Введение. Очень многие численные методы решения задач математического анализа связаны с аппроксимацией функций. К таким задачам относятся непосредственно задачи приближения функций (сглаживание, интерполяция), а также задачи, в которых аппроксимация функции присутствует в качестве промежуточного шага анализа или исследования. Одной из таких типичных задач является задача интерполяции, когда по заданным значениям неизвестной функции $f(x)$ в точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$, называемых узлами интерполяции, требуется построить функцию $P(x)$, которая приближала бы искомую функцию с той или иной точностью и совпадала с $f(x)$ в узлах интерполяции. Иными словами:

$$f(x_i) = P(x_i),\ i = \overline{0, n}$$

Многие из классических методов решения задач интерполяции, например, многочлен Лагранжа или интерполяционный многочлен Ньютона, имеют ряд недостатков, поскольку они строятся сразу по всем узлам интерполяции. При этом увеличение числа узлов приводит к увеличению степени многочлена и, следовательно, к появлению колебаний.

Для нивелирования подобных недостатков была придумана специальная интерполяционная функция, непрерывная в узлах склейки локальных многочленов по производным 1-го, 2-го, 3-го порядка и так далее. Эту функцию назвали сплайном.

Особую популярность сплайны получили в теории приближения для решения задачи интерполяции. Это логично, ведь сплайны обладают хорошими аппроксимативными свойствами и обеспечивают простоту реализации вычислительных алгоритмов.

Сам термин «сплайн» берёт свои истоки с середины 20-го века из работ Айзека Шонберга. Далее, в 50-х-70-х годах 20-го века теория сплайнов получила бурное развитие. Сплайн – это не просто математическая абстракция, а во многих случаях это решение уравнений, описывающих какие-либо физические процессы.

В данной работе рассматриваются и изучаются основополагающие принципы построения B-сплайнов, приводятся основные термины и понятия, а также доказывается, что B-сплайны образуют базис пространства кусочно-многочленных функций.

Основная часть работы состоит из четырёх разделов. Первый раздел называется «Разделенные разности», второй раздел — «B-сплайны», третий раздел - «Базис пространства кусочно-степенных функций и его размерность» и, наконец, четвертый раздел называется «Интерполяция двоичными базисными сплайнами 3-ей степени». В первом разделе рассмотрены основополагающие аспекты разделенных разностей, их свойства и область применения.

Во втором разделе подробно рассматриваются B-сплайны, их виды и свойства, а также приводятся способы их построения. Третий раздел посвящен B-сплайнам как базису в пространстве кусочно-степенных функций. В четвертом разделе рассматривается новый вид сплайнов — двоичные базисные сплайны, построенные путём интегрирования функций из системы Уолша. Помимо самого определения двоичного базисного сплайна, в четвертом разделе приводится алгоритм построения интерполяционного сплайна 3-ей степени, а также указывается погрешность при интерполяции таким способом.

Конечной целью отчёта является построение интерполяционного сплайна на основе двоичных B-сплайнов, полученных путём интегрирования функций из системы Уолша. В работе приводится алгоритм построения интерполяционного сплайна и доказывается, что сплайн, построенный по такому алгоритму, будет всегда являться интерполяционным сплайном 3-ей степени.

Актуальность работы состоит в том, что интерполяция двоичными базисными сплайнами требует меньшее количество и сложность вычислений, чем интерполяция сплайнами, построенными через разделенные разности. Результатом данного теоретического отчёта является приведение алгоритма, с помощью которого можно строить интерполяционные сплайны 3-ей степени. Также даётся оценка погрешности для интерполяции двоичным сплайном.

Основное содержание работы. В основе B-сплайнов лежит определение разделенной разности.

Определение 1. Разделенной разностью первого порядка, построенной по значениям функции в узлах x_i, x_j называют отношение вида:

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i} \tag{1}$$

Определение 2. Разделенной разностью k-го порядка, построенной по значениям функции в узлах $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}$ называют отношение вида:

$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}]}{x_{i+k} - x_i} \tag{2}$$

Под разделенной разностью нулевого порядка понимают значение самой функции f в точке x_i:

$$f[x_i] = f(x_i) \tag{3}$$

Лемма 1. k-ую разделенную разность, вычисленную в точке $x = x_i$, можно определить следующим образом:

$$f[x_i, x_j, \ldots, x_i] = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_i) \tag{4}$$

В данном выражении узел x_i участвует $k+1$ раз.

