Simularea sistemelor dinamice. Curs online

Cursul nr. 1

Ecuaţii cu variabile separabile, ecuaţii omogene şi ecuaţii reductibile la omogene

Euaţiile diferenţiale de ordinul I au forma:

$$y' = f(x, y),$$

în care funcţia necunoscuta este $y = y(x)$, x fiind variabila independentă.
În cazul ecuaţiei diferenţiale cu variabile separabile funcţia $f(x, y)$ are forma:

$$f(x, y) = g(x)h(y).$$

Atunci ecuaţia se scrie în forma

$$y' = g(x).h(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = g(x).h(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{h(y)} = g(x)dx,$$

adică am separat variabilele, deci acum se poate integra.

1. Să se integreze ecuaţia:

$$xdy - ydx = \sqrt{1 + x^2}dy + \sqrt{1 + y^2}dx.$$

Rezolvare:

Observăm că este o ecuaţie cu variabile separabile.

$$xdy - \sqrt{1 + x^2}dy = ydx + \sqrt{1 + y^2}dx \ \Leftrightarrow$$

$$(x-\sqrt{1+x^2})dy=(y+\sqrt{1+y^2})dx \iff$$
$$\frac{dy}{y+\sqrt{1+y^2}}=\frac{dx}{x-\sqrt{1+x^2}} \iff$$
$$\int\frac{dy}{y+\sqrt{1+y^2}}=\int\frac{dx}{x-\sqrt{1+x^2}} \iff$$
$$\int(y-\sqrt{1+y^2})dy=\int(x+\sqrt{1+x^2})dx.$$

Calculăm separat integrala:

$$I=\int\sqrt{1+t^2}dt.$$

Avem:

$$I=\int\frac{1+t^2}{\sqrt{1+t^2}}dt=\int\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt+\int\frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}dt=$$
$$=\ln(\sqrt{1+t^2}+t)+\int t\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}dt=\ln(\sqrt{1+t^2}+t)+\int t(\sqrt{1+t^2})'dt=$$
$$=\ln(\sqrt{1+t^2}+t)+t\sqrt{1+t^2}-\int\sqrt{1+t^2}dt.$$

Obţinem:

$$I=\frac{\ln(\sqrt{1+t^2}+t)+t\sqrt{1+t^2}}{2}.$$

Revenim în ecuaţia noastră şi avem:

$$\frac{y^2}{2}-\frac{\ln(\sqrt{1+y^2}+y)+y\sqrt{1+y^2}}{2}=$$
$$=\frac{x^2}{2}+\frac{\ln(\sqrt{1+x^2}+x)+x\sqrt{1+x^2}}{2}+c$$

■

2. Să se integreze ecuaţia:

$$\left(y^2+xy^2\right)dx=\left(x^2-yx^2\right)dy$$

Rezolvare:

Observăm că este o ecuaţie cu variabile separabile

$$y^2\,(1+x)\,dx = x^2\,(1-y)\,dy \;\Leftrightarrow$$
$$\frac{1+x}{x^2}dx = \frac{1-y}{y^2}dy \;\Leftrightarrow$$
$$\int \frac{1+x}{x^2}dx = \int \frac{1-y}{y^2}dy \;\Leftrightarrow$$
$$-\frac{1}{x} + \ln x = -\frac{1}{y} - \ln y + c$$

■

Ecuaţii diferenţiale omogene

Sunt ecuaţii care pot scrise sub forma:

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right),$$

deci $f(x,y) = g\left(\frac{y}{x}\right)$. Funcţia f se poate scrie în această formă dacă satisface condiţia:

$$f(tx,ty) = f(x,y).$$

Orice ecuaţie omogenă se reduce la o ecuaţie cu variabile separabile dacă se face schimbarea de funcţie

$$(x,y) \to (x,z),\; \frac{y(x)}{x} = z(x) \;\Leftrightarrow y = xz.$$

3. Să se integreze ecuaţia:

$$(x+2y)dx - xdy = 0$$

Rezolvare:

