

Stochastic Process

University of Chinese Academy of Sciences

Fall 2023

Yingfei Sun

Homework 15

Chenkai GUO

2024.1.12

1. 设有随机过程 $Y(t) = t^2 X - 1, 0 < t < \infty$, X 是正态随机变量, 期望为 0, 方差为 σ_X^2 。

(1) 过程 $Y(t)$ 是否正态过程? 是否平稳过程? 均需说明理由;

(2) 过程 $Z(t) = \int_0^t Y(s) ds, t > 0$, 在均方可积意义下是否存在? 存在的话, 试求其相关函数。

(1) 由题可得: $X \sim N(0, \sigma_X^2)$, 任取 $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$, 有:

$$\begin{pmatrix} Y(t_1) \\ Y(t_2) \\ \vdots \\ Y(t_n) \end{pmatrix}_{n \times 1} = \begin{pmatrix} t_1^2 X - 1 \\ t_2^2 X - 1 \\ \vdots \\ t_n^2 X - 1 \end{pmatrix}_{n \times 1} = \begin{pmatrix} t_1^2 \\ t_2^2 \\ \vdots \\ t_n^2 \end{pmatrix}_{n \times 1} \cdot (X) - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}_{n \times 1}$$

因此 $Y(t)$ 为正态过程;

计算 $Y(t)$ 的均值和相关函数:

$$E\{Y(t)\} = E\{t^2 X - 1\} = t^2 E\{X\} - 1 = -1$$

$$\begin{aligned} R_Y(s, t) &= E\{Y(s)Y(t)\} = E\{(s^2 X + 1)(t^2 X + 1)\} \\ &= s^2 t^2 E\{X^2\} + (s^2 + t^2)E\{X\} + 1 \\ &= s^2 t^2 \sigma_X^2 + 1 \end{aligned}$$

故 $Y(t)$ 不是 (宽) 平稳过程。

(2) 由 (1) 可得, 当 $s = t$ 时, $R_Y(t, t) = t^4 \sigma_X^2 + 1$, 因此过程 $Y(t)$ 在 (t_0, t_0) 上连续, 因此 $Y(t)$ 均方连续, 因此在均方可积意义下存在。现计算 $Z(t)$ 的相关函数:

$$\begin{aligned}
R_Z(s, t) &= E\{Z(s)Z(t)\} = E\left\{\int_0^s Y(u)du \int_0^t Y(v)dv\right\} \\
&= \int_0^t \int_0^s E\{Y(u)Y(v)\} dudv \\
&= \int_0^t \int_0^s (u^2 v^2 \sigma_X^2 + 1) dudv \\
&= \frac{1}{9} s^3 t^3 \sigma_X^2 + st
\end{aligned}$$

2. 设 $B(t), t \geq 0$ 是初值为零的标准布朗运动, 令 $\xi(t) = (1-t)B[t/(1-t)], 0 \leq t < 1$, $\eta(t) = e^{-at}B(e^{2at} - 1), t \geq 0, a > 0$, 试求随机过程 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 的均值函数和相关函数, 并说明 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 是否是正态过程.

由题可得:

$$E\{\xi(t)\} = E\left\{(1-t)B\left[\frac{t}{1-t}\right]\right\} = (1-t)E\left\{B\left[\frac{t}{1-t}\right]\right\} = 0$$

$$\begin{aligned}
R_\xi(s, t) &= E\{\xi(s)\xi(t)\} = E\left\{(1-s)B\left[\frac{s}{1-s}\right](1-t)B\left[\frac{t}{1-t}\right]\right\} \\
&= (1-s)(1-t)E\left\{B\left[\frac{s}{1-s}\right]B\left[\frac{t}{1-t}\right]\right\} \\
&= (1-s)(1-t)\min\left(\frac{s}{1-s}, \frac{t}{1-t}\right)
\end{aligned}$$

$$E\{\eta(t)\} = E\{e^{-at}B(e^{2at} - 1)\} = e^{-at}E\{B(e^{2at} - 1)\} = 0$$

$$\begin{aligned}
R_\eta(s, t) &= E\{\eta(s)\eta(t)\} = E\{e^{-as}B(e^{2as} - 1)e^{-at}B(e^{2at} - 1)\} \\
&= e^{-a(s+t)}E\{B(e^{2as} - 1)B(e^{2at} - 1)\} \\
&= e^{-a(s+t)} \cdot \min(e^{2as} - 1, e^{2at} - 1)
\end{aligned}$$

