Analysis 2 Zusammenfassung

Micha Bosshart - bmicha@ethz.ch
ergänzt von Noa Sendlhofer & Christian Leser

Version: November 2, 2023

Template by Micha Bosshart

1 Funktionen

1.1 Folgen und Reihen

konvergent Es existiert ein Grenzwert sonst divergent.

beschränkt Alle Glieder in *endlich breitem, waagerechten Parallelstreifen* enthalten.

monoton wachsend $a_{n+1} \geq a_n$ (*strikt* : $>$)

$\boxed{\text{mon. wachsend/ fallend \& beschränkt} \Rightarrow \text{konvergent}}$

1.1.1 Rechenregeln für konvergente Folgen

Falls $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, gilt:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$$
$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$$
$$\lim_{n\to\infty}(a_n / b_n) = a/b.$$

Gilt auch für Funktionen; sofern Grenzwert existiert.

1.1.2 Geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{k} a \cdot q^n = a \cdot \frac{1-q^{k+1}}{1-q}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} a \cdot q^n = \frac{a}{1-q}, \quad \text{falls } |q| < 1$$

1.1.3 Arithmetische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} [a_1 + (n-1)\cdot d] = \frac{n}{2}\cdot(a_1 + a_n)$$

1.1.4 häufige Reihen

- $\sum_{n=1}^{k} n = \frac{k\cdot(k+1)}{2}$ ▷ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} \alpha = 1 \rightarrow \text{ harm. Reihe} \\ = \infty, \alpha \leq 1 \text{ (divergiert)} \\ \neq \pm\infty, \alpha > 1 \text{ (konvergiert)} \end{cases}$

1.2 Grenzwerte

1.2.1 Bernoulli de L'Hôpital

Falls $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ (oder $\pm\infty$), so gilt

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

1.2.2 Landau Symbol

$$\boxed{f(x) = o(g(x)) \text{ für } x \to a} \iff \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$$\boxed{f(x) = O(g(x)) \text{ für } x \to a} \iff \lim_{x\to a}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq A \in \mathbb{R}$$

Es gilt:

$$x^k = o(e^x) \quad \text{für } x\to\infty, \quad k \in \mathbb{R}$$
$$\ln(x) = o(x^k) \quad \text{für } x\to\infty, \quad k > 0$$
$$f(x) = o(g(x)) \Rightarrow f(x) = O(g(x))$$
$$f(x) = O(g(x)) \not\Rightarrow f(x) = o(g(x))$$

1.3 Eigenschaften

Eine Funktion $f : A \to B$ ist eine Vorschrift, die jedem $x \in A$ ein Element $f(x) \in B$ zuordnet, $f : x \to f(x)$.

Definitionsbereich: $D(f) = A$

Zielbereich: $Z(f) = B$

Wertebereich: $W(f) = \{f(x) | \, x \in D(f)\}$

1.3.1 Surjektiv

Jeder Wert im Zielbereich $Z(f)$ wird angenommen.

$$\boxed{W(f) = Z(f)}$$

1.3.2 Injektiv

Jede Horizontale schneidet den Graphen $\Gamma(f)$ höchstens einmal.

- $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, sonst nicht injektiv

1.3.3 Bijektiv

Injektiv & Surjektiv ⇔ Bijektiv ⇔ Umkehrbar

1.3.4 Inverse Funktion

Sei $f(x)$ eine Funktion von $D(f)$ nach $W(f)$, dann ist $f^{-1} : W(f) \to D(f)$ mit $y \mapsto f^{-1}(y)$ die inverse Funktion von $f(x)$.

- $W(f^{-1}) = D(f)$
- $D(f^{-1}) = W(f)$

1.3.5 Gerade & Ungerade

gerade: $f(-x) = f(x)$

ungerade: $f(-x) = -f(x)$

1.3.6 Stetigkeit

$f(x)$ ist stetig im Punkt ξ falls

$$\lim_{x\to\xi^-} f(x) = f(\xi) = \lim_{x\to\xi^+} f(x).$$

- Bei Lücken in $D(f)$ werden die einzelnen Abschnitte separat betrachtet.

1.3.7 Monotonie

(Strikt) Monoton Steigend

- $x_1 < x_2 \iff f(x_1) \leq f(x_2)$ (strikt: $<$)
- $f'(x) \geq 0$ (strikt: $>$)

(Strikt) Monoton Fallend

- $x_1 < x_2 \iff f(x_1) \geq f(x_2)$ (strikt: $>$)
- $f'(x) \leq 0$ (strikt: $<$)

1.3.8 Beschränktheit

Alle Funktionswerte sind in einem endlich breiten waagerechten Parallelstreifen enthalten.

1.4 Asymptoten

Wir nennen eine Funktion $g(x)$ eine Asymptote von $f(x)$ für $x \to \infty$ falls

$$\lim (f(x) - g(x)) = 0.$$

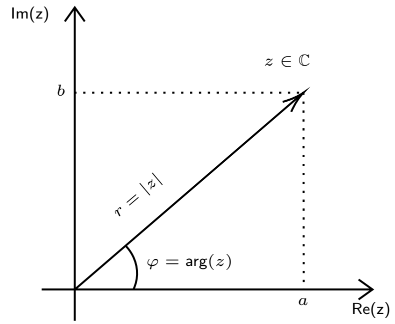
1.5 Hyperbolische Funktionen

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$
$$\frac{d}{dx}\cosh(x) = \sinh(x) \qquad \frac{d}{dx}\sinh(x) = \cosh(x)$$
$$\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1$$

1.5.1 Inverse Funktionen

$$\cosh(x)^{-1} = \operatorname{arcosh}(x) \quad = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$$
$$\sinh(x)^{-1} = \operatorname{arsinh}(x) \quad = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$
$$\tanh(x)^{-1} = \operatorname{artanh}(x) \quad = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

2 Komplexe Zahlen



$$\boxed{z = \underbrace{a + ib}_{\text{kartesisch}} = \underbrace{r\cos(\varphi) + ir\sin(\varphi)}_{\text{Polarform}} = \underbrace{r \cdot e^{i\varphi}}_{\text{Euler}}}$$

2.1 Nullstellen Reeller Polynome mit Grad n

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n, \qquad a_i \in \mathbb{R}$$

- Hat genau n Nullstellen (komplex und reell)
- Komplexe Nullstellen kommen immer im komplex-konjugierten Paar vor.

