Problemas Resueltos de Teoría de Circuitos

Luis Badesa Bernardo
Carmelo Carrero López
Ana Fernández Guillamón
Ricardo Granizo Arrabé
Oscar Perpiñán Lamigueiro

Universidad Politécnica de Madrid

Índice general

1 Corriente continua 1

2 Corriente alterna monofásica 35

3 Corriente alterna trifásica 61

4 Teoremas fundamentales 83

5 Análisis transitorio 85

6 Técnicas generales de análisis 107

7 Transformadores 109

8 Elementos activos 111

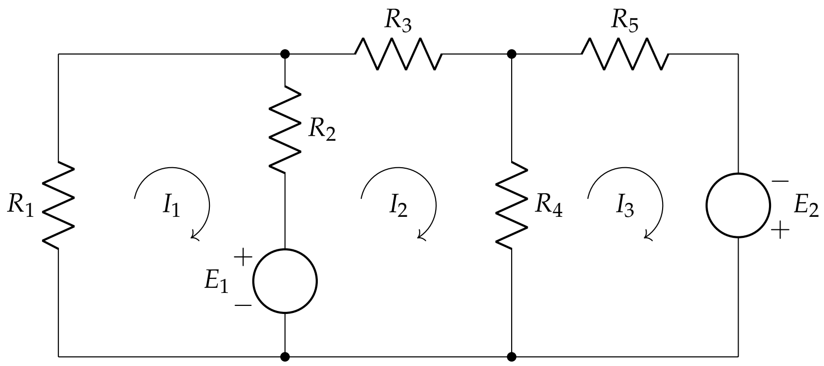
Capítulo 1

Corriente continua

1.1. Enunciado

Calcular las corrientes de malla mostradas en el circuito de la figura.

Datos: $R_1 = 2\,\Omega$; $R_2 = 5\,\Omega$; $R_3 = 10\,\Omega$; $R_4 = 4\,\Omega$; $R_5 = 2\,\Omega$; $E_1 = 25\,\mathrm{V}$; $E_2 = 50\,\mathrm{V}$



Solución

Se plantea el sistema de ecuaciones en forma matricial, siendo de la forma $[R] \cdot [I] = [U]$. Cada $R_{i,i}$ de la matriz $[R]$ se corresponde con la suma de resistencias incluidas en la malla i; cada $\pm R_{ij}$ se corresponde con la suma de las resistencias incluidas en las ramas compartidas por las mallas i y j, con signo positivo $(+)$ si las corrientes van en el mismo sentido, y negativo $(-)$ en caso contrario; y cada $\sum \epsilon_i$ es la suma algebraica de las fuerzas electromotrices de los generadores de la malla i, considerando un signo positivo $(+)$ si contribuyen al giro de la corriente, y negativo $(-)$ en caso contrario (es decir, si la corriente sale por el polo $+$ de la fuente, se considera positivo; si sale por el polo $-$, se considera negativo). Así:

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 & 0 \\ -R_2 & R_2 + R_3 + R_4 & -R_4 \\ 0 & -R_4 & R_4 + R_5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -E_1 \\ E_1 \\ E_2 \end{bmatrix}$$

Reemplazando con los valores correspondientes, el sistema a resolver es:

$$\begin{bmatrix} 7 & -5 & 0 \\ -5 & 19 & -4 \\ 0 & -4 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -25 \\ 25 \\ 50 \end{bmatrix}$$

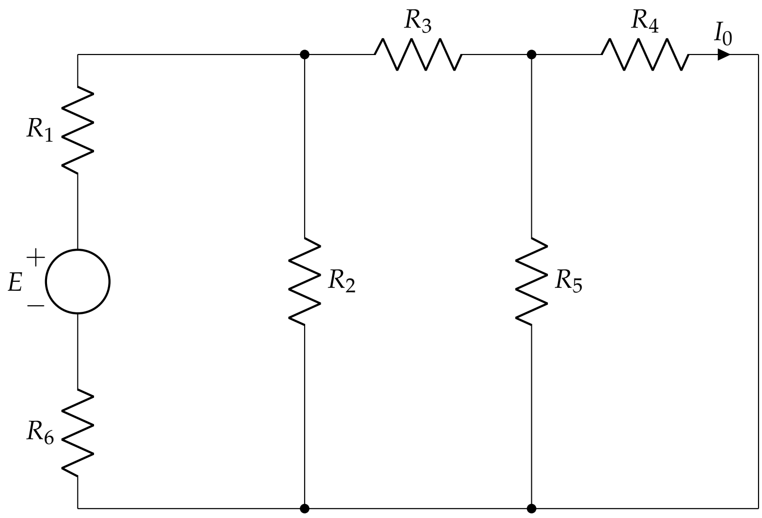
cuya solución es:

$$I_1 = -1{,}31\,\mathrm{A}$$
$$I_2 = 3{,}17\,\mathrm{A}$$
$$I_3 = 10{,}45\,\mathrm{A}$$

1.2. Enunciado

Calcular el valor de E que hace que $I_0 = 7{,}5\,\mathrm{mA}$ en el circuito de la figura.

