

### 3. ФИЗИЧЕСКАЯ (ВОЛНОВАЯ) ОПТИКА

#### 3.1. Свет как электромагнитная волна

**Физическая природа света.** В рамках волновой теории свет представляет собой электромагнитные волны оптического диапазона, включающего видимое, инфракрасное (ИК) и ультрафиолетовое (УФ) излучение. Границы оптического диапазона, а также границы между его участками установлены на основе экспериментальных данных и не являются абсолютно точными. Диапазон видимых длин волн:  $380 \text{ нм} \leq \lambda \leq 760 \text{ нм}$ , частота колебаний порядка  $\nu \sim 10^{15}$  Гц, период колебаний  $T \sim 10^{-15}$  с (фемтосекунды).

**Математическое описание оптических явлений** строится на основе базовых уравнений электромагнетизма – уравнений Максвелла. В рамках электромагнитной теории света его распространение рассматривается как волновой процесс. С помощью волновой теории мы можем решать задачи как о распространении света в однородной среде, так и о прохождении через любую оптическую систему, т.е. через совокупность различных сред, ограниченных теми или иными поверхностями и диафрагмами.

**Как возникает электромагнитная волна.** Колебания диполя (физическая модель атома среды в рамках классической теории – электрический диполь) вызывают изменение во времени электрического поля. Переменное электрическое поле порождает магнитное поле, которое также оказывается переменным. Переменное магнитное поле порождает электрическое и т.д. Этот процесс – **возмущение напряженности электрического и напряженности магнитного полей, протекающее во времени и в пространстве, представляет собой электромагнитную волну.**

**Электромагнитная волна – колебания напряженности электрического и магнитного поля, распространяющиеся в пространстве с конечной скоростью.**

#### Уравнения Максвелла для электромагнитного поля

Математически электромагнитные волны описываются уравнениями Максвелла. Теория Максвелла представляет собой систему основных "аксиом" классической электродинамики и играет в ней ту же роль, которую уравнения Ньютона играют в классической механике. Из этой системы однозначно вытекают все свойства поля: как уже изученные, так ещё не изученные.

Теория Максвелла представляет собой феноменологическую теорию электромагнитного поля. Она устанавливает связь между 4 основными величинами: напряженностями электрического и магнитного полей ( $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ ) и индукциями этих полей ( $\vec{D}$  и  $\vec{B}$ ). Электрические и магнитные свойства среды характеризуются тремя величинами: диэлектрической проницаемостью ( $\epsilon$ ), магнитной проницаемостью ( $\mu$ ) и удельной электрической проводимостью ( $\sigma$ ).

Уравнения Максвелла для непроводящей однородной изотропной среды, в которой нет свободных зарядов ( $\epsilon = \text{const}$ ,  $\mu = \text{const}$ ,  $\sigma = 0$ ,  $\rho = 0$ ) имеют вид:

$$\operatorname{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (3.1)$$

$$\operatorname{rot}(\vec{H}) = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (3.2)$$

$$\operatorname{div}(\vec{E}) = 0, \quad (3.3)$$

$$\operatorname{div}(\vec{H}) = 0. \quad (3.4)$$

Здесь  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  - векторы напряженности электрического и магнитного полей,  $\vec{D}$  и  $\vec{B}$  - векторы индукции электрического и магнитного полей,  $\rho$  - объемная плотность свободных зарядов.

### Физический смысл уравнений Максвелла

1. Переменное магнитное поле порождает в окружающем пространстве вихревое электрическое поле. Знак «минус» означает, что вихревое электрическое поле «стремится компенсировать» изменения, вызванные увеличением или уменьшением магнитного поля (правило Ленца).
2. Переменное электрическое поле порождает в окружающем пространстве вихревое магнитное поле.
3. Неподвижные заряды и стационарные потоки в оптике не рассматриваются, поскольку не создают электромагнитных волн.
4. В природе не существует магнитных зарядов-источников.

**Уравнения связи** характеризуют взаимодействие излучения со средой,

Для изотропной однородной среды эти уравнения имеют вид:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \cdot \vec{E}; \quad \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}; \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}. \quad (3.5)$$

Первые два материальных уравнения связывают напряженности и индукции электрического и магнитного полей, третье представляет собой закон Ома в дифференциальной форме.

На основе уравнений связи проводится **классификация сред**.

### Типы оптических сред

$\sigma = 0$  – диэлектрическая;  $\sigma \neq 0$  – проводящая ;

$\varepsilon = \text{const}$  – однородная, изотропная;  $\varepsilon = \varepsilon(x, y, z)$  – неоднородная;

$\varepsilon = \varepsilon(\text{направление})$  – анизотропная;  $\varepsilon = \varepsilon(E)$  – нелинейная

Для каждого типа сред уравнения Максвелла принимают специфический вид, соответственно, для каждого из них существуют специфические решения, описывающие особенности конкретной оптической среды, в которой распространяется электромагнитное излучение.

### Граничные условия

Чтобы система уравнений (3.1)–(3.4) была полной, т.е. позволяла однозначно определять параметры поля по начальным условиям, заданным для момента времени  $t = 0$ , во всех областях, надо дополнить эту систему граничными условиями. На границах сред электромагнитное поле может изменяться скачкообразно. При переходе через границу раздела остаются непрерывными тангенциальные составляющие векторов напряженностей и нормальные составляющие векторов индукции электрических и магнитных полей:

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}, H_{1\tau} = H_{2\tau}; D_{1n} = D_{2n}, B_{1n} = B_{2n}, \quad (3.6)$$

где индексом  $\tau$  обозначены тангенциальные составляющие напряженностей электрических и магнитных полей по обе стороны от границы, а индексом  $n$  – нормальные составляющие индукций этих полей.