Следствие 1. Разделенная разность k-го порядка, вычисленная в узле x_i, равняется k-му слагаемому разложения функции $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x = x_i$.

Теорема 2. Разделенная разность k-го порядка для функции $f(x)$ выражается через значения функции $f(x)$ в узлах $x_i, x_(i+1), \ldots, x_{i+k}$ по следующей формуле:

$$f[x_i x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] = \sum_{j=1}^{i+k} \frac{f(x_j)}{W'_{i,k}(x_j)}, \tag{5}$$

где $W'_{i,k}(x)$ - производная функции $W_{i,k}(x) = (x - x_i)(x - x_{i+1}) \ldots (x - x_{i+k-1})(x - x_{i+k})$, вычисленная в точке $x = x_j$. В данном случае индексы i, k говорят об индексе начального узла и о количестве узлов всего, соответственно.

Прямым следствием из Теоремы 2 является тот факт, что разделенная разность любого порядка является симметрической функцией своих аргументов:

$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] = f[x_{\tau(i)}, x_{\tau(i+1)}, \ldots, x_{\tau(i+k)}],$$

где $\tau(i)$ — функция, осуществляющая всевозможные перестановки множества индексов $\{i, i+1, \ldots, i+k\}$.

Определение 3. Разделенной разность первого порядка для многочлена $p(x)$ называют отношение вида:

$$p[x, x_0] = \frac{p(x_0) - p(x)}{x_0 - x} \tag{6}$$

Определение 4. Разделенной разностью k-го порядка для многочлена $p(x)$ называется отношение вида:

$$p[x, x_0, \ldots, x_{k-1}] = \frac{p[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}] - p[x, x_0, \ldots, x_{k-2}]}{x_k - x} \tag{7}$$

Лемма 3. Пусть $p(x)$ — интерполяционный многочлен для функции $f(x)$. $x_0, x_1, \ldots, x_k$ — узлы интерполяции. Тогда разделенные разности, построенные по этим узлам для функции $f(x)$ и интерполяционного многочлена $p(x)$, будут совпадать.

Также в первом разделе рассмотрены свойства разделенных разностей.

Свойство 1. Единственность разделенных разностей. Разделенные разности, построенные по совокупности точек $x_0, x_1, \ldots, x_m$ определяются однозначно.

Свойство 2. Если функция $f(x)$ представима в следующем виде:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m,$$

то верно следующее:

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_m] = a_m$$

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_{m+1}] = 0$$

Свойство 3. Симметричность. Разделенная разность есть симметрическая функция своих аргументов:

$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] = f[x_{\tau(i)}, x_{\tau(i+1)}, \ldots, x_{\tau(i+k)}],$$

где $\tau(i)$ — функция, осуществляющая всевозможные перестановки множества индексов $\{i, i+1, \ldots, i+k\}$.

Свойство 4. Линейность. Если функция $f(x)$ представима в следующем виде:

$$f(x) = ag(x) + bh(x),$$

то верно следующее:

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_m] = a \cdot g[x_0, x_1, \ldots, x_m] + b \cdot h[x_0, x_1, \ldots, x_m] \tag{8}$$

Свойство 5. Формула Лейбница. Если функция $f(x)$ представима в следующем виде:

$$f(x) = g(x) \cdot h(x),$$

то справедлива формула Лейбница:

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_m] = \sum_{k=0}^{m} g[x_0, x_1, \ldots, x_k] \cdot h[x_k, x_{k+1}, \ldots, x_m] \tag{9}$$

Во второй главе работы переходим непосредственно к понятию усеченной степенной функции и рассмотрению B-сплайнов.

Определение 5. Усеченной степенной функцией будем называть функцию следующего вида:

$$\varphi_m(t,x) = \begin{cases} (t-x)^m, \ t > x \\ 0, \ t \le x \end{cases} \tag{10}$$

Также усеченную степенную функцию можно определить следующим образом:

$$\varphi_m(t,x) = max(0,(t-x))^m$$

Лемма 4. Если все узлы $x_i, \ i = \overline{0,k}$ будут такими, что $\forall i, x_i > x$, где x — фиксированный параметр, то $\forall k$:

$$\varphi_{m-1}[x_0, x_1, \ldots, x_k] = 0 \tag{11}$$

Определение 6. Финитная функция — это функция, носитель которой компактен. Иными словами, финитная функция обращается в ноль за пределами некоторого компакта.

