

Funktionen

Folgen und Reihen

konvergent Es existiert ein Grenzwert sonst divergent.

beschränkt Alle Glieder in *endlich breitem*, *waagerechten Parallelstreifen* enthalten.

monoton wachsend $a_{n+1} \geq a_n$ (strikt: $>$)

mon. wachsend/ fallend & beschränkt \Rightarrow konvergent

Rechenregeln für konvergente Folgen

Falls $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n/b_n) = a/b.$$

Gilt auch für Funktionen; sofern Grenzwert existiert.

Geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^k a \cdot q^n = a \cdot \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} a \cdot q^n = \frac{a}{1 - q}, \quad \text{falls } |q| < 1$$

Arithmetische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} [a_1 + (n - 1) \cdot d] = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$$

häufige Reihen

$$\triangleright \sum_{n=1}^k n = \frac{k \cdot (k + 1)}{2} \triangleright \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$
$$\triangleright \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \begin{cases} \alpha = 1 \rightarrow \text{harm. Reihe} \\ = \infty, \alpha \leq 1 \text{ (divergiert)} \\ \neq \pm \infty, \alpha > 1 \text{ (konvergiert)} \end{cases}$$

Grenzwerte

Bernoulli de L'Hôpital

Falls $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ (oder $\pm \infty$), so gilt

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Landau Symbol

$$f(x) = o(g(x)) \text{ für } x \rightarrow a \iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$$f(x) = O(g(x)) \text{ für } x \rightarrow a \iff \lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq A \in \mathbb{R}$$

Es gilt:

$$x^k = o(e^x) \quad \text{für } x \rightarrow \infty, \quad k \in \mathbb{R}$$
$$\ln(x) = o(x^k) \quad \text{für } x \rightarrow \infty, \quad k > 0$$
$$f(x) = o(g(x)) \Rightarrow f(x) = O(g(x))$$
$$f(x) = O(g(x)) \not\Rightarrow f(x) = o(g(x))$$

Eigenschaften

Eine Funktion $f : A \rightarrow B$ ist eine Vorschrift, die jedem $x \in A$ ein Element $f(x) \in B$ zuordnet, $f : x \rightarrow f(x)$.

Definitionsbereich: $D(f) = A$

Zielbereich: $Z(f) = B$

Wertebereich: $W(f) = \{f(x) \mid x \in D(f)\}$

Surjektiv

Jeder Wert im Zielbereich $Z(f)$ wird angenommen.

$$W(f) = Z(f)$$

Injektiv

Jede Horizontale schneidet den Graphen $\Gamma(f)$ höchstens einmal.

$\triangleright f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, sonst nicht injektiv

Bijektiv

Injektiv & Surjektiv \Leftrightarrow Bijektiv \Leftrightarrow Umkehrbar

Inverse Funktion

Sei $f(x)$ eine Funktion von $D(f)$ nach $W(f)$, dann ist $f^{-1} : W(f) \rightarrow D(f)$ mit $y \mapsto f^{-1}(y)$ die inverse Funktion von $f(x)$.

$\triangleright W(f^{-1}) = D(f)$

$\triangleright D(f^{-1}) = W(f)$

Gerade & Ungerade

gerade: $f(-x) = f(x)$

ungerade: $f(-x) = -f(x)$

Stetigkeit

$f(x)$ ist stetig im Punkt ξ falls

$$\lim_{x \rightarrow \xi^-} f(x) = f(\xi) = \lim_{x \rightarrow \xi^+} f(x).$$

\triangleright Bei Lücken in $D(f)$ werden die einzelnen Abschnitte separat betrachtet.

Monotonie

(Strikt) Monoton Steigend

$\triangleright x_1 < x_2 \iff f(x_1) \leq f(x_2)$ (strikt: $<$)

$\triangleright f'(x) \geq 0$ (strikt: $>$)

(Strikt) Monoton Fallend

$\triangleright x_1 < x_2 \iff f(x_1) \geq f(x_2)$ (strikt: $>$)

$\triangleright f'(x) \leq 0$ (strikt: $<$)

Beschränktheit

Alle Funktionswerte sind in einem endlich breiten waagerechten Parallelstreifen enthalten.

