

1.4. Суперпозиция электромагнитных волн.

1.4.1. Простейший случай сложения плоских волн.

Напряженность электрического поля и индукция магнитного поля равны соответственно сумме напряженностей и магнитных индукций всех полей в данной точке независимо от их происхождения. Если эти поля принадлежат плоским электромагнитным волнам, распространяющимся в произвольных направлениях, то, вообще говоря, полученная в результате сложения совокупность электрического и магнитного полей не всегда дает плоскую электромагнитную волну. Более того, чаще при сложении плоских монохроматических волн получаем сложную электромагнитную волну.

Рассмотрим простейший случай. Сложим две плоские монохроматические волны одинаковой частоты ω , распространяющихся вдоль одного направления, векторы напряженности \vec{E}_1 и \vec{E}_2 электрических полей в которых коллинеарны $\vec{E}_1 \parallel \vec{E}_2$. Чтобы не загромождать изложения, мы будем, как правило, следить за поведением вектора \vec{E} , поскольку поведение вектора \vec{B} в плоской волне всегда может быть определено с помощью соотношений между векторами волны.

Удобнее записать уравнения волн в комплексной форме:

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{01} e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \quad \text{и} \quad \vec{E}_2 = \vec{E}_{02} e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}. \quad (1.4.1)$$

Поскольку волны распространяются в одном направлении, то можно складывать просто модули напряженности:

$$E = E_1 + E_2 = E_{01} e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} + E_{02} e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} = (|E_{01}| e^{i\delta_1} + |E_{02}| e^{i\delta_2}) e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} = E_0 e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}, \quad (1.4.2)$$

где $|E_{01}| e^{i\delta_1} + |E_{02}| e^{i\delta_2} = |E_0| e^{i\delta} = E_0$ – комплексная амплитуда полученной волны, т.е. снова имеем плоскую волну.

Таким образом, **две плоские монохроматические волны одинаковой частоты, распространяющиеся в одном направлении, дают в результате сложения плоскую монохроматическую волну той же частоты и распространяющуюся в том же направлении.**

Однако, если складываемые волны распространяются в разных направлениях или различаются по частоте, то результат их сложения может быть совершенно иным.

1.4.2. Битения.

Рассмотрим результат сложения двух плоских монохроматических волн **различной** частоты ω_1 и ω_2 , распространяющихся в одном направлении, например, вдоль оси x . Пусть $\vec{E}_1 \parallel \vec{E}_2$ и для простоты $E_{01} = E_{02} = E_0$, то есть электрические векторы параллельны и амплитуды волн одинаковы.

$$E_1 = E_0 \cos(\omega_1 t - k_1 x) \quad \text{и} \quad E_2 = E_0 \cos(\omega_2 t - k_2 x) \quad (1.4.3)$$

Как и в предыдущем случае будем складывать просто модули напряженности:

$$\begin{aligned} E = E_1 + E_2 &= E_0 [\cos(\omega_1 t - k_1 x) + \cos(\omega_2 t - k_2 x)] = \\ &= 2E_0 \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t - \frac{k_1 - k_2}{2} x\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{k_1 + k_2}{2} x\right), \end{aligned}$$

так как $k_1 = \frac{\omega_1}{c}$ и $k_2 = \frac{\omega_2}{c}$, можем записать:

$$E = 2E_0 \cos\left[\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)\left(t - \frac{x}{c}\right)\right] \cos\left[\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)\left(t - \frac{x}{c}\right)\right]. \quad (1.4.4)$$

Из этого выражения видно, что в результате сложения получаем плоскую, но не монохроматическую волну.

Наглядную интерпретацию этого выражения можно дать, если складываемые волны имеют близкие друг к другу частоты ω_1 и ω_2 : $|\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_1, \omega_2$. В этом случае первый множитель

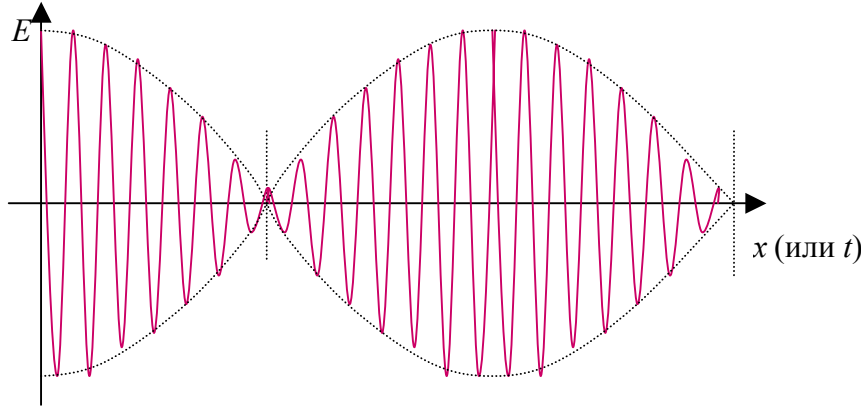
$\cos\left[\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)\left(t - \frac{x}{c}\right)\right]$ представляет собой медленно меняющуюся по сравнению со вторым

