Simularea Sistemelor Dinamice - Laborator

Adina Chirilă

Contents

1 Introducere

Ecuaţiile Navier-Stokes reprezintă un sistem de ecuaţii diferenţiale cu derivate parţiale cuplate care descriu comportarea vitezei, presiunii şi temperaturii unui fluid în mişcare. Aceste ecuaţii au fost derivate în mod independent de G.G. Stokes în Marea Britanie şi de M. Navier în Franţa la începutul secolului al XIX-lea. Aceste ecuaţii modelează un fluid vâscos şi reprezintă o extindere a ecuaţiilor lui Euler (care modelează un fluid ideal).

În practică, este dificil să rezolvăm aceste ecuaţii din punct de vedere analitic. La început, inginerii au realizat aproximaţii şi simplificări ale sistemului de ecuaţii pentru a obţine un sistem de ecuaţii care poate fi rezolvat direct. Recent, calculatoarele au fost utilizate pentru rezolvarea acestor ecuaţii cu ajutorul metodei diferenţelor finite, a metodei elementului finit, a metodei volumului finit sau a metodelor spectrale. Acest domeniu de studiu se numeşte **Computational Fluid Dynamics** (CFD) şi face parte din aria mai cuprinzătoare a **High Performance Computing**.

În acest laborator vom rezolva ecuaţiile Navier-Stokes cu ajutorul metodei diferenţelor finite. Vom exemplifica şi metoda elementului finit pentru rezolvarea unor ecuaţii diferenţiale de ordinul II. Ca pas pregătitor, vom rezolva din punct de vedere numeric ecuaţii diferenţiale de ordinul I şi II şi sisteme dinamice de ordinul I.

Temele prezentate la laborator urmăresc structura cursului.

2 Obiective

- rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale de ordinul I din punct de vedere numeric cu ajutorul funcţiei "odeint" sau al unor metode numerice implementate de studenţi (Euler, Heun, Runge-Kutta, midpoint, twostep)

- rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale de ordinul II din punct de vedere numeric prin reducerea la un sistem dinamic de două ecuaţii diferenţiale de ordinul I şi utilizarea funcţiei "odeint"
- rezolvarea sistemelor de ecuaţii diferenţiale de ordinul I cu ajutorul funcţiei "odeint"
- rezolvarea numerică a sistemului de ecuaţii cu derivate parţiale Navier-Stokes pentru cazul "cavity flow" cu ajutorul metodei diferenţelor finite
- rezolvarea numerică a unor ecuaţii diferenţiale cu ajutorul metodei elementului finit

3 Tematică

Temele de laborator respectă tematica cursului şi sunt structurate astfel

- Ecuaţii diferenţiale de ordinul I
- Ecuaţii diferenţiale de ordin superior (în particular de ordinul II)
- Sisteme dinamice
- Ecuaţii cu derivate parţiale

Temele de laborator sunt realizate în limbajul de programare Python. În fiecare laborator sunt predate noţiuni introductive despre acest limbaj de programare astfel

- Operaţii aritmetice, String-uri, Liste (fişierul "1LaboratorPython1ExempleSimple.ipynb")
- Instrucţiuni repetitive (while, for), Atribuire multiplă, Instrucţiunea if-elif-else, Funcţii, Coding Style (fişierul "2LaboratorPython2ExempleSimple.ipynb")
- Clase, Moştenire (fişierul "4LaboratorPython4Clase.ipynb"), Excepţii (fişierul "4LaboratorPython4Exceptii.ipynb"),
  Expresii lambda (fişierul "4LaboratorPython4LambdaExpressions.ipynb")

Pentru deschiderea acestor fişiere este necesară instalarea celei mai recente versiuni pentru Anaconda Navigator şi deschiderea lor cu ajutorul Jupyter Notebook.

4 Ecuaţii diferenţiale de ordinul I

Pentru rezolvarea numerică a ecuaţiilor diferenţiale de ordinul I se utilizează funcţia "odeint" din pachetul "scipy.integrate".

