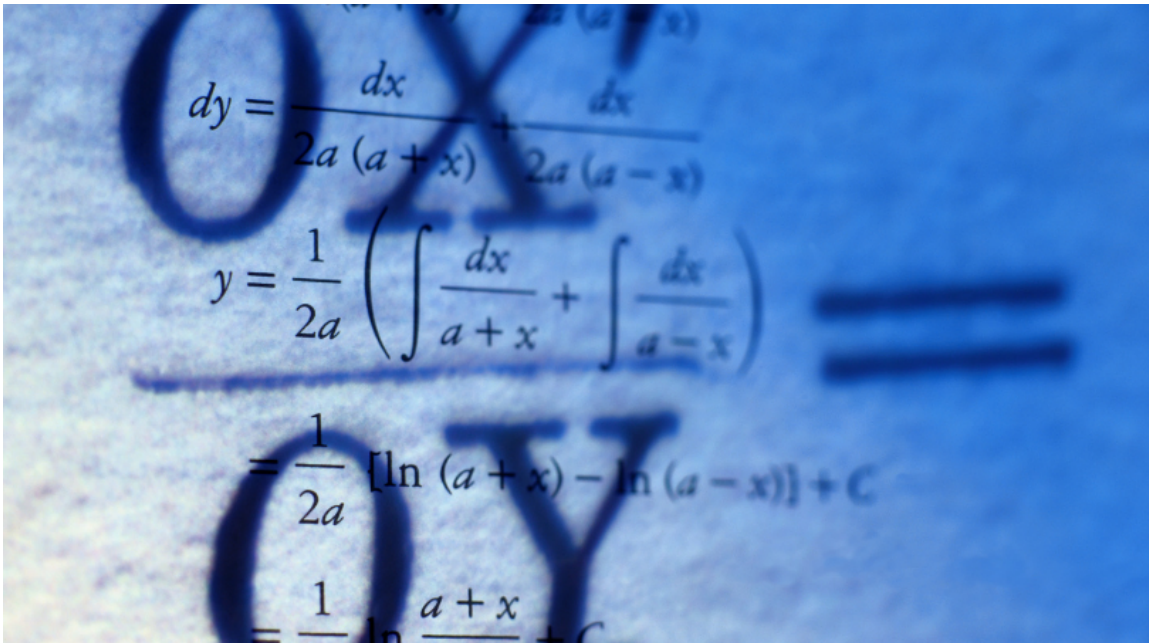


---

## PROJET DE MATH 3A

---

Multiple Solveur de Polynôme



The image shows a handwritten mathematical derivation on a blue background. The derivation starts with the partial fraction decomposition of  $\frac{1}{a^2 - x^2}$  into  $\frac{1}{2a(a+x)} + \frac{1}{2a(a-x)}$ . This is followed by the integration of each term, resulting in  $y = \frac{1}{2a} \left( \int \frac{dx}{a+x} + \int \frac{dx}{a-x} \right)$ . The next step shows the result as  $= \frac{1}{2a} [\ln(a+x) - \ln(a-x)] + C$ . Finally, the expression is simplified to  $= \frac{1}{2a} \ln \frac{a+x}{a-x} + C$ .

$$\begin{aligned} dy &= \frac{dx}{2a(a+x)} + \frac{dx}{2a(a-x)} \\ y &= \frac{1}{2a} \left( \int \frac{dx}{a+x} + \int \frac{dx}{a-x} \right) \\ &= \frac{1}{2a} [\ln(a+x) - \ln(a-x)] + C \\ &= \frac{1}{2a} \ln \frac{a+x}{a-x} + C \end{aligned}$$

*Auteurs :*  
Sevrin WYDER et Romain ANQUETIN

*Responsable :*  
Lionel GARNIER et Lamis AL SHEIKH

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Définitions</b>	<b>4</b>
2.1	Monôme . . . . .	4
2.2	Polynôme . . . . .	4
2.3	Polynôme de Bernstein[1] . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Méthodes Usuelles</b>	<b>4</b>
3.1	Polynôme de Degrée 3 . . . . .	4
3.1.1	Méthode Cardan . . . . .	4
3.1.2	Résultat . . . . .	7
3.2	Polynôme de Degrée 4 . . . . .	7
3.2.1	Méthode de Ferrari . . . . .	7
3.2.2	Résultat . . . . .	8
3.3	Polynôme de Degrée 5 . . . . .	8
3.3.1	Méthode de Newton . . . . .	9
3.3.2	Factorisation par la méthode de Horner . . . . .	10
3.3.3	Résultat . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Solveur de Bernstein</b>	<b>11</b>
4.1	Propriétés . . . . .	11
4.2	Théorème utilisé . . . . .	12
4.2.1	Théorème des valeurs intermédiaires . . . . .	12
4.2.2	Théorème de Cauchy[10] pour les limites . . . . .	13
4.2.3	Théorème Modifier de Cauchy pour les limites . . . . .	13
4.3	Algorithme de Casteljau . . . . .	13
4.3.1	Condition de racine . . . . .	13
4.4	Méthode pour calculer la racine . . . . .	13
4.5	Algorithme Principale . . . . .	13
4.6	Note sur notre algorithme . . . . .	15
4.7	Conclusion du solveur de Bernstein . . . . .	15
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>16</b>
	<b>Références</b>	<b>17</b>

