Основные виды модуляции.

Мод - процесс измен одного или нескольк. параметров в.ч. несущ. колеб. по закону н.ч. инфорл. сигнала

Модель речевого сигнала:

$$S_p = \underline{\underline{A(t)}} \cdot \sin\left(\left(\underline{\underline{F(t)}}\right) \cdot t + \underline{\underline{\varphi(t)}}\right)$$

в речевом сигнале присутствуют все три вида модуляции.

Амплитудная модуляция.

$S(t)$ - информационный сигнал

$F_0(t)$ - несущ. колебание

$$S_{am}(t) = F_0(t) \cdot [1 + m S(t)]$$

m - коэфф модуляции - параметр, определяющий соотношение амплитуд несущ. колеб и модулир. воздейств (сигн), а следоват. степ. влияния инф. сигнала на несущ. колеб.

$0 \le m \le 1$ (может измеряться в процентах)

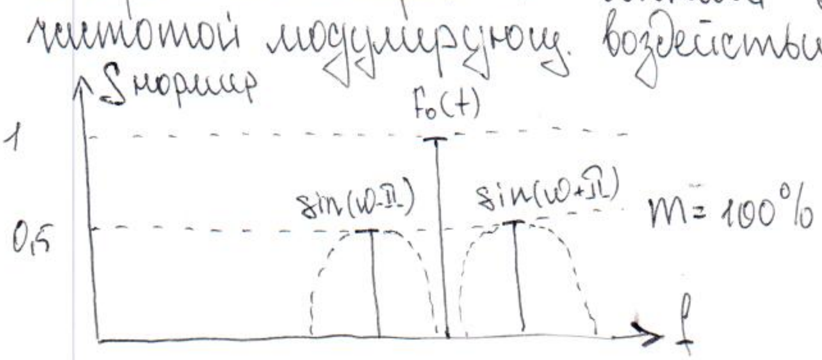
Рассмотрим более подробно форму сигнала АМ, при условии того, что $S(t)$ является однотональным гарм. сигналом

$$S(t) = U_s \cdot \sin(\Omega t + \varphi_s); \quad \varphi_s = 0$$

$$F_0(t) = U_f \cdot \sin(\omega t + \varphi_f); \quad \varphi_f = 0$$

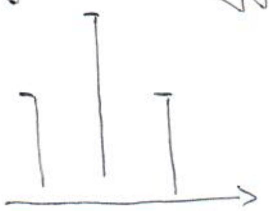
$$S_{am}(t) = U_f \cdot \sin(\omega t) + m\left[\cos((\omega - \Omega)t) - \cos((\omega + \Omega)t)\right]$$

Ширина спектра А.М сигнала определяется верхней частотой модулирующ. воздействия.

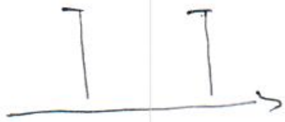


Виды амплитудной модуляции

1. Полная

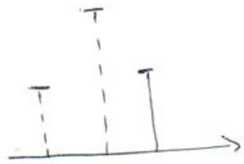


2. Балансная



3. С частич. подавл. несущ.

4. с одной боковой полосой



5. С одной б.п. и ч.п.н

Частотная модуляция

Рассмотрим колебание

$$u = U_m \cdot \cos\underbrace{[\omega_0 t + \varphi(t)]}_{\text{полная фаза колебания}}$$

Частота колебания равняется приращению его фазы за единицу времени

$$\omega = \frac{d[\omega_0 t + \varphi(t)]}{dt} = \omega_0 + \frac{d\varphi(t)}{dt} \Rightarrow$$

уравнение колебания можно записать:

$$u = U_m \cdot \cos\int \omega\, dt$$

$S(t)$ - информ. сигнал, след частота должна изм по закону

$$\omega = \omega(t) = \omega_0 + a \cdot S(t)$$

Фазовая модуляция.

Фаза колеб. должна измен по информ закону:

$\varphi(t) = \varphi_0 + a \cdot S(t)$, φ_0; a - const.

Аналитич. выраж ф.м. колебания будет иметь след. вид

$S_{ФМ} = U_m \cdot \cos[\omega_0 t + a \cdot S(t) + \varphi_0]$

Ф.м. колеб, также как и ч.м. харр девиацией част. и индексом модуляции, кот опред аналогич. ч.м. колеб.

Рассмот. фазоманипулир. перед. гарм. сигн с парам Ω_1 и Φ_1

$S_{ФМ} = U_m \cdot \cos[\omega_0 t + m_1 \cdot \cos(\Omega_1 t + \Phi_1) + \varphi_0]$

Частота данного колебания равна:

$\omega = \omega_0 - m_1 \cdot \Omega_1 \cdot \sin(\Omega_1 t + \Phi_1)$

При фазовой мод инд. мод m_1 пропорц только амплит. входн. сигнала.

