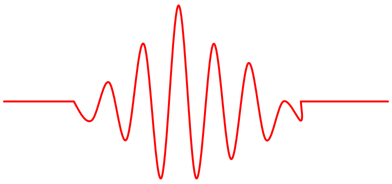
1.8. Волновые пакеты. Групповая скорость.

1.8.1. Волновые пакеты. Формула Рэлея.

Суперпозиция двух и большего числа волн с различными частотами составляет *группу волн* или *волновой пакет*. Часто под волновым пакетом понимают образование из волн, ограниченное в пространстве.



К примеру, пакет волн, распространяющийся вдоль оси x, аналитически может быть записан в виде:

$$E(x,t)=\int\limits_{\omega_0-\frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0+\frac{\Delta\omega}{2}} E(\omega)Cos(\omega t-k_\omega x+\varphi_\omega)d\omega \qquad (1.8.1)$$

Часто волновой пакет записывают, вводя волновое число k в качестве переменной, а частота $\omega=\omega(k)$:

$$E(x,t)=\int\limits_{k-\Delta k}^{r+\Delta k} E_k e^{-i(\omega t-kx)}dk \qquad (1.8.2)$$

Рассмотренные в §1.4 биения также можно рассматривать как волновой пакет. Напомним выражение (1.4.4), которое получили при сложении 2х волн (1.4.3):

$$\begin{aligned}E&=2E_0\,cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t-\frac{k_1-k_2}{2}x\right)cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t-\frac{k_1+k_2}{2}x\right)=\\&=2E_0\,cos\left[\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\left(t-\frac{x}{c}\right)\right]cos\left[\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)\left(t-\frac{x}{c}\right)\right]\end{aligned} \qquad (1.8.3)$$

В §1.4 мы считали, что скорости движения этих 2-х волн одинаковы, что и справедливо в вакууме $c=\frac{\omega_1}{k_1}=\frac{\omega_2}{k_2}$. Это фазовые скорости волн. Однако в среде скорость электромагнитных волн меньше скорости света $v=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ и в принципе зависит от частоты. Зависимость скорости волны от частоты называется *дисперсией*. Поэтому в биениях фазовые скорости 2-х волн могут быть разными:

$$v_1=\frac{\omega_1}{k_1} \text{ и } v_2=\frac{\omega_2}{k_2}. \qquad (1.8.4)$$

Если дисперсии нет, то огибающая амплитуд движется вместе с волнами, т.е. со скоростью света. Если дисперсия есть, то огибающая движется с иной скоростью, чем скорости движения волн.

Определение: *скорость движения максимума огибающей амплитуды группы волн или волнового пакета называется групповой скоростью*.

Простейший случай нахождения групповой скорости – для биений – определяется условием постоянства фазы огибающей амплитуды (см из (1.8.3)):

$$\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)t-\frac{1}{2}(k_1-k_2)x=const \qquad (1.8.5)$$

Дифференцируя, находим групповую скорость:

$$v_{гр}=\frac{dx}{dt}=\frac{\omega_1-\omega_2}{k_1-k_2} \qquad (1.8.6)$$

Если дисперсии нет, то $k_1-k_2=\frac{\omega_1}{c}-\frac{\omega_2}{c}$ и тогда $v_{гр}=c$.

Итак, при наличии дисперсии групповая скорость отличается от фазовой скорости. В результате огибающая амплитуд и слагаемые волны движутся с различными скоростями, что приводит к изменению формы огибающей в процессе распространения волны, т.е. при наличии дисперсии волновой пакет распространяется с изменением формы.

Если частоты слагаемых волн ω_1 и ω_2 близки друг к другу, то групповая скорость равна:

$$v_{гр}=\frac{d\omega}{dk} \qquad (1.8.7)$$

где $\omega = \omega(k)$. Эта формула справедлива не только для 2-х волн с бесконечно близкими частотами, но и для произвольного волнового пакета, образованного суперпозицией бесконечного числа волн с близкими частотами, поскольку является дифференциальной.