Во второй части второго раздела даётся определение B-сплайнам и рассматриваются способы их построения.

Определение 7. Ненормированным i-ым базисным сплайном m-го порядка $M_{i,m}(x)$ для неубывающей последовательности узлов $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+m}$ называют разделенную разность m-го порядка от усеченной степенной функции $\varphi_{m-1}(t,x)$.

$$M_{i,m}(x) = \varphi_{m-1}[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+m}](x) \tag{12}$$

Определение 8. Нормированным i-ым базисным сплайном m-го порядка $N_{i,m}(x)$ для неубывающей последовательности узлов $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+m}$ называют разделенную разность m-го порядка от усеченной степенной функции $\varphi_{m-1}(t,x)$.

$$N_{i,m}(x) = (x_{i+m} - x_i)\varphi_{m-1}[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+m}](x) \tag{13}$$

Лемма 5. Пусть B-сплайн построен по неубывающей последовательности $(m+1)$ узлов $x_a, x_{a+1}, \ldots, x_{a+m-1}, x_{a+m}$. Пусть $x_b = x_{a+m}$. Тогда B-сплайн будет отличен от нуля только на отрезке $x_a \le x < x_b$, или, $N_{a,m}(x) = 0$ при $x < x_a$ и $x \ge x_b$.

Нормированный B-сплайн $N_{i,m}(x)$ можно представить в следующем виде, воспользовавшись определением разделенной разности:

$$N_{a,m}(x) = \varphi_{m-1}[x_{a+1}, x_{a+2}, \dots, x_b](x) - \varphi_{m-1}[x_a, x_{a+1}, \dots, x_{b-1}](x) \tag{14}$$

B-сплайны можно определять через разделенные разности, однако на практике существуют более удобные рекуррентные соотношения, позволяющие вычислять B-сплайны порядка m через B-сплайны более низких порядков. Такие рекуррентные соотношения называются Формулами Кокса-де Бура.

Теорема 6. Пусть имеется неубывающая последовательность узлов

$$x_a, x_{a+1}, \dots, x_{a+m-1}, x_{a+m} = x_b,$$

а также нормированный $N_{a,m}(x)$ и ненормированный $M_{a,m}(x)$ B-сплайны, построенные по этим узлам. Тогда справедливы следующие рекуррентные соотношения:

1. Для $M_{a,m}(x)$:

$$M_{a,m}(x) = \frac{(x_b - x)M_{a+1,m-1}(x) + (x - x_a)M_{a,m-1}(x)}{x_b - x_a} \tag{15}$$

2. Для $N_{a,m}(x)$

$$N_{a,m}(x) = \frac{x_b - x}{x_b - x_{a+1}} N_{a+1,m-1}(x) + \frac{x - x_a}{x_b - x_a} N_{a,m-1}(x) \tag{16}$$

Как можно заметить, B-сплайн порядка m вычисляется через два B-сплайна порядка $(m-1)$. Один из этих двух B-сплайнов примыкает к началу искомого, а другой – к концу. Более того, каждый из этих двух B-сплайнов берется с коэффициентом, пропорциональным расстоянию от крайнего узла заданной последовательности узлов, причем сумма этих коэффициентов равна 1:

$$\frac{x_b - x}{x_b - x_a} + \frac{x - x_a}{x_b - x_a} = \frac{x_b - x_a}{x_b - x_a} = 1$$

Формулы Кокса-де Бура помогают составить схему вычисления B-сплайнов. Например, B-сплайны 1-го порядка можно вычислить непосредственно через разделенные разности (из определения). Они будут выглядеть следующим образом:

$$M_{a,1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x_{a+1}-x_a},\ x_a \le x < x_{a+1} \\ 0,\ x < x_a, x \ge x_{a+1} \end{cases}$$

$$N_{a,1}(x) = \begin{cases} 1, x_a \le x < x_{a+1} \\ 0, x < x_a, x \ge x_{a+1} \end{cases} \tag{17}$$

B-сплайны более высоких порядков вычисляются непосредственно по формулам Кокса-де Бура.

Третий раздел дипломной работы сконцентрирован на понятии базиса пространства кусочно-степенных функций, а также на доказательстве того, что система из B-сплайнов образует базис пространства кусочно-многочленных функций.

