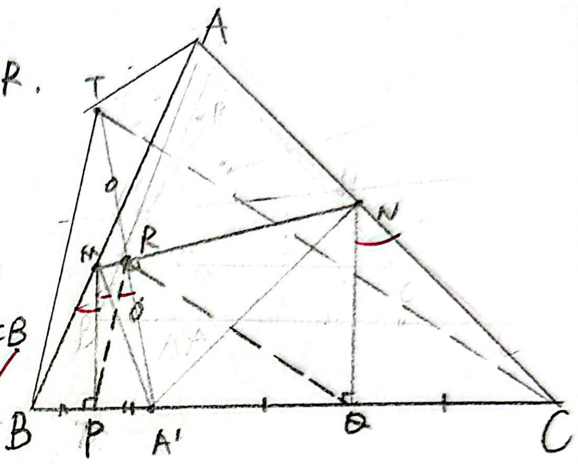
姓名：杨雨萱　　　　　成绩：

1. 在锐角三角形 ABC 的边 BC 上任取一点 A'，对线段 A'B 作中垂线交边 AB 于点 M，对线段 A'C 作的中垂线交边 AC 于点 N．证明点 A' 关于直线 MN 的对称点在 ΔABC 的外接圆上．(50 分)

50



证明：设 A' 关于 MN 的对称点为 T，MN 与 A'T 交于 R，

MP、NQ 垂直平分 BA'、CA'

$\therefore \angle MPA' = \angle MRA' = 90^\circ$，$\angle A'RN = \angle AQN = 90^\circ$

$\therefore$ M、P、A'、R 四点共圆，A'、R、Q、N 四点共圆

$\therefore \angle BAC = 180^\circ - \angle ABC - \angle ACB = 90^\circ - \angle ABC + 90^\circ - \angle ACB$

$= \angle BMP + \angle CNQ = \angle A'MP + \angle A'NQ$

$= \angle PRA' + \angle QRA' = \angle PRQ$ ①

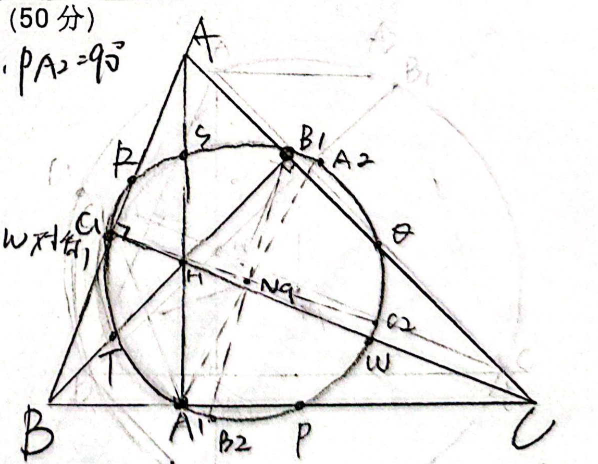
又 $\because$ P 为 A'B 中点，Q 为 A'C 中点，R 为 A'T 中点，

$\therefore PR \parallel BT$，$QR \parallel CT$　$\therefore \angle PRQ = \angle CTB$ ②

结合 ①② 知 A、T、B、C 共圆

Q.E.D

2. 在ΔABC中引三条高线AA_1，BB_1和CC_1．设A_1A_2、B_1B_2和C_1C_2分别是ΔABC的九点圆的直径．证明AA_2，BB_2和CC_2共点或平行．(50 分)



发现：由题 A_1A_2 为直径　故 $\angle A_1SA_2 = 90^\circ$　$\angle A_1PA_2 = 90^\circ$

得 SA_1PA_2 为矩形

得 HA_2、AA_2 关于 SA_2 对称，

同理 BB_2、B_2H 关于 B_2T 对称，CC_2、C_2H 关于 C_2W 对称，

显然，A_2H、B_2H、C_2H 共点 H

而三条对称轴 A_2S、B_2T、C_2W：

$A_2S = PA_1 \parallel BC$，$B_2T = B_1Q \parallel AC$，

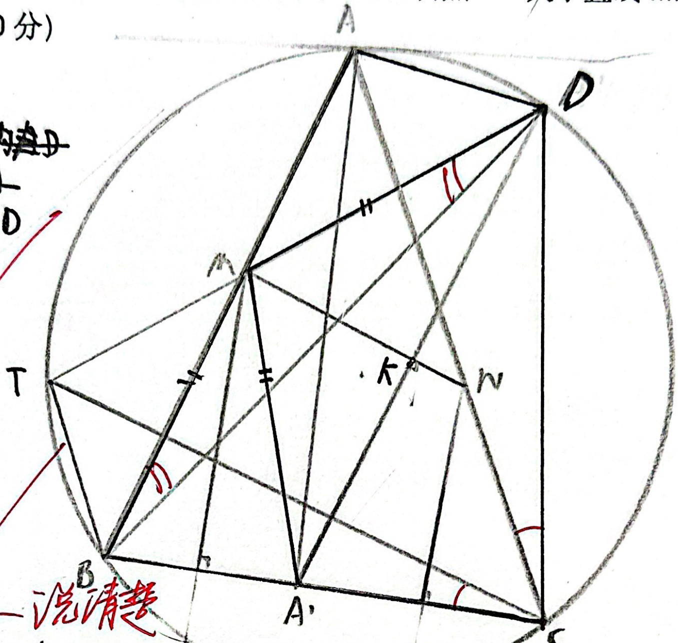
$C_2W = C_1R \parallel AB$ $\Rightarrow$ 整个图形呈"轮换对称感"

只需证明三线交于 H 关于 O 垂线的对称点，

姓名：李[illegible]洋　　　　　　成绩：

50

1. 在锐角三角形 ABC 的边 BC 上任取一点 A'，对线段 A' B 作中垂线交边 AB 于点 M，对线段 A' C 作的中垂线交边 AC 于点 N．证明点 A' 关于直线 MN 的对称点在ΔABC 的外接圆上．(50 分)



解：~~设A'关于MN对称点为点D~~
~~只需证A、B、C、D四点共圆~~
作$A_1D \perp MN \cap (ABC)$于点D
~~∴只需证~~
交MN于点K
∴只需证$DK=KA_1$
~~$DK=KA_1$~~
连接DM和A_1M
∴只需证$MA_1=MD$
∵$MA_1=MB$
∴只需证MD=MB
延长DM∩(ABC)于点T
∴只需证∠ACD=∠TCB
∴只需证$\overset{\frown}{TB}=\overset{\frown}{AD}$
∴只需证∠ABD=∠TDB
∵A、T、B、D共圆
∴∠ABD=∠TDB
∴得证