Observăm că este o ecuaţie omogena deoarece:

$$P(x,y) = x + 2y \;\Leftrightarrow\; P(tx,ty) = tx + 2ty \Leftrightarrow\; P(tx,ty) = tP(x,y)$$

şi

$$Q(x,y) = x \;\Leftrightarrow\; Q(tx,ty) = tx \;\Leftrightarrow\; Q(tx,ty) = Q(x,y).$$

Facem schimbarea de variabilă $y = zx$ şi diferenţiind obţinem:

$$dy = zdx + xdz.$$

Înlocuind în ecuaţia iniţială avem:

$$(x + 2zx)dx - x(zdx + xdz) = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$(x + zx)dx - xzdx - x^2dz = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$xdx = x^2dz \;\Leftrightarrow\; dz = \frac{dx}{x} \;\Leftrightarrow z = \ln x + \ln c \;\Leftrightarrow$$

$$\frac{y}{x} = \ln(xc) \;\Leftrightarrow y = x\ln(cx).$$

■

4. Să se integreze ecuaţia:

$$ydx + (2\sqrt{xy} - x)\,dy = 0.$$

Rezolvare:

Observăm că este o ecuaţie omogenă deoarece:

$$P(x,y) = y \;\Leftrightarrow\; P(tx,ty) = ty \;\Leftrightarrow P(tx,ty) = tP(x,y)$$

$$Q(x,y) = 2\sqrt{xy} - x \;\Leftrightarrow\; Q(tx,ty) = 2\sqrt{txty} - tx \;\Leftrightarrow$$

$$Q(tx,ty) = t(2\sqrt{xy} - x) \;\Leftrightarrow\; Q(tx,ty) = tQ(x,y).$$

Facem schimbarea de variabilă $y = zx$ şi diferenţiind obţinem:

$$dy = zdx + xdz.$$

Înlocuind în ecuaţia iniţială avem:

$$zxdx + (2\sqrt{x^2z} - x)(zdx + xdz) = 0 \Leftrightarrow$$

$$zxdx + 2x\sqrt{z}dx - xzdx + x^2(2\sqrt{z} - 1)dz = 0 \Leftrightarrow$$
$$2x\sqrt{z}dx = -x^2(2\sqrt{z} - 1)dz \Leftrightarrow$$
$$\frac{2dx}{x} \doteq -\frac{2\sqrt{z} - 1}{\sqrt{z}}dz \Leftrightarrow \int \frac{2dx}{x} = \int -\frac{2\sqrt{z} - 1}{\sqrt{z}}dz \Leftrightarrow$$
$$2\ln x = \int (-2 + \frac{1}{\sqrt{z}})dz \Leftrightarrow 2\ln x = -2z + 2\sqrt{z} + c \Leftrightarrow$$
$$2\ln x = -2\frac{y}{x} + 2\sqrt{\frac{y}{x}} + c$$

■

Ecuaţii diferenţiale reductibile la ecuaţii omogene

Au forma
$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right).$$
SE consideră separat cazurile în care dreptele $d_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ şi $d_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$ sunt paralele sau secante.

5. Să se integreze ecuaţia
$$(3x + 3y - 1)dx + (x + y - 1)dy = 0.$$

Rezolvare:
$$(3x + 3y - 1)dx = -(x + y - 1)dy \Leftrightarrow$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3x + 3y - 1}{x + y - 1} \Leftrightarrow y' = -\frac{3x + 3y - 1}{x + y - 1}.$$
Observăm ca ecuaţia se poate reduce la o ecuaţie cu variabile separabile. Facem schimbarea de variabilă $z = x + y$. Derivând obţinem:
$$y' + 1 = z' \Leftrightarrow -\frac{3z - 1}{z - 1} + 1 = z' \Leftrightarrow$$
$$\frac{-3z + 1 + z - 1}{z - 1} = \frac{dz}{dx} \Leftrightarrow \frac{z - 1}{z}dz = -2dx \Leftrightarrow$$

$$\int \frac{z-1}{z} dz = \int -2dx \iff z - \ln z = -2x + c \iff$$
$$x + y - \ln(x+y) + 2x = c \iff$$
$$3x + y - \ln(x+y) = c$$