Девиация частоты ф.м. сигнала равна

$\Delta\omega_1 = m_1 \cdot \Omega_1$

Передача суммы n сиг. сигналов

$u = U_m \cdot \cos[\omega_0 t + \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \sin(\Omega_k t + \Phi_k) + \varphi_0]$

Как при част. так и при ~~амплит.~~ фаз. мод. амплит. сиг. ост. постоянн. Различ. заключ. в том, что пропорц. инф сиг $S(t)$ в одном случ. измен. частота в др. сдвиг. фаз.

Вследствии этого при Ч.М. девиация измен пропорц. амплит. перед. сиг, а индекс мод измен пропорц. амплит и обратно пропорц. частоте перед. сиг.

При ФМ частотн. отклон пропорц амплит. и част. перед сигнала, а инд мод. зависит только от его амплитуды.

$u = U_m \cdot \cos \int [\omega_0 + a \cdot S(t)] dt = U_m \cdot \cos [\omega_0 t + a \int S(t) dt + \varphi_0]$

Сдвиг фаз данного колебания равен

$\varphi(t) = a \cdot \int S(t) dt + \varphi_0$

Частотномодулир. колебание хар-р. девиацией частоты и индексом модуляции.

$f_{средн} = \frac{f_{max} + f_{min}}{2}$

Девиация частоты - макс. отклонение от среднего знач.

$\Delta f = f_{max} - f_{средн.}$

Индекс модуляции - макс отклонение сдвига фаз от средн знач.

$m = \frac{\varphi_{max} - \varphi_{min}}{2} - \varphi_{min}$

Рассмотр. передачу простого. син. колебания с част. Ω_1 и сдв. фаз Φ_1

Угловая частота ч.м. колебания будет меняться по след. закону

$\omega = \omega_0 + \Delta\omega_1 \cdot \cos(\Omega_1 t + \Phi_1)$, $\Delta\omega_1$ - девиация частоты

$S_{чм} = U_m \cdot \cos \left[\omega_0 t + \frac{\Delta\omega_1}{\Omega_1} \cdot \sin(\Omega_1 t + \Phi_1) + \varphi_0\right]$

индекс модуляции данного колеб. рав $m_1 = \frac{\Delta\omega_1}{\Omega_1}$

В случае когда $S(t)$ - сумма син. колебаний, изм. част. будет происх по закону:

$\omega = \omega_0 + \sum_{k=1}^{n} \Delta\omega_k \cos(\Omega_k t + \Phi_k)$

$S_{чм} = U_m \cdot \cos \left[\omega_0 t + \sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta\omega_k}{\Omega_k} \sin(\Omega_k t + \Phi_k) + \varphi_0\right]$

Величины $\frac{\Delta\omega_k}{\Omega_k}$ - парциальные индексы модуляции

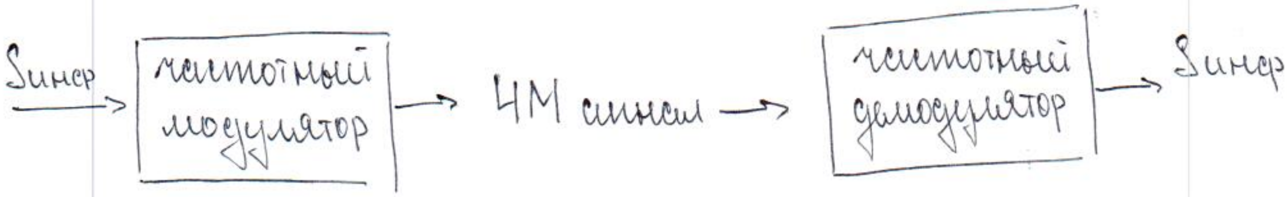
Взаимосвязь между ЧМ и ФМ.

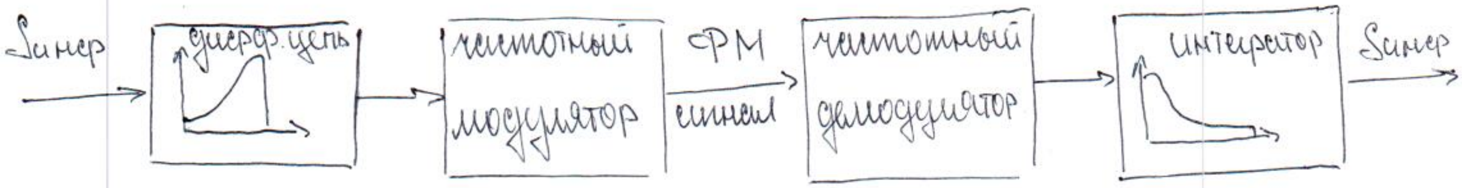
$S_{ЧМ} = U_m \cdot \cos[\omega_0 t + m_1 \cdot \sin(\Omega_1 t + \Phi_1) + \varphi_0]$

$S_{ФМ} = U_m \cdot \cos[\omega_0 t + m_1 \cdot \cos(\Omega_1 t + \Phi_1) + \varphi_0]$

при передаче гармонич. сигнала.

