Micha Bosshart - bmicha@ethz.ch
Ergänzt von N. Sendlhofer - nsendlhofer & C. Leser - cleser

Funktionen

Folgen und Reihen

konvergent Es existiert ein Grenzwert sonst divergent.

beschränkt Alle Glieder in *endlich breitem, waagerechten Parallelstreifen* enthalten.

monoton wachsend $a_{n+1} \geq a_n \qquad (strikt: >)$

$\boxed{\text{mon. wachsend/ fallend \& beschränkt} \Rightarrow \text{konvergent}}$

Rechenregeln für konvergente Folgen

Falls $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, gilt:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$$
$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$$
$$\lim_{n\to\infty} (a_n / b_n) = a/b.$$

Gilt auch für Funktionen; sofern Grenzwert existiert.

Geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{k} a \cdot q^n = a \cdot \frac{1-q^{k+1}}{1-q}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} a \cdot q^n = \frac{a}{1-q}, \qquad \text{falls } |q| < 1$$

Arithmetische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} [a_1 + (n-1) \cdot d] = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$$

häufige Reihen

- $\sum\limits_{n=1}^{k} n = \frac{k \cdot (k+1)}{2}$
- $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} \alpha = 1 \to \text{ harm. Reihe} \\ = \infty, \alpha \leq 1 \text{ (divergiert)} \\ \neq \pm\infty, \alpha > 1 \text{ (konvergiert)} \end{cases}$

Grenzwerte

Bernoulli de L'Hôpital

Falls $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ (oder $\pm\infty$), so gilt

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Landau Symbol

$$\boxed{f(x) = o(g(x)) \text{ für } x \to a} \iff \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$$\boxed{f(x) = O(g(x)) \text{ für } x \to a} \iff \lim_{x\to a} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq A \in \mathbb{R}$$

Es gilt:

$$x^k = o(e^x) \quad \text{für } x \to \infty, \quad k \in \mathbb{R}$$
$$\ln(x) = o(x^k) \quad \text{für } x \to \infty, \quad k > 0$$

$$f(x) = o(g(x)) \Rightarrow f(x) = O(g(x))$$
$$f(x) = O(g(x)) \not\Rightarrow f(x) = o(g(x))$$

Eigenschaften

Eine Funktion $f : A \to B$ ist eine Vorschrift, die jedem $x \in A$ ein Element $f(x) \in B$ zuordnet, $f : x \to f(x)$.

Definitionsbereich: $D(f) = A$

Zielbereich: $Z(f) = B$

Wertebereich: $W(f) = \{f(x) | \; x \in D(f)\}$

Surjektiv

Jeder Wert im Zielbereich $Z(f)$ wird angenommen.

$$\boxed{W(f) = Z(f)}$$

Injektiv

Jede Horizontale schneidet den Graphen $\Gamma(f)$ höchstens einmal.

- $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, sonst nicht injektiv

Bijektiv

Injektiv & Surjektiv $\Leftrightarrow$ Bijektiv $\Leftrightarrow$ Umkehrbar

Inverse Funktion

Sei $f(x)$ eine Funktion von $D(f)$ nach $W(f)$, dann ist $f^{-1} : W(f) \to D(f)$ mit $y \mapsto f^{-1}(y)$ die inverse Funktion von $f(x)$.

- $W(f^{-1}) = D(f)$
- $D(f^{-1}) = W(f)$

Gerade & Ungerade

gerade: $f(-x) = f(x)$

ungerade: $f(-x) = -f(x)$

Stetigkeit

$f(x)$ ist stetig im Punkt ξ falls

$$\lim_{x\to\xi^-} f(x) = f(\xi) = \lim_{x\to\xi^+} f(x).$$

- Bei Lücken in $D(f)$ werden die einzelnen Abschnitte separat betrachtet.

Monotonie

(Strikt) Monoton Steigend

- $x_1 < x_2 \iff f(x_1) \leq f(x_2)$ (strikt: $<$)
- $f'(x) \geq 0$ (strikt: $>$)

(Strikt) Monoton Fallend

- $x_1 < x_2 \iff f(x_1) \geq f(x_2)$ (strikt: $>$)
- $f'(x) \leq 0$ (strikt: $<$)

Beschränktheit

Alle Funktionswerte sind in einem endlich breiten waagerechten Parallelstreifen enthalten.