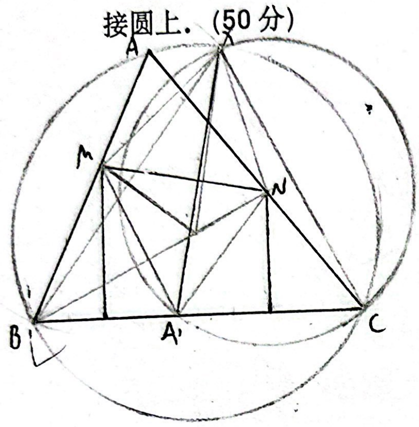
说清楚

2. 在ΔABC 中引三条高线AA_1, BB_1和CC_1.设A_1A_2、B_1B_2和C_1C_2分别是ΔABC 的九点圆的直径．证明AA_2，BB_2和CC_2共点或平行．(50 分)

姓名：张约灿　　　　成绩：

50

1．在锐角三角形 ABC 的边 BC 上任取一点 A’，对线段 A’B 作中垂线交边 AB 于点 M，对线段 A’C 作的中垂线交边 AC 于点 N．证明点 A’ 关于直线 MN 的对称点在ΔABC 的外接圆上．(50 分)



证明：设对称点为 X，连接 $A'M, A'N, MX, NX$，

由对称性，$MA'=MX$，$NA'=NX$，$\triangle MNA' \cong \triangle MNX$

$\angle MXN=\angle MA'N=180^\circ-\angle MA'B-\angle NA'C=180^\circ-\angle B-\angle C=\angle A$.

~~∴A, M, X, N 四点共圆~~

∴A, M, N, X 四点共圆．

又∵$BM=MA'=MX$，$CN=NA'=NX$

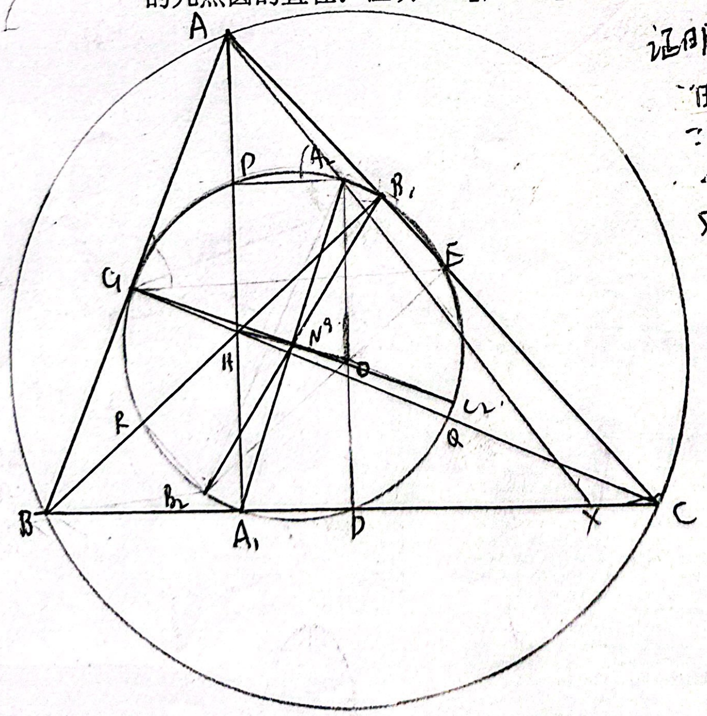
$\angle BMX=180^\circ-\angle AMX=180^\circ-\angle ANX=\angle CNX$

∴$\triangle BMX \sim \triangle CNX$

∴$\angle BXC=\angle MXN=\angle BAC$

∴A, B, C, X 四点共圆，A' 关于 MN 对称点 X 在 ΔABC 外接圆上，得证。

2．在ΔABC 中引三条高线AA_1，BB_1和CC_1．设A_1A_2、B_1B_2和C_1C_2分别是ΔABC 的九点圆的直径．证明AA_2，BB_2和CC_2共点或平行．(50 分)



证明：取ΔABC 垂心、外心 H、O，取 AH、BH、CH 中点 P、Q、R，BC、CA、AB 中点 D、E、F

∵由九点圆性质，知 P、Q、R 在九点圆上，九点圆心 N_9 为 OH 中点。

∵A_1A_2 为直径

∴$\angle A_1PA_2=90^\circ$，

又∵A_1A_2，OH 互相平分

∴$OA_2 \parallel AA_1$

设 BC、CA、AB = a、b、c．

$A_2P=A_1D=BD-A_1B=\frac{a}{2}-c\cos B$

$AP=\frac{1}{2}AH=R\cos A$

$AA_1=c\sin B$

又延长 A_1A_2，B_1B_2，C_1C_2 交 BC、CA、AB 于 X、Y、Z

$A_1X=\frac{AA_1}{AP}\cdot A_2P$

$=\frac{c\sin B}{R\cos A}\cdot\left(\frac{a}{2}-c\cos B\right)$

$=\frac{2R\sin B\sin C}{R\cos A}\cdot\left(R\sin A-2R\sin C\cos B\right)$

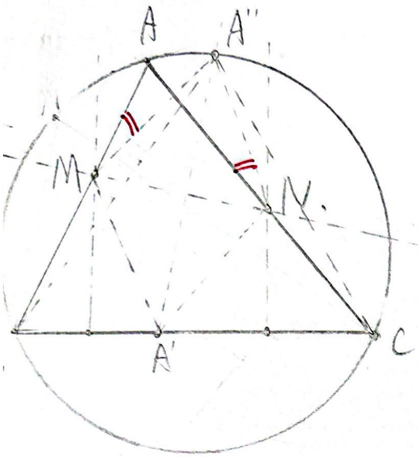
$=\frac{2R\sin A\sin B\sin C-4R\sin B\cos B\sin^2 C}{\cos A}$

$BX=A_1X+A_1B=\frac{2R\sin C(\cos A\cos B+\sin A\sin B)-4R(\sin B\cos B\sin^2 C)}{\cos A}$

$CX=\frac{2R\sin B(\cos A\cos C-\sin A\sin C)-4R\sin B\cos B\sin^2 C}{}$

姓名：王泽萱　　　　　　成绩：

1. 在锐角三角形 ABC 的边 BC 上任取一点 A'，对线段 A'B 作中垂线交边 AB 于点 M，对线段 A'C 作的中垂线交边 AC 于点 N．证明点 A' 关于直线 MN 的对称点在ΔABC 的外接圆上．(50 分)



证：

如图，设 A' 关于 MN 的反射为 A''，连接 MA'，NA'，MA''，NA''