■

6. Să se integreze ecuaţia:

$$y' = \sqrt{4x + 2y - 1}$$

Rezolvare:

Observăm că ecuaţia se poate reduce la o ecuaţie cu variabile separabile. Facem schimbarea de variabilă $z = 4x + 2y - 1.$. Derivând obţinem:

$$z' = 4 + 2y' \iff y' = \frac{z' - 4}{2} \iff$$
$$z' - 4 = 2\sqrt{z} \iff z' = 2\sqrt{z} + 4 \iff$$
$$\frac{dz}{dx} = 2\sqrt{z} + 4 \iff \frac{dz}{2\sqrt{z} + 4} = dx \iff$$
$$\int \frac{dz}{2\sqrt{z} + 4} = \int dx \iff t = \sqrt{z} \iff z = t^2 \iff dz = 2tdt \iff$$
$$\int \frac{2tdt}{2t + 4} = x + c \iff \int (1 - \frac{4}{2t}) dt = x + c \iff$$
$$t - 2\ln t = x + c \iff \sqrt{z} - 2\ln\sqrt{z} = x + c \iff$$
$$\sqrt{4x + 2y - 1} - \ln(4x + 2y - 1) = x + c$$

■

7. Să se integreze ecuaţia:

$$2(x + 4y - 6)dx = (7x + y - 15)dy.$$

Rezolvare:

Observăm că ecuaţia se poate reduce la o ecuaţie omogenă.
Avem sistemul:

$$x + 4y - 6 = 0,\ 7x + y - 15 = 0.$$

Rezolvând acest sistem se obţin soluţiile:

$$x_0 = 2,\ y_0 = 1.$$

Facem translaţia:

$$u = x - 2 \Leftrightarrow x = u + 2 \Leftrightarrow dx = du$$

$$v = y - 1 \Leftrightarrow y = v + 1 \Leftrightarrow dy = dv.$$

Cu această translaţie obţinem:

$$2\,(u + 4v)\,du = (7u + v)\,dv \Leftrightarrow$$

Am obţinut o ecuaţie omogenă.
Facem schimbarea de variabil,a $v = zu$ şi diferenţiind obţinem: $dv = zdu + udz$.
Înlocuind în ecuaţia iniţială avem:

$$2\,(u + 4zu)\,du = (7u + zu)\,(zdu + udz) \Leftrightarrow$$

$$2\,(1 + 4z)\,du = (7 + z)zdu + (7 + z)udz \Leftrightarrow$$

$$(2 + 8z - 7z - z^2)du = (7 + z)udz \Leftrightarrow$$

$$\frac{du}{u} = \frac{7 + z}{-z^2 + z + 2}dz \Leftrightarrow$$

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{7 + z}{-z^2 + z + 2}dz\ \frac{du}{u} \quad \Leftrightarrow$$

$$\ln u = -\int \frac{z + 7}{z^2 - z - 2}dz \Leftrightarrow$$

$$\frac{z + 7}{z^2 - z - 2} = \frac{z + 7}{(z + 1)\,(z - 2)} = \frac{A}{z + 1} + \frac{B}{z - 2} \Leftrightarrow$$

$$z + 7 = Az - 2A + Bz + B$$

echivalent cu sistemul:

$$A + B = 1,\ -2A + B = 7,$$

care are soluţiile:

$$A = -2,\ B = 3 \Leftrightarrow$$
$$\ln u = \int \frac{2}{z+1} dz - \int \frac{3}{z-2} dz$$
$$\ln u = 2\ln(z+1) - 3\ln(z-2) + \ln c \Leftrightarrow$$
$$u = c\,(z+1)^2\,(z-2)^{-3} \Leftrightarrow$$
$$u = c\left(\frac{v}{u} + 1\right)^2 \left(\frac{v}{u} - 2\right)^{-3} \Leftrightarrow$$
$$x - 2 = c\left(\frac{y-1}{x-2} + 1\right)^2 \left(\frac{y-1}{x-2} - 2\right)^{-3} \Leftrightarrow$$
$$(y - 2x + 3)^3 = c\,(y + x - 3)^2$$

