0$. Deoarece $(y_1, y_2,..., y_n)$ este solutie pentru sistem, avem $y_k^{'}=f_k$. Pentru ca φ satisface ecuatia (2) si $f_k=y_k^{'}$, deducem

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}y_1^{'}+\frac{\partial\varphi}{\partial y_2}y_2^{'}+...+\frac{\partial\varphi}{\partial y_n}y_n^{'}=0,$$

adica $d\varphi(y_1, y_2,..., y_n)=0$ de unde deducem ca $\varphi(y_1, y_2,..., y_n)=C$, pentru orice solutie $(y_1, y_2,..., y_n)$ a sistemului.

Definitia 20. *Functiile φ_1, $\varphi_2,...,\varphi_p$ cu $p\le n$, care sunt integrale prime pentru sistemul atronom (1), sunt liniar independente intr-un punct $x_0\in[a,b]$ daca*

$$rang\left(\frac{D(\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_p)}{D(y_1, y_2,..., y_n)}\right)=rang\begin{pmatrix}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_n}\\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi_2}{\partial y_n}\\ - & - & - & -\\ \frac{\partial\varphi_p}{\partial y_1} & \frac{\partial\varphi_p}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi_p}{\partial y_n}\end{pmatrix}=p\le n,$$

matricea jacobiana fiind calculata in $x_0\in[a,b]$.

Teorema 2. *Sistemul diferential autonom (1) nu poate avea mai mult de $n-1$ integrale prime independente.*

Demonstratie. Conform cu definitia integralelor prime independente, rangul matricii iacobiene, care este dreptunghiulara, nu poate depasi n. Sa aratam ca rangul acestei matrici nu poate fi n, deci sistemul nu poate avea n integrale prime independente. Presupunem, prin reducere la absurd, ca sistemul (1) admite n integrale prime independente. Deci rangul matricii iacobiene atasata celor n integrale prime, care acum devine patratica, este n, deci determinantul acestei matrici este nenul:

$$\left|\frac{D(\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_p)}{D(y_1,y_2,\ldots,y_n)}\right| \neq 0.$$

Conform cu teorema 1, fiecare integrala prima satisface o ecuatie de forma (2). Se obtine urmatorul sistem de ecuatii

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y_1} f_1 + \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y_2} f_2 + \ldots + \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y_n} f_n = 0, \\ \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y_1} f_1 + \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y_2} f_2 + \ldots + \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y_n} f_n = 0, \\ ------------------------ \\ \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial y_1} f_1 + \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial y_2} f_2 + \ldots + \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial y_n} f_n = 0 \end{cases} \tag{3}$$

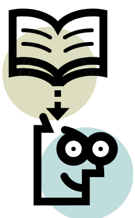
Avem deci un sistem algebric liniar, patratic, omogen, in care necunoscutele sunt functiile f_1, $f_2,\ldots, f_n$. Pentru ca acest sistem are determinantul nenul, deducem ca el admite numai solutia banala. Deci toate functiile f_1, $f_2,\ldots, f_n$ sunt nule, contrar cu definitia unui sistem autonom.

Dam acum, fara demonstratie, un rezultat care completeaza rezultatul din teorema 2 in privinta numarului de integrale prime. Rezultatul este atribuit lui Pontreaghin.

Teorema 3. *Sistemul autonom (1) nu poate avea mai putin de* $n-1$ *integrale prime independente.*

Observatie. Daca confruntam rezultatele din teorema 2 si teorema 3 deducem ca orice sistem autonom are exact $n-1$ integrale prime independente. Astfel, rezolvarea unui sistem autonom revine la aflarea a $n-1$ integrale prime independente.

Cele mai uzuale sisteme autonome sunt in trei dimensiuni si atunci rezolvarea lor inseamna determinarea a doua integrale prime independente.



Să ne reamintim...

Trebuie retinut ca orice sistem dinamic autonom are exact *n-1* integrale prime liniar independente. Deci pentru sisteme autonome uzuale in trei dimensiuni *(x,y,z)* sunt necesare doar doua integrale prime liniar independente.

Sisteme diferentiale simetrice

Pornim de la un sistem diferential autonom si tinem cont ca o ecuatie din acest sistem, sa zicem prima, $dy_1/dx = f_1$ poate fi scrisa si in forma $dy_1/f_1 = dx$. Analog se scriu si celelalte ecuatii ale sistemului.

Definitia 23. *Se numeste sistem simetric, un sistem diferential de forma*

$$\frac{dy_1}{f_1(y_1, y_2,..., y_n)} = \frac{dy_2}{f_2(y_1, y_2,..., y_n)} = ...\frac{dy_n}{f_n(y_1, y_2,..., y_n)}. \quad (4)$$

Reamintim ca functiile $f_1, f_2,..., f_n$ nu pot fi simultan nule. Se face conventia ca daca una din functiile $f_1, f_2,..., f_n$ este nula, atunci raportul, corespunzator ei, din sistemul simetric (4) lipseste. Am aratat cum un sistem autonom poate fi adus la forma sa simetrica. Reciproc, unsistem simetric poate fi scris sub forma unui sistem autonom. Scriem ca rapoartele din (4) sunt toate egale cu ultimul:

$$\frac{dy_1}{f_1} = \frac{dy_n}{f_n} \Rightarrow \frac{dy_1}{dy_n} = \frac{f_1}{f_n}, \frac{dy_2}{dy_n} = \frac{f_2}{f_n},..., \frac{dy_{n-1}}{dy_n} = \frac{f_{n-1}}{f_n}.$$

Folosim notatiile

$$\frac{f_i}{f_n} = g_i$$

si consideram ca variabila independenta pe $u = y_n$ si obtinem:

$$\frac{dy_1}{du} = g_1, \frac{dy_2}{du} = g_2,..., \frac{dy_{n-1}}{du} = g_{n-1},$$

care este un sistemul autonom de $n-1$ ecuatii diferentiale in functiile necunoscute $y_1, y_2,..., y_{n-1}$ de variabila independenta $u = y_n$.

Dupa ce am stabilit ca rezolvarea unui sistem autonom (in baza consideratii- lor de mai sus, deci si a unui sistem simetric) revine la aflarea a $n-1$ integrale prime independente, trebuie acum sa indicam tehnici pentru determinarea integralelor prime. Cea mai generala metoda este cea a combinatiilor liniare, expusa in teorema care urmeaza.

Teorema 4. *Presupunem determinate functiile* $\mu_i = \mu_i(y_1, y_2,..., y_n)$, *unde* $\mu_i : D \to R, D \subset R^n, \mu_i \in C^1(D), i = 1,2,...,n$ astfel incât

$$\begin{aligned} &\mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + ... + \mu_n f_n = 0 \\ &\mu_1 dy_1 + \mu_2 dy_2 + ... + \mu_n dy_n = \\ &\qquad = d\varphi, \varphi = \varphi(y_1, y_2,..., y_n) \end{aligned}$$

Atunci functia $\varphi : D \to R$ *este integrala prima pentru sistemul (4).*

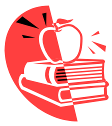
Demonstratie. Luam $(y_1, y_2,..., y_n)$ o solutie oarecare a sistemului (4) si sa aratam ca $\varphi(y_1, y_2,..., y_n) = C$. Scriem ecuatiile sistemului simetric in forma

$$dy_1 = \frac{f_1}{f_n}, dy_2 = \frac{f_2}{f_n},..., dy_{n-1} = \frac{f_{n-1}}{f_n}, dy_n = \frac{f_n}{f_n}.$$

Inlocuim aceste diferentiale in a doua ipoteza a teoremei si obtinem

$$\mu_1 dy_1 + \mu_2 dy_2 + \ldots + \mu_n dy_n =$$
$$= \left(\mu_1 \frac{f_1}{f_n} + \mu_2 \frac{f_2}{f_n} + \ldots + \mu_{n-1} \frac{f_{n-1}}{f_n} + \mu_n \frac{f_n}{f_n} \right) dy_n = d\varphi \Rightarrow$$
$$\frac{dy_n}{f_n}(\mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + \ldots + \mu_n f_n) = d\varphi \Rightarrow d\varphi = 0 \Rightarrow \varphi(y_1, y_2, \ldots, y_n) = C.$$

Observatie. Practic, teorema propune amplificarea rapoartelor ce definesc sistemul simetric cu μ_i, care in general sunt functii de variabilele $y_1, y_2, \ldots, y_n$, astfel inc â t suma numaratorilor sa fie nula. Conditia a doua din teorema se realizeaza aproape de la sine. Reamintim ca daca o functie f_i este nula, atunci $dy_i = 0$, deci $y_i = C$ (practic aceasta este o integrala prima particulara) si atunci sistemul simetric nu mai contine raportul respectiv.



Exemplu

Vom da un exemplu particular de sistem simetric in trei dimensiuni cu scopul de a urmari concret metoda furnizata de teorema. Intr-un domeniu din spatiul euclidian cu trei dimensiuni pentru care $x \neq y$, $x \neq z$ si $y \neq z$, consideram sistemul simetric:

$$\frac{dx}{y-z} = \frac{dy}{z-x} = \frac{dz}{x-y}.$$

in functiile necunoscute x, y, z depind de variabila t: *x=x(t), y=y(t), z=z(t).*

Vom calcula cele doua integrale prime prin metoda multiplicatorilor.

i) Luam ca factori de amplificare $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$ si atunci obtinem

$$1.(y-z) + 1.(z-x) + 1.(x-y) = 0,$$

deci

$$dx + dy + dz = d(x+y+z) = 0$$

de unde $x + y + z = C$ si am gasit prima integrala prima

$$\varphi_1(x, y, z) = x + y + z.$$

Am folosit aici proprietati ale proportiilor derivate.
ii) Amplificam acum cele trei rapoarte cu functiile

$$\mu_1 = x, \mu_2 = y, \mu_3 = z,$$

respectiv si obtinem

$$x(y-z)+y(z-x)+z(x-y)=0\,.$$

Atunci

$$xdx+ydy+zdz=d\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{2}\right)=0$$

de unde rezulta

$$x^2+y^2+z^2=C$$

si atunci a doua integrala prima este

$$\varphi_2(x,y,z)=x^2+y^2+z^2\,.$$

Mai trebuie verificat ca cele doua integrale prime sunt independente. Avem matricea iacobiana

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y} & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y} & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial z} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}$$

Aceats matrice are rangul doi din cauza ipotezei impuse unui sistem simetric ca macar un numitor sa fie nenul.

Să ne reamintim...

Dupa calcularea integralelor prime, trebuie neaparat testat daca sunt liniar independente pentru ca intr-adevar sa fie n-1 integrale prime (deci nici o integrala prima gasita sa nu poata fi exprimata cu ajutorul celorlalte, caz in care numarul lor ar fi mai mic).

O alta metoda pentru determinare de integrale prime, care este mai putin generala, consta in cuplarea convenabila a rapoartelor pentru a putea separa variabilele, apoi integram in fiecare membru unde avem o singura variabila.

Rezumat

In aceasta unitate de invatare se indica forma generala a unui sistem dinamic

autonom si deosebirea dintre acesta si un sistem dinamic neautonom.
Este prezentata notiunea de integrala prima pentru sistemele autonome de ecuatii diferentiale liniare.
Se dovedeste care este numarul de integrale prime liniar independente pentru un sistem dinamic autonom, ca si pentru un sistem simetric.
Rezolvarea sistemelor autonome este redusa la rezolvarea sistemelor caracteristice atasate lor, iar rezolvarea acestora din urma se reduce la determinarea unui numar de integrale prime liniar independente.
Sunt prezentate sistemele simetrice de ecuatii diferentiale si se dovedeste echivalenta dintre acestea si sistemele autonome de ecuatii diferentiale.

Test de evaluare a cunoştinţelor

Din Teme aplicative se poate alege un sistem simetric (sau, echivalent, unul autonom) se afla doua integrale prime. Se poate ca la un acelasi sistem simetric o integrala prima sa pota fi determinata prim metoda multiplicatorilo, iar cealalta prin metoda separarii variabilelor. Apoi se dovedeste, folosind matricea iacobiana, ca cele doua integrale prime sunt independente.

Modulul 3. Ecuatii diferentiale cu derivate partiale de ordul I

Introducere

Se introduce forma generala a unei ecuatii diferntiale cu derivate partiale de ordinul intai. Se precizeaza cele trei cazuri tratate: Ecuatii liniare; Ecuatii cvasi-liniare; Ecuatii neliniare;
O ecuatie cu derivate partiale de ordinul I liniara este abordata prin prisma sistemului sau caracteristic, care este un sistem simetric. Rezolvarea sistemului caracteristic este redusa la determinarea unui numar de integrale prime liniar independente.
Este apoi expusa forma generala a unei ecuatii cu derivate partiale de ordinul I

cvasi-liniara precum si algoritmul cum aceasta este redusa la o ecuatie liniara cu derivate partiale de ordinul I.

At â t pentru ecuatia cu derivate partiale de ordinul I liniara c â t si pentru ecuatia cvasi-liniara este prezentata **Problema Cauchy** precum si tehnicile de abordare ale acestora.

In finalul lectiei sunt abordate ecuatiile neliniare cu derivate partiale de ordinul I. Este propusa o procedura pentru a obtine sistemul caracteristic atasat acestor ecuatii precum si modalitatea de a obtine integrala generala a acestor ecuatii prcum si a unei integrale particulare.

Competenţe

La sfârşitul acestui modul studenţii vor fi capabili să:

- ataseze sistemul caracteristic pentru o ecuatie diferentiala liniara cu derivate partiale si sa afle cele n-1 integrale prime liniar independente;
- rezolve ecuatii diferentiale liniare cu derivate partiale, adica sa exprime solutia ecuatiei ca functie de integralele prime independente ale sistemului caracteristic;
- reduca o ecuatie diferentiala cvasi-liniare cu derivate partiale la una liniara si apoi sa o rezolve;
- reduca o ecuatie diferentiala neliniara cu derivate partiale la una liniara si apoi sa o rezolve.

Unitatea de învăţare M3.U1.
Ecuatii diferentiale liniare cu derivate partiale de ordul I

Cuprins

M3.U1.1. Introducere

O ecuatie diferentiala cu derivate partiale de ordinul I liniara este abordata prin prisma sistemului sau caracteristic, care este un sistem simetric. Rezolvarea sistemului caracteristic este redusa la determinarea unui numar de integrale prime liniar independente.

Se demonstreaza apoi ca solutia generala a ecuatiei diferentiale cu derivate partiale de ordinul I liniara este o functie arbitrara care are ca argumente tocmai integralele prime ale sistemului caracteristic atasat ecuatiei date.

Este apoi prezentata **Problema Cauchy** precum si tehnicile de abordare ale acestea in cazul ecuatiei diferentiale cu derivate partiale de ordinul I liniara.

