

Funktionen

Folgen und Reihen

konvergent Es existiert ein Grenzwert sonst divergent.
beschränkt Alle Glieder in *endlich breitem*,
waagerechten Parallelstreifen enthalten.

monoton wachsend $a_{n+1} \geq a_n$ (strikt: $>$)

mon. wachsend/ fallend & beschränkt \Rightarrow konvergent

Rechenregeln für konvergente Folgen

Falls $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, gilt:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) &= a \pm b \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) &= a \cdot b \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n/b_n) &= a/b.\end{aligned}$$

Gilt auch für Funktionen; sofern Grenzwert existiert.

Geometrische Reihe

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^k a \cdot q^n &= a \cdot \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q} \\ \sum_{n=0}^{\infty} a \cdot q^n &= \frac{a}{1 - q}, \quad \text{falls } |q| < 1\end{aligned}$$

Arithmetische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} [a_1 + (n - 1) \cdot d] = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$$

häufige Reihen

$$\begin{aligned}\triangleright \sum_{n=1}^k n &= \frac{k \cdot (k + 1)}{2} \quad \triangleright \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \\ \triangleright \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} &\begin{cases} \alpha = 1 \rightarrow \text{harm. Reihe} \\ = \infty, \alpha \leq 1 \text{ (divergiert)} \\ \neq \pm \infty, \alpha > 1 \text{ (konvergiert)} \end{cases}\end{aligned}$$

Grenzwerte

Bernoulli de L'Hôpital

Falls $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ (oder $\pm \infty$), so gilt

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Landau Symbol

$$f(x) = o(g(x)) \text{ für } x \rightarrow a \iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$$f(x) = O(g(x)) \text{ für } x \rightarrow a \iff \lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq A \in \mathbb{R}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}x^k &= o(e^x) \quad \text{für } x \rightarrow \infty, \quad k \in \mathbb{R} \\ \ln(x) &= o(x^k) \quad \text{für } x \rightarrow \infty, \quad k > 0 \\ f(x) &= o(g(x)) \Rightarrow f(x) = O(g(x)) \\ f(x) &= O(g(x)) \nRightarrow f(x) = o(g(x))\end{aligned}$$

Eigenschaften

Eine Funktion $f : A \rightarrow B$ ist eine Vorschrift, die jedem $x \in A$ ein Element $f(x) \in B$ zuordnet, $f : x \rightarrow f(x)$.

Definitionsbereich: $D(f) = A$

Zielbereich: $Z(f) = B$

Wertebereich: $W(f) = \{f(x) \mid x \in D(f)\}$

Surjektiv

Jeder Wert im Zielbereich $Z(f)$ wird angenommen.

$$W(f) = Z(f)$$

Injektiv

Jede Horizontale schneidet den Graphen $\Gamma(f)$ höchstens einmal.

$\triangleright f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, sonst nicht injektiv

Bijektiv

Injektiv & Surjektiv \Leftrightarrow Bijektiv \Leftrightarrow Umkehrbar

Inverse Funktion

Sei $f(x)$ eine Funktion von $D(f)$ nach $W(f)$, dann ist $f^{-1} : W(f) \rightarrow D(f)$ mit $y \mapsto f^{-1}(y)$ die inverse Funktion von $f(x)$.

$\triangleright W(f^{-1}) = D(f)$

$\triangleright D(f^{-1}) = W(f)$

Gerade & Ungerade

gerade: $f(-x) = f(x)$

ungerade: $f(-x) = -f(x)$

Stetigkeit

$f(x)$ ist stetig im Punkt ξ falls

$$\lim_{x \rightarrow \xi^-} f(x) = f(\xi) = \lim_{x \rightarrow \xi^+} f(x).$$

\triangleright Bei Lücken in $D(f)$ werden die einzelnen Abschnitte separat betrachtet.

Monotonie

(Strikt) Monoton Steigend

$\triangleright x_1 < x_2 \iff f(x_1) \leq f(x_2)$ (strikt: $<$)

$\triangleright f'(x) \geq 0$ (strikt: $>$)

(Strikt) Monoton Fallend

$\triangleright x_1 < x_2 \iff f(x_1) \geq f(x_2)$ (strikt: $>$)

$\triangleright f'(x) \leq 0$ (strikt: $<$)

Beschränktheit

Alle Funktionswerte sind in einem endlich breiten waagerechten Parallelstreifen enthalten.