Datos: $R_1 = 8\,\Omega$; $R_2 = 7\,\Omega$; $R_3 = 4\,\Omega$, $R_4 = 6\,\Omega$; $R_5 = 6\,\Omega$; $R_6 = 12\,\Omega$



Solución

Siguiendo las mismas consideraciones del ejercicio anterior, se plantea el sistema de ecuaciones en forma matricial, suponiendo que las tres corrientes de malla van en sentido horario:

$$\begin{bmatrix} R_1+R_2+R_6 & -R_2 & 0 \\ -R_2 & R_2+R_3+R_5 & -R_5 \\ 0 & -R_5 & R_4+R_5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Reemplazando con los valores correspondientes, el sistema a resolver es:

$$\begin{bmatrix} 27 & -7 & 0 \\ -7 & 17 & -6 \\ 0 & -6 & 12 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde además se sabe el valor de $I_c = I_0 = 7{,}5\,\mathrm{mA}$. Por tanto, de la tercera ecuación se puede obtener el valor de I_b:

$$-6\,I_b + 12\,I_c = -6\,I_b + 12 \cdot 7{,}5 = 0 \quad \Rightarrow \quad 6\,I_b = 90 \quad \Rightarrow \quad I_b = \frac{90}{6} = 15\,\mathrm{mA}$$

Con I_b calculado, se utiliza la segunda ecuación para determinar I_a:

$$-7\,I_a + 17\,I_b - 6\,I_c = -7\,I_a + 17 \cdot 15 - 6 \cdot 7{,}5 = 0 \quad \Rightarrow \quad 7\,I_a = 210 \quad \Rightarrow \quad I_a = \frac{210}{7} = 30\,\mathrm{mA}$$

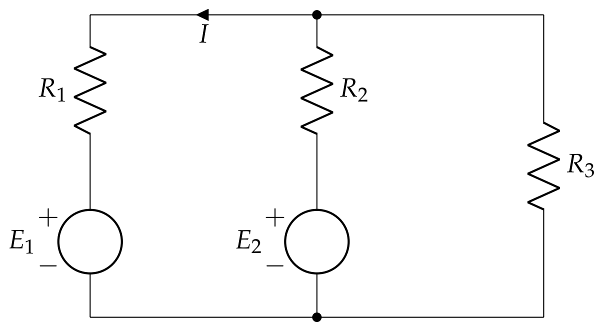
Determinada I_a, se emplea la primera ecuación para obtener el valor de E:

$$27\,I_a - 7\,I_b = 27 \cdot 30 - 7 \cdot 15 = E = 705\,\mathrm{mV}$$

1.3. Enunciado

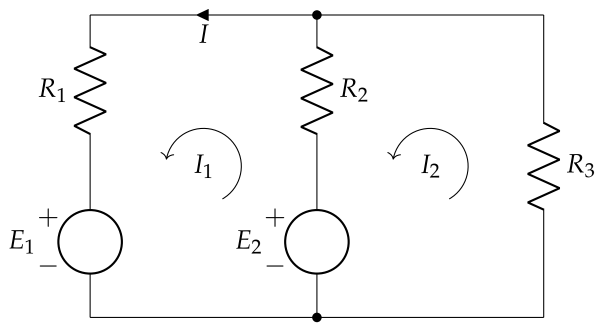
Calcular la intensidad I en el circuito de la figura.

Datos: $R_1 = 27\,\Omega$; $R_2 = 47\,\Omega$; $R_3 = 27\,\Omega$; $E_1 = 460\,\mathrm{V}$; $E_2 = 200\,\mathrm{V}$



Solución

Se suponen las mallas mostradas en la siguiente figura.



Se plantea el sistema de ecuaciones en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 74 & -47 \\ -47 & 74 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -260 \\ -200 \end{bmatrix}$$

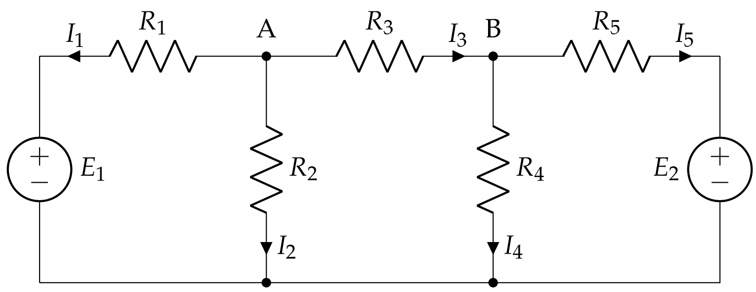
cuya solución es:

$$I_1 = -8{,}77\,\mathrm{A}$$
$$I_2 = -8{,}27\,\mathrm{A}$$

1.4. Enunciado

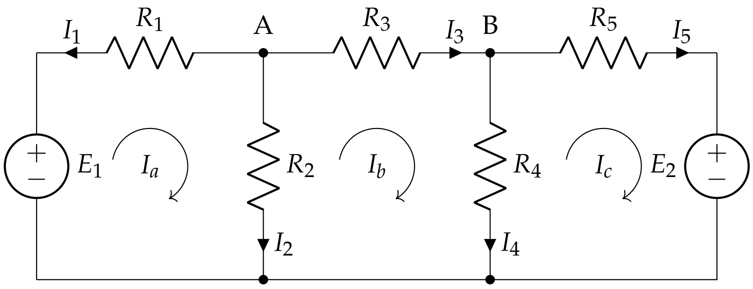
En el circuito de la figura obtener las intensidades de corriente señaladas primero mediante un análisis por el método de las mallas y posteriormente mediante un análisis por el método de los nudos.

Datos: $R_1 = 2\,\Omega$; $R_2 = 1\,\Omega$; $R_3 = 4\,\Omega$; $R_4 = 5\,\Omega$; $R_5 = 3\,\Omega$; $E_1 = 10\,\mathrm{V}$; $E_2 = 6\,\mathrm{V}$



Solución

Se aplica primero el método de las mallas, considerando las corrientes de malla mostradas en la siguiente figura:



Se plantea el sistema de ecuaciones en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 10 & -5 \\ 0 & -5 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix}$$

cuya solución es:

$$I_a = 3{,}31\,\mathrm{A}$$
$$I_b = -0{,}06\,\mathrm{A}$$
$$I_c = -0{,}79\,\mathrm{A}$$

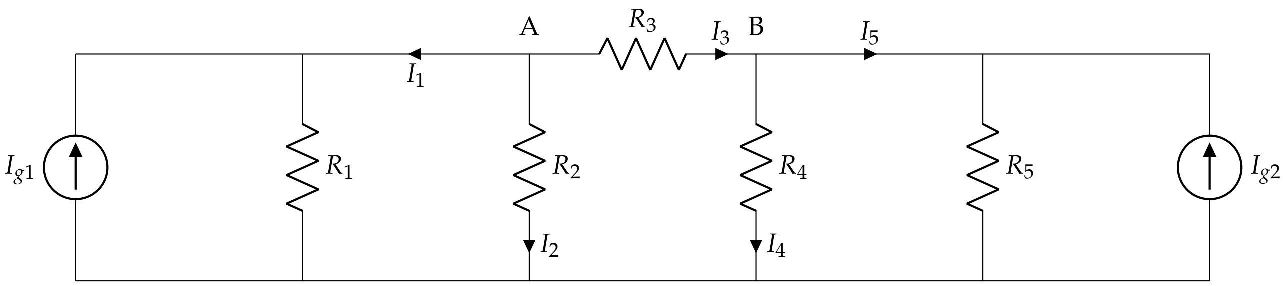
Se establecen las igualdades entre las diferentes corrientes de rama y de malla, y se calculan sus valores:

$$I_1 = -I_a = -3{,}31\,\mathrm{A}$$
$$I_2 = I_a - I_b = 3{,}31 - (-0{,}06) = 3{,}37\,\mathrm{A}$$
$$I_3 = I_b = -0{,}06\,\mathrm{A}$$
$$I_4 = I_b - I_c = -0{,}06 - (-0{,}79) = 0{,}73\,\mathrm{A}$$
$$I_5 = I_c = -0{,}79\,\mathrm{A}$$

Para poder aplicar el método de los nudos, es necesario hacer, en primer lugar, la transformación de las fuentes de tensión (y la resistencia en serie) en fuentes de corriente (con una resistencia en paralelo):

$$I_{g,10V} = \frac{\epsilon_{10V}}{R_{2\Omega}} = \frac{10}{2} = 5\,\mathrm{A}$$
$$I_{g,6V} = \frac{\epsilon_{6V}}{R_{3\Omega}} = \frac{6}{3} = 2\,\mathrm{A}$$

quedando el circuito que se muestra a continuación.