Asymptoten

Wir nennen eine Funktion $g(x)$ eine Asymptote von $f(x)$ für $x \rightarrow \infty$ falls

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x)) = 0.$$

Hyperbolische Funktionen

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

$$\frac{d}{dx} \cosh(x) = \sinh(x) \quad \frac{d}{dx} \sinh(x) = \cosh(x)$$

$$\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1$$

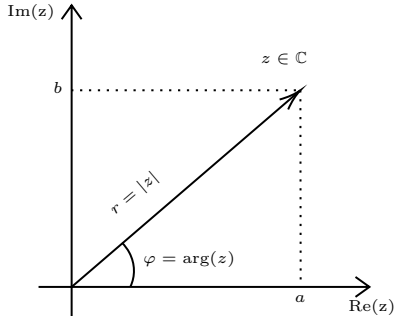
Inverse Funktionen

$$\cosh(x)^{-1} = \operatorname{arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

$$\sinh(x)^{-1} = \operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$\tanh(x)^{-1} = \operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)$$

Komplexe Zahlen



$$z = \underbrace{a + ib}_{\text{kartesisch}} = \underbrace{r \cos(\varphi) + ir \sin(\varphi)}_{\text{Polarform}} = \underbrace{r \cdot e^{i\varphi}}_{\text{Euler}}$$

Nullstellen Reeller Polynome mit Grad n

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n, \quad a_i \in \mathbb{R}$$

- \triangleright Hat genau n Nullstellen (komplex und reell)
- \triangleright Komplexe Nullstellen kommen immer im komplex-konjugierten Paar vor.

Komplex Konjugierte

Komplexe Zahl: $z = x - iy$

Komplex konjugierte Zahl: $\bar{z} = x + iy$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} \mid \frac{1}{z^2 - 1} = \frac{\bar{z}^2 - 1}{|z^2 - 1|}$$

Potenzreihen FoTaBe S.77

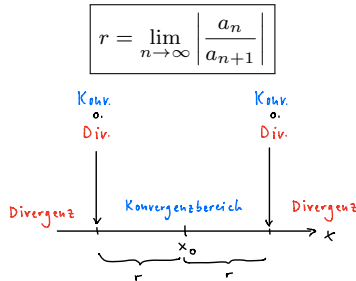
Potenzreihe der Funktion $f(x)$ um den Punkt x_o :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_o)^n$$

- \triangleright Höchstens eine Potenzreihe von f um x_o existiert.
- \triangleright Konvergiert für $|x - x_o| < r$

$$\frac{1}{1 - \boxed{x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \boxed{x}^n$$

Konvergenzradius r



Innerhalb vom Konvergenzbereich darf man Potenzreihen *gliedweise*:

- \triangleright addieren & subtrahieren
- \triangleright integrieren & differenzieren

Taylorreihen

Taylorentwicklung von $f(x)$ um x_o :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_o)}{n!} (x - x_o)^n$$

- \triangleright ungerade Fkt \Leftrightarrow ungerade Indizes: $a_1 x + a_3 x^3 + \dots$
- \triangleright gerade Fkt \Leftrightarrow gerade Indizes: $a_0 + a_2 x^2 + \dots$

Trigonometrie					
Werte Tabelle					
rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
deg	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$

Rechenregeln	
$1 = \sin(x)^2 + \cos(x)^2$	
$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$	
$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$	
$\sin(3\alpha) = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$	
$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$	
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$	
$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$	
$ = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$	
$\cos(3\alpha) = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$	
$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$	
$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$	
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$	

Funktionsmodifikation	
Frequenz $f : t \rightarrow \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$	
Amplitude $f : t \rightarrow A \cdot \sin(t)$	
Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{2\pi}{T} \left[\frac{1}{s}\right]$	

Appendix A
Nullstellen Reeller Polynome mit Grad n

- $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n, \quad a_i \in \mathbb{R}$
- ▷ Hat genau n Nullstellen (komplex und reell)
 - ▷ Komplexe Nullstellen kommen immer im komplex-konjugierten Paar vor.

Cosinus und Sinus - Integrale	
Für $a, b \in \mathbb{Z}$ und $n \geq 2$, gelten:	
$\int_{a \cdot \frac{\pi}{2}}^{b \cdot \frac{\pi}{2}} \sin^n(x) \, dx = \frac{n-1}{n} \int_{a \cdot \frac{\pi}{2}}^{b \cdot \frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x) \, dx$	
$\int_{a \cdot \frac{\pi}{2}}^{b \cdot \frac{\pi}{2}} \cos^n(x) \, dx = \frac{n-1}{n} \int_{a \cdot \frac{\pi}{2}}^{b \cdot \frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}(x) \, dx$	

Diese Regel kann mehrfach angewandt werden.

