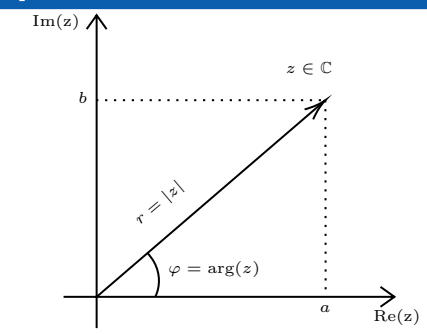


Analysis I		Page 1 of 3	January 11, 2023
Micha Bosshart - bmicha@ethz.ch Ergänzt von N. Sendlhofer - nsendlhofer & C. Leser - cleser			
Funktionen			
Folgen und Reihen			
konvergent		Es existiert ein Grenzwert sonst divergent.	
beschränkt		Alle Glieder in endlich breitem, waagerechten Parallelstreifen enthalten.	
monoton wachsend		$a_{n+1} \geq a_n$ (strikt: $>$)	
mon. wachsend/ fallend & beschränkt \Rightarrow konvergent			
Rechenregeln für konvergente Folgen			
Falls $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, gilt:			
$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$			
$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$			
$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n/b_n) = a/b$.			
Gilt auch für Funktionen; sofern Grenzwert existiert.			
Geometrische Reihe			
$\sum_{n=0}^k a \cdot q^n = a \cdot \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q}$			
$\sum_{n=0}^{\infty} a \cdot q^n = \frac{a}{1 - q}$, falls $ q < 1$			
Arithmetische Reihe			
$\sum_{n=1}^{\infty} [a_1 + (n - 1) \cdot d] = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$			
häufige Reihen			
$\triangleright \sum_{n=1}^k n = \frac{k \cdot (k + 1)}{2}$		$\triangleright \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$	
$\triangleright \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \begin{cases} \alpha = 1 \rightarrow \text{harm. Reihe} \\ = \infty, \alpha \leq 1 \text{ (divergiert)} \\ \neq \pm \infty, \alpha > 1 \text{ (konvergiert)} \end{cases}$			
Grenzwerte			
Bernoulli de L'Hôpital			
Falls $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ (oder $\pm \infty$), so gilt			
$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.			
Landau Symbol			
$f(x) = o(g(x))$ für $x \rightarrow a$		$\iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$	
$f(x) = O(g(x))$ für $x \rightarrow a$		$\iff \lim_{x \rightarrow a} \left \frac{f(x)}{g(x)} \right \leq A \in \mathbb{R}$	
Es gilt:			
$x^k = o(e^x)$ für $x \rightarrow \infty$, $k \in \mathbb{R}$			
$\ln(x) = o(x^k)$ für $x \rightarrow \infty$, $k > 0$			
$f(x) = o(g(x)) \Rightarrow f(x) = O(g(x))$			
$f(x) = O(g(x)) \nRightarrow f(x) = o(g(x))$			
Eigenschaften			
Eine Funktion $f : A \rightarrow B$ ist eine Vorschrift, die jedem $x \in A$ ein Element $f(x) \in B$ zuordnet, $f : x \rightarrow f(x)$.			
Definitionsbereich: $D(f) = A$			
Zielbereich: $Z(f) = B$			
Wertebereich: $W(f) = \{f(x) \mid x \in D(f)\}$			
Surjektiv			
Jeder Wert im Zielbereich $Z(f)$ wird angenommen.		$W(f) = Z(f)$	
Injektiv			
Jede Horizontale schneidet den Graphen $\Gamma(f)$ höchstens einmal.			
$\triangleright f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, sonst nicht injektiv			
Bijektiv			
Injektiv & Surjektiv \Leftrightarrow Bijektiv \Leftrightarrow Umkehrbar			
Inverse Funktion			
Sei $f(x)$ eine Funktion von $D(f)$ nach $W(f)$, dann ist $f^{-1} : W(f) \rightarrow D(f)$ mit $y \mapsto f^{-1}(y)$ die inverse Funktion von $f(x)$.			
$\triangleright W(f^{-1}) = D(f)$			
$\triangleright D(f^{-1}) = W(f)$			
Gerade & Ungerade			
gerade: $f(-x) = f(x)$			
ungerade: $f(-x) = -f(x)$			
Stetigkeit			
$f(x)$ ist stetig im Punkt ξ falls		$\lim_{x \rightarrow \xi^-} f(x) = f(\xi) = \lim_{x \rightarrow \xi^+} f(x)$.	
\triangleright Bei Lücken in $D(f)$ werden die einzelnen Abschnitte separat betrachtet.			
Monotonie			
(Strikt) Monoton Steigend			
$\triangleright x_1 < x_2 \iff f(x_1) \leq f(x_2)$		(strikt: $<$)	
$\triangleright f'(x) \geq 0$		(strikt: $>$)	
(Strikt) Monoton Fallend			
$\triangleright x_1 < x_2 \iff f(x_1) \geq f(x_2)$		(strikt: $>$)	
$\triangleright f'(x) \leq 0$		(strikt: $<$)	
Beschränktheit			
Alle Funktionswerte sind in einem endlich breiten waagerechten Parallelstreifen enthalten.			
Asymptoten			
Wir nennen eine Funktion $g(x)$ eine Asymptote von $f(x)$ für $x \rightarrow \infty$ falls		$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x)) = 0$.	
Hyperbolische Funktionen			
$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$		$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	
$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$			
$\frac{d}{dx} \cosh(x) = \sinh(x)$		$\frac{d}{dx} \sinh(x) = \cosh(x)$	
$\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1$			
Inverse Funktionen			
$\cosh(x)^{-1} = \operatorname{arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$			
$\sinh(x)^{-1} = \operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$			
$\tanh(x)^{-1} = \operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$			
Komplexe Zahlen			
			