**Покажем, что из уравнений Максвелла (3.1)-(3.4), записанных для однородных изотропных сред, следует, что электромагнитное поле способно существовать самостоятельно, отдельно от электрических зарядов и токов, изменяя свое состояние – напряженность электрического и магнитного поля – во времени и в пространстве, т.е. существовать в виде электромагнитных волн.**

### Волновое уравнение для светового поля

Проведём математические операции: продифференцируем первое из уравнений по времени

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{rot}(\vec{H}) = \text{rot}\left(\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\right) = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Подставим в это уравнение  $\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$  из второго уравнения  $\left(\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{\text{rot}(\vec{E})}{\mu_0 \cdot \mu}\right)$ , получим

$$-\frac{1}{\mu_0 \cdot \mu} \text{rot}(\text{rot}(\vec{E})) = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \text{или} \quad -\text{rot} \text{rot}(\vec{E}) = \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Обозначим  $\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$  и посмотрим в справочнике, чему равен  $\text{rot}(\text{rot}(\vec{a})) \equiv \text{grad}(\text{div}(\vec{a})) - \Delta \vec{a}$  (или преобразуем по правилу циклической перестановки: "бац минус цаб":  $\text{rot}(\text{rot}(\vec{E})) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}, \vec{E}) - (\vec{\nabla}, \vec{\nabla}) \vec{E}$ ).

Таким образом,  $\text{rot}(\text{rot}(\vec{E})) \equiv \text{grad}(\text{div}(\vec{E})) - \Delta(\vec{E})$  и учитывая, что  $\text{div}(\vec{E}) = 0$ , получаем

$$\Delta \vec{E} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (3.7)$$

— **волновое уравнение для электрического поля  $\vec{E}$ .**

Аналогично, рассмотрев  $\text{rot}(\text{rot}(\vec{H}))$ , можно получить волновое уравнение для магнитного поля:

$$\Delta \vec{H} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0, \quad (3.8)$$

и все решения этого уравнения будут иметь такой же вид, как и решения уравнения (3.7) при замене  $E \rightarrow H$ .

В математических выкладках был использован дифференциальный операторный вектор набла – оператор Гамильтона (гамильтониан)  $\vec{\nabla} = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$  и оператор Лапласа (ла-

пласиан)  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$

Коэффициент  $\frac{\varepsilon\mu}{c^2}$  принято обозначать как  $\frac{1}{v^2}$ , где  $v \equiv \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$  – фазовая скорость электромагнитной волны (скорость распространения фазы волны).

С математической точки зрения любая функция  $E = E(z - vt) + E(z + vt)$  описывает распространение величины  $E$  в пространстве с течением времени, причем первое слагаемое описывает распространение волны в направлении  $+z$ , а второе – в направлении  $-z$ . Покажем это.

Пусть форма волны, описываемой функцией  $E(z, t)$ , в момент времени  $t$  в точке с координатой  $z$  имеет вид, показанный на рис. 3.1а. За время  $\Delta t$  волна распространится на расстояние  $\Delta z$ . Предположим, что форма волны сохраняется, тогда в точке  $z + \Delta z$  в момент времени  $t + \Delta t$  (см. рис. 3.1б.) должно выполняться условие:

$$E(z, t) = E(z + \Delta z, t + \Delta t). \quad (3.9)$$

Равенство (3.9) означает, что колебания величины  $E$  в точке  $z + \Delta z$  происходят точно так же, как и в точке  $z$ , лишь запаздывая по времени на  $\Delta t$ . Какова должна быть зависимость величины  $E$  от координаты  $z$  и времени  $t$ , чтобы равенство (3.9) было справедливо? Нетрудно видеть, что она должна иметь вид  $E(z, t) = E(z - vt)$ . Действительно, в этом случае равенство (3.9) выполняется, поскольку, если  $z$  заменить на  $z + \Delta z$ , а  $t$  на  $t + \Delta t$ , то величина  $z - vt$  не изменится:

$z - vt = z + \Delta z - v(t + \Delta t)$  в силу того, что  $\Delta z - v\Delta t = 0$ .

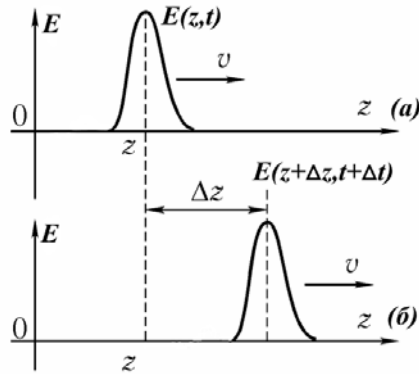


Рис.3.1

Мы рассмотрели случай, когда волна распространяется в направлении  $+z$ , при распространении волны в противоположном направлении  $E(z, t) = E(z + vt)$ .

Функция  $E = E(z - vt)$  является решением волнового уравнения, в чем нетрудно убедиться непосредственной подстановкой. Величина  $v \equiv \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ , определяемая из условия

$$\frac{1}{v^2} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2}, \quad (3.10)$$

характеризует скорость распространения колебаний в среде с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$  и магнитной проницаемостью  $\mu$ . Величина  $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$  называется показателем преломления. В оптике  $\mu = 1$ , т.к. отсутствует парамагнетизм и ферромагнетизм для переменного

го магнитного поля оптической частоты, поэтому  $n = \sqrt{\varepsilon}$ . Дело в том, что магнитные диполи атомов не успевают поворачиваться за магнитным полем, если оно изменяется с оптической частотой.

Как следует из проведенного выше рассмотрения,  $n = c/v$ , и показывает, **во сколько раз скорость света в веществе меньше скорости света в вакууме.**

Уравнения (3.7), (3.8) являются следствием уравнений Максвелла, они называются **волновыми уравнениями** и играют основополагающую роль в оптике. Из них вытекает

1) факт существования электромагнитных волн,

2) распространение электромагнитных волн в вакууме со скоростью  $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ ,

3) распространение электромагнитных волн в однородной изотропной среде со скоростью  $v = \frac{c}{n}, n = \sqrt{\varepsilon}$ .