Asymptoten

Wir nennen eine Funktion $g(x)$ eine Asymptote von $f(x)$ für $x \rightarrow \infty$ falls

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x)) = 0.$$

Hyperbolische Funktionen

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

$$\frac{d}{dx} \cosh(x) = \sinh(x) \quad \frac{d}{dx} \sinh(x) = \cosh(x)$$

$$\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1$$

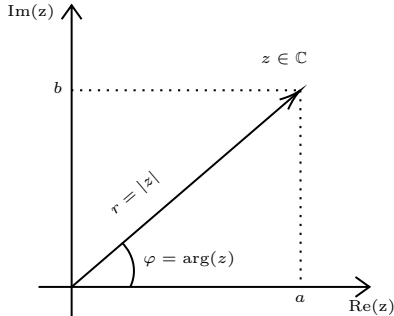
Inverse Funktionen

$$\cosh(x)^{-1} = \operatorname{arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

$$\sinh(x)^{-1} = \operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$\tanh(x)^{-1} = \operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)$$

Komplexe Zahlen



$$z = \underbrace{a + ib}_{\text{kartesisch}} = \underbrace{r \cos(\varphi) + ir \sin(\varphi)}_{\text{Polarform}} = \underbrace{r \cdot e^{i\varphi}}_{\text{Euler}}$$

Nullstellen Reeller Polynome mit Grad n

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n, \quad a_i \in \mathbb{R}$$

\triangleright Hat genau n Nullstellen (komplex und reell)

\triangleright Komplexe Nullstellen kommen immer im komplex-konjugierten Paar vor.

Komplex Konjugierte

Komplexe Zahl: $z = x - iy$

Komplex konjugierte Zahl: $\bar{z} = x + iy$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} \mid \frac{1}{z^2 - 1} = \frac{\bar{z}^2 - 1}{|z^2 - 1|}$$

Potenzreihen FoTaBe S.77

Potenzreihe der Funktion $f(x)$ um den Punkt x_o :

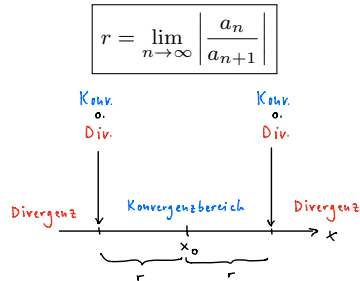
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_o)^n$$

\triangleright Höchstens eine Potenzreihe von f um x_o existiert.

\triangleright Konvergiert für $|x - x_o| < r$

$$\frac{1}{1 - \boxed{x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \boxed{x}^n$$

Konvergenzradius r



Innerhalb vom Konvergenzbereich darf man Potenzreihen *gliedweise*:

\triangleright addieren & subtrahieren

\triangleright integrieren & differenzieren

Taylorreihen

Taylorentwicklung von $f(x)$ um x_o :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_o)}{n!} (x - x_o)^n$$

\triangleright ungerade Fkt \Leftrightarrow ungerade Indizes: $a_1 x + a_3 x^3 + \dots$

\triangleright gerade Fkt \Leftrightarrow gerade Indizes: $a_0 + a_2 x^2 + \dots$

Trigonometrie

Werte Tabelle

rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
deg	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$

Rechenregeln

$$1 = \sin^2(x) + \cos^2(x)$$
$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$
$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$
$$\sin(3\alpha) = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$
$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$
$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$
$$= 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$
$$\cos(3\alpha) = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$
$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$$
$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$$

Funktionsmodifikation

$$\text{Frequenz } f : t \rightarrow \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$
$$\text{Amplitude } f : t \rightarrow A \cdot \sin(t)$$
$$\text{Winkelgeschwindigkeit } \omega = \frac{2\pi}{T} \left[\frac{1}{s}\right]$$

Mehrdimensionale Fkt. - Diff. Rechnung

Fehlerrechnung

Die berechnete Grösse f ist abhängig von den gemessenen Grössen x, y . Die gemessenen Grössen weichen mit den Messfehlern dx, dy von der Realität ab.

▷ **Totales Differential / Absoluter Fehler**

$$df \approx f_x \, dx + f_y \, dy$$

▷ **Relativer Fehler**

$$\frac{df}{f}$$

Bemerkungen

1% Genauigkeit

$$\frac{dx}{x} = 1\% = \frac{1}{100}$$

Messfehler von 1°

$$d\alpha = \frac{\pi}{180}$$

Niveaulinien / -flächen

2D

$$f(x, y) = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Höhenlinien

3D

$$f(x, y, z) = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

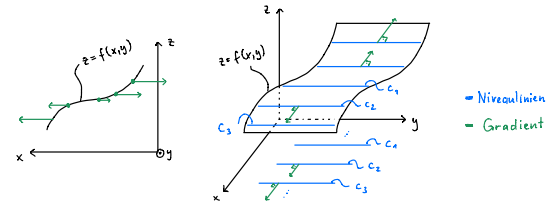
Flächen mit konst. Temp.

Gradient

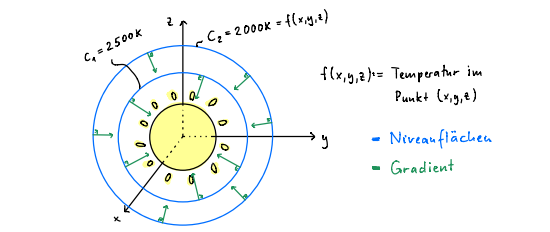
$$\text{grad}(f(x, y, z)) = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}$$

- ▷ Steht senkrecht auf Niveauflächen/ -linien.
- ▷ Zeigt in Richtung des grössten Anstiegs der Funktionswerte.

