Simularea Sistemelor Dinamice, An II, Info ID

Sisteme simetrice de ecuaţii diferenţiale

Rezolvarea sistemelor diferenţiale simetrice revine la aflarea unui nr. de integrale prime liniar independente. Vom considera doar cazul spaţiului euclidian cu trei dimensiuni şi atunci forma generală a unui sistem simetric de ecuaţii diferenţiale este

$$\frac{dx}{P(x)} = \frac{dy}{Q(y)} = \frac{dz}{R(z)}, \tag{1}$$

în care funcţiile P, Q şi R sunt date şi nu se anulează simultan, adică:

$$P^2 + Q^2 + R^2 \neq 0.$$

Definiţii. I. Se numeşte integrală primă pentru sistemul simetric (1) o funcţie
$\varphi : D \subset R^3 \to R$ cu proprietăţile:

1^o $\varphi \in C^1(D)$;
2^o $\varphi(x, y, z) = C = \text{const.}, \forall(x, y, z)$ soluţie a sistemului (1).

II. Două integrale prime $\varphi_1(x, y, z)$ şi $\varphi_2(x, y, z)$ ale sistemului simetric (1) se numesc independente dacă:

$$rang\left(\frac{D(\varphi_1, \varphi_2)}{D(x, y, z)}\right) = 2,$$

în care reamintim că rangul unei matrici este dimensiunea celui mai mare determinant nenul al matricii.
În cazul de faţă matricea Jacobiană are expresia:

$$\left(\frac{D(\varphi_1, \varphi_2)}{D(x, y, z)}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Sunt două metode pentru determinarea unei integrale prime pentru sistemul simetric (1).

Metoda I. (Metoda multiplicatorilor).

Se amplifică primul raport din (1) cu funcţia $\mu_1(x, y, z)$, al doilea raport din (1) cu funcţia $\mu_2(x, y, z)$ iar al treilea raport din (1) cu funcţia $\mu_3(x, y, z)$ astfel încât:

$$\mu_1.P + \mu_2.Q + \mu_1.R = 0,$$
$$\mu_1.dx + \mu_2.dy + \mu_1.dz = d\varphi(x, y, z),$$

funcţia de sub diferenţială este integrala primă.

Metoda II. (Metoda separării variabilelor).

Se aleg două dintre rapoartele care apar în (1) şi numai prin operaţii elementare asupra lor (proprietăţi elementare ale rapoartelor) se obţin alte doua rapoarte, dar fiecare să depindă numai de o singură variabilă. Apoi se integrează cele doua rapoarte, fiecare în raport cu variabila sa.
În concluzie, pentru rezolvarea unui sisteme simetric de ecuaţii diferenţiale trebuie determinate două integrale prime independente.

Aplicatii.

1). Într-un domeniu din spaţiul euclidian cu trei dimensiuni pentru care $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$ şi $x \neq y \neq z \neq x$, considerăm sistemul (în funcţiile necunoscute x, y, z de variabilă t)

$$\frac{dx}{x(z-y)} = \frac{dy}{y(x-z)} = \frac{dz}{z(y-x)}. \tag{2}$$

Să se rezolve acest sistem.

Soluţie

i) Luăm ca factori de amplificare $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$, folosim proprietăţi ale proporţiilor derivate şi atunci obţinem

$$\frac{dx}{x(z-y)} = \frac{dy}{y(x-z)} = \frac{dz}{z(y-x)} = \frac{dx+dy+dz}{xz-xy+xy-yz+zy-zx}.$$

Numitorul ultimului raport este 0, prin urmare

$$dx+dy+dz=0 \Rightarrow d(x+y+z)=0 \Rightarrow x+y+z=C_1.$$

Astfel am obţinut o integrală primă

$$\varphi_1(x,y,z)=x+y+z.$$

ii) Rescriem sistemul diferenţial simetric sub forma

$$\frac{\frac{dx}{x}}{z-y} = \frac{\frac{dy}{y}}{x-z} = \frac{\frac{dz}{z}}{y-x} = \frac{\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}+\frac{dz}{z}}{z-y+x-z+y-x}.$$

Mai sus am considerat factorii de multiplicare $\mu_1=\mu_2=\mu_3=1$ şi am folosit proprietăţi ale proporţiilor derivate. Numitorul ultimului raport este 0, prin urmare

$$\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}+\frac{dz}{z}=0 \Rightarrow d(\ln x+\ln y+\ln z)=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ln x+\ln y+\ln z=C_2 \Rightarrow \ln(xyz)=\ln C \Rightarrow xyz=C.$$

Astfel am obţinut o altă integrală primă

$$\varphi_2(x,y,z)=xyz.$$

iii) Mai trebuie să verificăm dacă cele două integrale prime sunt independente. Avem matricea jacobiană

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ yz & xz & xy \end{pmatrix},$$

care are rangul doi din cauza ipotezei impuse unui sistem simetric ca măcar un numitor să fie nenul. Mai exact, se consideră minorii de ordinul doi

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ yz & xz \end{vmatrix} = z(x-y) \neq 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ yz & xy \end{vmatrix} = y(x-z) \neq 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ xz & xy \end{vmatrix} = x(y-z) \neq 0.$$

Cum cel puţin un minor de ordinul doi este nenul, matricea jacobiană are rangul doi şi φ_1, φ_2 sunt liniar independente.

