A. 西坤丝

最小可以转化为 $\sum\limits_{i=1}^{n-len+1}(len-k+1)\text{thmax}(i,i+len-1)$，所以只要考察求取到最大值的时候 a_i 的排列情况。

给出最优构造：

令所有满足 $i\in[1,n],(i-1)\bmod len\in[len-k,len-1]$ 的位置 i，从前往后填上 a 数组的最大值，次大值，以此类推。

考虑证明：

将问题转化为：将区间从左往右标号为 1 到 $n-len+1$，那么每个数会对于一段长为 $len-1$ 的区间产生影响。

那么可以将区间转化为点，每个数转化为一段区间，转化为区间覆盖问题：

> 对于一个 $n-len+1$ 的序列，按 a_i 从大到小加入区间，每次统计区间内恰好被 k 次覆盖的点的个数 cnt，将 $ans\leftarrow ans+cnt\times a_i$，求 ans 最大值。

注意到，由于 a_i 是按从大到小排的，所以真正影响答案的是 cnt 的分布。

我们令 $w_{i,k}$ 表示序列中前 i 大的数作为 kthmax 出现的次数和的上界，那么转化后就是前 i 个区间覆盖后，被覆盖次数 $\geq k$ 的点数。

为了简化证明过程，将被覆盖次数 $\geq k$ 的点称作黑点。

接下来考虑怎么去算这个上界。

把前 i 大的数对应的区间拉出来，按左端点排序，左端点相同（如果都为 1）则按右端点排序，依次按 $1,2\dots$ 编号。以下简记第 i 个区间为 $[l_i,r_i]$。

考虑分类讨论：

- $i<k$ 时显然为 0。
- 先从 $k\leq i<2k$ 发掘性质。 显然的是，一个点被覆盖的区间的编号一定是连续的。那么可以发现，如果一个点不在第 k 个区间里，那么它显然不是黑点；同理，如果一个点不在第 $i-k+1$ 个区间里，那么它也不是黑点。因此，此时的 $w_{i,k}\leq r_{i-k+1}-l_k+1$，由于区间互不相同，则有 $r_k-r_{i-k+1}\geq 2k-i-1$，所以 $w_{i,k}\leq len+i+1-2k$。
- 再考虑 $i=tk,t\geq 2$ 的情况。类似地，考虑编号为 $1,k+1,\dots,(t-1)k+1$ 的区间，发现黑点一定在这些区间的至少其中一个，这些区间总长 $\leq len\times t$。其中不可避免的黑点的损失出现在编号 $1\sim k$ 的区间覆盖上，至少损失 $k-1$ 个黑点，则 $w_{i,k}\leq len\times\lfloor\frac{i}{k}\rfloor-k+1$。
- 最后是 $i=ak+b,a\geq 2,b<k$ 的情况。黑点仍需在 $1,k+1,\dots,ak+1$ 这些区间里。考虑扔掉这些区间并将 $k\leftarrow k-1$ 会发生什么。本来是黑点的点显然仍是黑点，所以可以得到一个极其粗糙的上界 $w_{i,k}\leq w_{i-a-1,k-1}$，即 $w_{i,k}\leq w_{a\times(k-b),k-b}$。记 $k'=k-b$，则可以规约至 $i=tk$ 的情况，则最终有 $w_{i,k}\leq len\times\lfloor\frac{i}{k}\rfloor-k+1-i\bmod k)$。

整理得，有 $w_{i,k}\leq\max(0,\min(n-len+1,len\times\lfloor\frac{i}{k}\rfloor-k+1-i\bmod k))$。发现这个东西可以使用上面的方案得到一组构造。

因此这个式子他的确是上确界。从而，从大到小选取满足限制的当前数作为贡献，即可得到答案。

B. 地皮

先给一个形式化题意：n 行 m 列网格，(i,j) 的权值为 a_i+b_j，对于 $\le x$ 的格子染黑色，问黑格连通块数。

考虑对于每个连通块，钦定其 a_i+b_j 最小的一个格子 (i,j) 当做关键点，若有多个则选择 i 最小的点，若仍有多个则选择 j 最小的点。则仅需计数关键点个数即可。

对于一个点 (i,j)，记 pa_i 表示最大的 i' 使得 $i'<i,a_{i'}\le a_i$，如果不存在则 $pa_i=0$。记 sa_i 表示最小的 i' 使得 $i'>i,a_{i'}<a_i$，如果不存在则 $sa_i=n+1$。同理有 pb_j,sb_j。

若 (i,j) 的行动范围只能限定在 $(pa_i+1\sim sa_i-1,pb_j+1\sim sb_j-1)$，那么 (i,j) 显然是个关键点。

以下简单证明当走到 pa_i 行时 (i,j) 不是关键点。同理可得走到 sa_i 行，pb_j,sb_j 列的情况。

> 对于 $\forall x,pa_i<x<sa_i$ 有 $a_{pa_i}\le a_x$，所以在第 x 行任意一个格子 (x,y) 如果染色，那么 (pa_i,y) 也会被染色。因此一旦到了 pa_i 行，那么就可以走到 (pa_i,j) ，而 $a_{pa_i}+b_j\le a_i+b_j,pa_i<i$，所以 (i,j) 不是关键点。