2D - $f(x, y)$



3D - $f(x, y, z)$



Richtungsableitung

Steigung von f in Richtung \vec{e} im Punkt \vec{r}_0 :

$$D_{\vec{e}}f = \frac{\vec{e}}{|\vec{e}|} \cdot \text{grad}f(\vec{r}_0)$$

Tangentialebenen

Linearisierungsformel

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$$0 = f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \dots$$

Gradient

- ▷ $f(x, y, z) = C$ ist eine Niveaufläche
- ▷ $\text{grad}(f)$ steht senkrecht auf Niveauflächen. ($\rightarrow \vec{n}$)

▷ Ebene mit Normalenvektor $\vec{n} = (A, B, C)^T$:

$$Ax + By + Cz = D$$

Extremalstellen von $f(x, y)$

1. Inneres untersuchen $\rightarrow \text{grad}f \stackrel{!}{=} 0$
2. Rand untersuchen

- ▷ Lagrange Multiplikatoren
- (a) $g(x, y)$ beschreibt Rand
- (b) $\text{grad}f(x_0, y_0) = \lambda \cdot \text{grad}g(x_0, y_0)$
 $\text{grad}g(x_0, y_0) \neq 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}$
- (c) Gleichungssystem aus (a) und (b) lösen.

- ▷ Parametrisierung
- (a) Rand parametrisieren
- (b) Parametrisierung in f einsetzen
- (c) Nach Parameter ableiten und nullsetzen.
 $f'(t) = 0$

3. Eckpunkte untersuchen
4. Kandidaten vergleichen

Satz von Schwarz

Die Reihenfolge von partiellen Ableitungen einer stetigen Funktion spielt keine Rolle.

$$f_{xyzyzz} = f_{xzyxyz}$$

Integrabilitätsbedingungen (IB)

Geg.: $\phi(x, y), \psi(x, y)$
Ges.: $f(x, y)$ mit:

$$f_x \equiv \phi \quad \text{und} \quad f_y \equiv \psi$$

1. IB prüfen (Satz von Schwarz):
 $\phi_y \equiv \psi_x$
2. $f(x, y)$ bestimmen (Konstante nicht vergessen!):

$$f = \int \phi \, dx = \int \psi \, dy$$

Verallgemeinerte Kettenregel

$$\text{Geg. : } f(x, y, z), \quad x(t), y(t), z(\rho), \quad \rho(t)$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{d\rho} \frac{d\rho}{dt}$$

Mehrdimensionale Fkt. - Int. Rechnung

Flächen- & Volumenintegrale

2D

$$\iint f(x, y) \, dA$$

Flächenintegral

3D

$$\iiint f(x, y, z) \, dV$$

Volumenintegral

Dimensionsvergleich

$$\int f(x) \, dx = \text{Fläche} = \iint 1 \, dA$$
$$\iint f(x, y) \, dA = \text{Volumen} = \iiint 1 \, dV$$
$$\iiint f(x, y, z) \, dV = \dots$$

Koordinatentransformationen

$$dA = dx \, dy$$

$$dV = dx \, dy \, dz$$

$$x = r \cos(\varphi)$$
$$y = r \sin(\varphi)$$

$$z = z$$

$$dA = r \, dr \, d\varphi$$

$$dV = r \, dr \, d\varphi \, dz$$

$$x = r \sin(\theta) \cos(\varphi)$$
$$y = r \sin(\theta) \sin(\varphi)$$
$$z = r \cos(\theta)$$

$$dV = r^2 \sin(\theta) \, dr \, d\varphi \, d\theta$$

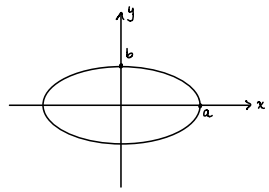
Ellipsenkoordinaten

Rand:
implizit:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

parametrisiert:

$$x = a \cdot \cos(\varphi)$$
$$y = b \cdot \sin(\varphi)$$



Fläche:

$$x = a \cdot r \cdot \cos(\varphi)$$
$$y = b \cdot r \cdot \sin(\varphi)$$

$$dA = abr \, dr \, d\varphi$$
$$r \in [0, 1]$$

Jacobi Matrix & Determinante

Koordinatentransformation von x, y, z nach u, v, w :

$$x = x(u, v, w) \quad y = y(u, v, w) \quad z = z(u, v, w)$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{bmatrix}$$

$$dx \, dy \, dz = |\det(\mathbf{J})| \, du \, dv \, dw$$

Schwerpunkte

2D

$\sigma(x,y)$: Flächendichte $[kg/m^2]$

$$m = \iint \sigma(x,y) \, dA$$

$$x_s = \frac{1}{m} \iint x \cdot \sigma(x,y) \, dA$$

$$y_s = \frac{1}{m} \iint y \cdot \sigma(x,y) \, dA$$

Keine Angabe für σ : $\sigma = 1$

3D

$\rho(x,y,z)$: Volumendichte $[kg/m^3]$

$$m = \iiint \rho(x,y,z) \, dV$$

$$x_s = \frac{1}{m} \iiint x \cdot \rho(x,y,z) \, dV$$

$$y_s = \dots$$

Keine Angabe für ρ : $\rho = 1$

Trägheitsmoment

2D

Trägheitsmoment bzgl. einer Achse:

$$I_x = \iint_A \sigma(x,y) \cdot y^2 \, dA$$

$$I_y = \iint_A \sigma(x,y) \cdot x^2 \, dA$$

Polares Trägheitsmom. (bzgl. z-Achse/ Ursprung):

$$I_o = I_x + I_y = \iint_A \sigma(x,y) \cdot (x^2 + y^2) \, dA$$

Keine Angabe für σ : $\sigma = 1$

3D

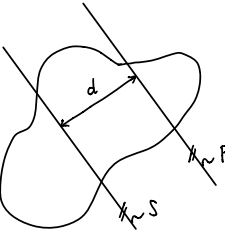
Trägheitsmoment bzgl. Achse:

$$I_x = \iiint_V \rho(x,y,z) \cdot (y^2 + z^2) \, dV$$

$$I_y = \iiint_V \rho(x,y,z) \cdot (x^2 + z^2) \, dV$$

Keine Angabe für ρ : $\rho = 1$

Satz von Steiner



$$I_p = I_s + d^2 \cdot m$$

$m := \text{Masse}$

$d := \text{Abstand}$

Oberflächenintegrale

Spezialfall eines Flächenintegrals.
Flächeninhalt einer parametr. Oberfläche berechnen:

$$\iint_{\mathcal{O}} d\mathcal{O} = \iint_{\mathcal{O}} |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \, dudv$$

Parametrisierung der Oberfläche:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}$$

Oberflächenelement: $d\mathcal{O} = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \, dudv$

Normalenvektor: $\vec{n} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v$

Normaleneinheitsvektor: $\vec{n}_o = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}$

Oberflächenelement entspricht Jacobi-Determinante.

Flächenparametrisierungen

Gängige Tricks falls die Fläche gegeben ist als:

1. $z = f(x,y)$

$$\vec{r}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix}$$

2. $z = f(r,\varphi)$

$$\vec{r}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \\ f(r,\varphi) \end{pmatrix}$$

3. Rotationssymmetrische Fläche

$$\vec{r}(t,\varphi) = \begin{bmatrix} \text{Rotations-} \\ \text{matrix} \\ (\varphi) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{Param.} \\ \text{Kurve} \\ (t) \end{pmatrix}.$$

Rotationsmatrizen

$s_\varphi := \sin(\varphi) \quad c_\varphi := \cos(\varphi)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\varphi & -s_\varphi \\ 0 & s_\varphi & c_\varphi \end{bmatrix}_x \quad \begin{bmatrix} c_\varphi & 0 & s_\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\varphi & 0 & c_\varphi \end{bmatrix}_y \quad \begin{bmatrix} c_\varphi & -s_\varphi & 0 \\ s_\varphi & c_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_z$$

Vektoranalysis

Jedem Punkt im Raum (x,y,z) wird ein Vektor zugeordnet.

$$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{pmatrix}$$

Allgemein

Divergenz (Quellstärke)

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = \nabla \cdot \vec{v} = u_x + v_y + w_z$$

Rotation (Wirbelstärke)

$$\operatorname{rot}(\vec{v}) = \nabla \times \vec{v} = \begin{pmatrix} w_y - v_z \\ u_z - w_x \\ v_x - u_y \end{pmatrix}$$

Identitäten

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}(\vec{v})) = 0 \quad \operatorname{rot}(\operatorname{grad}(f)) = 0$$

Fluss

$$\Phi = \iint_A \vec{v} \cdot \vec{n}_o \, dA$$
 Allgemein

$$\Phi = \iint_A \vec{v}(\vec{r}(u,v)) \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) \, dudv$$
 Parametr.

$$\Phi = \iiint_V \operatorname{div}(\vec{v}) \, dV$$
 Satz v. Gauss

Satz von Gauss

Falls \vec{v} in ganz B **definiert** und einmal **stetig differenzierbar** (*regulär*) ist, gilt

$$\iint_{\partial B} \vec{v} \cdot \vec{n}_o \, d\mathcal{O} = \iiint_B \operatorname{div}(\vec{v}) \, dV,$$

wobei ∂B die geschlossene Oberfläche des Volumens B bezeichnet. Der Normaleneinheitsvektor \vec{n}_o auf ∂B zeigt von innen nach aussen.