Asymptoten

Wir nennen eine Funktion $g(x)$ eine Asymptote von $f(x)$ für $x \to \infty$ falls

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - g(x)) = 0.$$

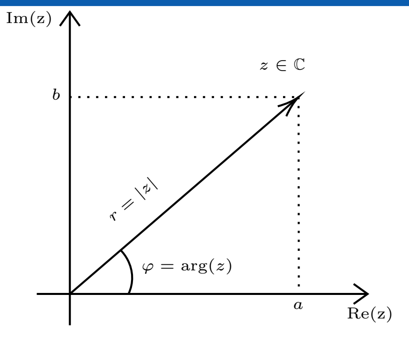
Hyperbolische Funktionen

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$
$$\frac{d}{dx} \cosh(x) = \sinh(x) \qquad \frac{d}{dx} \sinh(x) = \cosh(x)$$
$$\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1$$

Inverse Funktionen

$$\cosh(x)^{-1} = \operatorname{arcosh}(x) \qquad = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$
$$\sinh(x)^{-1} = \operatorname{arsinh}(x) \qquad = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$
$$\tanh(x)^{-1} = \operatorname{artanh}(x) \qquad = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Komplexe Zahlen



$$\boxed{z = \underbrace{a + ib}_{\text{kartesisch}} = \underbrace{r\cos(\varphi) + ir\sin(\varphi)}_{\text{Polarform}} = \underbrace{r \cdot e^{i\varphi}}_{\text{Euler}}}$$

Nullstellen Reeller Polynome mit Grad n

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n, \qquad a_i \in \mathbb{R}$$

- Hat genau n Nullstellen (komplex und reell)
- Komplexe Nullstellen kommen immer im komplex-konjugierten Paar vor.

Differentialrechnung

Ableitung Inverse Funktion

$$(f^{-1})'(x_o) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_o))}$$

Tangenten

Explizit

$$\boxed{t(x) = f(x_o) + f'(x_o) \cdot (x - x_o)}$$

Eine Tangente $t(x)$ an die Funktion $f(x)$ im Punkt x_o, erfüllt folgende Bedingungen:

$$t'(x_o) \stackrel{!}{=} f'(x_o),$$
$$t(x_o) \stackrel{!}{=} f(x_o).$$

Parametrisiert

Tangente $\vec{t}(s)$ an die Parametrisierung $\vec{r}(t)$ im Punkt t_o.

$$\boxed{\vec{t}(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix} = \vec{r}\,(t_o) + s \cdot \dot{\vec{r}}\,(t_o)}$$

Fehlerrechnung

Die berechnete Grösse f ist abhängig von der gemessenen Grösse x. Die gemessene Grösse weicht mit dem Messfehler dx von der Realität ab.

- **Absoluter Fehler**

$$\boxed{\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) \quad \stackrel{\Delta x \to 0}{\longrightarrow} \quad \Delta f \approx f'(x)\, \Delta x}$$

- **Relativer Fehler**

$$\boxed{\frac{df}{f}}$$

Bemerkungen

1% Genauigkeit: $\frac{\Delta x}{x} = 1\% = \frac{1}{100}$

Messfehler von 1°: $\Delta\alpha = \frac{\pi}{180}$

Evolute $E(t)$

Parametrisierung der Krümmungsmittelpunkte an die Kurve $\vec{r} = (x(t), y(t))^T$.

$$E(t) = \begin{pmatrix} x_E(t) \\ y_E(t) \end{pmatrix}$$
$$x_E(t) = x - \frac{\dot{y}\,(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}$$
$$y_E(t) = y + \frac{\dot{x}\,(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}$$

Krümmung $k(t)$

- Parametrisierung $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))^T$

$$k(t) = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

- Explizit $y = f(x)$

$$k(x) = \frac{f''(x)}{(1 + f'(x)^2)^{3/2}}$$

▷ Polarkoordinaten $r = f(\varphi)$

$$k(\varphi) = \frac{(f(\varphi))^2 + 2(f'(\varphi))^2 - f(\varphi)f''(\varphi)}{[(f(\varphi))^2 + (f'(\varphi))^2]^{3/2}}$$

Parametrisierungen

Kreis / Ellipse

Ellipse mit Mittelpunkt (x_o, y_o) und Halbachsen a & b.
implizit:

$$\left(\frac{x - x_o}{a}\right)^2 + \left(\frac{y - y_o}{b}\right)^2 = 1$$

parametrisiert:

$$x(t) = x_o + a \cdot \cos(t)$$
$$y(t) = y_o + b \cdot \sin(t)$$

Normal- und Tangentialvektoren

explizit

$$y = f(x) \quad \vec{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x_o) \end{pmatrix} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} f'(x_o) \\ -1 \end{pmatrix}$$

parametrisiert

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad \vec{t} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} -\dot{y}(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}$$

Integralrechnung

Hauptsatz der Infinitesimalrechnung

Für $a \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right] = f(x)}$$

Partialbruchzerlegung

1. Nenner Faktorisieren
2. Ansatz
3. Koeffizientenvergleich, Konstanten bestimmen

Ansatz

▷ ***n*-fache reelle Nullstelle**:

$$\frac{(\dots)}{(x - x_o)^n} = \frac{A}{(x - x_o)} + \frac{B}{(x - x_o)^2} + \dots + \frac{Z}{(x - x_o)^n}$$