2.2 Komplex Konjugierte

Komplexe Zahl: $z = x - iy$

Komplex konjugierte Zahl: $\bar{z} = x - iy$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z_2}}{z_2 \cdot \bar{z_2}} \;\Big|\; \frac{1}{z^2-1} = \frac{\bar{z}^2-1}{|z^2-1|}$$

3 Potenzreihen

Potenzreihe der Funktion $f(x)$ um den Punkt x_o:

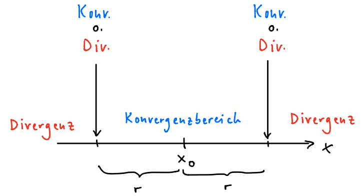
$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_o)^n}$$

- Höchstens eine Potenzreihe von f um x_o existiert.
- Konvergiert für $|x - x_o| < r$

$$\boxed{\frac{1}{1-\boxed{\text{x}}} = \sum_{n=0}^{\infty} \boxed{\text{x}}^k}$$

3.1 Konvergenzradius

$$\boxed{r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|}$$



Innerhalb vom Konvergenzbereich darf man Potenzreihen *gliedweise*:

- addieren & subtrahieren
- integrieren & differenzieren

3.2 Taylorreihen

Taylorentwicklung von $f(x)$ um x_o:

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}(x - x_o)^n}$$

- ungerade Fkt ⇔ ungerade Indizes: $a_1 x + a_3 x^3 + \ldots$
- gerade Fkt ⇔ gerade Indizes: $a_0 + a_2 x^2 + \ldots$

4 Parametrisierungen

4.1 Kreis / Ellipse

Ellipse mit Mittelpunkt (x_o, y_o) und Halbachsen a & b.

implizit:

$$\left(\frac{x - x_o}{a}\right)^2 + \left(\frac{y - y_o}{b}\right)^2 = 1$$

parametrisiert:

$$x(t) = x_o + a\cdot\cos(t)$$
$$y(t) = y_o + b\cdot\sin(t)$$

4.2 Hyperboloid

implizit:

$$\left(\frac{x - x_o}{a}\right)^2 + \left(\frac{y - y_o}{b}\right)^2 + \left(\frac{z - z_o}{c}\right)^2 = 1$$

parametrisiert:

$$x(\lambda, t) = a(\cos(t) - \lambda\sin(t))$$
$$y(\lambda, t) = b(\sin(t) + \lambda\cos(t))$$
$$z(\lambda, t) = c\lambda$$

4.3 Normal- und Tangentialvektoren

4.3.1 explizit

$$y = f(x) \quad \vec{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x_o) \end{pmatrix} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} f'(x_o) \\ -1 \end{pmatrix}$$

4.3.2 parametrisiert

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad \vec{t} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} -\dot{y}(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}$$

5 Differentialrechnung

5.1 Ableitung Inverse Funktion

$$(f^{-1})'(x_o) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_o))}$$

5.2 Tangenten

5.2.1 Explizit

$$\boxed{t(x) = f(x_o) + f'(x_o)\cdot(x - x_o)}$$

Eine Tangente $t(x)$ an die Funktion $f(x)$ im Punkt x_o, erfüllt folgende Bedingungen:

$$t'(x_o) \overset{!}{=} f'(x_o),$$
$$t(x_o) \overset{!}{=} f(x_o).$$

5.2.2 Parametrisiert

Tangente $\vec{t}(s)$ an die Parametrisierung $\vec{r}(t)$ im Punkt t_o.

$$\boxed{\vec{t}(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix} = \vec{r}\,(t_o) + s\cdot\dot{\vec{r}}\,(t_o)}$$

5.3 Fehlerrechnung

Die berechnete Grösse f ist abhängig von der gemessenen Grösse x. Die gemessene Grösse weicht mit dem Messfehler dx von der Realität ab.

- **Linearisierung**

$$\boxed{f(x) \approx f(x_0) + \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{x_0}\cdot(x - x_0)}$$

- **Absoluter Fehler**

$$\boxed{\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) \quad \overset{\Delta x \to 0}{\longrightarrow} \quad \Delta f \approx f'(x)\,\Delta x}$$

- **Relativer Fehler**

$$\boxed{\frac{df}{f}}$$

5.3.1 Bemerkungen

1% Genauigkeit	Messfehler von 1°
$\frac{\Delta x}{x} = 1\% = \frac{1}{100}$	$\Delta\alpha = \frac{\pi}{180}$

5.4 Evolute $E(t)$

Parametrisierung der Krümmungsmittelpunkte an die Kurve $\vec{r} = (x(t), y(t))^T$.

$$E(t) = \begin{pmatrix} x_E(t) \\ y_E(t) \end{pmatrix}$$

$$x_E(t) = x - \frac{\dot y\,(\dot x^2 + \dot y^2)}{\dot x\ddot y - \ddot x\dot y}$$

$$y_E(t) = y + \frac{\dot x\,(\dot x^2 + \dot y^2)}{\dot x\ddot y - \ddot x\dot y}$$

5.5 Krümmung $k(t)$

- Parametrisierung $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))^T$

$$k(t) = \frac{\dot x\ddot y - \ddot x\dot y}{(\dot x^2 + \dot y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

- Explizit $y = f(x)$

$$k(x) = \frac{f''(x)}{(1 + f'(x)^2)^{3/2}}$$

- Polarkoordinaten $r = f(\varphi)$

$$k(\varphi) = \frac{(f(\varphi))^2 + 2(f'(\varphi))^2 - f(\varphi)f''(\varphi)}{[(f(\varphi))^2 + (f'(\varphi))^2]^{3/2}}$$

6 Integralrechnung

6.1 Leibnitz Theorem

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)dt\right) =$$

$$\int_{a(x)}^{b(x)} f_x(x,t)dt + f(x, b(x))\frac{db(x)}{dx} - f(x, a(x))\frac{da(x)}{dx}$$

6.2 Hauptsatz der Infinitesimalrechnung

Für $a \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right] = f(x)}$$

6.3 Partialbruchzerlegung

1. Nenner Faktorisieren
2. Ansatz
3. Koeffizientenvergleich, Konstanten bestimmen

Ansatz

▷ **n-fache reelle Nullstelle**:

$$\frac{(\dots)}{(x-x_o)^n} = \frac{A}{(x-x_o)} + \frac{B}{(x-x_o)^2} + \dots + \frac{Z}{(x-x_o)^n}$$

▷ **n-fache komplexe Nullstelle** (e.g. (x^2+1)):

$$\frac{(\dots)}{(x^2+1)^n} = \frac{Ax+B}{(x^2+1)} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2} + \dots + \frac{Yx+Z}{(x^2+1)^n}$$

6.4 Partielle Integration

Es sei $F'(x) = f(x)$ und $G'(x) = g(x)$, dann gilt

$$\int_a^b \underset{\downarrow}{G}\cdot \underset{\uparrow}{f}\,dx = G\cdot F\Big|_a^b - \int_a^b g\cdot F\,dx.$$

6.5 Bogenlänge s

- explizit $y = f(x)$

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\;dx$$

- Polarkoordinaten $\rho = \rho(\varphi)$

$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2 + \dot\rho^2}\;d\varphi$$

- Parametrisierung $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))^T$

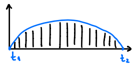
$$s = \int_{t_1}^{t_2} \left|\sqrt{\dot x^2 + \dot y^2}\right|\;dt$$

6.6 Flächenberechnungen

- Parametrisierung $\vec{r} = (x(t), y(t))^T$

$$A = \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} +y\dot x\,dt}_{x \text{ monoton steigend}}$$

$$A = \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} -y\dot x\,dt}_{x \text{ monoton fallend}}$$

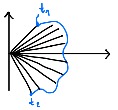


6.6.1 Sektorfläche

Fläche zwischen Ursprung und Kurve

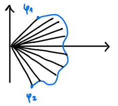
- Parametrisierung

$$A = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} (x\dot y - y\dot x)\,dt$$



- Polarkoordinaten

$$A = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi)\,d\varphi$$



Fläche auf der rechten Seite der Kurve hat positives Vorzeichen.