$z = \underbrace{a + ib}_{\text{kartesisch}} = \underbrace{r \cos(\varphi) + ir \sin(\varphi)}_{\text{Polarform}} = \underbrace{r \cdot e^{i\varphi}}_{\text{Euler}}$			
Nullstellen Reeller Polynome mit Grad n			
$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$, $a_i \in \mathbb{R}$			
\triangleright Hat genau n Nullstellen (komplex und reell)			
\triangleright Komplexe Nullstellen kommen immer im komplex-konjugierten Paar vor.			
Differentialrechnung			
Ableitung Inverse Funktion			
$(f^{-1})'(x_o) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_o))}$			
Tangenten			
Explizit		$t(x) = f(x_o) + f'(x_o) \cdot (x - x_o)$	
Eine Tangente $t(x)$ an die Funktion $f(x)$ im Punkt x_o , erfüllt folgende Bedingungen:		$t'(x_o) \stackrel{!}{=} f'(x_o)$, $t(x_o) \stackrel{!}{=} f(x_o)$.	
Parametrisiert			
Tangente $\vec{t}(s)$ an die Parametrisierung $\vec{r}(t)$ im Punkt t_o .		$\vec{t}(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix} = \vec{r}(t_o) + s \cdot \dot{\vec{r}}(t_o)$	
Fehlerrechnung			
Die berechnete Grsse f ist abhängig von der gemessenen Grsse x . Die gemessene Grsse weicht mit dem Messfehler dx von der Realität ab.			
\triangleright Absoluter Fehler		$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f \approx f'(x) \Delta x$	
\triangleright Relativer Fehler		$\frac{df}{f}$	
Bemerkungen			
1% Genauigkeit		Messfehler von 1%	
$\frac{\Delta x}{x} = 1\% = \frac{1}{100}$		$\Delta \alpha = \frac{\pi}{180}$	
Evolute		$E(t)$	
Parametrisierung der Krmmungsmittelpunkte an die Kurve $\vec{r} = (x(t), y(t))^T$.		$E(t) = \begin{pmatrix} x_E(t) \\ y_E(t) \end{pmatrix}$	
$x_E(t) = x - \frac{\dot{y}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}$			
$y_E(t) = y + \frac{\dot{x}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}$			
Krmmung		$k(t)$	
\triangleright Parametrisierung $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))^T$		$k(t) = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}$	
\triangleright Explizit $y = f(x)$		$k(x) = \frac{f''(x)}{(1 + f'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}$	

▷ Polarkoordinaten $r = f(\varphi)$

$$k(\varphi) = \frac{(f(\varphi))^2 + 2(f'(\varphi))^2 - f(\varphi)f''(\varphi)}{[(f(\varphi))^2 + (f'(\varphi))^2]^{3/2}}$$

Parametrisierungen

Kreis / Ellipse

Ellipse mit Mittelpunkt (x_o, y_o) und Halbachsen a & b .
implizit:

$$\left(\frac{x - x_o}{a}\right)^2 + \left(\frac{y - y_o}{b}\right)^2 = 1$$

parametrisiert:

$$x(t) = x_o + a \cdot \cos(t)$$
$$y(t) = y_o + b \cdot \sin(t)$$

Normal- und Tangentialvektoren

explizit

$$y = f(x) \quad \vec{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x_o) \end{pmatrix} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} f'(x_o) \\ -1 \end{pmatrix}$$

parametrisiert

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad \vec{t} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} -\dot{y}(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}$$