**Электромагнитная волна – колебания напряженности электрического и магнитного поля, распространяющиеся в пространстве с конечной скоростью.**

Отметим, что уравнение (3.7) описывает волновые процессы и более общего характера, чем только волны вида  $E = E(z \pm vt)$ . Рассмотрим несколько важных случаев простейших типов волн.

**Плоская монохроматическая волна – частное решение волнового уравнения**

Рассмотрим решения волнового уравнения (3.7) для нескольких частных случаев. Предположим для простоты, что электрическое поле зависит только от одной координаты  $z$ . В этом случае уравнение (3.7) принимает вид:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (3.11)$$

Одним из возможных решений уравнения (3.7) является **плоская монохроматическая волна, распространяющаяся вдоль оси  $z$** . Напряженность электрического поля такой волны описывается выражением:

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 \cos \left( \omega \left( t - \frac{z}{v} \right) + \varphi_0 \right) \quad (3.12)$$

Величина  $E_0$  называется **амплитудой**, а все выражение, стоящее под знаком косинуса (аргумент косинуса), – **фазой** волны,  $\omega$  – **циклическая частота**. Величина  $\varphi_0$  задает **начальную фазу**, а величина  $v$  описывает **скорость распространения фазы волны (фазовую скорость волны)**.

Поле волны может быть записано и по-другому, например, в виде

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kz + \varphi_0). \quad (3.13)$$

Здесь введено обозначение  $k = \omega/v$ . Параметр  $k$  называется **волновым числом**. Используя справедливое для волн любых типов соотношение  $\lambda = vT = v/\nu$  (где  $\lambda$  — **длина волны**, а  $\nu$  — **частота колебаний**), находим, что  $k = 2\pi/\lambda$ . Волновое число измеряется единицах, обратных длине, как правило, в  $\text{см}^{-1}$ .

Распределение напряженности поля в плоской монохроматической волне показано на рис. 3.2. Если в выражениях (3.12), (3.13) зафиксировать  $z$ , то получим гармонические колебания напряженности электрического поля волны с периодом  $T$ . Если положить постоянным  $t$ , то зависимость волновой функции от  $z$  дает как бы моментальную фотографию волны — распределение значений напряженности поля в пространстве с пространственным периодом  $\lambda = v T$ .

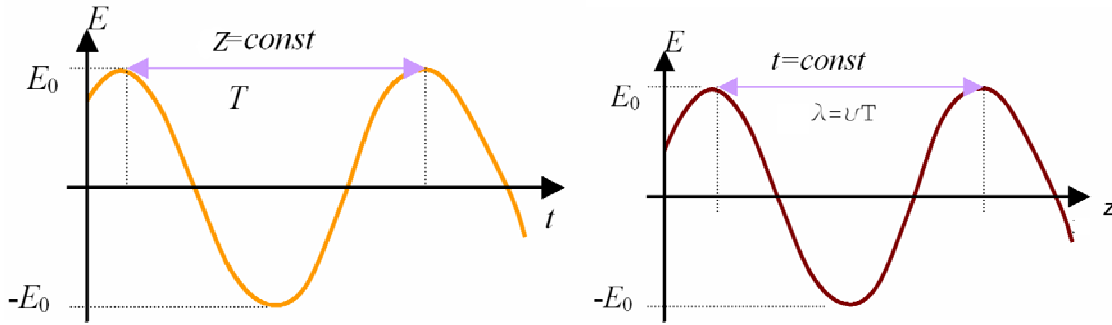


Рис.3.2

Вид функции (3.10), (3.11) показывает, что она **периодична по времени с периодом  $T$ , и по координате  $z$  с пространственным периодом  $\lambda$ .**

**Параметр  $v$ , называемый фазовой скоростью волны, определяет скорость перемещения волнового фронта**, то есть волновой поверхности на границе между возмущенной и невозмущенной частью пространства. **Волновая поверхность, или поверхность равных фаз — это поверхность, на которой в любой фиксированный момент времени фаза волны имеет одно и то же постоянное значение.** На волновой поверхности  $\omega\left(t - \frac{z}{v}\right) + \varphi_0 = \omega t - kz + \varphi_0 = const$ , откуда следует, что скорость, с которой распространяется фаза волны, равна

$$\frac{dz}{dt} = v = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda 2\pi}{2\pi T} = \frac{\lambda}{T} = v. \quad (3.14)$$

В рассматриваемом случае волновые поверхности являются плоскостями, перпендикулярными оси  $z$  удовлетворяющими уравнению  $z = const$ , чем и объясняется название волны — **«плоская»**. Волна называется **монохроматической**, (одноцветной) потому что в ней совершаются колебания напряженностей  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  на одной частоте, т.е., гармонические колебания (по закону  $\sin$ ,  $\cos$ ).

Чтобы получить выражение для волны, распространяющейся в отрицательном направлении, достаточно поменять знак в выражении для фазы:  $\omega\left(t + \frac{z}{v}\right) + \varphi_0$ , или  $(\omega t + kz + \varphi_0)$ .

Часто бывает необходимо рассмотреть волну, которая распространяется не вдоль оси  $z$ , а в каком-то произвольном направлении. Пусть направление задается единичным вектором нормали  $\vec{n}$  к волновому фронту. Тогда уравне-

ние поверхности постоянной фазы записывается в виде  $\vec{n}\vec{r} = \text{const}$ , где  $\vec{r}$  — радиус-вектор, проведенный из начала координат к некоторой точке волнового фронта. В выражении для напряженности электрического поля плоской волны (3.13) в этом случае вместо  $z$  следует записать скалярное произведение  $\vec{n}\vec{r}$ .

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - k\vec{n}\vec{r} + \varphi_0) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0), \quad (3.15)$$

где  $\vec{k} = k\vec{n}$  — **волновой вектор**, длина которого равна волновому числу, а направление указывает направление перемещения волнового фронта и совпадает с нормалью к волновому фронту.