1. Să se rezolve din punct de vedere numeric următoarea ecuaţie diferenţială de ordinul I

$$y' = -ky, y = y(x), x \in [0, 20], k = \frac{3}{10} \tag{1}$$

cu condiţia iniţială

$$y(0) = 5. \tag{2}$$

Să se traseze graficul soluţiei pentru diferite valori ale parametrului k.

Indicaţii de rezolvare Intervalul de timp se discretizează cu ajutorul funcţiei "linspace" din pachetul "numpy". Trasarea graficului soluţiei se realizează cu ajutorul funcţiei "plot" din pachetul "matplotlib.pyplot". Rezolvarea numerică a acestei ecuaţii diferenţiale de ordinul I se găseşte în fişierul "1LaboratorPython1ExempleEDOsimple.ipynb".

2. Să se rezolve din punct de vedere numeric următoarea ecuaţie diferenţială de ordinul I

$$y' = \frac{2}{10}y(1-y), y = y(x), x \in [0, 20] \tag{3}$$

cu condiţia iniţială

$$y(0) = \frac{1}{10} \tag{4}$$

Să se traseze graficul soluţiei pentru diferite valori ale condiţiei iniţiale în intervalul [0,2].

Indicaţii de rezolvare Rezolvarea numerică a acestei ecuaţii diferenţiale de ordinul I se găseşte în fişierul "1LaboratorPython1ExempleEDOsimple.ipynb".

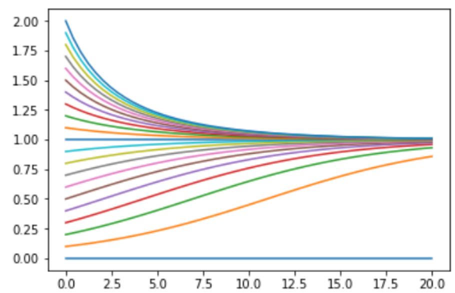

Figure 1: Graficul soluţiei pentru diferite valori ale condiţiei iniţiale în intervalul [0,2]

Pentru rezolvarea numerică a ecuaţiilor diferenţiale de ordinul I se pot implementa anumite metode numerice.

3. Să se scrie o funcţie care să implementeze metoda lui Euler pentru rezolvarea numerică a unei ecuaţii diferenţiale de ordinul I.

Indicaţii de rezolvare Implementarea acestei metode se găseşte în fişierul "2LaboratorPython2MetodeNumericeEDO.ipynb".

4.1 Test de autoevaluare

1. Să se afle soluţia analitică a următoarelor ecuaţii diferenţiale de ordinul I

$$y' = -\frac{3}{10}y, y = y(x), x \in [0, 20], \text{ unde } y(0) = 5 \tag{5}$$

$$y' = \frac{2}{10}y(1-y), y = y(x), x \in [0, 20], \text{ unde } y(0) = \frac{1}{10} \tag{6}$$

2. Să se scrie o funcţie care să implementeze metoda lui Heun pentru rezolvarea numerică a unei ecuaţii diferenţiale de ordinul I.

3. Să se rezolve din punct de vedere numeric următoarele ecuaţii diferenţiale de ordinul I care descriu anumite fenomene fizice

- creşterea exponenţială a unei populaţii este exprimată prin ecuaţia

$$y' = \alpha y, y = y(x), \tag{7}$$

  unde $\alpha > 0$ este o constantă dată care exprimă rata de creştere a lui y;

- creşterea unei populaţii cu resurse limitate este exprimată prin ecuaţia

$$y' = \alpha y\left(1 - \frac{y}{R}\right), y = y(x), \tag{8}$$

  unde $\alpha > 0$ este rata de creştere iniţială şi R este valoarea maximă posibilă a lui y;

- un corp care cade într-un fluid poate fi modelat prin ecuaţia

$$y' + b|y|y = g, y = y(x), \tag{9}$$

  unde $b > 0$ modelează rezistenţa fluidului, g este acceleraţia gravitaţională şi y este viteza corpului;

- legea de răcire a lui Newton este dată de ecuaţia

$$y' = -h(y - s), y = y(x), \tag{10}$$

unde y este temperatura corpului, $h > 0$ este o constantă de proporţionalitate, care se estimează din experimente şi s este temperatura mediului înconjurător.