Arbeit

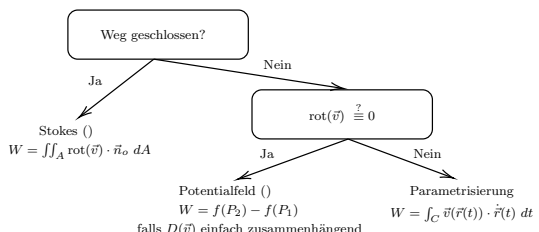
$$W = \int_C \vec{v} \, d\vec{r}$$
 Allgemein

$$W = \int_C \vec{v}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) \, dt$$
 Parametr.

$$W = \iint_A \operatorname{rot}(\vec{v}) \cdot \vec{n}_o \, dA$$
 Satz von Stokes

$$W = f(P_{\text{Ende}}) - f(P_{\text{Anfang}})$$
 Potentialfeld

Arbeit Berechnen



Satz von Stokes

Falls \vec{v} auf ganz A **definiert** und **stetig differenzierbar** (*regulär*) ist, gilt

$$\int_{\partial A} \vec{v} \, d\vec{r} = \iint_A \operatorname{rot}(\vec{v}) \cdot \vec{n}_o \, dA,$$

wobei ∂A den geschlossenen Rand der Fläche A bezeichnet. Der Normaleneinheitsvektor \vec{n}_o auf A beschreibt mit der *Rechte-Hand-Regel* den Umlaufsinn von ∂A .

Potentialfeld \vec{v} zum Potential f

Falls der Definitionsbereich $D(f)$ eines **wirbelfreien** ($\operatorname{rot}(\vec{v}) \equiv 0$) Vektorfeldes **einfach zusammenhängend** (EZH) ist, nennen wir es *konservativ*:

$$D(f) \text{ EZH und } \operatorname{rot}(\vec{v}) \equiv \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \operatorname{grad}(f).$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \operatorname{grad}(f)$$

$$f(x,y,z) = \int u \, dx = \int v \, dy = \int w \, dz$$

Die Arbeit zwischen zwei Punkten entspricht der Potentialdifferenz.

$$\vec{v} \text{ Potentialfeld} \Rightarrow \operatorname{rot}(\vec{v}) = \vec{0}$$

$$\vec{v} \text{ Potentialfeld} \Leftarrow \operatorname{rot}(\vec{v}) = \vec{0} \text{ \& } D(\vec{v}) = \text{EZH}$$

DGLs & Vektorfelder

$$y' = \frac{v_2}{v_1} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Feldlinien $y(x) \rightarrow$ Vektorfeld \vec{v}

1. Feldliniengleichung nach x ableiten $\rightarrow y'(x)$

2. Scharparameter eliminieren

3. $y' = \frac{v_2}{v_1} \rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

Vektorfeld $\vec{v} \rightarrow$ Feldlinien $y(x)$

1. $y' = \frac{v_2}{v_1}$

2. DGL lösen

Appendix A

Nullstellen Reeller Polynome mit Grad n

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n, \quad a_i \in \mathbb{R}$$

▷ Hat genau n Nullstellen (komplex und reell)

▷ Komplexe Nullstellen kommen immer im komplex-konjugierten Paar vor.

Cosinus und Sinus - Integrale

Für $a, b \in \mathbb{Z}$ und $n \geq 2$, gelten:

$$\int_{a \cdot \frac{\pi}{2}}^{b \cdot \frac{\pi}{2}} \sin^n(x) \, dx = \frac{n-1}{n} \int_{a \cdot \frac{\pi}{2}}^{b \cdot \frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x) \, dx$$

$$\int_{a \cdot \frac{\pi}{2}}^{b \cdot \frac{\pi}{2}} \cos^n(x) \, dx = \frac{n-1}{n} \int_{a \cdot \frac{\pi}{2}}^{b \cdot \frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}(x) \, dx$$

Diese Regel kann mehrfach angewandt werden.

Polynome n-ten Grades

▷ $f(x) = a$ für alle $x \in D(f) \Leftrightarrow f(x)$ ist konstant

▷ $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x)$ ist monoton wachsend

▷ $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f(x)$ ist monoton fallend

▷ $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ ist streng monoton wachsend

▷ $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ ist streng monoton fallend

▷ $f''(x) > 0, x \in [a,b] \Leftrightarrow f(x)$ **konvex** auf $[a,b] \cup$

▷ $f''(x) < 0, x \in [a,b] \Leftrightarrow f(x)$ **konkav** auf $[a,b] \cap$

▷ $f^n(x)$:

- n ungerade \rightarrow mind. eine Nullstelle
- maximal $n-1$ Extremalstellen

- n gerade und $\geq 2 \rightarrow$ mind. eine Extremalstelle
- maximal $n - 2$ Wendepunkte
- $n \geq 3$ und ungerade \rightarrow mind. ein Wendepunkt,
nicht zwingend Sattelpunkt

Wichtige Grenzwerte

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x)}{x}$	$= 1$	$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin \frac{1}{x}$	$= 1$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$	$= 1$	$\lim_{x \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{x}}$	$= 1$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(x)}{x}$	$= 1$	$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}}$	$= 1$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(ax)}$	$= \frac{1}{a}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$	$= e^a$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(x)}$	$= a$	$\lim_{x \rightarrow \infty} x^a \cdot \ln(x)^b$	$= 0$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(a+x)}{x}$	$= \frac{1}{a}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{ax}}{x^b}$	$= +\infty$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x}$	$= 0$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$	$= \frac{1}{e^2}$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$	$= \frac{1}{2}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x-1}$	$= 1$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x) - 1}{x}$	$= 1$	$\lim_{x \rightarrow \pm \pi/2} \frac{\tan(x)}{x}$	$= \mp \infty$

