

# Travaux dirigés N°2 : Corps des nombres complexes

2023 - 2024

On note  $\mathbb{C}$  l'ensemble des nombres complexes. Si  $z$  est un nombre complexe, on note  $\operatorname{Re} z$  sa partie réelle et  $\operatorname{Im} z$  sa partie imaginaire.

**Exercice 1.** Soit  $z \in \mathbb{C}$ . Exprimer  $\operatorname{Re}(iz)$ ,  $\operatorname{Im}(iz)$ ,  $\operatorname{Re}(i\bar{z})$ ,  $\operatorname{Re}(z^2)$ ,  $\operatorname{Im}(z^3)$  en fonction de  $\operatorname{Re} z$  et  $\operatorname{Im} z$ .

**Exercice 2.** Mettre sous formes cartésienne, exponentielle et trigonométrique les nombres complexes suivants :

$$\frac{1}{4i}, \quad \frac{3+i}{2-3i}, \quad \frac{1}{3+i} + \frac{1}{3-i}, \quad \frac{2+i}{1-2i} + \frac{i}{1+i}.$$

**Exercice 3.**

a) Soit  $a$  et  $b$  deux nombres complexes. Calculer  $|a+b|^2$  en fonction de  $|a|^2$ ,  $|b|^2$  et  $\bar{a}b$ .

b) Soit  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z \neq -i$ . Montrer que  $\left| \frac{1+iz}{1-iz} \right| = 1$  si et seulement si  $z$  est réel.

**Exercice 4.** Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(1+i)^n + (1-i)^n$  est réel

**Exercice 5.** Dessiner les ensembles déterminés dans le plan complexe par les conditions suivantes :

a)  $|z| < 1$

b)  $z + \bar{z} = 1$

c)  $z - \bar{z} = i$

d)  $|z-2| = |z+2|$

e)  $z + \bar{z} = z^2$

f)  $|z-3+5i| = 4$ .

**Exercice 6.** Calculer la somme  $\sum_{k=0}^{10} i^k$ . Mettre le résultat sous forme cartésienne.

**Exercice 7.** Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

$$-4, \quad 3i, \quad 2e^{-4i}, \quad -8e^{\frac{3\pi}{7}i},$$

$$-1+i\sqrt{3}, \quad \frac{1+i}{\sqrt{3}-i}, \quad (\sqrt{3}-i)^{2013}.$$

**Exercice 8.** Mettre sous formes cartésienne, exponentielle et trigonométrique les nombres complexes suivants :

$$(1-i)^{64}, \quad \frac{(1-i)^{10}}{(1+i)^6}, \quad \left( \frac{1-i}{\sqrt{3}+i} \right)^{12}.$$

**Exercice 9.** Linéariser les expressions suivantes :

$$\sin^4 x, \quad \cos^5 x, \quad \sin^4 x \cos^3 x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Exercice 10.** Soit  $a \in \mathbb{R}$ . Exprimer  $\cos 4a$  en fonction de  $\cos a$ . Exprimer  $\sin 6a$  en fonction de  $\sin a$ .

**Exercice 11.** Soit  $a \in \mathbb{R}$ . Exprimer  $\cos 5a$  en fonction de  $\cos a$ , puis  $\sin 5a$  en fonction de  $\sin a$ . En utilisant le fait que  $\cos \frac{5\pi}{10} = 0$ , donner la valeur de  $\cos \frac{\pi}{10}$ .

**Exercice 12.** Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes :

$$\text{a) } z^6 = 27i, \quad \text{b) } z^3 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}.$$

**Exercice 13.** Calculer les racines carrées des nombres complexes suivants :

$$4\sqrt{3} + i, \quad 6 - 8i, \quad 5 - 12i, \quad 5 + 12i.$$

**Exercice 14.** Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes :

$$\text{a) } 2z^2 - 4z + 10 = 0, \quad \text{b) } z^2 - 6z + 6 + 4i = 0, \quad \text{c) } z^2 + (2 - 2i)z = 3i + 1.$$

En utilisant le résultat de c), résoudre sans calcul l'équation  $z^2 + (2 + 2i)z = -3i + 1$ .

**Exercice 15.** Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation :  $(z^2 - 1)^4 = 1$ .

★ **Exercice 16.** Soit  $\theta \in [0, 2\pi[$ .

a) Déterminer le module et un argument de  $z = 1 + e^{i\theta}$ . *Indication : on pourra mettre  $e^{i\frac{\theta}{2}}$  en facteur.*

b) En déduire le module et un argument de  $(1 + e^{i\theta})^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).

c) Soient  $a$  et  $b$  appartenant à  $\mathbb{R}$ . Calculer  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{i(a+bk)}$ .

En déduire  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(a + bk)$ .

★ **Exercice 17.** Soit  $n \geq 1$  un entier

a) Pour tout  $\theta$  réel, calculer la somme  $\sum_{k=1}^n e^{ik\theta}$  en fonction de  $\sin \frac{\theta}{2}$ ,  $\sin \frac{n\theta}{2}$  et  $e^{\frac{i(n+1)\theta}{2}}$ . En

déduire  $\sum_{k=1}^n \cos(k\theta)$  et  $\sum_{k=1}^n \sin(k\theta)$ .

b) Calculer  $\sum_{k=-n}^n e^{ik\theta}$  puis, pour  $N \geq 1$ ,  $\sum_{n=0}^N \sum_{k=-n}^n e^{ik\theta}$ . Vérifier que cette dernière quantité est toujours un nombre réel positif ou nul.