Metody Probabilistyczne i Statystyka - Kolokwia 2023 zima

Dr inż. Karol Gotfryd

1 Kolokwium 1

1.1 Grupa 1

Dane są 3 kostki:

1. K_1 - cała biała.
2. K_2 - 3 ściany białe i 3 czarne.
3. K_3 - 4 ściany białe i 2 czarne.

Po dwóch rzutach, dwa razy wypadła biała ściana. Jakie jest prawdopodobieństwo, że rzucaliśmy białą kostką K_1? Odpowiedź uzasadnij (przedstaw rozumowanie i obliczenia).

1.2 Grupa 2

Dane są 3 urny a w nich:

1. U_1 - 2 białe i 4 czerwone kule.
2. U_2 - 8 białych i 4 czerwone kule.
3. U_3 - 1 biała i 3 czerwone kule.

Z każdej urny wybieramy niezależnie i jednostajnie losowo po jednej kuli. Wiedząc, że wybraliśmy dokładnie 2 białe kule, oblicz prawdopodobieństwo tego, że kula wybrana z urny U_1 była biała. Odpowiedź uzasadnij (przedstaw rozumowanie i obliczenia).

1.3 Grupa 3

Rzuciliśmy niezależnie dwa razy symetryczną, sześcienną kością do gry. Zdefiniujem zdarzenia:

1. A - pierwszy rzut dał nieparzystą liczbę oczek.
2. B - drugi rzut dał nieparzystą liczbę oczek.
3. C - albo oba rzuty dały jednocześnie parzyste, albo nieparzyste wyniki.

Czy zdarzenia A, B i C są niezależne? Czy są parami niezależne? Odpowiedź uzasadnij (przedstaw rozumowanie i obliczenia).

2 Kolokwium 2

2.1 Grupa 1

Zmienna losowa X ma dystrybuantę

$$F_X(t) = \frac{t+3}{6}$$

dla $t \in [-3, 3]$. Zmienna losowa Y jest zdefiniowana jako $Y = 2^{|X|}$. Oblicz dystrybuantę i funkcję gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej Y.

2.2 Grupa 2

Rzucamy niezależnie trzy razy niesymetryczną monetą, która daje orła z ppb. 2/3, reszkę z ppb. 1/3. Oznaczamy przez H liczbę wyrzuconych orłów, a przez T - liczbę reszek. Niech D oznacza wyznacznik macierzy

$$\begin{pmatrix} H-T & H \\ T & H \end{pmatrix}.$$

Wyznacza funkcję masy prawdopodobieństwa oraz dystrybuantę zmiennej losowej D. Odpowiedź uzasadnij (przedstaw rozumowanie i obliczenia). **Ściąga:** $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$.

2.3 Grupa 3

Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie ciągłym z funkcją gęstości prawdopodobieństwa $f_x(t) = 8$ dla $t \in (0, \frac{1}{8})$ oraz $f_x(t) = 0$ w przeciwnym przypadku. Niech $Y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{X}}$. Wyznacz dystrybuantę oraz gęstość prawdopodobieństwa zmiennej losowej Y. Odpowiedź uzasadnij (przedstaw rozumowanie i obliczenia). **Ściąga:** $(x^a)' = ax^{a-1}$; $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$ (przy odpowiednich założeniach).

2.4 Grupa 1 - Rozwiązanie

Niech F_Y będzie dystrybuantą Y. Z definicji $F_Y(t) = P(Y \leqslant t)$.

$$Y \leqslant t$$

$$2^{|X|} \leqslant t$$

Warto tutaj zaznaczyć, że funkcja $2^{|X|}$ osiąga minimum dla $X = 0$ zatem

$$F_Y(1) = 0$$

w dodatku $F_X(3) = 1$ zatem Najwyższa wartość $Y = 2^3 = 8$. Oznacza to, że $F_Y(8) = 1$. Dalej możemy kontynuować:

$$|X| \leqslant \log_2 t$$

$$-\log_2 t \leqslant X \leqslant \log_2 t$$

Wykorzystując prawo, $P(a < X \leqslant b) = F(b) - F(a)$ mamy:

$$F_Y(t) = P(Y \leqslant t) = F_X(\log_2 t) - F_X(-\log_2 t)$$

$$F_Y(t) = \frac{\log_2 t + 3}{6} - \frac{-\log_2 t + 3}{6} = \frac{1}{3}\log_2 t$$

Teraz żeby uzyskać gęstość wykorzystujemy związek $\frac{d}{dt}F_X(t) = f_X(t)$.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{3}\log_2 t\right) = \frac{1}{3\ln(2)t}$$

Ostatecznie:

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \leqslant 1 \\ \frac{1}{3}\log_2 t & \text{dla } t \in (1, 8) \\ 1 & \text{dla } t \geqslant 8 \end{cases}$$

oraz:

$$f_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 1 \\ \frac{1}{3\ln(2)t} & \text{dla } t \in (1, 8) \\ 0 & \text{dla } t > 8 \end{cases}$$

Dla $t \in \{1, 8\}$ gęstość jest niezdefiniowana.