Integralrechnung

Hauptsatz der Infinitesimalrechnung

Für $a \in \mathbb{R}$

$$\frac{d}{dx} \left[\int_a^x f(t) dt \right] = f(x)$$

Partialbruchzerlegung

1. Nenner Faktorisieren

2. Ansatz

3. Koeffizientenvergleich, Konstanten bestimmen

Ansatz

▷ **n-fache reelle Nullstelle:**

$$\frac{(\dots)}{(x - x_o)^n} = \frac{A}{(x - x_o)} + \frac{B}{(x - x_o)^2} + \dots + \frac{Z}{(x - x_o)^n}$$

▷ **n-fache komplexe Nullstelle** (e.g. $(x^2 + 1)$):

$$\frac{(\dots)}{(x^2 + 1)^n} = \frac{Ax + B}{(x^2 + 1)} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 1)^2} + \dots + \frac{Yx + Z}{(x^2 + 1)^n}$$

Partielle Integration

Es sei $F'(x) = f(x)$ und $G'(x) = g(x)$, dann gilt

$$\int_a^b G \cdot f \, dx = G \cdot F \Big|_a^b - \int_a^b g \cdot F \, dx.$$

Bogenlänge

s

▷ explizit $y = f(x)$

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx$$

▷ Polarkoordinaten $\rho = \rho(\varphi)$

$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2 + \dot{\rho}^2} \, d\varphi$$

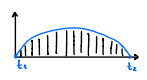
▷ Parametrisierung $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))^T$

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \left| \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \right| \, dt$$

Flächenberechnungen

▷ Parametrisierung $\vec{r} = (x(t), y(t))^T$

$$A = \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} +y\dot{x} \, dt}_{x \text{ monoton steigend}}$$
$$A = \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} -y\dot{x} \, dt}_{x \text{ monoton fallend}}$$



Sektorfläche


Fläche zwischen Ursprung und Kurve

▷ Parametrisierung

$$A = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (x\dot{y} - y\dot{x}) \, dt$$

▷ Polarkoordinaten

$$A = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi) \, d\varphi$$



Fläche auf der rechten Seite der Kurve hat positives Vorzeichen.

Rotationsvolumen

Kurvenrotation

Kurve rotiert um x-Achse:

$$V = \int_{t_1}^{t_2} \pi y^2(t) \cdot \underbrace{\dot{x}(t) dt}_{dx} = \int_{x_1}^{x_2} \pi f^2(x) \cdot dx$$

Kurve rotiert um y-Achse:

$$V = \int_{t_1}^{t_2} \pi x^2(t) \cdot \underbrace{\dot{y}(t) dt}_{dy} = \int_{y_1}^{y_2} \pi x^2 \cdot \underbrace{f'(x) dx}_{dy}$$

Flächenrotation

Fläche unter Kurve rotiert um y-Achse:

$$V = \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{2\pi x(t)}_{\text{Umfang}} \cdot y(t) \cdot \underbrace{\dot{x}(t) dt}_{dx} = \int_{x_1}^{x_2} 2\pi x \cdot f(x) dx$$

Rotationsoberflächen

Kurve rotiert um x-Achse:

$$O = \int_{t_1}^{t_2} 2\pi y(t) \cdot \underbrace{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}}_{ds \text{ (Bogenlänge)}} \, dt$$
$$= \int_{x_1}^{x_2} 2\pi f(x) \cdot \underbrace{\sqrt{1 + f'(x)^2}}_{ds} \, dt$$

Kurve rotiert um y-Achse:

$$O = \int_{t_1}^{t_2} 2\pi x(t) \cdot \underbrace{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}}_{ds} \, dt$$
$$= \int_{x_1}^{x_2} 2\pi x \cdot \underbrace{\sqrt{1 + f'(x)^2}}_{ds} \, dx$$

Schwerpunkt / Trägheitsmoment

Sei $H(x)$ die Höhe der Fläche a.d.S. x .
Sei σ die Flächendichte $[kg/m^2]$.

Fläche: $A = \int_{x_1}^{x_2} H(x) \, dx$

Masse: $M = \int_{x_1}^{x_2} \sigma \cdot H(x) \, dx$

Schwerpunkt: $x_s = \frac{1}{M} \int_{x_1}^{x_2} x \cdot \sigma \cdot H(x) \, dx$

Trägheitsmoment: $I_y = \int_{x_1}^{x_2} x^2 \cdot \sigma \cdot H(x) \, dx$

Trägheitsmoment

$$\Theta = \int (\text{Abstand zur Rotationsachse})^2 \cdot (\text{Masse})$$
$$\Theta = \rho \cdot \int_a^b x^2 \cdot G(x) dx$$
$$J_0 = \frac{\pi R^4}{2} = \text{polares Flächenträgheitsmoment der Kreisscheibe}$$
$$\Theta_x = \rho \cdot \int_a^b \frac{1}{2} \pi (f(x))^4 dx = \text{Masseträgheitsmoment eines Rotationskörpers um die x-Achse}$$
$$\Theta = \rho \cdot \frac{1}{2} \pi \int_a^b y(t)^4 \|\dot{x}(t)\| dt$$