En este caso, se trabaja con las conductancias ($G = 1/R$). Se escribe el sistema de ecuaciones en modo matricial:

$$\begin{bmatrix} 1{,}75 & -0{,}25 \\ -0{,}25 & 0{,}783 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_A \\ U_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

cuya solución es:

$$U_A = 3{,}38\,\mathrm{V}$$
$$U_B = 3{,}63\,\mathrm{V}$$

Con estos valores, se pueden determinar directamente las corrientes I_2 e I_4, por simple aplicación de la ley de Ohm:

$$I_2 = \frac{U_A}{R_{1\Omega}} = \frac{3{,}38}{1} = 3{,}38\,\mathrm{A}$$
$$I_4 = \frac{U_B}{R_{5\Omega}} = \frac{3{,}63}{5} = 0{,}73\,\mathrm{A}$$

Las corrientes que circulan por las resistencias en paralelo con las fuentes de tensión se determinan de manera análoga:

$$I_{2\Omega} = \frac{U_A}{R_{2\Omega}} = \frac{3{,}38}{2} = 1{,}69\,\mathrm{A}$$
$$I_{3\Omega} = \frac{U_B}{R_{3\Omega}} = \frac{3{,}63}{3} = 1{,}21\,\mathrm{A}$$

Por la 1LK, se determina el valor de I_1, I_3 e I_5:

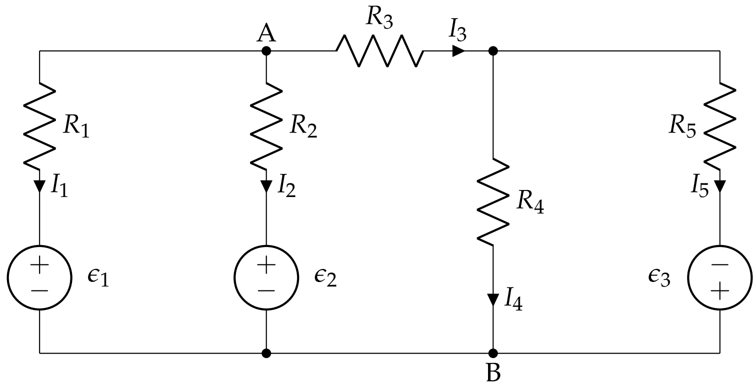
$$I_1 + 5 = I_{2\Omega} \quad \Rightarrow \quad I_1 = I_{2\Omega} - 5 = 1{,}69 - 5 = -3{,}31\,\mathrm{A}$$
$$I_5 + 2 = I_{3\Omega} \quad \Rightarrow \quad I_5 = I_{3\Omega} - 2 = 1{,}21 - 2 = -0{,}79\,\mathrm{A}$$
$$I_3 = I_4 + I_5 = 0{,}73 + (-0{,}79) = -0{,}06\,\mathrm{A}$$

Se observa que los resultados obtenidos con ambos métodos son idénticos, con una pequeña diferencia en el segundo decimal de I_2, debida simplemente a aproximar a dos decimales en resultados parciales.

1.5. Enunciado

Analizar el circuito de la figura mediante el método de las mallas, obteniendo la corriente de cada una de las ramas. Con este resultado, calcular la diferencia de potencial entre A y B, y realizar un balance de potencias comparando la potencia de los elementos activos y la de los elementos pasivos.

Datos: $R_1 = R_2 = 1\,\Omega$; $R_3 = 2\,\Omega$; $R_4 = 3\,\Omega$; $R_5 = 4\,\Omega$; $\epsilon_1 = 118\,\mathrm{V}$; $\epsilon_2 = 236\,\mathrm{V}$; $\epsilon_3 = 118\,\mathrm{V}$



Solución

Se usan tres corrientes de malla con giro a derechas, de nombre (de izquierda a derecha), I_a, I_b e I_c. Escribiendo el sistema de ecuaciones del método de las mallas en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -118 \\ 236 \\ 118 \end{bmatrix}$$

cuya solución es:

$$I_a = -32\,\mathrm{A}$$
$$I_b = 54\,\mathrm{A}$$
$$I_c = 40\,\mathrm{A}$$

Estableciendo las relaciones entre las corrientes de rama y las corrientes de malla, y sustituyendo, se llega a la conclusión de que:

$$\begin{aligned}
I_1 &= -I_a = 32\,\mathrm{A} \\
I_2 &= I_a - I_b = -32 - 54 = -86\,\mathrm{A} \\
I_3 &= I_b = 54\,\mathrm{A} \\
I_4 &= I_b - I_c = 54 - 40 = 14\,\mathrm{A} \\
I_5 &= I_c = 40\,\mathrm{A}
\end{aligned}$$

Se recomienda comprobar que estos resultados cumplen la 1LK en los nudos del circuito, para asegurarse de que la resolución es correcta.