5 Ecuaţii diferenţiale de ordin superior

1. Mişcarea armonică simplă amortizată este descrisă de ecuaţia

$$y'' + 2y' + 2y = cos(2x), y = y(x), y(0) = 0, y'(0) = 0. \tag{11}$$

Să se afle soluţia numerică a acestei ecuaţii diferenţiale de ordinul II şi să se traseze graficul soluţiei.

Indicaţii de rezolvare Se rescrie ecuaţia sub forma unui sistem de ecuaţii diferenţiale de ordinul I astfel

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = -2z - 2y + cos(2x) \\ y(0) = 0, z(0) = 0 \end{cases} \tag{12}$$

Se notează cu U vectorul soluţie astfel

$$U = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow y = U[0], z = U[1] \tag{13}$$

Rezultă că sistemul se poate rescrie astfel

$$U' = \begin{pmatrix} U[1] \\ -2U[1] - 2U[0] + cos(2x) \end{pmatrix} \tag{14}$$

Sistemul rescris în această formă se rezolvă cu ajutorul funcţiei ”odeint”. Rezolvarea completă se găseşte în fişierul ”3LaboratorPython3SecondOrderODEs.ipynb”.

2. Ecuaţia diferenţială de ordinul II pentru unghiul θ pe care îl formează un pendul asupra căruia acţionează forţa gravitaţională şi forţa de frecare este

$$\begin{aligned} &\theta''(t) + b\theta'(t) + csin(\theta(t)) = 0, \theta = \theta(t), t \in [0, 10], \\ &\theta(0) = \pi - \frac{1}{10}, \theta'(0) = 0, \end{aligned} \tag{15}$$

unde b şi c sunt constante pozitive.

Indicaţii de rezolvare Se defineşte viteza unghiulară $\omega(t) = \theta'(t)$. Se rescrie ecuaţia sub forma unui sistem de ecuaţii diferenţiale de ordinul I astfel

$$\begin{cases} \theta'(t) = \omega(t) \\ \omega'(t) = -b\omega(t) - csin(\theta(t)) \\ \theta(0) = \pi - \frac{1}{10} \\ \omega(0) = 0 \end{cases} \tag{16}$$

Sistemul se rezolvă cu ajutorul funcţiei ”odeint”. Rezolvarea completă se găseşte în fişierul ”3LaboratorPython3SecondOrderODEs.ipynb”.

3. Oscilatorul Van der Pol este reprezentat de o ecuaţie diferenţială ordinară de ordinul II cu parametrul a

$$x'' - a(1 - x^2)x' + x = 0 \tag{17}$$

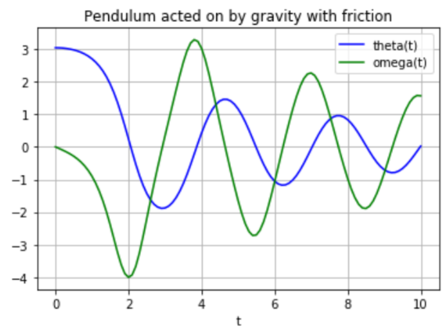

Figure 2: Soluţia ecuaţiei pentru unghiul format de un pendul asupra căruia acţionează forţa gravitaţională şi forţa de frecare

Dacă $|x| > 1$, atunci se pierde energie. Dacă $|x| < 1$, atunci se absoarbe energie. Acesta reprezintă un model pentru circuite electrice şi modelează chiar şi procese biologice precum bătaia inimii şi ritmurile circadiene. Să se afle soluţia numerică a acestei ecuaţii. Să se considere condiţii iniţiale aleatoare.

Indicaţii de rezolvare Rezolvarea completă se găseşte în fişierul "3LaboratorPython3SecondOrderODEs.ipynb".

