0.1 Ecuatii diferentiale ordinare

Sa se rezolve cerintele urmatoare pentru exercitiile de mai jos.

a) Sa se utilizeze functia *odeint* pentru rezolvarea ecuatiei diferentiale ordinare. Sa se traseze graficul solutiei numerice.

b) Sa se compare solutia numerica cu cea exacta prin reprezentarea ambelor solutii in acelasi grafic.

c) Sa se implementeze metoda numerica specificata pentru fiecare exercitiu in parte. Sa se utilizeze aceasta metoda pentru rezolvarea ecuatiei diferentiale si sa se compare rezultatul obtinut cu cel obtinut cu ajutorul functiei *odeint* prin reprezentarea ambelor solutii numerice in acelasi grafic.

Pentru functiile ln(x), exp(x) se vor folosi np.log(x), np.exp(x) din pachetul (import numpy as np). Pentru trasarea graficului functiei exacte se va utiliza comanda plt.plot(t, y, 'g', t, exact(t), 'x') din pachetul (import matplotlib.pyplot as plt), unde y este solutia data de apelarea functiei odeint, t reprezinta vectorul momentelor discrete de timp si exact(t) este functia care defineste solutia exacta.

Exercitiul 1. Se da ecuatia diferentiala ordinara de ordinul intai (cu variabile separabile)

$$
\begin{aligned}
&(x^2-1)y' + 2xy^2 = 0, y = y(x), x \in [2, 10]\\
&\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = y' = -\frac{2xy^2}{x^2-1}\\
&\Rightarrow f(x,y) = -\frac{2xy^2}{x^2-1}
\end{aligned}
$$

cu conditia initiala

$$y(2) = \frac{1}{ln3}$$

Aceasta ecuatie are solutia exacta

$$y(x) = \frac{1}{ln|x^2-1|}$$

Sa se implementeze urmatoarea metoda numerica de rezolvare a ecuatiilor diferentiale ordinare:

$$y_{k+1} = y_k + \Delta t f\left(y_k + \frac{1}{2}\Delta t f(y_k, x_k), x_k + \frac{1}{2}\Delta t\right) \tag{0.1.1}$$

Acesta metoda numerica se numeste "midpoint method".

Exercitiul 2. Se da ecuatia diferentiala ordinara de ordinul intai (omogena)

$$
\begin{aligned}
&xy' - y = (x+y)ln\left(\frac{x+y}{x}\right), y = y(x), x \in [1, 10]\\
&\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = y' = \frac{(x+y)ln\left(1+\frac{y}{x}\right)+y}{x}\\
&\Rightarrow f(x,y) = \frac{(x+y)ln\left(1+\frac{y}{x}\right)+y}{x}
\end{aligned}
$$

cu conditia initiala

$$y(1) = e - 1$$

Aceasta ecuatie are solutia exacta

$$y(x) = x\left(e^{|x|} - 1\right)$$

Sa se implementeze urmatoarea metoda numerica de rezolvare a ecuatiilor diferentiale ordinare:

$$y_{k+1} = y_k + \Delta t\left(\frac{3}{2}f(y_k, x_k) - \frac{1}{2}f(y_{k-1}, x_{k-1})\right) \tag{0.1.2}$$

Acesta metoda numerica se numeste "two-step method".

Exercitiul 3. Se da ecuatia diferentiala ordinara de ordinul intai (omogena)

$$\begin{aligned}
&(y + \sqrt{xy})dx = xdy, y = y(x), x \in [1, 10] \\
&\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = y' = \frac{y + \sqrt{xy}}{x} \\
&\Rightarrow f(x, y) = \frac{y + \sqrt{xy}}{x}
\end{aligned}$$

cu conditia initiala

$$y(1) = 10$$

Aceasta ecuatie are solutia exacta

$$y(x) = \frac{x}{4}\left(ln|x| + \sqrt{40}\right)^2$$

Sa se implementeze urmatoarea metoda numerica de rezolvare a ecuatiilor diferentiale ordinare:

$$y_{k+1} = y_k + \Delta t f\left(y_k + \frac{1}{2}\Delta t f(y_k, x_k), x_k + \frac{1}{2}\Delta t\right) \tag{0.1.3}$$

Acesta metoda numerica se numeste "midpoint method".