Определение 9. Функцию $f(x)$ будем называть кусочно-многочленной (кусочно-полиномиальной), если она имеет следующий вид:

$$f(x) = \begin{cases} P_1(x),\ x_0 \le x < x_1 \\ \\ P_2(x),\ x_1 \le x < x_2 \\ \dots \\ P_n(x),\ x_{n-1} \le x < x_n \end{cases} \tag{18}$$

Теорема 7. Множество $P_{k,\xi}$ есть линейное пространство.

Лемма 8. Пусть $\mathbb{X}$ — линейное пространство, $(e_1, e_2, \dots, e_m)$ — система элементов в $\mathbb{X}$. Если существует система линейных функционалов $\lambda_i(x),\ i = \overline{1, m}$ в $\mathbb{X}$ такая, что

$$\lambda_i(e_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1,\ i = j \\ 0,\ i \ne j \end{cases}$$

то система элементов $(e_1, e_2, \dots, e_m)$ линейно независима.

Определение 10. Оператором скачка функции $f(x)$ в точке x_j будем называть разность значений функции в точках $x_j + 0$ и $x_j - 0$, соответственно.

$$jumpf(x_j) = f(x_j + 0) - f(x_j - 0)$$

Теорема 9. Система функций $\varphi_{i,j}$, определяемая в (3.2) и (3.3), линейно независима.

Теорема 10. Пусть функция $f(x) \in P_{k,\xi}$. Тогда при $x \in [x_1, x_n)$ $f(x)$ представима в следующем виде:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k-1} f^{(i)}(x_1)\varphi_{i,1}(x) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{k-1} jumpf^{(i)}(x_2)\varphi_{i,2}(x) + \cdots +$$
$$+ \sum_{i=1}^{k-1} jumpf^{(i)}(x_n)\varphi_{i,n}(x),$$

где функции $\varphi_{i,1}(x)$ и $\varphi_{i,j}(x)$ определяются согласно утверждениям (3.2) и (3.3), соответственно.

Теорема 11. Система функций $\varphi_{i,j}$ образует базис пространства кусочно-многочленных функций $P_{k,\xi}$.

Следствие 2. Размерность пространства $P_{k,\xi}$ равна $k \cdot s$.

Затем рассматривается не всё пространство $P_{k,\xi}$, а его подпространство. Это связано с тем, что при определении кусочно-многочленных функций $f(x) \in P_{k,\xi}$ не вводятся условия на точки склейки отдельных многочленов.

Лемма 12. Функции $\varphi_{i,j}$, $i = \overline{v_j, k-1}, j = \overline{2, n}$ образуют базис подпространства $P_{k,\xi,\overline{v}}$.

Следствие 3. Размерность пространства $P_{k,\xi,\overline{v}}$ равна $k + \sum_{j=2}^{n}(k - v_j)$.

Теорема 13. Пусть $P_{k,\xi,\overline{v}}$ — подпространство кусочно-многочленных функций с заданнымиусловиями, а $x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n$ — система узлов. Дополним систему узлов точками $t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_k = x_1$, $x_{n+1} = t_{s+1} \leq t_{s+2} \leq \cdots \leq t_{s+k}$, где $s = k + \sum_{j=2}^{n}(k - v_j)$ — размерность подпространства $P_{k,\xi,\overline{v}}$. Полученную систему точек обозначим $\{t_j\}_{j=0}^{s+k}$.

Рассмотрим для $i = \overline{0, s}$ нормированные В-сплайны:

$$N_{i,k}(x) = (x_{i+k} - x_i)\sigma_{k-1}[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}](x)$$

Тогда система функций $\{N_{i,k}\}_{i=1}^{s}$ образует базис подпространства $P_{k,\xi,\overline{v}}$ на интервале $(x_0, x_n) = (t_k, t_s)$.

Четвертый раздел работы посвящен двоичным базисным сплайнам и алгоритму построения интерполяционного сплайна через двоичный базисный сплайн 3-ей степени.

Пусть $If(x) = \int\limits_0^x f(t)\ dt (x \in [0,1])$ — оператор интегрирования, $r_n(t) = \operatorname{sgn} \sin 2^{n+1}\pi t$ — функции Радемахера, $W_{2^n-1}(x) = \prod\limits_{k=0}^{n-1} r_k(x)$ — функции Уолша в нумерации Пэли, $f(x)$ — интерполируемая функция.