La diferencia de potencial entre A y B es:

$$U_{AB} = I_3 \cdot R_3 + I_4 \cdot R_4 = 54 \cdot 2 + 14 \cdot 3 = 150\,\mathrm{V}$$

La potencia entregada por los generadores del circuito es:

$$\begin{aligned}
P_{\epsilon_1} &= \epsilon_1 \cdot (-I_1) = -3{,}776\,\mathrm{kW} \\
P_{\epsilon_2} &= \epsilon_2 \cdot (-I_2) = 20{,}296\,\mathrm{kW} \\
P_{\epsilon_3} &= \epsilon_3 \cdot I_5 = 4{,}72\,\mathrm{kW} \\
P_{\epsilon} &= P_{\epsilon_1} + P_{\epsilon_2} + P_{\epsilon_3} = 21{,}24\,\mathrm{kW}
\end{aligned}$$

Es importante recordar que el criterio de signos de un generador considera que la potencia entregada es positiva cuando la corriente sale del generador por su terminal positivo. Por tanto, I_1 e I_2 son empleadas con un signo negativo. En consecuencia, la potencia del generador ϵ_1 es negativa, lo que quiere decir que este generador funciona como receptor (absorbe potencia). Ahora bien, dado que I_2 tiene valor negativo (es decir, circula en sentido contrario al indicado en la figura), la potencia del generador ϵ_2 es positiva, de forma que este generador actúa como tal.

La potencia disipada por las resistencias es:

$$\begin{aligned}
P_{R_1} &= I_1^2 \cdot R_1 = 1{,}024\,\mathrm{kW} \\
P_{R_2} &= I_2^2 \cdot R_2 = 7{,}396\,\mathrm{kW} \\
P_{R_3} &= I_3^2 \cdot R_3 = 5{,}832\,\mathrm{kW} \\
P_{R_4} &= I_4^2 \cdot R_4 = 588\,\mathrm{W} \\
P_{R_5} &= I_5^2 \cdot R_5 = 6{,}4\,\mathrm{kW} \\
P_R &= \sum_i P_{Ri} = 21{,}24\,\mathrm{kW}
\end{aligned}$$

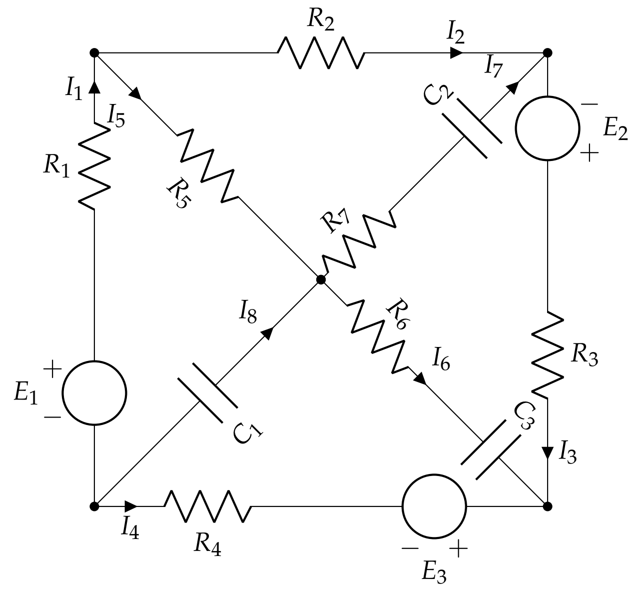
Comprobamos que se cumple el balance de potencias.

1.6. Enunciado

En el circuito de la figura, se debe determinar:

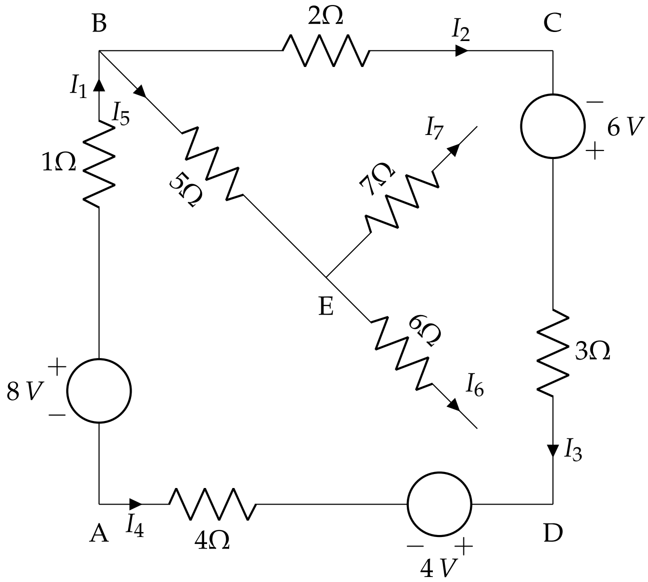
- Todas las intensidades de rama señaladas.
- Carga, polaridad y energía almacenada en los condensadores.
- Balance de potencias.

Datos: $R_i = i\,\Omega$; $C_i = i\,\mu\mathrm{F}$; $E_1 = 8\,\mathrm{V}$; $E_2 = 6\,\mathrm{V}$; $E_3 = 4\,\mathrm{V}$



Solución

Al tratarse de un circuito alimentado por corriente continua, los condensadores se comportan como un circuito abierto, por lo que el circuito a analizar es el mostrado en la figura.



