

此题其实就是扩展欧几里德算法—求解不定方程，线性同余方程。

设过 s 步后两青蛙相遇，则必满足以下等式：

$$(x+m*s)-(y+n*s)=k*1 (k=0, 1, 2, \dots)$$

稍微变一下形得：

$$(n-m)*s+k*1=x-y$$

令 $n-m=a$, $k=b$, $x-y=c$, 即

$$a*s+b*1=c$$

只要上式存在整数解，则两青蛙能相遇，否则不能。

首先想到的一个方法是用两次 for 循环来枚举 $s, 1$ 的值，看是否存在 $s, 1$ 的整数解，若存在则输入最小的 s ,

但显然这种方法是不可取的，谁也不知道最小的 s 是多大，如果最小的 s 很大的话，超时是明显的。

其实这题用欧几里德扩展原理可以很快的解决，先看下什么是欧几里德扩展原理：

欧几里德算法又称辗转相除法，用于计算两个整数 a, b 的最大公约数。其计算原理依赖于下面的定理：

定理： $\gcd(a, b) = \gcd(b, a \bmod b)$

证明： a 可以表示成 $a = kb + r$ ，则 $r = a \bmod b$

假设 d 是 a, b 的一个公约数，则有

$d|a$, $d|b$ ，而 $r = a - kb$ ，因此 $d|r$

因此 d 是 $(b, a \bmod b)$ 的公约数

假设 d 是 $(b, a \bmod b)$ 的公约数，则

$d \mid b$, $d \mid r$, 但是 $a = kb + r$

因此 d 也是 (a, b) 的公约数

因此 (a, b) 和 $(b, a \bmod b)$ 的公约数是一样的，其最大公约数也必然相等，得证

欧几里德算法就是根据这个原理来做的，其算法用 C++ 语言描述为：

```
int Gcd(int a, int b)
{
    if(b == 0)
        return a;
    return Gcd(b, a % b);
}
```

当然你也可以写成迭代形式：

```
int Gcd(int a, int b)
{
    while(b != 0)
    {
        int r = b;
        b = a % b;
        a = r;
    }
    return a;
}
```

本质上都是用的上面那个原理。

补充：扩展欧几里德算法是用来在已知 a , b 求解一组 x , y 使得 $a*x+b*y=\text{Gcd}(a, b)$ (解一定存在，根据数论中的相关定理)。扩展欧几里德常用在求解模线性方程及方程组中。下面是一个使

用 C++ 的实现：

```
int exGcd(int a, int b, int &x, int &y)
{
    if(b == 0)
    {
        x = 1;
        y = 0;
        return a;
    }
    int r = exGcd(b, a % b, x, y);
    int t = x;
    x = y;
    y = t - a / b * y;
    return r;
}
```


把这个实现和 Gcd 的递归实现相比，发现多了下面的 x, y 赋值过程，这就是扩展欧几里德算法的精髓。

可以这样思考：

对于 $a' = b$, $b' = a \% b$ 而言，我们求得 x, y 使得 $a'x + b'y = \text{Gcd}(a', b')$

由于 $b' = a \% b = a - a / b * b$ (注：这里的/是程序设计语言中的除法)

那么可以得到：

$$\begin{aligned} a'x + b'y &= \text{Gcd}(a', b') \implies \\ bx + (a - a / b * b)y &= \text{Gcd}(a', b') = \text{Gcd}(a, b) \implies \\ ay + b(x - a / b * y) &= \text{Gcd}(a, b) \end{aligned}$$

因此对于 a 和 b 而言，他们的相对应的 p, q 分别是 y 和 $(x - a/b*y)$ 。

在网上看了很多关于不定方程求解的问题，可都没有说全，都只说了一部分，看了好多之后才真正弄清楚不定方程的求解全过程，步骤如下：

求 $a * x + b * y = n$ 的整数解。

1、先计算 $\text{Gcd}(a, b)$ ，若 c 不能被 $\text{Gcd}(a, b)$ 整除，则方程无整数；否则，在方程两边同时除以 $\text{Gcd}(a, b)$ ，得到新的不定方程 $a' * x + b' * y = n'$ ，此时 $\text{Gcd}(a', b') = 1$ ；

2、利用上面所说的欧几里德算法求出方程 $a' * x + b' * y = 1$ 的一组整数解 x_0, y_0 ，则 $n' * x_0, n' * y_0$ 是方程 $a' * x + b' * y = n'$ 的一组整数解；

3、根据数论中的相关定理，可得方程 $a' * x + b' * y = n'$ 的所有整数解为：

$$\begin{aligned} x &= n' * x_0 + b' * t \\ y &= n' * y_0 - a' * t \\ (t \text{ 为整数}) \end{aligned}$$

上面的解也就是 $a * x + b * y = n$ 的全部整数解。

下面来看看我这题的代码：

```
# include <stdio.h>
__int64 gcd(__int64 a, __int64 b)//求 a, b 的最大公约数
{
if(b==0)
return a;
```

```

return gcd(b, a%b);
    }
    void exgcd(__int64 a, __int64 b, __int64 &m, __int64 &n)//求  $a * x + b$ 
* y = Gcd(a, b) 的一组整数解，结果储存在 m, n 中
    {
if (b==0)
{
    m=1;
    n=0;
    return ;
}
exgcd(b, a%b, m, n);
__int64 t;
t=m;
m=n;
n=t-a/b*n;
    }
    int main()
    {
__int64 x, y, m, n, l, a, b, c, k1, k2, r, t;
while (scanf("%I64d%I64d%I64d%I64d%I64d", &x, &y, &m, &n, &l) != EOF)
{
    a=n-m;
    b=l;
    c=x-y;
    r=gcd(a, b);
    if (c%r)//如果 c 不能被 r 整除，则由数论中的相关定理可知整数解一定不存
在
    {
        printf("Impossible\n");
        continue;
    }
    a/=r;
    b/=r;
    c/=r;
    exgcd(a, b, k1, k2); //求  $a*k1+b*k2=Gcd(a, b)$  的整数解，此时  $Gcd(a, b)=1$ 
    t=c*k1/b; //见注 1
    k1=c*k1-t*b;
    if (k1<0)
        k1+=b;
    printf("%I64d\n", k1);
}
return 0;
    }

```

注 1:

此时方程的所有解为: $x = c * k1 + b * t$, 令 $x=0$ 可求出当 x 最小时的 t 的取值, 这样求出的 x 可能小于 0, 当其小于 0 时加上 b 即可。