	**Competenţe conferite** Dupa parcurgerea acestei unitati de invatare studentii vor recunoaste o ecuatie diferentiala liniara cu derivate partiale de ordinul I . Apoi vor atasa sistemul sau caracteristic, care este un sistem dinamic simetric. Se afla apoi cele *n-1* integrale prime liniar independente. In final vor scrie solutia ecuatiei initiale ca o functie arbitrara care are ca argumente tocmai cele *n-1* integrale prime independente.

Obiective:

1. *O ecuatie cu derivate partiale de ordinul I liniara este abordata prin prisma sistemului sau caracteristic, care este un sistem simetric. Rezolvarea sistemului caracteristic este redusa la determinarea unui numar de integrale prime liniar independente.*
2. *Este apoi expusa forma generala a unei ecuatii cu derivate partiale de ordinul I cvasi-liniara precum si algoritmul cum aceasta este redusa la o ecuatie liniara cu derivate partiale de ordinul I.*
3. *Atâ t pentru ecuatia cu derivate partiale de ordinul I liniara câ t si pentru ecuatia cvasi-liniara este prezentata* **Problema Cauchy** *precum si tehnicile de abordare ale acestora.*
4. *In finalul lectiei sunt abordate ecuatiile neliniare cu derivate partiale de ordinul I. Este propusa o procedura pentru a obtine sistemul caracteristic atasat acestor ecuatii precum si modalitatea de a obtine integrala generala a acestor ecuatii prcum si a unei integrale particulare.*

Ecuatii diferentiale liniare cu derivate partiale de ordul I

Definitia 25. *Se numeste ecuatie diferentiala cu derivate partiale de ordinul I liniara si omogena o ecuatie de forma*

$$\begin{aligned} &P_1(x_1, x_2, ..., x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1} + P_2(x_1, x_2, ..., x_n)\frac{\partial u}{\partial x_2} + ... + \\ &+ P_n(x_1, x_2, ..., x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0 \end{aligned} \qquad (26)$$

in care functia necunoscuta este $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Functiile coeficienti $P_i = P_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ sunt date si au proprietatile

$$P_i : D \to R, D \subset R^n, P_i \in C^1(D), i = 1,2,...,n$$

si nu se anuleaza simultan pe domeniul D.

Definitia 26. *Se numeste solutie pentru ecuatia (26) o functie*

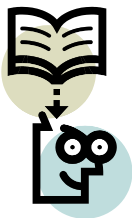
$$\varphi = \varphi(x_1, x_2, ..., x_n),$$

$\varphi : D \to R, D \subset R^n$ *astfel incât* $\varphi \in C^1(D)$ *si inlocuita in (26) o transforma pe aceasta in identitate.*

Definitia 27. *Se numeste **sistem caracteristic** asociat ecuatiei cu derivate partiale (26) urmatorul sistem simetric*

$$\frac{dx_1}{P_1(x_1, x_2, ..., x_n)} = \frac{dx_2}{P_2(x_1, x_2, ..., x_n)} = ... = \frac{dx_n}{P_n(x_1, x_2, ..., x_n)} \qquad (27)$$

Se remarca faptul ca functiile de la numitorii sistemului (27) sunt functiile coeficient ale ecuatiei cu derivate partiale (26).



Să ne reamintim...

Pentru ca functiile de la numitorii sistemului caracteristic (27) sunt tocmai functiile coeficient ale ecuatiei liniare cu derivate partiale (26), e bine sa ne reamintim ca aceste functii nu se anuleaza simultan.

Observatie. Anticipam ca rezolvarea unei ecuatii cu derivate partiale revine la rezolvarea sistemului sau caracteristic, care este un sistem simetric pentru care, dupa cum am demonstrat deja, rezolvarea inseamna determinarea a $n-1$ integrale prime independente.
Teorema care urmeaza demonstreaza faptul ca rezolvarea unei ecuatii cu derivate partiale revine la rezolvarea sistemului sau caracteristic.

Teorema 28. *Conditia necesara si suficienta ca functia* $\varphi : D \subset R^n \to R$ *sa fie solutie pentru ecuatia (26) este ca* φ *sa fie integrala prima pentru sistemul caracteristic (27).*

Demonstratie. Suficienta. Presupunem ca φ este integrala prima pentru sistemul caracteristic (27). Conform cu teorema de caracterizare a integralei prime, φ satisface ecuatia

$$P_1(x_1, x_2, ..., x_n)\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + P_2(x_1, x_2, ..., x_n)\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + ... + P_n(x_1, x_2, ..., x_n)\frac{\partial \varphi}{\partial x_n} = 0,$$

adica φ verifica ecuatia (26).
Necesitatea. Presupunem ca φ este solutie pentru ecuatia (26) si sa aratam ca φ este

inegrala prima pentru sistemul (27). Pentru aceasta luam o solutie arbitrara $(x_1, x_2, ..., x_n)$ a sistemului (27) si aratam ca $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n) = C$. Astfel, daca calculam diferentiala functiei φ constatam

$$
\begin{aligned}
d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}dx_n = \\
= \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{P_1}{P_n}dx_n + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{P_2}{P_n}dx_n + ... + \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\frac{P_n}{P_n}dx_n = \\
= \frac{dx_n}{P_n}\left(P_1(x_1, x_2, ..., x_n)\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + P_2(x_1, x_2, ..., x_n)\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + ... + \right. \\
\left. + P_n(x_1, x_2, ..., x_n)\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right) = 0,
\end{aligned}
$$

in care am folosit faptul ca φ satisface ecuatia (26). Deoarece $d\varphi = 0$ deducem ca $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n) = C$, adica φ este integrala prima.

Teorema care urmeaza indica modalitatea prin care se afla solutia generala a unei ecuatii cu derivate partiale de forma (26).

Teorema 29. *Presupunem cunoscute functiile $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{n-1}$ care sunt integrale prime independente pentru sistemul caracteristic (27). Atunci orice functie $\Phi : R^{n-1} \to R, \Phi \in C^1(R^{n-1})$, care are ca argumente cele $n-1$ integrale prime, este solutie pentru ecuatia cu derivate partiale (26).*

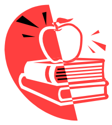
Demonstratie. Trebuie sa verificam ca functia $u = \Phi(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n)$ inlocuita in ecuatia (26) o transforma pe aceasta in identitate. Calculam derivatele partiale ale functiei u:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_2}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_{n-1}}\frac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial x_1} \\
\frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_2}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} + ... + \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_{n-1}}\frac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial x_2} \\
-------------------- \\
\frac{\partial u}{\partial x_n} = \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_n}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} + \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_2}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_n} + ... + \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_{n-1}}\frac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial x_n}.
\end{aligned}
$$

Inmultim prima relatie cu P_1, a doua cu P_2,..., ultima cu P_n si adunam relatiile astfel obtinute, membru cu membru:

$$
\begin{aligned}
&P_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+P_2\frac{\partial u}{\partial x_2}+\ldots+P_n\frac{\partial u}{\partial x_n}=\\
&=\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1}\left(P_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}+P_2\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}+\ldots+P_n\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}\right)+\\
&+\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_2}\left(P_1\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}+P_2\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}+\ldots+P_n\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n}\right)+\\
&+\ldots+\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_{n-1}}\left(P_1\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_1}+P_2\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_2}+\ldots+P_n\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_n}\right)=0.
\end{aligned}
$$

Am folosit aici faptul ca parantezele sunt nule din cauza ca functiile φ_i sunt integrale prime deci verifica ecuatia din teorema de caracterizare a integralelor prime.



Exemplu
Oferim acum un exemplu simplu in trei dimensiuni, pentru a fixa rezultatele teoretice. Fie ecuatia cu derivate partiale:

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+(x+y)\frac{\partial u}{\partial z}=0,$$

Sistemul caracteristic atasat acestei ecuatii este

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{x+y}$$

Care este un sistem simetric.
Obtinem ca sistemul caracteristic admite urmatoarele doua integralele prime

$$\varphi_1(x,y,z)=\frac{x}{y},$$
$$\varphi_2(x,y,z)=x+y-z.$$

Cu ajutorul matricii iacobiane se constata ca aceaste integrale prime sunt independente. Atunci, conform cu teorema anterioara, solutia generala a ecuatiei date este functia

$$u=\Phi(\frac{x}{y},\ x+y-z).$$

Este de remarcat faptul casolutia generala a unei ecuatii liniare cu derivate partiale de ordinul I este foarte arbitrara. Daca in cazul unei ecuatii diferentiale ordinare, arbitrarietatea solutiei se manifesta prin prezenta unor constante de integrare, arbitrare, in cazul unei ecuatii liniare cu derivate partiale de ordinul I solutia este si mai arbitrara, deoarece insasi functia care defineste solutia este arbitrara.

Să ne reamintim...

Si solutia unei **ecuatii diferentiale ordinare este arbitrara, dar solutia unei ecuatii liniare cu derivate partiale de ordinul I este mai arbitrara, din rationamentele de mai sus.**

Problema Cauchy

Se remarca din forma solutiei generale a unei ecuatii cu derivate partiale de ordinul I gradul mare de arbitrarietate al solutiei. Daca la ecuatiile diferentiale ordinare solutia generala depinde constantele de integrare care sunt arbitrare, in cazul de fata chiar si functia care defineste solutia este arbitrara. Se pune problema determinarii unei anumite solutii, adica a eliminarii arbitrariului din solutie. Ca si la ecuatiile diferentiale ordinare acest lucru se rezolva prin impunerea unor conditii, numite conditii initiale sau conditii Cauchy. Aceste conditii impreuna cu ecuatia propriu-zisa formeaza problema Cauchy. Forma generala a conditiei Cauchy este

$$u(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n^0) = \Psi(x_1, x_2, ..., x_{n-1}),$$

in care functia Ψ este cunoscuta. Deci s-a fixat una dintre variabile si, fara sa se restrâ nga generalitatea, aceasta s-a ales ultima. Daca se fixeaza alta variabila, atunci se poate recurge la reordonarea variabilelor.

Algoritmul de rezolvare a problei Cauchy este urmatorul :

i) se determina cele $n-1$ integrale prime independente ale sistemului caracteristic;
ii) se ataseaza conditia Cauchy lâ nga integralele prime. Se obtine un sistem de n relatii din care se elimina variabilele si se obtine o relatie "curata" numai in constantele C_1, C_2, ..., C_{n-1};
iii) in relatia obtinuta la pasul precedent se inlocuisc constantele cu expresiile lor complete de la integralele prime.

Rezumat

O ecuatie cu derivate partiale de ordinul I liniara este abordata prin prisma sistemului sau caracteristic, care este un sistem simetric. Rezolvarea sistemului caracteristic este redusa la determinarea unui numar de integrale prime liniar este independente. Solutia generala a ecuatiei este o functie arbitrara care are ca argumente cele n-1 integrale prime independente.

Apoi este prezentata **Problema Cauchy** precum si algoritmul de rezolvare a acestei probleme.

Test de evaluare a cunoştinţelor

De la *Teme aplicative* se alege o ecuatie liniara cu derivate partiale de ordinul I, se ataseaza sistemul sau caracteristic, care este un sistem simetric. Se cere sa se afle cele n-1 integrale prime liniar independente si apoi sa se sa precizeze solutia generala a ecuatiei initiale.

Unitatea de învăţare M3.U2.
Ecuatii diferentiale cvasi-liniare cu derivate partiale de ordul I

Cuprins

M3.U2.1. Introducere

O ecuatie cvasi-liniara cu derivate partiale de ordinul I se deosebeste de o ecuatie liniara prin faptul ca functiile coeficient pot depinde si de functia necunoscuta. In plus o astfel de ecuatie nu este neaparat omogena. Printr-un procedeu de liniarizare, o ecuatie cvasi-liniara cu derivate partiale de ordinul I se reduce la una liniara. De fapt procedeul consta in schimbarea functiei necunoscute, aceasta, in noua ecuatie, devine o variabila ordinara. Se rezolva apoi noua ecuatie care este liniara, deci se foloseste algoritmul cunoscut.

Este apoi prezentata **Problema Cauchy**, pentru ecuatia cvasi-liniara precum si algoritmul de rezolvare al acesteia, asemnator cu cel din cazul unei ecuatii liniare

M3.U2.2. Competenţe conferite

Dupa parcurgerea acestei unitati de invatare studentii vor recunoaste o ecuatie diferentiala cvasi-liniara cu derivate partiale de ordinul I . Apoi o vor transforma intr-o ecuatie liniara, prin cautarea solutiei sub forma implicita. In ecuatia liniara obtinuta vechea functie necunoscuta (adica functia necunoscuta a ecuatiei cvasi-liniare) devine variabila ordinara pentru ecuatia liniara. Singura noutate pentru ecuatia liniara obtinuta este ca este nevoie de *n* integrale prime liniar independente.

Ecuatii de ordinul I cvasiliniare

Ecuatiile diferentiale acest nume pentru ca sunt liniare numai in derivatele partiale ale functiei necunoscute si au forma generala:

$$Q_1(x_1,x_2,..,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_1}+Q_2(x_1,x_2,..,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_2}+\ldots+ + Q_n(x_1,x_2,..,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_n}=Q_{n+1}(x_1,x_2,..,x_n,u) \tag{28}$$

De remarcat ca la o ecuatie cvasiliniara functiile coeficient depind si de functia necunoscuta, care este functia $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$, iar termenul liber nu mai este nul, ca la ecuatiile liniare.

In teorema care urmeaza se demonstreaza o modalitate prin care rezolvarea unei ecuatii cvasiliniare se reduce la rezolvarea unei ecuatii liniare.

Teorema 30. *Orice ecuatie cvasiliniara se reduce la o ecuatie liniara pentru o noua functie necunoscuta care depinde de $n+1$ variabile.*

Demonstratie. Cautam solutia ecuatiei cvasiliniare (28) nu sub forma explicita $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ ci sub forma implicita

$$v(x_1, x_2, ..., x_n) = 0,\ v \in C^1(D),\ D \subset R^{n+1},\ \frac{\partial u}{\partial x} \neq 0. \tag{29}$$

Daca derivam in (29) in raport cu x_1 obtinem

$$\frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_1} = -\frac{\dfrac{\partial v}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial v}{\partial u}}.$$

Analog se calculeaza celelalte derivate partiale care se introduc in ecuatia (7.3) si se obtine:

$$-Q_1\frac{\dfrac{\partial v}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial v}{\partial u}} - Q_2\frac{\dfrac{\partial v}{\partial x_2}}{\dfrac{\partial v}{\partial u}} - ... - Q_n\frac{\dfrac{\partial v}{\partial x_n}}{\dfrac{\partial v}{\partial u}} = Q_{n+1}.$$

Inmultim aici cu $-\frac{\partial v}{\partial u}$, mutam termenul din dreapta in stânga si obtinem ecuatia liniara

$$Q_1(x_1, x_2, ..., x_n, u)\frac{\partial v}{\partial x_1} + Q_2(x_1, x_2, ..., x_n, u)\frac{\partial v}{\partial x_2} + ... +$$
$$+ Q_n(x_1, x_2, ..., x_n, u)\frac{\partial v}{\partial x_n} + Q_{n+1}(x_1, x_2, ..., x_n, u)\frac{\partial v}{\partial u} = 0.$$

Avem aici o ecuatie cu derivate partiale liniara in functia necunoecuta v care depinde de $n+1$ varibile, ultimul fiind $x_{n+1} = u$. In consecinta, pentru sistemul caracteristic asociat acestei ecuatii vor fi necesare n integrale prime independente $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ iar solutia generala a ecuatiei va fi de forma $\psi(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n) = 0$.

