Stochastic Process

University of Chinese Academy of Sciences

Fall 2023

Yingfei Sun

Homework 15

Chenkai GUO

2024.1.12

1. 设有随机过程 $Y(t)=t^2X-1, 0<t<\infty$，X 是正态随机变量，期望为 0，方差为 σ_X^2 。

（*1*）过程 $Y(t)$ 是否正态过程？是否平稳过程？均需说明理由；

（*2*）过程 $Z(t)=\int_0^t Y(s)ds, t>0$，在均方可积意义下是否存在？存在的话，试求其相关函数。

（*1*）由题可得：$X\sim N(0,\sigma_X^2)$，任取 $0<t_1<t_2<\cdots<t_n$，有：

$$\begin{pmatrix} Y(t_1) \\ Y(t_2) \\ \vdots \\ Y(t_n) \end{pmatrix}_{n\times 1} = \begin{pmatrix} t_1^2X-1 \\ t_2^2X-1 \\ \vdots \\ t_n^2X-1 \end{pmatrix}_{n\times 1} = \begin{pmatrix} t_1^2 \\ t_2^2 \\ \vdots \\ t_n^2 \end{pmatrix}_{n\times 1} \cdot (X) - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}_{n\times 1}$$

因此 $Y(t)$ 为正态过程；

计算 $Y(t)$ 的均值和相关函数：

$$E\{Y(t)\}=E\{t^2X-1\}=t^2E\{X\}-1=-1$$

$$\begin{aligned} R_Y(s,t)=E\{Y(s)Y(t)\} &= E\left\{(s^2X+1)\left(t^2X+1\right)\right\} \\ &= s^2t^2E\left\{x^2\right\}+(s^2+t^2)E\left\{x\right\}+1 \\ &= s^2t^2\sigma_X^2+1 \end{aligned}$$

故 $Y(t)$ 不是（宽）平稳过程。

（*2*）由（*1*）可得，当 $s=t$ 时，$R_Y(t,t)=t^4\sigma_X^2+1$，因此过程 $Y(t)$ 在 (t_0,t_0) 上连续，因此 $Y(t)$ 均方连续，因此在均方可积意义下存在。现计算 $Z(t)$ 的相关函数：

$$
\begin{aligned}
R_Z(s,t) = E\left\{Z(s)Z(t)\right\} &= E\left\{\int_0^s Y(u)du\int_0^t Y(v)dv\right\} \\
&= \int_0^t\int_0^s E\left\{Y(u)Y(v)\right\}dudv \\
&= \int_0^t\int_0^s \left(u^2v^2\sigma_X^2+1\right)dudv \\
&= \frac{1}{9}s^3t^3\sigma_X^2+st
\end{aligned}
$$

2. 设 $B(t), t\geq 0$ 是初值为零的标准布朗运动，令 $\xi(t)=(1-t)B[t/(1-t)], 0\leq t<1$，$\eta(t)=e^{-at}B(e^{2at}-1), t\geq 0, a>0$，试求随机过程 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 的均值函数和相关函数，并说明 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 是否是正态过程.

由题可得：

$$
E\{\xi(t)\} = E\big\{(1-t)B[\frac{t}{1-t}]\big\} = (1-t)E\big\{B[\frac{t}{1-t}]\big\} = 0
$$

$$
\begin{aligned}
R_\xi(s,t) = E\left\{\xi(s)\xi(t)\right\} &= E\left\{(1-s)B[\frac{s}{1-s}](1-t)B[\frac{t}{1-t}]\right\} \\
&= (1-s)(1-t)E\left\{B[\frac{s}{1-s}]B[\frac{t}{1-t}]\right\} \\
&= (1-s)(1-t)\min\left(\frac{s}{1-s},\frac{t}{1-t}\right)
\end{aligned}
$$

$$
E\{\eta(t)\} = E\{e^{-at}B(e^{2at}-1)\} = e^{-at}E\{B(e^{2at}-1)\} = 0
$$

$$
\begin{aligned}
R_\eta(s,t) = E\left\{\eta(s)\eta(t)\right\} &= E\left\{e^{-as}B(e^{2as}-1)e^{-at}B(e^{2at}-1)\right\} \\
&= e^{-a(s+t)}E\left\{B(e^{2as}-1)B(e^{2at}-1)\right\} \\
&= e^{-a(s+t)}\cdot\min\left(e^{2as}-1, e^{2at}-1\right)
\end{aligned}
$$