множителем функцию времени или координаты. Поэтому можно считать, что мы имеем дело с

распространением гармонических колебаний, частота которых определяется суммой частот $(\omega_1 + \omega_2)$, а амплитуда которых равна:

$$A_0 = \left| 2E_0 \cos \left[\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2) \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] \right|, \quad (1.4.5)$$

То есть амплитуда медленно меняется со временем от 0 до $2E_0$.

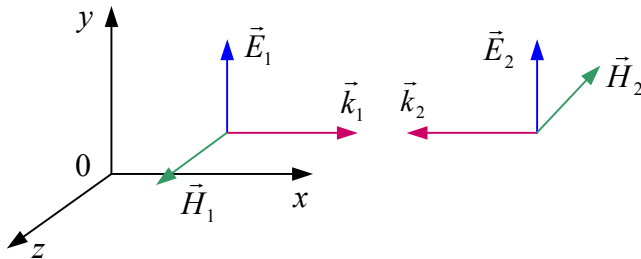


Если $E_{01} \neq E_{02}$, то амплитуда колебаний (огибающая) изменяется в пределах от $|E_{01} - E_{02}|$ до $E_{01} + E_{02}$. Таким образом, в результате сложения двух сонаправленных плоских гармонических волн с близкими частотами мы получаем “гармоническую” волну с медленно изменяющейся амплитудой

(термин “медленно” означает, что за много периодов колебаний с частотой $(\omega_1 + \omega_2)$ их амплитуда меняется мало). Такие колебания называются *биениями*. Частота биений равна $\Omega = |\omega_1 - \omega_2|$.

1.4.3. Стоячие волны.

Важный результат получается при рассмотрении суперпозиции двух плоских монохроматических волн одинаковой частоты, распространяющихся навстречу друг другу. Будем, по-прежнему, считать, что векторы напряженности электрического поля в этих волнах коллинеарны $\vec{E}_1 \parallel \vec{E}_2$ и колеблются с одинаковой амплитудой $E_{01} = E_{02} = E_0$.



Выберем ось x в направлении распространения одной из волн, а ось y — в направлении колебаний вектора \vec{E} . Начало отсчета на оси x выберем в точке, где колебания напряженностей обеих волн происходят в одинаковой фазе. Тогда электрические вектора обеих волн можем записать в виде:

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 &= (0, E_0 e^{-i(\omega t - kx)}, 0) \\ \vec{E}_2 &= (0, E_0 e^{-i(\omega t + kx)}, 0) \end{aligned} \quad (1.4.6)$$

Аналогично для векторов \vec{H} :

$$\vec{H}_1 = (0, 0, H_0 e^{-i(\omega t - kx)}), \quad \vec{H}_2 = (0, 0, -H_0 e^{-i(\omega t + kx)}). \quad (1.4.7)$$

Отметим, что если в обеих волнах проекции векторов \vec{E} имеют одинаковые знаки, у проекций \vec{H} знак изменяется на противоположный. Складывая векторы $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ и $\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2$, получаем результирующее электромагнитное поле:

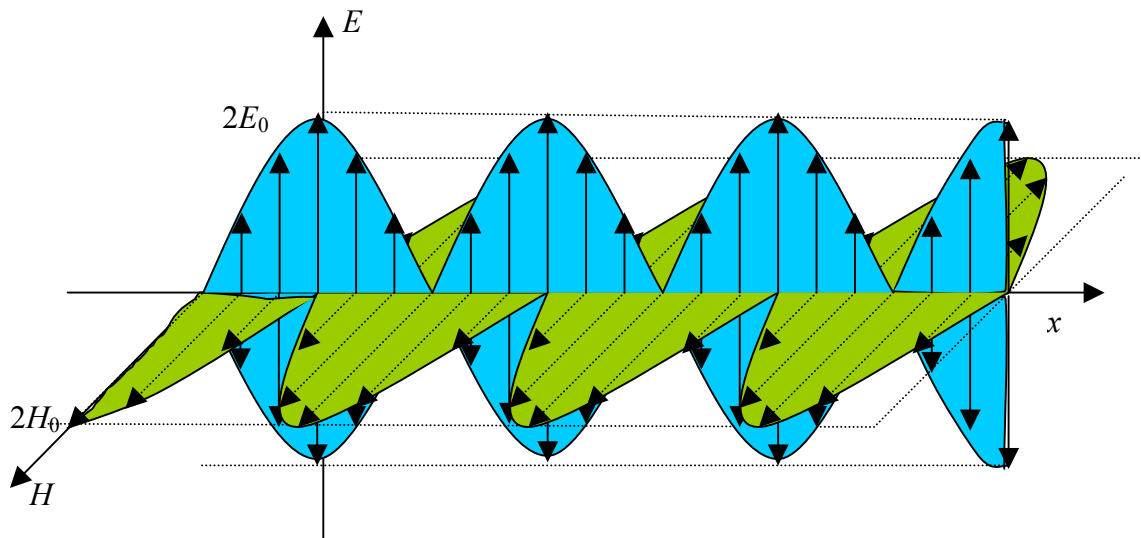
$$\vec{E} = (0, 2E_0 e^{-i\omega t} \cos kx, 0) \quad \text{и} \quad \vec{H} = (0, 0, 2iH_0 e^{-i\omega t} \sin kx), \quad (1.4.8)$$

или в вещественном виде

$$\vec{E} = (0, 2E_0 \cos kx \cos \omega t, 0) \quad \text{и} \quad \vec{H} = (0, 0, 2H_0 \sin kx \sin \omega t). \quad (1.4.9)$$

Таким образом, в результате суперпозиции двух бегущих волн образуется электромагнитная волна, которую можно рассматривать как совокупность волн электрического и магнитного полей. Векторы напряженностей

этой совокупности полей не содержат характерного для бегущей волны множителя $t \pm \frac{x}{c}$. Сомножители



$2E_0 \cos kx$ и $2H_0 \sin kx$ с точностью до знака представляют собой амплитуды колебаний напряженности, соответственно, электрического и магнитного полей в точке x , изменяющиеся от точки к точке по гармоническому закону. Напряженности полей во всех точках изменяются с одной и той же частотой. Такая волна называется *стоячей*.

Амплитуда колебаний напряженности электрического поля волны изменяется от максимального значения $2E_0$ до нуля. Точки, в которых амплитуда колебаний максимальна в плоскостях:

$$(\cos kx = 1), \quad x = \frac{\pi}{k} n = \frac{\lambda}{2} n, \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (1.4.10)$$

называются *пучностями* электрического поля. Точки, в которых амплитуда падает до нуля в плоскостях:

$$(\cos kx = 0), \quad x = \frac{\pi}{k} \left(n + \frac{1}{2} \right) = \frac{\lambda}{2} \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (1.4.11)$$

называются *узлами*.

Фаза колебаний вектора \vec{E} во всех точках между соседними узлами одинакова, а колебания по разные стороны узла происходят в противофазе. Пучности и узлы стоячей волны магнитного поля сдвинуты вдоль оси x на четверть длины волны по отношению к пучностям и узлам электрического поля. Колебания магнитного поля отстают по времени на четверть периода от колебаний электрического поля. Таким образом, узлы вектора \vec{E} совпадают с пучностями вектора \vec{H} и наоборот.

Это означает, например, что при достижении максимума напряженности электрического поля индукция магнитного обращается в нуль. Если же напряженность электрического поля достигает половины своего максимального значения, то и напряженность магнитного поля равна половине максимальной величины. Отличие заключается в том, что если одна из величин находится в фазе роста, то другая – в фазе уменьшения.

В рассмотренных нами ранее *бегущих электромагнитных волнах* электрическое и магнитное поля, направленные перпендикулярно друг другу, *в каждой пространственной точке изменяются во времени совершенно одинаково* (в монохроматической волне они совершают гармонические колебания в одинаковой фазе). Стоячие волны, как мы видим, обладают существенно иными свойствами. Для таких волн характерны *пространственное разнесение и сдвиг во времени колебаний электрического и магнитного полей*.