Exercitiul 4. Se da ecuatia diferentiala ordinara de ordinul intai (liniara)

$$\begin{aligned}
&(xy' - 1)lnx = 2y, y = y(x), x \in [2, 10] \\
&\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = y' = \frac{1}{x} + 2\frac{1}{xlnx}y \\
&\Rightarrow f(x, y) = \frac{1}{x} + 2\frac{1}{xlnx}y
\end{aligned}$$

cu conditia initiala

$$y(2) = ln2(ln2 - 1)$$

Aceasta ecuatie are solutia exacta

$$y(x) = lnx(lnx - 1)$$

Sa se implementeze urmatoarea metoda numerica de rezolvare a ecuatiilor diferentiale ordinare:

$$y_{k+1} = y_k + \Delta t\left(\frac{3}{2}f(y_k, x_k) - \frac{1}{2}f(y_{k-1}, x_{k-1})\right) \tag{0.1.4}$$

Acesta metoda numerica se numeste "two-step method".

Exercitiul 5. Se da ecuatia diferentiala ordinara de ordinul intai (Bernoulli)

$$y' = y\text{tg}x + y^4 \cos x, y = y(x), x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} - \frac{1}{10}\right]$$
$$\Rightarrow f(x, y) = y\text{tg}x + y^4 \cos x$$

cu conditia initiala

$$y(\frac{\pi}{4}) = -\sqrt{2}$$

Aceasta ecuatie are solutia exacta

$$y(x) = \frac{1}{\cos x \sqrt[3]{2 - 3\text{tg}x}}$$

Sa se implementeze urmatoarea metoda numerica de rezolvare a ecuatiilor diferentiale ordinare:

$$y_{k+1} = y_k + \Delta t f\left(y_k + \frac{1}{2}\Delta t f(y_k, x_k), x_k + \frac{1}{2}\Delta t\right) \quad (0.1.5)$$

Acesta metoda numerica se numeste "midpoint method".

Exercitiul 6. Se da ecuatia diferentiala ordinara de ordinul intai (liniara)

$$xy' + (x+1)y = 3x^2 e^{-x}, y = y(x), x \in [1, 10]$$
$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = y' = 3xe^{-x} - \frac{x+1}{x}y$$
$$\Rightarrow f(x, y) = 3xe^{-x} - \frac{x+1}{x}y$$

cu conditia initiala

$$y(1) = \frac{1}{e}$$

Aceasta ecuatie are solutia exacta

$$y(x) = x^2 e^{-x}$$

Sa se implementeze urmatoarea metoda numerica de rezolvare a ecuatiilor diferentiale ordinare:

$$y_{k+1} = y_k + \Delta t\left(\frac{3}{2}f(y_k, x_k) - \frac{1}{2}f(y_{k-1}, x_{k-1})\right) \quad (0.1.6)$$

Acesta metoda numerica se numeste "two-step method".

Exercitiul 7. Se da ecuatia diferentiala ordinara de ordinul intai (omogena)

$$xy' - y = x\text{tg}\left(\frac{y}{x}\right), y = y(x), x \in [-1, -0.1]$$
$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = y' = \frac{y}{x} + \text{tg}\left(\frac{y}{x}\right)$$
$$\Rightarrow f(x, y) = \frac{y}{x} + \text{tg}\left(\frac{y}{x}\right)$$

cu conditia initiala

$$y(-1) = -\frac{\pi}{2}$$

Aceasta ecuatie are solutia exacta

$$y(x) = x\text{arcsin}(-x)$$

Sa se implementeze urmatoarea metoda numerica de rezolvare a ecuatiilor diferentiale ordinare:

$$y_{k+1} = y_k + \Delta t \left(\frac{3}{2} f(y_k, x_k) - \frac{1}{2} f(y_{k-1}, x_{k-1}) \right) \tag{0.1.7}$$

Acesta metoda numerica se numeste ”two-step method”.