Mineure MTS
Télécom Bretagne
Juin 2017

Examen MTS 201

Traitement du signal numérique

45 min.
Sans documents ni calculatrice. Aucun point ne sera accordé aux réponses non justifiées.

Rappels :

$\forall\, |q| < 1,\ \sum_{k=0}^{+\infty} q^k = 1/(1-q)$,

	$\delta(n)$	$u(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta(n-k)$	$r(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\delta(n-k)$	$y(n) = a^n x(n)$
TZ	$\Delta(z) = 1$	$U(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{-k} = 1/\left(1-z^{-1}\right)$	$R(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} kz^{-k} = z^{-1}/\left(1-z^{-1}\right)^2$	$Y(z) = X(z/a)$

1 Exercice I

Soit $x(t), t \in \mathbb{R}$, un signal dont la transformée de Fourier (TF) a pour expression

$$X(f) = \begin{cases} 1000 - |f|, & \text{si } |f| < 1000 \text{ Hz}, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{1}$$

1.1. On échantillonne $x(t)$ aux instants nT_e, $n \in \mathbb{Z}$. Tracer la TF du signal échantillonné dans les trois cas suivants : $T_e = 2$ ms, $T_e = 1$ ms, $T_e = 0.5$ ms.

1.2. Quelle est la valeur limite $T_e^{\max}$ au-dessus de laquelle il est impossible de reconstruire parfaitement le signal à temps continu à partir du signal échantillonné ?

1.3. On considère un convertisseur analogique-numérique cadencé à la période d'échantillonnage $T_e^{\text{CAN}} = T_e^{\max} \times 4/5$ avec un débit de conversion $D = 60$ kbit/s. Quel est le nombre de bits de quantification utilisés par le convertisseur ?

Un filtre est appliqué sur le signal numérisé $x(n)$. La relation entre le signal d'entrée du filtre $x(n)$ et sa sortie $y(n)$ est :

$$y(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-a)^k x(n - kM), \text{ avec } a \in \mathbb{R} \text{ et } M \in \mathbb{N}_+^* (\text{entier strictement positif}). \qquad (2)$$

1.4. Donner l'expression de la réponse impulsionnelle $h(n)$ du filtre ?

1.5. Donner la condition sur a pour que le filtre soit stable ?

1.6. Exprimer la relation entre $y(n)$ et $x(n)$ sous la forme d'une équation aux différences finies.

1.7. Déterminer la réponse fréquentielle du filtre (et sa condition d'existence). En déduire le gain en fréquence du filtre.

1.8. Quelle est la particularité de ce filtre en comparaison aux filtres plus « classiques » de type passe-haut, passe-bas ou passe-bande ?

2 Exercice II

Soit un filtre du second ordre défini par la fonction de transfert suivante :

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}, \; z \in \mathbb{C} \qquad (3)$$

On considère les 4 configurations de pôles et de régions de convergence (RDC) du filtre montrées à la figure 1 (page suivante).

2.1. Pour chacune des configurations, analyser la causalité et la stabilité du filtre.

On suppose maintenant que $b_0 = 2$, $b_1 = -2$, $b_2 = 0$, $a_0 = 1$, $a_1 = -2$, $a_2 = 3/4$ et que le filtre $H(z)$ est stable.

2.2. Exprimer la relation entre l'entrée et la sortie du filtre sous la forme d'une équation aux différences finies.

2.3. Montrer que $H(z)$ peut s'exprimer sous la forme $H(z) = 1/(1-p_1 z^{-1}) + 1/(1-p_2 z^{-1})$, où p_1 et p_2 sont deux valeurs à déterminer.

2.4. Le filtre est-il causal ?

2.5. Donner l'expression de la réponse impulsionnelle du filtre.

2.6. Est-ce un filtre RIF ou RII ?

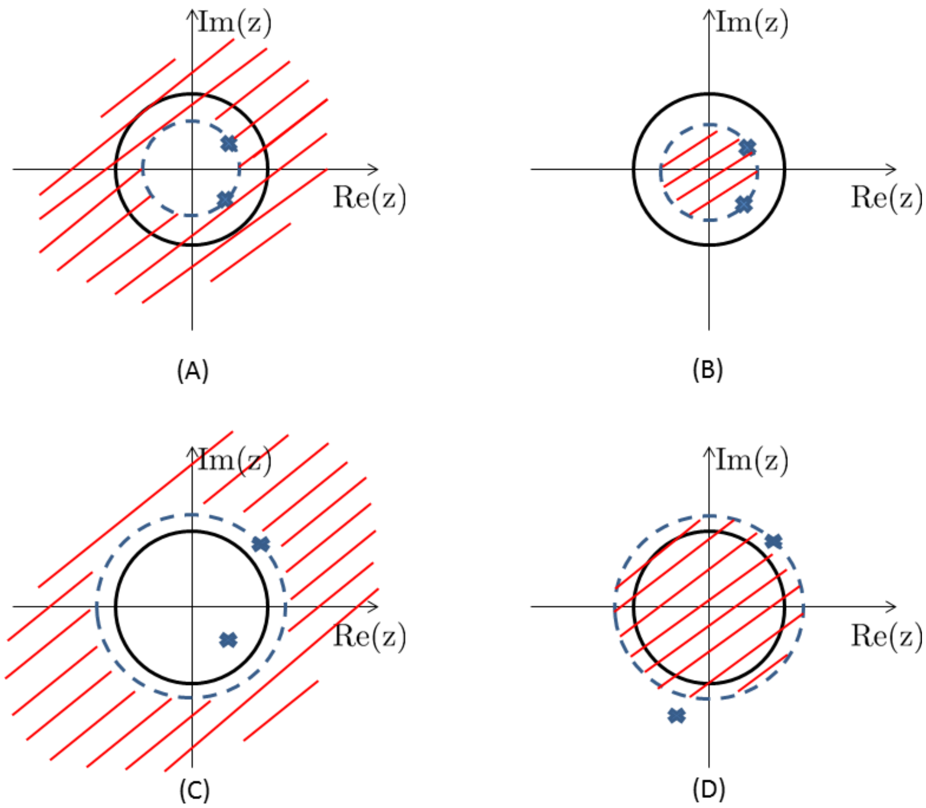

Figure 1 – Pôles (croix) et RDC (zones hachurées) de $H(z)$. Le cercle en trait plein représente le cercle unité.