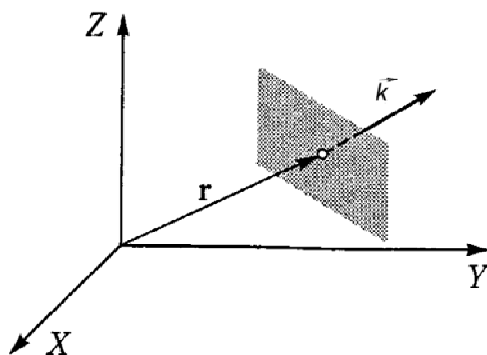


Рис. 3.3. Волновой фронт плоской монохроматической волны

С учетом формулы Эйлера  $\cos \varphi = (\exp(i\varphi) + \exp(-i\varphi))/2 = \text{Re}(\exp(i\varphi))$  можно применять также запись напряженности электрического поля волны в комплексном виде. Тогда выражения (3.13) и (3.15) примут следующий вид:

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 \exp[i(\omega t - kz + \varphi_0)], \quad (3.16)$$

$$\vec{E}(r, t) = \vec{E}_0 \exp[i(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0)]. \quad (3.17)$$

При этом надо помнить, что реальное физическое поле описывается вещественной частью выражений (3.16), (3.17).

### Параметры плоской монохроматической волны.

Если выражение для вектора  $\vec{E}$  плоской волны подставить в волновое уравнение (3.7), то оно превращается в тождество при условии  $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi\nu}{T\nu} = \frac{2\pi\nu}{\lambda} = k\nu$ ,  $\nu$  — фазовая скорость волны. Это является доказательством того, что **плоская волна является решением волнового уравнения**.

$\vec{E}_0$  — амплитуда волны, в общем случае, комплексная.

$(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0)$  — фаза волны,

$\varphi_0$  — начальная фаза волны,

$\omega$  — циклическая частота волны,

$\omega = 2\pi\nu$ , где  $\nu$  — частота волны (Гц),

$\nu = \frac{1}{T}$ , где  $T$  — период волны,

$\vec{k} = k\vec{n} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{n}$  — волновой вектор, направлен перпендикулярно волновой поверхности

(поверхности равных фаз),

$k \equiv |\vec{k}|$  — волновое число,  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ,

$\lambda = \nu T$  — длина волны или ее пространственный период.

### Свойства электромагнитных волн (на примере плоской монохроматической волны)

Подставим выражения для поля плоской монохроматической волны (3.17) в уравнения Максвелла (3.1)–(3.2). Очевидно, что дифференцирование по времени сведется просто к умножению  $\vec{E}, \vec{H}$  на  $(i\omega)$ . Раскрывая скалярное произведение по координатным составляющим  $\vec{k}\vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z$ , убеждаемся, что дифференцирование по координате (например, по  $x$ ) приводит к умножению  $\vec{E}, \vec{H}$  на  $(-ik_x)$ . Применение оператора Гамильтона  $\vec{\nabla}$  с проекциями  $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$  будет соответствовать умножению на вектор  $(-i\vec{k})$ . Таким образом, вместо дифференциальных уравнений (3.1)–(3.2) получим систему алгебраических уравнений

$$-i\vec{k} \times \vec{E} = -\mu\mu_0 i\omega \vec{H}, \quad (3.18)$$

$$-i\vec{k} \times \vec{H} = \varepsilon\varepsilon_0 i\omega \vec{E}. \quad (3.19)$$

На основании этой системы можно сделать следующие выводы. 1. Поскольку векторное произведение есть вектор, перпендикулярный своим сомножителям, то  $\vec{H} \perp \vec{k}$ ,  $\vec{E} \perp \vec{k}$ , то есть **колебания электрического и магнитного полей в волне происходят в направлениях, перпендикулярных направлению распространения**. Эти соотношения выражают поперечность электромагнитных волн. Кроме того,  $\vec{E} \perp \vec{H}$ . Таким образом, как следует из уравнения (3.18), **волновой вектор  $\vec{k}$  и векторы  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  (именно в таком порядке  $\vec{k}, \vec{E}, \vec{H}$ , или в порядке  $\vec{E}, \vec{H}, \vec{k}$ )<sup>1</sup>, образуют правую ортогональную тройку векторов**.

Структура плоской монохроматической волны показана на рис. 3.4

<sup>1</sup> Допустима циклическая перестановка векторов, удобнее запоминать правую тройку векторов в последовательности  $\vec{E}, \vec{H}, \vec{k}$ .



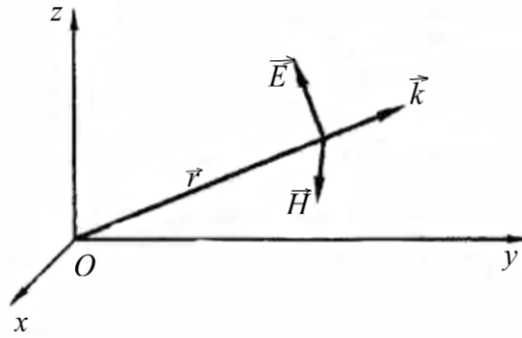


Рис.3.4. Структура плоской монохроматической волны (правая тройка векторов)

2. Из того факта, что уравнения (3.18), (3.19) должны выполняться в любой момент времени и в каждой точке пространства, вытекает, что поля  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  в волне колеблются синфазно (см. рис. 3.5), а амплитуды этих колебаний связаны соотношением

$$E_0 = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\epsilon\epsilon_0}} H_0 \quad (3.20)$$

На рис. 3.5 показана мгновенная фотография – распределение полей двух плоских монохроматических волн, бегущих слева направо, как функции координаты  $z$  в некоторый момент времени  $t$ .