$S_{инф} = \cos(\Omega_1 t + \Phi_1)$



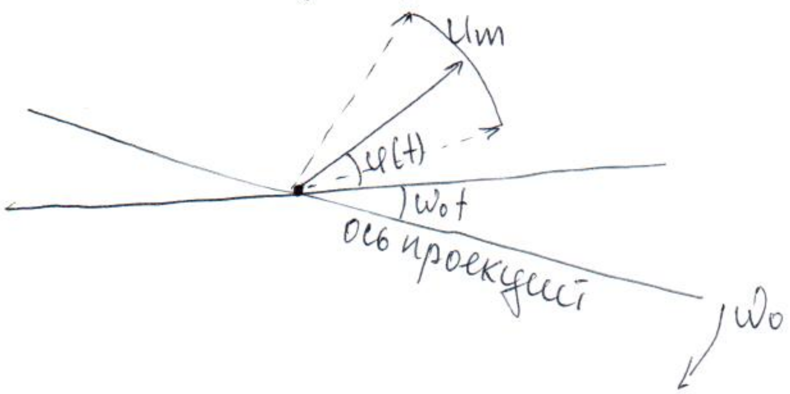


Векторные диаграммы ФМ и ЧМ колебаний

Рассмотрим вект. диагр. ЧМ или ФМ сигн., кот опис. след аналитич. выраж.:

$u = U_m \cdot \cos[\omega_0 t + \varphi(t)]$

Это колеб. можно предст. с пом. вектора, кот. вращаясь, долж. давать проекцию на ось проекций равную u. Для этого вект. долж. иметь длину U_m и сост с осью угол равный $\omega_0 t + \varphi(t)$.



ствующий вектор $\overline{OD}$ будет своим концом перемещаться по линии DE, меняя свой угол, как это и должно быть у ЧМ и ФМ колебания.

Как видно из рис. 7.6 длина результирующего вектора будет несколько меняться. Это не соответствует действительности и является результатом неточности произведённого выше приближённого разложения ЧМ колебания.

При использовании точного разложения колебания длина результирующего вектора на векторной диаграмме будет неизменна. Чем меньше m_1, тем точнее приближённое выражение, а следовательно, и построенная на основании его векторная диаграмма.

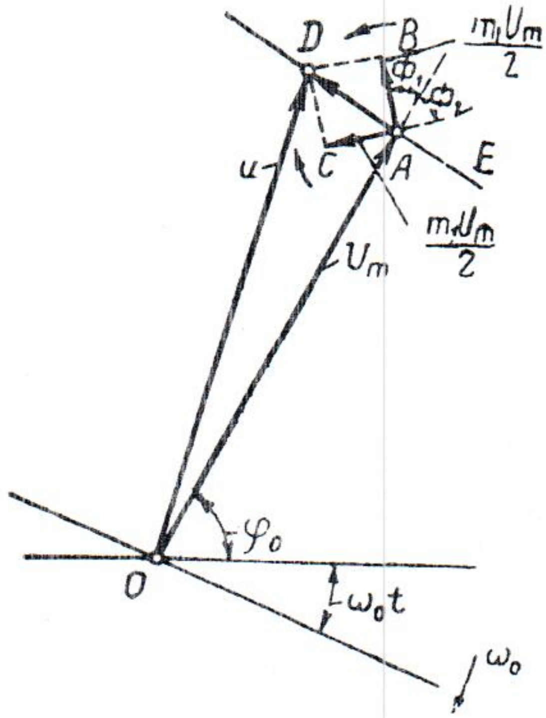


Рис. 7.6. Векторная диаграмма колебаний несущей и боковых частот при ЧМ и ФМ для случая $m \ll 1$. $\overline{OA}$ — вектор колебания несущей частоты, $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$ — векторы колебаний боковых частот. $\overline{OD}$ — результирующий вектор.