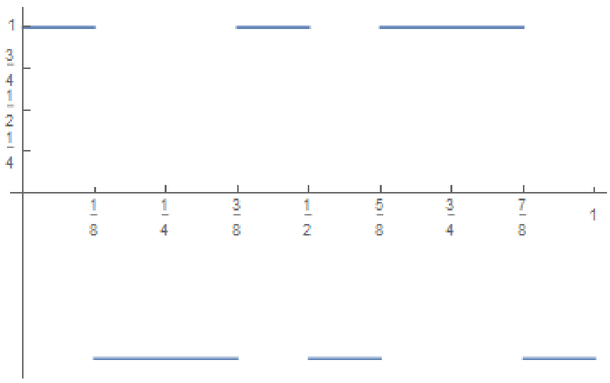

Рис. 0.1 $W_7(x)$

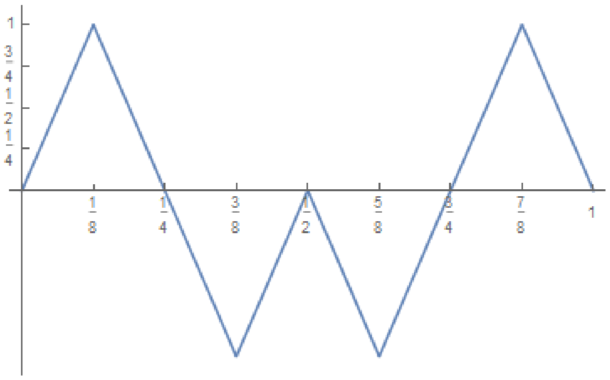

Рис. 0.2 $\dfrac{\psi''(x)}{2^5} = (2^3 I) W_7(x)$

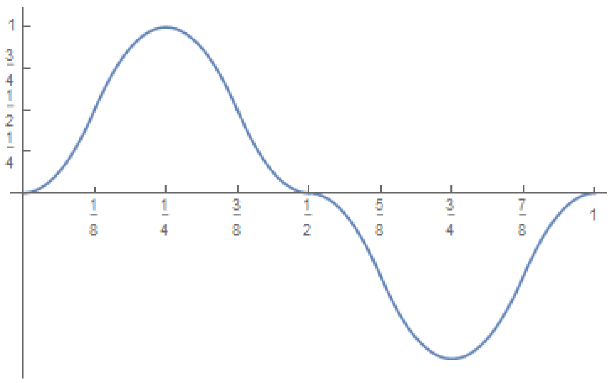

Рис. 0.3 $\dfrac{\psi'(x)}{2^2} = (2^3 I)^2 W_7(x)$

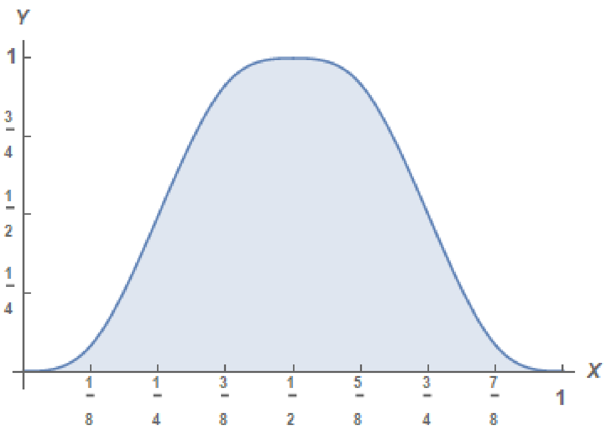

Рис. 0.4 $\psi(x) = (2^2 I)(2^3 I)^2 W_7(x)$

Определение 11. Функцию $\psi(x)$, где

$$\psi(x) = \begin{cases} (2^2 I)(2^3 I)^2 W_7(x), \ x \in [0,1] \\ 0, \ x \notin [0,1] \end{cases} \tag{19}$$

будем называть двоичным базисным сплайном 3-ей степени.

Функция $\psi(x)$ есть кусочно-монотонная функция, совпадающая с многочленом 3-ей степени на каждом отрезке $[\frac{n}{8}, \frac{n+1}{8}]$ $(n = 0, 1, 2, \ldots, 7)$. Функция $\psi(x)$ симметрична относительно точки $x = \frac{1}{2}$.

Для практического исследования положим функцию $\varphi(x)$ равной $\psi(\frac{n}{8}x)$, т.е. применим к изначальной сплайн-функции сжатие и будем рассматривать её на отрезке $\frac{8}{n}$, состоящем из n участков. Тогда $\operatorname{supp}\ \varphi(x) = [0, \frac{8}{n}]$. $\varphi(x)$ есть многочлен 3-ей степени на отрезках $[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}]$, $j = \overline{0,7}$ с точками склейки $x_k = \frac{k}{n}$ $(k = 1, 2, \ldots, 7)$.