## Table des figures

1	<i>Pour <math>4x^3 - 5x^2 - 23x + 6 = 0</math></i>	7
2	<i>Pour <math>4X^4 + 10X^3 - 28X^2 - 46X + 60 = 0</math></i>	8
3	<i>Pour <math>123X^5 + 234X^4 - 456X^3 + 3456X^2 + 48X + 34 = 0</math></i>	11
4	<i>Polynôme de Bernstein de degré 3</i>	11
5	<i>Un polynôme de Bernstein avec ça courbe de Bézier explicite</i>	12
6	<i>Tracé du segment entre les 2 points qui encadre la racine</i>	15

# 1 Introduction

Dans ce rapport nous allons présenter différentes méthodes pour résoudre des polynôme de degré 3 à 5. Dans un premier temps nous allons présenter les différentes méthodes "usuelles" qui sont les plus connues. Puis dans un deuxième temps nous allons présenter et expliquer le solveur de Bernstein. Ces deux méthodes seront implémenter en C++ pour être comparées.

## 2 Définitions

Pour commencer il est important de définir et comprendre certains termes utilisés par la suite.

### 2.1 Monôme

Un monôme est une expression de la forme :  $ax^n$  où  $a$  est un nombre réel (ou un nombre complexe) et  $n$  un entier naturel : le nombre  $a$  est appelé coefficient du monôme et le nombre  $n$  est appelé le degré du monôme.

Exemple :

$3x^2$  est un monôme du second degré et de coefficient 3

### 2.2 Polynôme

Un polynôme est une somme de monôme. Un polynôme s'exprime sous la forme :

$$P = a_0X^0 + a_1X^1 + a_2X^2 + \dots + a_nX^n = \sum_{k=0}^n a_kX^k$$

exemples :

-  $3x^2 - 5x + 7$  est un polynôme du second degré

-  $-16x^3 + 4x - 9$  est un polynôme du 3<sup>me</sup> degré

### 2.3 Polynôme de Bernstein[1]

Pour un degré  $n \geq 0$ , il y a  $n + 1$  polynôme de Bernstein  $B_n^0, \dots, B_n^n$  définis, sur l'intervalle  $[0; 1]$ , par  $B_k^n = \binom{n}{k} u^k (1 - u)^{n-k}$  où les  $\binom{n}{k}$  sont les coefficients binomiaux. Les  $n + 1$  polynôme de Bernstein forment une base de l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus  $n$ .

On peut aussi définir le polynôme de Bernstein[2] en utilisant des combinaisons : Soit  $n$  appartenant à  $\mathbb{N} - \{0; 1\}$

Pour  $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$ , le  $i$ -ème polynôme de Bernstein de degré  $n$  est :

$$B_{i,n}(t) = C_n^i t^i (1 - t)^{n-i} \text{ avec } C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

## 3 Méthodes Usuelles

### 3.1 Polynôme de Degrée 3

#### 3.1.1 Méthode Cardan

La méthode de Cardan[3] résout les équations du 3<sup>e</sup> degré de la forme :

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

Avant de lancer la methode classique de Cardan nous devons verifier si nos coefficients  $b$  et  $c$  sont bien different de 0, sinon nous avons une racine  $r$  unique que nous pouvons trouver grace a cette formule :

$$x = \frac{-d}{a}^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{-d}{a}}$$

On ramène le cas général à la forme réduite :

$$x^3 + px + q = 0$$

où  $p$  et  $q$  sont des entiers naturels.

$$x^3 + px = q, \quad x^3 = px + q$$

Etude et résolution de l'équation  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  :

Soit l'équation :

$$(e1) \quad x \text{ réel, } ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (a, b, c \text{ et } d \text{ réels, } a \text{ non nul})$$

Divisons par  $a$  et posons  $X = \frac{b}{3a}$ . On se ramène alors à la forme (e2) :  $X^3 + pX + q = 0$  avec :

$$x = X - \frac{b}{3a}, \quad p = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{(3a^2)}, \quad q = \frac{(2b^3)}{(27a^3)} + \frac{d}{a} - \frac{bc}{(3a^2)}$$

La fonction polynomiale  $f(X) = X^3 + pX + q$  est de degré impair, elle admet donc au moins un zéro réel, que nous appellerons ici le zéro certain.