Rotationsvolumen

Kurvenrotation

Kurve rotiert um x-Achse:

$$V = \int_{t_1}^{t_2} \pi y^2(t)\cdot\underbrace{\dot x(t)dt}_{dx} = \int_{x_1}^{x_2} \pi f^2(x)\cdot dx$$

Kurve rotiert um y-Achse:

$$V = \int_{t_1}^{t_2} \pi x^2(t)\cdot\underbrace{\dot y(t)dt}_{dy} = \int_{y_1}^{y_2} \pi x^2\cdot\underbrace{f'(x)dx}_{dy}$$

Flächenrotation

Fläche unter Kurve rotiert um y-Achse:

$$V = \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{2\pi x(t)}_{\text{Umfang}}\cdot y(t)\cdot\underbrace{\dot x(t)dt}_{dx} = \int_{x_1}^{x_2} 2\pi x\cdot f(x)dx$$

6.7 Rotationsoberflächen

Kurve rotiert um x-Achse:

$$O = \int_{t_1}^{t_2} 2\pi y(t)\cdot\underbrace{\sqrt{\dot x^2(t) + \dot y^2(t)}\;dt}_{ds\text{ (Bogenlänge)}}$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} 2\pi f(x)\cdot\underbrace{\sqrt{1 + f'(x)^2}\;dt}_{ds}$$

Kurve rotiert um y-Achse:

$$O = \int_{t_1}^{t_2} 2\pi x(t)\cdot\underbrace{\sqrt{\dot x^2(t) + \dot y^2(t)}\;dt}_{ds}$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} 2\pi x\cdot\underbrace{\sqrt{1 + f'(x)^2}\;dx}_{ds}$$

6.8 Schwerpunkt / Trägheitsmoment

Sei $H(x)$ die Höhe des Flächenstücks a.d.S. x.
Sei σ die Flächendichte $[kg/m^2]$.

$$\text{Fläche: } A = \int_{x_1}^{x_2} H(x)\,dx$$

$$\text{Masse: } M = \int_{x_1}^{x_2} \sigma\cdot H(x)\,dx$$

$$\text{Schwerpunkt: } x_s = \frac{1}{M}\int_{x_1}^{x_2} x\cdot\sigma\cdot H(x)\,dx$$

$$\text{SP Rotationsvolumen: } x_s = \frac{1}{V}\int_{x_1}^{x_2} x\cdot\pi\cdot H^2(x)\,dx$$

$$\text{Trägheitsmoment: } I_y = \int_{x_1}^{x_2} x^2\cdot\sigma\cdot H(x)\,dx$$

6.8.1 Trägheitsmoment

$$\Theta = \int(\text{Abstand zur Rotationsachse})^2\cdot(\text{Masse})$$

$$\Theta = \rho\cdot\int_a^b x^2\cdot G(x)dx$$

$J_0 = \frac{\pi R^4}{2} =$ polares Flächenträgheitsmoment der Kreisscheibe

$\Theta_x = \rho\cdot\int_a^b \frac{1}{2}\pi(f(x))^4 dx =$ Massenträgheitsmoment eines Rotationskörpers um die x-Achse

$$\Theta = \rho\cdot\frac{1}{2}\pi\int_a^b y(t)^4\|\dot x(t)\|dt$$

$G(x) =$ Masse an diesem Abstand

$M(x) =$ Mantelfläche $= 2\pi x\cdot G(x) =$ Umfang $\cdot$ Höhe

$$\Theta_z = \rho\int_{x_1}^{x_2} x^2\cdot M(x)dx$$

6.9 Uneigentliche Integrale

Konvergiert $\iff$ Grenzwert existiert

6.9.1 1. Gattung

Zu integrierende Funktion ist an der Grenze nicht definiert. Bsp.:

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\xi\to 0^+}\int_\xi^1 \frac{1}{x}\,dx$$

6.9.2 2. Gattung

Unendlicher Integrationsbereich. Bsp.:

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \lim_{\xi\to\infty}\int_0^\xi f(x)\,dx$$

6.9.3 Tricks

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx \quad \text{konvergiert} \iff \alpha > 1$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx \quad \text{konvergiert} \iff \alpha < 1$$

7 Mehrdimensionale Fkt. - Diff. Rechnung

7.1 Fehlerrechnung

Die berechnete Grösse f ist abhängig von den gemessenen Grössen x, y. Die gemessenen Grössen weichen mit den Messfehlern dx, dy von der Realität ab.

- **Totales Differential / Absoluter Fehler**

$$\boxed{df \approx f_x\ dx + f_y\ dy}$$

- **Relativer Fehler**

$$\boxed{\frac{df}{f}}$$

7.1.1 Bemerkungen

1% Genauigkeit

$$\frac{dx}{x} = 1\% = \frac{1}{100}$$

Messfehler von 1°

$$d\alpha = \frac{\pi}{180}$$

7.2 Niveaulinien / -flächen

2D

$$f(x,y) = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Höhenlinien

3D

$$f(x,y,z) = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

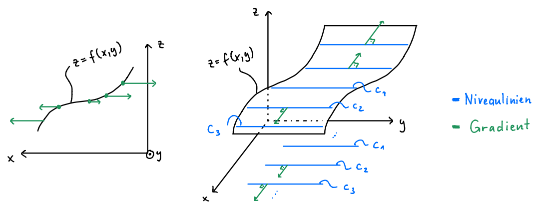
Flächen mit konst. Temp.

7.3 Gradient

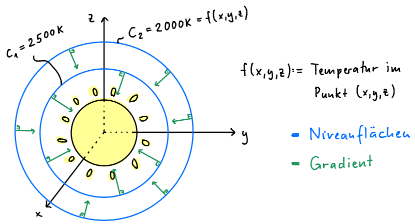
$$\boldsymbol{\nabla}(f(x,y,z)) = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}$$

- Steht senkrecht auf Niveauflächen/ -linien.
- Zeigt in Richtung des grössten Anstiegs der Funktionswerte.

