1.7. Модуляция.

1.7.1. Модуляция.

Гармонические колебания, описывающие волну, характеризуются амплитудой, частотой и фазой:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 Cos\left(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0\right) \quad \text{или} \quad \vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right)} \tag{1.7.1}$$

Изменение этих параметров в процессе колебания называется *модуляцией*, а волны, получающиеся в процессе модуляции, называются *модулированными*. Рассмотренные ранее биения (§1.4) – пример амплитудной модуляции.

Гармоническое колебание не может нести информацию. Для того чтобы передать определенную информацию, необходимо волну промодулировать, т.е. изменить какой-либо параметр волны в соответствии с изменением смыслового сигнала.

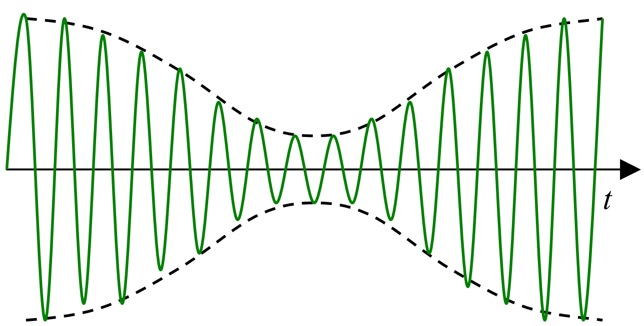
Итак, различают *амплитудную*, *частотную* и *фазовую* модуляции.

1.7.2. Модуляция амплитуды.

Итак, рассматриваем следующую волну:

$$E(t) = \left(E_0 + E_1(t)\right) Cos\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right) \tag{1.7.2}$$

где $E_1(t)$ дает модуляцию и представляет собой огибающую колебаний вектора E ($\left|E_1(t)\right| < E_0$). Можно провести *спектральный анализ* модуляции. Любая периодическая функция $E_1(t)$ может быть представлена в виде ряда Фурье по частотам кратным спектральной частоте Ω, где $\Omega = \dfrac{2\pi}{T}$, а T – период функции. В математике доказывается теорема:

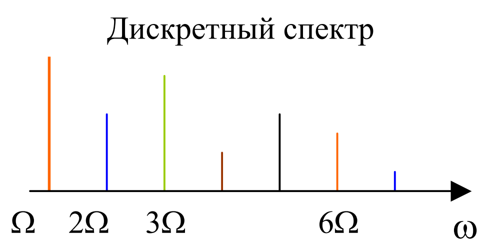


$$E_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{-in\Omega t} \tag{1.7.3}$$

где a_n - амплитуда монохроматических колебаний. Или разложение альтернативно можно представить в виде:

$$E_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n Cos\, n\Omega t + b_n Sin\, n\Omega t\right) \tag{1.7.4}$$

Выражения (1.7.3) и (1.7.4) представляют собой разложение (суперпозицию) периодической функции по бесконечному набору монохроматических колебаний (плоских монохроматических волн). Иначе говорят о разложении периодического колебания в спектр, в данном случае в *дискретный спектр*. На рисунке показан пример дискретного спектра разложения, где высота столбика показывает величину амплитуды колебания данной частоты.



Примечание 1. В выражении (1.7.3) присутствуют отрицательные частоты, что это такое? Проделаем следующую выкладку, стартуя с (1.7.4):

$$E(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n Cos\, n\Omega t + b_n Sin\, n\Omega t\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{2}\left(e^{in\Omega t} + e^{-in\Omega t}\right) - \frac{ib_n}{2}\left(e^{in\Omega t} - e^{-in\Omega t}\right)\right) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\left(a_n - ib_n\right)e^{in\Omega t} + \frac{1}{2}\left(a_n + ib_n\right)e^{-in\Omega t}\right) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n^+ e^{in\Omega t} + C_n^- e^{-in\Omega t}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\Omega t}$$

т.е. отрицательные частоты в (1.7.3) - это обычные частоты, но сдвинутые по фазе на $\pi/2$ по отношению к другим частотам (т.е. синусы и косинусы). Если раскладываемая функция $E(t)$ вещественна, то из условия $E^*(t) = E(t)$, получаем, что $C_{-n}^* = C_n$.

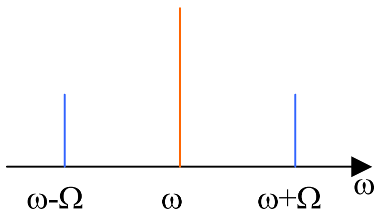
Рассмотрим конкретный пример периодической функции $E_1(t)=E_{01}Cos\Omega t$, т.е. рассматриваем огибающую в виде гармонической функции. Тогда полное колебание (внимание: рассматриваем волну в одной выбранной точке - $\vec{r}=0$, например) имеет вид:

$$E(t)=\left(E_0+E_{01}Cos\Omega t\right)Cos\omega t \qquad (1.7.5)$$

Разложим эту функцию по гармоническим колебаниям:

$$E(t)=E_0 Cos\omega t+\frac{E_{01}}{2}Cos(\omega-\Omega)t+\frac{E_{01}}{2}Cos(\omega+\Omega)t$$

Таким образом, получаем спектр, состоящий из колебаний 3х частот.