任取 $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, 有:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \xi(t_1) \\ \xi(t_2) \\ \vdots \\ \xi(t_n) \end{pmatrix}_{n \times 1} &= \begin{pmatrix} (1-t_1)B[\frac{t_1}{1-t_1}] \\ (1-t_2)B[\frac{t_2}{1-t_2}] \\ \vdots \\ (1-t_n)B[\frac{t_n}{1-t_n}] \end{pmatrix}_{n \times 1} = \begin{pmatrix} 1-t_1 \\ 1-t_2 \\ \vdots \\ 1-t_n \end{pmatrix}_{n \times 1} \cdot \begin{pmatrix} B[\frac{t_1}{1-t_1}] \\ B[\frac{t_2}{1-t_2}] \\ \vdots \\ B[\frac{t_n}{1-t_n}] \end{pmatrix}_{n \times 1} \\
\begin{pmatrix} \eta(t_1) \\ \eta(t_2) \\ \vdots \\ \eta(t_n) \end{pmatrix}_{n \times 1} &= \begin{pmatrix} e^{-at_1}B(e^{2at_1} - 1) \\ e^{-at_2}B(e^{2at_2} - 1) \\ \vdots \\ e^{-at_n}B(e^{2at_n} - 1) \end{pmatrix}_{n \times 1} = \begin{pmatrix} e^{-at_1} \\ e^{-at_2} \\ \vdots \\ e^{-at_n} \end{pmatrix}_{n \times 1} \cdot \begin{pmatrix} B(e^{2at_1} - 1) \\ B(e^{2at_2} - 1) \\ \vdots \\ B(e^{2at_n} - 1) \end{pmatrix}_{n \times 1}
\end{aligned}$$

因此 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 均为正态过程。

3. * 设 $\{B(t), t \geq 0\}$ 是标准的布朗运动, 试求 $B(t)$ 与 $\int_0^1 B(u)du$ 的相关系数, 其中:
 $0 \leq t \leq 1$

由题可得:

$$\begin{aligned}
 E\{B(t)\} &= 0, \text{Var}\{B(t)\} = t \\
 E\left\{\int_0^1 B(u)du\right\} &= \int_0^1 E\{B(u)\}du = 0 \\
 E\left\{\int_0^1 B(u)du \int_0^1 B(v)dv\right\} &= \int_0^1 \int_0^1 E\{B(u)B(v)\}dudv \\
 &= \int_0^1 \int_0^1 \min(u, v)dudv \\
 &= \int_0^1 \int_v^1 v dudv + \int_0^1 \int_u^1 u dvdu \\
 &= \int_0^1 (v - v^2)dv + \int_0^1 (u - u^2)du = \frac{1}{3} \\
 \text{Var}\left\{\int_0^1 B(u)du\right\} &= \frac{1}{3} - 0^2 = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

又因为 $E\{B(t)\} = 0, E\left\{\int_0^1 B(u)du\right\} = 0$, 有:

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}\left\{B(t), \int_0^1 B(u)du\right\} &= E\left\{B(t), \int_0^1 B(u)du\right\} \\
 &= E\left\{B(t) \cdot \int_0^1 B(u)du\right\} \\
 &= \int_0^1 E\{B(t)B(u)\}du \\
 &= \int_0^1 \min(t, u)du \\
 &= \int_0^t u du + \int_t^1 t du \\
 &= \frac{1}{2}t^2 + t - t^2 = -\frac{1}{2}t^2 + t
 \end{aligned}$$

根据相关系数的定义, 有:

$$r = \frac{\text{Cov}\{B(t), \int_0^1 B(u)du\}}{\sqrt{\text{Var}\{B(t)\} \text{Var}\{\int_0^1 B(u)du\}}} = \frac{-\frac{1}{2}t^2 + t}{\sqrt{t \cdot \frac{1}{3}}} = \frac{\sqrt{3}t}{2}(-t + 2), (0 \leq t \leq 1)$$

* 星号题为第六章非作业布置的课后习题

4. * 已知 $B(t), t \geq 0$ 是初值为 0 的标准布朗运动, 求在 $B(1) = 0$ 时 $B(t) (0 < t < 1)$ 的条件概率分布密度函数。

由题可得, 根据条件概率分布的定义, 有:

$$\begin{aligned} f_{B(t)|B(1)}(y|x) &= \frac{f_{B(t)|B(1)}(x, y)}{f_{B(1)}(x)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{y^2}{2t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-t)}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2(1-t)}}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t(1-t)}} e^{-\left(\frac{y^2}{2t} + \frac{(y-x)^2}{2(1-t)} + \frac{x^2}{2}\right)} \end{aligned}$$

当 $B(1) = 0$ 时, 则:

$$f_{B(t)|B(1)}(y|x=0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t(1-t)}} e^{-\frac{y^2}{2t(1-t)}}$$

5. * 已知 $B(t), t \geq 0$ 是初值为零的标准布朗运动, 令 $\xi(t) = \sqrt{a}B(t) + b, \eta(t) = B(at) + b$, 其中常数 $a > 0, b > 0, t \geq 0$ 。试分析此两随机过程的前二阶矩是否相同? 此两过程是否同分布? 说明理由。