7.3.1 2D - $f(x,y)$



7.3.2 3D - $f(x,y,z)$



7.4 Richtungsableitung

Steigung von f in Richtung $\vec{e}$ im Punkt $\vec{r}_o$:

$$D_{\vec{e}}f = \frac{\vec{e}}{|\vec{e}|} \cdot \operatorname{grad} f(\vec{r}_o)$$

7.5 Tangentialebenen

7.5.1 Linearisierungsformel

$$\boxed{z = f(x_o,y_o) + f_x(x_o,y_o)(x-x_o) + f_y(x_o,y_o)(y-y_o)}$$

$$\boxed{0 = f_x(x_o,y_o,z_o)(x-x_o) + f_y(x_o,y_o,z_o)(y-y_o) + \ldots}$$

7.5.2 Gradient

- $f(x,y,z) = C$ ist eine Niveaufläche
- $\boldsymbol{\nabla}(f)$ steht senkrecht auf Niveauflächen. ($\rightarrow \vec{n}$)
- Ebene mit Normalenvektor $\vec{n} = (A,B,C)^T$:

$$Ax + By + Cz = D$$

7.6 Extremalstellen von $f(x,y)$

1. Inneres untersuchen $\rightarrow \operatorname{grad} f \stackrel{!}{=} 0$
2. Rand untersuchen
   - Lagrange Multiplikatoren
     (a) $g(x,y)$ beschreibt Rand
     (b) $\operatorname{grad} f(x_o,y_o) = \lambda \cdot \operatorname{grad} g(x_o,y_o)$
         $\operatorname{grad} g(x_o,y_o) \neq 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}$
     (c) Gleichungssystem aus (a) und (b) lösen.
   - Parametrisierung
     (a) Rand parametrisieren
     (b) Parametrisierung in f einsetzen
     (c) Nach Parameter ableiten und nullsetzen.
         $f'(t) = 0$
3. Eckpunkte untersuchen
4. Kandidaten vergleichen
5. Art der Extremalstelle: Hesse-Matrix aufstellen

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

   - Maximum: $\mathcal{H}$ ist negativ definit ($\lambda_i < 0$)
   - Minimum: $\mathcal{H}$ ist positiv definit ($\lambda_i > 0$)
   - Sattelstelle: $\mathcal{H}$ ist indefinit ($\mathcal{H}$ besitzt $\lambda_i > 0$ **und** $\lambda_i < 0$)

7.7 Satz von Schwarz

Die Reihenfolge von partiellen Ableitungen einer stetigen Funktion spielt keine Rolle.

$$f_{xxyyzz} = f_{xzyxyz}$$

7.8 Integrabilitätsbedingungen (IB)

Geg.: $\phi(x,y), \psi(x,y)$
Ges.: $f(x,y)$ mit:

$$f_x \equiv \phi \quad \text{und} \quad f_y \equiv \psi$$

1. IB prüfen (Satz von Schwarz):

$$\phi_y \equiv \psi_x$$

2. $f(x,y)$ bestimmen (Konstante nicht vergessen!):

$$f = \int \phi\, dx = \int \psi\, dy$$

7.9 Verallgemeinerte Kettenregel

$$Geg.: f(x,y,z), \quad x(t), y(t), z(\rho), \quad \rho(t)$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{d\rho}\frac{d\rho}{dt}$$

8 Mehrdimensionale Fkt. - Int. Rechnung

8.1 Flächen- & Volumenintegrale

2D

$$\iint f(x,y)\ dA$$

Flächenintegral

3D

$$\iiint f(x,y,z)\ dV$$

Volumenintegral

8.2 Dimensionsvergleich

$$\int f(x)\,dx = Fläche = \iint 1\,dA$$

$$\iint f(x,y)\,dA = Volumen = \iiint 1\,dV$$

$$\iiint f(x,y,z)\,dV = \ldots$$

8.3 Koordinatentransformationen

kartesisch:

$$dA = dxdy \qquad dV = dxdydz$$

zylindrisch:

$$x = r\cos(\varphi) \qquad x = r\cos(\varphi)$$
$$y = r\sin(\varphi) \qquad y = r\sin(\varphi)$$
$$z = z$$
$$dA = r\,dr d\varphi \qquad dV = r\,dr d\varphi dz$$

sphärisch:

$$x = r\sin(\theta)\cos(\varphi)$$
$$y = r\sin(\theta)\sin(\varphi)$$
$$z = r\cos(\theta)$$

$$dV = r^2\sin(\theta)\,dr d\varphi d\theta$$

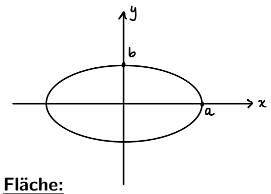
8.3.1 Ellipsenkoordinaten

Rand:
implizit:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

parametrisiert:

$$x = a \cdot \cos(\varphi)$$
$$y = b \cdot \sin(\varphi)$$



Fläche:

$$x = a \cdot r \cdot \cos(\varphi)$$
$$y = b \cdot r \cdot \sin(\varphi)$$

$$dA = abr\,dr d\varphi$$
$$r \in [0,1]$$

8.3.2 Jacobi Matrix & Determinante

Koordinatentransformation von x,y,z nach u,v,w:

$$x = x(u,v,w) \qquad y = y(u,v,w) \qquad z = z(u,v,w)$$

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{bmatrix}$$

$$dxdydz = |\det(\boldsymbol{J})|\ dudvdw$$

8.4 Schwerpunkte

8.4.1 2D

$\sigma(x,y)$: Flächendichte $[kg/m^2]$

$$m = \iint \sigma(x,y)\,dA$$
$$x_s = \frac{1}{m}\iint x \cdot \sigma(x,y)\,dA$$
$$y_s = \frac{1}{m}\iint y \cdot \sigma(x,y)\,dA$$

Keine Angabe für σ: $\sigma = 1$

8.4.2 3D

$\rho(x,y,z)$: Volumendichte $[kg/m^3]$

$$m = \iiint \rho(x,y,z)\,dV$$
$$x_s = \frac{1}{m}\iiint x \cdot \rho(x,y,z)\,dV$$
$$y_s = \ldots$$

Keine Angabe für ρ: $\rho = 1$

8.5 Trägheitsmoment

8.5.1 2D

Trägheitsmoment bzgl. einer Achse:

$$I_x = \iint_A \sigma(x,y) \cdot y^2\,dA$$
$$I_y = \iint_A \sigma(x,y) \cdot x^2\,dA$$

Polares Trägheitsmom. (bzgl. z-Achse/ Ursprung):

$$I_o = I_x + I_y = \iint_A \sigma(x,y) \cdot (x^2+y^2)\,dA$$

Keine Angabe für σ: $\sigma = 1$

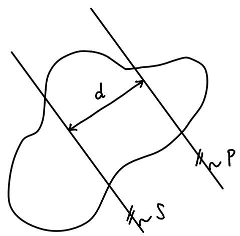
8.5.2 3D

Trägheitsmoment bzgl. Achse:

$$I_x = \iiint_V \rho(x,y,z) \cdot (y^2+z^2)\,dV$$
$$I_y = \iiint_V \rho(x,y,z) \cdot (x^2+z^2)\,dV$$