Exemplu

Pentru a concretiza rezultatul teoretic din teorema 30, indicam un exemplu simplu de ecuatie cvasiliniara. Fie deci ecuatia cvasiliniara

$$xy^2\frac{\partial u}{\partial x}+x^2y\frac{\partial u}{\partial y}=u\left(x^2+y^2\right).$$

Cu procedeul din teorema acesta ecuatie se transforma intr-o ecuatie liniara in functia necunoscuta $v=v(x,y,u)$:

$$xy^2\frac{\partial v}{\partial x}+x^2y\frac{\partial v}{\partial y}+u\left(x^2+y^2\right)\frac{\partial v}{\partial u}=0.$$

Se ataseaza apoi sistemul sau caracteristic, se gasesc integralele prime independente

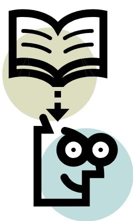
$$\varphi_1(x,y,u)=x^2-y^2,$$
$$\varphi_2(x,y,u)=\frac{xy}{u}$$

si atunci solutia generala a ecuatiei initiale este

$$\Psi\left(x^2-y^2,\frac{xy}{u}\right)=0.$$

Din ultima formula a exemplului de mai sus se vede ca functia necunoscuta u este prezentata sub forma implicita. Acesta de fapt este procedeul prin care ecuatia cvasi-liniara se transforma intr-o ecuatie liniara, cautatnd solutia ecuatiei initiale in forma implicita.

Să ne reamintim...



Dupa cum se vede si din exemplul concret de mai sus, nu este nevoie de ambele motive pentru ca o ecuatie cu derivate partiale sa fie cvasi-liniara: si coeficientii ecuatiei sa depinda de functia necunoscuta (in exemplul dat coeficientii ecuatiei nu depind de functia necunoscut ci numai functia termen liber) si ecuatia sa aiba termen liber (ecuatia din exemplul de mai sus are termen liber, deci este cvasi-liniara.

Problema Cauchy

Problema Cauchy se formuleaza analog ca in cazul ecuatiilor liniare cu derivate partiale de ordinul I. Pentru eliminarea arbitrariului din forma solutiei generale a unei ecuatiilor cvasi-liniare cu derivate partiale de ordinul I, langa ecuatia propriu-zisa, se adauga conditia Caychy care are forma generala urmatoare:

$$u(x_1,\ x_2,....,x_{n-1},x_n^0) = \Psi(x_1,x_2,...,x_{n-1}),$$

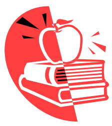
in care functia Ψ este prescrisa.

Adica se fixeaza una dintre variabilele functiei necunoscute, fara sa restrangem generalitatea aceasta s-a ales sa fie ultima. Daca s-ar fi fixat alta variabila, s-ar fi putut proceda la re-numerotarea variabilelor, astfel incat cea fixata sa fie tot ultima.

Algoritmul de rezolvare a problemei Cauchy in cazul ecuatiilor cvasi-liniare cu derivate partiale de ordinul I este acelasi ca in cazul ecuatiilor liniare cu derivate partiale de ordinul I, si anume:

- se reduce ecuatia cvasi-liniare cu derivate partiale de ordinul I la una liniara;
- se ataseaza sistemul simetric si se afla cele *n* integrale prime independente;
- langa integralele prime se asociaza conditia Cauchy astfel ca se obtin cel putin *n+1* relatii
- prin operatii elementare asupra acestor relatii se obtine o relatie „curata" intre $C_1, C_2, ..., C_n$ de la integralele prime; curata inseamna ca nu este nici una dintre variabilele $x_1, x_2, ..., x_n$.
- in ultima etapa, in relatia obtinuta la pasul anterior se inlocuiesc constantele C_i cu expresiile lor complete de la integralele prime.

Pentru a fixa algoritmul expus mai sus pentru rezolvarea problemei Cauchy atasata ecuatiilor cvasi-liniare cu derivate partiale de ordinul I, indicam mai jos un exemplu concret.



Exempl

Consideram ecuatia cvasiliniara:

$$\left(x^2+y^2\right)\frac{\partial u}{\partial x} + 2xy + \frac{\partial u}{\partial y} = xu, u = u(x,y)$$

langa care adaugam conditia Cauchy:

$$\boldsymbol{x^2 - y^2 = 1 \ \Rightarrow u = 1}$$

Sistemul caracteristic atasat ecuatiei date (dupa liniarizarea ei) este:

$$\frac{dx}{x^2+y^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{du}{xu}$$

Se obtin imediat cele doua integrale prime independente:

$$\varphi_1(x,y,u) = \frac{2y}{x^2-y^2},$$

$$\varphi_2(x,y,u) = \frac{u^2}{y}$$

Langa acestea adaugam conditia Cauchy si obtinem trei relatii

$$\frac{2y}{x^2 - y^2} = C_1,$$
$$\frac{u^2}{y} = C_2,$$
$$x^2 - y^2 = 1 \Rightarrow u = 1$$

Combinam aceste relatii intre ele si obtinem relatia „curata”

$$C_1 C_1 = 2,$$

in care inlocuim expressile complete pentru C_1 si C_2 de la integrale prime de mai sus. Astfel obtinem relatia:

$$u^2 = x^2 - y^2$$

Deci am obtinut doua solutii pentru ecuatia cvasiliniara initiala

$$u = \pm\sqrt{x^2 - y^2}$$

Din exemplul de mai sus se vede, ceea ce stiam de la teorie, ca cu ajutorul problemei Cauchy se elimina elementele arbitrare din solutie.

Rezumat

O ecuatie cvasi-liniara cu derivate partiale de ordinul I se deosebeste de o ecuatie liniara prin faptul ca functiile coeficient pot depinde si de functia necunoscuta. In plus o astfel de ecuatie nu este neaparat omogena. Printr-un procedeu de liniarizare, o ecuatie cvasi-liniara cu derivate partiale de ordinul I se reduce la una liniara. De fapt procedeul consta in schimbarea functiei necunoscute, aceasta, in noua ecuatie, devine o variabila ordinara. Se rezolva apoi noua ecuatie care este liniara, deci se foloseste algoritmul cunoscut.

Este apoi prezentata **Problema Cauchy**, pentru ecuatia cvasi-liniara precum si algoritmul de rezolvare al acesteia, asemnator cu cel din cazul unei ecuatii liniare

Test de evaluare a cunoştinţelor

Se alege, de la *Teme aplicative*, o ecuatie cvasiliniara cu derivate partiale, se procedeaza la liniarizarea ei, apoi ecuatia liniara se rezolva dupa procedura expusa la unitatea de invatare precedenta.

De asemenea, se poate alege o problema Cauchy si se rezolva intr-o maniera foarte asemanatoare cu cea cunoscuta de la ecuatiile liniare cu derivate partiale.

Unitatea de învăţare M3.U3.
Ecuatii neliniare diferentiale cu derivate partiale de ordul I

Cuprins

M3.U2.1. Introducere

Fara a se restrange generalitatea, se abordeaza o ecuatie neliniara cu derivate partiale de ordinul I in care functia necunoscuta depinde numai de doua variabile.
Ca si in cazul ecuatiei cvasi-liniara cu derivate partiale de ordinul I , se procedeaza la liniarizare. De data aceasta se scrie direct sistemul caracteristic (care este un sistem simetric) specific unei ecuatii liniare.
Se folosesc notatiile lui Monge:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

Si din sistemul caracteristic se afla doua integrale prime din care se determina functiile

$$\begin{aligned} p &= p(x, y, C_1), \\ q &= q(x, y, C_1), \end{aligned}$$

Apoi in ecuatia

$$dz = pdx + qdy$$

se inlocuiesc expresiile gasite pentru functiile p si q.
In final se integreaza si se afla functia necunoscuta in forma

$$z = \varphi(x, y, C_1, C_1, K).$$

Aici K este o noua constanta de integrare (obtinuta la ultima integrare) si care se determina fortand pe z sa fie efectiv solutie pentru ecuatia neliniara initiala.
O solutie particulara se obtine eliminand constantele C_1 si C_2 din sistemul de relatii:

$$\begin{aligned} & z = \varphi(x, y, C_1, C_2) \\ & \frac{\partial \varphi}{\partial C_1} = 0, \\ & \frac{\partial \varphi}{\partial C_2} = 0 \end{aligned}$$

	**M3.U2.2. Competenţe conferite** Dupa parcurgerea acestei unitati de invatare studentii vor recunoaste o ecuatie diferentiala neliniara cu derivate partiale de ordinul I . Apoi o vor proceda la liniarizare prin scrierea directa a sistemului caracteristic, care este specific ecuatiilor liniare.

In finalul lectiei sunt abordate ecuatiile neliniare cu derivate partiale de ordinul I. Este propusa o procedura pentru a obtine sistemul caracteristic atasat acestor ecuatii precum si modalitatea de a obtine integrala generala a acestor ecuatii prcum si a unei integrale particulare.

Ecuatii de ordinul I neliniare

Vom trata aceste ecuatii, fiind mai dificile, doar in cazul particular când functia necunoscuta depinde numai de doua variabile. Pentru functia $z = z(x, y)$ introducem notatiile lui Monge:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x},\ q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

si atunci forma generala a unei ecuatii neliniare cu derivate partiale este :

$$F(x, y, z, p, q) = 0,\ F : D \subset R^4 \to R,\ (x, y) \in \Delta \subset R^2. \tag{30}$$

Procedeul de abordare a ecuatiilor neliniare este unul de liniarizare. In acest scop, derivam in (30), pe rând, in raport cu x si y :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x} = 0 \\ &\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial y} = 0. \end{aligned} \tag{31}$$

Se poate constata imediat ca

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial q}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \end{aligned}$$

in care am folosit faptul ca functia $z \in C^{(}(\Delta)$ si deci satisface criteriul lui Schwarz. Atunci sistemul de ecuatii (31) poate fi scris in forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y} &= -\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial q}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial q}{\partial y} &= -\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} \end{aligned} \qquad 32)$$

Extindem acum notatiile lui Monge:

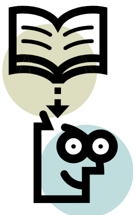
$$X=\frac{\partial F}{\partial x}, Y=\frac{\partial F}{\partial y}, Z=\frac{\partial F}{\partial z}, P=\frac{\partial F}{\partial p}, Q=\frac{\partial F}{\partial q} \qquad (33)$$

si atunci sistemul (32) capata forma:

$$\begin{aligned} P\frac{\partial p}{\partial x}+Q\frac{\partial p}{\partial y} &= -(X+pZ) \\ P\frac{\partial q}{\partial x}+Q\frac{\partial q}{\partial y} &= -(Y+qZ). \end{aligned}$$

Avem aici doua ecuatii cvasiliniare cu derivate partiale. Folosim aici procedeul deja expus si trecem aceste ecuatii in forma lor liniara, apoi atasaam pentru fiecare sistemul caracteristic. Dupa egalarea partilor comune obtinem urmatorul sistem simetric:

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dp}{-(X+pZ)}=\frac{dq}{-(Y+qZ)}. \qquad (34)$$



Să ne reamintim...

Sistemul caracteristic (34) sa obtinut in maniera caracteristica ecuatiilor cvasiliniare cu derivate partiale de ordinul I, pentru ca sistemul de ecuatii de mai sus este constituit din doua ecuatii cvasiliniare.

Daca tinem cont ca

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=pdx+qdy,$$

atunci putem scrie

$$\frac{pdx}{pP}=\frac{qdy}{qQ}\Rightarrow\frac{pdx+qdy}{pP+qQ}=\frac{dx}{P}\Rightarrow\frac{dx}{P}=\frac{dz}{pP+qQ},$$

in care am folosit proprietati ale proportiilor derivate. Cu relatia de mai sus completam sistemul caracteristic (34) si atunci avem:

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{pP+qQ}=\frac{dp}{-(X+pZ)}=\frac{dq}{-(Y+qZ)}. \qquad (35)$$

Cu sistemul simetric (35) putem acum sa rezolvam ecuatia initiala neliniara. Se cauta doua integrale prime pentru sistemul simetric (35) din care sa se poata explicita functiile p si q in functie de x si y si doua constante de integrare C_1 si C_2.

Exemple

Pentru ca sistemul caracteristic (35) admite 4 integrale prime liniar independente, sigur putem alege doua integrale prime din care sa determinam functiile *p* si *q*.

Pentru ca numarul de integrale prime din sistemul (35) ne da posibilitatea sa alegem doua integrale prime, din patru, evident se aleg acelea din care se determina mai facil functiile *p* si *q*.

Apoi tinem cont ca

$$dz = pdx + qdy,$$

inlocuim aici expresiile gasite pentru p si q si obtinem o ecuatie numai in functia z. Se rezolva acesta ecuatie si se gaseste

$$z(x,y)=\varphi(x,y,C_1,C_2,K),$$

constanta K, care a aparut de ultima integrare, se elimina prin impunerea functiei z sa verifice ecuatia neliniara initiala.

Spunem ca am obtinut astfel **integrala generala** a ecuatiei neliniare

$$z(x,y)=\varphi(x,y,C_1,C_2).$$

Solutii particulare pentru ecuatii neliniare

O **integrala particulara** se obtine prin eliminarea constantelor C_1 si C_2 din sistemul

$$\begin{cases} z=\varphi(x,y,C_1,C_2) \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial C_1}=0, \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial C_2}=0 \end{cases}$$

Rezumat.

Se abordeaza o ecuatie neliniara cu derivate partiale de ordinul I in care functia necunoscuta depinde numai de doua variabile.

Ca si in cazul ecuatiei cvasi-liniara cu derivate partiale de ordinul I , se procedeaza la liniarizare. De data aceasta se scrie direct sistemul caracteristic (care este un sistem simetric) specific unei ecuatii liniare.