2). Într-un domeniu din spaţiul euclidian cu trei dimensiuni pentru care $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$ şi $x^2 \neq y^2 + z^2$, considerăm sistemul (în funcţiile necunoscute x, y, z de variabilă t)

$$\frac{dx}{y^2+z^2-x^2} = \frac{dy}{-2xy} = \frac{dz}{-2xz}. \tag{3}$$

Să se rezolve acest sistem.

Soluţie

i) Considerăm ultimele două rapoarte

$$\frac{dy}{-2xy} = \frac{dz}{-2xz} | \cdot (-2x) \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dz}{z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln y = \ln z + \ln C_1 \Rightarrow \ln \frac{y}{z} = \ln C_1 \Rightarrow \frac{y}{z} = C_1.$$

Astfel am obţinut o integrală primă

$$\varphi_1(x,y,z) = \frac{y}{z}.$$

ii) Luăm ca factori de amplificare $\mu_1 = x, \mu_2 = y, \mu_3 = z$, folosim proprietăţi ale proporţiilor derivate şi atunci obţinem

$$\frac{dx}{y^2+z^2-x^2} = \frac{dy}{-2xy} = \frac{dz}{-2xz} = \frac{xdx+ydy+zdz}{xy^2+xz^2-x^3-2xy^2-2xz^2} =$$

$$= \frac{d\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{2}\right)}{-x(x^2+y^2+z^2)}$$

Alegem următoarele rapoarte

$$\frac{dy}{-2xy} = \frac{d(x^2+y^2+z^2)}{-2x(x^2+y^2+z^2)} | \cdot (-2x) \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{d(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2}.$$

Prin integrare, obţinem

$$\ln y + \ln C_2 = \ln(x^2+y^2+z^2) \Rightarrow \ln \frac{x^2+y^2+z^2}{y} = \ln C_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+y^2+z^2}{y} = C_2$$

Astfel am obţinut o altă integrală primă

$$\varphi_2(x,y,z) = \frac{x^2+y^2+z^2}{y}.$$

iii) Mai trebuie să verificăm dacă cele două integrale prime sunt independente. Avem matricea jacobiană

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{z} & -\frac{y}{z^2} \\ \frac{2x}{y} & -\frac{x^2}{y^2}+1-\frac{z^2}{y^2} & \frac{2z}{y} \end{pmatrix},$$

care are rangul doi din cauza ipotezei impuse unui sistem simetric ca măcar un numitor să fie nenul. Mai exact, se consideră minorii de ordinul doi

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{z} \\ \frac{2x}{y} & -\frac{x^2}{y^2}+1-\frac{z^2}{y^2} \end{vmatrix} = -\frac{2x}{yz} \neq 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{y}{z^2} \\ \frac{2x}{y} & \frac{2z}{y} \end{vmatrix} = \frac{2x}{z^2} \neq 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \frac{1}{z} & -\frac{y}{z^2} \\ -\frac{x^2}{y^2}+1-\frac{z^2}{y^2} & \frac{2z}{y} \end{vmatrix} = \frac{y^2-x^2+z^2}{yz^2} \neq 0.$$

Cum cel puţin un minor de ordinul doi este nenul, matricea jacobiană are rangul doi şi φ_1, φ_2 sunt liniar independente.

3). Într-un domeniu din spaţiul euclidian cu trei dimensiuni pentru care $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$, considerăm sistemul (în funcţiile necunoscute x, y, z de variabilă t)

$$\frac{dx}{xy^2} = \frac{dy}{x^2y} = \frac{dz}{z(x^2+y^2)}. \tag{4}$$

Să se rezolve acest sistem.

Soluţie

i) Considerăm primele două rapoarte

$$\frac{dx}{xy^2} = \frac{dy}{x^2y} | \cdot xy \Leftrightarrow \frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} \Leftrightarrow xdx = ydy.$$

Prin integrare, obţinem

$$\frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2} + c | \cdot 2 \Rightarrow x^2 - y^2 = c_1.$$

Astfel am obţinut o integrală primă

$$\varphi_1(x, y, z) = x^2 - y^2.$$

ii) Rescriem sistemul diferenţial simetric sub forma

$$\frac{\frac{dx}{x}}{y^2} = \frac{\frac{dy}{y}}{x^2} = \frac{\frac{dz}{z}}{x^2 + y^2} = \frac{\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} - \frac{dz}{z}}{y^2 + x^2 - (x^2 + y^2)}.$$

Mai sus am considerat factorii de amplificare $\mu_1 = 1, \mu_2 = 1, \mu_3 = -1$ şi am folosit proprietăţi ale proporţiilor derivate. Numitorul ultimului raport este 0, prin urmare