■

8. Aflaţi soluţia generală a ecuaţiei:

$$(2x - 4y + 6)dx + (x + y - 3)dy = 0.$$

Rezolvare:

Observăm ca ecuaţia se poate reduce la o ecuaţie omogenă.
Avem sistemul:

$$2x - 4y + 6 = 0,\ x + y - 3 = 0$$

cu soluţiile

$$x_0 = 1,\ y_0 = 2.$$

Facem schimbările de variabile :

$$u = x - 1 \Leftrightarrow x = u + 1 \quad dx = du$$

$$v = y - 2 \Leftrightarrow y = v + 2 \quad dy = dv.$$

Înlocuind în ecuaţia iniţială obtinem :

$$(2u + 2 - 4v - 8 + 6)du + (u + 1 + v + 2 - 3)dv = 0.$$

Ecuaţia fiind omogenă, facem schimbarea $v = zu$, $dv = zdu + udz$

$$(2u - 4zu)du + (u + zu)(zdu + udz) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(2 - 4z)du + (1 + z)(zdu + udz) = 0 \Leftrightarrow$$
$$(2 - 4z + z + z^2)du + u(1 + z)dz = 0 \Leftrightarrow$$
$$(z^2 - 3z + 2)du = -u(z + 1) \Leftrightarrow$$
$$\frac{du}{u} = -\frac{z + 1}{z^2 - 3z + 2} \Leftrightarrow$$
$$\int \frac{du}{u} = -\int \frac{z + 1}{z^2 - 3z + 2}dz \quad (1)$$
$$\frac{z + 1}{z^2 - 3z + 2} = \frac{z + 1}{(z - 1)(z - 2)} = \frac{A}{z - 1} + \frac{B}{z - 2} \Leftrightarrow$$
$$Az - 2A + Bz - B = z + 1 \Leftrightarrow$$

Avem sistemul:

$$A + B = 1, \; -2A - B = 1$$

cu soluţiile:

$$A = -2, \; B = 3.$$

Înlocuind în relaţia (1) obţinem:

$$\ln u = \int \frac{2}{z - 1}dz - \int \frac{3}{z - 2}dz$$

$$\ln u = 2\ln(z - 1) - 3\ln(z - 2) + \ln c$$

$$\ln u = \ln \frac{(\frac{y}{u} - 1)^2}{(\frac{y}{u} - 2)} + \ln c \Leftrightarrow$$

$$u = c\frac{(v - u)^2}{(v - 2u)^3}u \Leftrightarrow$$

$$(v-2u)^3 = c(v-u)^2 \Leftrightarrow$$
$$(y-2-2x+2)^3 = c(y-2-x+1)^2$$
$$(y-2x)^3 = c(y-x-1)^2$$

■

Ecuaţii cu diferenţială totală, ecuaţii cu factor integrant

Sunt ecuaţii diferenţiale de forma

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0.$$

Dacă are loc condiţia:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

atunci este cu diferenţială totală. Daca nu se va rezolva cu ajutorul factorului integrant. Se înmulţeşte ecuaţia dată cu funcţia $\mu = \mu(x,y)$, care se numeşte factor integrant, şi se impune condiţia ca ecuaţia care rezultă dupa înmulţire sa fie cu diferenţială totală.

9. Aflaţi soluţia generală a ecuaţiei:

$$(2x + 3x^2y)dx + (x^3 - 3y^2)dy = 0.$$

Rezolvare:

$$P(x,y) = 2x + 3x^2y,\ Q(x,y) = x^3 - 3y^2$$
$$\frac{\partial P}{\partial y} = 3x^2\ \ \frac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2$$

Avem o ecuaţie diferenţială exactă. Atunci

$$\exists\, F\ a.i.\ \frac{\partial F}{\partial x} = P \text{ şi } \frac{\partial F}{\partial y} = Q.$$

Funcţia $F = F(x, y)$ se obţine în felul următor:

$$F = \int P(x,y)dx = \int (2x + 3x^2y)dx = x^2 + x^3y + C(y)$$

Vom calcula

$$\frac{\partial F}{\partial y}$$

şi egalăm cu Q.