Keine Angabe für ρ: $\rho = 1$

8.5.3 Satz von Steiner



$$I_p = I_s + d^2 \cdot m$$
$$m := Masse$$
$$d := Abstand$$

8.6 Leibnitz Theorem

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)dt\right) =$$

$$\int_{a(x)}^{b(x)} f_x(x,t)dt + f(x,b(x))\,\frac{db(x)}{dx} - f(x,a(x))\,\frac{da(x)}{dx}$$

8.7 Oberflächenintegrale

Spezialfall eines Flächenintegrals.
Flächeninhalt einer parametr. Oberfläche berechnen:

$$\boxed{\iint_{\mathcal{O}} d\mathcal{O} = \iint_{\mathcal{O}} |\vec{r}_u \times \vec{r}_v|\, dudv}$$

Parametrisierung der Oberfläche:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}$$

Oberflächenelement: $d\mathcal{O} = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v|\, dudv$

Normalenvektor: $\vec{n} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v$

Normaleneinheitsvektor: $\vec{n}_o = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}$

Oberflächenelement entspricht Jacobi-Determinante.

8.8 Flächenparametrisierungen

Gängige Tricks falls die Fläche gegeben ist als:

1. $z = f(x,y)$
$$\vec{r}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix}$$
2. $z = f(r,\varphi)$
$$\vec{r}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ f(r,\varphi) \end{pmatrix}$$
3. Rotationssymmetrische Fläche
$$\vec{r}(t,\varphi) = \begin{bmatrix} \text{Rotations}- \\ \text{matrix} \\ (\varphi) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{Param.} \\ \text{Kurve} \\ \text{(t)} \end{pmatrix}.$$

8.8.1 Rotationsmatrizen

$$s_\varphi := \sin(\varphi) \qquad c_\varphi := \cos(\varphi)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\varphi & -s_\varphi \\ 0 & s_\varphi & c_\varphi \end{bmatrix}_x \quad \begin{bmatrix} c_\varphi & 0 & s_\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\varphi & 0 & c_\varphi \end{bmatrix}_y \quad \begin{bmatrix} c_\varphi & -s_\varphi & 0 \\ s_\varphi & c_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_z$$

9 Vektoranalysis

Jedem Punkt im Raum (x,y,z) wird ein Vektor zugeordnet.

$$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{pmatrix}$$

9.1 Allgemein

Divergenz (Quellstärke)

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = \nabla \cdot \vec{v} = u_x + v_y + w_z$$

Rotation (Wirbelstärke)

$$\operatorname{rot}(\vec{v}) = \nabla \times \vec{v} = \begin{pmatrix} w_y - v_z \\ u_z - w_x \\ v_x - u_y \end{pmatrix}$$

9.1.1 Identitäten

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\text{rot}(\vec{v})) = 0 \qquad\qquad \text{rot}(\boldsymbol{\nabla}(f)) = 0$$

9.2 Fluss

Φ

$\Phi = \iint_A \vec{v} \cdot \vec{n_0}\, dA$	Allgemein
$\Phi = \iint_A \vec{v}(\vec{r}(u,v)) \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v)\, dudv$	Parametr.
$\Phi = \iiint_V \boldsymbol{\nabla} \cdot (\vec{v})\, dV$	**Satz v. Gauss**

9.2.1 Satz von Gauss

Falls $\vec{v}$ in ganz B **definiert** und einmal **stetig differenzierbar** (*regulär*) ist, gilt

$$\iint_{\partial B} \vec{v} \cdot \vec{n_0}\, dO = \iiint_B \boldsymbol{\nabla} \cdot (\vec{v})\, dV,$$

wobei ∂B die geschlossene Oberfläche des Volumens B bezeichnet. Der Normaleneinheitsvektor $\vec{n_0}$ auf ∂B zeigt von innen nach aussen.

9.3 Arbeit

$W = \int_C \vec{v}\, d\vec{r}$	Allgemein
$W = \int_C \vec{v}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t)\, dt$	Parametr.
$W = \iint_A \text{rot}(\vec{v}) \cdot \vec{n_0}\, dA$	Satz von Stokes
$W = f(P_{\text{Ende}}) - f(P_{\text{Anfang}})$	Potentialfeld

9.3.1 Satz von Stokes

Falls $\vec{v}$ auf ganz A **definiert** und **stetig differenzierbar** (*regulär*) ist, gilt

$$\int_{\partial A} \vec{v}\, d\vec{r} = \iint_A \text{rot}(\vec{v}) \cdot \vec{n_0}\, dA,$$

wobei ∂A den geschlossenen Rand der Fläche A bezeichnet. Der Normaleneinheitsvektor $\vec{n_0}$ auf A beschreibt mit der *Rechte-Hand-Regel* den Umlaufsinn von ∂A.

9.3.2 Potentialfeld $\vec{v}$ zum Potential f

Falls der Definitionsbereich $D(f)$ eines **wirbelfreien** ($\text{rot}(\vec{v}) \equiv 0$) Vektorfeldes **einfach zusammenhängend** (EZH) ist, nennen wir es *konservativ*:

$$\boxed{D(f)\ \text{EZH} \quad \textit{und} \quad \text{rot}(\vec{v}) \equiv \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \boldsymbol{\nabla}(f).}$$

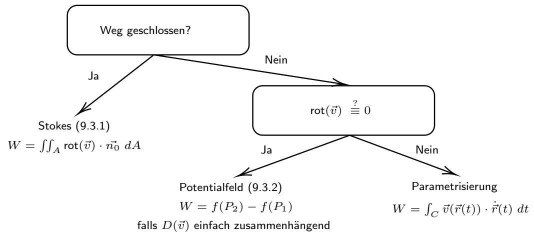
$$\vec{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \boldsymbol{\nabla}(f)$$

$$f(x,y,z) = \int u\ dx = \int v\ dy = \int w\ dz$$

Die Arbeit zwischen zwei Punkten entspricht der Potentialdifferenz.

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{v}\ \text{Potentialfeld} \implies \text{rot}(\vec{v}) = \vec{0} \\ \vec{v}\ \text{Potentialfeld} \impliedby \text{rot}(\vec{v}) = \vec{0}\ \&\ D(\vec{v}) =\ \text{EZH} \end{array}}$$

9.3.3 Arbeit Berechnen



9.4 DGLs & Vektorfelder

$$y' = \frac{v_2}{v_1} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

9.4.1 Feldlinien $y(x) \to$ Vektorfeld $\vec{v}$

1. Feldliniengleichung nach x ableiten $\to y'(x)$
2. Scharparameter eliminieren
3. $y' = \frac{v_2}{v_1} \to \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

9.4.2 Vektorfeld $\vec{v}$ $\to$Feldlinien $y(x)$

1. $y' = \frac{v_2}{v_1}$
2. DGL lösen

10 Differentialgleichungen (DGL)

10.1 Eigenschaften

10.1.1 Existenz- & Eindeutigkeitssatz

Sei $y' = f(x,y)$ in $D(f)$ **stetig** und **stetig partiell nach y differenzierbar**.

