Simularea sistemelor dinamice. Curs online

Cursul nr. 2

Ecuaţii diferenţiale liniare şi reductibile la liniare

Ecuaţiile liniare au forma generală:

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

în care funcţiile coeficient $P(x)$ şi $Q(x)$ sunt cunoscute, iar necunoscuta este $y = y(x)$.
Soluţia generală a ecuaţiei liniare este:

$$y(x) = e^{-\int P(x)dx}\left(C + \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\right).$$

1. Aflaţi soluţia generală a ecuaţiei:

$$xy' - 2y = 2x^4.$$

Rezolvare:

Ecuaţia se poate scrie sub forma:

$$y' - \frac{2}{x}y = 2x^3,\ P(x) = -\frac{2}{x},\ Q(x) = 2x^3,$$

care este o ecuaţie liniară. Avem soluţia ecuaţiei (flosim faptul că $e^{\ln a} = a$):

$$y(x) = e^{\int \frac{2}{x}dx}\left(C + \int 2x^3 e^{-\int \frac{2}{x}dx}dx\right) =$$

$$= e^{2\ln x}\left(C + \int 2x^3 e^{-2\ln x}dx\right) =$$

$$= x^2\left(C + \int 2x^3 x^{-2}dx\right)$$

$$= x^2\left(C + \int 2xdx\right)$$

$$= x^2\left(C + x^2\right). \qquad \blacksquare$$

2. Aflaţi soluţia generală a ecuaţiei:

$$(xy' - 1)\ln x = 2y.$$

Rezolvare:

Ecuaţia este echivalentă cu:

$$x\ln x \cdot y' - \ln x = 2y \Leftrightarrow$$

$$x\ln x \cdot y' - 2y = \ln x \Leftrightarrow$$

$$y' - \frac{2}{x\ln x}y = \frac{1}{x}$$

$$y(x) = e^{\int \frac{2}{x\ln x}dx}\left(C + \int \frac{1}{x}e^{-\int \frac{2}{x\ln x}dx}dx\right)$$

$$I_1 = \int \frac{2}{x\ln x}dx$$

$$\ln x = t \Leftrightarrow \frac{1}{x}dx = dt$$

$$I_1 = \int \frac{2}{t}dt = 2\ln t = 2\ln\ln x = \ln\left(\ln^2 x\right)$$

$$I_2 = \int \frac{1}{x}e^{-\int \frac{2}{x\ln x}dx}dx = \int \frac{1}{x}e^{-\ln\left(\ln^2 x\right)}dx =$$

$$= \int \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln^2 x}dx = \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{\ln x}$$

$$y\left(x\right) = e^{\ln\left(\ln^2 x\right)}\left(C - \frac{1}{\ln x}\right) =$$

$$= \ln^2 x \left(C - \frac{1}{\ln x} \right) = C \ln^2 x - \ln x. \qquad \blacksquare$$

3. Aflaţi soluţia generală a ecuaţiei:

$$\left(\sin^2 y + x \cot y \right) y' = 1.$$

Ecuaţia nu este liniară în y:

$$(\sin^2 y + x \cot y) \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dx}{dy} = x \cot y + \sin^2 y$$

$$x' - x \cot y = \sin^2 y,$$

rezultă ecuaţie liniară în $x = x(y)$.

$$x(y) = e^{\int \cot y dy} (C + \int \sin^2 y e^{-\int \cot y dy} dy) =$$

$$= e^{\ln \sin y} (C + \int \sin^2 y e^{-\ln \sin y} dy) =$$

$$= \sin y (C + \int \sin^2 y \frac{1}{\sin y} dy) =$$

$$= \sin y (C - \cos y).$$

Deci $x(y) = \sin y (C - \cos y)$.