Polynome n-ten Grades	
▷ $f(x) = a$ für alle $x \in D(f) \Leftrightarrow f(x)$ ist konstant	
▷ $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x)$ ist monoton wachsend	
▷ $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f(x)$ ist monoton fallend	
▷ $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ ist streng monoton wachsend	
▷ $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ ist streng monoton fallend	
▷ $f''(x) > 0, x \in [a, b] \Leftrightarrow f(x)$ konvex auf $[a, b] \curvearrowright$	
▷ $f''(x) < 0, x \in [a, b] \Leftrightarrow f(x)$ konkav auf $[a, b] \curvearrowleft$	
▷ $f^n(x)$:	
– n ungerade \rightarrow mind. eine Nullstelle	
– maximal $n - 1$ Extremalstellen	
– n gerade und $\geq 2 \rightarrow$ mind. eine Extremalstelle	
– maximal $n - 2$ Wendepunkte	
– $n \geq 3$ und ungerade \rightarrow mind. ein Wendepunkt, nicht zwingend Sattelpunkt	

Wichtige Grenzwerte			
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x)}{x}$	$= 1$	$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin \frac{1}{x}$	$= 1$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$	$= 1$	$\lim_{x \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{x}}$	$= 1$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(x)}{x}$	$= 1$	$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}}$	$= 1$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(ax)}$	$= \frac{1}{a}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$	$= e^a$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(x)}$	$= a$	$\lim_{x \rightarrow \infty} x^a \cdot \ln(x)^b$	$= 0$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(a+x)}{x}$	$= \frac{1}{a}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{ax}}{x^b}$	$= +\infty$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x}$	$= 0$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$	$= \frac{1}{e^2}$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$	$= \frac{1}{2}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x-1}$	$= 1$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x) - 1}{x}$	$= 1$	$\lim_{x \rightarrow \pm\pi/2} \frac{\tan(x)}{x}$	$= \mp\infty$

Reihenentwicklung spezieller Funktionen	
$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots$	
$\frac{1}{1+2x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-2x^2)^n = 1 - 2x^2 + 4x^4 + \dots$	
$\frac{x^2}{5-x} = x^2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{5}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} x^{n+2}$	
$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$	
$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$	

Wichtige Integrale	
$\int \sin(x) \cos(x) dx = -\frac{1}{2} \cos^2(x) + C$	
$\int \sin^2(x) \cos(x) dx = \frac{1}{3} \sin^3(x) + C$	
$\int \sin(x) \cos^2(x) dx = -\frac{1}{3} \cos^3(x) + C$	
$\int \ln(x) dx = x(\ln(x) - 1) + C$	
$\int \frac{1}{x \ln(x)} dx = \ln \ln x + C$	
$\int 2x \sqrt{r^2 - x^2} dx = -\frac{2}{3} (r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} + C, \, r \neq 0$	
$\int \sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \left(\operatorname{Arsinh}(x) + x \sqrt{1+x^2} \right) + C$	
$\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \left(\arcsin(x) + x \sqrt{1-x^2} \right) + C$	
$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx = \sqrt{x^2-1} + C$	
$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \sqrt{x^2+1} + C$	
$\int \frac{1}{x^2+x} dx = -\ln 1+x^{-1} + C$	

Ableitung Un-/Gerader Funktionen	
▷ $g(x)$ sei gerade	
$g'(0) = g^{(3)}(0) = g^{(5)}(0) = \dots = 0$	
▷ $f(x)$ sei ungerade	
$f''(0) = f^{(4)}(0) = f^{(6)}(0) = \dots = 0$	

Rechengesetze für Exponenten & Logarithmen	
$B^a \cdot B^b = B^{a+b}$	
$\frac{B^a}{B^b} = B^{a-b}$	
$(B^a)^b = B^{a \cdot b}$	
$\log_B(a \cdot b) = \log_B(a) + \log_B(b)$	
$\log_B\left(\frac{a}{b}\right) = \log_B(a) - \log_B(b)$	
$\log_B(a^r) = r \cdot \log_B(a)$	
Basiswechsel: $\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$	