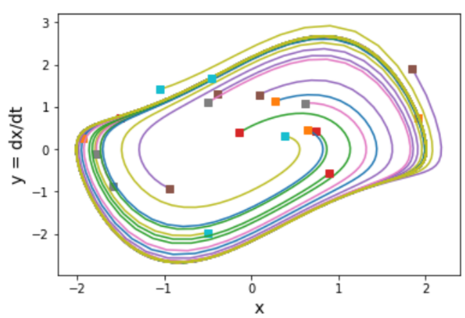

Figure 3: Soluţia ecuaţiei pentru oscilatorul Van der Pol

6 Sisteme dinamice

1. Ecuaţiile Lotka-Volterra sau modelul prădător-pradă reprezintă un sistem de două ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi neliniare. Reprezintă un model simplificat pentru schimbarea populaţiei a două specii care interacţionează prin prădare. De exemplu, fie x populaţia de iepuri (prada) şi y populaţia de vulpi (prădători). Atunci sistemul este

$$\begin{cases} x' = x(a - by) \\ y' = -y(c - dx) \end{cases} \tag{18}$$

unde $x = x(t), y = y(t)$ şi a, b, c, d sunt parametrii pozitivi. Să se afle soluţia numerică a acestui sistem. Să se traseze graficul soluţiei şi portretul de fază.

Indicaţii de rezolvare Rezolvarea completă se găseşte în fişierul "3LaboratorPython3SistDinPredatorPrey.ipynb".

2. Se consideră următorul model prădător-pradă, unde x desemnează populaţia de peşti

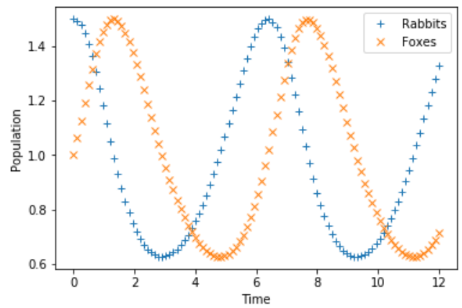

Figure 4: Soluţia modelului prădător-pradă (vulpi şi iepuri)

şi y desemnează numărul de bărci de pescuit

$$\begin{cases} x' = x(2 - y - x) \\ y' = -y(1 - 1,5x) \end{cases} \tag{19}$$

unde $x = x(t), y = y(t)$. Să se afle soluţia numerică a acestui sistem. Să se traseze graficul soluţiei şi portretul de fază.

Indicaţii de rezolvare Rezolvarea completă se găseşte în fişierul "3LaboratorPython3SistDinFish.ipynb".

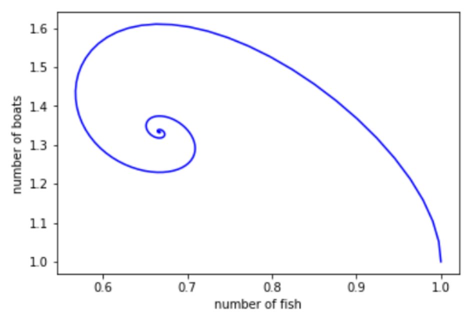

Figure 5: Portretul de fază pentru modelul prădător-pradă (bărci de pescuit şi peşti)

3. Sistemul Lorentz este un model matematic simplificat pentru convecţia atmosferică. Este reprezentat de următorul sistem de trei ecuaţii diferenţiale cuplate neliniare

$$\begin{cases} x' = \sigma(y - x) \\ y' = (\rho - z)x - y \\ z' = xy - \beta z \end{cases} \tag{20}$$

unde $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$. Se observă un comportament haotic şi se demonstrează efectul fluturelui (dependenţa de condiţiile iniţiale).

Indicaţii de rezolvare Rezolvarea completă se găseşte în fişierul "3LaboratorPython3SistDinLorentz.ipynb".

4. Să se scrie o clasă "ODESolver" pentru implementarea unor metode numerice pentru rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale de ordinul I sau a sistemelor dinamice de ordinul I de forma

$$\frac{dy}{dt} = f(y, t) \tag{21}$$

unde f poate fi un câmp scalar sau vectorial. Să se utilizeze această clasă pentru rezolvarea unui sistem dinamic descris de următoarea problemă.