Для точного разложения ЧМ и ФМ колебания на сумму простых синусоидальных колебаний при любом значении индекса модуляции m_1 воспользуемся формулой

$$e^{i m_1 \sin x_1} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(m_1)\, e^{i n x_1}\,^{1)},$$

где $J_n(m_1)$ функция Бесселя n-го порядка от m_1. Обозначив $\Omega_1 t + \Phi_1 = x_1$, перепишем выражение (7.24):

$$u = U_m \cos(\omega_0 t + m_1 \sin x_1 + \varphi_0) =$$
$$= U_m \operatorname{Re}\left[e^{i(\omega_0 t + m_1 \sin x_1 + \varphi_0)}\right] = U_m \operatorname{Re}\left[e^{i(\omega_0 t + \varphi_0)} e^{i m_1 \sin x_1}\right] =$$
$$= U_m \operatorname{Re}\left[e^{i(\omega_0 t + \varphi_0)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(m_1)\, e^{i n x_1}\right] =$$
$$= U_m \operatorname{Re}\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(m_1)\, e^{i(\omega_0 t + n x_1 + \varphi_0)}\right] =$$
$$= U_m \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \operatorname{Re}\left[J_n(m_1)\, e^{i(\omega_0 t + n x_1 + \varphi_0)}\right] =$$
$$= U_m \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(m_1) \cos(\omega_0 t + n x_1 + \varphi_0).$$

[1]) См., например, Кузьмин Р. О. „Бесселевы функции“, ОНТИ, 1935 г., стр. 120.

Подставляя вместо x_1 его значение, получим:

$$\boxed{\begin{aligned} u &= U_m \cos\left[\omega_0 t + m_1 \sin(\Omega_1 t + \Phi_1) + \varphi_0\right] = \\ &= U_m \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{J}_n(m_1) \cos\left[(\omega_0 + n\Omega_1)t + n\Phi_1 + \varphi_0\right]. \end{aligned}} \quad (7.27)$$

На рис. 7.7 и 7.8 приведена зависимость $\mathrm{J}_n(m)$ для некоторых n[1]).

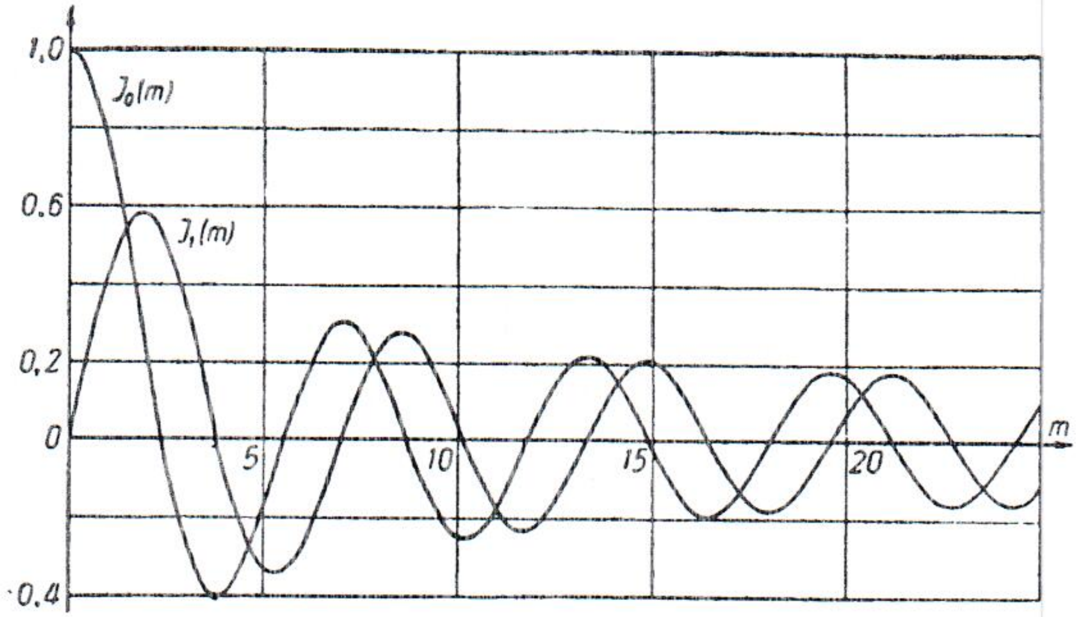


Рис. 7.7. Бесселевы функции: нулевого порядка — $\mathrm{J}_0(m)$ и первого порядка — $\mathrm{J}_1(m)$.

Из теории функций Бесселя известно, что при $n > (m_1 + 1)$ значения функций Бесселя $\mathrm{J}_n(m_1)$ очень быстро убывают с ростом n.

Кроме того, известно, что

$$\mathrm{J}_{-n}(m_1) = \mathrm{J}_n(m_1) \text{ при чётном } n,$$

$$\mathrm{J}_{-n}(m_1) = -\mathrm{J}_n(m_1) \text{ при нечётном } n.$$

На основании изложенного можно сделать следующие выводы:

1) ЧМ и ФМ колебания в случае модуляции одной частотой Ω_1 могут быть представлены в виде суммы колебаний несущей

---

[1]) Подробные таблицы функций Бесселя приведены в книге В. Н. Фадеевой и М. К. Габурина „Таблицы функций Бесселя целых номеров“, Гостехиздат, 1950 г.