Найдем связь между групповой и фазовой скоростями. Воспользуемся определениями (1.8.4) и (1.8.7) и подставим частоту из фазовой скорости $\omega = kv$ в групповую скорость:

$$v_{гр} = \frac{d(kv)}{dk} = v + k\frac{dv}{dk} \tag{1.8.8}$$

Подставляя $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ и $dk = -\dfrac{2\pi}{\lambda^2}d\lambda$, получаем окончательно связь групповой скорости и фазовой:

$$v_{гр} = v - \lambda\frac{dv}{d\lambda} \tag{1.8.9}$$

Это формула Рэлея (Джон Уильям Рэлей, английский физик, 1842–1919). В зависимости от знака $\dfrac{dv}{d\lambda}$ групповая скорость может быть меньше, так и больше фазовой (но всегда меньше скорости света в вакууме). Когда дисперсии нет: $\dfrac{dv}{d\lambda} = 0$ и $v_{гр} = v$.

Максимум интенсивности (энергии) приходится на максимум огибающей в волновом пакете волн. Поэтому в тех случаях, когда понятие групповой скорости имеет смысл, скорость переноса энергии (и информации) волной равна групповой скорости.

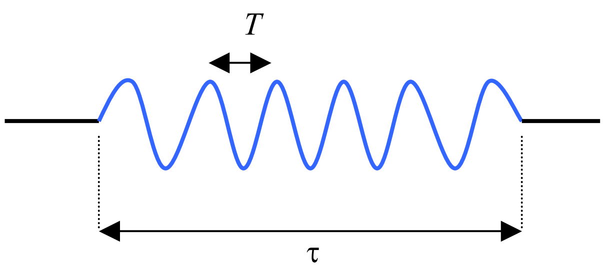
Примечания.

1) Понятие групповой скорости неприменимо, когда поглощение среды очень велико (область аномальной дисперсии).

2) При распространение пакета волн в среде с дисперсией в первом приближении можно считать, что максимум и огибающая движутся с одной скоростью – групповой. Однако, если в пакете волн присутствуют разные частоты, тогда групповые скорости для соседних частот разные. Это приводит к изменению формы огибающей волнового пакета (в среде с дисперсией пакет может меняться, расплываться и т.д.).

1.8.2. Пример спектрального разложения.

Рассмотрим один из важных примеров спектрального разложения: *цуг синусоидальных волн* или что, то же самое, “оборванная” синусоида. Цуг волн – это модельное представление процесса излучения источника (атом в возбужденном состоянии) электромагнитных волн, который колеблется в течение некоторого времени, излучая энергию в создание переменного электромагнитного поля.



Для простоты пусть имеем синусоидальную волну и пусть синусоида длится время τ, при этом T_0 и $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0}$ - период колебаний и частота колебаний во времени, соответственно.

Итак, записываем спектральное разложение из (1.7.6) и (1.7.8):

$$E_1(t) = 2\int_0^\infty E(\omega)e^{i\omega t}d\omega \tag{1.8.10}$$

с амплитудами, определяющими спектр по формуле (1.7.7):

$$E(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} E(t)e^{-i\omega t}dt \tag{1.8.11}$$

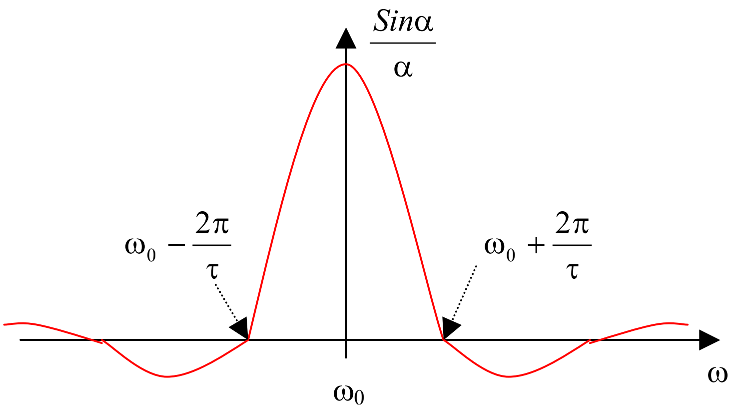
Очевидно, что мы имеем дело со сплошным спектром частот. В нашем случае (1.8.11) запишется в пределах