• Cas triviaux  $q = 0$  et/ou  $p = 0$  :

- si  $p = 0$ , il n'y a qu'une seule racine ; elle est réelle, c'est la racine cubique de  $-q$ .
- si, de plus  $q = 0$ ,  $X = 0$ ,  $\frac{-b}{3a}$  est une solution triple car on peut écrire :  $(X + b/3a)^3 = 0$   
C'est le cas par exemple de l'équation  $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$ , c'est à dire  $(x + 1)^3 = 0$ , pour laquelle -1 est racine triple.
- si  $q = 0$ , on se ramène au second degré par factorisation :  $X(X^2 + p) = 0$

• Cas général :

Dans le cas général, posons dans (e2) :  $X = u + v$  et on développe l'expression obtenue : en imposant la condition  $3uv = -p$ , l'équation (e2) prend alors la forme système équivalente :  $u^3 + v^3 = -q$  et  $u^3 \times v^3 = -\frac{p^3}{27}$  (e3)

Il s'agit donc de rechercher deux nombres connaissant leur somme et leur produit : la résolution de (e2) est ramenée au second degré.

Posons désormais  $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$

Nous pouvons maintenant nous trouver dans 3 cas différents par apport à  $\Delta$ .

-Cas  $\Delta > 0$  : L'équation (e2)  $X^3 + pX + q = 0$  admet l'unique solution réelle :

$$X_1 = u + v = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{-q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Si l'équation est donnée, comme souvent eu égard, historiquement, à Cardan, sous la forme  $x^3 = px + q$ , il faut alors changer  $p$  et  $q$  en  $-p$  et  $-q$  et la formule devient alors :

$$X_1 = u + v = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

-Cas  $\Delta < 0$  :

La formule de Cardan semble en défaut, mais comme le fit Bombelli sur des cas particuliers, remarquons que  $\Delta$  peut se mettre sous la forme  $-z^2 = z^2 \times (-1)$  et n'hésitons pas alors à poser provisoirement :

$$\Delta_2 = z\sqrt{-1}$$

L'application de la formule de Cardan amène à une solution  $X$  de la forme :

$$X = \sqrt[3]{s + z\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{s - z\sqrt{-1}}$$

Cherchons un nombre dont le cube serait  $s + z\sqrt{-1}$  sous la même forme  $a + b\sqrt{-1}$ . Il vient, puisque  $(\sqrt{-1})^2 = -1$  :

$$a^3 - 3ab^2 + (3a^2b - b^3)\sqrt{-1} = s + z\sqrt{-1}$$

Il faut donc avoir  $a^3 - 3ab^2 = s$  et  $3a^2b - b^3 = z$  et pour faire de même avec  $a - z\sqrt{-1}$ , il suffirait de changer  $b$  en  $-b$  : la partie réelle est invariante.

La solution  $X$  serait ainsi de la forme :  $(a + b\sqrt{-1}) + (a - b\sqrt{-1})$  soit  $X_k = 2a$ . C'est un nombre réel : la formule de Cardan fournit donc en fait systématiquement le zéro certain. Sachant aujourd'hui que tout nombre complexe non nul admet trois racines cubiques distinctes, on en déduit que si  $D$  est négatif, l'équation du 3e degré possède trois solutions réelles distinctes.

On a  $p < 0$  et :

$$r = \sqrt{\frac{-p^3}{27}} \text{ et } t = \frac{1}{3} \times \arccos\left(\frac{-q}{2r}\right)$$

Par conséquent, l'équation (e2) admet trois solutions réelles  $X_k$  (éventuellement égales suivant la valeur de  $q$ ).

L'équation initiale (e1) admet ainsi trois solutions  $x = X_k - \frac{b}{3a}$ . Ensuite nous pouvons calculer les 3 racines.

Pour  $k$  allant de 0 à 2 :

$$\text{La racine } x = \frac{-b}{3a} + 2 \times \sqrt{\frac{-p}{3}} \times \cos\left(\frac{t + (2 \times k \times \pi)}{3}\right)$$

On a donc 3 valeurs différentes pour  $k$  et donc trois racines réelles.

-Cas  $\Delta = 0$  :

On a ici  $q^2/4 = (-p^3)/27$  et, nécessairement  $p \leq 0$  : on est enclin à envisager l'existence d'une solution double voire triple. Si tel est le cas, cette solution annule  $3X^2 + p$ , expression dérivée de l'équation. On vérifie qu'il en est ainsi et que la 3ème solution est alors :

- $\frac{q}{p}$  si  $p < 0$  (une solution double),  $X_1 = -\sqrt{\frac{-p}{3}}$ ,  $X_2 = -X_1$ ,  $X_3 = \frac{3q}{p}$
- 0 si  $p = 0$ , donc si  $p = 0$ ,  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ , on retrouve la solution triple évoquée ci-dessus.