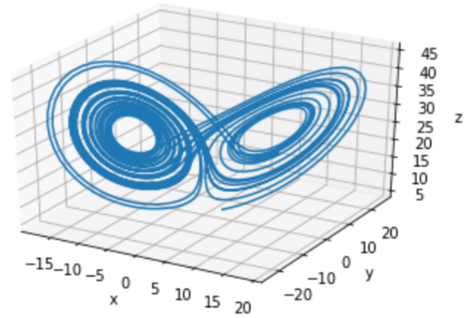

Figure 6: Portretul de fază pentru sistemul dinamic Lorentz

Traiectoria unui proiectil în spaţiul 2D, neglijând forţa de rezistenţă a aerului, este descrisă de următorul sistem format din două ecuaţii diferenţiale de ordinul II

$$\begin{cases} x''(t) = 0 \\ y''(t) = -g \end{cases} \tag{22}$$

unde (x, y) este poziţia bilei şi g este acceleraţia gravitaţională.

Indicaţii de rezolvare Rescriem sistemul ca un sistem de patru ecuaţii de ordinul I. Fie $v_x = \frac{dx}{dt}$ şi $v_y = \frac{dy}{dt}$. Atunci

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v_x \\ \frac{dv_x}{dt} = 0 \\ \frac{dy}{dt} = v_y \\ \frac{dv_y}{dt} = -g \end{cases} \tag{23}$$

Condiţiile iniţiale sunt

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ v_x(0) = v_0 cos(\theta) \\ y(0) = y_0 \\ v_y(0) = v_0 sin(\theta) \end{cases} \tag{24}$$

unde v_0 este viteza iniţială a proiectilului.

Rezolvarea completă se găseşte în fişierul "4LaboratorPython4OdeSolverBallTrajectory.ipynb".

7 Ecuaţii diferenţiale cu derivate parţiale

7.1 Ecuaţii diferenţiale cu derivate parţiale în mecanica fluidelor

Ecuaţiile Navier-Stokes pentru un fluid Newtonian (există o dependenţă liniară între deformaţie şi tensiuni)

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v} \cdot \nabla)\, \bar{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \bar{v} \tag{25}$$

sunt ecuaţii diferenţiale cu derivate parţiale de ordinul al doilea neliniare.

Fluide care nu sunt Newtoniene: sângele, amidonul de porumb amestecat cu apă.

Termenii sunt, în această ordine:

- acceleraţia $\frac{\partial \bar{v}}{\partial t}$ (descrie cum se modifică viteza în timp)

- acceleraţia convectivă $(\bar{v} \cdot \nabla)\, \bar{v}$ (descrie cum se modifică viteza pentru că o particulă din fluid îşi schimbă poziţia dintr-un punct într-altul) - termen neliniar

- gradientul presiunii $\frac{\nabla p}{\rho}$

- ν depinde de vâscozitatea fluidului

Viteza $\bar{v}$ este un câmp vectorial, presiunea p este un câmp scalar. Densitatea este constantă.

Daca $\nu = 0$, atunci fluidul este ideal şi obţinem ecuaţiile Euler.

O soluţie a acestor ecuaţii este $\{\bar{v}, p\}$.

Se cunosc foarte puţine soluţii analitice ale acestor ecuaţii. De aceea avem nevoie de simulări numerice sau de experimente. În anumite cazuri, este dificil să realizăm experimente (de exemplu, studiul sistemului respirator). De aceea apelăm la simulări numerice.

7.2 Studiul fluxului într-o cavitate

1. Se consideră următorul sistem de ecuaţii diferenţiale cu derivate parţiale: două ecuaţii pentru componentele vitezei u si v şi o ecuaţie pentru presiune.