$\Rightarrow$ Für jeden Punkt $(x_o, y_o) \in D(f)$ gibt es *genau eine* Lösung.

$\Rightarrow$ Graphen von versch. Anfangswertproblemen (AWP) sind identisch oder disjunkt (kein gem. Pkt.).

10.1.2 Linear

Eine DGL heisst *linear*, falls alle y-Terme $(y, y', y'', \dots)$ nur linear vorkommen. ($\rightarrow$ Kein: $sin(y')$, $y \cdot y'$, e^y, $\dots$)

10.1.3 Separierbar

Separierbare DGLs können auf folgende Form gebracht werden:

$$\boxed{h(y(x)) \cdot y'(x) = g(x).}$$

$$h(y(x)) \cdot \frac{dy}{dx} = g(x)$$

$$\int h(y(x)) \cdot dy = \int g(x) \cdot dx$$

10.1.4 Substitutionen

$$u(x) = \frac{y}{x}$$

$$u(x) = ax + by(x) + c$$

$$u(x) = y'(x)$$

Um y' zu ersetzen, Substitution nach y umformen und nach x ableiten.

10.2 Orthogonaltrajektorien

$$\boxed{y' = -\frac{1}{y'_{OT}}}$$

1. Kurvenschar $y(x)$ ableiten $\rightarrow y'(x)$
2. Scharparameter eliminieren
3. Obige Relation einsetzen und $y \rightarrow y_{OT}$
4. DGL für y_{OT} lösen

10.3 Enveloppe / Umhüllende

$$\boxed{\begin{aligned} F(x,y,C) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial C} F(x,y,C) &= 0 \end{aligned}}$$

1. Darstellung der Kurvenschar mit Scharparameter C finden: $F(x,y,C) = 0$
2. Ausdruck für Scharparam. mit obigen Gleichungen bestimmen.
3. Gefundenen Ausdruck $\widetilde{C}$ für Scharparam. in $F(x,y,C) = 0$ einsetzen $\rightarrow$ Enveloppengleichung

10.4 Lineare DGL 1. Ordnung

$$\boxed{y' + p(x) \cdot y = q(x)}$$

$\triangleright$ $q(x) :=$ Störfunktion

10.4.1 Homogen $\quad q(x) \equiv 0$

$$\boxed{y' + p(x) \cdot y = 0}$$

$\triangleright$ Immer separierbar. (10.1.3)

10.4.2 Inhomogen $\quad q(x) \neq 0$

$$\boxed{y' + p(x) \cdot y = q(x)}$$

1. $q(x) = 0$ setzen, homogene Lösung y_h finden
2. Partikuläre Lösung y_p finden:
   - Ansatz von Tabelle
   - Lagrange-Methode

10.4.3 Ansatz

1. Ansatz für y_p in inhomogene DGL einsetzen
2. Koeffizientenvergleich
3. $y = y_h + y_p$

Störfunktion $q(x)$	Ansatz für $y_p(x)$
Konstante	$y_p = A$
lineare Fkt.	$y_p = Ax + B$
Polynom Grad n	$y_p = Ax^n + Bx^{n-1} + \cdots$
$A\sin(\omega x)$, $A\cos(\omega x)$, $A\sin(\omega x) + B\cos(\omega x)$	$y_p = C\sin(\omega x) + D\cos(\omega x)$
Ae^{bx}	$y_p = Be^{bx}$

Ansatz funktioniert nicht $\rightarrow$ mit x multiplizieren.

10.4.4 Lagrange-Methode

1. Lagrange-Ansatz y_p: $y_h = C \cdots \rightarrow y_p = C(x) \cdots$
2. Ansatz in inhomogene DGL einsetzen
3. Nach $C'(x)$ auflösen und integrieren
4. $C(x)$ in y_p einsetzen
5. $y = y_p$

10.5 DGL Spezialfälle

10.5.1 Clairaut'sche DGL

Entspricht Geraden mit Steigung y' und Achsenabschnitten $g(y')$.

$$\boxed{y = y' \cdot x + g(y')}$$

- **Allgemeine Lösung:**

$$y' = C \rightarrow y = C \cdot x + g(C)$$

- **Singuläre Lösung:**
  Enveloppe der allg. Lsg. bestimmen. (10.3)

10.5.2 Exakte DGL

$$\boxed{f_x + f_y \cdot y' = 0}$$

- Bedingung: $f_{xy} = f_{yx}$
- Allgemeine Lösung: $f(x,y) = C$

10.6 Lineare DGL n. Ordnung - konst. Koeff.

10.6.1 Homogen

$$\boxed{a_n y^{(n)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0}$$

1. Ansatz $\boxed{y = e^{\lambda x}}$ einsetzen $\rightarrow$ **char. Polynom**
2. Nullstellen λ_i des char. Polynom bestimmen
   - $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \cdots$, reell
   $$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + C_3 e^{\lambda_3 x} + \cdots$$
   - $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots$, reell
   $$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_2 x} + C_3 x^2 e^{\lambda_3 x} + \cdots$$
   - $\lambda_{1,2} = \lambda_{3,4} = \cdots = a \pm ib$
   $$\begin{aligned} y = \ & e^{ax}(C_1\cos(bx) + C_2\sin(bx)) + \\ & x e^{ax}(C_3\cos(bx) + C_4\sin(bx)) + \\ & x^2 e^{ax}(C_5\cos(bx) + C_6\sin(bx)) + \cdots \end{aligned}$$

10.6.2 Inhomogen

$$\boxed{a_n y^{(n)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = q(x)}$$

1. Homogene Lösung y_h bestimmen (10.6.1)
2. Partikuläre Lösung y_p
   - Ansatz wie gewohnt (10.4.2)
     Ansatz klappt nicht $\rightarrow$ mit x multiplizieren
   - Lagrange-Methode (10.7)

10.7 Lagrange-Methode 2. Ordnung

1. DGL auf folgende Form bringen:
$$y'' + p_0(x)y' + p_1(x)y = q(x)$$
2. Homogene Lösung
$$y_h = C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x)$$
3. $C_1(x), C_2(x)$ bestimmen
$$C_1(x) = -\int \frac{q(x)y_2(x)}{W(x)} dx$$
$$C_2(x) = \int \frac{q(x)y_1(x)}{W(x)} dx$$
$$W(x) = y_1 y_2' - y_1' y_2 \qquad q(x) = \text{Störterm}$$
4. Allgemeine Lösung
$$\boxed{y = C_1(x)\, y_1(x) + C_2(x)\, y_2(x)}$$