关键点转化为是否能走到 $(pa_i,j),(sa_i,j),(i,pb_j),(i,sb_j)$ 的任意一个点。

如果能走到，那么显然是沿直线走的。这样问题就简单化了，即求：

- $a_i+b_j\le x$
- $a_i+\max\limits_{k=pb_j}^{j}\{b_k\}>x$
- $a_i+\max\limits_{k=j}^{sb_j}\{b_k\}>x$
- $b_j+\max\limits_{k=pa_i}^{i}\{a_k\}>x$
- $b_j+\max\limits_{k=i}^{sa_i}\{a_k\}>x$

满足以上条件的数对 (i,j) 的对数，这是个二维偏序问题。

时间复杂度 $O(n\log n)$。

C. 谷拉符

观察数据范围和题目大意，发现可以使用费用流。

用流量表示旅行总次数，将每个国家拆成一个入点和一个出点，中间连一条流量为 1，费用为 1 的边。

但是如果使用一般方法表示关系，会发现边数是 $O(n^2)$ 。

考虑优化，发现可以如下建图：

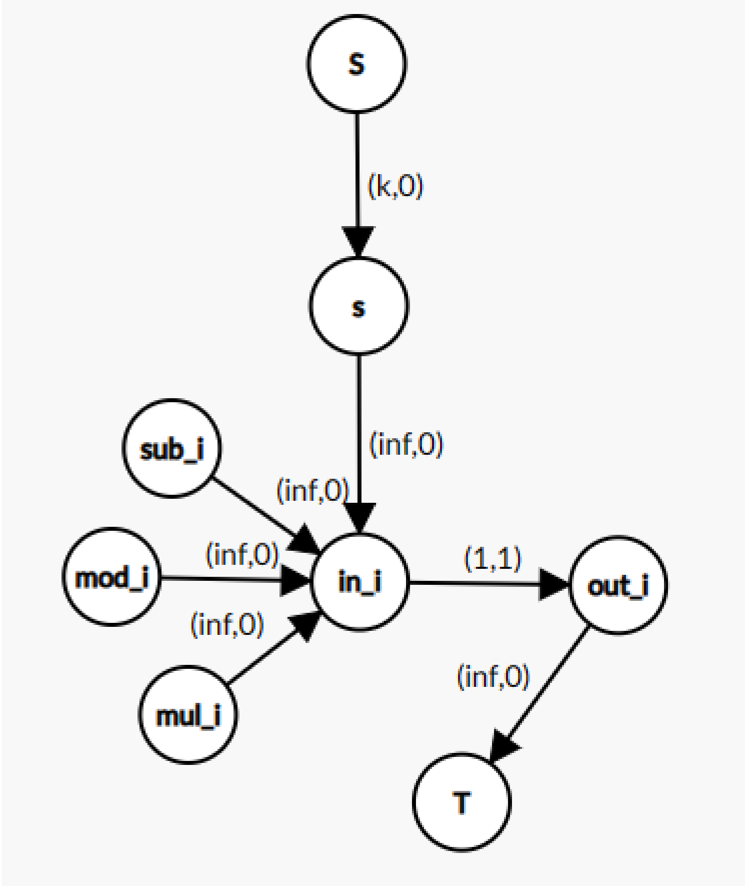
用 sub_i,mod_i,mul_i 来传递国家之间的关系，三者都向 in_i 连一条 $(inf,0)$ 的边。

对于每一个点 i 的每一种关系，只需要找到满足对应关系且编号大于 i 的所有结点中编号最小的 j，将 out_i 和 j 的对应关系结点连边。

同时，为了刻画"不经过该国"的决策，可以将 i 与权值等于 i 且编号大于 i 的所有结点中编号最小的 j，将 sub_i 和 sub_j 连边，mul_i 和 mul_j 连边；将 i 与权值在模 C 意义下等于 i 且编号大于 i 的所有结点中编号最小的 j，将 mod_i 和 mod_j 连边。

这样，走到一个关系传递结点后，既可以选择流经这个点（表示走过这个国家），又可以选择继续往下一个符合关系的点走，形成一条“关系通路”。

如下图（未画出两个国家间的边）：



这样建图边数为 $O(n)$ 。费用流复杂度为 $O(nmf) = O(n^2k)$ ，但实际运行效果良好。

D. 泪音

考虑到每个格子落雨的概率独立，可以将每个经过的格子单独拉出来计算概率。

首先有个显然的 dp，设 $dp_{i,j,k}$ 表示在第 i 时刻，第 j 个格子上次落雨在 k 时刻前的概率。

则有 $dp_{i,j,0} = \sum\limits_{l=0}^{k-1} dp_{i-1,j,l} \times \frac{l+1}{k}$，$dp_{i,j,l} = dp_{i-1,j,l-1} \times \frac{k-l-1}{k}$。

每次经过 j 时，都将 $dp_{i,j,0}$ 设为 0，最后经过 j 时将 $ans \leftarrow ans \times \sum\limits_{l=1}^{k-1} dp_{i,j,l}$。

时间复杂度 $O(r^2k)$，期望得分 30 分，配合特殊性质可 40 分。

这个 dp 式子显然可以用矩阵加速，把转移刻画成矩阵，记 $d = r - l$，可得均摊 $O(k^3 d \log d)$ 做法，期望得分 60 分。

这个转移是固定的，因此可以预处理 i 次转移的矩阵，$i \le d$，无需矩快。

最终时间复杂度 $O(k^3(logr + d))$，空间复杂度 $O(k^2d)$。