Интерполяционный B-сплайн строится рекурсивно. На первом шаге рассматривается функция $\varphi(x + \frac{7}{n})$, которая есть сдвиг функции $\varphi(x)$ влево на $\frac{7}{n}$ интервалов.

$$S_{-2}(x) = \frac{\varphi(x + \frac{7}{n})}{\varphi''(\frac{7}{n})} m_2 \tag{20}$$

На втором шаге рассматривается функция $\varphi(x + \frac{6}{n})$.

$$S_{-1}(x) = S_{-2}(x) + \frac{\varphi(x + \frac{6}{n})}{\varphi'(\frac{6}{n})} \cdot (m_1 - S'_{-2}(0)) \tag{21}$$

На третьем шаге строим сплайн $S_0(x)$, используя функцию $\varphi(x + \frac{4}{n})$:

$$S_0(x) = S_{-1}(x) + \frac{\varphi(x + \frac{4}{n})}{\varphi(\frac{4}{n})} \cdot \left(f\left(\frac{0}{n}\right) - S_{-1}\left(\frac{0}{n}\right)\right) \tag{22}$$

На дальнейших этапах сплайн задаётся следующим уравнением:

$$S_k(x) = S_{k-1}(x) + \frac{\varphi(x + \frac{k-1}{n})}{\varphi(\frac{1}{n})} \cdot \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - S_{k-1}\left(\frac{k}{n}\right)\right) \tag{23}$$

При этом имеем:

$$S_k\left(\frac{k}{n}\right) = S_{k-1}\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{\varphi(\frac{1}{n})}{\varphi(\frac{1}{n})} \cdot \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - S_{k-1}\left(\frac{k}{n}\right)\right) = f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$S''_k(0) = m_2$$

$$S'_k(0) = m_1$$

В конечном итоге получаем сплайн $S(x) = S_k(x)$ такой, что выполняются следующие краевые условия:

$$S(\frac{k}{n}) = f(\frac{k}{n})\ (k = 0, 1, \ldots, n)$$
$$S''(0) = m_2$$
$$S'(0) = m_1$$

Теорема 14. Пусть $\widetilde{S}(x)$ - сплайн 3-ей степени дефекта 2, интерполирующий функцию $f(x)$ в узлах интерполяции $x_k = \frac{k}{n}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$.

Если при построении сплайна $S(x)$ по приведенному выше алгоритму выбрать $m_2 = \widetilde{S}''(0)$, $m_1 = \widetilde{S}'(0)$, то мы получим сплайн $\widetilde{S}(x)$.

Следствие 4. Постоянные m_1 и m_2 можно подобрать таким образом, что для разности $S(x) - f(x)$ будут справедливы следующие неравенства:

$$|S''(x) - f''(x)| \leq 5 \cdot \omega_{\frac{1}{n}}(f'')$$

$$|S'(x) - f'(x)| \leq \frac{5}{n} \cdot \omega_{\frac{1}{n}}(f'')$$

$$|S(x) - f(x)| \leq \frac{5}{8 \cdot n^2} \cdot \omega_{\frac{1}{n}}(f'')$$

Заключение. В данном теоретическом отчёте были приведены основные понятия из теории сплайнов, подробно рассмотрены такие функции как разделенные разности, а также даны основные определения сплайнов, их свойства и методы нахождения.

В отчёте было дано определение формулам Кокса-де Бура, с помощью которых можно строить и вычислять B-сплайны.

Помимо этого, было показано фундаментальное свойство B-сплайнов — то, что они образуют базис пространства всех кусочно-многочленных функций.

При этом одним из основополагающих моментов работы является тот факт, что помимо стандартных методов построения B-сплайнов — через разделенные разности — существуют и другие, более удобные. Например, был предложен новый способ построения интерполяционных сплайнов — через двоичные B-сплайны, полученные путём интегрирования функций из системы Уолша. Был приведён алгоритм построения таких интерполяционных сплайнов, а также доказано, что построенные таким образом сплайны всегда будут является интерполяционными сплайнами 3-ей степени. Помимо этого, была дана оценка погрешности при таком подходе к интерполяции, и приведены графики полученных результатов. Построение интерполяционных сплайнов через двоичные B-сплайны является действительно новым и удобным способом интерполяции.