$G(x)$ = Masse an diesem Abstand

Uneigentliche Integrale

Konvergiert \iff Grenzwert existiert

1. Gattung

Zu integrierende Funktion ist an der Grenze nicht definiert. Bsp.:

$$\int_0^1 \frac{1}{x} \, dx = \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \int_{\xi}^1 \frac{1}{x} \, dx$$

2. Gattung

Unendlicher Integrationsbereich. Bsp.:

$$\int_0^{\infty} f(x) \, dx = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \int_0^{\xi} f(x) \, dx$$

Tricks

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha} \, dx \quad \text{konvergiert} \iff \alpha > 1$$

Potenzreihen

FoTaBe S.77

Potenzreihe der Funktion $f(x)$ um den Punkt x_o :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_o)^n$$

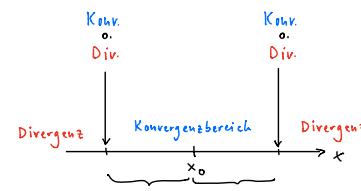
▷ Höchstens eine Potenzreihe von f um x_o existiert.

▷ Konvergiert für $|x - x_o| < r$

Konvergenzradius

r

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$



Innerhalb vom Konvergenzbereich darf man Potenzreihen *gliedweise*:

▷ addieren & subtrahieren

▷ integrieren & differenzieren

Taylorreihen

Taylorentwicklung von $f(x)$ um x_o :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_o)}{n!} (x - x_o)^n$$

▷ ungerade Fkt \iff ungerade Indizes: $a_1x + a_3x^3 + \dots$

▷ gerade Fkt \iff gerade Indizes: $a_0 + a_2x^2 + \dots$

Trigonometrie

Werte Tabelle

rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
deg	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$

Rechenregeln

$$1 = \sin(x)^2 + \cos(x)^2$$
$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$
$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$
$$\sin(3\alpha) = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$
$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$
$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$
$$= 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$
$$\cos(3\alpha) = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$
$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$$
$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$$

Funktionsmodifikation

$$\text{Frequenz } f : t \rightarrow \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$
$$\text{Amplitude } f : t \rightarrow A \cdot \sin(t)$$
$$\text{Winkelgeschwindigkeit } \omega = \frac{2\pi}{T} \left[\frac{1}{s}\right]$$

Appendix

Nullstellen Reeller Polynome mit Grad n

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n, \quad a_i \in \mathbb{R}$$

▷ Hat genau n Nullstellen (komplex und reell)

▷ Komplexe Nullstellen kommen immer im komplex-konjugierten Paar vor.

Cosinus und Sinus - Integrale

Für $a, b \in \mathbb{Z}$ und $n \geq 2$, gelten:

$$\int_{a \cdot \frac{\pi}{2}}^{b \cdot \frac{\pi}{2}} \sin^n(x) \, dx = \frac{n-1}{n} \int_{a \cdot \frac{\pi}{2}}^{b \cdot \frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x) \, dx$$
$$\int_{a \cdot \frac{\pi}{2}}^{b \cdot \frac{\pi}{2}} \cos^n(x) \, dx = \frac{n-1}{n} \int_{a \cdot \frac{\pi}{2}}^{b \cdot \frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}(x) \, dx$$

Diese Regel kann mehrfach angewandt werden.

Ableitung Un-/Gerader Funktionen

▷ $g(x)$ sei **gerade**

$$g'(0) = g^{(3)}(0) = g^{(5)}(0) = \dots = 0$$

▷ $f(x)$ sei **ungerade**

$$f''(0) = f^{(4)}(0) = f^{(6)}(0) = \dots = 0$$

Rechengesetze für Exponenten & Logarithmen

$$B^a \cdot B^b = B^{a+b}$$
$$\frac{B^a}{B^b} = B^{a-b}$$
$$(B^a)^b = B^{a \cdot b}$$
$$\log_B(a \cdot b) = \log_B(a) + \log_B(b)$$
$$\log_B\left(\frac{a}{b}\right) = \log_B(a) - \log_B(b)$$
$$\log_B(a^r) = r \cdot \log_B(a)$$
$$\text{Basiswechsel: } \log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$$

Polarkoordinaten

Umrechnung

$$r = \rho(\phi)$$
$$x = \cos(\phi) \cdot r$$
$$y = \sin(\phi) \cdot r$$