10.8 Euler DGL

10.8.1 Homogen

$$\boxed{a_n x^n y^{(n)} + \cdots + a_2 x^2 y'' + a_1 x y' + a_0 y = 0}$$

1. Ansatz $\boxed{y = x^\alpha}$ einsetzen $\rightarrow$ **Indexpolynom**
2. Nullstellen α_i des Indexpolynom bestimmen
   - $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \cdots$, reell
   $$y = C_1 x^{\alpha_1} + C_2 x^{\alpha_2} + C_3 x^{\alpha_3} + \cdots$$
   - $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots$, reell
   $$y = C_1 x^{\alpha_1} + C_2 \ln(x) x^{\alpha_2} + C_3 \ln(x)^2 x^{\alpha_3} + \cdots$$
   - $\alpha_{1,2} = \alpha_{3,4} = \cdots = a \pm ib$
   $$\begin{aligned} y = \ & x^a(C_1\cos(b\ln(x)) + C_2\sin(b\ln(x))) + \\ & \ln(x) x^a(C_3\cos(b\ln(x)) + C_4\sin(b\ln(x))) + \\ & \ln(x)^2 x^a(C_5\cos(b\ln(x)) + C_6\sin(b\ln(x))) + \cdots \end{aligned}$$

10.8.2 Inhomogen

$$\boxed{a_n x^n y^{(n)} + \cdots + a_2 x^2 y'' + a_1 x y' + a_0 y = q(x)}$$

1. Homogene Lösung y_h bestimmen (10.8.1)
2. Partikuläre Lösung y_p
   - Ansatz (10.4.2)
     Ansatz klappt nicht $\rightarrow$ mit $\ln(x)$ multiplizieren
   - Lagrange-Methode (10.7)

10.9 DGL Systeme

Allgemein:

$$y_1'(x) = f_1(x, y_1, y_2)$$
$$y_2'(x) = f_2(x, y_1, y_2)$$

Autonom:

$$y_1'(x) = f_1(y_1, y_2)$$
$$y_2'(x) = f_2(y_1, y_2)$$

- Ein DGL System heisst **autonom**, falls die zu den gesuchten Funktionen (y_1, y_2) gehörige Variable (x) nicht explizit vorkommt.

10.9.1 Existenz- & Eindeutigkeitssatz

Die Funktionen f_1, f_2 seien **stetig in x** und **stetig partiell nach y_1, y_2 differenzierbar**.

$\Rightarrow$ Zu vorgegebenem $x_o, y_{1,o}, y_{2,o}$ gibt es *genau ein Paar* f_1, f_2, welches das System löst und das AWP $y_1(x_o) = y_{1,o}$ und $y_2(x_o) = y_{2,o}$ erfüllt.

10.9.2 Lineare Autonome DGL Systeme mit konstanten Koeffizienten

$$\dot{x} = A \cdot x + b$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}}_{\dot{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{x} + \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}}_{b}$$

- **Eliminationsverfahren**
  1. Nach einer gesuchten Funktion auflösen, ableiten und einsetzen
  2. DGL 2. Ordnung lösen
  3. Zweite gesuchte Funktion bestimmen
- **Linalg-Methode**
  1. Eigenwerte λ_i (EW) bestimmen
  $$0 \stackrel{!}{=} \det(A - \lambda \mathbb{I})$$
  2. Eigenvektoren $\vec{v}_i$ zu EW λ_i bestimmen
  $$(A - \lambda_i \mathbb{I}) \cdot \vec{v}_i \stackrel{!}{=} 0$$
  3. Lösung Konstruieren:
     - $\lambda_{1,2}$ reell
     $$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \cdot \vec{v}_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + C_2 \cdot \vec{v}_2 \cdot e^{\lambda_2 t}}$$
     - $\lambda_{1,2} = a \pm ib$
     $$\lambda_1 = a + ib \quad \rightarrow \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} c \\ id \end{pmatrix}$$
     $$w = \vec{v}_1 \cdot e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} c \\ id \end{pmatrix} e^{(a+ib)t}$$
     $$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \cdot \mathrm{Re}(\vec{w}) + C_2 \cdot \mathrm{Im}(\vec{w})}$$

10.9.3 Gleichgewichtspunkte (GGWP)

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

10.9.4 Stabilitätsverhalten

$$\dot{x} = f_1(x, y)$$
$$\dot{y} = f_2(x, y)$$

1. Falls nötig um GGWP (x_o, y_o) linearisieren:
$$\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_o, y_o) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_o, y_o) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_o, y_o) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_o, y_o) \end{bmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K_{f_1} \\ K_{f_2} \end{pmatrix}$$
2. Eigenwerte λ_i von A bestimmen
   - Re$(\lambda_i) < 0, \ \forall i$ $\quad\rightarrow$ *asymptotisch stabil*
   - Re$(\lambda_i) \leq 0, \ \forall i$ $\quad\rightarrow$ *stabil*
   - Re$(\lambda_i) > 0, \ \exists i$ $\quad\rightarrow$ *instabil*

10.9.5 Phasenportrait

Die Feldlinien des Vektorfeldes $\vec{v}$ beschreiben die Lösungskurven des *autonomen* DGL Systems.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix}$$

$$y_{pp}' = \frac{v_2}{v_1} \rightarrow y_{pp} = \int \frac{v_2}{v_1}$$

11 Appendix

11.1 Nullstellen Reeller Polynome mit Grad n

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n, \qquad a_i \in \mathbb{R}$$

- Hat genau n Nullstellen (komplex und reell)
- Komplexe Nullstellen kommen immer im komplex-konjugierten Paar vor.

11.2 Cosinus und Sinus - Integrale

Für $a, b \in \mathbb{Z}$ und $n \geq 2$, gelten:

$$\int_{a\cdot\frac{\pi}{2}}^{b\cdot\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,dx = \frac{n-1}{n}\int_{a\cdot\frac{\pi}{2}}^{b\cdot\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x)\,dx$$

$$\int_{a\cdot\frac{\pi}{2}}^{b\cdot\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\,dx = \frac{n-1}{n}\int_{a\cdot\frac{\pi}{2}}^{b\cdot\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}(x)\,dx$$

Diese Regel kann mehrfach angewandt werden.