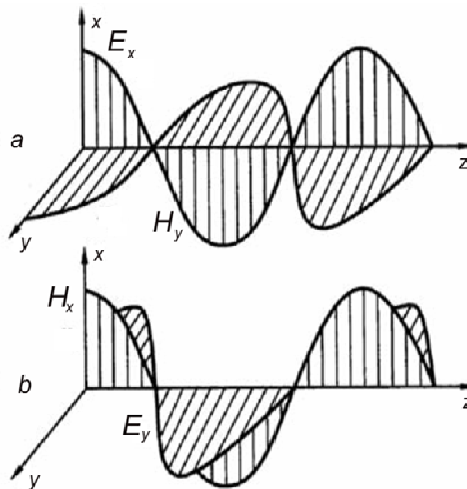


Рис. 3.5 Синфазность колебаний напряженностей электрического и магнитного полей

3. Поляризация является одной из основных характеристик плоской монохроматической волны. Она является следствием поперечности электромагнитной волны.

**Поляризация – свойство света, обусловленное поперечностью электромагнитных волн. Поляризация характеризует структуру колебаний напряженности электрического (магнитного) поля в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны.**

В общем случае плоская монохроматическая волна с напряженностью  $\vec{E}$  может иметь обе отличные от нуля компоненты  $E_x = a \cos \omega t$  и  $E_y = b \cos (\omega t + \delta)$ . Тогда вектор  $\vec{E}$  можно представить в виде суперпозиции двух компонент с разностью фаз  $\delta$ , откуда при условии, что  $\delta = \text{const}$ , конец вектора  $\vec{E}$  в плоскости, перпендикулярной направлению распростране-

ния, в некоторой точке пространства (при  $z = \text{const}$ ) с течением времени может описывать различные фигуры. Если  $\delta = 0$ , то поляризация волны будет линейной, если  $\delta = \pm\pi/2$ ,  $a = b$  – круговой, если  $0 < \delta < +\pi/2$  – эллиптической. Состояния поляризации плоской монохроматической волны иллюстрирует рис. 3,6.

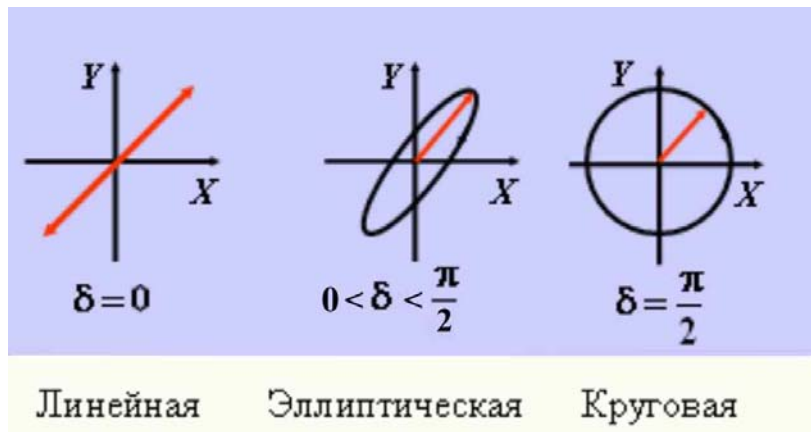


Рис.3.6. Состояния поляризации плоской монохроматической волны

В пространстве вдоль оси  $z$  (при  $t = \text{const}$ ) в общем случае эллиптической поляризации будет распространяться со скоростью света волна, в которой вектор  $\vec{E}$  будет описывать спираль, совершая 1 виток за период  $T$  и продвигаясь при этом на расстояние  $\lambda$  (см. рис.3.7).

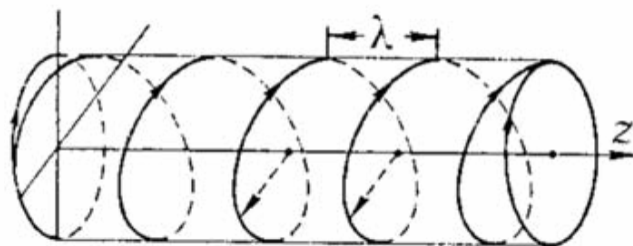


Рис.3,7. Пространственная структура эллиптически поляризованной волны

### Энергетические характеристики плоской монохроматической волны

Энергия волны в однородной среде складывается из энергии электрического и магнитного полей. Мгновенные значения объёмной плотности энергии электромагнитного поля  $w_{\text{ЭМ}}$  описываются соотношением:

$$w_{\text{ЭМ}} = w_{\text{эл}} + w_{\text{м}} = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} + \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} = \sqrt{\epsilon_0 \epsilon \mu_0 \mu} E H = \frac{1}{\nu} E H, \quad (3.21)$$

где  $\nu = 1/\sqrt{\epsilon_0 \epsilon \mu_0 \mu}$ . Электромагнитные волны переносят энергию. При распространении волн возникает поток электромагнитной энергии. За время  $\Delta t$  перпендикулярно площадке  $S$  проходит энергия, сосредоточенная в объёме параллелепипеда с основанием площади  $S$  и высотой  $\nu$ , равная  $W = w \nu \Delta t S$ . Плотность потока энергии – энергия, протекающая за единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную к направлению распространения потока равна  $S = w \nu$ . Эта величина векторная, она определяется вектором Пойнтинга  $\vec{S}$

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}. \quad (3.22)$$

Соотношение (3.22) справедливо, если размеры площадки велики по сравнению с длиной волны, что, как правило, выполняется в оптическом диапазоне.

Учитывая (3.19), нетрудно видеть, что направление вектора  $\vec{S}$  совпадает с направлением распространения волнового фронта, задаваемым вектором

$$\vec{k} = \varepsilon_0 \varepsilon \omega \vec{S}. \quad (3.23)$$

Для величины плотности потока энергии из соотношений (3.20), (3.21) получим выражение

$$S = E_0 \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}) H_0 \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}) = \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu \mu_0}} E_0^2 \cos^2(\omega t - \vec{k}\vec{r}) \quad (3.24)$$

**Величина**  $I = \langle S \rangle = 1/2 \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 / \mu \mu_0} E_0^2$  **называется интенсивностью света**,  $\langle \rangle$  означает усреднение по времени. Эту величину, квадратичную по амплитуде, регистрирует приемник света, что важно для описания интерференционной картины.