После этого будет нетрудно разложить каждое АМ колебание на несущую и боковые частоты. Однако разложение этих колебаний в ряд Фурье представляет известную математическую трудность, так как встречающиеся интегралы не берутся элементарно и приводятся к функциям Бесселя. Поэтому сначала мы рассмотрим самый простой случай, положив $m_1 \ll 1$.

При этом можно считать, что

$$\cos[m_1 \sin(\Omega_1 t + \Phi_1)] \approx 1,$$
$$\sin[m_1 \sin(\Omega_1 t + \Phi_1)] \approx m_1 \sin(\Omega_1 t + \Phi_1)$$

и выражение (7.25) записать так:

$$\boxed{\begin{aligned} u &= U_m \cos[\omega_0 t + m_1 \sin(\Omega_1 t + \Phi_1) + \varphi_0] \approx \\ &\approx U_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) - U_m m_1 \sin(\Omega_1 t + \Phi_1) \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = \\ &= U_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{m_1 U_m}{2} \cos[(\omega_0 + \Omega_1) t + \varphi_0 + \Phi_1] - \\ &- \frac{m_1 U_m}{2} \cos[(\omega_0 - \Omega_1) t + \varphi_0 - \Phi_1]. \end{aligned}} \tag{7.26}$$

Отсюда видно, что ЧМ и ФМ колебание с индексом модуляции $m_1 \ll 1$ может быть представлено так же, как и колебание синусоидально модулированное по амплитуде ввиде суммы колебаний несущей и двух боковых частот, причём отличие этого разложения от разложения АМ колебания состоит в том, что перед колебанием нижней боковой частоты стоит знак „минус“, а не „плюс“. Если индекс модуляции мал ($m_1 \ll 1$), то на векторной диаграмме можно проследить образование ЧМ и ФМ колебания из колебаний несущей и боковых частот. На рис. 7.6 вектор $\overline{OA}$ изображает колебание несущей частоты. Он имеет постоянную длину U_m и составляет с горизонтальной осью постоянный угол φ_0, поскольку ось проекций вращается с угловой скоростью ω_0. Вектор верхней боковой частоты $\overline{AB}$ будет вращаться против часовой стрелки с угловой частотой Ω_1, составляя с вектором несущей в момент времени $t = 0$ угол Φ_1. Вектор нижней боковой частоты $\overline{AC}$ будет вращаться по часовой стрелке и будет составлять с вектором несущей при $t = 0$ угол $-\Phi_1 + \pi$, поскольку в выражении (7.26) колебание, соответствующее этому вектору, имеет знак „минус“. Как видно из рис. 7.6, равнодействующая векторов боковых частот будет всегда перпендикулярна вектору несущей (в отличие от амплитудной модуляции, где она совпадала с вектором несущей) и будет менять свою длину. Равнодейчастоты ω_0 и боковых частот $\omega_0 \pm n\Omega_1$, расположенных симметрично относительно несущей частоты. Соседние боковые частоты отличаются друг от друга на величину Ω_1.

2) Амплитуда каждой из составляющих равна $U_m J_n(m_1)$; при чётном n колебания верхних и нижних боковых частот имеют один и тот же знак, при нечётном n — разные.