▷ ***n*-fache komplexe Nullstelle** (e.g. $(x^2 + 1)$):

$$\frac{(\dots)}{(x^2 + 1)^n} = \frac{Ax + B}{(x^2 + 1)} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 1)^2} + \dots + \frac{Yx + Z}{(x^2 + 1)^n}$$

Partielle Integration

Es sei $F'(x) = f(x)$ und $G'(x) = g(x)$, dann gilt

$$\int_a^b \underset{\downarrow}{G} \cdot \underset{\uparrow}{f}\, dx = G \cdot F\Big|_a^b - \int_a^b g \cdot F\, dx.$$

Bogenlänge s

▷ explizit $y = f(x)$

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

▷ Polarkoordinaten $\rho = \rho(\varphi)$

$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2 + \dot{\rho}^2}\, d\varphi$$

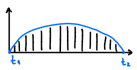
▷ Parametrisierung $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))^T$

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \left|\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\right|\, dt$$

Flächenberechnungen

▷ Parametrisierung $\vec{r} = (x(t), y(t))^T$

$$A = \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} +y\dot{x}\, dt}_{x \text{ monoton steigend}}$$



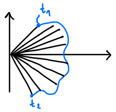
$$A = \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} -y\dot{x}\, dt}_{x \text{ monoton fallend}}$$

Sektorfläche

Fläche zwischen Ursprung und Kurve

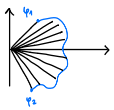
▷ Parametrisierung

$$A = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} (x\dot{y} - y\dot{x})\, dt$$



▷ Polarkoordinaten

$$A = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi)\, d\varphi$$



Fläche auf der rechten Seite der Kurve hat positives Vorzeichen.

Rotationsvolumen

Kurvenrotation

Kurve rotiert um x-Achse:

$$V = \int_{t_1}^{t_2} \pi y^2(t) \cdot \underbrace{\dot{x}(t)dt}_{dx} = \int_{x_1}^{x_2} \pi f^2(x) \cdot dx$$

Kurve rotiert um y-Achse:

$$V = \int_{t_1}^{t_2} \pi x^2(t) \cdot \underbrace{\dot{y}(t)dt}_{dy} = \int_{y_1}^{y_2} \pi x^2 \cdot \underbrace{f'(x)dx}_{dy}$$

Flächenrotation

Fläche unter Kurve rotiert um y-Achse:

$$V = \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{2\pi x(t)}_{\text{Umfang}} \cdot y(t) \cdot \underbrace{\dot{x}(t)dt}_{dx} = \int_{x_1}^{x_2} 2\pi x \cdot f(x)dx$$

Rotationsoberflächen

Kurve rotiert um x-Achse:

$$O = \int_{t_1}^{t_2} 2\pi y(t) \cdot \underbrace{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\, dt}_{ds \text{ (Bogenlänge)}}$$
$$= \int_{x_1}^{x_2} 2\pi f(x) \cdot \underbrace{\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dt}_{ds}$$

Kurve rotiert um y-Achse:

$$O = \int_{t_1}^{t_2} 2\pi x(t) \cdot \underbrace{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\, dt}_{ds}$$
$$= \int_{x_1}^{x_2} 2\pi x \cdot \underbrace{\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx}_{ds}$$

Schwerpunkt / Trägheitsmoment

Sei $H(x)$ die Höhe des Fläche a.d.S. x.
Sei σ die Flächendichte $[kg/m^2]$.

$$\text{Fläche: } A = \int_{x_1}^{x_2} H(x)\, dx$$
$$\text{Masse: } M = \int_{x_1}^{x_2} \sigma \cdot H(x)\, dx$$
$$\text{Schwerpunkt: } x_s = \frac{1}{M}\int_{x_1}^{x_2} x \cdot \sigma \cdot H(x)\, dx$$
$$\text{Trägheitsmoment: } I_y = \int_{x_1}^{x_2} x^2 \cdot \sigma \cdot H(x)\, dx$$

Trägheitsmoment

$$\Theta = \int (\text{Abstand zur Rotationsachse})^2 \cdot (\text{Masse})$$

$$\Theta = \rho \cdot \int_a^b x^2 \cdot G(x)dx$$

$J_0 = \dfrac{\pi R^4}{2} =$ polares Flächenträgheitsmoment der Kreisscheibe

$\Theta_x = \rho \cdot \displaystyle\int_a^b \frac{1}{2}\pi (f(x))^4 dx =$ Massenträgheitsmoment eines Rotationskörpers um die x-Achse

$$\Theta = \rho \cdot \frac{1}{2}\pi \int_a^b y(t)^4 \|\dot{x}(t)\| dt$$

$G(x) =$ Masse an diesem Abstand

Uneigentliche Integrale

Konvergiert $\iff$ Grenzwert existiert

1. Gattung

Zu integrierende Funktion ist an der Grenze nicht definiert. Bsp.:

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\, dx = \lim_{\xi \to 0^+} \int_\xi^1 \frac{1}{x}\, dx$$

2. Gattung

Unendlicher Integrationsbereich. Bsp.:

$$\int_0^\infty f(x)\, dx = \lim_{\xi \to \infty} \int_0^\xi f(x)\, dx$$

Tricks

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\, dx \quad \text{konvergiert} \iff \alpha > 1$$

Potenzreihen FoTaBe S.77

Potenzreihe der Funktion $f(x)$ um den Punkt x_o:

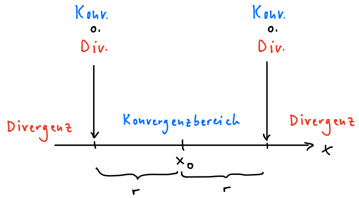
$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_o)^n}$$

▷ Höchstens eine Potenzreihe von f um x_o existiert.

▷ Konvergiert für $|x - x_o| < r$

Konvergenzradius r

$$\boxed{r = \lim_{n \to \infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|}$$



Innerhalb vom Konvergenzbereich darf man Potenzreihen *gliedweise*:

▷ addieren & subtrahieren

▷ integrieren & differenzieren

Taylorreihen

Taylorentwicklung von $f(x)$ um x_o:

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}(x - x_o)^n}$$

▷ ungerade Fkt ⇔ ungerade Indizes: $a_1 x + a_3 x^3 + \dots$

▷ gerade Fkt ⇔ gerade Indizes: $a_0 + a_2 x^2 + \dots$

Trigonometrie

Werte Tabelle

rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
deg	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$

Rechenregeln

$$
\begin{aligned}
1 &= sin(x)^2 + cos(x)^2 \\
\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \\
\sin(2\alpha) &= 2\sin\alpha cos\alpha \\
\sin(3\alpha) &= 3\sin\alpha - 4sin^3\alpha \\
\sin^2\frac{\alpha}{2} &= \frac{1-\cos\alpha}{2} \\
\cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \\
\cos(2\alpha) &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\
&= 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha \\
\cos(3\alpha) &= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha \\
cos^2\frac{\alpha}{2} &= \frac{1+cos\alpha}{2} \\
\frac{a}{sin(\alpha)} &= \frac{b}{sin(\beta)} = \frac{c}{sin(\gamma)} \\
a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot cos(\alpha)
\end{aligned}
$$

Funktionsmodifikation

$$\text{Frequenz } f : t \to \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

$$\text{Amplitude } f : t \to A \cdot \sin(t)$$

$$\text{Winkelgeschwindigkeit } \omega = \frac{2\pi}{T}\left[\frac{1}{s}\right]$$

Appendix

Nullstellen Reeller Polynome mit Grad n

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n, \qquad a_i \in \mathbb{R}$$

- Hat genau n Nullstellen (komplex und reell)
- Komplexe Nullstellen kommen immer im komplex-konjugierten Paar vor.

Cosinus und Sinus - Integrale

Für $a, b \in \mathbb{Z}$ und $n \geq 2$, gelten:

$$\int_{a\cdot\frac{\pi}{2}}^{b\cdot\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\ dx = \frac{n-1}{n}\int_{a\cdot\frac{\pi}{2}}^{b\cdot\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x)\ dx$$

$$\int_{a\cdot\frac{\pi}{2}}^{b\cdot\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\ dx = \frac{n-1}{n}\int_{a\cdot\frac{\pi}{2}}^{b\cdot\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}(x)\ dx$$

Diese Regel kann mehrfach angewandt werden.

Ableitung Un-/Gerader Funktionen

- $g(x)$ sei **gerade**

$$g'(0) = g^{(3)}(0) = g^{(5)}(0) = ... = 0$$

- $f(x)$ sei **ungerade**

$$f''(0) = f^{(4)}(0) = f^{(6)}(0) = ... = 0$$

Rechengesetze für Exponenten & Logarithmen

$$
\begin{aligned}
B^a \cdot B^b &= B^{a+b} \\
\frac{B^a}{B^b} &= B^{a-b} \\
(B^a)^b &= B^{a\cdot b} \\
\log_B(a \cdot b) &= \log_B(a) + \log_B(b) \\
\log_B\left(\frac{a}{b}\right) &= \log_B(a) - \log_B(b) \\
\log_B(a^r) &= r \cdot \log_B(a) \\
\text{Basiswechsel: } \log_a(x) &= \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}
\end{aligned}
$$

Polarkoordinaten

Umrechnung

$$
\begin{aligned}
r &= \rho(\phi) \\
x &= \cos(\phi) \cdot r \\
y &= \sin(\phi) \cdot r
\end{aligned}
$$