### 3.1.2 Résultat

Résultat de l'application de la méthode de Cardan en C++ (Annexe 1) :

```
Trois solutions trouvees!
x1 = 3
x2 = 0.25
x3 = -2
Continuer ? tapez 1
```

FIGURE 1 – Pour  $4x^3 - 5x^2 - 23x + 6 = 0$

## 3.2 Polynôme de Degrée 4

### 3.2.1 Méthode de Ferrari

L'équation du 4ème degré selon Ludovico Ferrari[4] fonctionne de la manière suivante :  
Soit l'équation d'inconnue  $x$ , à coefficients réels,  $a$  non nul :

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

Divisons par  $a$  et posons  $x = X - \frac{b}{4a}$ . Le terme en  $x^3$  disparaît et (e) se ramène alors à la forme équivalente :

$$x = X - \frac{b}{4a} \text{ et : } X^4 + AX^2 + BX + C = 0$$

Avec  $A = \frac{-3b^2}{8a^2} + \frac{c}{a}$ ,  $B = \frac{(\frac{b}{2})^3}{a^3} - \frac{0.5 \times bc}{a^2} + \frac{d}{a}$ ,  $C = -3(\frac{b}{4a})^4 + \frac{c((\frac{b}{4})^2)}{a^3} - \frac{0.25 \times bd}{a^2} + \frac{e}{a}$

• Si  $B = 0$ , on se ramène au second degré en posant  $X^2 = Y$  (forme  $X^4 + AX^2 + C = 0$  : une équation bicarrée)

On a alors  $Z^2 + AZ + C = 0$  avec  $\Delta = A^2 - 4 \times C$

Quand  $\Delta > 0$  on a donc deux solutions ;

$$Z1 = \frac{-A + \sqrt{\Delta}}{2} \quad Z2 = \frac{-A - \sqrt{\Delta}}{2}$$

Quand nous pouvons obtenir les 4 solutions suivantes :

$$\begin{aligned} X1 &= \sqrt{\frac{-A + \sqrt{\Delta}}{2}} = \sqrt{Z1} & X2 &= -\sqrt{\frac{-A + \sqrt{\Delta}}{2}} = -\sqrt{Z1} \\ X3 &= \sqrt{\frac{-A - \sqrt{\Delta}}{2}} = \sqrt{Z2} & X4 &= -\sqrt{\frac{-A - \sqrt{\Delta}}{2}} = -\sqrt{Z2} \end{aligned}$$

Quand  $\Delta = 0$  on a donc une solution :

$$Z1 = \frac{-A}{2}$$

Nous pouvons obtenir les 2 solutions suivantes :

$$X1 = \sqrt{Z1} \quad X2 = -\sqrt{Z1}$$



- Supposons  $B$  non nul. On introduit une inconnue auxiliaire  $u$  en calculant :

$$(X^2 + \frac{u}{2})^2 = X^4 + uX^2 + \frac{u^2}{4}$$

Ce qui permet d'écrire :

$$(X^2 + \frac{u}{2})^2 = (u - A)X^2 - BX + \frac{u^2}{4}C$$

Équivalente à (e1) pour toute valeur de  $u$

- On impose les conditions  $u \neq A$  et on force  $\Delta = 0$ , où  $\Delta$  est le discriminant de l'équation en  $X$  du second membre, ce qui conduit à une équation du 3ème degré, dite équation résolvante :

$$u^3 - Au^2 - 4Cu + 4AC - B^2 = 0 \text{ Equation du 3ème degré ayant pour inconnue } u.$$

Équation du 3e degré que l'on sait résoudre selon la formule de Cardan.

- (e2) devient équivalente à :

$$(X^2 + \frac{u}{2})^2 = (u - A)(X - z)^2$$

où  $z$  désigne la solution double du second membre de (e2) correspondant à une racine réelle  $u$  de (e3), à savoir :

$$z = \frac{B}{2(u-A)}$$

Dans ces conditions, la résolution se ramène à deux équations du second degré. On voit que, dans  $R$ , l'équation du quatrième degré possède 0, 2 ou 4 solutions (éventuellement multiples).

### 3.2.2 Résultat

Résultat de l'application de la méthode de Ferrari C++ (Annexe 2) :

```
Quatre solutions
x1 = 2
x2 = 1
x3 = -2.5
x4 = -3
```

FIGURE 2 – Pour  $4X^4 + 10X^3 - 28X^2 - 46X + 60 = 0$

### 3.3 Polynôme de Degrée 5

La plupart des équations quintiques[5] n'étant pas résolubles par radicaux, autrement dit, en exprimant les solutions à l'aide de fonctions racines et polynomiales des coefficients de l'équation, des mathématiciens ont cherché à exprimer les racines à l'aide d'autres fonctions.

Les méthodes numériques telles que la méthode de Newton[6] avec essais et erreurs donnent des résultats très rapidement si l'on ne cherche que des valeurs approchées des racines, ou s'il est connu que les solutions comprennent seulement des expressions simples.

### 3.3.1 Méthode de Newton

La méthode de Newton[6],[7] ou méthode de Newton-Raphson est, dans son application la plus simple, un algorithme efficace pour trouver numériquement une approximation précise d'un zéro (ou racine) d'une fonction réelle d'une variable réelle.