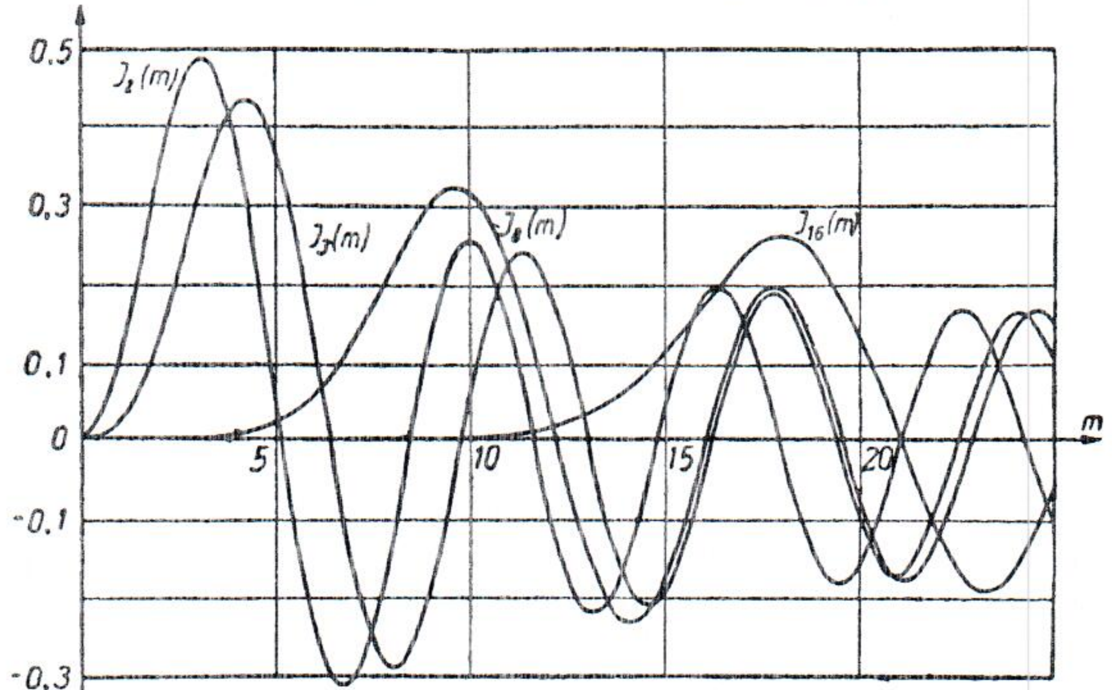


Рис. 7.8. Бесселевы функции: второго порядка — $J_2(m)$, третьего порядка — $J_3(m)$, восьмого порядка — $J_8(m)$, шестнадцатого порядка — $J_{16}(m)$.

3) Теоретически количество колебаний боковых частот бесконечно велико, однако, поскольку, начиная с $n = m_1 + 1$ амплитуды боковых частот с ростом n резко убывают, на практике можно считать, что число боковых частот равно $2(m_1 + 1)$ (учитывая боковые частоты, расположенные по обе стороны от несущей). Таким образом, полоса частот, занимаемая радиостанцией с частотной или фазовой модуляцией, практически равна

$$\boxed{2\Omega_1(m_1 + 1) = 2(\Delta\omega_1 + \Omega_1).} \tag{7.28}$$

Отсюда следует, что при ЧМ и ФМ несущие частоты радиостанций во избежание взаимных помех должны отличаться друг от друга на величину большую, чем $2\Omega_1(m_1 + 1)$.

При АМ во избежание помех расстояние между несущими частотами станций должно было быть больше $2\Omega_1$.

Таким образом (при $m_1 > 1$) [1]), число ЧМ и ФМ станций

[1]) m_1 обычно делают больше 1, чтобы получить преимущество в защите от помех по отношению к АМ.

в том же диапазоне будет меньше, чем число АМ станций. Эта особенность ЧМ и ФМ является основным их недостатком, по причине которого данные виды модуляции (для телефонной передачи) применяются в основном лишь на ультракоротких волнах, где частотный спектр ещё не насыщен станциями.

Колебание, модулированное по частоте или фазе одновременно двумя частотами Ω_1 и Ω_2, может быть записано так:

$$u = U_m \cos[\omega_0 t + m_1 \sin(\Omega_1 t + \Phi_1) + m_2 \sin(\Omega_2 t + \Phi_2) + \varphi_0]. \qquad (7.29)$$

Такое колебание также может быть разложено на составляющие несущей и боковых частот. Можно показать аналогично предыдущему (из-за громоздкости мы вывода приводить не будем), что в разложении будут составляющие со следующими частотами и амплитудами:

1) несущая частота ω_0 с амплитудой $U_m J_0(m_1) J_0(m_2)$;
2) боковые частоты $\omega_0 \pm n\Omega_1$ с амплитудами $U_m J_0(m_2) J_n(m_1)$;
3) боковые частоты $\omega_0 \pm n\Omega_2$ с амплитудами $U_m J_0(m_1) J_n(m_2)$;
4) боковые частоты $\omega_0 \pm p\Omega_1 \pm q\Omega_2$ с амплитудами

$$U_m J_p(m_1) J_q(m_2),$$

где p и q — любые целые числа.

Ширина полосы частот, занимаемая этим колебанием, может быть принята равной $2(\Delta\omega + \Omega_2)$, где $\Delta\omega$ — частотное отклонение, Ω_2 — наибольшая из модулирующих частот.

При $(m_1 + m_2) \ll 1$ колебание (7.29) может быть легко разложено на колебания несущей и боковых частот приближённым методом, аналогичным применявшемуся нами в случае $m_1 \ll 1$ ри модуляции одной частотой.

§ 7.8. Спектральные диаграммы ЧМ и ФМ колебаний

ЧМ и ФМ колебания так же, как и АМ колебание (см. § 6.5), могут быть изображены с помощью спектральной диаграммы.

На рис. 7.9 изображена спектральная диаграмма колебания, индекс модуляции которого $m_1 = 0{,}2$. Диаграмма построена согласно разложению (7.26). Нижняя боковая частота изображена отрезком, отложенным вниз. Это обозначает, что перед колебанием с этой частотой стоит знак минус.

На рис. 7.9 так же, как из выражения (7.26), видно, что полоса частот такого колебания равна $2\Omega_1$, т. е. та же, что и при амплитудной модуляции.