$\blacksquare$

4. Aflaţi soluţia generală a ecuaţiei:

$$(2e^y - x) y' = 1.$$

Rezolvare:

Ecuaţia nu e liniară în y. Avem:

$$(2e^y - x) \frac{dy}{dx} = 1 \rightarrow$$

$$\frac{dx}{dy} = 2e^y - x$$
$$x' + x = 2e^y.$$

Am obţinut o ecuaţie liniară în x:

$$x(y) = e^{-\int dy}(C + \int 2e^y e^{\int dy} dy) =$$
$$= e^{-y}(C + \int 2e^y e^y dy) =$$
$$= e^{-y}(C + 2\frac{e^{2y}}{2}) =$$
$$= e^y + Ce^{-y}.$$

■

5. Ecuaţiile Bernoulli au forma generală:

$$y' + P(x)y = Q(x)y^\alpha,\ \alpha \neq 0,\ 1.$$

Să se integreze ecuaţia:

$$y' = y\cos x + y^2 \cos x.$$

Rezolvare:

Este o ecuaţie Bernoulli cu $\alpha = 2$. Facem substituţia:

$$z = y^{1-\alpha} \Leftrightarrow z = y^{-1} \Leftrightarrow y = z^{-1} \Rightarrow$$
$$y' = -z^{-2}z' \quad \Rightarrow \quad z'(-z^{-2}) = z^{-1}\cos x + z^{-2}\cos x / z^2$$
$$-z' = z\cos x + \cos x$$
$$z' + z\cos x = -\cos x$$

care este o ecuaţie liniară în z. Soluţia sa:

$$z(x) = e^{-\int \cos x dx}(C + \int -\cos x e^{\int \cos x dx} dx)$$

$$z(x) = e^{-\sin x}(C + \int -\cos x e^{\sin x} dx)$$

$$z(x) = e^{-\sin x}(C - e^{\sin x}) = Ce^{-\sin x} - 1 \Rightarrow$$

$$y^{-1} = Ce^{-\sin x} - 1 \Rightarrow$$

$$y = \frac{1}{Ce^{-\sin x} - 1}$$

■

6. Să se integreze ecuaţia:

$$xy' + y + x^5 y^3 e^x = 0.$$

Rezolvare:

Este o ecuaţie Bernoulli cu $\alpha = 3$. Facem substituţia:

$$z = y^{1-\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad z = y^{-2} \quad \Leftrightarrow \ y = z^{-\frac{1}{2}}$$

$$y' = -\frac{1}{2} z^{-\frac{3}{2}} z' \Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{2} x z^{-\frac{3}{2}} z' + z^{-\frac{1}{2}} + x^5 z^{-\frac{3}{2}} e^x = 0 \Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{2} x z' + z = -x^5 e^x \Leftrightarrow$$

$$z' - \frac{2}{x} z = 2x^4 e^x \Leftrightarrow$$

$$z(x) = e^{\int \frac{2}{x} dx} \left(C + \int 2x^4 e^x e^{-\int \frac{2}{x} dx} \right) \Leftrightarrow$$

$$z\left(x\right) = e^{2\ln x} \left(C + \int 2x^4 e^x e^{-2\ln x} dx \right) \Leftrightarrow$$

$$z\left(x\right) = x^2 \left(C + \int 2x^4 e^x x^{-2} dx \right) \Leftrightarrow$$

$$z\left(x\right) = x^2 \left(C + 2\int x^2 e^x dx \right) \Leftrightarrow$$

$$z(x) = x^2 \left(C + 2x^2 e^x - \int 4xe^x dx \right) \Leftrightarrow$$

$$z(x) = x^2 \left(C + 2x^2 e^x - 4xe^x + 4 \int e^x dx \right) \Leftrightarrow$$

$$z(x) = x^2 \left(C + 2x^2 e^x - 4xe^x + 4e^x \right) \Leftrightarrow$$

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{z}} \Leftrightarrow$$

$$y = \pm \frac{1}{x\sqrt{C + 2x^2 e^x - 4xe^x + 4e^x}}$$

7. Ecuaţiile Riccati au forma generală:

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x),$$

în care funtiile coeficient $P(x)$, $Q(x)$ şi $R(x)$ sunt date. O ecuaţie Riccati se poate rezolva numai dacă se cunoaste o soluţie particulara a sa, $y_1(x)$. Printr-o substituţie se obţine o ecuaţie liniară. Substituţia este intotdeauna:

$$y(x) = y_1(x) + \frac{1}{z(x)}.$$

Să se integreze următoarea ecuaţie Riccati ştiind că admite soluţia particulară indicată

$$y' = -y^2 \sin x + \frac{2 \sin x}{\cos^2 x} \qquad \text{şi} \qquad \varphi(x) = \frac{1}{\cos x}$$