Se folosesc notatiile lui Monge:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

Si din sistemul caracteristic se afla doua integrale prime din care se determina functiile

$$p = p(x, y, C_1),$$
$$q = q(x, y, C_1),$$

Apoi in ecuatia

$$dz = pdx + qdy$$

se inlocuiesc expresiile gasite pentru functiile p si q.

In final se integreaza si se afla functia necunoscuta in forma

$$z = \varphi(x, y, C_1, C_1, K).$$

Aici K este o noua constanta de integrare (obtinuta la ultima integrare) si care se determina fortand pe z sa fie efectiv solutie pentru ecuatia neliniara initiala.

O solutie particulara se obtine eliminand constantele C_1 si C_2 din sistemul de relatii:

$$z = \varphi(x, y, C_1, C_2)$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial C_1} = 0,$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial C_2} = 0$$

Test de evaluare a cunoştinţelor

De la Teme aplicative se abordeaza o ecuatie neliniara cu derivate partiale. Se ataseaza direct sistemul caracteristic, specific ecuatiilor liniare, dupa ce, in prealabil, s-au folosit notatiile lui Monge. Se foloseste procedeul expus mai sus pentru aflarea solutiei generale. Se poate incerca si detrminarea unei integrale particulare, rezolvand sistemul de trei relatii de mai sus.

Modulul 4. Stabilitate

Cuprins

Introducere

Este cunoscut faptul ca cele mai multe fenomene fizice sunt modelate prin ecuatii diferentiale sau sisteme de ecuatii diferentiale. O stare distincta a acestor fenomene fizice, mai ales in cazul proceselor in functionare in regim stationar, o constituie **starea de echilibru**, sau **pozitia de echilibru**. Pentru specialistii tehnicieni prezinta interes deosebit **starea de echilibru stabil**. In termeni tehnici, aceasta este starea in jurul careia se misca sistemul daca este supus unor impulsuri initiale.

In termeni matematici, stabilitatea inseamna studiul acelor solutii ale sistemelor de ecuatii diferentiale care sunt constante in timp.

Sa consideram un sistem de ecuatii diferentiale scris in forma sa vectoriala:

$$\dot{x} = f(t, x),$$

in care x si f sunt functii vectoriale $n-$dimensionale.

Se presupun satisfacute urmatoarele ipoteze standard:

i) f este continua in (t,x) pe domeniul $D = \{(x, y) : t \geq 0, \| x \| \leq a\}$;
ii) f este functie Lipschitz in variabila x pe domeniul D.

Competenţe

La sfârşitul acestui modul studenţii vor distinge toate tipurile de stabilitate: stabilitate simpla, stabilitate uniforma, stabilitate asimptotica si stabilitate uniform asimptotica. In cazul ecuatiilor diferentiale cu coeficientii constanti, vor folosi criteriul lui Hurwitz, conform caruia solutia banala a unei astfel de ecuatii diferentiale este asimptotic stabila (deci, cu atat mai mult stabila) daca si numai daca toate radacinile ecuatiei caracteristice atasate au partea reala strict negativa. Cel putin pentru ecuatii diferentiale de ordinul intai, de ordinul doi si de ordinul trei au conditii echivalente de deducere a stabilitatii, mult mai facile decat criteriul lui Hurwitz

Unitatea de învăţare M4.U1.
Notiuni de stabilitate

Cuprins

M1.U1.1. Introducere

Ca un mic studiu calitativ al ecuatiilor diferentiale, se expun câteva notiuni privind stabilitatea solutiilor ecuatiilor diferentiale. Notiunea de stabilitate este extensia conceptului de dependenta continua a solutiilor sistemelor dinamice in raport cu datele initiale sau coeficientii ecuatiilor diferentiale care alcatuiesc sistemul dinamic. In timp ce dependenta continua a solutiilor sistemelor dinamice se refera la solutii definite pe intervale finite, stabilitatea se refera numai la acele solutii care sunt definite pe o semi-axa.

Se dovedeste ca studiul stabilitatii unei solutii stationare oarecare este redus la studiul stabilitatii solutiei banale.

Sunt definite toate tipurile de stabilitate: stabilitate simpla, stabilitate uniforma, stabilitate asimptotica si stabilitate uniform asimptotica. Se poate stabili, printr-o diagrama, legatura dintre diferitele tipuri de stabilitate.

Este apoi pus in evidenta criteriul lui Hurwitz, valabil numai in cazul ecuatiilor diferentiale cu coeficienti constanti.

Competenţe conferite

Dupa parcurgerea acestei unitati de invatare, studenţii vor distinge toate tipurile de stabilitate: stabilitate simpla, stabilitate uniforma, stabilitate asimptotica si stabilitate uniform asimptotica. In cazul ecuatiilor diferentiale cu coeficientii constanti, vor folosi criteriul lui Hurwitz, conform caruia solutia banala a unei astfel de ecuatii diferentiale este asimptotic stabila (deci, cu atat mai mult stabila) daca si numai daca toate radacinile ecuatiei caracteristice atasate au partea reala strict negativa. Studiul stabilitatii unei solutii stationare arbitrare va fi redus la studiul stabilitatii solutiei banale a ecuatiei diferentiale respective, sau dupa caz, a sistemului dinamic respectiv.

Tipuri de stabilitate

Obiective:

1. *Ca un mic studiu calitativ al ecuatiilor diferentiale, se expun câteva notiuni privind stabilitatea solutiilor ecuatiilor diferentiale.*
2. *Sunt prezentate principalele tipuri de stabilitate si este expus in detaliu criteriul lui*

Hurwitz.

3. *O tratare moderna a teoriei stabilitatii se bazeaza pe rezultatele lui Liapunov. Aici sunt prezentate doar notiunile introductive ale stabilitatii in sens Liapunov.*

Este cunoscut faptul ca cele mai multe fenomene fizice sunt modelate prin ecuatii diferentiale sau sisteme de ecuatii diferentiale. O stare distincta a acestor fenomene fizice, mai ales in cazul proceselor in functionare in regim stationar, o constituie **starea de echilibru**, sau **pozitia de echilibru**. Pentru specialistii tehnicieni prezinta interes deosebit **starea de echilibru stabil**. In termeni tehnici, aceasta este starea in jurul careia se misca sistemul daca este supus unor impulsuri initiale. In termeni matematici, stabilitatea inseamna studiul acelor solutii ale sistemelor de ecuatii diferentiale care sunt constante in timp.

Sa consideram un sistem de ecuatii diferentiale scris in forma sa vectoriala:

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{36}$$

in care x si f sunt functii vectoriale $n-$dimensionale.

Se presupun satisfacute urmatoarele ipoteze standard:

i) f este continua in (t, x) pe domeniul $D = \{(x, y) : t \geq 0, \| x \| \leq a\}$;
ii) f este functie Lipschitz in variabila x pe domeniul D.

Observatie. Daca in sistemul (36) se presupune ca x si f sunt functii scalare si in definitia domeniului D se inlocuieste norma cu modulul, se obtine cazul ecuatiilor diferentiale.

Să ne reamintim...

Se cuvine subliniat ca nu trebuie facut studiu separat pentru sisteme dinamice si, respectiv, ecuatii diferentiale. Daca in forma vectoriala in care este scis un sistem dinamic se „pierde” semnificatia vectoriala a notatiilor, se obtine ecuatia scalara a unei ecuatii diferentiale.

Ne intereseaza pentru sistemul (36) numai solutiile stationare, sau de echilibru, adica solutiile $x = \varphi(t) \equiv C$, $C =$ constanta. Si mai mare interes prezinta solutia banala $x = 0$. Orice studiu asupra solutiei $x = \varphi(t)$, pentru sistemul (8.1), se poate reduce la studiul solutiei banale, $x = 0$, printr-o operatie de translatie. Singurul inconvenient este ca sistemul sufera o usoara adaptare. Intr-adevar, daca facem translatia $y = x - \varphi(t)$, obtinem

$$\dot{y} = \dot{x} - \dot{\varphi} = f(t, x) - \dot{\varphi} = f(t, y + \varphi) - \dot{\varphi}.$$

Am obtinut deci sistemul

$$\dot{y} = g(t, y), \textit{unde } g(t, y) = f(t, y + \varphi(t)) - \dot{\varphi}(t). \tag{37}$$

Aceasta dovedeste ca nu restrângem generalitatea daca studiem doar stabilitatea solutiei banale pentru sistemul diferential (8.1). Trebuie doar ca sistemul sa satisfaca conditia $f(t, 0) = 0, \forall t \geq 0$, adica sistemul sa admita solutia banala $x = 0$.

Daca fixam $t_0 \geq 0$ si consideram cunoscuta valoarea

$$x_0 = x(t_0) \tag{38}$$

atunci am format problema Cauchy (36)+(38).

Pentru o fixare a perechii $(t_0, x_0) \in D$, in baza ipotezelor standard, deducem ca problema Cauchy (36)+(38) admite solutie unica. Evident, pentru o alta fixare $(t_0, x_0) \in D$, problema va avea o alta unica solutie. Pentru a evidentia dependenta solutiei de fixarea $(t_0, x_0) \in D$ o vom nota cu $x(t, t_0, x_0)$.

Definitia 31. *Solutia* $x = 0$ *pentru problema Cauchy (36)+(38) este numita stabila daca:* $\forall \varepsilon > 0$ *si* $t_0 \geq 0$ $\exists \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ *astfel incât pentru toti* x_0 *xu proprietatea* $\| x_0 \| \leq \delta(\varepsilon, t_0)$ *solutia corespunzatoare lui* t_0 *si* x_0 *este definita pe semiaxa* $[t_0, \infty)$ *si satisface conditia*

$$\| x(t, t_0, x_0) \| \leq \varepsilon, \forall t \geq t_0.$$

Definitia 32. *Solutia* $x = 0$ *pentru problema Cauchy (36)+(38) este numita uniform stabila daca sunt satisfacute conditiile din definitia 1 cu* $\delta(\varepsilon, t_0) \equiv \delta(\varepsilon)$, *adica* δ *nu depinde* t_0.

Definitia 33. *Solutia* $x = 0$ *pentru problema Cauchy (36)+(38) este numita asimptotic stabila daca este stabila in sensul definitiei 1 si in plus avem* $\exists \gamma(t_0) > 0$ astfel incât

$$\lim_{t \to \infty} \| x(t, t_0, x_0) \| = 0$$

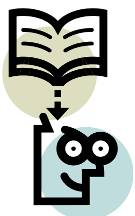
pentru orice solutie $x(t, t_0, x_0)$ ce corespunde lui x_0 care satisface conditia $\| x_0 \| \leq \gamma(t_0)$.

Definitia 34. *Solutia* $x = 0$ *pentru problema Cauchy (36)+(38) este numita uniform asimptotic stabila daca sunt indeplinite conditiile din definitia 33 in care insa* γ *este inden-pendent de* t_0.

Studiind cele patru definitii ale stabilitatii putem deduce urmatoarea legatura intre tipurile de stabilitate:

Stabilitatea asimptotica uniforma implica atât stabilitatea uniforma cât si stabilitatea asimptotica iar acestea doua implica, fiecare, stabilitatea simpla.

Facem precizarea ca proprietatea de stabilitate se refera la solutia unui sistem de ecuatii diferentiale si nu la sistem in sine. Este posibil ca un acelasi sistem sa aiba simultan atât solutii stabile cât si solutii instabile.



Să ne reamintim...

Trebuie subliniat faptul ca stabilitatea se refera la solutiile sistemelor dinamice, sau ale ecuatiilor diferentiale si nu la sistemul in sine, sau ecuatia diferentiala in sine. Un acelasi sistem dinamic sau o aceiasi ecuatie diferentiala pot avea atat solutii stabile cat si solutii instabile. Exemplu clasic: pendulul matematic.

Exemplu

Un exemplu clasic care sustine aceasta afirmatie este oferit de pendulul matematic, a carui miscare este modelata prin ecuatia:

$$x'' + \sin x = 0, t \geq 0.$$

Se observa ca ecuatia (39) admite doua solutii stationare $x_1 = 0$ si $x_2 = \pi$, corespunzatoare celor doua pozitii de echilibru ale pendulului. Se arata imediat ca x_1 este solutie stabila in timp ce solutia x_2 este instabila.

Exemplul de mai sus intareste afirmatia ca stabilitatea se refera la solutiile unui sistem dinamic si nu la sistemul dinamic in sine. Din exemplul dat se vede ca acelasi sistem dinamic poate avea si solutii stabile si solutii instabile.

Exemplu

Pentru a evidentia diferenta intre stabilitatea simpla si stabilitatea asimptotica vom considera miscarea unui punct material sub actiunea unei forte de atractie, modelata de ecuatia

$$x'' = -kx, k > 0$$

sau

$$x'' + \omega^2 x = 0.$$

Ecuatia sa caracteristica $\lambda^2 + \omega^2 = 0$ are radacini complex conjugate si atunci solutia generala

$$x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t.$$

Daca luam datele initiale $x(0) = x_0$ si $x'(0) = v_0$ obtinem constantele $C_1 = x_0$ si $C_2 = \frac{v_0}{\omega}$, deci solutia unica corespunzatoare acestor date initiale este

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$$

Se constata imediat ca nu exista $\lim_{t\to\infty} x(t)$, pentru ca functiile $\sin t$ si $\cos t$ nu au limita la infinit. Deci solutia nu este asimptotic stabila. Daca alegem x_0 si v_0 astfel incât $|x_0| + \frac{|v_0|}{\omega} < \delta$ obtinem $|x(t)| \le \varepsilon$ si deci solutia nula este stabila.

Exemplu de mai sus intareste afirmatia conform careia, daca o solutie stationara este stabila, nu este neaparat asimptotic stabila. Reciproca este adevarata: daca o solutie stationara este asimptotic stabila, cu atat mai mult este simplu stabila.

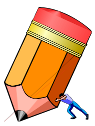
Rezumat

Ca un mic studiu calitativ al ecuatiilor diferentiale, se expun câteva notiuni privind stabilitatea solutiilor ecuatiilor diferentiale. Notiunea de stabilitate este extensia conceptului de dependenta continua a solutiilor sistemelor dinamice in raport cu datele initiale sau coeficientii ecuatiilor diferentiale care alcatuiesc sistemul dinamic. In timp ce dependenta continua a solutiilor sistemelor dinamice se refera la solutii definite pe intervale finite, stabilitatea se refera numai la acele solutii care sunt definite pe o semi-axa.

Se dovedeste ca studiul stabilitatii unei solutii stationare oarecare este redus la studiul stabilitatii solutiei banale.

Sunt definite toate tipurile de stabilitate: stabilitate simpla, stabilitate uniforma, stabilitate asimptotica si stabilitate uniform asimptotica. Se poate stabili, printr-o diagrama, legatura dintre diferitele tipuri de stabilitate.