11.3 Polynome n-ten Grades

- $f(x) = a$ für alle $x\, \epsilon D(f) \;\Leftrightarrow\; f(x)$ ist konstant
- $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x)$ ist monoton wachsend
- $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f(x)$ ist monoton fallend
- $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ ist streng monoton wachsend
- $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ ist streng monoton fallend
- $f''(x) > 0, x\, \epsilon\, [a,b] \Leftrightarrow f(x)$ **konvex** auf $[a,b]$ $\smile$
- $f''(x) < 0, x\, \epsilon\, [a,b] \Leftrightarrow f(x)$ **konkav** auf $[a,b]$ $\frown$
- $f^n(x)$:
  - n ungerade $\rightarrow$ mind. eine Nullstelle
  - maximal $n-1$ Extremalstellen
  - n gerade und $\geq 2 \rightarrow$ mind. eine Extremalstelle
  - maximal $n-2$ Wendepunkte
  - $n \geq 3$ und ungerade $\rightarrow$ mind. ein Wendepunkt, nicht zwingend Sattelpunkt

11.4 Wichtige Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to\infty} x\cdot\sin\frac{1}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to\infty} a^{\frac{1}{x}} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin(ax)} = \frac{1}{a} \qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{\sin(x)} = a \qquad \lim_{x\to\infty} x^a\cdot\ln(x)^b = 0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(a+x)}{x} = \frac{1}{a} \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{e^{ax}}{x^b} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2} \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)-1}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to\pm\pi/2}\frac{\tan(x)}{x} = \mp\infty$$

11.5 Reihenentwicklung spezieller Funktionen

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots$$

$$\frac{1}{1+2x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-2x^2)^n = 1 - 2x^2 + 4x^4 + \ldots$$

$$\frac{x^2}{5-x} = x^2\cdot\frac{1}{5}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{5}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} x^{n+2}$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$$

11.6 Wichtige Integrale

$$\int \sin(x)\cos(x)dx = -\frac{1}{2}\cos^2(x) + C$$

$$\int \sin^2(x)\cos(x)dx = \frac{1}{3}\sin^3(x) + C$$

$$\int \sin(x)\cos^2(x)dx = -\frac{1}{3}\cos^3(x) + C$$

$$\int \ln(x)dx = x(\ln(x)-1) + C$$

$$\int \frac{1}{x\ln(x)}dx = \ln|\ln|x|| + C$$

$$\int 2x\sqrt{r^2-x^2}dx = -\frac{2}{3}(r^2-x^2)^{\frac{3}{2}} + C,\; r \neq 0$$

$$\int \sqrt{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Arsinh}(x) + x\sqrt{1+x^2}\right) + C$$

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\left(\arcsin(x) + x\sqrt{1-x^2}\right) + C$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx = \sqrt{x^2-1} + C$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx = \sqrt{x^2+1} + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+x}dx = -\ln|1+x^-1| + C$$

11.7 Ableitung Un-/Gerader Funktionen

- $g(x)$ sei **gerade**

$$g'(0) = g^{(3)}(0) = g^{(5)}(0) = \ldots = 0$$

- $f(x)$ sei **ungerade**

$$f''(0) = f^{(4)}(0) = f^{(6)}(0) = \ldots = 0$$

11.8 Rechengesetze für Exponenten & Logarithmen

$$B^a \cdot B^b = B^{a+b}$$

$$\frac{B^a}{B^b} = B^{a-b}$$

$$(B^a)^b = B^{a\cdot b}$$

$$\log_B(a\cdot b) = \log_B(a) + \log_B(b)$$

$$\log_B\left(\frac{a}{b}\right) = \log_B(a) - \log_B(b)$$

$$\log_B(a^r) = r\cdot\log_B(a)$$

$$\text{Basiswechsel: } \log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$$

11.9 Polarkoordinaten

Umrechnung im ersten Quadranten

$$\left.\begin{aligned} r &= \rho(\phi) \\ x &= \cos(\phi)\cdot r \\ y &= \sin(\phi)\cdot r \end{aligned}\right\}\phi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

11.10 Lösen von inhomogenem Diff'gleichungssystem

Man hat bereits mit dem in 11.1 beschriebenen Verfahren die Lösung $y_h(t)$ für das homogene Diff'gleichungssystem $y' = A\cdot y$ gefunden. Jetzt sucht man die Lösung für das inhomogene System:

$$y' = A\cdot y + b:$$

Das Prinzip ist, dass man eine partikuläre Lösung $y_p(t)$ findet, die die Diff'gleichung sicher erfüllt. Die allgemeine Lösung ist dann $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$

Vorgehen:

1. Man nimmt an, dass die partikuläre Lösung $y_p(t)$ konstant ist. Daraus folgt, dass $y_p'(t) = 0$. Man löse also das Gleichungssystem $A\cdot y_p = -b$
2. Man addiere die homogene und die Partikuläre Lösung zusammen: $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$

11.11 Hessesche Matrix

1. Bilde Hessesche Matrix in der richtigen Dimension für jeden kritischen Punkt:

   Bsp: $$H_{2x2} = \begin{pmatrix} \frac{dq(x)^2}{d^2x_1} & \frac{dq(x)^2}{dx_1x_2} \\ \frac{dq(x)^2}{dx_1x_2} & \frac{dq(x)^2}{d^2x_2} \end{pmatrix}$$

2. Bestimme Definitheit der Matrix (siehe 9.3).

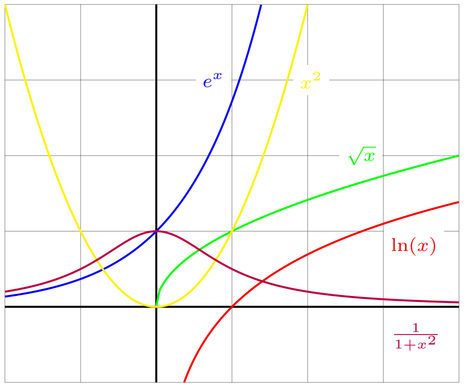
   positiv definit $\Longrightarrow$ lokales Minimum

   negativ definit $\Longrightarrow$ lokales Maximum

   indefinit $\Longrightarrow$ Sattelpunkt

   - positiv definit: Alle $\lambda > 0$
   - negativ definit: Alle $\lambda < 0$
   - positiv semidefinit: Alle $\lambda \geq 0$
   - negativ semidefinit: Alle $\lambda \leq 0$
   - indefinit: sonst

11.12 Häufige Funktionsgraphen



12 Trigonometrie

12.1 Werte Tabelle

rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
deg	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$

12.2 Rechenregeln

$$\begin{aligned}
1 &= sin(x)^2 + cos(x)^2 \\
\sin(\alpha\pm\beta) &= \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \\
\sin(2\alpha) &= 2\sin\alpha cos\alpha \\
\sin(3\alpha) &= 3\sin\alpha - 4sin^3\alpha \\
\sin^2\frac{\alpha}{2} &= \frac{1-\cos\alpha}{2} \\
\cos(\alpha\pm\beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \\
\cos(2\alpha) &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\
&= 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha \\
\cos(3\alpha) &= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha \\
cos^2\frac{\alpha}{2} &= \frac{1+cos\alpha}{2} \\
\frac{a}{sin(\alpha)} &= \frac{b}{sin(\beta)} = \frac{c}{sin(\gamma)} \\
a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cdot cos(\alpha)
\end{aligned}$$

12.3 Funktionsmodifikation

$$\text{Frequenz } f: t \to \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

$$\text{Amplitude } f: t \to A\cdot\sin(t)$$

$$\text{Winkelgeschwindigkeit } \omega = \frac{2\pi}{T}\left[\frac{1}{s}\right]$$