La méthode de Newton est une méthode de résolution de l'équation  $f(x) = 0$ , attention à la différence avec le théorème du point fixe qui permet de résoudre numériquement  $f(x) = x$ . Si  $x_0$  est proche de la racine  $r$  on peut faire un développement de Taylor à l'ordre 1 de la fonction  $f$  en  $x_0$  :

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + O((x - x_0)^2)$$

Pour trouver une valeur approchée de la racine  $r$ , on ne garde que la partie linéaire du développement, on résout :

$$f(r) = 0 \approx f(x_0) + (r - x_0)f'(x_0)$$

donc (si  $f'(x_0) \neq 0$ ) :

$$r \approx x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Graphiquement, cela revient à tracer la tangente à la courbe représentative de  $f$  et à chercher où elle coupe l'axe des  $x$ . On considère donc la suite récurrente définie par une valeur  $u_0$  proche de la racine et par la relation :

$$u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$$

Il y a deux théorèmes importants, l'un d'eux prouve que si  $u_0$  est "assez proche" de  $r$  alors la suite converge vers  $r$ , malheureusement il est difficile de savoir en pratique si on est "assez proche" de  $u_0$  pour que ce théorème s'applique. Le second théorème donne un critère pratique facile à vérifier qui assure la convergence, il utilise les propriétés de convexité de la fonction.

• Théorème :

Soit  $f$  une fonction de classe  $C^2$  (2 fois continument dérivable) sur un intervalle fermé  $I$ . Soit  $r$  une racine simple de  $f$  située à l'intérieur de  $I$  (telle que  $f(r) = 0$  et  $f'(r) \neq 0$ ). Alors il existe  $\varepsilon > 0$  tel que la suite définie par

$$u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}, |u_0 - r| \leq \varepsilon$$

converge vers  $r$ . Si on a  $|f''| \leq M$  et  $1/|f'| \leq m$  sur un intervalle  $[r - \eta, r + \eta]$  contenu dans  $I$ , alors on peut prendre tout réel  $\varepsilon > 0$  tel que  $\varepsilon < 2/(mM)$  et  $\varepsilon \leq \eta$ .

• Théorème :

Si  $f(r) = 0$ ,  $f'(r) > 0$  et si  $f'' \geq 0$  sur  $[r, b]$  alors pour tout  $u_0 \in [r, b]$  la suite de la méthode de Newton

$$u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)},$$

est définie, décroissante, minorée par  $r$  et converge vers  $r$ . De plus

$$0 \leq u_n - r \leq \frac{f(u_n)}{f'(r)}$$

Il existe des variantes, par exemple si  $f'(r) < 0$  et  $f'' \geq 0$  sur  $[a, r]$ . Si  $f'' \leq 0$ , on considère  $g = -f$ .

### 3.3.2 Factorisation par la méthode de Horner

Quand un polynôme à un degré impair on a au moins une racine réelle qu'on a trouver grâce à la méthode de Newton.

Pour trouver les éventuelles autres racines on factorise notre polynôme grâce à la méthode de Horner.

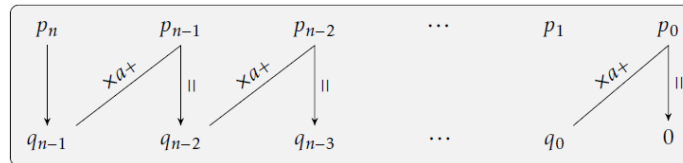
La méthode de Hörner[8] va nous permettre de trouver les coefficients du polynôme  $Q$  tel que :

$$P(x) = (x - a)Q(x)$$

Posons  $P(x) = \sum_{k \leq n} p_k x^k$ ,  $Q(x) = \sum_{k < n} q_k x^k$  et  $a$  une racine de  $P$ . D'après le raisonnement précédent, on peut écrire :

$$\begin{cases} q_{n-1} = p_n \\ q_k = p_{k+1} + a q_{k+1} \quad \forall 0 \leq k < n \end{cases}$$

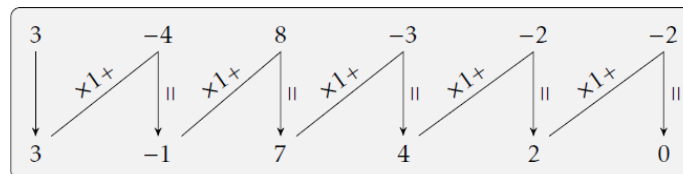
Nous pouvons schématiser cela de la manière suivantes :



Par exemple pour l'équation suivantes :

$$P(x) = 3x^5 - 4x^4 + 8x^3 - 3x^2 - 2x - 2$$

Une racine de  $P$  est  $a = 1$ , d'où :



D'où :

$$P(x) = (x - 1)(3x^4 - x^3 + 7x^2 + 4x + 2)$$

Finalement pour trouver les racines manquantes il reste à résoudre l'équation de degré 4. Ainsi nous avons toutes les racines du polynôme de degré 5.

Dans le cas d'un polynome de degré 5, nous savons que nous allons toujours trouver une racine, car nous avons une racine qui est dite impaire. Cela vérifie le théorème des valeurs intermédiaires.