Por simple observación, obtenemos:

$$I_5 = I_6 = I_7 = 0\,\mathrm{A}$$

quedando una única malla por la que circula la misma corriente $I_1 = I_2 = I_3 = -I_4 = I$. Por la 2LK, considerando que I va en sentido horario, se obtiene que:

$$-8 + 1\,I + 2\,I - 6 + 3\,I + 4 + 4\,I = 0 \quad \Rightarrow \quad I = \frac{8+6-4}{1+2+3+4} = 1\,\mathrm{A} = I_1 = I_2 = I_3 = -I_4$$

Para determinar la carga de los condensadores hay que calcular las tensiones en los diferentes nudos. Considerando E como tierra:

$$U_{AE} = U_A - \cancelto{0}{U_E} = -8 + 1\,I_1 + 5\,I_5 = -8 + 1 \cdot 1 + 5 \cdot 0 = -7\,\mathrm{V}$$

$$U_{CE} = U_C - \cancelto{0}{U_E} = -2\,I_2 + 5\,I_5 = -2 \cdot 1 + 5 \cdot 0 = -2\,\mathrm{V}$$

$$U_{DE} = U_D - \cancelto{0}{U_E} = 4 - 4\,I_4 - 8 + 1\,I_1 + 5\,I_5 = 4 - 4 \cdot (-1) - 8 + 1 \cdot 1 + 5 \cdot 0 = 1\,\mathrm{V}$$

Con estas tensiones, se determina la carga de los condensadores:

$$Q_{1\mu F} = C_{1\mu F} \cdot U_{AE} = 1 \cdot 10^{-6} \cdot (-7) = -7\,\mu C$$
$$Q_{2\mu F} = C_{2\mu F} \cdot U_{CE} = 2 \cdot 10^{-6} \cdot (-2) = -4\,\mu C$$
$$Q_{3\mu F} = C_{3\mu F} \cdot U_{DE} = 3 \cdot 10^{-6} \cdot 1 = 3\,\mu C$$

Aquellos condensadores en los que la carga es negativa, significa que tienen la polaridad contraria a la considerada. La energía es:

$$E_{1\mu F} = \frac{1}{2}\, C_{1\mu F} \cdot U_{AE}^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 10^{-6} \cdot (-7)^2 = 24{,}5\,\mu J$$
$$E_{2\mu F} = \frac{1}{2}\, C_{2\mu F} \cdot U_{CE}^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10^{-6} \cdot (-2)^2 = 4\,\mu J$$
$$E_{3\mu F} = \frac{1}{2}\, C_{3\mu F} \cdot U_{DE}^2 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 10^{-6} \cdot 1^2 = 1{,}5\,\mu J$$

Se calculan las potencias de los elementos activos y las potencias consumidas por las resistencias:

- Potencias de los elementos activos:

$$P_{E1} = E_1 \cdot I_1 = 8\,W$$
$$P_{E2} = E_2 \cdot I_3 = 6\,W$$
$$P_{E3} = E_3 \cdot I_4 = -4\,W$$

- Potencias de las resistencias:

$$P_{R,1} = R_1 \cdot I_1^2 = 1 \cdot 1^2 = 1\,W$$
$$P_{R,2} = R_2 \cdot I_2^2 = 2 \cdot 1^2 = 2\,W$$
$$P_{R,3} = R_3 \cdot I_3^2 = 3 \cdot 1^2 = 3\,W$$
$$P_{R,4} = R_4 \cdot I_4^2 = 4 \cdot (-1)^2 = 4\,W$$

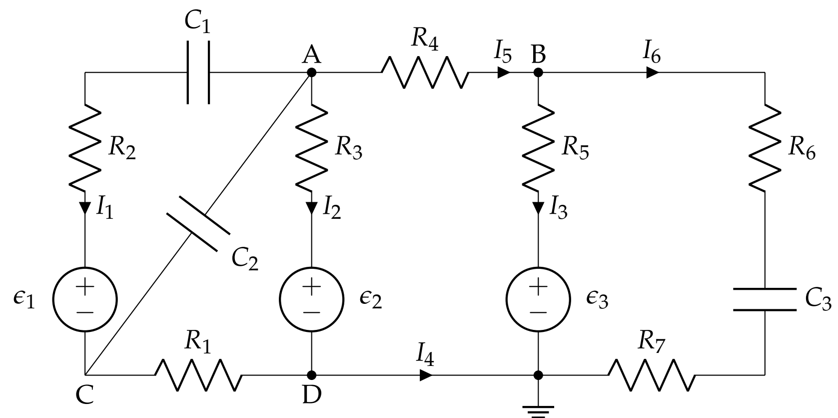
Donde se cumple que la potencia total aportada por los generadores es igual a la potencia consumida por las resistencias.