Polarkoordinaten	
Umrechnung im ersten Quadranten	
$\left. \begin{aligned} r &= \rho(\phi) \\ x &= \cos(\phi) \cdot r \\ y &= \sin(\phi) \cdot r \end{aligned} \right\} \phi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$	

Parametrisierungen

Kreis / Ellipse

Ellipse mit Mittelpunkt (x_o, y_o) und Halbachsen a & b .
implizit:

$$\left(\frac{x-x_o}{a}\right)^2 + \left(\frac{y-y_o}{b}\right)^2 = 1$$

parametrisiert:

$$x(t) = x_o + a \cdot \cos(t)$$
$$y(t) = y_o + b \cdot \sin(t)$$

Normal- und Tangentialvektoren

explizit

$$y = f(x) \quad \vec{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x_o) \end{pmatrix} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} f'(x_o) \\ -1 \end{pmatrix}$$

parametrisiert

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad \vec{t} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} -\dot{y}(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}$$

Differentialrechnung

Ableitung Inverse Funktion

$$(f^{-1})'(x_o) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_o))}$$

Tangenten

Explizit

$$t(x) = f(x_o) + f'(x_o) \cdot (x - x_o)$$

Eine Tangente $t(x)$ an die Funktion $f(x)$ im Punkt x_o ,
erfüllt folgende Bedingungen:

$$t'(x_o) \stackrel{!}{=} f'(x_o),$$
$$t(x_o) \stackrel{!}{=} f(x_o).$$

Parametrisiert

Tangente $\vec{t}(s)$ an die Parametrisierung $\vec{r}(t)$ im Punkt t_o .

$$\vec{t}(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix} = \vec{r}(t_o) + s \cdot \dot{\vec{r}}(t_o)$$

Fehlerrechnung

Die berechnete Grösse f ist abhängig von der gemessenen Grösse x . Die gemessene Grösse weicht mit dem Messfehler dx von der Realität ab.

▷ **Linearisierung**

$$f(x) \approx f(x_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0} \cdot (x - x_0)$$

▷ **Absoluter Fehler**

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) \quad \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} \quad \Delta f \approx f'(x) \Delta x$$

▷ **Relativer Fehler**

$$\left| \frac{df}{f} \right|$$

Bemerkungen

$$\begin{array}{ll} 1\% \text{ Genauigkeit} & \text{Messfehler von } 1^\circ \\ \frac{\Delta x}{x} = 1\% = \frac{1}{100} & \Delta \alpha = \frac{\pi}{180} \end{array}$$

Evolute

$E(t)$

Parametrisierung der Krümmungsmittelpunkte an die Kurve $\vec{r} = (x(t), y(t))^T$.

$$E(t) = \begin{pmatrix} x_E(t) \\ y_E(t) \end{pmatrix}$$

$$x_E(t) = x - \frac{\dot{y}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}$$

$$y_E(t) = y + \frac{\dot{x}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}$$

Krümmung

$k(t)$

▷ Parametrisierung $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))^T$

$$k(t) = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

▷ Explizit $y = f(x)$

$$k(x) = \frac{f''(x)}{(1 + f'(x)^2)^{3/2}}$$

▷ Polarkoordinaten $r = f(\varphi)$

$$k(\varphi) = \frac{(f(\varphi))^2 + 2(f'(\varphi))^2 - f(\varphi)f''(\varphi)}{[(f(\varphi))^2 + (f'(\varphi))^2]^{3/2}}$$

Integralrechnung

Hauptsatz der Infinitesimalrechnung

Für $a \in \mathbb{R}$

$$\frac{d}{dx} \left[\int_a^x f(t) dt \right] = f(x)$$

Partialbruchzerlegung

1. Nenner Faktorisieren
2. Ansatz
3. Koeffizientenvergleich, Konstanten bestimmen

Ansatz

▷ **n -fache reelle Nullstelle:**

$$\frac{(\dots)}{(x-x_o)^n} = \frac{A}{(x-x_o)} + \frac{B}{(x-x_o)^2} + \dots + \frac{Z}{(x-x_o)^n}$$

▷ **n -fache komplexe Nullstelle** (e.g. $(x^2 + 1)$):

$$\frac{(\dots)}{(x^2 + 1)^n} = \frac{Ax + B}{(x^2 + 1)} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 1)^2} + \dots + \frac{Yx + Z}{(x^2 + 1)^n}$$