Reihenentwicklung spezieller Funktionen

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots$$
$$\frac{1}{1+2x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-2x^2)^n = 1 - 2x^2 + 4x^4 + \dots$$
$$\frac{x^2}{5-x} = x^2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{5}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} x^{n+2}$$
$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$
$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

Wichtige Integrale

$$\int \sin(x) \cos(x) dx = -\frac{1}{2} \cos^2(x) + C$$
$$\int \sin^2(x) \cos(x) dx = \frac{1}{3} \sin^3(x) + C$$
$$\int \sin(x) \cos^2(x) dx = -\frac{1}{3} \cos^3(x) + C$$
$$\int \ln(x) dx = x(\ln(x) - 1) + C$$
$$\int \frac{1}{x \ln(x)} dx = \ln |\ln |x|| + C$$
$$\int 2x \sqrt{r^2 - x^2} dx = -\frac{2}{3} (r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} + C, \quad r \neq 0$$
$$\int \sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \left(\operatorname{Arsinh}(x) + x \sqrt{1+x^2} \right) + C$$
$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \left(\arcsin(x) + x \sqrt{1-x^2} \right) + C$$
$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx = \sqrt{x^2-1} + C$$
$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \sqrt{x^2+1} + C$$
$$\int \frac{1}{x^2+x} dx = -\ln |1+x^{-1}| + C$$

Ableitung Un-/Gerader Funktionen

▷ $g(x)$ sei **gerade**

$$g'(0) = g^{(3)}(0) = g^{(5)}(0) = \dots = 0$$

▷ $f(x)$ sei **ungerade**

$$f''(0) = f^{(4)}(0) = f^{(6)}(0) = \dots = 0$$

Rechengesetze für Exponenten & Logarithmen

$$B^a \cdot B^b = B^{a+b}$$
$$\frac{B^a}{B^b} = B^{a-b}$$
$$(B^a)^b = B^{a \cdot b}$$
$$\log_B(a \cdot b) = \log_B(a) + \log_B(b)$$
$$\log_B\left(\frac{a}{b}\right) = \log_B(a) - \log_B(b)$$
$$\log_B(a^r) = r \cdot \log_B(a)$$

Basiswechsel: $\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$

Polarkoordinaten

Umrechnung im ersten Quadranten

$$\left. \begin{aligned} r &= \rho(\phi) \\ x &= \cos(\phi) \cdot r \\ y &= \sin(\phi) \cdot r \end{aligned} \right\} \phi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Parametrisierungen

Kreis / Ellipse

Ellipse mit Mittelpunkt (x_o, y_o) und Halbachsen a & b .
implizit:

$$\left(\frac{x-x_o}{a}\right)^2 + \left(\frac{y-y_o}{b}\right)^2 = 1$$

parametrisiert:

$$x(t) = x_o + a \cdot \cos(t)$$
$$y(t) = y_o + b \cdot \sin(t)$$

Normal- und Tangentialvektoren

explizit

$$y = f(x) \quad \vec{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x_o) \end{pmatrix} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} f'(x_o) \\ -1 \end{pmatrix}$$

parametrisiert

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad \vec{t} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} -\dot{y}(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}$$

Differentialrechnung

Ableitung Inverse Funktion

$$(f^{-1})'(x_o) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_o))}$$

Tangenten

Explizit

$$t(x) = f(x_o) + f'(x_o) \cdot (x - x_o)$$

Eine Tangente $t(x)$ an die Funktion $f(x)$ im Punkt x_o ,
erfüllt folgende Bedingungen:

$$t'(x_o) \stackrel{!}{=} f'(x_o),$$
$$t(x_o) \stackrel{!}{=} f(x_o).$$

Parametrisiert

Tangente $\vec{t}(s)$ an die Parametrisierung $\vec{r}(t)$ im Punkt t_o .

$$\vec{t}(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix} = \vec{r}(t_o) + s \cdot \dot{\vec{r}}(t_o)$$

Fehlerrechnung

Die berechnete Grösse f ist abhängig von der gemessenen Grösse x . Die gemessene Grösse weicht mit dem Messfehler dx von der Realität ab.