2.5 Grupa 2 - rozwiązanie

Ze wzoru liczymy:

$$D = \det\begin{pmatrix} H - T & H \\ T & H \end{pmatrix} = (H - T)H - HT = H^2 - TH - HT = H^2 - 2HT$$

W dodatku jeśli rzucaliśmy 3 razy, to wiemy że $T = 3 - H$. Zatem:

$$D = H^2 - 2H(3 - H) = H^2 - 6H + 2H^2 = 3H^2 - 6H$$

Teraz policzymy funkję masy prawdopodobieństwa H, który będzie potrzebny do policzenia funkcji masy D.

$$P(H = 0) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

$$P(H = 1) = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{9}$$

$$P(H = 2) = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

$$P(H = 3) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

Teraz policzmy D w zależności od H:

H	$D = 3H^2 - 6H$
0	**0**
1	$3 - 6 =$ **-3**
2	$12 - 12 =$ **0**
3	$27 - 18 =$ **9**

Zatem możemy już obliczyć funkcję masy prawdopodobieństwo $p_D(k)$ gdzie $k \in \{-3, 0, 9\}$:

$$\begin{aligned} p_D(0) &= P(D=0) = P(H=0 \vee H=2) = P(H=0) + P(H=2) = \frac{1}{27} + \frac{4}{9} = \frac{13}{27} \\ p_D(-3) &= P(D=1) = P(H=1) = \frac{2}{9} \\ p_D(9) &= P(D=9) = P(H=3) = \frac{8}{27} \end{aligned}$$

Z kolei dystrybuanta będzie równa:

$$F_D(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \in (-\infty, -3) \\ \frac{2}{9} & \text{dla } t \in [-3, 0) \\ \frac{19}{27} & \text{dla } t \in [0, 9) \\ 1 & \text{dla } t \in [9, \infty) \end{cases}$$

2.6 Grupa 3 - rozwiązanie

Na początek policzymy dystrybuantę X, ponieważ bedziemy jej potrzebować później.

$$F_x(t) = \int_{-\infty}^{t} f_x(t)dt = \int_0^t 8dx = 8t$$

Czyli, biorąc pod uwagę obszary definicji gęstości, mamy:

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ 8t & \text{dla } t \in [0, \frac{1}{8}] \\ 1 & \text{dla } t > \frac{1}{8} \end{cases}$$

Z definicji wiemy, że:

$$F_Y(t) = P(Y \leqslant t) = P\left(\frac{1}{\sqrt[3]{X}} \leqslant t\right)$$

gdzie F_Y to dystrybuanta zmiennej losowej Y. Teraz rozwiązujemy nierówność:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt[3]{X}} &\leqslant t \\ \sqrt[3]{X} &\geqslant \frac{1}{t} \\ X &\geqslant \frac{1}{t^3} \end{aligned}$$

Ponieważ mamy do czynienia z ciągłą zmienną losową wolno nam:

$$P\left(\frac{1}{\sqrt[3]{X}} \leqslant t\right) = P\left(X \geqslant \frac{1}{t^3}\right) = 1 - P\left(X < \frac{1}{t^3}\right) = 1 - P\left(X \leqslant \frac{1}{t^3}\right) = 1 - F_X\left(\frac{1}{t^3}\right)$$

Przy czym znamy dystrybuantę X, zatem:

$$F_Y(t) = 1 - \frac{8}{t^3}$$

Z gęstości, wiemy, że $X \in \left(0, \frac{1}{8}\right)$. Biorąc pod uwagę że funkcja jest malejąca, Y osiąga minimum dla $x = \frac{1}{8}$, czyli $Y = 2$. W dodatku Y nie osiągnie maksimum dla $X > 2$ zatem ostateczna dystrybuanta to:

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \leqslant 2 \\ 1 - \frac{8}{t^3} & \text{dla } t > 2 \end{cases}$$

Zatem mamy już dystrybuantę Y. Ponieważ gęstość to po prostu pochodna dystrybuanty, możemy ją obliczyć za pomocą wzorów:

$$f_Y(t) = \frac{d}{dt}F_Y(t) = \frac{d}{dt}\left(1 - \frac{8}{t^3}\right) = \frac{d}{dt}\left(1 - 8t^{-3}\right) = 24t^{-4}$$

Biorąc pod uwagę obszary definicji dystrybuanty ostatecznie:

$$f_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \leqslant 2 \\ \frac{24}{t^4} & \text{dla } t > 2 \end{cases}$$

3 Kolokwium 3

3.1 Grupa 1

Wektor losowy (X, Y) przyjmuje wartości $(2^j, 3^k)$ dla $j, k \in \mathbb{N}$ (przyjmujemy $0 \in \mathbb{N}$). Rozkład prawdopodobieństwa tego wektora przedstawia się jako:

$$P(X = 2^j \wedge Y = 3^k) = \frac{6}{3^{j+1} \cdot 4^{k+1}}$$

Policz wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej X (druga grupa miała Y).

Ściąga: $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} p^k = \frac{1}{1-p}$ dla $|p| < 1$.

3.2 Grupa 1 - rozwiązanie

Najpierw policzymy rozkład X:

$$\begin{aligned} P(X = 2^j) = \\ \sum_{k=0}^{\infty} P(X = 2^j \wedge Y = 3^k) = \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{6}{3^{j+1} \cdot 4^{k+1}} = \\ \frac{6}{4 \cdot 3^{j+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4^k} = \\ \frac{6}{4 \cdot 3^{j+1}} \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \\ \frac{6}{4 \cdot 3^{j+1}} \frac{4}{3} = \frac{6}{3^{j+2}} \end{aligned}$$

Następnie liczymy z definicji wartość oczekiwaną:

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{j=0}^{\infty} 2^j \frac{6}{3^{j+2}} = \frac{2}{3} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^j = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \cdot 3 = 2$$

Przy liczeniu wariancji możemy skorzystać ze wzoru $\mathbf{var}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}^2(X)$.

$$\mathbf{E}(X^2) = \sum_{j=0}^{\infty} (2^j)^2 \frac{6}{3^{j+2}} = \frac{2}{3} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^j = \infty$$

Zatem wariancja nie istnieje.