### 3.3.3 Résultat

```
Il y a 3 racines
X1 = -0.0598043
X2 = 0.0463098
X3 = -4.28903
```

FIGURE 3 – Pour  $123X^5 + 234X^4 - 456X^3 + 3456X^2 + 48X + 34 = 0$

## 4 Solveur de Bernstein

### 4.1 Propriétés

Les polynômes de Bernstein présentent plusieurs propriétés importantes :  
 Pour tout  $t$  appartenant à  $[0;1]$   
 -Partition de l'unité :

$$\sum_{k=0}^n B_k^n(U) = 1$$

-Positivité :

$$B_k^n > 0$$

-Symétrie :

$$B_k^n(u) = B_{n-k}^n(1-u)$$

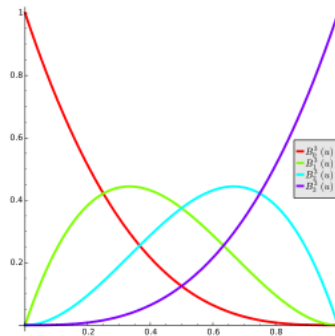


FIGURE 4 – Polynôme de Bernstein de degré 3

Puisque les polynômes de Bernstein sont définis sur l'intervalle  $[0;1]$ , or il faut étudier des polynômes sur l'intervalle  $[a; b]$ .

On va donc introduire un changement de variable :

$$u = \frac{t-a}{b-a}$$

Ce qui permet d'avoir un intervalle  $[a; b]$  d'étude, on obtient la nouvelle formule suivante :

$$B_{k[a,b]}^n(t) = \binom{n}{k} \times \frac{(b-t)^{n-k}(t-a)^k}{(b-a)^n}$$

On obtient la forme polynomiale dans la base de Bernstein :

$$Y_{[a,b]}(t) = \sum_{k=0}^n (Y_k \binom{n}{k} \times \frac{(b-t)^{n-k}(t-a)^k}{(b-a)^n})$$

Avec comme coefficient de Bernstein  $y_k$

A partir de cette formule on obtient la courbe de Bézier explicite avec des points de contrôle :

$$Y_{[a,b]}(t) = \sum_{k=0}^n (P_k \binom{n}{k} \times \frac{(b-t)^{n-k}(t-a)^k}{(b-a)^n})$$

Avec  $P_k = (a + \frac{k}{n}(b-a), Y_k)$

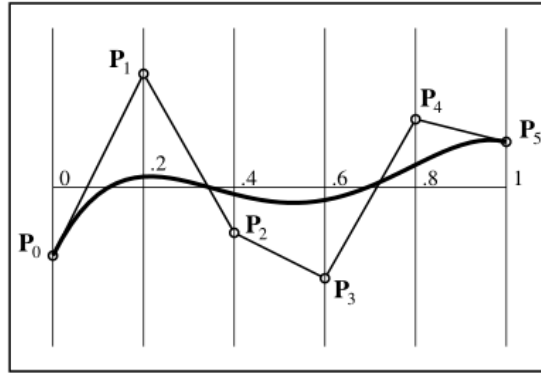


FIGURE 5 – Un polynôme de Bernstein avec ça courbe de Bézier explicite

## 4.2 Théorème utilisé

### 4.2.1 Théorème des valeurs intermédiaires

Si la fonction  $f$  est continue et strictement monotone sur  $[a; b]$  et si le réel  $m$  est compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , alors l'équation  $f(x) = m$  a une seule solution dans  $[a; b]$ .

### 4.2.2 Théorème de Cauchy[10] pour les limites

Toutes les racines réelles de  $f(t) \in \mathbb{R}$  sont contenue dans l'intervalle  $[-B, B]$   $B=1+\max(\text{abs}(a_i))$

### 4.2.3 Théorème Modifier de Cauchy pour les limites

Toutes les racines réelles de  $f(t) \in \mathbb{R}$  sont contenue dans l'intervalle  $[-B, B]$ .

Soit N la valeur absolue de la valeur du coefficient le plus négatif de  $f(t) \in \mathbb{R}$  alors  $B = 1 + N$

## 4.3 Algorithme de Casteljau

On utilisera l'algorithme de Casteljau subdiviser un intervalle en deux parties, ce qui permet d'augmenter la précision de la position de la racine.

Par exemple sur un intervalle  $[0,1]$  on obtiendra deux intervalles  $[0, 1/2]$  et  $[1/2, 0]$

On utilisera les matrices de Casteljau[9] :

Les matrices de Casteljau sont des matrices de Markov triangulaires principalement utilisées dans l'algorithme de Casteljau.

Pour une taille N fixée, il y a deux matrices G et D définies par

$$[G]_{i,j} = \begin{cases} B_i^j(1/2) & \text{si } j < i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
$$[D]_{i,j} = \begin{cases} B_i^{N-j}(1/2) & \text{si } j < i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

### 4.3.1 Condition de racine

Une fois les coefficients de Bernstein obtenues dans un intervalle  $[a, b]$ . On peut regarder s'il y a un ou plusieurs changements de signe dans les coefficients de Bernstein, pour savoir s'il y a une racine dans cet intervalle d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Cela garantie l'existence de la racine dans l'intervalle. S'il n'y a pas de racine dans l'intervalle on peut l'abandonner et répéter le test sur tous les autres intervalles. Spencer M.[10] et Abdou El Karim TAHARI[11] ont décrit cette méthode pour savoir l'existence d'une racine.

