Stochastic Process

University of Chinese Academy of Sciences

Fall 2023

Yingfei Sun

Homework 12

Chenkai GUO

2023.12.18

1. 设 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是一实的零初值正交增量过程，且 $X(t) \sim N(\mu, \sigma^2 t)$。令 $Y(t) = 2X(t) - 1, t \geq 0$。试求过程 $\{Y(t), t \geq 0\}$ 的相关函数 $R_X(s,t)$。

   由题可得：令 $s > 0, t > 0$，则有：

$$\begin{aligned}
R_Y(s,t) = E\{Y(s)\overline{Y(t)}\}^2 &= E\left\{[2X(s)-1]\overline{[2X(t)-1]}\right\} \\
&= E\{4X(s)X(t) - 2X(s) - 2X(t) + 1\} \\
&= 4E\{X(s)X(t)\} - 2\underbrace{E\{X(s)\}}_{\mu} - 2\underbrace{E\{X(t)\}}_{\mu} + 1
\end{aligned}$$

   对正交增量过程 $X(t)$，有：

$$R_X(s,t) = F\big(min(s,t)\big) = E\big\{|X(s)|^2\big\} = \mu^2 + \sigma^2 min(s,t)$$

   因此 $R_Y(s,t) = 4\mu^2 + 4\sigma^2 min(s,t) - 4\mu + 1 = (2\mu-1)^2 + 4\sigma^2 \min(t,s)$

2. 设有随机过程 $X(t) = 2Z\sin(t+\Theta), -\infty < t < +\infty$，其中 Z Θ 是相互独立的随机变量，$Z \sim N(0,1)$，$P(\Theta = \pi/4) = P(\Theta = -\pi/4) = \frac{1}{2}$。问过程 $X(t)$ 是否为均方可积过程？说明理由。

   由题可得，$E\{Z^2\} = 0^2 + 1 = 1$，令 $0 < s < t$：

$$\begin{aligned}
R_X(s,t) &= E\{2Z\sin(s+\Theta) \cdot 2Z\sin(t+\Theta)\} \\
&= 4E\left\{Z^2\right\} \cdot E\{\sin(s+\Theta)\sin(t+\Theta)\} \\
&= 4E\{\sin(s+\Theta)\sin(t+\Theta)\} \\
&= -2E\{\cos(s+t+2\Theta) + \cos(s-t)\} \\
&= -2\mathrm{E}\{\cos(s+t+2\Theta)\} - 2\cos(t-s)
\end{aligned}$$

其中，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\left\{\cos\left(s+t+2\Theta\right)\right\} &= \sum_{\theta} E\Big\{\cos(s+t+2\theta)|\Theta=\theta\Big\}P\left(\Theta=\theta\right) \\
&= -\sin(s+t)\cdot\frac{1}{2}+\sin(s+t)\cdot\frac{1}{2}=0
\end{aligned}
$$

因此有：$R_X\left(s,t\right)=-2\cos\left(t-s\right)=-2\cos\tau$，其中，$\tau=t-s$；可见，过程 $X(t)$ 是（宽）平稳过程，当 $\tau=0$ 时，$R_X(\tau)=R_X(0)=-2$ 在 $\tau=0$ 处连续，因此过程 $X(t)$ 均方连续，故过程 $X(t)$ 一定均方可积。

3. 设随机过程 $\xi(t)=X\cos 2t+Y\sin 2t,-\infty<t<+\infty$，其中随机变量 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 独立同分布。