∵ M 为 BA' 中垂线与 AB 交点、

∴ ∠MBA' = ∠MA'B．

同理，∠NCA' = ∠NA'C．

∴ ∠MA'N = 180° − ∠ABC − ∠ACB = ∠BAC．

∵ A'' 为 A' 关于 MN 反射．

∴ ∠MA''N = ∠MA'N = ∠BAC．

∴ AA''MN 四点共圆．

∴ ∠AMA'' = ∠ANA''．

~~∴ ∠A''MB = ∠A''NC．~~

∵ MB = MA' = MA''，NC = NA' = NA''．

∴ △MBA''，△NCA'' 均等腰．

又∵ ∠A''MB = ∠A''NC．

∴ ∠MA''B = ∠NA''C = $\frac{1}{2}$∠AMA'' = $\frac{1}{2}$∠ANA''．

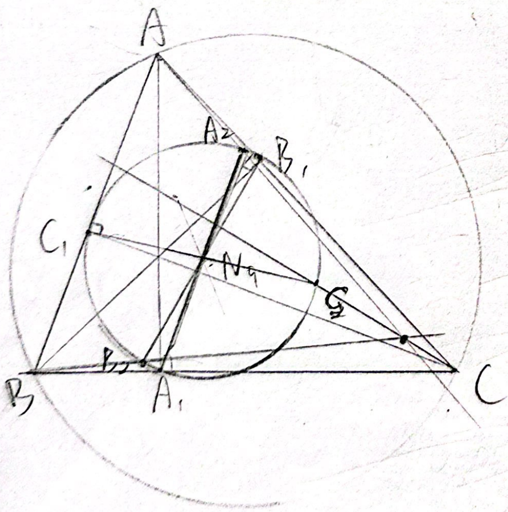
∴ ∠MA''N = ∠BA''C．

∴ A、B、C、A'' 四点共圆．

得证．

50

2. 在ΔABC 中引三条高线 AA_1，BB_1和CC_1．设A_1A_2、B_1B_2和C_1C_2分别是ΔABC 的九点圆的直径．证明AA_2，BB_2和CC_2共点或平行．(50 分)



设三线交于 X．

由三点共线：

$$\frac{-ca+bc+ab+b^2}{2abc\bar{x}-2ca}=\frac{-b^2+bc+ab+ca}{2b(x-b)}.$$

同理，BB_2X，CC_2X 方程形式同上．

即证此方程组有解．

证：外心

以 O 为原点建立复平面．

则：

$A_1=\frac{1}{2}(b+c+a-\frac{bc}{a})$

B_1，C_1 同 A_1．

$A_2=2n_9-\frac{1}{2}(b+c+a-\frac{bc}{a})$

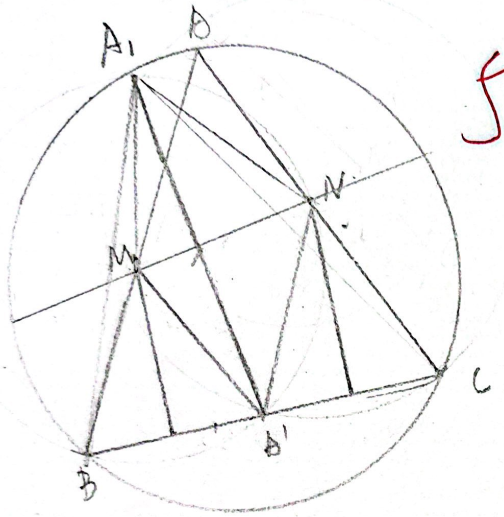
∵ $n_9=\frac{a+b+c}{2}$

∴ $A_2=a+b+c-\frac{1}{2}(b+c+a-\frac{bc}{a})$

$=\frac{a+b+c}{2}+\frac{bc}{2a}$.

姓名：仲峻泽　　　　成绩：

1. 在锐角三角形 ABC 的边 BC 上任取一点 A’，对线段 A’ B 作中垂线交边 AB 于点 M，对线段 A’ C 作的中垂线交边 AC 于点 N．证明点 A’ 关于直线 MN 的对称点在ΔABC 的外接圆上．(50 分)



50

证：

∵ M.N 在 BA'．A'C 垂直平分线上

∴ NA' = NC，MA' = MB．

∵ A_1 为 A' 关于 MN 的反射

∴ $MA_1 = MA'$，$NA_1 = NA'$．

$\angle MA_1N = \angle MA_1A' + \angle NA_1A'$

$= \angle MA'A_1 + \angle NA'A_1$

$= 180° - \angle NA'C - \angle MA'B$．

$= 180° - \angle ABC - \angle ACB$

$= \angle A$．

∴ M．A_1．A．N 共圆．

故 $\angle A_1NA = \angle A_1MA$．

即 $\angle A_1NC = \angle A_1MB$．

在 $\triangle A_1NC$ 与 $\triangle A_1MB$ 中

$A_1N : NC = A_1M : MB = 1$

$\angle A_1NC = \angle A_1MB$．

∴ $\triangle ANC \sim \triangle A_1MB$．

∴ $\angle CA_1N = \angle BA_1M$．

∴ $\angle MA_1N = \angle BA_1C$

又 $\angle MA_1N = \angle A$

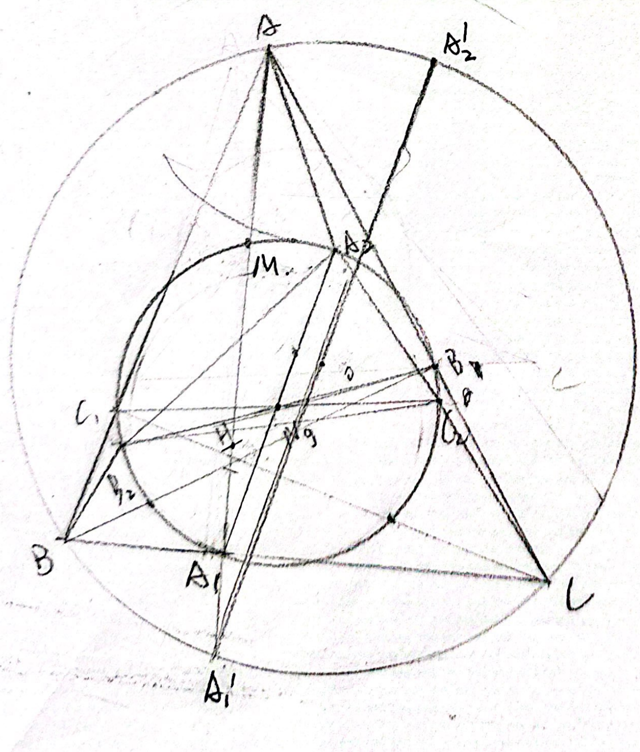
∴ $\angle BA_1C = \angle A$．

∴ A．C．B．A_1 共圆

∴ A_1 在 (ABC) 上．

得证，

2. 在ΔABC 中引三条高线AA_1, BB_1和CC_1．设A_1A_2、B_1B_2和C_1C_2分别是ΔABC 的九点圆的直径．证明AA_2，BB_2和CC_2共点或平行．(50 分)