Рассмотрим энергию в стоячей электромагнитной волне. Вектор Пойнтинга $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{H}]$ в стоячей волне отличен от нуля за исключением узлов обоих полей. Следовательно, поток энергии отсутствует через те точки, где, либо \vec{E} , либо \vec{H} обращаются в нуль. Другими словами, поток энергии в стоячей электромагнитной волне отсутствует через узлы и пучности волны, поскольку пучности электрического поля совпадают с узлами магнитного и наоборот. Поэтому энергия стоячей волны заключена между

соседними узлами и пучностями и испытывает превращения из электрической энергии в магнитную энергию и обратно. Из выражения для объемной плотности энергии

$$w = \frac{1}{8\pi} (\vec{E}\vec{D} + \vec{B}\vec{H}) \quad (1.4.12)$$

следует, что энергия стоячей волны, заключенная между соседними узлами и пучностями с течением времени сохраняет постоянное значение. Таким образом, *стоячая волна, обладая энергией, не переносит и*

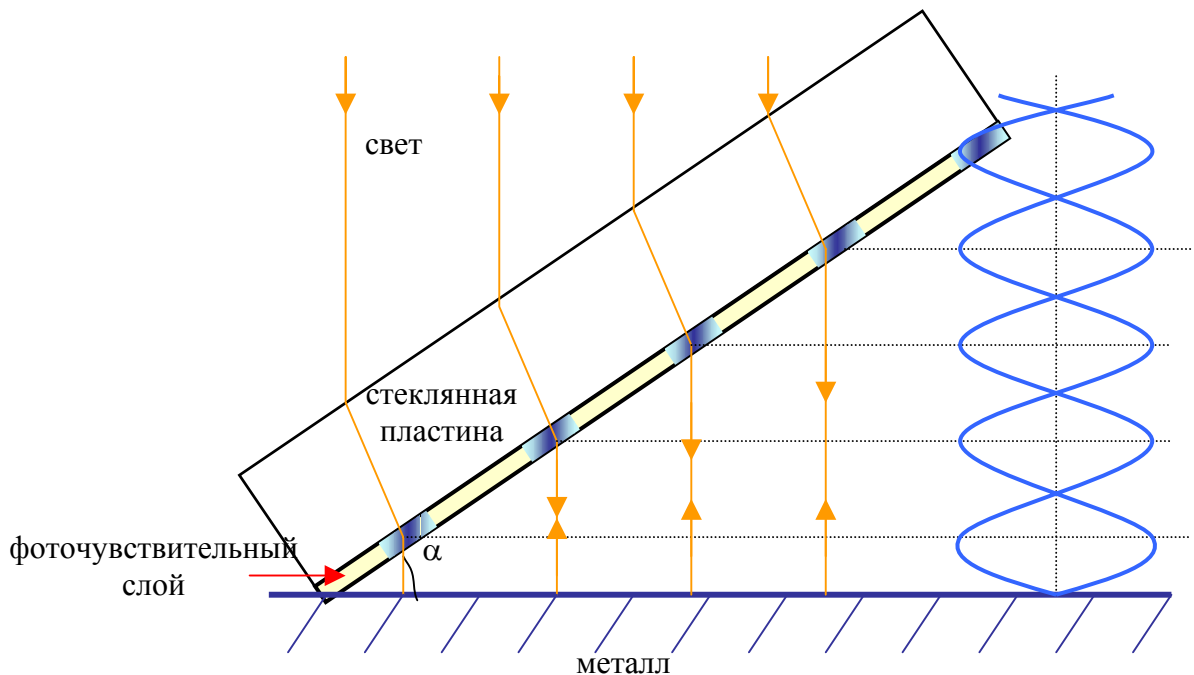
не излучает её. Если проинтегрировать поток энергии за период, получим $0: \int_0^T \vec{S} dt = 0$, где T – период колебаний.

1.4.4. Эксперименты со стоячими волнами.

На эксперименте стоячие волны создаются в результате сложения волн падающего и отраженного света (или других электромагнитных волн). Стоячие волны образуются, в частности, в резонаторах лазеров (оптических квантовых генераторов). Для видимого света трудно наблюдать из-за малой длины волны.

Опыт О. Винера (**Отто Генрих Винер, немецкий физик, 1862–1927**) в 1890 г.

Стеклопластинка, покрытая тонким фоточувствительным слоем, проводилась в соприкосновение с металлическим зеркалом, образуя малый угол α ($\sim 1^\circ$). Падающий и отраженный свет образуют стоячую волну. Их пучности обнаруживались в фотослой после проявления фотопластинки в виде почерненных полос. Важно, что опыты Винера показали, что фотохимическое действие обусловлено напряженностью



электрического поля \vec{E} , а не \vec{B} . Это удалось показать, поскольку граничные условия для этих векторов вблизи металлической пластины различны (подробнее см Бутиков, стр.28-29).

Метод стоячих волн использовался Липпманом в 1891 году (**Габриэль Липпман, французский физик, 1845–1921, Нобелевская премия 1908 г. за цветную фотографию солнечного спектра**) для получения цветной фотографии. Пластина с толстым слоем эмульсии помещалась на ртуть, которая использовалась как отражающее зеркало.