1.7. Enunciado

Aplicar el método de los nudos en el circuito de la figura para determinar:

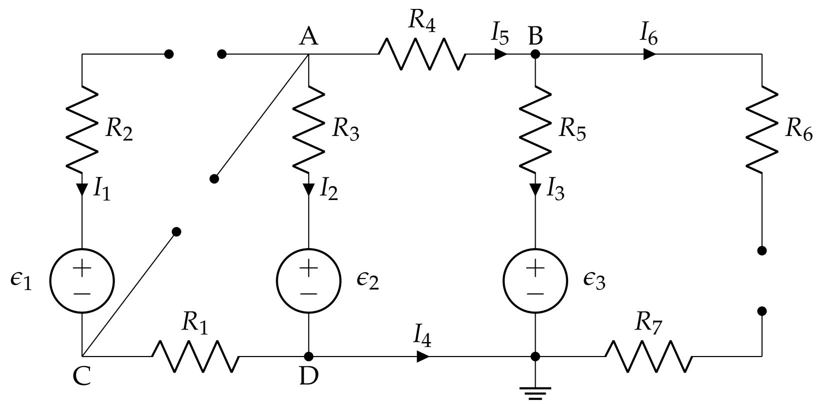
- Los potenciales de los nudos A, B, C y D.
- Las intensidades de corriente señaladas.
- Carga, polaridad y energía almacenada en los condensadores, supuestos sin carga inicial.

Datos: $R_i = i\,\Omega$; $C_i = i\,\mu F$; $\epsilon_1 = 6\,V$; $\epsilon_2 = 18\,V$; $\epsilon_3 = 6\,V$



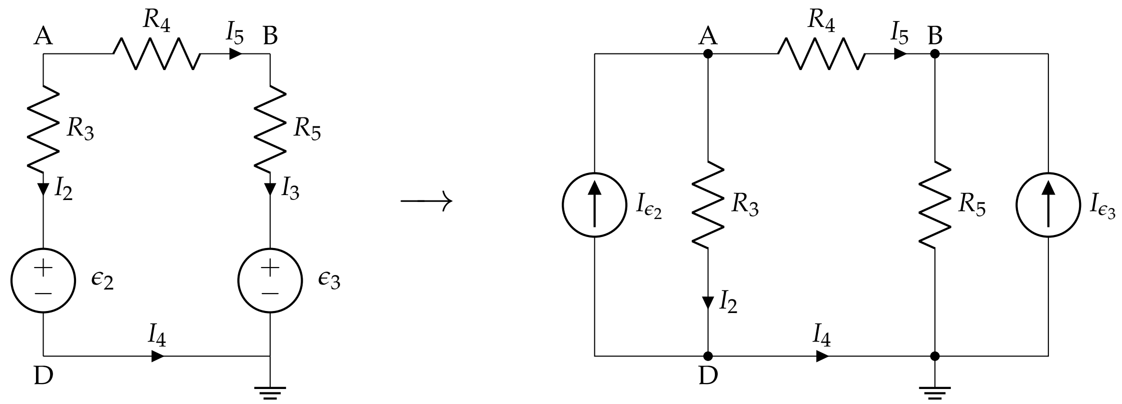
Solución

Sustituimos los condensadores por circuitos abiertos. En consecuencia, por las ramas correspondientes no puede circular corriente:



$$I_1 = 0\,\text{A}$$
$$I_6 = 0\,\text{A}$$

Luego el circuito equivalente es:



Donde hemos transformado las fuentes de tensión en fuentes de corriente, para poder aplicar el método de los nudos.

Formulando la ecuación general del método de los nudos:

$$\begin{bmatrix} G_3 + G_4 & -G_4 \\ -G_4 & G_5 + G_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_2 / R_3 \\ \epsilon_3 / R_5 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo valores y resolviendo:

$$V_A = 15\,\text{V}$$
$$V_B = 11\,\text{V}$$

Además, $V_D = 0\,\text{V}$, dado que está conectado a tierra. Por otra parte, la caída de tensión en la resistencia R_1 es de $0\,\text{V}$, dado que $I_1 = 0\,\text{A}$, luego $V_C = V_D = 0\,\text{V}$.