▷ **Linearisierung**

$$f(x) \approx f(x_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0} \cdot (x - x_0)$$

▷ **Absoluter Fehler**

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) \quad \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} \quad \Delta f \approx f'(x) \Delta x$$

▷ **Relativer Fehler**

$$\left| \frac{df}{f} \right|$$

Bemerkungen

1% Genauigkeit

Messfehler von 1°

$$\frac{\Delta x}{x} = 1\% = \frac{1}{100}$$
$$\Delta \alpha = \frac{\pi}{180}$$

Evolute

$E(t)$

Parametrisierung der Krümmungsmittelpunkte an die Kurve $\vec{r} = (x(t), y(t))^T$.

$$E(t) = \begin{pmatrix} x_E(t) \\ y_E(t) \end{pmatrix}$$

$$x_E(t) = x - \frac{\dot{y}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}$$

$$y_E(t) = y + \frac{\dot{x}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}$$

Krümmung

$k(t)$

▷ Parametrisierung $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))^T$

$$k(t) = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

▷ Explizit $y = f(x)$

$$k(x) = \frac{f''(x)}{(1 + f'(x)^2)^{3/2}}$$

▷ Polarkoordinaten $r = f(\varphi)$

$$k(\varphi) = \frac{(f(\varphi))^2 + 2(f'(\varphi))^2 - f(\varphi)f''(\varphi)}{[(f(\varphi))^2 + (f'(\varphi))^2]^{3/2}}$$

Integralrechnung

Hauptsatz der Infinitesimalrechnung

Für $a \in \mathbb{R}$

$$\frac{d}{dx} \left[\int_a^x f(t) dt \right] = f(x)$$

Partialbruchzerlegung

1. Nenner Faktorisieren
2. Ansatz
3. Koeffizientenvergleich, Konstanten bestimmen

Ansatz

▷ **n -fache reelle Nullstelle:**

$$\frac{(\dots)}{(x-x_o)^n} = \frac{A}{(x-x_o)} + \frac{B}{(x-x_o)^2} + \dots + \frac{Z}{(x-x_o)^n}$$

▷ **n -fache komplexe Nullstelle** (e.g. $(x^2 + 1)$):

$$\frac{(\dots)}{(x^2 + 1)^n} = \frac{Ax + B}{(x^2 + 1)} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 1)^2} + \dots + \frac{Yx + Z}{(x^2 + 1)^n}$$

Partielle Integration

Es sei $F'(x) = f(x)$ und $G'(x) = g(x)$, dann gilt

$$\int_a^b \underset{\downarrow}{G} \cdot \underset{\uparrow}{f} dx = G \cdot F \Big|_a^b - \int_a^b g \cdot F dx.$$

Bogenlänge

s

▷ explizit $y = f(x)$

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

▷ Polarkoordinaten $\rho = \rho(\varphi)$

$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2 + \dot{\rho}^2} d\varphi$$

▷ Parametrisierung $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))^T$

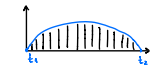
$$s = \int_{t_1}^{t_2} \left| \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \right| dt$$

Flächenberechnungen

▷ Parametrisierung $\vec{r} = (x(t), y(t))^T$

$$A = \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} y \dot{x} dt}_{x \text{ monoton steigend}}$$

$$A = \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} -y \dot{x} dt}_{x \text{ monoton fallend}}$$



Sektorfläche

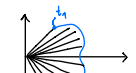
Fläche zwischen Ursprung und Kurve

▷ Parametrisierung

$$A = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (x \dot{y} - y \dot{x}) dt$$

▷ Polarkoordinaten

$$A = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi) d\varphi$$



Fläche auf der rechten Seite der Kurve hat positives Vorzeichen.

Rotationsvolumen

Kurvenrotation

Kurve rotiert um x-Achse:

$$V = \int_{t_1}^{t_2} \pi y^2(t) \cdot \underbrace{\dot{x}(t) dt}_{dx} = \int_{x_1}^{x_2} \pi f^2(x) \cdot dx$$

Kurve rotiert um y-Achse:

$$V = \int_{t_1}^{t_2} \pi x^2(t) \cdot \underbrace{\dot{y}(t) dt}_{dy} = \int_{y_1}^{y_2} \pi x^2 \cdot \underbrace{f'(x) dx}_{dy}$$

Flächenrotation

Fläche unter Kurve rotiert um y-Achse:

$$V = \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{2\pi x(t)}_{\text{Umfang}} \cdot y(t) \cdot \underbrace{\dot{x}(t) dt}_{dx} = \int_{x_1}^{x_2} 2\pi x \cdot f(x) dx$$

Rotationsoberflächen

Kurve rotiert um x-Achse:

$$O = \int_{t_1}^{t_2} 2\pi y(t) \cdot \underbrace{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt}_{ds \text{ (Bogenlänge)}}$$
$$= \int_{x_1}^{x_2} 2\pi f(x) \cdot \underbrace{\sqrt{1 + f'(x)^2} dt}_{ds}$$

Kurve rotiert um y-Achse:

$$O = \int_{t_1}^{t_2} 2\pi x(t) \cdot \underbrace{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt}_{ds}$$
$$= \int_{x_1}^{x_2} 2\pi x \cdot \underbrace{\sqrt{1 + f'(x)^2} dx}_{ds}$$

Schwerpunkt / Trägheitsmoment

Sei $H(x)$ die Höhe des Fläche a.d.S. x .
Sei σ die Flächendichte $[kg/m^2]$.