**Почему для описания светового поля используется вектор  $\vec{E}$ , а не  $\vec{H}$**

Выражение интенсивности света через вектор  $\vec{E}$ , а не  $\vec{H}$ , имеет физический смысл. Оценим действие электрического и магнитного полей на заряд  $q$ , определяемого силами Лоренца (см. рис. 3.8): силой электрического поля  $\vec{F}_e = q\vec{E}$  и магнитного поля  $\vec{F}_m = q\vec{v}_q \vec{B}$ , где  $\vec{v}_q$  - скорость движения заряда, а  $\vec{B}$  вектор индукции магнитного поля.

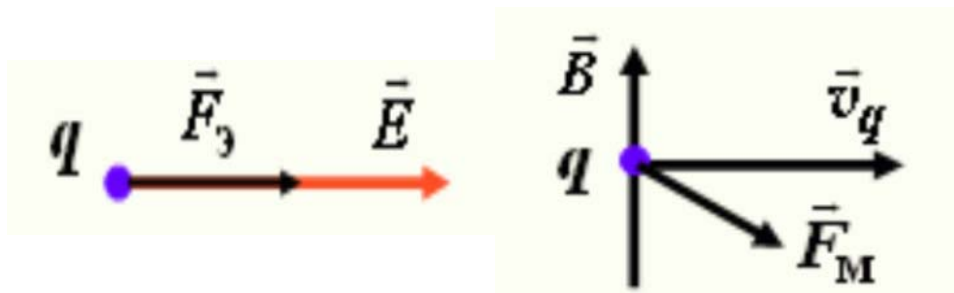


Рис. 3.8. Силы, действующие на заряженную частицу со стороны электрического и магнитного полей

$$\frac{F_e}{F_m} = \frac{qE}{qv_q B} = \frac{qE}{qv_q \mu \mu_0 H} = \frac{E \sqrt{\mu \mu_0}}{v_q \mu \mu_0 \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0} E} = \frac{1}{v_q \sqrt{\mu \mu_0} \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0}} = \frac{1}{v_q \sqrt{\varepsilon \mu} \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = \frac{c}{v_q n} = \frac{v}{v_q} = 10^4, \quad (3.25)$$

где  $v$  - фазовая скорость волны.

### Связь между волной и лучом

В оптике часто встречается ситуация, когда волна близка к монохроматической, но сложным образом зависит от пространственных координат, например, после прохождения через оптическую систему. В этом случае опишем поле уравнением

$$E(r, t) = E(r) e^{i\omega t}. \quad (3.26)$$

Подставляя это выражение в волновое уравнение (3.7) и учитывая связь между частотой и волновым числом, найдем, что зависящая от координат функция  $E(r)$  удовлетворяет уравнению

$$\Delta E(r) + k^2 E(r) = 0 \quad (3.27)$$

которое называется уравнением Гельмгольца.

### Уравнение эйконала

Рассмотрим монохроматическую световую волну с длиной волны в вакууме  $\lambda$ , распространяющуюся в среде с показателем преломления  $n = \sqrt{\varepsilon}$ . Поле этой волны должно удовлетворять уравнению Гельмгольца:

$$\Delta E(r) + k_0^2 n^2 E(r) = 0, \quad (3.28)$$

где  $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$  — волновое число для вакуума. Будем искать решение этого уравнения в виде

$$E(r) = E_0(r) \exp[ik_0 L(r)], \quad (3.29)$$

где  $L(r)$  — вещественная скалярная функция координат, имеющая размерность длины и называемая оптическим путем или эйконалом (от греч. εἰκον — путь).

Нетрудно видеть, что равенство  $L = \text{const}$  определяет поверхность постоянной фазы, то есть геометрический волновой фронт.

Подставим выражение (3.29) в (3.28) и перейдем к пределу геометрической оптики  $\lambda \rightarrow 0, k_0 \rightarrow \infty$ , оставив только слагаемые с  $k_0^2$ . Тогда получаем:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial z}\right)^2 = n^2, \text{ или } \text{grad}^2(L) = n^2 \quad (3.30)$$

Уравнение (3.30) называется уравнением эйконала и является основным уравнением, описывающим поведение света в приближении геометрической оптики. Отметим, что при его выводе мы пренебрегли многочисленными слагаемыми, получающимися при дифференцировании выражения (3.28). Отсюда следует, что **приближение геометрической оптики справедливо, если изменения амплитуды  $E$  на расстоянии порядка длины волны малы по сравнению с самой амплитудой**. Это условие, очевидно, нарушается на границе геометрической тени, так как там интенсивность света, а значит, и напряженность поля меняется скачком. Действительно, именно на границе тени особенно ярко проявляют себя дифракционные эффекты, обусловленные волновой природой света. Нельзя также ожидать, что геометрическая оптика даст правильное описание полей вблизи точек, где имеется резкий максимум интенсивности, например, в окрестности формируемого линзой оптического изображения точечного источника.

Уравнение эйконала можно также записать в векторной форме. Введем единичный вектор  $\vec{n}$ , совпадающий по направлению с вектором  $\overline{\text{grad}(L)}$ , тогда

$$\overline{\text{grad}(L)} = n\vec{n}. \quad (3.31)$$

Из векторного анализа известно, что вектор градиента всегда ортогонален к поверхности уровня функции, то есть поверхности, на которой функция постоянна. В данном случае поверхность уровня для эйконала представляет собой волновую поверхность, следовательно,  $\vec{n}$  — единичный вектор (орт) нормали к волновой поверхности.