Este apoi pus in evidenta criteriul lui Hurwitz, valabil numai in cazul ecuatiilor diferentiale cu coeficienti constanti.



Test de evaluare a cunoştinţelor

Se poate constitui un test din urmatoarele chestiuni:

-1. Care sunt principalele tipuri de stabilitate;

-2. Care este legatura intre diferite tipuri de stabilitate;

-3. Cum reduce studiul stabilitatii unei solutii stationare oarecare la studiul stabilitatii solutiei banale;

-4. Pentru care ecuatii diferentiale se poate folosi criteriul lui Hurwitz;

-5. Stabilitatea se refera la un sistem dinamic sau la solutiile sale.

Unitatea de învăţare M4.U2.

Stabilitatea solutiilor

Cuprins

M4.U2.1. Introducere

Este adaptat criteriul lui Hurwitz pentru ecuatii diferentiale cu coeficienti constanti in cazuri particulare. In mod expres sunt tratate ecuatiile diferentiale de ordinul intai, de ordinul doi si de ordinul trei. Chestiunile de stabilitate se reduc la chestiuni de algebra, foarte accesibile, de genul relatiile lui Viete pentru ecuatii polinomiale.

	**M4.U2.2. Competenţe conferite** Dupa parcurgerea acestei unitati de invatare, studenţii vor obtine mai usor stabiliatea, respectiv instabilitatea unei solutii stationare pentru ecuatii diferentiale cu coeficientii constanti. Pentru ecuatiile diferentiale de ordinul intai, de ordinul doi si de ordinul trei se deduce stabilitatea sau instabilitatea prin simple caracterizari ale coeficientilor ecuatiei caracteristice respective.

M4.U2.3. Stabilitatea solutiilor

Ne vom limita la studiul solutiilor ecuatiilor diferentiale de ordinul n cu coeficienti constanti, deci au forma generala:

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + a_1 x' + a_0 x = 0, \tag{40}$$

in care $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ sunt constante.

Fiind o ecuatie liniara, stabilitatea unei solutii oarecare se reduce la stabilitatea solutiei nule, adica solutia care corespunde la datele initiale $x(t_0) = x'(t_0) = \ldots = x^{(n-1)}(t_0) = 0$. O solutie arbitrara corespunzatoare unor date initiale situate in vecinatatea celor de mai sus se obtine din forma generala a solutiei care, in cazul c â nd ecuatia caracteristica are radcinile reale si simple, este

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \ldots + C_n e^{\lambda_n t}$$

In cazul in care ecuatia caracteristica are o radcina reala λ multipla de ordinul m, solutia este de forma

$$x(t) = \left(C_1 + C_2 t + \ldots + C_m t^{m-1}\right) e^{\lambda t} + \ldots$$

Indicam acum, fara demonstratie, un rezultat de stabilitate.

Teorema 35. *Conditia necesara si suficienta pentru ca solutia nula $x(t) = 0$ sa fie asimptotic stabila (deci si stabila) pentru ecuatia (8.4) este ca toate radacinile ecuatiei caracteristice, atasata ecuatiei diferentiale (8.4), sa aiba partea reala negativa.*

Evident, daca ecuatia caracteristica are radacini reale, acestea trebuie sa fie negative. Vom transpune rezultatul teoretic din aceasta teorema pe c â teva cazuri particulare.

Ecuatia de ordinul I. Fie ecuatia

$$x' + ax = 0,$$

a=constanta. Ecuatia caracteristica $\lambda + a = 0$ are radacina $\lambda = -a$ si atunci solutia nula este asimptotic stabila daca $a > 0$.

Ecuatia de ordinul II. Fie ecuatia

$$x'' + ax' + bx = 0,$$

a, b = constante. Daca ecuatia caracteristica $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ are radacinile reale, atunci acestea sunt negative daca si numai daca $S < 0$ si $P > 0$ si atunci $a > 0$, $b > 0$. Daca ecuatia caracteristica are radacinile complex conjugate $x_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, atunci partea reala este α si trebuie sa fie negativa. Dar $x_1 + x_2 = 2\alpha = -a$, deci $a > 0$. Apoi $x_1 x_2 = a = \alpha^2 + \beta^2 > 0$ si deci $a > 0$.

Ecuatia de ordinul III. Rezultatul de stabilitate pentru acesta ecuatie este cunoscut sub denumirea de **Criteriul lui Hurwitz**.
Fie ecuatia

$$(*)\ x''' + ax'' + bx' + cx = 0, a, b, c = \text{constante}.$$

Propozitia 36. *Conditia necesara si suficienta ca radacinile ecuatiei caracteristice atasata ecuatiei (*) sa aiba partea reala negativa (deci ca solutia banala sa fie asimptotic stabila) este sa avem $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ si $ab > c$.*

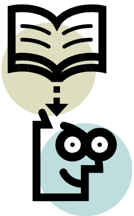
Demonstratie. Necesitatea Presupunem ca radacinile ecuatiei caracteristice sunt reale si negative sau sunt complexe si au toate partea reala negativa si atunci sa aratam ca sunt indeplinite conditiile $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ si $ab > c$. Oricum, una din radacinile ecuatiei caracteristice este realea, sa zicem $x_1 = \alpha$, iar celelalte $x_{2,3} = \alpha_1 \pm i\beta_1$. Atunci

$x_1+x_2+x_3=-a$ si $x_1+x_2+x_3=\alpha+2\alpha_1<0$, deci $a>0$. Apoi $x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=b$ si $x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=2\alpha\alpha_1+\alpha_1^2+\beta_1^2>0$, deci $b>0$. In sfârsit, din $x_1x_2x_3=-c$ si $x_1x_2x_3=\alpha(\alpha_1^2+\beta_1^2)<0$ deducem $c>0$. Sa aratam ca $ab>c$. Se constata prin calcul direct ca

$$ab=-(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=-(\alpha+2\alpha_1)(2\alpha\alpha_1+\alpha_1^2+\beta_1^2)$$

si atunci $-ab<-c$, deci $ab>c$.

Suficenta. Se demonstreaza intr-o maniera foarte asemanatoare cu cea de la necesitate.



Să ne reamintim...

Trebuie subliniat ca rezultatele din aceasta unitate de invatare se aplica numai la ecuatii diferentiale cu coeficientii constanti.

Exemplu

Un exemplu simplu pentru a sublinia supletea rezultatele din acesta unitate de invatare. Instabilitatea solutiei unei ecuatii diferentiale se obtine numai prin consideratii de algebra.
Consideram ecuatia diferentiala:

$$x''' + 2x'' + 3x' + 7x = 0.$$

Ecuatia caracteristica este

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda + 7 = 0.$$

Aici *a=2, b=3, c=7.* Deducem imediat ca $ab<c$ astfel ca, folosind propozitia 36, deducem simplu ca solutia banala a ecuatiei diferentiale initiale nu este stabila.

In exemplul precedent sa dedus rapid instabilitatea solutiei banale datorita rezultatelor teoretice ale acestei unitati de invatare, care permit trecerea de la discutii greoaie de stabilitatea la chestiuni simple de algebra elementara.

M4.U2.4. Rezumat

Este adaptat criteriul lui Hurwitz pentru ecuatii diferentiale cu coeficienti con-stanti in cazuri particulare. In mod expres sunt tratate ecuatiile diferentiale de ordinul intai, de ordinul doi si de ordinul trei. Chestiunile de stabilitate se reduc la chestiuni de algebra, foarte accesibile, de genul relatiile lui Viete pentru ecuatii polinomiale.

M4.U2.5. Test de evaluare a cunoştinţelor

Se poate constitui un test din urmatoarele chestiuni, care sunt abordate in prezenta unitate de invatare:

-1. Cum se stabileste stabilitatea solutiei banale in cazul unei ecuatii diferentiale cu coeficienti constanti, de ordinul intai;

-2. Cum se stabileste stabilitatea solutiei banale in cazul unei ecuatii diferentiale cu coeficienti constanti, de ordinul doi;

-3. Cum se stabileste stabilitatea solutiei banale in cazul unei ecuatii diferentiale cu coeficienti constanti, de ordinul trei;

-4. Daca pentru ecuatia diferentiala

$$x''' + ax'' + bx' + cx = 0, \; a, b, c = \text{constante}$$

Avem indeplinite conditiile *a>0, b>0* si *c>0*, deducem ca solutia banala este asymptotic stabile ?

Evident, raspunsul este nu neaparat pentru ca mai trebuie indeplinita si conditia *ab>c*, conform cu rezultatul theoretic din propozitia 36.

Unitatea de învăţare M4.U3.
Stabilitatea in sens Liapunov

Cuprins

M4.U3.1. Introducere

Stabilitatea in sens Liapunov este o notiune care a aparut relativ recent. Este un concept destul de pretentios si a fost destul de greu acceptat. Prezinta marele dezavantaj al “decoperirii” unei functii de tip Liapunov, in sensul care se va vedea pe parcurs, chestiune care tine mult de “inspiratie”. Prezinta insa avantajul ca daca se obtine stabilitatea solutiei banale, atunci aceasta este direct asimptotica, deci cu atat mai mult solutia banala este simplu stabila.

	M4.U3.2. Competenţe conferite Dupa parcurgerea acestei unitati de invatare, studenţii vor obtine stabilitatea solutiei banale, identificand o functie Liapunov, chestiuni nu foarte accesibila. Ca o sugestie, aceasta functie poate fi o forma pozitiv definita in variabilele respective. Dar nu numai !

M4.U3.3. Notiuni de Stabilitatea in sens Liapunov

Vom incheia paragraful cu câteva consideratii asupra stabilitatii in sens Liapunov. Pentru aceasta reluam sistemul diferential

$$x' = f(t,x), \tag{6}$$

in care functia f satisface pe $[0,\infty)\times D,\ D\subset R^n$ conditiile teoremei lui Picard si $f(t,0)=0$.

Definitia 37. *Se numeste functie Liapunov atasata sistemului (6), functia* $V=V(t,x)$ *care satisface conditiile:*

i) $V\in C^1([0,\infty)\times D)$*;*

ii) V *este functie pozitiv definita, adica* $V(t,x)\geq a(|x|)$*, unde* $a:[0,\infty)\to R$*,* $a(0)=0$ *si* a *este functie continua si crescatoare;*

iii)

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\partial V}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}f^i\leq 0,\ \forall t\in[0,\infty).$$

Spunem ca in iii) avem derivata totala a functiei V *in baza sistemului (6).*

Să ne reamintim...

Este bine de fixat conceptul de derivata in „baza sistemului dinamic”: este o derivata totala in raport cu timpul in care derivatele $\frac{d\,x_i}{dt}$ sunt inlocuite cu $f^{\,i}$, avand in vedere ca sistemul dinamic, scris in forma vectoriala, este

$$\dot{x} = f(t,x)$$

Teorema 38. *Daca sistemului (6) i se poate atasa o functie Liapunov, atunci solutia banala* $x(t)=0$ *este stabila.*

Demonstratie. Fixam $t_0 \in [0,\infty)$ si $x_0 = x(t_0)$. Atasam aceasta conditie lânga sistemul diferential (6) pentru a constitui problema Cauchy. Trebuie atunci sa aratam ca orice solutie a problemei Cauchy, pentru care x_0 este suficient de mic, deci $x(t,t_0,x_0)$ este ea insasi suficient de mica. Alegem $\varepsilon > 0$, arbitrar de mic si notam $\varepsilon_1 = a(\varepsilon)$. Pentru ca functia V este continua, deducem ca daca $|x_0| \le \delta(\varepsilon_1)$ atunci

$$V(t,x_0) < \varepsilon_1,\ \forall t \ge 0 \qquad (1).$$

Apoi, din conditia iii) a definitiei lui V, prin integrarea ei, se obtine

$$V(t,x(t,t_0,x_0)) \le V(t,x_0) \qquad (2).$$

Din relatiile (1) si (2) se obtine

$$V(t,x(t,t_0,x_0)) \le \varepsilon_1 = a(\varepsilon) \qquad (3).$$

Dar din pozitiva definire avem

$$V(t,x(t,t_0,x_0)) \ge a\,|\,x(t,t_0,x_0)\,|$$

si atunci folosind (3) deducem $a(\varepsilon) > a(|\,x(t,t_0,x_0)\,|)$ si pentru ca functia a este crescatoare deducem $|\,x(t,t_0,x_0)\,| < \varepsilon$, ceea ce incheie demonstratia.

Studiul stabilitatii cu metoda propusa de Liapunov prezinta dezavantajul ca pentru fiecare sistem diferential trebuie gasita functia Liapunov, ceea ce nu este un lucru foarte facil.

Exemplu

Sa studiem stabilitatea solutiei banale pentru urmatorul sistem dinamic:

$$\begin{cases} x' = 2y(z-2) \\ y' = -x(z-1) \\ z' = xy \end{cases}$$

Pentru acest sistem putem considera functia

$$\mathrm{V(x,\ y,z)} = x^2 + 4y^2 + 2z^2$$

Evident, aceasta functie este pozitiv definita, pentru ca este constituita din suma de patrate. In plus,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}x' + \frac{\partial V}{\partial y}y' + \frac{\partial V}{\partial z}z' =$$
$$= 2x[2y(z-2)] + 8y[-x(z-1)] + 4zxy = 0.$$

Am tinut cont aici de valorile derivatelor partiale $\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}$ si $\frac{\partial V}{\partial z}$ din expresia functiei V(x,y,z) si de valorile derivatelor ordinare x', y' si z' pe care le-am luat din ecuatiile sistemul dinamic intial.

Pentru ca functia V(x,y,z) este pozitiv definita si, in plus, are derivata in baza sistemului nepozitiva, deducem ca satisface conditiile din definita unei functii Liapunov si, in consecinta, sistemul dinamic dat initial are solutia banala asimptotic stabila, in baza teoremei 38.

Să ne reamintim...

Trebuie subliniat faptul ca a dovedi stabilitatea asimptotica, in sens Liapunov, a solutiei banale pentru un sistem dinamic revine la a indica o functie in Liapunov, in sensul definitiei 37 asociata sistemul dinamic respectiv, ceea ce nu este tocmai atat de simplu. Este motivul pentru care stabilitatea in sens Liapunov nu este cea mai agreata.

Rezumat

Stabilitatea in sens Liapunov este o notiune care a aparut relativ recent. Este un concept destul de pretentios si a fost destul de greu acceptat. Prezinta marele dezavantaj al "decoperirii" unei functii de tip Liapunov, in sensul care se va vedea pe parcurs, chestiune care tine mult de "inspiratie". Prezinta insa avantajul ca daca se obtine stabilitatea solutiei banale, atunci aceasta este direct asimptotica, deci cu atat mai mult solutia banala este simplu stabila.