证：以 H 为中心，放缩因子为 2 作位似

则 A_1．A_2 分别映射到 A_1'．A_2'．

由九点圆性质

A_1'．A_2' 在 (ABC) 上，$A_1'A_2' \parallel A_1A_2$

令 AH 交九点圆于 M．

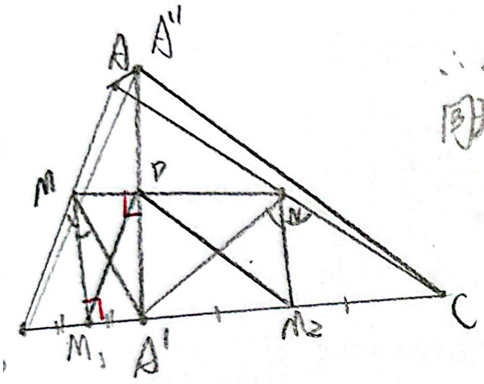
由九点圆性质

M 为 AH 中点…

姓名：王腾立　　　　　　成绩：

1．在锐角三角形 ABC 的边 BC 上任取一点 A'，对线段 A'B 作中垂线交边 AB 于点 M，对线段 A'C 作的中垂线交边 AC 于点 N．证明点 A' 关于直线 MN 的对称点在ΔABC 的外接圆上．(50 分)

50



证明：令A''为A'关于NM的对称点，交MN于D.

∵ MM_1为$A'B$中垂线

∴ $\angle BMM_1=\angle M_1MA'$

同理 $\angle CNM_2=\angle A'NM_2$

∵ $\angle MM_1A'+\angle MDA'=180°$

∴ M,M_1,A',D四点同圆

同理 D,A',M_2,N四点共圆

∴ $\angle BMM_1+\angle CNM_2=\angle M_1DM_2$

∵ $\angle BMM_1=90°-\angle ABC$，$\angle CNM_2=90°-\angle ACB$

∴ $\angle BMM_1+\angle CNM_2=\angle BAC$

∴ $\angle M_1DM_2=\angle BAC$

∵ $BM_1=M_1A'$，$A'D=A''D$

∴ DM_1为$\triangle A''A'B$的A'-中位线

∴ $\angle M_1DA'=\angle BA''A'$

同理 $\angle A'DM_2=\angle A'A''C$

∴ $\angle M_1DA'+\angle A'DM_2=\angle M_1DM_2=\angle BA''C$

∴ $\angle M_1DM_2=\angle BA''C$

又 ∵ $\angle M_1DM_2=\angle BAC$

∴ $\angle BA''C=\angle BAC$

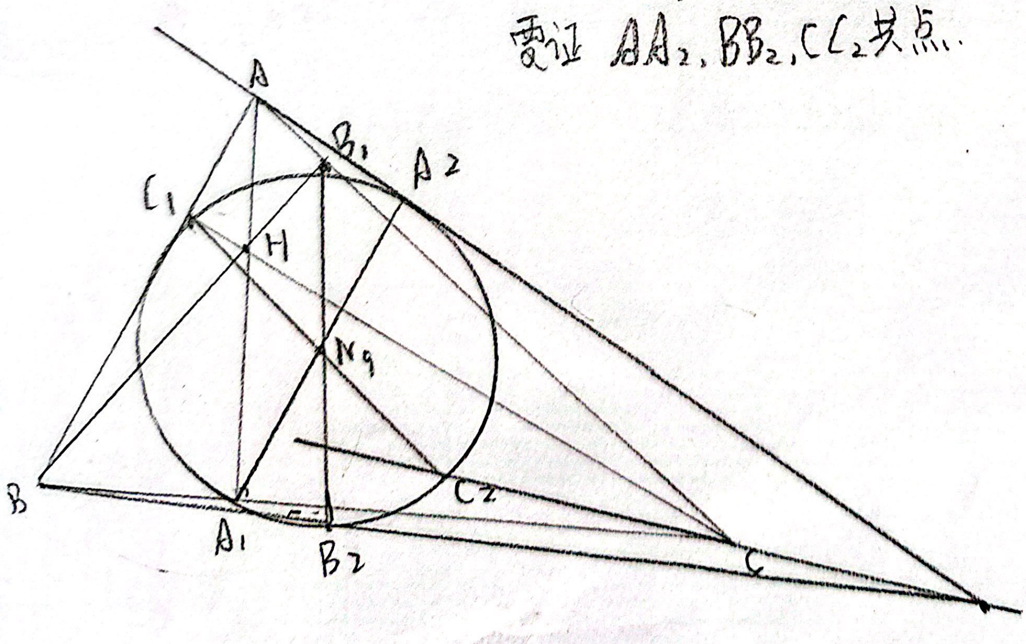
∴ A'',A,B,C四点共圆　∴ Q.E.D

N

2．在ΔABC 中引三条高线AA_1，BB_1和CC_1．设A_1A_2、B_1B_2和C_1C_2分别是ΔABC 的九点圆的直径．证明AA_2，BB_2和CC_2共点或平行．(50 分)

证明：

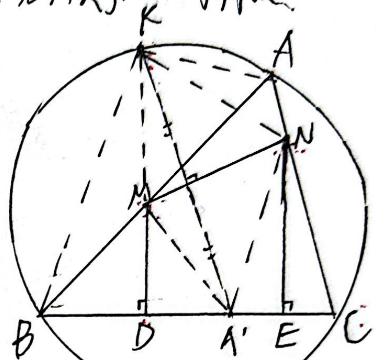
要证 AA_2,BB_2,CC_2共点.



姓名：谭棋源　　成绩：

1．在锐角三角形ABC的边BC上任取一点A'，对线段A'B作中垂线交边AB于点M，对线段A'C作的中垂线交边AC于点N．证明点A'关于直线MN的对称点在ΔABC的外接圆上．(50分)

解：∵MD、NE分别为BA'、CA'中垂线，设K为A'关于MN对称点



∴BM=MA'，NA'=NC=NK．

∵MK=MA'=MB，

∴M是△KA'B的外心．

先证明一个引理：K、A、N、M四点共圆．

50

$\angle MKN=\angle MA'N=180^\circ-\angle MA'B-\angle NA'C$

$=180^\circ-\angle ABC-\angle ACB=\angle BAC$，即$\angle MKN=\angle MAN$，K、A、M、N四点共圆，得证．

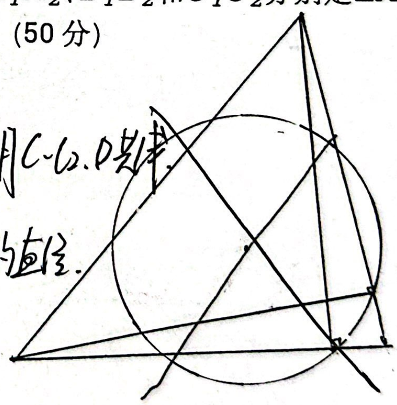
而$\angle KAN+\angle KBC=(180^\circ-\angle KMN)+\frac{1}{2}\angle KMA'=\angle NMD+\angle KMN=180^\circ$.