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\\
&\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\\
&\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = -\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)
\end{aligned} \tag{26}$$

Să se afle soluţia numerică a acestui sistem de ecuaţii cu derivate parţiale cu condiţiile iniţiale şi pe frontieră specifice cazului "cavity flow". Să se utilizeze metoda diferenţelor finite.

Indicaţii de rezolvare Ecuaţia pentru u se discretizează în modul următor

$$\begin{aligned}
&\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} + u_{i,j}^n\frac{u_{i,j}^n - u_{i-1,j}^n}{\Delta x} + v_{i,j}^n\frac{u_{i,j}^n - u_{i,j-1}^n}{\Delta y} =\\
&= -\frac{1}{\rho}\frac{p_{i+1,j}^n - p_{i-1,j}^n}{2\Delta x} + \nu\left(\frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{\Delta y^2}\right)
\end{aligned} \tag{27}$$

Ecuaţia pentru v se discretizează în mod similar

$$\begin{aligned}
&\frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n}{\Delta t} + u_{i,j}^n\frac{v_{i,j}^n - v_{i-1,j}^n}{\Delta x} + v_{i,j}^n\frac{v_{i,j}^n - v_{i,j-1}^n}{\Delta y} =\\
&= -\frac{1}{\rho}\frac{p_{i,j+1}^n - p_{i,j-1}^n}{2\Delta y} + \nu\left(\frac{v_{i+1,j}^n - 2v_{i,j}^n + v_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{v_{i,j+1}^n - 2v_{i,j}^n + v_{i,j-1}^n}{\Delta y^2}\right)
\end{aligned} \tag{28}$$

Ecuaţia Poisson pentru presiune se discretizează astfel

$$\begin{aligned}
&\frac{p_{i+1,j}^n - 2p_{i,j}^n + p_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{p_{i,j+1}^n - 2p_{i,j}^n + p_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} =\\
&= \rho\left[\frac{1}{\Delta t}\left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} + \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2\Delta y}\right) - \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x}\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} - \right.\\
&\left. -2\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta y}\frac{v_{i+1,j} - v_{i-1,j}}{2\Delta x} - \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2\Delta y}\frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2\Delta y}\right]
\end{aligned} \tag{29}$$

Se rearanjează ecuaţiile de mai sus pentru a pune în evidenţă iteraţiile din cod. Ecuaţia impulsului în direcţia u este

$$\begin{aligned}
&u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n - u_{i,j}^n\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(u_{i,j}^n - u_{i-1,j}^n\right) - v_{i,j}^n\frac{\Delta t}{\Delta y}\left(u_{i,j}^n - u_{i,j-1}^n\right) - \frac{\Delta t}{\rho 2\Delta x}\left(p_{i+1,j}^n - p_{i-1,j}^n\right) +\\
&+ \nu\left[\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\left(u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n\right) + \frac{\Delta t}{\Delta y^2}\left(u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n\right)\right]
\end{aligned} \tag{30}$$

Ecuaţia impulsului în direcţia v este

$$v_{i,j}^{n+1} = v_{i,j}^{n} - u_{i,j}^{n}\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(v_{i,j}^{n} - v_{i-1,j}^{n}\right) - v_{i,j}^{n}\frac{\Delta t}{\Delta y}\left(v_{i,j}^{n} - v_{i,j-1}^{n}\right) - \frac{\Delta t}{\rho 2\Delta y}\left(p_{i,j+1}^{n} - p_{i,j-1}^{n}\right) + \\ + \nu\left[\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\left(v_{i+1,j}^{n} - 2v_{i,j}^{n} + v_{i-1,j}^{n}\right) + \frac{\Delta t}{\Delta y^2}\left(v_{i,j+1}^{n} - 2v_{i,j}^{n} + v_{i,j-1}^{n}\right)\right] \tag{31}$$