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x^3 + C^{'}(y)$$

$$x^3 + C^{'}(y) = x^3 - 3y^2 \Leftrightarrow$$

$$C^{'}(y) = -3y^2 \Leftrightarrow$$

$$C(y) = \int -3y^2dy = -y^3 + c \Leftrightarrow$$

$$F = x^3 - y^3 + c \Leftrightarrow$$

$$x^3 - y^3 = c$$

$\blacksquare$

10. Aflaţi soluţia generală a ecuaţiei:

$$2x(1 + \sqrt{x^2 - y})dx - \sqrt{x^2 - y}dy = 0,$$

Rezolvare:

$$P = 2x(1 + \sqrt{x^2 - y}),\ Q = -\sqrt{x^2 - y}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x\frac{-1}{2\sqrt{x^2 - y}} = \frac{-x}{\sqrt{x^2 - y}}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{-2x}{2\sqrt{x^2 - y}} = \frac{-x}{\sqrt{x^2 - y}}.$$

Avem o ecuaţie diferenţială exactă. Atunci

$$\exists\, F\ a.i. \frac{\partial F}{\partial x} = P \text{ şi } \frac{\partial F}{\partial y} = Q$$

$$F=\int P(x,y)dx=\int(2x+2x\sqrt{x^2-y})dx=$$
$$=x^2+\int(x^2-y)^{'}(x^2-y)^{\frac{1}{2}}dx=$$
$$=x^2+\frac{2}{3}(x^2-y)^{\frac{3}{2}}+C(y)$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{2}{3}(-1)\frac{3}{2}(x^2-y)^{\frac{1}{2}}+C^{'}(y)=$$
$$=-\sqrt{x^2-y}+C^{'}(y)$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}=-\sqrt{x^2-y}$$
$$-\sqrt{x^2-y}=-\sqrt{x^2-y}+C^{'}(y)\ \Leftrightarrow$$
$$C^{'}(y)=0\ \Leftrightarrow C(y)=C\ \Leftrightarrow$$
$$F(x,y)=x^2+\frac{2}{3}(x^2-y)^{\frac{3}{2}}+C\ \Leftrightarrow$$
$$x^2+\frac{2}{3}(x^2-y)^{\frac{3}{2}}=C$$

■

11. Aflaţi soluţia generală a ecuaţiei:

$$(x^2+y^2+x)dx+ydy=0.$$

Rezolvare:

$$P(x,y)=(x^2+y^2+x),\ Q(x,y)=y$$
$$\frac{\partial P}{\partial y}=2y \qquad\qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=0$$
$$\frac{-Q_x+P_y}{Q}=\frac{2y}{y}\ unde\ Q_x=\frac{\partial Q}{\partial x},\ P_y=\frac{\partial P}{\partial y}$$

$$\frac{\mu'}{\mu} = 2 \Leftrightarrow, \ln \mu = 2x \Leftrightarrow, \mu = e^{2x} \Leftrightarrow$$

$$(x^2 + y^2 + x)e^{2x}dx + ye^{2x}dx = 0 \Leftrightarrow$$

$$P(x, y) = (x^2 + y^2 + x)e^{2x},\ Q(x, y) = ye^{2x}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2ye^{2x}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2ye^{2x}.$$

Avem o ecuaţie diferenţială exactă. Atunci:

$$(\exists)F\ a.i.\ \frac{\partial Q}{\partial x} = P \text{ şi } \frac{\partial F}{\partial y} = Q$$

$$F = \int Q(x, y)dy = \int ye^{2x}dy = \frac{y^2}{2}e^{2x} + C(x) \Leftrightarrow$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}y^2e^{2x} + C'(x) \Leftrightarrow$$

$$(x^2 + y^2 + x)e^{2x} = y^2e^{2x} + C'(x) \Leftrightarrow$$

$$C'(x) = (x^2 + x)e^{2x} \Leftrightarrow$$

$$C(x) = \int (x^2 + x)e^{2x}dx = (x^2 + x)\frac{e^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\int (2x + 1)e^{2x}dx =$$