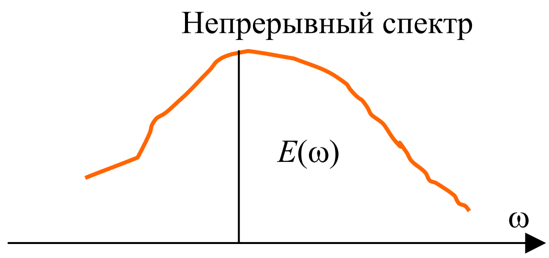
Если огибающая $E_1(t)$ - непериодическая функция времени, то ее можно разложить в интеграл Фурье:

$$E_1(t)=\int_{-\infty}^{\infty}E(\omega)e^{i\omega t}d\omega \qquad (1.7.6)$$

Здесь можно записать обратное разложение (или формулу для определения амплитуд $E(\omega)$):

$$E(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}E(t)e^{-i\omega t}dt \qquad (1.7.7)$$

В этом случае, говорят, получаем *непрерывный* или *сплошной спектр* колебаний (см рисунок).



Примечание 2. Если $E_1(t)$ вещественная функция, то можно избавиться от отрицательных частот (т.е. от синусов). В самом деле, представим

$$E(t)=\int_{0}^{\infty}E(\omega)e^{i\omega t}d\omega+\int_{-\infty}^{0}E(\omega)e^{i\omega t}d\omega=$$

Заменяя во втором интеграле "ω" на "-ω", имеем:

$$=\int_{0}^{\infty}E(\omega)e^{i\omega t}d\omega-\int_{\infty}^{0}E(-\omega)e^{-i\omega t}d\omega=\int_{0}^{\infty}\left(E(\omega)e^{i\omega t}+E(-\omega)e^{-i\omega t}\right)d\omega$$

Пользуясь вещественностью $E(t)=E^*(t)$, легко получить равенство: $E^*(-\omega)=E(\omega)$. Тогда

$$E(t)=\int_{0}^{\infty}\left[E(\omega)e^{i\omega t}+\left(E(\omega)e^{i\omega t}\right)^*\right]d\omega=2\,Re\int_{0}^{\infty}E(\omega)e^{i\omega t}d\omega \qquad (1.7.8)$$

Реальную часть интеграла очень часто можно опустить, подразумевая ее в конце решения.

1.7.3. Модуляция частоты и фазы.

Модуляция частоты и фазы – это зависимость их от времени $\omega=\omega(t)$ или $\varphi_0=\varphi_0(t)$. Однако, когда эти величины зависят от времени, то их зависимость можно объединить в общую зависимую от времени фазу $\Phi(t)$. Частотная и фазовая модуляции полностью эквивалентны, когда они изменяются по гармоническому закону. В самом деле, пусть $\Delta\omega$ - амплитуда колебаний частоты, а Ω - частота этих колебаний. Тогда имеем частотную модуляцию:

$$\omega=\omega_0+\Delta\omega Cos\Omega t \qquad (1.7.9)$$

Колебания за время t (т.е. волна рассмотренная в точке $\vec{r}=0$, например) наберут следующую фазу:

$$\Phi(t)=\int_0^t\omega(t)dt=\omega_0 t+\frac{\Delta\omega}{\Omega}Sin\Omega t=\omega_0 t+\Delta\Phi Sin\Omega t=\omega_0 t+\varphi_0(t) \qquad (1.7.10)$$

Получаем, таким образом, что сама фаза промодулирована по гармоническому закону.

То же можно сказать о спектральном составе промодулированных колебаний. Рассматривая тот же пример (1.7.10), запишем уравнение колебаний при условии ${}^{\Delta\omega}\!/_{\Omega} << 1$ (разложим в ряд по малому параметру $\frac{\Delta\omega}{\Omega} Sin\Omega t << \omega_0 t$ и ограничимся первыми членами разложения):

$$E(t) = E_0 Sin\left(\omega_0 t + \frac{\Delta\omega}{\Omega} Sin\Omega t\right) \approx E_0 Sin\omega_0 t + E_0 \frac{\Delta\omega}{\Omega} Sin\Omega t \, Cos\omega_0 t + \ldots \approx$$

$$\approx E_0 \left[Sin\omega_0 t + \frac{\Delta\omega}{2\Omega} Sin(\omega_0 + \Omega)t - \frac{\Delta\omega}{2\Omega} Sin(\omega_0 - \Omega)t \right]$$

В принципе получаем спектр бесконечный. В первом приближении присутствуют частоты $\omega_0, \omega_0 \pm \Omega$. Эта ситуация похожа на амплитудную модуляцию, но эта “похожесть” только при малых глубинах модуляции.

При негармонической модуляции структура сигналов, промодулированных по частоте и фазе, различна.