Partielle Integration

Es sei $F'(x) = f(x)$ und $G'(x) = g(x)$, dann gilt

$$\int_a^b \underset{\downarrow}{G} \cdot \underset{\uparrow}{f} dx = G \cdot F \Big|_a^b - \int_a^b \underset{g}{g} \cdot \underset{f}{F} dx.$$

Bogenlänge

s

▷ explizit $y = f(x)$

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

▷ Polarkoordinaten $\rho = \rho(\varphi)$

$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2 + \dot{\rho}^2} d\varphi$$

▷ Parametrisierung $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))^T$

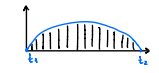
$$s = \int_{t_1}^{t_2} \left| \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \right| dt$$

Flächenberechnungen

▷ Parametrisierung $\vec{r} = (x(t), y(t))^T$

$$A = \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} y \dot{x} dt}_{x \text{ monoton steigend}}$$

$$A = \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} -y \dot{x} dt}_{x \text{ monoton fallend}}$$



Sektorfläche

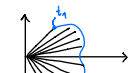
Fläche zwischen Ursprung und Kurve

▷ Parametrisierung

$$A = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (x \dot{y} - y \dot{x}) dt$$

▷ Polarkoordinaten

$$A = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi) d\varphi$$



Fläche auf der rechten Seite der Kurve hat positives Vorzeichen.

Rotationsvolumen

Kurvenrotation

Kurve rotiert um x-Achse:

$$V = \int_{t_1}^{t_2} \pi y^2(t) \cdot \underbrace{\dot{x}(t) dt}_{dx} = \int_{x_1}^{x_2} \pi f^2(x) \cdot dx$$

Kurve rotiert um y-Achse:

$$V = \int_{t_1}^{t_2} \pi x^2(t) \cdot \underbrace{\dot{y}(t) dt}_{dy} = \int_{y_1}^{y_2} \pi x^2 \cdot \underbrace{f'(x) dx}_{dy}$$

Flächenrotation

Fläche unter Kurve rotiert um y-Achse:

$$V = \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{2\pi x(t)}_{\text{Umfang}} \cdot \underbrace{y(t)}_{\text{Höhe}} \cdot \underbrace{\dot{x}(t) dt}_{dx} = \int_{x_1}^{x_2} 2\pi x \cdot f(x) dx$$

Rotationsoberflächen

Kurve rotiert um x-Achse:

$$\begin{aligned} O &= \int_{t_1}^{t_2} 2\pi y(t) \cdot \underbrace{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}}_{ds \text{ (Bogenlänge)}} dt \\ &= \int_{x_1}^{x_2} 2\pi f(x) \cdot \underbrace{\sqrt{1 + f'(x)^2}}_{ds} dt \end{aligned}$$

Kurve rotiert um y-Achse:

$$\begin{aligned} O &= \int_{t_1}^{t_2} 2\pi x(t) \cdot \underbrace{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}}_{ds} dt \\ &= \int_{x_1}^{x_2} 2\pi x \cdot \underbrace{\sqrt{1 + f'(x)^2}}_{ds} dx \end{aligned}$$

Schwerpunkt / Trägheitsmoment

Sei $H(x)$ die Höhe des Fläche a.d.S. x .
Sei σ die Flächendichte $[kg/m^2]$.

$$\text{Fläche: } A = \int_{x_1}^{x_2} H(x) dx$$

$$\text{Masse: } M = \int_{x_1}^{x_2} \sigma \cdot H(x) dx$$

$$\text{Schwerpunkt: } x_s = \frac{1}{M} \int_{x_1}^{x_2} x \cdot \sigma \cdot H(x) dx$$

$$\text{SP Rotationsvolumen: } x_s = \frac{1}{V} \int_{x_1}^{x_2} x \cdot \pi \cdot H^2(x) dx$$

$$\text{Trägheitsmoment: } I_y = \int_{x_1}^{x_2} x^2 \cdot \sigma \cdot H(x) dx$$