∴K,B,A,C四点共圆，即K在ABC外接圆上．

即A'关于MN的对称点在△ABC外接圆上．

得证．

2．在ΔABC中引三条高线AA_1, BB_1和CC_1．设A_1A_2、B_1B_2和C_1C_2分别是ΔABC的九点圆的直径．证明AA_2，BB_2和CC_2共点或平行．(50分)



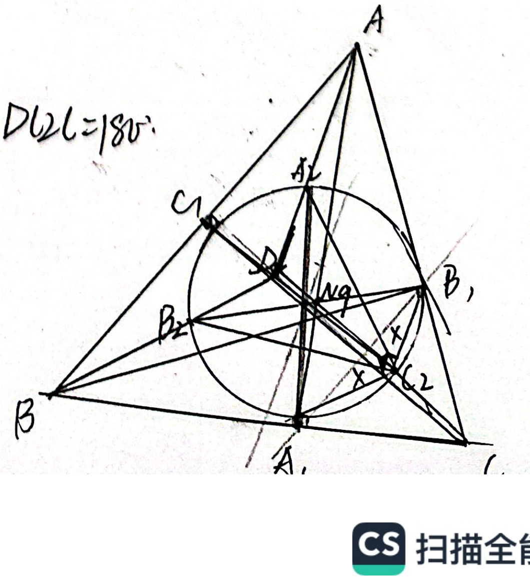
证明：设AA_2、BB_2相交于D，只需证明C、C_2、D共线．

∵A_1A_2、B_1B_2分别是△ABC九点圆的直径．

∴$\angle A_1C_2A_2=90^\circ$，$\angle B_1C_2B_2=90^\circ$.

∴$\angle A_2C_2B_1=\angle B_2C_2A_1$.

即$A_2B_1=A_1B_2$.



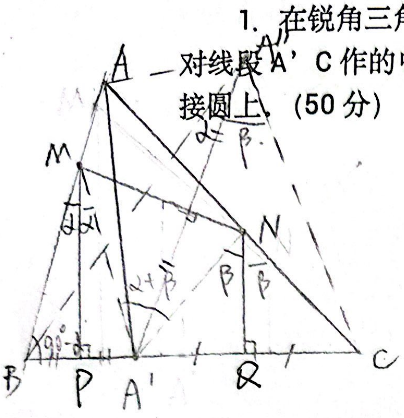
而我们只需证明C、C_2、D共线，即$\angle DC_2C=180^\circ$.

即$\angle DC_2B_1+\angle CC_2B_1=180^\circ$.

下证$\angle DC_2B_1+\angle CC_2B_1=180^\circ$.

姓名：苏庆朗　　　　成绩：

1．在锐角三角形 ABC 的边 BC 上任取一点 A'，对线段 A'B 作中垂线交边 AB 于点 M，对线段 A'C 作的中垂线交边 AC 于点 N．证明点 A' 关于直线 MN 的对称点在ΔABC 的外接圆上．（50 分）



解：连接 AA'，NA'．设 A' 关于 MN 对称点为 A''，连接 A''B，A''C，

∵ MN 为 A''A' 中垂线，MP 为 BA' 中垂线　M 的 N 的垂足分别为 P．Q

∴ M 为 △BA''A' 的外心，同理 N 为 △A'A''C 外心

设 ∠BA''A' = α，∠CA''A' = β

故 ∠PMA' = α，∠QNA' = β，∠BA''C = α + β，∠BMA' = 2α，∠CNA' = 2β

又 ∵ MP⊥BA'，NQ⊥A'C

∴ MP∥NQ ∴ ∠MA'N = α + β

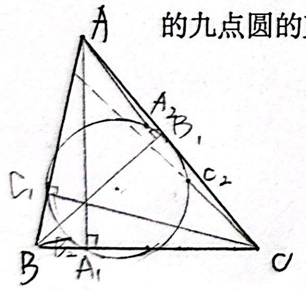
∴ ∠BAC = 360° − (180° − 2α) − (180° − 2β) − (α + β)

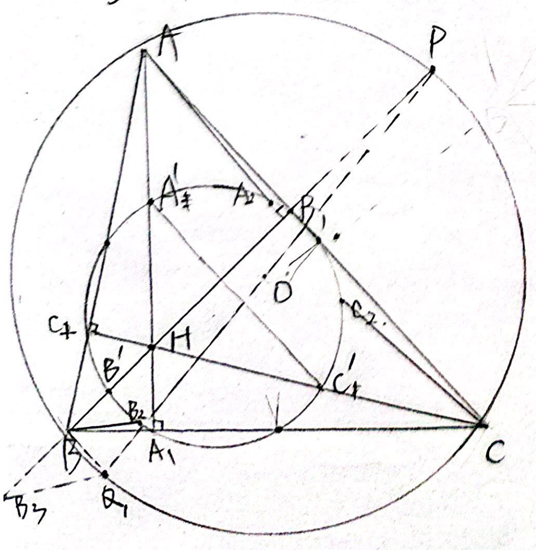
= α + β　∴ ∠BAC = ∠BA''C ∴ A''、A、B、C 四点共圆

证毕．

50

2．在ΔABC 中引三条高线 AA_1，BB_1 和 CC_1．设 A_1A_2、B_1B_2 和 C_1C_2 分别是ΔABC 的九点圆的直径．证明 AA_2，BB_2 和 CC_2 共点或平行．（50 分）





解：延长 BB_1 交 ⊙O 于 P，连接 PO 并延长交 ⊙O 于 Q_1，倍长 HB 至 B_3 使 $HB = BB_3$

连接 Q_1B_3，由于九点圆与 ⊙O 位似，且 B_2 为 H 关于 AC 对称点的对径点，Q_1 为 H 关于 AC 的对称点的对径点，故 B_2、Q_1 对应