На рис. 7.10 изображена спектральная диаграмма колебания, индекс модуляции которого $m_1 = 4$. Эта спектральная диаграмма

Это колебание можно представить с помощью вектора, который, вращаясь, должен давать проекцию на ось проекций, равную u. Для этого вектор, изображающий колебание (7.6), должен иметь длину, равную U_m, и составлять с осью проекций угол $\omega_0 t + \varphi(t)$ (рис. 7.3). Если ось проекций вращать по

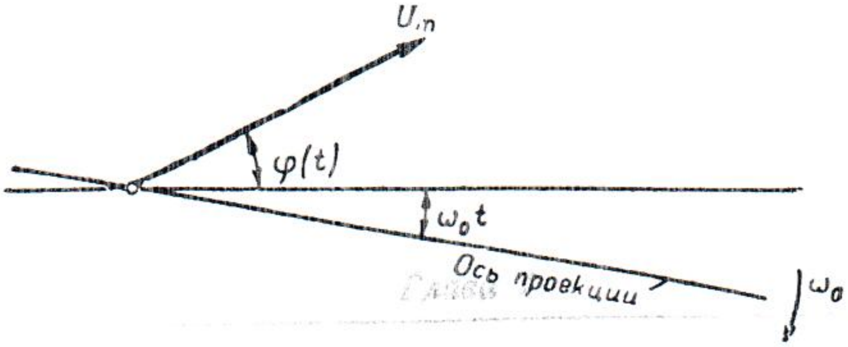


Рис. 7.3. Векторная диаграмма ЧМ и ФМ колебания.

часовой стрелке так, чтобы она составляла с горизонтальной осью угол $\omega_0 t$, то вектор, изображающий колебание, должен составлять с горизонтальной осью угол $\varphi(t)$. Так как при ЧМ и ФМ сдвиг фаз $\varphi(t)$ меняется, а амплитуда колебаний остаётся постоянной, то на векторной диаграмме вектор такого колебания будет иметь постоянную длину и переменное направление. Как следует из определения индекса модуляции (см. § 7.3), вектор, изображающий ЧМ и ФМ колебание, будет качаться, отклоняясь от среднего значения вправо и влево на угол, равный индексу модуляции m (рис. 7.4).

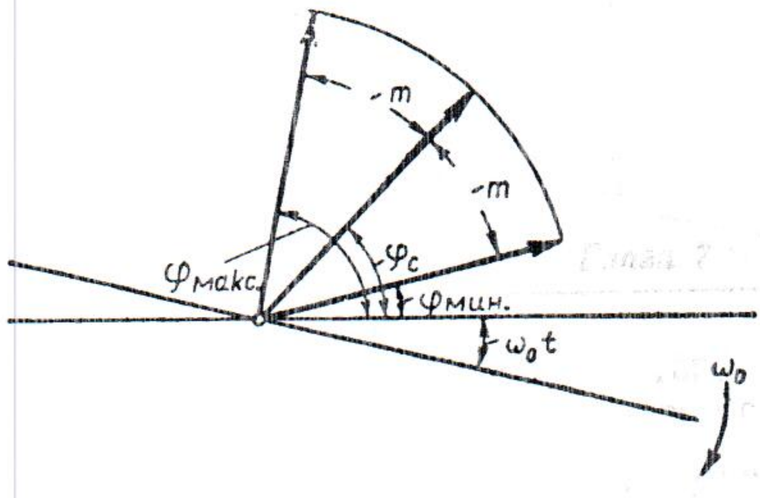


Рис. 7.4. Векторная диаграмма ЧМ и ФМ колебания. m — индекс модуляции.

§ 7.6. Преимущество частотной и фазовой модуляции перед амплитудной

Основное преимущество колебаний, модулированных по частоте или по фазе по сравнению с амплитудно-модулированными колебаниями, заключается в том, что они меньше подвержены влиянию помех при радиоприёме. Покажем это для простейшего случая.

Пусть на некоторое синусоидальное колебание, передаваемое радиостанцией,

$$u_c = U_c \cos(\omega_0 t + \varphi_c)$$

накладывается другое постороннее колебание

$$u_n = U_n \cos(\omega_n t + \varphi_n),$$

причём $U_n \ll U_c$.

Векторная диаграмма этих колебаний и их суммы показана на рис. 7.5. На этом рисунке $\overline{OA}$ — вектор колебания u_c, $\overline{AБ}$ — вектор колебания u_n и $\overline{OБ}$ — вектор их суммарного колебания.

Поскольку было принято, что ось проекций вращается по часовой стрелке с угловой скоростью ω_0, вектор $\overline{OA}$ будет неподвижным, а вектор $\overline{AБ}$ — вращающимся с угловой скоростью $\omega_n - \omega_0$.