## 4.4 Méthode pour calculer la racine

L'utilisation de la base de Bernstein pour isoler la racine permet de garantir la convergence des algorithmes classique, comme la méthode de newton ou par dichotomie. Puisque nous faisons un solveur en base de Bernstein nous avons décidé d'utiliser les points de contrôle de la courbe de Bézier explicite, pour rester en base de Bernstein pour ne pas utiliser la base canonique du polynôme.

## 4.5 Algorithme Principale

On va représenter les polynômes de Bernstein sous forme de matrice, comme on peut représenter les polynômes  $f(x) = a_0 + a_1 * x + a_2 * x^2 + \dots, a_n * x^n$  sous la forme  $f(X) = XF$

Avec  $X = (1, x, x^2, \dots, x^n)$  pour variable et  $F = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)^T$

On suivra en partie la méthode détaillée dans [11].

La conversion de entre la base canonique et la base de Bernstein est une application linéaire, représentable par une matrice  $M$  de taille  $(n+1) \times (n+1)$  telle que  $B = X.M$ ,  $M$  est construite par les coefficients de la base de Bernstein.

La matrice  $B$  représente la base de Bernstein  $B = (B_{0,n}(t), B_{1,n}(t), \dots, B_{n,n}(t))$

Pour un polynôme de degrés 3 sur l'intervalle  $[0,1]$  on a :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour faire le changement de base, on utilise le fait que  $B=X.M$  on obtient :

$$f(x) = X.F$$

$$f(x) = (B.M^{-1}).F$$

$$f(x) = B.P$$

$B$  représente les polynômes de Bernstein tandis que,  $P = (y_0, y_1, \dots, y_n)^T$  représente les coefficients de Bernstein, ils peuvent facilement transformer en points de contrôle de la courbe de Bézier explicite avec  $P_k = (a + \frac{k}{n}(b-a), y_k)$   $a = 0$  et  $b = 1$ .

Maintenant que nous avons les points de contrôle on peut faire le test pour savoir s'il y a une racine dans l'intervalle choisi, ici  $[0,1]$ , s'il n'y a pas de racine dans ce cas on peut arrêter de calculer, s'il y a une racine et que l'intervalle est trop grand pour calculer précisément la racine on fera l'algorithme de Casteljau.

Puisque l'on utilise des matrices, on se servira des matrices de Casteljau pour diviser l'intervalle en 2.

Par exemple pour le degré 3 on a la matrice gauche  $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$  On fait  $P_{\text{gauche}} = G.P$

et  $P_{\text{droite}} = D.P$

$P_{\text{gauche}}$  sont les points de control pour l'intervalle  $[0, \frac{1}{2}]$ .

$P_{\text{droite}}$  sont les points de control pour l'intervalle  $[\frac{1}{2}, 1]$ .

A partir de là on peut refaire le test pour savoir s'il y a une racine et refaire l'algorithme de Casteljau tant que la taille de l'intervalle est supérieur à la précision voulue.

Une fois que la précision voulue est atteinte on peut calculer approximativement où se trouve la racine dans l'intervalle, il y a plusieurs méthodes pour faire cela par exemple tracer une droite d'équation  $g = ax + b$  entre le point à gauche de la racine et à droite et on résout l'équation pour  $ax + b = 0$  ce qui donne une approximation de la racine, on peut aussi prendre un point de l'intervalle pour approximer la racine si l'intervalle est suffisamment petit l'erreur sera acceptable. Méthode en traçant un segment d'équation  $y = ax + b$  entre le point à gauche de la racine et à droite de la racine, et résoudre l'équation pour  $ax + b = 0$ .