任取 $0<t_1<t_2<\cdots<t_n$，有：

$$
\begin{pmatrix}\xi(t_1)\\ \xi(t_2)\\ \vdots\\ \xi(t_n)\end{pmatrix}_{n\times 1} = \begin{pmatrix}(1-t_1)B[\frac{t_1}{1-t_1}]\\ (1-t_2)B[\frac{t_2}{1-t_2}]\\ \vdots\\ (1-t_n)B[\frac{t_n}{1-t_n}]\end{pmatrix}_{n\times 1} = \begin{pmatrix}1-t_1\\ 1-t_2\\ \vdots\\ 1-t_n\end{pmatrix}_{n\times 1}\cdot\begin{pmatrix}B[\frac{t_1}{1-t_1}]\\ B[\frac{t_2}{1-t_2}]\\ \vdots\\ B[\frac{t_n}{1-t_n}]\end{pmatrix}_{n\times 1}
$$

$$
\begin{pmatrix}\eta(t_1)\\ \eta(t_2)\\ \vdots\\ \eta(t_n)\end{pmatrix}_{n\times 1} = \begin{pmatrix}e^{-at_1}B(e^{2at_1}-1)\\ e^{-at_2}B(e^{2at_2}-1)\\ \vdots\\ e^{-at_n}B(e^{2at_n}-1)\end{pmatrix}_{n\times 1} = \begin{pmatrix}e^{-at_1}\\ e^{-at_2}\\ \vdots\\ e^{-at_n}\end{pmatrix}_{n\times 1}\cdot\begin{pmatrix}B(e^{2at_1}-1)\\ B(e^{2at_2}-1)\\ \vdots\\ B(e^{2at_n}-1)\end{pmatrix}_{n\times 1}
$$

因此 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 均为正态过程。

3. * 设 $\{B(t), t \geq 0\}$ 是标准的布朗运动，试求 $B(t)$ 与 $\int_0^1 B(u)du$ 的相关系数，其中：$0 \leq t \leq 1$

由题可得：

$$E\{B(t)\} = 0, Var\{B(t)\} = t$$

$$E\left\{\int_0^1 B(u)du\right\} = \int_0^1 E\left\{B(u)\right\} du = 0$$

$$\begin{aligned}
E\left\{\int_0^1 B(u)du \int_0^1 B(v)dv\right\} &= \int_0^1 \int_0^1 E\left\{B(u)B(u)\right\} dudv \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \min\left(u, v\right) dudv \\
&= \int_0^1 \int_v^1 v \ \mathrm{d}u\mathrm{d}v + \int_0^1 \int_u^1 u \ \mathrm{d}v du \\
&= \int_0^1 (v - v^2) dv + \int_0^1 (u - u^2) du = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

$$Var\left\{\int_0^1 B(u)du\right\} = \frac{1}{3} - 0^2 = \frac{1}{3}$$

又因为 $E\{B(t)\} = 0, E\left\{\int_0^1 B(u)du\right\} = 0$，有：

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}\left\{B(t), \int_0^1 B(u)du\right\} &= R\left\{B(t), \int_0^1 B(u)du\right\} \\
&= E\left\{B(t) \cdot \int_0^1 B(u)du\right\} \\
&= \int_0^1 E\{B(t)B(u)\}du \\
&= \int_0^1 \min\left(t, u\right) du \\
&= \int_0^t u \ du + \int_t^1 t \ du \\
&= \frac{1}{2}t^2 + t - t^2 = -\frac{1}{2}t^2 + t
\end{aligned}$$

根据相关系数的定义，有：

$$r = \frac{\mathrm{Cov}\{B(t), \int_0^1 B(u)du\}}{\sqrt{\mathrm{Var}\{B(t)\}\,\mathrm{Var}\{\int_0^1 B(u)du\}}} = \frac{-\frac{1}{2}t^2 + t}{\sqrt{t \cdot \frac{1}{3}}} = \frac{\sqrt{3t}}{2}(-t + 2), (0 \leq t \leq 1)$$

* 星号题为第六章非作业布置的课后习题

4. * 已知 $B(t), t \geq 0$ 是初值为 0 的标准布朗运动，求在 $B(1)=0$ 时 $B(t)(0<t<1)$ 的条件概率分布密度函数。

由题可得，根据条件概率分布的定义，有：

$$
\begin{aligned}
f_{B(t)|B(1)}(y|x) = \frac{f_{B(t)|B(1)}(x,y)}{f_{B(1)}(x)} &= \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{y^2}{2t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-t)}}e^{-\frac{(y-x)^2}{2(1-t)}}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi t(1-t)}}e^{-(\frac{y^2}{2t}+\frac{(y-x)^2}{2(1-t)}+\frac{x^2}{2})}
\end{aligned}
$$

当 $B(1)=0$ 时，则：

$$
f_{B(t)|B(1)}(y|x=0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t(1-t)}}e^{-\frac{y^2}{2t(1-t)}}
$$

5. * 已知 $B(t), t \geq 0$ 是初值为零的标准布朗运动，令 $\xi(t)=\sqrt{a}B(t)+b, \eta(t)=B(at)+b$，其中常数 $a>0, b>0, t\geq 0$。试分析此两随机过程的前二阶矩是否相同？此两过程是否同分布？说明理由。