$$= \frac{1}{2}(x^2 + x)e^{2x} - \frac{1}{2}(2x + 1)\frac{e^{2x}}{2} + \frac{1}{2}\int 2\frac{e^{2x}}{2}dx =$$

$$= \frac{1}{2}(x^2 + x)e^{2x} - \frac{1}{4}(2x + 1)e^{2x} + \frac{1}{2}\frac{e^{2x}}{2} =$$

$$= \frac{1}{4}e^{2x}(2x^2 + 2x - 2x - 1 + 1) =$$

$$= \frac{1}{2}x^2e^{2x} + C \Leftrightarrow$$

$$F = y^2e^{2x} + \frac{1}{2}x^2e^{2x} + C$$

$$y^2 e^{2x} + \frac{1}{2} x^2 e^{2x} = C$$

■

12. Aflaţi soluţia generală a ecuaţiei:

$$(x^2 - \sin^2 y)dx + x \sin 2y dy = 0.$$

Rezolvare:

$$P = x^2 - \sin^2 y, \; Q = x \sin 2y$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -2 \sin y \cos y = -\sin 2y$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2 \sin 2y$$

Nu avem o ecuaţie diferenţială exactă şi încercăm să o rezolvăm cu ajutorul factorului integrant.

$$\frac{-P_y + Q_x}{P} = \frac{2 \sin 2y}{x^2 - \sin^2 y}$$

Depinde şi de x şi de y, deci nu convine.

$$\frac{-Q_x + P_y}{Q} = \frac{-2 \sin 2y}{x \sin 2y} = \frac{-2}{x}$$

Depinde numai de x şi atunci deducem că există factor integrant $\mu = \mu(x)$ care transformă ecuaţia dată într-o ecuaţie diferenţială exacta.

$$\frac{\mu'}{\mu} = -\frac{2}{x} \Leftrightarrow$$

$$\ln \mu = -2 \ln x + \ln C \Leftrightarrow$$

$$\ln \mu = \ln C x^{-2} \Leftrightarrow$$

$$\mu = \frac{C}{x^2} \Leftrightarrow$$

Pentru $C = 1$ rezultă factorul integrant

$$\mu = \frac{1}{x^2}.$$

Înmulţim ecuaţia iniţială cu

$$\mu = \frac{1}{x^2}$$

şi obţinem:

$$(1 - \frac{\sin^2 y}{x^2})dx + \frac{\sin 2y}{x}dy = 0$$

$$P = 1 - \frac{\sin^2 y}{x^2},\ Q = \frac{\sin 2y}{x^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{2\sin y\cos y}{x^2} = -\frac{\sin 2y}{x^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\sin 2y}{x^2}.$$

Rezultă o ecuaţie diferenţială exactă.

$$(\exists)F\ a.i.\ \frac{\partial F}{\partial x} = P\ 'si\ \frac{\partial F}{\partial y} = Q$$

$$F = \int Qdy = \int \frac{\sin 2y}{x}dy = \frac{1}{x}\int \sin 2y dy =$$

$$= -\frac{1}{x}\frac{\cos 2y}{2} + C(x) = -\frac{\cos 2y}{2x}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\cos 2y}{2x^2} + C'(x) = \frac{1 - 2\sin^2 y}{2x^2} + C'(x) =$$

$$= \frac{1}{2x^2} - \frac{\sin^2 y}{x^2} + C'(x).$$

Dar

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 1 - \frac{\sin^2 y}{x^2}.$$

Rezultă:

$$\frac{1}{2x^2} - \frac{\sin^2 y}{x^2} + C'(x) = 1 - \frac{\sin' y}{x^2}$$

$$C'(x) = 1 - \frac{1}{2x^2} \Leftrightarrow$$

$$C(x) = x + \frac{1}{2x} + C.$$

Deci:

$$F(x, y) = -\frac{\cos 2y}{2x} + x + \frac{1}{2x} + C.$$

$$-\frac{\cos 2y}{2x} + x + \frac{1}{2x} = C$$

■