$$\text{Fläche: } A = \int_{x_1}^{x_2} H(x) dx$$

$$\text{Masse: } M = \int_{x_1}^{x_2} \sigma \cdot H(x) dx$$

$$\text{Schwerpunkt: } x_s = \frac{1}{M} \int_{x_1}^{x_2} x \cdot \sigma \cdot H(x) dx$$

$$\text{SP Rotationsvolumen: } x_s = \frac{1}{V} \int_{x_1}^{x_2} x \cdot \pi \cdot H^2(x) dx$$

$$\text{Trägheitsmoment: } I_y = \int_{x_1}^{x_2} x^2 \cdot \sigma \cdot H(x) dx$$

Trägheitsmoment

$$\Theta = \int (\text{Abstand zur Rotationsachse})^2 \cdot (\text{Masse})$$

$$\Theta = \rho \cdot \int_a^b x^2 \cdot G(x) dx$$

$$J_0 = \frac{\pi R^4}{2} = \text{polares Flächenträgheitsmoment der Kreisscheibe}$$

$$\Theta_x = \rho \cdot \int_a^b \frac{1}{2} \pi (f(x))^4 dx = \text{Masseträgheitsmoment eines Rotationskörpers um die x-Achse}$$

$$\Theta = \rho \cdot \frac{1}{2} \pi \int_a^b y(t)^4 \|\dot{x}(t)\| dt$$

$G(x)$ = Masse an diesem Abstand

$M(x)$ = Mantelfläche = $2\pi x \cdot G(x)$ = Umfang \cdot Höhe

$$\Theta_z = \rho \int_{x_1}^{x_2} x^2 \cdot M(x) dx$$

Uneigentliche Integrale

Konvergiert \iff Grenzwert existiert

1. Gattung

Zu integrierende Funktion ist an der Grenze nicht definiert. Bsp.:

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \int_{\xi}^1 \frac{1}{x} dx$$

2. Gattung

Unendlicher Integrationsbereich. Bsp.:

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \int_0^{\xi} f(x) dx$$

Tricks

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx \quad \text{konvergiert} \iff \alpha > 1$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha}} dx \quad \text{konvergiert} \iff \alpha < 1$$

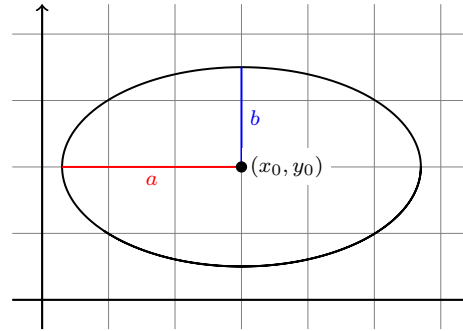
Appendix B

Häufige Parametrisierungen

Ellipse

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} a \cdot \cos(t) + x_0 \\ b \cdot \sin(t) + y_0 \end{pmatrix}$$

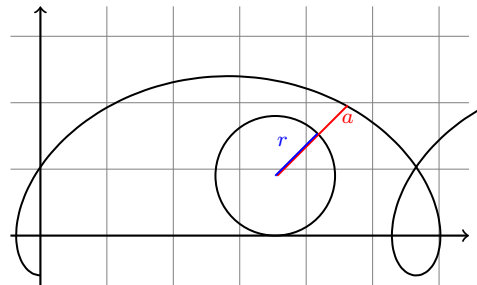
Sonderfall Kreis mit Radius $a = b$



Zykloide

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} rt - a \sin(t) \\ r - a \cos(t) \end{pmatrix}$$

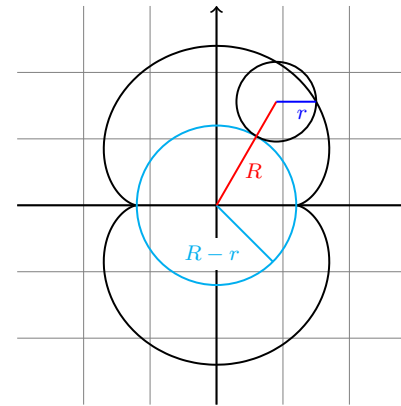
Sonderfall Gewöhnliche Zykloide $r = a$



Epizykloide

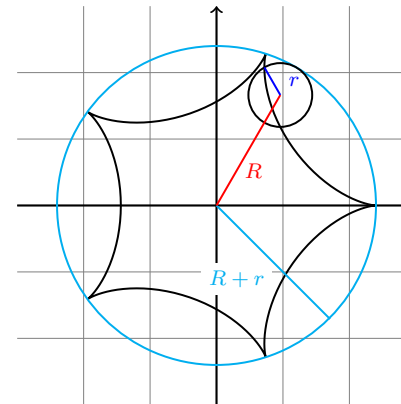
$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R \cos(t) - a \cos(\frac{R}{r}t) \\ R \sin(t) - a \sin(\frac{R}{r}t) \end{pmatrix}$$

Sonderfall Kardioiden $R = 2r, r = a$



Hypozykloide

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R \cos(t) + a \cos(\frac{R}{r}t) \\ R \sin(t) - a \sin(\frac{R}{r}t) \end{pmatrix}$$



Lissajous-Figuren

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} a_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) \\ a_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \end{pmatrix}$$

Häufige Funktionsgraphen