$$E(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} Sin\omega_0 t\, e^{-i\omega t}dt=\frac{1}{4\pi i}\int_{-\tau/2}^{\tau/2}\left(e^{i\omega_0 t}-e^{-i\omega_0 t}\right)e^{-i\omega t}dt=\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{Sin\frac{1}{2}(\omega_0-\omega)\tau}{\omega_0-\omega}-\frac{Sin\frac{1}{2}(\omega_0+\omega)\tau}{\omega_0+\omega}\right)$$

Подставляя в (1.8.10) и помножая числитель и знаменатель на τ, получаем для реальной части сигнала:

$$E(t)=\frac{\tau}{2\pi}\int_0^\infty\left(\frac{Sin\frac{1}{2}(\omega_0-\omega)\tau}{\frac{1}{2}(\omega_0-\omega)\tau}-\frac{Sin\frac{1}{2}(\omega_0+\omega)\tau}{\frac{1}{2}(\omega_0+\omega)\tau}\right)Sin\omega t d\omega \qquad (1.8.12)$$

При условии $|\omega_0-\omega|<<|\omega_0+\omega|$ (или иначе в области частот $\omega\sim\omega_0$) вторым слагаемым в (1.8.12) можно пренебречь. Тогда спектр в аналитической форме приобретает следующий вид:



$$E(\omega)\sim\frac{Sin\frac{1}{2}(\omega_0-\omega)\tau}{\frac{1}{2}(\omega_0-\omega)\tau}\equiv\frac{Sin\alpha}{\alpha} \qquad (1.8.13)$$

и графически изображен на рисунке. В точках $\frac{1}{2}(\omega_0-\omega)\tau=\pi n$ происходит обращение в нуль кривой зависимости $E=E(\omega)$. Основная часть спектра находится в области около ω_0, причем разброс частот спектра подчиняется условию (грубо говоря, ширина максимума на его полувысоте):

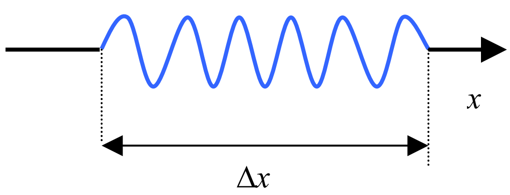
$$\Delta\omega=|\omega_0-\omega|\geq\frac{2\pi}{\tau} \qquad (1.8.14)$$

Таким образом, получаем, что основное расположение спектрального диапазона определяется условием:

$$\Delta\omega\cdot\tau\geq 2\pi \quad \text{или} \quad \Delta\nu\cdot\tau\geq 1 \qquad (1.8.15)$$

Это важное соотношение между шириной спектра $\Delta\omega$ и длительностью цуга волн τ. Оно имеет самый общий характер (прообраз соотношения неопределенностей в квантовой физике). Чем больше длительность волны τ, т.е. синусоида ближе к монохроматической зависимости, тем уже спектр, сосредоточенный около основной частоты ω_0. Наоборот, чем меньше длительность цуга, тем шире спектральный состав волнового пакета.

Аналогичная формула имеет место и для пространственного распределения волнового поля, когда рассматриваем его в определенный зафиксированный момент времени t. В этом случае снова можно рассматривать оборванную синусоиду, но в пространстве координаты x. Тогда можно разлагать волновое поле $E(x,t)$ по векторам k - волновым числам, т.е. меняем частоту ω на волновое число k ($\omega = kv$), а время t - на координату x. Также легко найти, что длина цуга Δx и интервал волновых чисел Δk связаны соотношением неопределенностей:



$$\Delta k\cdot\Delta x\geq 2\pi \qquad (1.8.16)$$

Эти соотношения (1.8.15) и (1.8.16) выражают принцип неопределенности, который был также получен В. Гейзенбергом в квантовой механике.