Введение

B-сплайны — это кусочно-гладкие функции, используемые для аппроксимации и интерполяции данных. Кубические B-сплайны являются наиболее распространенными из-за их хороших свойств гладкости и гибкости.

Основные понятия

1. Порядок сплайна

- **Порядок** k: степень полинома плюс один. Для кубических сплайнов $k = 4$ (степень 3).

2. Узелковый вектор

- **Узлы** t_i: неубывающая последовательность значений параметра t, определяющая диапазоны полиномов.
- Для n контрольных точек и порядка k длина узелкового вектора равна $n + k$.

3. Контрольные точки

- $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}$: точки, через которые проходит сплайн или которые определяют его форму.

Базисные функции B-сплайна

Рекурсивное определение

1. Базовый случай (степень 0):

$$N_{i,1}(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t_i \leq t < t_{i+1}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

2. Рекуррентный случай (степень k)

$$N_{i,k}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} N_{i,k-1}(t) + \frac{t_{i+k} - t}{t_{i+k} - t_{i+1}} N_{i+1,k-1}(t).$$

Построение сплайна

Сплайн определяется как линейная комбинация контрольных точек и базисных функций:

$$C(t) = \sum_{i=0}^{n-1} N_{i,k}(t) P_i,$$

где:

- $C(t)$ — точка на сплайне при параметре t.
- $N_{i,k}(t)$ — базисная функция порядка k.
- P_i — контрольные точки.

Алгоритм реализации

1. Определение узелкового вектора

Для равномерного сплайна узлы можно определить как:

$$t_i = i, \quad i = 0, 1, \ldots, n + k - 1.$$

Для открытого равномерного сплайна повторяем первые и последние узлы k раз.

2. Вычисление базисных функций

Используйте рекурсивное определение или алгоритм Де Бура (предпочтительно для численной стабильности).

3. Вычисление точки на сплайне

Для заданного t вычислите $C(t)$ с помощью суммы.

Алгоритм Де Бура

Алгоритм Де Бура позволяет эффективно вычислять точки на сплайне без явного вычисления базисных функций.

Псевдокод

Algorithm 1 Алгоритм Де Бура

Require: Порядок сплайна k, значение параметра x, узелковый вектор t, контрольные точки P_i
Ensure: Значение $C(x)$ на сплайне

Найти индекс s, такой что $t_s \leq x < t_{s+1}$
Инициализировать массив d:
for $j = 0$ **to** $k - 1$ **do**
    $d_j \leftarrow P_{s-k+1+j}$
end for
for $r = 1$ **to** $k - 1$ **do**
    for $j = k - 1$ r **do**
        $i \leftarrow s - k + r + j$
        $\alpha \leftarrow \dfrac{x - t_i}{t_{i+k-r} - t_i}$
        $d_j \leftarrow (1 - \alpha) \cdot d_{j-1} + \alpha \cdot d_j$
    end for
end for
return d_{k-1}

Особенности реализации

- **Узелковый вектор**: выбор узлов влияет на форму сплайна. Открытый равномерный узелковый вектор обеспечивает интерполяцию крайних точек.
- **Численная стабильность**: использование алгоритма Де Бура предпочтительно из-за лучшей численной стабильности по сравнению с рекурсивным вычислением базисных функций.

Практические советы

- **Проверка граничных случаев**: убедитесь, что функции корректно обрабатывают случаи, когда t равен крайнему узлу.
- **Оптимизация**: храните результаты промежуточных вычислений, если необходимо вычислять сплайн для множества значений t.
- **Визуализация**: для отладки полезно визуализировать сплайн и контрольные точки.