Test de evaluare a cunoştinţelor

Se poate constitui un test din urmatoarele chestiuni:

-1. Cum se stabileste stabilitatea asimptotica a solutiei banale pentru un sistem dinamic, in sensul stabilit de Liapunov;

-2. Daca functia Liapunov, asociata uneui sistem dinamic, are derivata totala, in baza sistemului, ca fiind nepozitiva, inseamna ca solutia banala este asimptotic stabila ?

-3. Daca se doreste si un exemplu aplicativ, atunci dupa indicarea sistemului, este indicat sa se se indice si presupusa functie Liapunov, urmand ca studentii sa verifice numai cele doua ipoteze ce trebuie sa le satisfaca o functie Liapunov.

Modulul 5. Teme aplicative

Cuprins

Ecuatii diferentiale elementare

1. Sa se integreze ecuatia:

$$xdy - ydx = \sqrt{1+x^2}dy + \sqrt{1+y^2}dx.$$

Rezolvare:

Observam ca este o ecuatie cu variabile separabile.

$$xdy - \sqrt{1+x^2}dy = ydx + \sqrt{1+y^2}dx \Leftrightarrow$$

$$(x - \sqrt{1+x^2})dy = (y + \sqrt{1+y^2})dx \Leftrightarrow$$

$$\frac{dy}{y+\sqrt{1+y^2}} = \frac{dx}{x-\sqrt{1+x^2}} \Leftrightarrow$$

$$\int \frac{dy}{y+\sqrt{1+y^2}} = \int \frac{dx}{x-\sqrt{1+x^2}} \Leftrightarrow$$

$$\int (y - \sqrt{1+y^2})dy = \int (x + \sqrt{1+x^2})dx.$$

Calculam separat integrala:

$$I = \int \sqrt{1+t^2}dt.$$

Avem:

$$I = \int \frac{1+t^2}{\sqrt{1+t^2}}dt = \int \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt + \int \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}dt =$$

$$= \ln(\sqrt{1+t^2}+t) + \int t\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}dt = \ln(\sqrt{1+t^2}+t) + \int t(\sqrt{1+t^2})'\,dt =$$
$$= \ln(\sqrt{1+t^2}+t) + t\sqrt{1+t^2} - \int \sqrt{1+t^2}dt.$$

Obtinem:

$$I = \frac{\ln(\sqrt{1+t^2}+t) + t\sqrt{1+t^2}}{2}.$$

Revenim in ecuatia noastra si avem:

$$\frac{y^2}{2} - \frac{\ln(\sqrt{1+y^2}+y) + y\sqrt{1+y^2}}{2} =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{\ln(\sqrt{1+x^2} + x) + x\sqrt{1+x^2}}{2} + c$$

2. Sa se integreze ecuatia:

$$\left(y^2 + xy^2\right)dx = \left(x^2 - yx^2\right)dy$$

Rezolvare:

Observam ca este o ecuatie cu variabile separabile

$$y^2(1+x)dx = x^2(1-y)dy \Leftrightarrow$$
$$\frac{1+x}{x^2}dx = \frac{1-y}{y^2}dy \Leftrightarrow$$

$$\int \frac{1+x}{x^2}dx = \int \frac{1-y}{y^2}dy \Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{x} + \ln x = -\frac{1}{y} - \ln y + c$$

3. Sa se integreze ecuatia:

$$(x+2y)dx - xdy = 0$$

Rezolvare:

Observam ca este o ecuatie omogena deoarece:

$$P(x,y) = x + 2y \Leftrightarrow P(tx,ty) = tx + 2ty \Leftrightarrow (tx,ty) = tP(x,y)$$

si

$$Q(x,y) = x \Leftrightarrow Q(tx,ty) = tx \Leftrightarrow Q(tx,ty) = Q(x,y).$$

Facem schimbarea de variabila $y = zx$ si diferentiind obtinem:

$$dy = zdx + xdz.$$

Inlocuind in ecuatia initiala avem:

$$(x + 2zx)dx - x(zdx + xdz) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x + zx)dx - xzdx - x^2dz = 0 \Leftrightarrow$$

$$xdx = x^2dz \Leftrightarrow dz = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow z = \ln x + \ln c \Leftrightarrow$$

$$\frac{y}{x}=\ln(xc)\Leftrightarrow y=x\ln(cx).$$

4. Sa se integreze ecuatia:

$$ydx+\left(2\sqrt{xy}-x\right)dy=0.$$

Rezolvare:
Observam ca este o ecuatie omogena deoarece:

$$P(x,y)=y\Leftrightarrow P(tx,ty)=ty\ \Leftrightarrow P(tx,ty)=tP(x,y)$$

$$Q(x,y)=2\sqrt{xy}-x\Leftrightarrow Q(tx,ty)=2\sqrt{txty}-tx\Leftrightarrow$$

$$Q(tx,ty)=t(2\sqrt{xy}-x)\Leftrightarrow Q(tx,ty)=tQ(x,y).$$

Facem schimbarea de variabila $y=zx$ si diferentiind obtinem:

$$dy=zdx+xdz.$$

Inlocuind in ecuatia initiala avem:

$$zxdx+(2\sqrt{x^2z}-x)(zdx+xdz)=0\Leftrightarrow$$

$$zxdx+2x\sqrt{z}dx-xzdx+x^2(2\sqrt{z}-1)dz=0\Leftrightarrow$$

$$2x\sqrt{z}dx=-x^2(2\sqrt{z}-1)dz\Leftrightarrow$$

$$\frac{2dx}{x}\doteq-\frac{2\sqrt{z}-1}{\sqrt{z}}dz\Leftrightarrow\int\frac{2dx}{x}=\int-\frac{2\sqrt{z}-1}{\sqrt{z}}dz\Leftrightarrow$$

$$2\ln x=\int(-2+\frac{1}{\sqrt{z}})dz\Leftrightarrow 2\ln x=-2z+2\sqrt{z}+c\Leftrightarrow$$

$$2\ln x=-2\frac{y}{x}+2\sqrt{\frac{y}{x}}+c$$

5. Sa se integreze ecuatia

$$(3x+3y-1)dx+(x+y-1)dy=0.$$

Rezolvare:

$$(3x+3y-1)dx=-(x+y-1)dy\Leftrightarrow$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{3x+3y-1}{x+y-1}\Leftrightarrow y'=-\frac{3x+3y-1}{x+y-1}.$$

Observam ca ecuatia se poate reduce la o ecuatie cu variabile separabile.
Facem schimbarea de variabila $z=x+y$. Deriv â nd obtinem:

$$y'+1=z'\Leftrightarrow-\frac{3z-1}{z-1}+1=z'\Leftrightarrow$$

$$\frac{-3z+1+z-1}{z-1}=\frac{dz}{dx}\Leftrightarrow\frac{z-1}{z}dz=-2dx\Leftrightarrow$$

$$\int\frac{z-1}{z}dz=\int-2dx\Leftrightarrow z-\ln z=-2x+c\Leftrightarrow$$

$$x+y-\ln(x+y)+2x=c\Leftrightarrow$$

$$3x+y-\ln(x+y)=c$$

6. Sa se integreze ecuatia:

$$y'=\sqrt{4x+2y-1}$$

Rezolvare:
Observam ca ecuatia se poate reduce la o ecuatie cu variabile separabile.
Facem schimbarea de variabila $z=4x+2y-1.$. Deriv â nd obtinem:

$$z'=4+2y'\Leftrightarrow y'=\frac{z'-4}{2}\Leftrightarrow$$

$$z'-4=2\sqrt{z}\Leftrightarrow z'=2\sqrt{z}+4\Leftrightarrow$$

$$\frac{dz}{dx}=2\sqrt{z}+4\Leftrightarrow\frac{dz}{2\sqrt{z}+4}=dx\Leftrightarrow$$

$$\int\frac{dz}{2\sqrt{z}+4}=\int dx\Leftrightarrow t=\sqrt{z}\Leftrightarrow z=t^2\Leftrightarrow dz=2tdt\Leftrightarrow$$

$$\int\frac{2tdt}{2t+4}=x+c\Leftrightarrow\int(1-\frac{4}{2t})dt=x+c\Leftrightarrow$$

$$t-2\ln t=x+c\Leftrightarrow\sqrt{z}-2\ln\sqrt{z}=x+c\Leftrightarrow$$

$$\sqrt{4x+2y-1}-\ln(4x+2y-1)=x+c$$

7. Sa se integreze ecuatia:

$$2(x+4y-6)dx=(7x+y-15)dy.$$

Rezolvare:

Observam ca ecuatia se poate reduce la o ecuatie omogena.
Avem sistemul:

$$x+4y-6=0,$$
$$7x+y-15=0.$$

Rezolv â nd acest sistem se obtin solutiile:

$$x_0=2,\ y_0=1.$$

Facem translatia:

$$u=x-2 \Leftrightarrow x=u+2 \Leftrightarrow dx=du$$

$$v=y-1 \Leftrightarrow y=v+1 \Leftrightarrow dy=dv.$$

Cu aceasta translatie obtinem:

$$2(u+4v)du=(7u+v)dv \Leftrightarrow$$

Am obtinut o ecuatie omogena.
Facem schimbarea de variabila $v=zu$ si diferentiind obtinem:

$$dv=zdu+udz.$$

Inlocuind in ecuatia initiala avem:

$$2(u+4zu)du=(7u+zu)(zdu+udz) \Leftrightarrow$$

$$2(1+4z)du=(7+z)zdu+(7+z)udz \Leftrightarrow$$

$$(2+8z-7z-z^2)du=(7+z)udz \Leftrightarrow$$

$$\frac{du}{u}=\frac{7+z}{-z^2+z+2}dz \Leftrightarrow$$

$$\int\frac{du}{u}=\int\frac{7+z}{-z^2+z+2}dz\frac{du}{u} \Leftrightarrow$$

$$\ln u=-\int\frac{z+7}{z^2-z-2}dz \Leftrightarrow$$

$$\frac{z+7}{z^2-z-2}=\frac{z+7}{(z+1)(z-2)}=\frac{A}{z+1}+\frac{B}{z-2}\Leftrightarrow$$

$$z+7=Az-2A+Bz+B$$

echivalent cu sistemul:

$$A+B=1,-2A+B=7,$$

care are solutiile:

$$A=-2,\ B=3\Leftrightarrow$$

$$\ln u=\int\frac{2}{z+1}dz-\int\frac{3}{z-2}dz$$

$$\ln u=2\ln(z+1)-3\ln(z-2)+\ln c\Leftrightarrow$$

$$u=c(z+1)^2(z-2)^{-3}\Leftrightarrow$$

$$u=c\left(\frac{v}{u}+1\right)^2\left(\frac{v}{u}-2\right)^{-3}\Leftrightarrow$$

$$x-2=c\left(\frac{y-1}{x-2}+1\right)^2\left(\frac{y-1}{x-2}-2\right)^{-3}\Leftrightarrow$$

$$(y-2x+3)^3=c(y+x-3)^2$$

8. Aflati solutia generala a ecuatiei:

$$(2x-4y+6)dx+(x+y-3)dy=0.$$

Rezolvare:

Observam ca ecuatia se poate reduce la o ecuatie omogena.
Avem sistemul:

$$2x-4y+6=0,$$
$$x+y-3=0$$

cu solutiile

$$x_0=1,\ y_0=2.$$

Facem schimbarile de variabile :

$$u = x - 1 \Leftrightarrow x = u + 1 \;\; dx = du$$

$$v = y - 2 \Leftrightarrow y = v + 2 \;\; dy = dv.$$

Inlocuind in ecuatia initiala obtinem :

$$(2u + 2 - 4v - 8 + 6)du + (u + 1 + v + 2 - 3)dv = 0.$$

Ecuatia fiind omogena, facem schimbarea

$$v = zu, dv = zdu + udz$$
$$(2u - 4zu)du + (u + zu)(zdu + udz) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(2 - 4z)du + (1 + z)(zdu + udz) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(2 - 4z + z + z^2)du + u(1 + z)dz = 0 \Leftrightarrow$$

$$(z^2 - 3z + 2)du = -u(z + 1) \Leftrightarrow$$

$$\frac{du}{u} = -\frac{z + 1}{z^2 - 3z + 2} \Leftrightarrow$$

$$\int \frac{du}{u} = -\int \frac{z + 1}{z^2 - 3z + 2} dz \quad (1)$$

$$\frac{z + 1}{z^2 - 3z + 2} = \frac{z + 1}{(z - 1)(z - 2)} = \frac{A}{z - 1} + \frac{B}{z - 2} \Leftrightarrow$$

$$Az - 2A + Bz - B = z + 1 \Leftrightarrow$$

Avem sistemul:

$$A + B = 1, -2A - B = 1$$

cu solutiile:

$$A = -2, B = 3.$$

Inlocuind in relatia (1) obtinem:

$$\ln u = \int \frac{2}{z - 1} dz - \int \frac{3}{z - 2} dz$$

$$\ln u = 2\ln(z - 1) - 3\ln(z - 2) + \ln c$$

$$\ln u = \ln \frac{(\frac{y}{u} - 1)^2}{(\frac{y}{u} - 2)} + \ln c \Leftrightarrow$$

$$u = c \frac{(v-u)^2}{(v-2u)^3} u \Leftrightarrow$$

$$(v-2u)^3 = c(v-u)^2 \Leftrightarrow$$

$$(y-2-2x+2)^3 = c(y-2-x+1)^2$$

$$(y-2x)^3 = c(y-x-1)^2$$

9. Aflati solutia generala a ecuatiei:

$$(2x+3x^2y)dx + (x^3 - 3y^2)dy = 0.$$

Rezolvare:

$$P(x,y) = 2x + 3x^2 y, Q(x,y) = x^3 - 3y^2$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 3x^2 \ \frac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2$$

Avem o ecuatie diferentiala exacta. Atunci

$$\exists F \ a.i. \ \frac{\partial F}{\partial x} = P \ \ si \ \frac{\partial F}{\partial y} = Q.$$

Functia $F = F(x,y)$ se obtine in felul urmator:

$$F = \int P(x,y)dx = \int (2x + 3x^2 y)dx = x^2 + x^3 y + C(y)$$

Vom calcula

$$\frac{\partial F}{\partial y}$$

si egalam cu Q.