Ecuaţia Poisson pentru presiune este

$$p_{i,j}^{n} = \frac{\left(p_{i+1,j}^{n} + p_{i-1,j}^{n}\right)\Delta y^2 + \left(p_{i,j+1}^{n} + p_{i,j-1}^{n}\right)\Delta x^2}{2\left(\Delta x^2 + \Delta y^2\right)} - \frac{\rho\Delta x^2\Delta y^2}{2\left(\Delta x^2 + \Delta y^2\right)}\times \\ \times\left[\frac{1}{\Delta t}\left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} + \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2\Delta y}\right) - \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x}\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} - \right. \\ \left. -2\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta y}\frac{v_{i+1,j} - v_{i-1,j}}{2\Delta x} - \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2\Delta y}\frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2\Delta y}\right] \tag{32}$$

Condiţiile iniţiale sunt $u = 0, v = 0, p = 0$. Condiţiile pe frontieră sunt

- $u = 1$ pentru $y = 2$ ("capacul cavităţii")
- $u = 0, v = 0$ pe celelalte frontiere
- $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$ pentru $y = 0$
- $p = 0$ pentru $y = 2$
- $\frac{\partial p}{\partial x}$ pentru $x = 0$ si $x = 2$

Rezolvarea completă se găseşte în fişierul "5LaboratorPython5CavityFlowNavierStokesCorrect.ipynb".

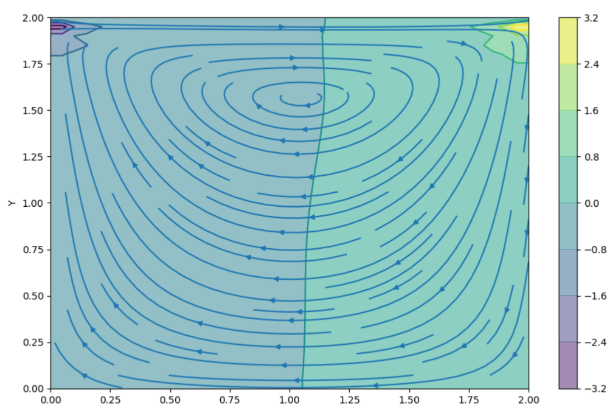

Figure 7: Ecuaţiile Navier-Stokes pentru cazul "cavity flow"

7.3 Test de autoevaluare

1. **Convecţie liniară** Ecuaţia liniară a convecţiei într-o singură dimensiune este cea mai simplă ecuaţie din mecanica fluidelor.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0, x \in (0,2), t \in [0,T] \tag{33}$$

Condiţia iniţială este

$$\begin{aligned} &u = 2 \text{ pentru } 0.5 \le x \le 1 \\ &u = 1 \text{ in restul intervalului } (0,2) \end{aligned} \tag{34}$$

Să se afle soluţia numerică a acestei ecuaţii diferenţiale cu derivate parţiale utilizând metoda diferenţelor finite.

Observaţie Fiind date condiţiile iniţiale (sub forma unei unde), această ecuaţie reprezintă propagarea undei iniţiale cu viteza c, fără modificarea formei undei. Fie conditiţa iniţială $u(x,0) = u_0(x)$. Atunci soluţia exactă a ecuaţiei este $u(x,t) = u_0(x-ct)$.

Indicaţii de rezolvare Discretizăm această ecuaţie atât în spaţiu, cât şi în timp, utilizând diferenţe finite cu pas înainte pentru derivata în raport cu timpul şi diferenţe finite cu pas înapoi pentru derivata în raport cu variabila spaţială. Coordonata spaţiala x se discretizează în puncte pe care le indexăm de la $i = 0$ la N, iar timpul este discretizat în intervale de timp de lungime Δt.

Din definiţia derivatei, obţinem

$$\frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} \tag{35}$$

Ecuaţia discretizată devine

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0 \tag{36}$$

unde n şi $n+1$ sunt doi paşi consecutivi în timp, iar $i-1$ şi i sunt două puncte învecinate ale coordonatei x discretizate.