(*1*) 如果 $X(t)\sim U(0,1)$，问过程 $\xi(t)$ 是否平稳过程？说明理由；

(*2*) 如果 $X(t)\sim N(0,1)$，问过程 $\xi(t)$ 是否均方可微？说明理由。

(*1*) 由题可得：$E\{X^2\}=E\{Y^2\}=(\frac{1}{2})^2+\frac{1}{12}=\frac{1}{3},E\{XY\}=E\{X\}E\{Y\}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ 令 $0<s<t$，则有：

$$
\begin{aligned}
R_\xi(s,t) &= E\Big\{(X\cos 2s+Y\sin 2s)(X\cos 2t+Y\sin 2t)\Big\} \\
&= E\{X^2\}\cos 2s\cos 2t+E\{XY\}\cos 2s\sin 2t \\
&\quad +E\{XY\}\sin 2s\cos 2t+E\{Y^2\}\sin 2s\sin 2t \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\bigg(\cos\left(2s+2t\right)+\cos\left(2s-2t\right)-\cos\left(2s+2t\right)+\cos\left(2s-2t\right)\bigg) \\
&\quad +\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\bigg(\sin\left(2s+2t\right)-\sin\left(2s+2t\right)+\sin\left(2s+2t\right)+\sin\left(2s+2t\right)\bigg) \\
&= \frac{1}{3}\cos(2t-2s)+\frac{1}{4}\sin(2s+2t)
\end{aligned}
$$

因此 $R_\xi(s,t)$ 不为 $\tau=t-s$ 的函数，因此过程 $\xi(t)$ 不是（宽）平稳过程。

(*2*) 由题可得：$E\{X^2\}=E\{Y^2\}=0^2+1=1,E\{XY\}=E\{X\}E\{Y\}=0\times 0=0$ 令 $0<s<t$，则有：

$$
\begin{aligned}
R_\xi(s,t) &= E\Big\{(X\cos 2s+Y\sin 2s)(X\cos 2t+Y\sin 2t)\Big\} \\
&= E\{X^2\}\cos 2s\cos 2t+E\{Y^2\}\sin 2s\sin 2t \\
&= \cos 2s\cos 2t+\sin 2s\sin 2t \\
&= \frac{1}{2}\bigg(\cos(2s+2t)+\cos(2t-2s)\bigg)-\frac{1}{2}\bigg(\cos(2s+2t)-\cos(2t-2s)\bigg) \\
&\cos(2t-2s)=\cos(2\tau)\ (\tau=t-s)
\end{aligned}
$$

故当 $X(t)\sim N(0,1)$，过程 $\xi(t)$ 是（宽）平稳过程；此时，对相关函数求混合偏导：

$$
R'_\xi(s,t)=\frac{\partial^2 R_\xi(s,t)}{\partial s\partial t}=\frac{\partial 2\sin(2t-2s)}{\partial t}=4\cos(2t-2s)=4\cos(2\tau)
$$

当 $\tau=0$ 时，$R_\xi(\tau)=R_\xi(0)=1, R'_\xi(\tau)=R'_\xi(0)=4$，均在 $\tau=0$ 处连续，因此过程 $\xi(t)$ 均方可微。

4. 设随机过程 $\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$ 是一实正交增量过程，并且 $E\{X(t)\}=0$，及满足：

$$E\{[X(t)-X(s)]^2\}=\mid t-s\mid,-\infty<s,t<+\infty$$

令：$Y(t)=X(t)-X(t-1),-\infty<t<+\infty$，试证明 $Y(t)$ 是平稳过程。

由题可得，令 $0<s<t$，根据正交增量过程的正交性质有：

$$\begin{aligned}
R_Y(s,t)=E\{Y(s)Y(t)\}&=E\{[X(s)-X(s-1)][X(t)-X(t-1)]\}\\
&=E\{[X(s)-X(s-1)][X(t)-X(s)+X(s)-X(t-1)]\}\\
&=E\{[X(s)-X(s-1)][X(s)-X(t-1)]\}\\
&=E\{[X(s)-X(t-1)+X(t-1)-X(s-1)][X(s)-X(t-1)]\}\\
&=E\{[X(s)-X(t-1)]^2\}\\
&=\mid s-t+1\mid\\
&=\mid 1-\tau\mid\ \ (\tau=t-s)
\end{aligned}$$

因此 $R_Y(s,t)$ 是时间差 τ 的函数，故过程 $Y(t)$ 是平稳过程。