由题可得：

$$
E\{\xi(t)\} = E\left\{\sqrt{a}B(t)+b\right\} = \sqrt{a}\cdot E\{B(t)\}+b = b
$$

$$
\begin{aligned}
E\left\{\xi^2(t)\right\} &= E\left\{aB^2(t)+2\sqrt{a}\cdot bB(t)+b^2\right\} \\
&= -aE\left\{B^2(t)\right\}+2\sqrt{a}\cdot b\cdot E\{B(t)\}+b^2 \\
&= at+b^2
\end{aligned}
$$

$$
E\{\eta(t)\} = E\{B(at)+b\} = E\{B(at)\}+b = b
$$

$$
\begin{aligned}
E\left\{\eta^2(t)\right\} &= E\left\{B^2(at)+2bB(at)+b^2\right\} \\
&= E\left\{B^2(at)\right\}+2b\cdot E\{B(at)\}+b^2 \\
&= at+b^2
\end{aligned}
$$

又因为 $B(t)\sim N(0,t), B(at)\sim N(0,at)$，因此 $\xi(t)\sim N(0,at), \eta(t)\sim N(0,at)$，综上，过程 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 前二阶矩相同且二者同分布。

6. * 设 $\{B(t), t\geq 0\}$ 为零初值的标准布朗运动，试求：

(*1*) 在 $B(t_1)=x_0$ 的条件下，$B(t_2)$ 的条件概率密度函数，其中 $t_2>t_1$；

(*2*) 布朗运动的对称性，即证明：当 $t_0>0, t>0$ 时，有：

$$
P\{B(t_0+t)>x_0 \mid B(t_0)=x_0\} = P\{B(t_0+t)\leq x_0 \mid B(t_0)=x_0\} = \frac{1}{2}
$$

(*3*) 令 $T_a=\inf\{t: t>0, B(t)=a\}$，$T_a$ 表示布朗运动首次到达 a 的时刻，当 $a>0$ 时，试求 T_a 的分布函数.

(1) 有题可得:

$$f_{B(t_2)|B(t_1)}(y|x=x_0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(t_2-t_1)}}e^{-\frac{(y-x_0)^2}{2(t_1-t_1)}}$$

(2) 有题可得:

$$\begin{aligned}P\left\{B(t_0+t)\le x_0,\mid B(t_0)=x_0\right\}&=\int_{-\infty}^{x_0}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{(y-x_0)^2}{2t}}\\&=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{y^2}{2t}}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

因此 $P\{B(t_0+t)>x_0|B(t_0)=x_0\}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$,证毕

(3) 由题可得:

$$P\{B(t)>a\}=P\{B(t)>a|T_a\le t\}\cdot P\{T_a\le t\}+P\{B(t)>a|T_a>t\}\cdot P\{T_a>t\}$$

又因为从零时刻出发,$P\{B(t)>a|T_a>t\}=0$,且根据 (2) 中的布朗运动对称性性质,有:

$$p\{B(t)\le a|T_a\le t\}=P\{B(t)>a|T_a\le t\}=\frac{1}{2}$$

因此有:

$$\begin{aligned}P\{T_a\le t\}=2\cdot P\{B(t)>a\}&=2\Big[1-P\{B(t)\le a\}\Big]\\&=2-\int_0^a\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2t}}\ dx\end{aligned}$$

7. *设 $B(t),t\ge 0$ 是初值为零的标准布朗运动,令:

$$X(t)=B(t)-tB(1),0\le t\le 1$$

称 $\{X(t),0\le t\le 1\}$ 为布朗桥过程。

(1) 试问布朗桥过程是否为正态过程,为什么?

(2) 试求布朗桥过程的均值函数和相关函数;

(3) 试求布朗桥过程的一维分布密度函数。

(1) 由题可得,任取 $0<t_1<t_2<\cdots<t_n$,有:

$$\begin{pmatrix}B(1)\\X(t_1)\\X(t_2)\\\vdots\\X(t_n)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B(1)\\B(t_1)-t_1B(1)\\B(t_2)-t_2B(1)\\\vdots\\B(t_n)-t_nB(1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0\\-t_1&1&0&\cdots&0\\-t_2&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\t_n&0&0&\cdots&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B(1)\\B(t_1)\\B(t_2)\\\vdots\\B(t_n)\end{pmatrix}$$

因此布朗桥过程是正态过程。

(2) 由题可得:

$$E\{x(t)\} = E\{B(t) - tB(1)\} = E\{B(t)\} + t \cdot E\{B(1)\} = 0$$

$$\begin{aligned} R_X(s,t) = E\{\, X(s)X(t)\} &= E\big\{\, [B(s) - sB(1)]\,[B(t) - tB(1)]\,\big\} \\ &= E\{B(s)B(t)\} - (s+t)\,E\{B(1)\} + stE\left\{B^2(1)\right\} \\ &= \min(s,t) + st \end{aligned}$$

(3) 由题可得: $\because B(t) \sim N(0,t), X(t) = B(t) - tB(1) \quad \therefore X(t) \sim N(0, t-t^2)$
因此有:

$$f_{X(t)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-t^2)}} e^{-\frac{x^2}{2(t-t^2)}}$$