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x^3 + C'(y)$$

$$x^3 + C'(y) = x^3 - 3y^2 \Leftrightarrow$$

$$C'(y) = -3y^2 \Leftrightarrow$$

$$C(y)=\int -3y^2dy=-y^3+c \Leftrightarrow$$

$$F=x^3-y^3+c \Leftrightarrow$$

$$x^3-y^3=c$$

10. Aflati solutia generala a ecuatiei:

$$2x(1+\sqrt{x^2-y})dx-\sqrt{x^2-y}dy=0,$$

Rezolvare:

$$P=2x(1+\sqrt{x^2-y}),\ Q=-\sqrt{x^2-y}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2x\frac{-1}{2\sqrt{x^2-y}}=\frac{-x}{\sqrt{x^2-y}}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{-2x}{2\sqrt{x^2-y}}=\frac{-x}{\sqrt{x^2-y}}.$$

Avem o ecuatie diferentiala exacta. Atunci

$$\exists F\ a.i.\ \frac{\partial F}{\partial x}=P\ si\ \frac{\partial F}{\partial y}=Q$$

$$F=\int P(x,y)dx=\int(2x+2x\sqrt{x^2-y})dx=$$

$$=x^2+\int(x^2-y)'(x^2-y)^{\frac{1}{2}}dx=$$

$$=x^2+\frac{2}{3}(x^2-y)^{\frac{3}{2}}+C(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{2}{3}(-1)\frac{3}{2}(x^2-y)^{\frac{1}{2}}+C'(y)=$$

$$=-\sqrt{x^2-y}+C'(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=-\sqrt{x^2-y}$$

$$-\sqrt{x^2-y}=-\sqrt{x^2-y}+C'(y) \Leftrightarrow$$

$$C^{'}(y) = 0 \Leftrightarrow C(y) = C \Leftrightarrow$$

$$F(x, y) = x^2 + \frac{2}{3}(x^2 - y)^{\frac{3}{2}} + C \Leftrightarrow$$

$$x^2 + \frac{2}{3}(x^2 - y)^{\frac{3}{2}} = C$$

11. Aflati solutia generala a ecuatiei:

$$(x^2 + y^2 + x)dx + ydy = 0.$$

Rezolvare:

$$P(x, y) = (x^2 + y^2 + x), Q(x, y) = y$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

$$\frac{-Q_x + P_y}{Q} = \frac{2y}{y} \; unde \; Q_x = \frac{\partial Q}{\partial x}, P_y = \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$\frac{\mu^{'}}{\mu} = 2 \Leftrightarrow, \ln \mu = 2x \Leftrightarrow, \mu = e^{2x} \Leftrightarrow$$

$$(x^2 + y^2 + x)e^{2x}dx + ye^{2x}dx = 0 \Leftrightarrow$$

$$P(x, y) = (x^2 + y^2 + x)e^{2x}, Q(x, y) = ye^{2x}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2ye^{2x}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2ye^{2x}.$$

Avem o ecuatie diferentiala exacta. Atunci:

$$(\exists)F \; a.i. \; \frac{\partial Q}{\partial x} = P \; si \; \frac{\partial F}{\partial y} = Q$$

$$F = \int Q(x, y)dy = \int ye^{2x}dy = \frac{y^2}{2}e^{2x} + C(x) \Leftrightarrow$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} y^2e^{2x} + C^{'}(x) \Leftrightarrow$$

$$(x^2+y^2+x)e^{2x} = y^2e^{2x} + C'(x) \Leftrightarrow$$

$$C'(x) = (x^2+x)e^{2x} \Leftrightarrow$$

$$C(x) = \int (x^2+x)e^{2x}dx = (x^2+x)\frac{e^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\int (2x+1)e^{2x}dx =$$

$$= \frac{1}{2}(x^2+x)e^{2x} - \frac{1}{2}(2x+1)\frac{e^{2x}}{2} + \frac{1}{2}\int 2\frac{e^{2x}}{2}dx =$$

$$= \frac{1}{2}(x^2+x)e^{2x} - \frac{1}{4}(2x+1)e^{2x} + \frac{1}{2}\frac{e^{2x}}{2} =$$

$$= \frac{1}{4}e^{2x}(2x^2+2x-2x-1+1) =$$

$$= \frac{1}{2}x^2e^{2x} + C \Leftrightarrow$$

$$F = y^2e^{2x} + \frac{1}{2}x^2e^{2x} + C$$

$$y^2e^{2x} + \frac{1}{2}x^2e^{2x} = C$$

12. Aflati solutia generala a ecuatiei:

$$(x^2 - \sin^2 y)dx + x\sin 2y dy = 0.$$

Rezolvare:

$$P = x^2 - \sin^2 y,\ Q = x\sin 2y$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -2\sin y\cos y = -\sin 2y$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2\sin 2y$$

Nu avem o ecuatie diferentiala exacta si incercam sa o rezolvam cu ajutorul factorului integrant.

$$\frac{-P_y + Q_x}{P} = \frac{2\sin 2y}{x^2 - \sin^2 y}$$

Depinde si de x si de y, deci nu convine.

$$\frac{-Q_x + P_y}{Q} = \frac{-2\sin 2y}{x\sin 2y} = \frac{-2}{x}$$

Depinde numai de x si atunci deducem ca exista factor integrant $\mu = \mu(x)$ care transforma ecuatia data intr-o ecuatie diferentiala exacta.

$$\frac{\mu^{'}}{\mu} = -\frac{2}{x} \Leftrightarrow$$

$$\ln \mu = -2\ln x + \ln C \Leftrightarrow$$

$$\ln \mu = \ln Cx^{-2} \Leftrightarrow$$

$$\mu = \frac{C}{x^2} \Leftrightarrow$$

Pentru $C = 1$ rezulta factorul integrant

$$\mu = \frac{1}{x^2}.$$

Inmultim ecuatia initiala cu

$$\mu = \frac{1}{x^2}$$

si obtinem:

$$(1 - \frac{\sin^2 y}{x^2})dx + \frac{\sin 2y}{x}dy = 0$$

$$P = 1 - \frac{\sin^2 y}{x^2}, Q = \frac{\sin 2y}{x^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{2\sin y \cos y}{x^2} = -\frac{\sin 2y}{x^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\sin 2y}{x^2}.$$

Rezulta o ecuatie diferentiala exacta.

$$(\exists) F \ a.i. \frac{\partial F}{\partial x} = P \ si \ \frac{\partial F}{\partial y} = Q$$

$$F = \int Q dy = \int \frac{\sin 2y}{x} dy = \frac{1}{x} \int \sin 2y dy =$$

$$= -\frac{1}{x} \frac{\cos 2y}{2} + C(x) = -\frac{\cos 2y}{2x}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\cos 2y}{2x^2} + C'(x) = \frac{1 - 2\sin^2 y}{2x^2} + C'(x) =$$

$$= \frac{1}{2x^2} - \frac{\sin^2 y}{x^2} + C'(x).$$

Dar

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 1 - \frac{\sin^2 y}{x^2}.$$

Rezulta:

$$\frac{1}{2x^2} - \frac{\sin^2 y}{x^2} + C'(x) = 1 - \frac{\sin^2 y}{x^2}$$

$$C'(x) = 1 - \frac{1}{2x^2} \Leftrightarrow$$

$$C(x) = x + \frac{1}{2x} + C.$$

Deci:

$$F(x, y) = -\frac{\cos 2y}{2x} + x + \frac{1}{2x} + C.$$

$$-\frac{\cos 2y}{2x} + x + \frac{1}{2x} = C$$

Ecuatii diferentiale liniare de ordinul I

13. Aflati solutia generala a ecuatiei:

$$xy' - 2y = 2x^4.$$

Rezolvare:

Ecuatia se poate scrie sub forma:

$$y' - \frac{2}{x} y = 2x^3,$$

care este o ecuatie liniara. Avem solutia ecuatiei:

$$y(x) = e^{\int \frac{2}{x} dx} \left(C + \int 2x^3 e^{-\int \frac{2}{x} dx} dx \right) =$$

$$= e^{2\ln x}\left(C + \int 2x^3 e^{-2\ln x} dx\right) =$$

$$= x^2\left(C + \int 2x^3 x^{-2} dx\right)$$

$$= x^2\left(C + \int 2x dx\right)$$

$$= x^2\left(C + x^2\right).$$

Observatie. S-a folosit faptul ca $e^{\ln a} = a.$

14. Aflati solutia generala a ecuatiei:

$$\left(xy' - 1\right)\ln x = 2y.$$

Rezolvare:

Ecuatia este echivalenta cu:

$$x\ln x \cdot y' - \ln x = 2y \Leftrightarrow$$

$$x\ln x \cdot y' - 2y = \ln x \Leftrightarrow$$

$$y' - \frac{2}{x\ln x} y = \frac{1}{x}$$

$$y(x) = e^{\int \frac{2}{x\ln x} dx} \left(C + \int \frac{1}{x} e^{-\int \frac{2}{x\ln x} dx} dx \right)$$

$$I_1 = \int \frac{2}{x\ln x} dx$$

$$\ln x = t \Leftrightarrow \frac{1}{x} dx = dt$$

$$I_1 = \int \frac{2}{t} dt = 2\ln t = 2\ln\ln x = \ln\left(\ln^2 x\right)$$

$$I_2 = \int \frac{1}{x} e^{-\int \frac{2}{x\ln x}dx} dx = \int \frac{1}{x} e^{-\ln\left(\ln^2 x\right)} dx =$$

$$= \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln^2 x} dx = \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{\ln x}$$

$$y(x) = e^{\ln\left(\ln^2 x\right)}\left(C - \frac{1}{\ln x}\right) =$$

$$= \ln^2 x\left(C - \frac{1}{\ln x}\right) = C\ln^2 x - \ln x$$

15. Aflati solutia generala a ecuatiei:

$$(\sin^2 y + x\cot yy' = 1.$$

Ecuatia nu este liniara in y:

$$(\sin^2 y + x\cot y)\frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dx}{dy} = x\cot y + \sin^2 y$$

$$x' - x\cot y = \sin^2 y,$$

rezulta ecuatie liniara in $x = x(y)$.

$$x(y) = e^{\int \cot y dy}(C + \int \sin^2 y e^{-\int \cot y dy} dy) =$$

$$= e^{\ln\sin y}(C + \int \sin^2 y e^{-\ln(\sin y)} dy) =$$

$$= \sin y(C + \int y \frac{1}{\sin y} dy) =$$

$$= \sin y(C - \cos y).$$

Deci $x(y) = \sin y(C - \cos y).$

16. Aflati solutia generala a ecuatiei:

$$(2e^y - x)y' = 1.$$

Rezolvare:
Ecuatia nu e liniara in y. Avem:

$$(2e^y - x)\frac{dy}{dx} = 1 \rightarrow$$

$$\frac{dx}{dy} = 2e^y - x$$

$$x' + x = 2e^y.$$

Am obtinut o ecuatie liniara in x:

$$x(y) = e^{-\int dy}(C + \int 2e^y e^{\int dy} dy) =$$

$$= e^{-y}(C + \int 2e^y e^y dy) =$$

$$= e^{-y}(C + 2\frac{e^{2y}}{2}) =$$

$$= e^y + Ce^{-y}.$$

Ecuatii diferentiale reductibile la ecuatii liniare

17. Sa se integreze ecuatia:

$$y' = y\cos x + y^2 \cos x.$$

Rezolvare:
Este o ecuatie Bernoulli cu $\alpha = 2.$ Facem substitutia:

$$z = y^{1-\alpha} \Leftrightarrow z = y^{-1} \Leftrightarrow y = z^{-1} \Rightarrow$$

$$y' = -z^{-2}z' \Rightarrow z'(-z^{-2}) = z^{-1}\cos x + z^{-2}\cos x / z^2$$

$$-z' = z\cos x + \cos x$$

$$z' + z\cos x = -\cos x$$

care este o ecuatie liniara in z. Solutia sa:

$$z(x) = e^{-\int \cos x dx}(C + \int -\cos x e^{\int \cos x dx} dx)$$

$$z(x) = e^{-\sin x}(C + \int -\cos x e^{\sin x} dx)$$

$$z(x) = e^{-\sin x}(C - e^{\sin x}) = Ce^{-\sin x} - 1 \Rightarrow$$

$$y^{-1} = Ce^{-\sin x} - 1 \Rightarrow$$

$$y = \frac{1}{Ce^{-\sin x} - 1}$$

18. Sa se integreze ecuatia:

$$xy' + y + x^5 y^3 e^x = 0.$$

Rezolvare:

Este o ecuatie Bernoulli cu $\alpha = 3$. Facem substitutia:

$$z = y^{1-\alpha} \Leftrightarrow z = y^{-2} \Leftrightarrow y = z^{-\frac{1}{2}}$$

$$y' = -\frac{1}{2} z^{-\frac{3}{2}} z' \Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{2} x z^{-\frac{3}{2}} z' + z^{-\frac{1}{2}} + x^5 z^{-\frac{3}{2}} e^x = 0 \Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{2} x z' + z = -x^5 e^x \Leftrightarrow$$

$$z' - \frac{2}{x} z = 2x^4 e^x \Leftrightarrow$$

$$z(x) = e^{\int \frac{2}{x} dx} \left(C + \int 2x^4 e^x e^{-\int \frac{2}{x} dx} \right) \Leftrightarrow$$

$$z(x) = e^{2\ln x} \left(C + \int 2x^4 e^x e^{-2\ln x} dx \right) \Leftrightarrow$$

$$z(x) = x^2 \left(C + \int 2x^4 e^x x^{-2} dx \right) \Leftrightarrow$$

$$z(x) = x^2 \left(C + 2\int x^2 e^x dx \right) \Leftrightarrow$$

$$z(x) = x^2 \left(C + 2x^2 e^x - \int 4x e^x dx \right) \Leftrightarrow$$

$$z(x) = x^2\left(C + 2x^2e^x - 4xe^x + 4\int e^x dx\right) \Leftrightarrow$$

$$z(x) = x^2\left(C + 2x^2e^x - 4xe^x + 4e^x\right) \Leftrightarrow$$

$$y = \pm\frac{1}{\sqrt{z}} \Leftrightarrow$$

$$y = \pm\frac{1}{x\sqrt{C + 2x^2e^x - 4xe^x + 4e^x}}$$

19. Sa se integreze urmatoarea ecuatie Riccati stiind ca admite solutia particulara indicata

$$y' = -y^2\sin x + \frac{2\sin x}{\cos^2 x} \quad si \quad \varphi(x) = \frac{1}{\cos x}$$

Rezolvare:
Se face substitutia:

$$y = \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{z} \Rightarrow$$

$$y' = \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{z'}{z^2} \Rightarrow$$

$$\frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{z'}{z^2} = -\frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{2\sin x}{z\cos x} - \frac{\sin x}{z^2} + \frac{2\sin x}{\cos^2 x}$$

$$z' = 2z\tan x - \sin x\ ,$$

care este ecuatie liniara

$$\Rightarrow$$

$$z(x) = e^{\int 2\tan x dx}\left(C + \int \sin x e^{-\int 2\tan x dx} dx\right) \Leftrightarrow$$

$$z(x) = e^{-2\ln\cos x}\left(C + \int \sin x e^{2\ln\cos x} dx\right) \Leftrightarrow$$

$$z(x) = \cos^{-2} x\left(C + \int \sin x \cos^2 x dx\right) \Leftrightarrow$$

$$z(x) = \cos^{-2} x\left(C - \frac{\cos^3 x}{3}\right) \Leftrightarrow$$

$$z(x) = \frac{C}{\cos^2 x} - \frac{\cos x}{3} \Leftrightarrow$$

$$y(x)=\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\frac{C}{\cos^2 x}-\frac{\cos x}{3}}$$