Rezolvare:

Se face substituţia:

$$y = \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{z} \Rightarrow$$

$$y' = \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{z'}{z^2} \Rightarrow$$

$$\frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{z'}{z^2} = -\frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{2 \sin x}{z \cos x} - \frac{\sin x}{z^2} + \frac{2 \sin x}{\cos^2 x}$$

$$z' = 2z \tan x - \sin x \quad ,$$

care este ecuaţie liniară $\Rightarrow$

$$z(x) = e^{\int 2\tan x dx}\left(C + \int \sin x e^{-\int 2\tan x dx} dx\right) \Leftrightarrow$$

$$z(x) = e^{-2\ln\cos x}\left(C + \int \sin x e^{2\ln\cos x} dx\right) \Leftrightarrow$$

$$z(x) = \cos^{-2} x\left(C + \int \sin x \cos^2 x dx\right) \Leftrightarrow$$

$$z(x) = \cos^{-2} x\left(C - \frac{\cos^3 x}{3}\right) \Leftrightarrow$$

$$z(x) = \frac{C}{\cos^2 x} - \frac{\cos x}{3} \Leftrightarrow$$

$$y(x) = \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\frac{C}{\cos^2 x} - \frac{\cos x}{3}}$$

■

Ecuaţii diferenţiale cu parametru

Spre deosebire de toate ecuaţiile anterioare care aveau forma $y' = f(x, y)$, ecuaţii diferenţiale cu parametru au forma $y = f(x, y')$. Rezolvarea acestora se face prin introducerea unui parametru, care este mereu acelaşi: $y' = p$. Un alt motiv pentru care aceste ecuaţii diferenţiale au acest titlu este că pentru ele soluţia se exprimă întotdeauna în formă parametrică:

$$x = \varphi(p),$$
$$y = \psi(p).$$

8. Să se integreze ecuaţia:

$$y = -\frac{1}{3}\left(xy' + x^2 + y'^2\right)$$

Rezolvare:

Folosim notaţia $y' = p$ şi atunci ecuaţia dată devine

$$y = -\frac{1}{3}\left(xp + x^2 + p^2\right),$$

deci mai trebuie determinat doar x ca funcţie de parametrul p. Diferenţiem în expresia lui y de mai sus:

$$dy = -\frac{1}{3}(p + 2x)\,dx - \frac{1}{3}(x + 2p)\,dp,$$

iar din notaţia $y' = p$ deducem

$$y' = \frac{dy}{dx} = p \Rightarrow dy = pdx.$$

Egalăm cele două expresii ale lui dy şi deducem:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3}(p + 2x)\,dx - \frac{1}{3}(x + 2p)\,dp = pdx \Rightarrow \\ \Rightarrow \left[-\frac{1}{3}(p + 2x) - p\right] dx - \frac{1}{3}(x + 2p)\,dp = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (p + 2x + 3p)\,dx + (x + 2p)\,dp = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (x + 2p)(2dx + dp) = 0. \end{aligned}$$

i) Dacă $x + 2p = 0$ obţinem $x = -2p$ şi înlocuim în expresia iniţială a lui y:

$$y = -\frac{1}{3}\left(xp + x^2 + p^2\right) = y = -\frac{1}{3}\left(-2p^2 + 4p^2 + p^2\right) = -p^2,$$

deci soluţia finală (parametrică) este

$$\begin{aligned} x(p) &= -2p \\ y(p) &= -p^2 \end{aligned}$$

ii) Dacă $2dx+dp = 0$, atunci avem o ecuaţie diferenţială cu variabile separabile, în funcţia x care depinde de p, deci

$$dx = -\frac{1}{2}dp \Rightarrow x(p) = -\frac{1}{2}p + C,$$

care se înlocuieşte in expresia lui y şi obţinem

$$y = -\frac{1}{3}\left(xp + x^2 + p^2\right) = -\frac{1}{3}\left[\left(C - \frac{p}{2}\right) + \left(C - \frac{p}{2}\right)^2 + p^2\right].$$

