

Nonlinear Information Processing

University of Chinese Academy of Sciences

Spring 2024

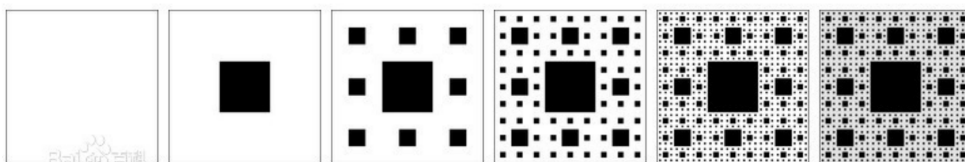
Zuobing Wu

Homework 1

Chenkai GUO

2024.3.27

1. 已知 *Sierpinski* 地毯的构造：将一个实心正方形划分为 9 个小正方形，去掉中间的小正方形，再对余下的小正方形重复这一操作便能得到谢尔宾斯基地毯。如图：



求 *Sierpinski* 地毯的面积和分数维。

解：由题可得，假设该实心正方形的边长为 1，则可得初始正方形面积 $S_0 = 1$ ，则：

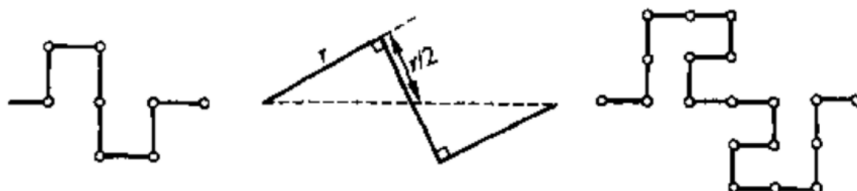
$$\begin{aligned}
 S_1 &= 1 - 1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \\
 S_2 &= 1 - 1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 8 \times \left(\frac{1}{9}\right)^2 \\
 S_3 &= 1 - 1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 8 \times \left(\frac{1}{9}\right)^2 - 8^2 \times \left(\frac{1}{27}\right)^2 \\
 S_n &= 1 - 1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 8 \times \left(\frac{1}{9}\right)^2 - \dots - \frac{1}{8} \times \left(\frac{8}{9}\right)^n
 \end{aligned}$$

因此当 $n \rightarrow \infty$ 时， $\sum_1^n \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^n \rightarrow 1$ ，可得 $S_n = 0$

根据 Hausdorff 维数，有边扩大 $m = 3$ 倍，面积扩大 $K = 8$ 倍，故 *Sierpinski* 地毯的分数维为：

$$D_H = \frac{\log K}{\log m} = \frac{\log 8}{\log 3} = 1.894$$

2. 已知下列生成元，求人造海岸线的分数维。



解：由题可得：

①生成元 1: 局部构成 $N = 8$, 相似比 $\beta = \frac{1}{4}$, 因此：

$$D_s = \frac{\log N}{\log(\frac{1}{\beta})} = \frac{\log 8}{\log \frac{1}{4}} = 1.5$$

②生成元 2: 局部构成 $N = 3$, 相似比 $\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$, 因此：

$$D_s = \frac{\log N}{\log(\frac{1}{\beta})} = \frac{\log 3}{\log \frac{1}{\sqrt{5}}} = 1.365$$

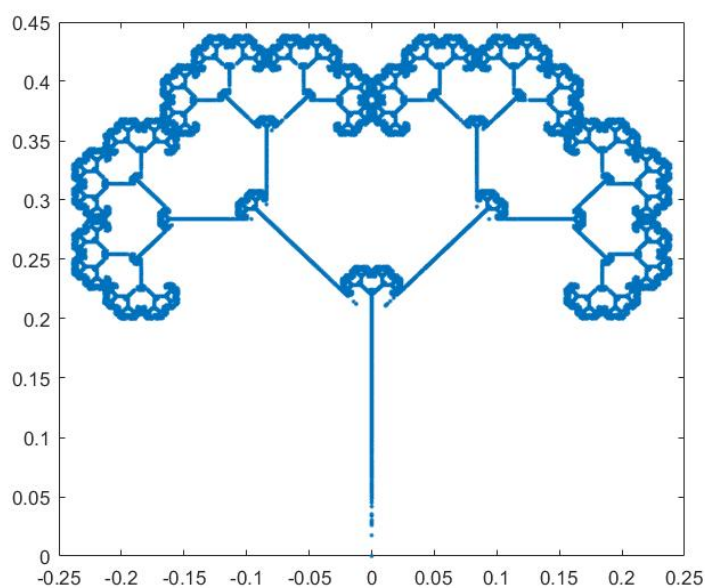
③生成元 3: 局部构成 $N = 18$, 相似比 $\beta = \frac{1}{6}$, 因此：

$$D_s = \frac{\log N}{\log(\frac{1}{\beta})} = \frac{\log 18}{\log \frac{1}{6}} = 1.613$$

