Contrôle de cours 1 (1 heure)

Nom: Le Cras

Prénom: Sirence

Classe: PA1

N.B.: Le barème est sur 20.

Cours 1 : définitions et théorèmes à énoncer (5 points) 1

1.	ient $n \in \mathbb{N}$, $n_0 \in \mathbb{N}$ et $P(n)$ une propriété dépendant de n , définie pour $n \ge n_0$. Énoncer rigoureusement le	théorème
	récurrence dans ce cas là.	

Soit la propriété P(n) définit sur II no, too II et n 2 no n EN Si P(no) est vraie et que Vn 2 no P(n) => P(n+1) Alon An 2 ma P (n) est vraise

2. Énoncer rigoureusement le théorème des gendarmes.

Soit 3 mites (Un), (Un) et, (Wn) telope V n & IN Un < V n & V n et l & IR

L lim Un = N = l alors lim Vn = l

Dim

3. Soit (u_n) une suite. Donner la définition mathématique de : « (u_n) est majorée » (avec les quantificateurs). La mite (Un) et majorice si : 3 m E IR + m E IN Un & m

Cours 2 : exemple des suites géométriques (4 points)

Soient $q \in \mathbb{R}$ et la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = qu_n$ avec $u_0 \in \mathbb{R}$ non nul.

1. Donner l'expression de u_n en fonction de n et de q. Vn EN Un = Vox q n

2. (a) Supposons dans cette question que $q \neq 1$. Soient n et p deux entiers naturels tels que $p \leq n$. Donner la formule

permettant de calculer $\sum_{k=p}^{n} q^k$. $\forall (n, +) \in \mathbb{N}^+$ $\forall (n, +) \in \mathbb{N}^+$ $\forall (n, +) \in \mathbb{N}^+$

(b) Application : calculer (en simplifiant le plus possible) $S = \sum_{k=2}^{8} \frac{1}{2^k}$ $\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^k} \frac{1}{2^k} \frac{12^k}{12^k} = \frac{1$

3. Donner $\lim_{n\to+\infty} q^n$ en fonction de q.

q=1 -> 1 -1<q 21 0 q < -1 ps de limite, diverge

3 Cours 3: limites de suites (6 points)

1. On considère deux suites (u_n) et (v_n) ainsi que deux réels ℓ et ℓ' . Remplir le tableau suivant (soyez le plus précis possible sur le signe des « 0 » ou le signe des « ∞ »):

$\lim_{n \to +\infty} u_n$	ℓ	$\ell > 0$	-∞	+∞	+∞	$\ell < 0$	0-	
$\lim_{n \to +\infty} v_n$	$\ell' \neq 0$	+∞	$\ell' < 0$	$-\infty$	0+	0-	0+	
$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{u_n}$	e c	0+1/	+001	FIV	+001	+001	FIV	

2. Calculer la limite en $+\infty$ de (u_n) dans les cas suivants. Rédiger proprement.

(a) (u_n)	$(x_n): \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 0$	$= \frac{-2n^2 + \frac{1}{\sqrt{n}}}{e^{-n} - 3}.$
		6 3

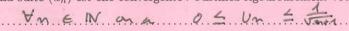
lim Um + 3
$\rightarrow -2m^2 \rightarrow -\infty$
$\frac{1}{2} \rightarrow 0 -2m^2 + \frac{1}{\sqrt{m}} \rightarrow -\infty$
$\begin{array}{cccc} & \xrightarrow{-2} & $
lim Un = + 00
w → + №
-1A
TVS

(b) (u _n) : \ ∀.n.€	$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{3-2n}{n^2}$	$n^2 + 6n^3 = 1$.	2				
	lim Un	7-2-2-4-6-		$2n^{2} + 6n^{3}$	→ +00) F	T: 00/	
		4.3/.4.	1 + 1 2)				
	lim Um	=	1 2				
		6264-	1 + 2 2)		(15		
		7+	칐		1		
		= 6n, -	$\begin{array}{c} \uparrow & \infty \\ \stackrel{f}{=} & \stackrel{1}{\longrightarrow} & 1 \end{array}$.)	A		
		1 3m .+	2,3 -> 1	1.6~ (1-	3mt. 2n3.)-	1 + 0) +	00
	lim Un	= + &	···/				

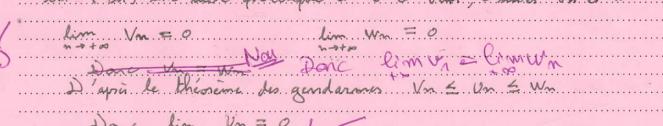
4 Cours 4: comparaisons (3 points)

1. Soit la suite (u_n) telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \le u_n \le \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

La suite (u_n) est-elle convergente? Justifiez rigoureusement votre réponse.



Soit (Un) une mute quelconque et 0 et tros, 2 miles Vn et Wn

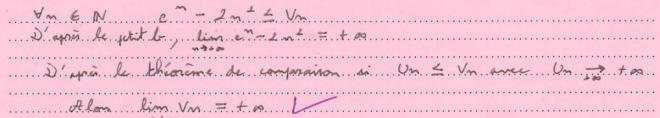


2. Trouver proprement $\lim_{n \to +\infty} e^n - 2n^2$.

Vn & W lim $e^{-2n^2} = FI$: $-\infty$ a marathe before $-2n^2 = FI$: $-\infty$ duth an factorisant $-\infty$ duth and $-\infty$ duth $-\infty$ for $-\infty$ duth $-\infty$ for $-\infty$ duth $-\infty$ duth $-\infty$ for $-\infty$ duth $-\infty$

3. Soit (v_n) telle que $\forall n \in \mathbb{N}, e^n - 2n^2 \leq v_n$.

En partant du résultat de la question précédente, peut-on déterminer le comportement de (v_n) en $+\infty$? Si oui, lequel est-il?



5 Cours 5: convergence ou divergence (2 points)

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses? Si elles sont vraies, citer le théorème mis en jeu en donnant son énoncé proprement, sinon donner un contre-exemple.

Soit (u_n) une suite.

1. Si (u_n) est décroissante et bornée alors elle converge.

Vrai d'après le théorème de convergence monotone si une mite (Un) est strictement décroissante et minoré dons elle converge

2. Si (u_n) est bornée alors elle converge.

Jane, lim (-1) → diverge at exthornée par -14 (-1) ~ 41