Dacă condiţiile iniţiale sunt date, atunci singura necunoscută în schema de discretizare este u_i^{n+1}. Ecuaţia se poate rezolva astfel

$$u_i^{n+1} = u_i^n - c\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(u_i^n - u_{i-1}^n\right) \tag{37}$$

Pentru realizarea programului în Python, avem nevoie de bibliotecile "numpy" şi "matplotlib". Vom defini câteva variabile. Vom avea nevoie de o reţea de puncte aflate la distanţe egale într-un domeniu spaţial de lungime 2, adică $x_i \in (0,2)$. Definim o variabilă nx, care reprezintă numărul de puncte ale reţelei, iar dx va fi distanţa dintre două puncte invecinate ale reţelei.

Fie $nx = 41$, $dx = 2/(nx-1)$, numărul de paşi în timp $nt = 25$, intervalul de timp parcurs la fiecare moment de timp $dt = .025$ şi viteza undei $c = 1$.

2. **Convecţie neliniară** Ecuaţia convecţiei într-o singură dimensiune este

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{38}$$

Condiţia iniţială este

$$\begin{aligned} &u = 2 \text{ pentru } 0.5 \le x \le 1 \\ &u = 1 \text{ în restul intervalului } (0,2) \end{aligned} \tag{39}$$

Indicaţii de rezolvare În loc de factorul constant c care se înmulţeşte cu al doilea termen, înmulţim cu soluţia u. Astfel, al doilea termen al ecuaţiei devine neliniar. Folosim diferenţe finite cu pas înainte în timp şi diferenţe finite cu pas înapoi în spaţiu. Ecuaţia discretizată este

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + u_i^n\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0 \tag{40}$$

sau, considerând termenul necunoscut u_i^{n+1}

$$u_i^{n+1} = u_i^n - u_i^n\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(u_i^n - u_{i-1}^n\right) \tag{41}$$

8 Metoda elementului finit

Metoda elementului finit este utilizată pentru calculul unei soluţii numerice ale unei probleme la limită şi se bazează pe forma slabă în loc de forma locală a ecuaţiei. Vom avea nevoie de o discretizare a domeniului pentru a aplica metoda elementului finit. Pe acest domeniu discretizat se află o aproximare a soluţiei slabe prin utilizarea unor valori în noduri şi a unor funcţii de interpolare. Funcţiile test sunt proiectate pe spaţii de dimensiune finită. În acest mod, formularea slabă continuă este aproximată într-un spaţiu de dimensiune finită. Sistemul algebric de ecuaţii liniare care rezultă este rezolvat prin metode variate.

1. Să se rezolve următoarea ecuaţie diferenţială de ordinul II cu ajutorul metodei elementului finit

$$\begin{aligned} &-u'' = x(x+3)e^x, u = u(x), x \in (0,1) \\ &u(0) = 0, u(1) = 0 \end{aligned} \tag{42}$$

Soluţia exactă a ecuaţiei este

$$u(x) = x(1-x)e^x \tag{43}$$

Să se compare soluţia exactă cu cea numerică.

Indicaţii de rezolvare Rezolvarea completă se găseşte în fişierul "6LaboratorPython6FEM1Dpb1.ipynb".

2. Să se rezolve următoarea ecuaţie diferenţială de ordinul II cu ajutorul metodei elementului finit

$$\begin{aligned} &-u'' + u = x, u = u(x), x \in (0,1) \\ &u(0) = 0, u(1) = 0 \end{aligned} \tag{44}$$

Soluţia exactă a ecuaţiei este

$$u(x) = x - sinh(x)/sinh(1) \tag{45}$$

Să se compare soluţia exactă cu cea numerică.

Indicaţii de rezolvare Rezolvarea completă se găseşte în fişierul "6LaboratorPython6FEM1Dpb2.ipynb".

References

[1] M. Reza Eslami, Finite Element Methods in Mechanics, Springer, 2014

[2] M. Griebel, T. Dornseifer, T. Neunhoeffer, Numerical Simulation in Fluid Dynamics. A Practical Introduction, SIAM monographs on mathematical modeling and computation, 1998

[3] H.P. Langtangen, A Primer on Scientific Programming with Python, 5th edition, Springer, 2016

[4] E. Süli, Numerical Solution of Ordinary Differential Equations, Mathematical Institute, University of Oxford, 2014