由题可得:

$$E\{\xi(t)\} = E\{\sqrt{a}B(t) + b\} = \sqrt{a} \cdot E\{B(t)\} + b = b$$

$$\begin{aligned} E\{\xi^2(t)\} &= E\{aB^2(t) + 2\sqrt{a} \cdot bB(t) + b^2\} \\ &= -aE\{B^2(t)\} + 2\sqrt{a} \cdot b \cdot E\{B(t)\} + b^2 \\ &= at + b^2 \end{aligned}$$

$$E\{\eta(t)\} = E\{B(at) + b\} = E\{B(at)\} + b = b$$

$$\begin{aligned} E\{\eta^2(t)\} &= E\{B^2(at) + 2bB(at) + b^2\} \\ &= E\{B^2(at)\} + 2b \cdot E\{B(at)\} + b^2 \\ &= at + b^2 \end{aligned}$$

又因为 $B(t) \sim N(0, t), B(at) \sim N(0, at)$, 因此 $\xi(t) \sim N(0, at), \eta(t) \sim N(0, at)$, 综上, 过程 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 前二阶矩相同且二者同分布。

6. * 设 $\{B(t), t \geq 0\}$ 为零初值的标准布朗运动, 试求:

- (1) 在 $B(t_1) = x_0$ 的条件下, $B(t_2)$ 的条件概率密度函数, 其中 $t_2 > t_1$;
(2) 布朗运动的对称性, 即证明: 当 $t_0 > 0, t > 0$ 时, 有:

$$P\{B(t_0 + t) > x_0 \mid B(t_0) = x_0\} = P\{B(t_0 + t) \leq x_0 \mid B(t_0) = x_0\} = \frac{1}{2}$$

- (3) 令 $T_a = \inf\{t : t > 0, B(t) = a\}$, T_a 表示布朗运动首次到达 a 的时刻, 当 $a > 0$ 时, 试求 T_a 的分布函数。

(1) 有题可得:

$$f_{B(t_2)|B(t_1)}(y|x=x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_2-t_1)}} e^{-\frac{(y-x_0)^2}{2(t_2-t_1)}}$$

(2) 有题可得:

$$\begin{aligned} P\{B(t_0+t) \leq x_0, | B(t_0) = x_0\} &= \int_{-\infty}^{x_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(y-x_0)^2}{2t}} dy \\ &= \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{y^2}{2t}} dy = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

因此 $P\{B(t_0+t) > x_0 | B(t_0) = x_0\} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, 证毕

(3) 由题可得:

$$P\{B(t) > a\} = P\{B(t) > a | T_a \leq t\} \cdot P\{T_a \leq t\} + P\{B(t) > a | T_a > t\} \cdot P\{T_a > t\}$$

又因为从零时刻出发, $P\{B(t) > a | T_a > t\} = 0$, 且根据 (2) 中的布朗运动对称性性质, 有:

$$P\{B(t) \leq a | T_a \leq t\} = P\{B(t) > a | T_a \leq t\} = \frac{1}{2}$$

因此有:

$$\begin{aligned} P\{T_a \leq t\} &= 2 \cdot P\{B(t) > a\} = 2 \left[1 - P\{B(t) \leq a\} \right] \\ &= 2 - \int_0^a \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2t}} dx \end{aligned}$$

7. * 设 $B(t), t \geq 0$ 是初值为零的标准布朗运动, 令:

$$X(t) = B(t) - tB(1), 0 \leq t \leq 1$$

称 $\{X(t), 0 \leq t \leq 1\}$ 为布朗桥过程。

(1) 试问布朗桥过程是否为正态过程, 为什么?

(2) 试求布朗桥过程的均值函数和相关函数;

(3) 试求布朗桥过程的一维分布密度函数。

(1) 由题可得, 任取 $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, 有:

$$\begin{pmatrix} X(t_1) \\ X(t_2) \\ \vdots \\ X(t_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B(t_1) - t_1 B(1) \\ B(t_2) - t_2 B(1) \\ \vdots \\ B(t_n) - t_n B(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -t_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -t_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B(1) \\ B(t_1) \\ B(t_2) \\ \vdots \\ B(t_n) \end{pmatrix}$$

因此布朗桥过程是正态过程。

(2) 由题可得:

$$E\{x(t)\} = E\{B(t) - tB(1)\} = E\{B(t)\} + t \cdot E\{B(1)\} = 0$$

$$\begin{aligned} R_X(s, t) &= E\{X(s)X(t)\} = E\{[B(s) - sB(1)][B(t) - tB(1)]\} \\ &= E\{B(s)B(t)\} - (s+t)E\{B(1)\} + stE\{B^2(1)\} \\ &= \min(s, t) + st \end{aligned}$$

(3) 由题可得: $\because B(t) \sim N(0, t), X(t) = B(t) - tB(1) \quad \therefore X(t) \sim N(0, t - t^2)$

因此有:

$$f_{X(t)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-t^2)}} e^{-\frac{x^2}{2(t-t^2)}}$$