故 B_3Q_1 与 BA_1 在位似中对应 ∴ $B_3Q_1 \parallel BA_1$．

故原命题 ⟺ B_3Q_1，C_3Q_2，A_3Q_3 共点或平行．

而其中 Q_1B_3 与 Q_1H 关于 Q_1B 轴对称，

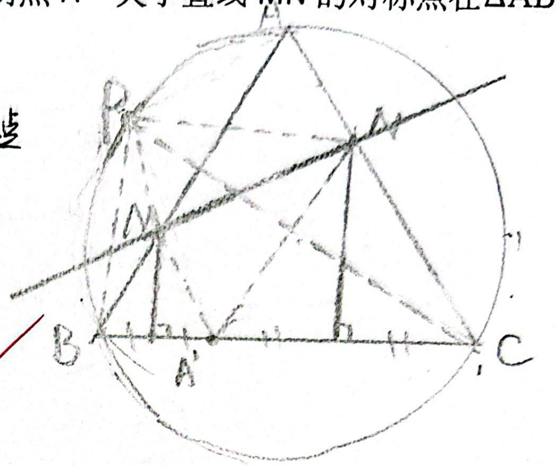
Q_2C_3 与 Q_2H 关于 Q_2C 轴对称．

Q_3A_3 与 Q_3H 关于 Q_3A 轴对称．

而 Q_1H、Q_2H、Q_3H 共点

姓名：赵恩尧　　　　　　　成绩：

1. 在锐角三角形 ABC 的边 BC 上任取一点 A’，对线段 A’B 作中垂线交边 AB 于点 M，对线段 A’C 作的中垂线交边 AC 于点 N．证明点 A’ 关于直线 MN 的对称点在ΔABC 的外接圆上．(50 分)



证明：连接 $A'M, A'N$，设 A' 关于 MN 的对称点为 P，连接 PM, PN, CP.

∵ P 与 A' 关于 MN 对称

∴ $\angle MPN = \angle MA'N = 180° - \angle MA'B - \angle NA'C$

$= 180° - \angle ABC - \angle ACB$

$= \angle BAC$

50

∴ $P、M、N、A$ 四点共圆

∴ $\angle PMB = \cancel{\angle PMA}\ 180° - \angle PMA = 180° - \angle PNA = \angle PNC$.

又 ∵ $PM = A'M = BM, PN = A'N = CN$.

∴ $\triangle PMB \sim \triangle PNC$

∴ $\cancel{\angle PBA}\ \angle PBM = \angle PCN$.

∴ $P、B、C、A$ 四点共圆，

即点 P 在 $\triangle ABC$ 外接圆上．

Q.E.D

$\angle MPN = \angle MA'N$

$= 180° - \angle B - \angle C$

$= \angle A$

2. 在ΔABC 中引三条高线AA_1, BB_1和CC_1．设A_1A_2、B_1B_2和C_1C_2分别是ΔABC 的九点圆的直径．证明AA_2，BB_2和CC_2共点或平行．(50 分)

证明：先证直角 $\triangle ABC$ 时

如图2，A_1、C_1、B 重合，设 AC 中点为 O.

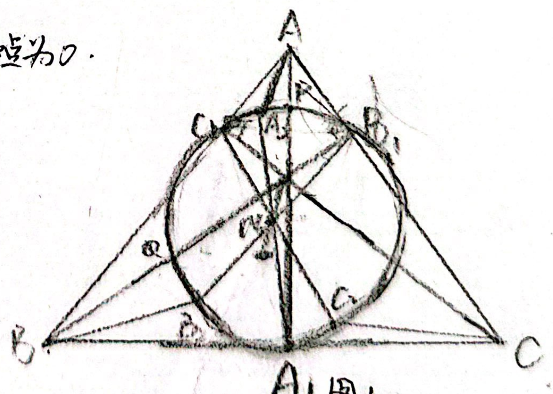
即 $O、A_2、C_2$ 重合.

∴ $\angle B_1BB_2 = 90° = \angle AB_1B$

∴ $BB_2 \parallel AC$.

又 AA_2 与 CC_2 均重合于均在 AC 上.

∴ AA_2, BB_2, CC_2 平行.



A_1 图1

20

再证一般情况.

如图1，设 AA_1 与九点圆交于 P，BC 中点为 M.

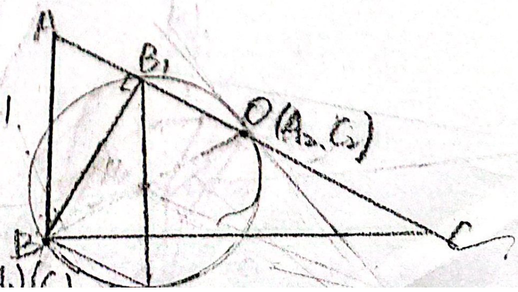
欲证 $AA_2、BB_2、CC_2$ 共点

即证 $\frac{\sin\angle BAA_2}{\sin\angle A_2AC} \cdot \frac{\cancel{\sin\angle ACA_2}\ \sin\angle ACC_2}{\cancel{\sin\angle B}\ \sin\angle BCC_2} \cdot \frac{\sin\angle CBB_2}{\sin\angle B_2BA} = 1$.

设 $\angle A_2AA_1 = \alpha$，$\angle B_2BB_1 = \beta$

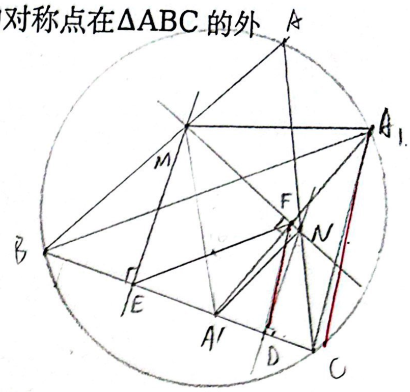
则 $\frac{\sin\angle BAA_2}{\sin\angle A_2AC} = \frac{\sin(\angle BAA_1 - \alpha)}{\sin(\angle CAA_1 + \alpha)} = \frac{\sin(90° - B - \alpha)}{\sin(90° - C + \alpha)}$

~~由轮换性，仅需证…~~ $= \frac{\frac{BA_1}{AB}\cos\alpha - \frac{AA_1}{AB}\sin\alpha}{\frac{CA_1}{\ldots} \ldots \frac{AA_1}{\ldots}}$



姓名：兰博文　　　　　　成绩：

1. 在锐角三角形 ABC 的边 BC 上任取一点 A'，对线段 A' B 作中垂线交边 AB 于点 M, 对线段 A' C 作的中垂线交边 AC 于点 N．证明点 A' 关于直线 MN 的对称点在ΔABC 的外接圆上．(50 分)



证：过A'作$A'F\perp MN$于F，延长A'F交⊙(ABC)于A_1，即证MN垂直平分A_1A'.