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} - \frac{dz}{z} = 0 \Rightarrow d(\ln x + \ln y - \ln z) = 0 \Rightarrow \ln x + \ln y - \ln z = \ln C_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln \frac{xy}{z} = \ln C_2 \Rightarrow \frac{xy}{z} = C_2.$$

Astfel am obţinut o altă integrală primă

$$\varphi_2(x, y, z) = \frac{xy}{z}.$$

iii) Mai trebuie să verificăm dacă cele două integrale prime sunt independente. Avem matricea jacobiană

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & -2y & 0 \\ \frac{y}{z} & \frac{x}{z} & -\frac{xy}{z^2} \end{pmatrix},$$

care are rangul doi din cauza ipotezei impuse unui sistem simetric ca măcar un numitor să fie nenul. Mai exact, se consideră minorii de ordinul doi

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ \frac{y}{z} & \frac{x}{z} \end{vmatrix} = 2\frac{x^2+y^2}{z},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2x & 0 \\ \frac{y}{z} & -\frac{xy}{z^2} \end{vmatrix} = -\frac{2x^2y}{z^2},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -2y & 0 \\ \frac{x}{z} & -\frac{xy}{z^2} \end{vmatrix} = \frac{2xy^2}{z^2}.$$

Cum cel puţin un minor de ordinul doi este nenul, matricea jacobiană are rangul doi şi φ_1, φ_2 sunt liniar independente.

4). Într-un domeniu din spaţiul euclidian cu trei dimensiuni pentru care $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$, considerăm sistemul (în funcţiile necunoscute x, y, z de variabilă t)

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z + \sqrt{x^2+y^2+z^2}}. \tag{5}$$

Să se rezolve acest sistem.

Soluţie

i) Considerăm primele două rapoarte

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln x = \ln y + \ln C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln \frac{x}{y} = \ln C_1 \Rightarrow \frac{x}{y} = C_1.$$

Astfel am obţinut o integrală primă

$$\varphi_1(x,y,z) = \frac{x}{y}.$$

ii) Considerăm factorii de amplificare $\mu_1 = x, \mu_2 = y, \mu_3 = z$ şi folosim proprietăţi ale proporţiilor derivate.

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{xdx + ydy + zdz}{x^2+y^2+z^2+z\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Considerăm ultimele două rapoarte

$$\frac{dz}{z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{d\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\left(z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)} \,|\cdot\left(z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$$

$$\Rightarrow dz = \frac{1}{2}\frac{d(x^2+y^2+z^2)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \Rightarrow \int dz = \int \frac{1}{2}\frac{d(x^2+y^2+z^2)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = \sqrt{x^2+y^2+z^2} + C_2 \Rightarrow z - \sqrt{x^2+y^2+z^2} = C_2.$$

Astfel am obţinut o altă integrală primă

$$\varphi_2(x,y,z) = z - \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

iii) Mai trebuie să verificăm dacă cele două integrale prime sunt independente. Avem matricea jacobiană

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} & 0 \\ -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & 1-\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{pmatrix},$$

care are rangul doi din cauza ipotezei impuse unui sistem simetric ca măcar un numitor să fie nenul. Mai exact, se consideră minorii de ordinul doi

$$\Delta_1 = -\frac{1}{y\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\begin{vmatrix} 1 & -\frac{x}{y} \\ x & y \end{vmatrix} = -\frac{x^2+y^2}{y^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -\frac{x}{y^2} & 0 \\ -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & 1-\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{vmatrix} = -\frac{x}{y^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}-z\right),$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \frac{1}{y} & 0 \\ -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & 1-\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}-z}{y\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Cum cel puţin un minor de ordinul doi este nenul, matricea jacobiană are rangul doi şi φ_1, φ_2 sunt liniar independente.

Temă

5). Într-un domeniu din spaţiul euclidian cu trei dimensiuni pentru care $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$, considerăm sistemul (în funcţiile necunoscute x, y, z de variabilă t)

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{xy}.$$

Să se rezolve acest sistem.

6). Într-un domeniu din spaţiul euclidian cu trei dimensiuni pentru care $x \neq 0, y \neq 0$, considerăm sistemul (în funcţiile necunoscute x, y, z de variabilă t)

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{x+y}.$$

Să se rezolve acest sistem.

7). Într-un domeniu din spaţiul euclidian cu trei dimensiuni pentru care $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0, x \neq y \neq z \neq x$, considerăm sistemul (în funcţiile necunoscute x, y, z de variabilă t)

$$\frac{dx}{x(y^2 - z^2)} = \frac{dy}{y(z^2 - x^2)} = \frac{dz}{z(x^2 - y^2)}.$$

Să se rezolve acest sistem.

8). Să se rezolve următorul sistem simetric

$$\frac{dx}{x^2 + y^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{xz}.$$

9). Să se rezolve următorul sistem simetric

$$\frac{dx}{x - z} = \frac{dy}{y - z} = \frac{dz}{2z}.$$

10). Să se rezolve următorul sistem simetric

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z - x^2 - y^2}.$$