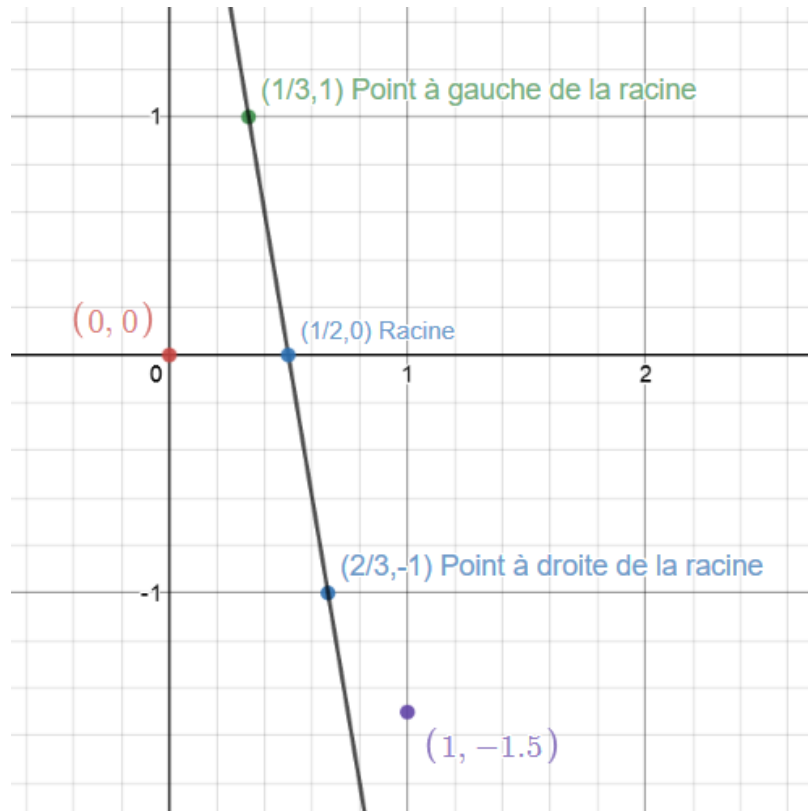


FIGURE 6 – Tracé du segment entre les 2 points qui encadre la racine

#### 4.6 Note sur notre algorithme

Le calcul de toutes les matrices de changement de base et de Casteljau, pour chaque degré n'est pas nécessaire. On peut utiliser la matrice de passage vers la base de Bernstein, en utilisant la matrice pour les polynômes de degré 5 pour des polynômes de degré inférieur. Il suffit de mettre des coefficients du polynôme à 0. Dans notre approche nous avons privilégié la rapidité des calculs. Le nombre d'opération augmente énormément en fonction des matrices utilisées, car il y a des inversions de matrice et des multiplications entre matrices. Donc utiliser des matrices plus grandes que nécessaire augmente énormément le nombre d'opération et le temps de calcul, au bénéfice du temps de programmation. Donc dans notre approche qui vise à être la plus rapide nous utilisons la matrice adaptée au polynôme. Il a donc fallu calculer les matrices de passage pour les polynômes de degré 3, 4 et 5.

#### 4.7 Conclusion du solveur de Bernstein

Le solveur utilisant les polynômes de Bernstein permet de converger efficacement sur les racines du polynôme, en évitant des calculs inutiles que pourrait faire d'autre solveur qui isole les racines de manière plus naïve. Le solveur a tout de même des limites à partir du degré 20 il devient beaucoup trop lent comparé à d'autres méthodes.



## 5 Conclusion

Les méthodes usuelles sont très rapides pour trouver les racines d'un polynôme, en programmation ces méthodes nécessitent que de très peu de ressources. Elles restent cependant très compliquées à programmer surtout plus le degré du polynôme est important. Pour la méthode de Bernstein, elle est très efficace mais reste plus chère en ressources que les méthodes usuelles. Cela vient du fait que Bernstein demande beaucoup plus de ressources à cause des changements de base. Sa généralité de programmation la rend plus intéressante pour les polynômes de degré inférieur à 20. Au-delà du degré 20 les méthodes usuelles sont plus efficaces et nécessitent moins de ressources.

## Références

- [1] Wikipedia 2019 "*Polynôme Bernstein*". Sur [https://fr.wikipedia.org/wiki/Polynôme\\_de\\_Bernstein](https://fr.wikipedia.org/wiki/Polynôme_de_Bernstein)
- [2] Garnier Lionel, Ellipses, 2007. " *Mathématiques : pour la modélisation géométrique, la représentation 3D et la synthèse d'images.* ".
- [3] Serge Mehl "Résolution complète de l'équation du 3ème degré,". Sur [http://serge.mehl.free.fr/anx/equ3\\_cardan.html](http://serge.mehl.free.fr/anx/equ3_cardan.html)
- [4] Serge Mehl "Résolution complète de l'équation du 4ème degré,". Sur [http://serge.mehl.free.fr/anx/equ4\\_ferrari.html](http://serge.mehl.free.fr/anx/equ4_ferrari.html)
- [5] Wikipedia 2019 "*Équation quintique*". Sur [https://fr.wikipedia.org/wiki/Équation\\_quintique](https://fr.wikipedia.org/wiki/Équation_quintique)
- [6] Wikipedia 2019 "*Méthode de Newton*". Sur [https://fr.wikipedia.org/wiki/Méthode\\_de\\_Newton](https://fr.wikipedia.org/wiki/Méthode_de_Newton)
- [7] Bernard Parisse "*La Méthode de Newton*". Sur <https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/mat249/mat249/node13.html>
- [8] Stéphane Pasquet "*La Méthode de Horner*". <https://www.mathweb.fr/euclide/2018/09/01/la-methode-de-horner/>
- [9] Wikipedia 2018 "*Matrice de Casteljau*". Sur [https://fr.wikipedia.org/wiki/Matrice\\_de\\_Casteljau](https://fr.wikipedia.org/wiki/Matrice_de_Casteljau)
- [10] Spencer, Melvin R, 1994. "*Polynomial real root finding in Bernstein form*".
- [11] AHARI, Abdou El Karim "*Modélisation Géométrique par Contraintes : Solveurs basés sur l'arithmétique des intervalles*". 2011. Thèse de doctorat.