Исходя из уравнений Максвелла, мы показали (см. формулу (3.23)), что направление вектора Пойнтинга, определяющего перенос энергии света, совпадает с вектором  $\vec{k} = k\vec{n} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{n}$ . Таким образом, линии вектора  $\vec{n}$  (обозначенные на рис. 3.9 буквами А, В, С) представляют собой геометрические световые лучи, а семейство волновых поверхностей (1, 2, 3) образует с ними ортогональную (в общем случае криволинейную) сеть.

Таким образом, из уравнений Максвелла следует, что **лучи — это нормали к волновой поверхности (поверхности постоянной фазы волны).**

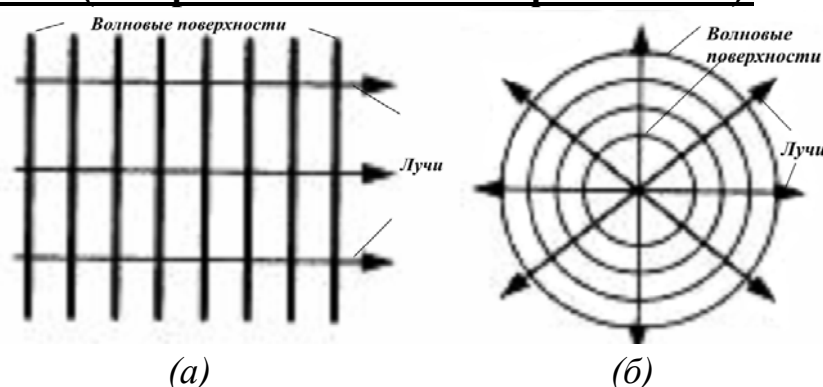


Рис. 3.9. Волновые поверхности в различные моменты времени и световые лучи в случае плоской (а) и сферической (б) волн

Основными характеристиками плоских монохроматических волн служат наличие плоского фронта, монохроматичность и существование определенной поляризации излучения. Плоская монохроматическая волна — это идеализация, модель.

## **Как получить на практике**

### **1. Плоский фронт волны**

В оптической области можно использовать следующую систему: малая диафрагма (или щель, ограниченная по высоте) помещается перед линзой (объективом) в ее фокусе. Тогда на выходе этого устройства, называющегося коллиматором, получается параллельный пучок света, соответствующий плоской волне. Но если излучение источника содержит широкий интервал длин волн (т. е. не монохроматично), то создание такой системы становится затруднительным, так как условия фокусировки для света разных длин волн различны.

Излучение лазера в наибольшей степени отвечает сформулированным требованиям — расходимость пучка очень мала и излучается обычно строго определенной длины волны. Наименьшую расходимость имеют газовые лазеры. Она составляет для них примерно 10'. Использование относительно простой телескопической насадки можно еще уменьшить расходимость излучения газового лазера (до 10-20").

## 2. Монохроматичность

Излучение лазера представляется наиболее близким к идеальной монохроматической волне. Эффективная ширина каждой из компонент линии газового лазера в результате ряда причин оказывается даже меньше указанного выше предела (она равна  $10^{-6}$ - $10^{-7}$  Å ( $1\text{Å}-10^{-10}\text{м}$ ), тогда как «естественная» ширина линии составляет  $10^{-4}$  Å), а мощность, излучаемая в столь узком интервале длин волн, относительно велика. Так, гелий-неоновый лазер, генерирующий излучение, с длиной волны 6328 Å, обычно имеет мощность порядка нескольких милливатт. В некоторых других газовых лазерах (например, в ионном аргоновом) излучается мощность порядка нескольких ватт, а инфракрасный лазер на  $\text{CO}_2$  ( $\lambda \sim 10$  мкм) может излучать огромную мощность (несколько киловатт).

## 3. Поляризация

Решением уравнений Максвелла служит монохроматическая волна, и поэтому она обязательно должна быть поляризована (в общем случае эллиптически). Лишь обрыв колебаний (нарушение монохроматичности волны) приводит к исчезновению данной поляризации излучения. Именно так обстоит дело в оптике, где в среднем **через каждые  $10^8$  с происходит затухание колебаний**. Если бы поляризацию исследовали безынерционной аппаратурой, то можно было бы обнаружить смену различных состояний поляризации через столь малые промежутки времени. Но создать такую аппаратуру сложно, любое приспособление, пригодное для исследования поляризации, неизбежно инерционно, и, наблюдая естественный свет, мы усредняем изменение его поляризации за промежуток времени, значительно превышающий  $10^8$  с. Так и возникает неполяризованный свет, который и наблюдается на опыте. Чтобы получить поляризованное излучение от обычного источника света, используют поляризационные устройства (к примеру, поляризатор).

По поляризации излучение лазера также отличается от излучения обычных источников света. Физика процессов в лазере связана не со случайным началом колебаний (спонтанное излучение), а с вынужденными колебаниями. Вынужденное излучение характеризуется вполне определенной поляризацией.

Линейную поляризацию излучения в газовом лазере можно создать, если окна разрядной трубки (активной среды лазера), находящейся внутри резонатора, расположить под углом Брюстера к оптической оси трубки.

**Итак, мы видим, что для создания в эксперименте плоской монохроматической волны можно использовать коллиматор, монохроматор и поляризатор. Излучение произвольного источника света, пропущенное через систему, содержащую все эти устройства, в какой-то степени соответствует идеальной плоской монохроматической волне, описываемой соотношением (3.16). Излучение лазера в еще большей степени соответствует принятой идеализации.**

Рассматривать отражение, преломление, поглощение, рассеяние света мы будем на примере плоской световой волны, так как практически всегда можно выбрать условия, при которых световую волну можно считать плоской. По этой причине рассмотрение плоских волн играет большую роль в оптике.

