
Polynômes

Exercice 1 Effectuer les divisions euclidiennes de

$$\begin{aligned} &3X^5 + 4X^2 + 1 \text{ par } X^2 + 2X + 3, \\ &3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1 \text{ par } X^3 + X + 2, \\ &X^4 - X^3 + X - 2 \text{ par } X^2 - 2X + 4. \end{aligned}$$

Exercice 2 Effectuer la division selon les puissances croissantes de :

$$X^4 + X^3 - 2X + 1 \text{ par } X^2 + X + 1 \text{ à l'ordre } 2.$$

Exercice 3 Trouver les polynômes P tels que $P + 1$ soit divisible par $(X - 1)^4$ et $P - 1$ par $(X + 1)^4$:

1. en utilisant la relation de Bézout,
2. en considérant le polynôme dérivé P' .

Combien y a-t-il de solutions de degré ≤ 7 ?

Exercice 4 Effectuer la division de $A = X^6 - 2X^4 + X^3 + 1$ par $B = X^3 + X^2 + 1$:

1. Suivant les puissances décroissantes.
2. À l'ordre 4 (c'est-à-dire tel que le reste soit divisible par X^5) suivant les puissances croissantes.

Exercice 5 Effectuer la division euclidienne de $X^5 - 7X^4 - X^2 - 9X + 9$ par $X^2 - 5X + 4$.

Exercice 6 Quels sont les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que P' divise P ?

Exercice 7 Calculer $\text{pgcd}(P, Q)$ lorsque :

1. $P = X^3 - X^2 - X - 2$ et $Q = X^5 - 2X^4 + X^2 - X - 2$,
2. $P = X^4 + X^3 - 2X + 1$ et $Q = X^3 + X + 1$.

Exercice 8 Déterminer le pgcd des polynômes suivants :

$$\begin{aligned} &X^5 + 3X^4 + X^3 + X^2 + 3X + 1 \text{ et } X^4 + 2X^3 + X + 2, \\ &X^4 + X^3 - 3X^2 - 4X - 1 \text{ et } X^3 + X^2 - X - 1, \\ &X^5 + 5X^4 + 9X^3 + 7X^2 + 5X + 3 \text{ et } X^4 + 2X^3 + 2X^2 + X + 1. \end{aligned}$$

Exercice 9 Calculer le pgcd D des polynômes A et B définis ci-dessous. Trouver des polynômes U et V tels que $D = AU + BV$.

1. $A = X^5 + 3X^4 + 2X^3 - X^2 - 3X - 2$ et $B = X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 7X + 6$.
2. $A = X^6 - 2X^5 + 2X^4 - 3X^3 + 3X^2 - 2X$ et $B = X^4 - 2X^3 + X^2 - X + 1$.

Exercice 10 Décomposer dans $\mathbb{R}[X]$, sans déterminer ses racines, le polynôme $P = X^4 + 1$, en produit de facteurs irréductibles.