Ecuatii diferentiale cu parametru

20. Sa se integreze ecuatia Lagrange:

$$y=-x+\left(\frac{y'+1}{y'-1}\right)^2$$

Rezolvare:

$$y'=p \Rightarrow \frac{dy}{dx}=p \Rightarrow dy=pdx$$

$$y=-x+\left(\frac{p+1}{p-1}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$dy=-dx+2\left(\frac{p+1}{p-1}\right)\left(\frac{p+1}{p-1}\right)' dp \Leftrightarrow$$

$$pdx=-dx+2\left(\frac{p+1}{p-1}\right)\frac{p-1-p-1}{(p-1)^2}dp \Leftrightarrow$$

$$(p+1)dx=-4\frac{(p+1)}{(p-1)^3}dp$$

$$i)\;\; p+1=0 \Rightarrow p=-1 \Rightarrow y'=-1 \Rightarrow$$

$$y=-x+C.$$

Inlocuind in ecuatia initiala si obtinem:

$$-x+C=-x \Rightarrow C=0 \Rightarrow$$

$$y=-x,$$

care este o solutie singulara.

$$ii)\; dx=\frac{-4}{(p-1)^3}dp$$

$$x = \frac{2}{(p-1)^2} + C$$

Avem solutia:

$$y = -x + \left(\frac{p+1}{p-1}\right)^2$$

$$x = \frac{2}{(p-1)^2} + C.$$

21. Sa se integreze ecuatia Clairaut:

$$y = \frac{x\sqrt{1+y'^2}+9}{\sqrt{1+y'^2}}\, y'$$

Rezolvare:

$$y = xy' + \frac{9}{\sqrt{1+y'^2}}\, y' \Leftrightarrow$$

$$y' = p \Rightarrow dy = pdx \Leftrightarrow$$

$$y = xp + \frac{9p}{\sqrt{1+p^2}} \Leftrightarrow$$

$$dy = pdx + \left(x + 9\frac{\sqrt{1+p^2} - \frac{p^2}{\sqrt{1+p^2}}}{1+p^2} \right) dp \Leftrightarrow$$

$$pdx = pdx + \left(x + \frac{9}{\left(1+p^2\right)^{3/2}} \right) dp \Leftrightarrow$$

$$\left(x + \frac{9}{\left(1+p^2\right)^{3/2}} \right) dp = 0.$$

Avem doua posibilitati:

$$i)\ dp = 0 \Rightarrow p = C_1$$

$$y' = C_1 \Rightarrow y = C_1 x + C_2,$$

care este solutie singulara.
Inlocuind in ecuatia initiala se obtine C_1 si $C_{2.}$

$$ii)\ x+\frac{9}{\left(1+p^2\right)^{3/2}}=0$$

Avem solutia generala:

$$x=\frac{-9}{\left(1+p^2\right)^{3/2}}$$

$$y=xp+\frac{9p}{\sqrt{1+p^2}}$$

Ecuatii diferentiale de ordin superior

22. Sa se integreze ecuatia:

$$y''+y'-2y=0.$$

Rezolvare:

Avem o ecuatie omogena cu coeficienti constanti. Ecuatia caracteristica atasata este:

$$r^2+r-2=0.$$

$$\Delta=1+8=9$$

$$r_{1,2}=\frac{-1\pm 3}{2}\Rightarrow r_1=-2\in R, r_2=1\in R.$$

Avem radacini reale si atunci

$$y(x)=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}\Rightarrow$$

$$y(x)=C_1e^{-2x}+C_2e^{x}.$$

Observatie: Ecuatia caracteristica se scrie astfel:

$$y^{(n)}\to r^n,\ y\to 1$$

din ecuatia initiala.

23. Aflati solutia generala a ecuatiei:

$$y''-2y'=0.$$

Rezolvare:

Avem o ecuatie omogena cu coeficienti constanti.
Ecuatia caracteristica atasata este:

$$r^2 - 2r = 0 \Rightarrow r_1 = 0, r_2 = 2 \Rightarrow$$

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2$$

24. Aflati solutia generala a ecuatiei:

$$4y'' + 4y' + y = 0.$$

Rezolvare:
Avem o ecuatie omogena cu coeficienti constanti.
Ecuatia caracteristica atasata este:

$$4r^2 + 4r + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$r_1 = r_2 = -\frac{1}{2} \rightarrow$$

care are radacina dubla

$$\Rightarrow$$

$$y(x) = C_1 e^{-\frac{1}{2}x} + C_2 x e^{-\frac{1}{2}x}.$$

25. Aflati solutia generala a ecuatiei:

$$y'' - 4y' + 5y = 0.$$

Rezolvare:
Avem o ecuatie omogena cu coeficienti constanti.
Ecuatia caracteristica atasata este:

$$r^2 - 4r + 5 = 0$$

$$\Delta = 16 - 20 = -4$$

$$r_{1,2} = \frac{4 \pm 2i}{2} \Rightarrow r_1 = 2 + i$$

$$r_2 = 2 - i.$$

Avem radacini complexe $a + bi$, rezulta:

$$y(x) = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx),$$

rezulta:

$$y(x) = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

26. Aflati solutia generala a ecuatiei:

$$y'' + 4y = 0.$$

Rezolvare:
Avem o ecuatie omogena cu coeficienti constanti.
Ecuatia caracteristica atasata este:

$$r^2+4=0 \Rightarrow r_{1,2}=\pm 2i$$

$$y(x)=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x.$$

27. Aflati solutia generala a ecuatiei:

$$y'''' - y = 0.$$

Rezolvare:

Avem o ecuatie omogena cu coeficienti constanti.
Ecuatia caracteristica atasata este:

$$r^4-1=0 \Rightarrow (r^2-1)(r^2+1)=0 \Rightarrow$$

$$r_{1,2}=\pm 1, r_{3,4}=\pm i \Rightarrow$$

$$y(x)=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x.$$

28. Aflati solutia generala a ecuatiei:

$$y'''' + 64y = 0.$$

Rezolvare:

Avem o ecuatie omogena cu coeficienti constanti.
Ecuatia caracteristica atasata este:

$$r^4+64=0 \Leftrightarrow r^4+16r^2+64-16r^2=0 \Leftrightarrow$$
$$(r^2+8)^2-(4r)^2=0 \Leftrightarrow (r^2-4r+8)(r^2+4r+8)=0$$
$$r^2-4r+8=0$$
$$\Delta=16-32=-16 \Rightarrow r_{1,2}=\frac{4\pm 4i}{2}=2\pm 2i$$
$$r^2+4r+8=0$$

$$\Delta=16-32=-16 \Rightarrow r_{3,4}=\frac{4\pm 4i}{2}=-2\pm 2i$$

rezulta:

$$y(x)=e^2(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)+e^{-2}(C_3\cos 2x+C_4\sin 2x).$$

29. Aflati solutia generala a ecuatiei:

$$y^{V}-2y^{IV}-16y'+32y=0.$$

Rezolvare:

Avem o ecuatie omogena cu coeficienti constanti.
Ecuatia caracteristica atasata este:

$$r^5 - 2r^4 - 16r + 32 = 0 \Leftrightarrow$$
$$r^4(r-2) - 16(r-2) = 0 \Leftrightarrow$$
$$(r-2)(r^4 - 16) = 0 \Leftrightarrow$$
$$(r-2)^2(r+2)(r^2+4) = 0 \Rightarrow r_1 = 2 \rightarrow$$

radacina dubla

$$r_2 = -2,\ r_{3,4} = \pm 2i.$$

Rezulta:

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + C_3 e^{-2x} + C_4 \cos 2x + C_5 \sin 2x.$$

30. Sa se integreze ecuatia:

$$y'''' + 2y'' + y = 0.$$

Rezolvare:
Avem o ecuatie omogena cu coeficienti constanti.
Ecuatia caracteristica atasata este:

$$r^4 + 2r^2 + 1 = 0$$
$$(r^2+1) = 0$$

$$r^2 = -1 \Rightarrow r_1 = \pm i \rightarrow$$

radacina dubla si atunci rezulta:

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 x \cos x + C_4 x \sin x.$$

31. Sa se integreze ecuatia:

$$y'' - 2y' - 3y = e^{4x}.$$

Rezolvare:
Avem o ecuatie neomogena careia ii atasam ecuatia omogena:

$$y'' - 2y' - 3y = 0.$$

Ecuatia caracteristica atasata acesteia este:

$$r^2 - 2r - 3 = 0$$

$$\Delta = 4 + 12 = 16 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{2} \Rightarrow r_1 = 3$$

$$r_2 = -1$$

si atunci rezulta:

$$y_o = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}.$$

Cautam acum o solutie particulara a ecuatiei neomogene. Deoarece termenul perturbant este e^{4x}, vom cauta o solutie de tipul:

$$y_p = C_1 e^{4x}.$$

Calculam derivatele de ordinul intii si respectiv doi si inlocuim in ecuatia initiala:

$$y_p' = 4C_1 e^{4x}$$

$$y_p'' = 16C_1 e^{4x}$$

Inlocuind in ecuatia initiala, obtinem:

$$16C_1 e^{4x} - 8C_1 e^{4x} - 3C_1 e^{4x} = e^{4x} \Leftrightarrow$$

$$5C_1 e^{4x} = e^{4x} \Leftrightarrow$$

$$5C_1 = 1 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{5}.$$

Rezulta:

$$y_p = \frac{1}{5} e^{4x}$$

In concluzie, solutia generala este:

$$y_g = y_o + y_p \Leftrightarrow$$

$$y_g = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} + \frac{1}{5} e^{4x}.$$

32. Aflati solutia generala a ecuatiei:

$$y'' - y = 2e^x - x^2.$$

Rezolvare:

Avem o ecuatie neomogena. Ii atasam ecuatia omogena:

$$y'' - y = 0.$$

Ecuatia caracteristica atasata este:

$$r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \pm 1$$

si atunci rezulta:

$$y_o = C_1e^x + C_2e^{-x}$$

Consideram ecuatiile

$$y'' - y = 2e^x$$
$$y'' - y = -x^2,$$

carora le gasim solutii particulare.
Pentru

$$y'' - y = 2e^x \quad (*)$$

cautam

$$y_p = qe^x \Rightarrow$$

$$y_p' = qe^x$$

$$y_p'' = qe^x$$

inlocuind in $(*)$, obtinem:

$$qe^x - qe^x = 2e^x$$

care nu convine.
Cautam $y_p = qxe^x$. Avem:

$$y_p' = qe^x + qxe^x$$

$$y_p'' = qe^x + qe^x + qxe^x.$$

Inlocuind in $(*)$, obtinem:

$$2qe^x + qxe^x - qxe^x = 2e^x$$
$$q = 1 \Rightarrow y_{p_1} = xe^x.$$

Pentru ecuatia

$$y'' - y = -x^2 \quad (***)$$

cautam o solutie particulara de forma

$$y_{p_2} = ax^2 + bx + c.$$

Avem:

$$y'_{p_2} = 2ax + b$$

$$y''_{p_2} = 2a.$$

Inlocuind in $(**)$, obtinem:

$$a - ax^2 - bx - c = -x^2.$$

Identificâ nd coeficientii rezulta:

$$-a = -1 \Rightarrow a = 1$$

$$-b = 0 \Rightarrow b = 0$$

$$2a - c = 0 \Rightarrow 2 - c = 0 \Rightarrow c = 2$$

si atunci rezulta:

$$y_{p_2} = x^2 + 2$$

deci solutia generala a ecuatiei initiale este:

$$y = y_o + y_{p1} + y_{p2}$$

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} + xe^x + x^2 + 2.$$

33. Aflati solutia generala a ecuatiei:

$$\mathrm{y}'' - 3y' + 2y = \sin x.$$

Rezolvare:
Avem o ecuatie neomogena. Ii atasam ecuatia omogena:

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

Ecuatia caracteristica atasata este:

$$r^2 - 3r + 2 = 0,$$

$$\Delta = 1 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow r_1 = 2, r_2 = 1.$$

Rezulta:

$$y_o = C_1e^x + C_2e^{2x}.$$

Cautam solutii particulare pentru ecuatia neomogena.

$$y_p = C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

$$y_p^{'} = C_1 \cos x - C_2 \sin x$$

$$y_p^{''} = -C_1 \sin x - C_2 \cos x$$

Inlocuind in ecuatia neomogena, rezulta:

$$-C_1 \sin x - C_2 \cos x - 3(C_1 \cos x - C_2 \sin x) + 2(C_1 \sin x + C_2 \cos x) = \sin x$$

$$(-C_1 + 3C_2 + 2C_1)\sin x + (-C_2 - 3C_1 + 2C_2)\cos x = \sin x$$

Identific â nd coeficientii, rezulta:

$$\begin{aligned} 3C_2 + C_1 &= 1 \\ C_2 - 3C_1 &= 0 \end{aligned}$$

si acest sistem are solutiile:

$$C_1 = \frac{1}{10}, C_2 = \frac{3}{10}.$$

Atunci:

$$y_p = \frac{1}{10}\sin x + \frac{3}{10}\cos x \Leftrightarrow$$

$$y_g = y_o + y_p \Leftrightarrow$$

$$y_g = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{10}\sin x + \frac{3}{10}\cos x.$$

Bibliografie

1. Arnold, V., *Equations differentielles ordinaires*
Edition MIR Moscova, 1974
2. Barbu, V., *Metode matematice in optimizarea sistemelor diferentiale*
Editura Academiei, Bucuresti, 1989
3. Barbu, V., *Ecuatii diferentiale*
Editura Junimea, Iasi, 1985
4. Corduneanu, C., *Ecuatii diferentiale si integrale*
Litografia Univ. "Al. I. Cuza", Iasi, 1977
5. Marin, M. si Marinescu C., *Ecuatii diferentiale si integrale*
Editura Tehnica, Bucuresti, 1996
6. Marin, M., *Ecuatii cu derivate partiale*
Editura Tehnica, Bucuresti, 1998
7. Marin, M., *Ecuatii diferentiale - ID*
Litografia Universitatii Brasov, 2002
8. Marin, M. si Stan G., *Special Mathematics*
Editura Universitatii "Transilvania", Brasov, 2004
9. Marinescu, C., *Curs de ecuatii diferentiale*
Litografia Universitatii Brasov, 1986
10. Philippov, A., *Requell de problemes d' equations differentielles*
Edition MIR, Moscova, 1976
11. Teodorescu, N., *Ecuatii diferentiale si cu derivate partiale*
Editura Tehnica, 1979