## **Сферическая волна**

Вторым важным типом волн являются *сферические волны*, волновые поверхности которых представляют собой концентрические сферы (см. рис. 3.9). Напряженность электрического поля сферической волны описывается выражением:

$$\vec{E}(r,t) = \frac{\vec{E}_0}{r} \cos(\omega t - kr + \varphi_0). \quad (3.32)$$

Выражение (3.32) записано в сферической системе координат. Оно описывает сферическую волну, расходящуюся от точечного источника, расположенного в начале координат. Волновые поверхности сферической волны представляют собой сферы, удовлетворяющие уравнению  $r = \text{const}$ . В отличие от плоской волны, амплитуда сферической волны не является постоянной, а убывает с расстоянием.

## **Основные положения раздела 3.1**

### **Физическая природа света.**

В рамках волновой теории свет представляет собой электромагнитные волны. Под светом в настоящее время понимают электромагнитное излучение оптического диапазона, включающего видимое, инфракрасное (ИК) и ультрафиолетовое (УФ) излучение.

Границы оптического диапазона, а также границы между его участками установлены на основе экспериментальных данных и не являются абсолютно точными. Диапазон видимых длин волн:  $380 \text{ нм} < \lambda < 760 \text{ нм}$ , частота колебаний порядка  $\nu \sim 10^{15}$  Гц, период колебаний  $T \sim 10^{-15}$  с (фемтосекунды).

**Электромагнитная волна – колебания напряженности электрического и магнитного полей, распространяющиеся в пространстве с конечной скоростью.**

Математическое описание оптических явлений строится на основе базовых уравнений электромагнетизма – уравнениях Максвелла.

### **Из уравнений Максвелла следует**

1) факт существования электромагнитных волн,

2) распространение электромагнитных волн в вакууме со скоростью

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 2.99792458 \times 10^8 \text{ м/с},$$

3) распространение электромагнитных волн в однородной изотропной среде со скоростью

$$v = \frac{c}{n}, n = \sqrt{\epsilon},$$

4) Частные решения в виде плоской и сферической волн.

## **ПЛОСКАЯ МОНОХРОМАТИЧЕСКАЯ ВОЛНА, ЕЕ ПАРАМЕТРЫ И СВОЙСТВА**

**Плоская монохроматическая волна** – частное решение Уравнений Максвелла. Напряженность электрического поля такой волны описывается выражением:

$$\vec{E}(z,t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kz + \varphi_0)$$

– волна распространяется вдоль оси z,

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - k\vec{n}\vec{r} + \varphi_0) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0)$$

– волна распространяется в направлении, задаваемом вектором  $\vec{k}$ . Здесь  $\vec{k} = k\vec{n} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{n}$  – *волновой вектор*, длина которого равна волновому числу, а направление совпадает с нормалью к волновому фронту.

В комплексном виде

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 \exp[i(\omega t - kz + \varphi_0)].$$

**Параметры плоской монохроматической волны.** (см. рис 3.2).

$\vec{E}_0$  – амплитуда волны, в общем случае, комплексная.

$(\omega t - kz + \varphi_0)$  — фаза волны,

$\varphi_0$  – начальная фаза волны,

$\omega$  – циклическая частота волны,

$\omega = 2\pi\nu$ , где  $\nu$  – частота волны (Гц),

$\nu = \frac{1}{T}$ , где  $T$  – период волны,

$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{n}$  – волновой вектор, направлен в направлении распространения волны (в ча-

стном случае – вдоль оси  $z$ ), т. е. перпендикулярно к волновой поверхности (поверхности равных фаз).

$k \equiv |\vec{k}|$  – волновое число,  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ,

$\lambda = \nu T$  – длина волны, или ее пространственный период.

### **Свойства плоской монохроматической волны**

**1. Волна монохроматическая**, потому что колебания напряженностей электрического и магнитного полей происходят на **одной частоте**, т.е гармонические (по закону  $\sin, \cos$ ).

**2. Волна плоская**, потому что ее волновая поверхность (поверхность равных фаз, или поверхность постоянной фазы) – **плоскость**, т.е. удовлетворяет уравнению плоскости:  $z = \text{const}$  (в общем случае  $\vec{k}\vec{r} = \text{const}$ ). Волновой фронт – это волновая поверхность на границе между возмущенной и невозмущенной частью пространства. (см. рис 3.3).

**3. Поперечность электромагнитной волны** – колебания векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  перпендикулярны направлению распространения волны (см. рис. 3.4, 3.5);

**4. Правая тройка векторов** – векторы  $\vec{E}, \vec{H}, \vec{k}$ , образуют правую ортогональную тройку векторов (см. рис. 3.4);

**5. Связь между векторами  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$**  – синфазность колебаний этих векторов (см. рис. 3.5);

**6. Связь между амплитудами векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$**  –  $E_0 = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}} H_0$ ;



**7. Поляризация электромагнитной волны.** Поляризация – свойство света, обусловленное поперечностью электромагнитных волн. Поляризация характеризует структуру колебаний вектора напряженности электрического поля в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны (см. рис. 3,6);

**8. Интенсивность плоской монохроматической волны пропорциональна квадрату ее амплитуды;**

**9. Связь между волной и лучом.** Световые лучи – это нормали к волновой поверхности (поверхности постоянной фазы волны) (см. рис 3.9);

**10. Почему для описания светового поля используется вектор  $\vec{E}$ , а не  $\vec{H}$ .** Сила Лоренца, с которой электрическое поле волны действует на заряженную частицу, в  $10^4$  раз больше, чем сила Лоренца, с которой магнитное поле волны действует на эту частицу (см. рис. 3.8).

## **СФЕРИЧЕСКАЯ ВОЛНА**

Напряженность электрического поля сферической волны описывается выражением:

$$\vec{E}(r,t) = \frac{\vec{E}_0}{r} \cos(\omega t - kr + \varphi_0).$$

Выражение (3.32) записано в сферической системе координат. Оно описывает сферическую волну, расходящуюся от точечного источника, расположенного в начале координат. Волновые поверхности сферической волны представляют собой сферы, удовлетворяющие уравнению  $r = const$  (см. рис. 3.9). В отличие от плоской волны, амплитуда сферической волны не является постоянной, а убывает с расстоянием.