Soluţia (parametrică) finala

$$\begin{aligned} x(p) &= -\frac{1}{2}p + C, \\ y(p) &= -\frac{1}{3}\left[\left(C - \frac{p}{2}\right) + \left(C - \frac{p}{2}\right)^2 + p^2\right]. \end{aligned}$$

9. Un caz particular de ecuaţie cu parametru este ecuaţia lui Lagrange care are forma:

$$y = xf\left(y'\right) + g\left(y'\right),$$

în care $f(t) \neq t$.

Să se integreze ecuaţia Lagrange:

$$y = -x + \left(\frac{y'+1}{y'-1}\right)^2$$

Rezolvare:

$$y' = p \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = p \quad \Rightarrow \quad dy = pdx$$

$$y = -x + \left(\frac{p+1}{p-1}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$dy = -dx + 2\left(\frac{p+1}{p-1}\right)\left(\frac{p+1}{p-1}\right)' dp \Leftrightarrow$$

$$pdx = -dx + 2\left(\frac{p+1}{p-1}\right)\frac{p-1-p-1}{(p-1)^2}dp \Leftrightarrow$$

$$(p+1)\,dx = -4\frac{(p+1)}{(p-1)^3}dp$$

$$i)\ \ p+1=0 \Rightarrow p=-1 \Rightarrow y'=-1 \Rightarrow$$
$$y=-x+C.$$

Înlocuind în ecuaţia iniţială şi obţinem:

$$-x+C=-x \Rightarrow C=0 \Rightarrow$$
$$y=-x,$$

care este o soluţie singulară.

$$ii)\ dx=\frac{-4}{(p-1)^3}dp$$
$$x=\frac{2}{(p-1)^2}+C$$

Avem soluţia:

$$y=-x+\left(\frac{p+1}{p-1}\right)^2$$
$$x=\frac{2}{(p-1)^2}+C.$$

■

10. Un alt caz particular de ecuaţie cu parametru este ecuaţia lui Clairaut care are forma:

$$y=xy'+g\left(y'\right),$$

adică este tocmai excepţia de la Lagrange, deci $f(t)=t$.

Să se integreze ecuaţia Clairaut:

$$y=\frac{x\sqrt{1+y'^2}+9}{\sqrt{1+y'^2}}y'$$

Rezolvare:

$$y=xy'+\frac{9}{\sqrt{1+y'^2}}y' \Leftrightarrow$$

$$y' = p \Rightarrow dy = pdx \Leftrightarrow$$
$$y = xp + \frac{9p}{\sqrt{1+p^2}} \Leftrightarrow$$
$$dy = pdx + \left(x + 9\frac{\sqrt{1+p^2} - \frac{p^2}{\sqrt{1+p^2}}}{1+p^2} \right) dp \Leftrightarrow$$
$$pdx = pdx + \left(x + \frac{9}{(1+p^2)^{3/2}} \right) dp \Leftrightarrow$$
$$\left(x + \frac{9}{(1+p^2)^{3/2}} \right) dp = 0.$$

Avem două posibilităţi:

$$i)\ dp = 0 \Rightarrow p = C_1$$
$$y' = C_1 \Rightarrow y = C_1 x + C_2,$$

care este soluţie singulară.
Înlocuind în ecuaţia iniţială se obţine C_1 şi $C_{2.}$

$$ii)\ x + \frac{9}{(1+p^2)^{3/2}} = 0$$

Avem soluţia generală:

$$x = \frac{-9}{(1+p^2)^{3/2}}$$
$$y = xp + \frac{9p}{\sqrt{1+p^2}}$$

■