3. 根据下面给定的 IFS 码表生成分形树。

ω	a	b	c	d	e	f	p
1	0	0	0	0.5	0	0	0.05
2	0.42	-0.42	0.42	0.42	0	0.2	0.4
3	0.42	0.42	-0.42	0.42	0	0.2	0.4
4	0.1	0	0	0.1	0	0.2	0.15

解，根据所给 IFS 码生成的分形树如下：



4. 画出下列参数下的 *Julia* 集

$$C = -1, m = 2$$

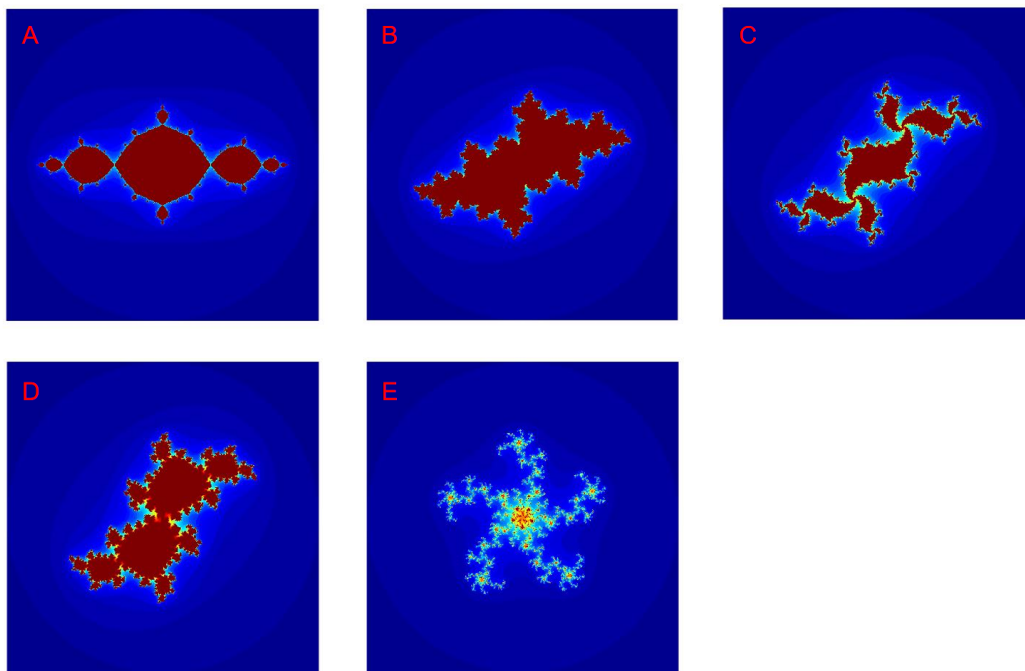
$$C = -0.5 + 0.5i, m = 2$$

$$C = -0.2 + 0.75i, m = 2$$

$$C = 0.64i, m = 2$$

$$C = 0.188 + 0.78602i, m = 5$$

解，如下图所示，*ABCDE* 图分别代表题干的五个 *Julia* 集生成条件：



5. 已知广义维数为：

$$D_q = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{(q-1)} \frac{\log \sum_{i=1}^N p_i(\delta)^q}{\log \delta}$$

试证明：当 $q = 1$ 时， $D_q = D_1$ 为信息维数。

解：由题可得，根据洛必达法则有：

$$\begin{aligned} D_1 &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \sum_{i=1}^N p_i(\delta)^q}{(q-1) \log \delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{(\sum_{i=1}^N p_i(\delta)^q)^{-1} \sum_{i=1}^N p_i(\delta)^q \log p_i(\delta)}{\log \delta} \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^N p_i(\delta) \log p_i(\delta)}{(\sum_{i=1}^N p_i(\delta)) \log \delta} = - \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{I(\delta)}{\log \delta} \quad \left(\sum_{i=1}^N p_i(\delta) = 1 \right) \end{aligned}$$

当 $q = 1$ 时， $D_q = D_1$ 为信息维数，证毕。