即证$FA_1=FA'$

50

∵ND垂直平分A'C，ME垂直平分BA'

∴$\angle NCD=\angle NFD$，$\angle MBE=\angle MFE$

∴$\angle EFD=\angle BAC=\angle BA_1C \Rightarrow EF\parallel BA_1$，$DF\parallel A_1C$

∴$\triangle DEF$与$\triangle CA_1B$位似，且$k=\frac{1}{2}$

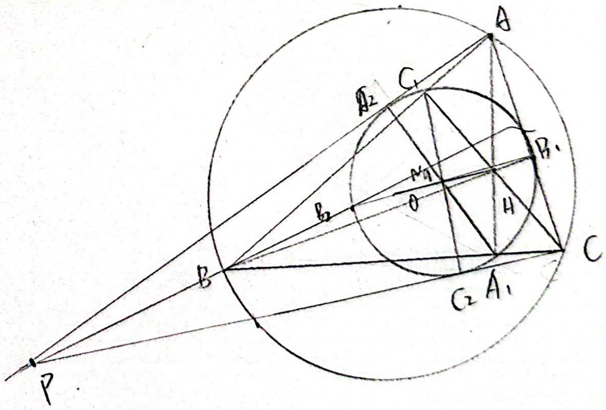
∴F为A_1A'中点

∴$FA_1=FA'$

证毕

2. 在ΔABC 中引三条高线AA_1, BB_1和CC_1．设A_1A_2、B_1B_2和C_1C_2分别是ΔABC 的九点圆的直径．证明AA_2，BB_2和CC_2共点或平行．(50 分)

证：设AA_2交BB_2于P，即证C，P，C_2共线



姓名: 白书行　　　　成绩:

1. 在锐角三角形 ABC 的边 BC 上任取一点 A'，对线段 A'B 作中垂线交边 AB 于点 M，对线段 A'C 作的中垂线交边 AC 于点 N。证明点 A' 关于直线 MN 的对称点在ΔABC 的外接圆上。(50 分)

(M,N在直线AB,AC上均成立，如图①,②)

证明 连接AB,AC，不妨设A'对称点为A''

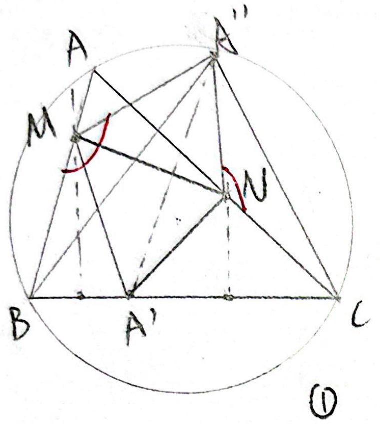
∵A', A''关于MN对称，

∴$\angle MA''N=\angle MA'N=180^\circ-\angle MA'B-\angle NA'C$

$=180^\circ-\angle MBA'-\angle NCA'$

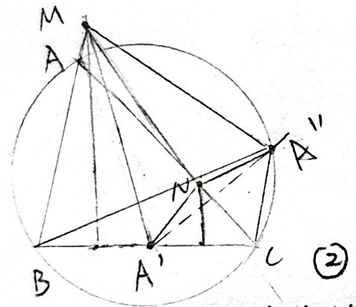
$=\angle BAC$

50



∴A,M,N,A''共圆

∴$\angle BMA''=\angle A''NC$

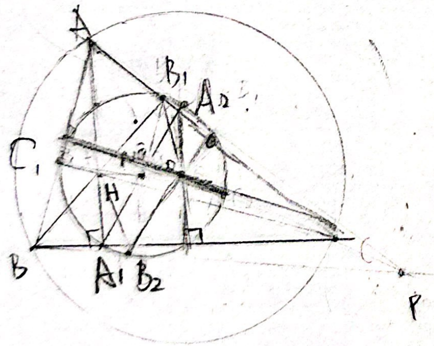


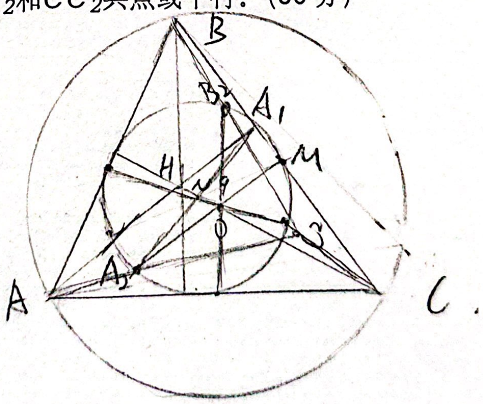
又∵$MA''=MA'=MB$, $A''N=A'N=NC$

∴$\triangle MA''B$, $\triangle NA''C$ 均为等腰三角形

∴$\angle ABA''=\angle ACA''$，故A,B,C,A''共圆 Q.E.D

2. 在ΔABC 中引三条高线AA_1, BB_1和CC_1. 设A_1A_2、B_1B_2和C_1C_2分别是ΔABC 的九点圆的直径. 证明AA_2, BB_2和CC_2共点或平行. (50 分)





证明: 首先证明一个引理: A_2, O, M共线

不妨设BC中点为M，则由九点圆知M在△ABC九点圆上

由垂径定理，知$OM\perp BC$，又知$AA_1\perp BC$，即$AA_1 \parallel OM$

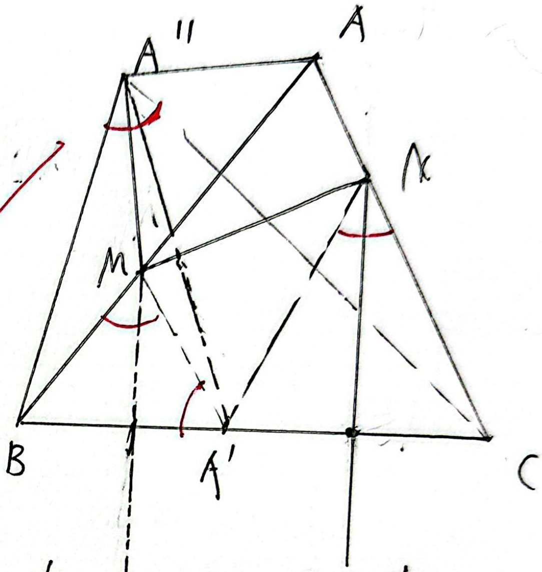
又∵N_9为HO中点，与A_1A_2中点.