Trägheitsmoment

$$\Theta = \int (\text{Abstand zur Rotationsachse})^2 \cdot (\text{Masse})$$

$$\Theta = \rho \cdot \int_a^b x^2 \cdot G(x) dx$$

$$J_0 = \frac{\pi R^4}{2} = \text{polares Flächenträgheitsmoment der Kreisscheibe}$$

$$\Theta_x = \rho \cdot \int_a^b \frac{1}{2} \pi (f(x))^4 dx = \text{Masseträgheitsmoment eines Rotationskörpers um die x-Achse}$$

$$\Theta = \rho \cdot \frac{1}{2} \pi \int_a^b y(t)^4 \|\dot{x}(t)\| dt$$

$G(x)$ = Masse an diesem Abstand

$M(x)$ = Mantelfläche = $2\pi x \cdot G(x)$ = Umfang \cdot Höhe

$$\Theta_z = \rho \int_{x_1}^{x_2} x^2 \cdot M(x) dx$$

Uneigentliche Integrale

Konvergiert \iff Grenzwert existiert

1. Gattung

Zu integrierende Funktion ist an der Grenze nicht definiert. Bsp.:

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \int_{\xi}^1 \frac{1}{x} dx$$

2. Gattung

Unendlicher Integrationsbereich. Bsp.:

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \int_0^{\xi} f(x) dx$$

Tricks

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx \quad \text{konvergiert} \iff \alpha > 1$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha}} dx \quad \text{konvergiert} \iff \alpha < 1$$

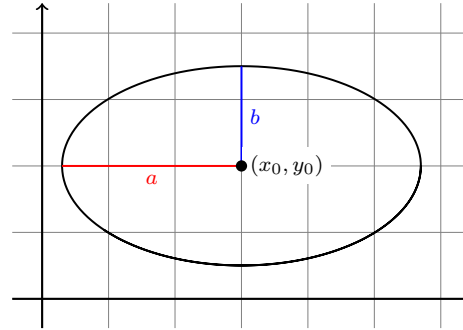
Appendix B

Häufige Parametrisierungen

Ellipse

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} a \cdot \cos(t) + x_0 \\ b \cdot \sin(t) + y_0 \end{pmatrix}$$

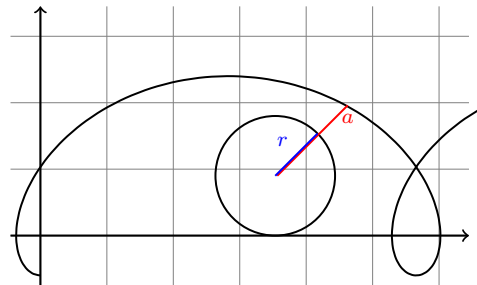
Sonderfall Kreis mit Radius $a = b$



Zykloide

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} rt - a \sin(t) \\ r - a \cos(t) \end{pmatrix}$$

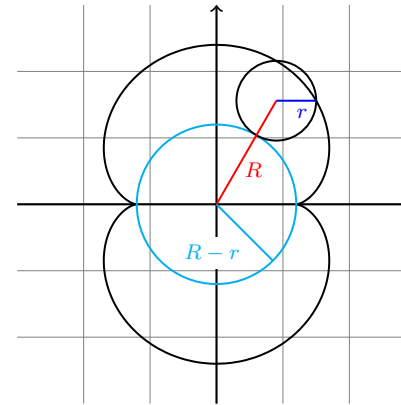
Sonderfall Gewöhnliche Zykloide $r = a$



Epizykloide

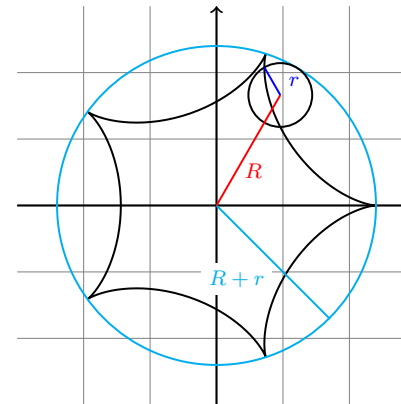
$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R \cos(t) - a \cos(\frac{R}{r}t) \\ R \sin(t) - a \sin(\frac{R}{r}t) \end{pmatrix}$$

Sonderfall Kardioiden $R = 2r, r = a$



Hypozykloide

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R \cos(t) + a \cos(\frac{R}{r}t) \\ R \sin(t) + a \sin(\frac{R}{r}t) \end{pmatrix}$$



Lissajous-Figuren

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} a_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) \\ a_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \end{pmatrix}$$

Häufige Funktionsgraphen