Как видно из этой векторной диаграммы, суммарное колебание будет модулировано по амплитуде, причём коэффициент модуляции будет равен

$$M_n = \frac{U_n}{U_c}.$$

Кроме того, будет происходить модуляция по частоте и фазе с индексом модуляции m_n, который может быть найден следующим образом:

$$\sin m_n = \frac{U_n}{U_c} \approx m_n.$$

Угловая частота модуляции будет равна $\omega_n - \omega_0$.

Если суммарное колебание $u_c + u_n$ будет воздействовать на приёмник, предназначенный для телефонного приёма АМ колебаний, то он при этом будет воспроизводить звук с частотой $\omega_n - \omega_0$ и с амплитудой, пропорциональной коэффициенту модуляции, т. е. M_n. Если колебание $u_c + u_n$ будет воздействовать на телефонный приёмник, предназначенный для приёма ЧМ или ФМ колебаний, то он будет воспроизводить

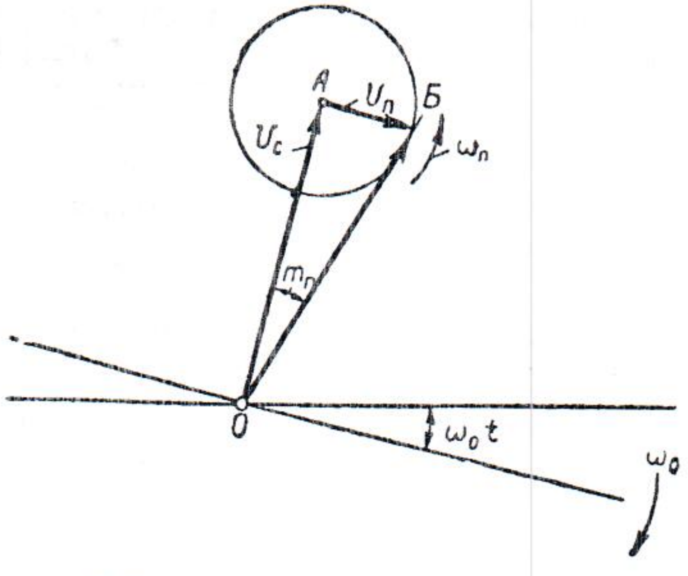


Рис. 7.5. Сложение колебания сигнала и помехи. OA—вектор колебания сигнала. $AБ$—вектор колебания помехи. $OБ$—вектор суммарного колебания.

7.7. Разложение ЧМ и ФМ колебаний на колебания несущей и боковых частот

Для нахождения тока под действием амплитудно-модулированного напряжения мы разлагали последнее на простые синусоидальные колебания, амплитуды и частоты которых постоянны (см. § 6.4).

Проделаем то же для ЧМ и ФМ колебаний. Эти колебания могут быть представлены так:

$$u = U_m \cos[\omega_0 t + \varphi(t)]. \tag{7.22}$$

Разлагая это выражение по формуле косинуса суммы, мы получим

$$\boxed{u = U_m \cos\varphi(t)\cos\omega_0 t - U_m \sin\varphi(t)\sin\omega_0 t.} \tag{7.23}$$

Таким образом, колебание u может быть всегда разложено на два АМ высокочастотных колебания с амплитудами

$$U_m \cos\varphi(t) \text{ и } U_m \sin\varphi(t).$$

При медленном изменении $\varphi(t)$ эти амплитуды изменяются сравнительно медленно.

Полученные АМ колебания могут быть разложены в свою очередь на колебания несущих и боковых частот, методом, уже известным нам по гл. 6. Для этого требуется $U_m \cos\varphi(t)$ и $U_m \sin\varphi(t)$ представить в виде сумм синусоидальных колебаний. Однако в общем случае последнее представляет большие математические трудности. Поэтому мы произведём такое разложение для наиболее простого случая, когда передаваемое колебание, например звук, синусоидально.

В этом случае ЧМ и ФМ колебание может быть записано так:

$$\boxed{u = U_m \cos[\omega_0 t + m_1 \sin(\Omega_1 t + \Phi_1) + \varphi_0].} \tag{7.24}$$

Разница между ЧМ и ФМ будет лишь в величине m_1 и сдвиге фаз Φ_1. Разложим выражение (7.24) также по формуле косинуса суммы. Беря за первое слагаемое аргумента величину $m_1 \sin(\Omega_1 t + \Phi_1)$ и за второе величину $\omega_0 t + \varphi_0$, получим

$$u = U_m \cos[m_1 \sin(\Omega_1 t + \Phi_1)]\cos(\omega_0 t + \varphi_0) - \\ - U_m \sin[m_1 \sin(\Omega_1 t + \Phi_1)]\sin(\omega_0 t + \varphi_0). \tag{7.25}$$

Амплитуда каждого из полученных колебаний изменяется периодически и поэтому может быть представлена с помощью ряда Фурье в виде суммы простых синусоидальных колебаний.