∴$A_1A \parallel OA_2$

∴O, A_2, M共线，且A_2M垂直平分BC，且与AA_1平行

姓名：孙侯　　成绩：50

1．在锐角三角形 ABC 的边 BC 上任取一点 A’，对线段 A’B 作中垂线交边 AB 于点 M，对线段 A’C 作的中垂线交边 AC 于点 N．证明点 A’ 关于直线 MN 的对称点在ΔABC 的外接圆上．(50 分)



解：设 A' 关于 MN 的对称点为 A''

$\because A''M = BM = A'M$

$\therefore M$ 为 $\triangle A'A''B$ 的外心

又 $\because A''N = A'N = NC$

$\therefore N$ 为 $\triangle A''A'C$ 的外心

$\therefore \angle BA''A' = \frac{1}{2}\angle BMA'$　$\angle A'A''C = \frac{1}{2}\angle A'NC$

$\therefore \angle BA''C = \angle BA''A' + \angle A'A''C = \frac{1}{2}(\angle BMA' + \angle A'NC)$

50

我们知道 $\because BM = MA'$　$A'N = NC$

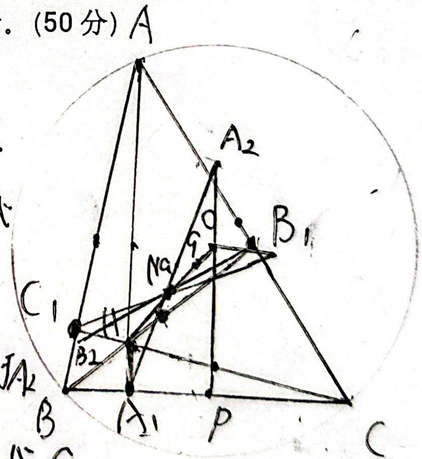
$\therefore \angle MBA' = \angle MA'B$　$\angle NCA' = \angle NA'C$

$\because \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ = \angle MA'B + \angle MA'N + \angle NA'C$，$\therefore \angle BAC = \angle MA'N$

$\therefore \angle BA''C = \frac{1}{2}(\angle BMA' + \angle A'NC) = \frac{1}{2}(360^\circ - \angle AMA' - \angle ANA') = \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle MA'N) = \angle BAC$

$\Rightarrow \angle BA''C = \angle BAC$　$A''ACB$ 四点共圆，A'' 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上，即证

2．在ΔABC 中引三条高线 AA_1，BB_1 和 CC_1．设 A_1A_2、B_1B_2 和 C_1C_2 分别是ΔABC 的九点圆的直径．证明 AA_2，BB_2 和 CC_2 共点或平行．(50 分)



解：

我证若它们互相不平行，则共点

取 OH 中点 N_9，N 为九点圆的圆心

我们现在知：九点圆的半径为大圆半径的 $\frac{1}{2}$

则两圆位似，延长 A_1 交 N_9 在圆上取

其余同理可得，在 OH 上取重心 G

引理　$HG : OG = 2 : 1$

$\therefore \frac{HG}{OG} = \frac{AG}{GP}$，设 BC 中点为 P　$AG : GP = 2 : 1$

则 $HP \parallel AO$

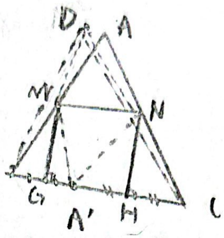
设 BB_2 与 AA_2 交于 D　即证 C_1、C、D 三点共线

姓名：曹连青　　　　　　成绩：

50

1．在锐角三角形 ABC 的边 BC 上任取一点 A’，对线段 A’B 作中垂线交边 AB 于点 M，对线段 A’C 作的中垂线交边 AC 于点 N．证明点 A’关于直线 MN 的对称点在ΔABC 的外接圆上．(50 分)

证明：如图所示．



连接 MA', NA'. 并设 A' 关于 MN 的对称点为 D.

连接 DM, DN, BD、CD.

由题，MG 为 A'B 中垂线，NH 为 A'C 中垂线.

$\Rightarrow BM=A'M,\ A'N=CN.$

$\Rightarrow \angle B=\angle MA'B,\ \angle C=\angle NA'C.$

$\therefore \angle MA'N=180^\circ-(\angle MA'B+\angle NA'C)$

$=180^\circ-(\angle B+\angle C)$

$=\angle A.$

又 ∵ D、A' 关于 MN 对称，

$\Rightarrow \angle MDN=\angle MA'N=\angle A,\ DM=MA'=BM$ ①，$DN=A'N=CN.$ ②

$\Rightarrow$ D、A、N、M 共圆，即 $\angle DMA=\angle AND.$

结合①②有 $\angle BDM=\frac{1}{2}\angle DMA=\frac{1}{2}\angle AND=\angle CDN.$

$\Rightarrow \angle MDN=\angle BDC.$

则 $\angle BDC=\angle A$，

∴ A、D、B、C 共圆，

即 D 为 (ABC) 上．□

2．在ΔABC 中引三条高线 AA_1, BB_1 和 CC_1．设 A_1A_2、B_1B_2 和 C_1C_2 分别是ΔABC 的九点圆的直径．证明 AA_2，BB_2 和 CC_2 共点或平行．(50 分)

证明：~~I, 如图a, ∴ A.~~

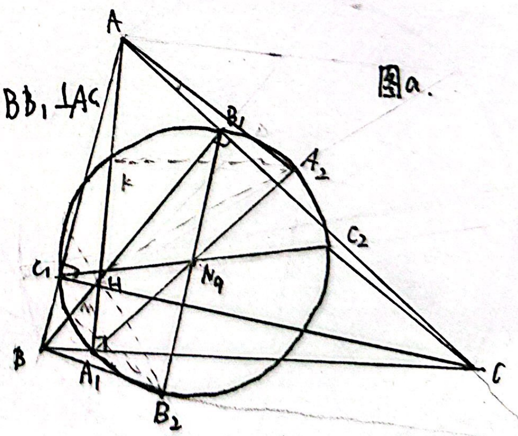
设 BB_1 交 $\odot N_9$ 于 M.

∵ B_1B_2 为 $\odot N_9$ 直径，$\Rightarrow \angle B_1MB_2=90^\circ$，又 $BB_1\perp AC$

$\Rightarrow \angle CB_1B_2=90^\circ-\angle BB_1B_2=\angle MB_2B_1.$

∴ $MB_2\parallel AC.$

又 M 为 BH 中点



图a.

$\Leftrightarrow \overset{\frown}{AC_1}=\overset{\frown}{B_2C_1}$

$\Leftrightarrow \angle BAA_2+\angle ABB_2=80^\circ$

$\Leftrightarrow \angle BAA_1+\angle ABB_1+=\angle AA_2K+\angle BB_2M$

$\angle C=$

$\angle AHA_2-\angle CAH\overset{?}{=}\angle MB_2H$　　$\Leftrightarrow B_2M\parallel CC_2$

$\angle 1\cdot 90^\circ-\angle KAH-90^\circ+\angle C\overset{?}{=}90^\circ-\angle BHB_2$