Con estos resultados podemos obtener los valores de las corrientes de rama. Volvemos al circuito original para plantear las ecuaciones de rama:

$$V_A = I_2 \cdot R_3 + \epsilon_2$$
$$V_B = I_3 \cdot R_5 + \epsilon_3$$

De estas ecuaciones despejamos I_2 e I_3. Además, teniendo en cuenta que $I_1 = I_6 = 0$, tenemos:

$$I_5 = I_3$$
$$I_4 = I_2$$
$$I_2 = -I_3$$

En definitiva:

$$I_1 = 0\,\mathrm{A}$$
$$I_2 = -1\,\mathrm{A}$$
$$I_3 = 1\,\mathrm{A}$$
$$I_4 = -1\,\mathrm{A}$$
$$I_5 = 1\,\mathrm{A}$$
$$I_6 = 0\,\mathrm{A}$$

Finalmente, calculamos las diferencias de potencial en los condensadores. En C_1 asignamos la polaridad positiva en A, y tenemos:

$$U_{AC} = U_{C_1} + \epsilon_1 \quad \rightarrow \quad U_{C_1} = 9\,\mathrm{V}$$

Para C_2 y C_3, el cálculo es directo. Asignando la polaridad positiva en A y B, respectivamente:

$$U_{C_2} = U_{AC} = 15\,\mathrm{V}$$
$$U_{C_3} = U_{BD} = 11\,\mathrm{V}$$

En consecuencia, las cargas almacenadas en cada condensador son:

$$q_1 = C_1 \cdot U_{C_1} = 9\,\mu\mathrm{C}$$
$$q_2 = C_2 \cdot U_{C_2} = 30\,\mu\mathrm{C}$$
$$q_3 = C_3 \cdot U_{C_3} = 33\,\mu\mathrm{C}$$

Y las energías almacenadas:

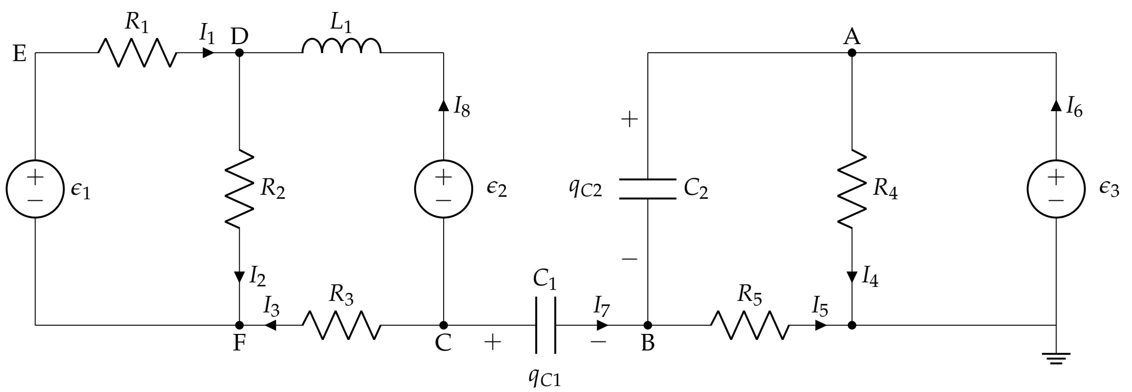
$$E_{C_1} = \frac{1}{2} \cdot C_1 \cdot (U_{C_1})^2 = 40{,}5\,\mu\mathrm{J}$$
$$E_{C_2} = \frac{1}{2} \cdot C_2 \cdot (U_{C_2})^2 = 225\,\mu\mathrm{J}$$
$$E_{C_3} = \frac{1}{2} \cdot C_3 \cdot (U_{C_3})^2 = 181{,}5\,\mu\mathrm{J}$$

1.8. Enunciado

En el circuito de la figura, donde se sabe que la carga inicial de los condensadores era de 10 µC para C_1 y de 20 µC para C_2, con las polaridades indicadas, se pide determinar:

- Intensidades de corriente señaladas.
- Potenciales en los puntos A, B, C, D, E y F.

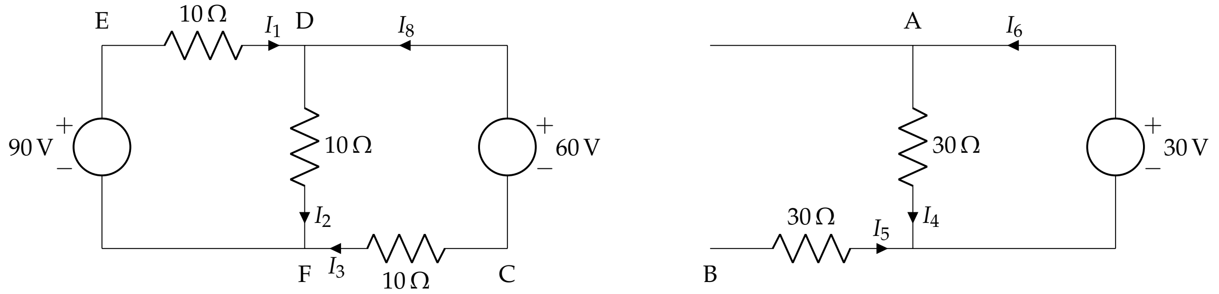
Datos: $\epsilon_1 = 90\,\mathrm{V}$; $\epsilon_2 = 60\,\mathrm{V}$; $\epsilon_3 = 30\,\mathrm{V}$; $R_1 = R_2 = R_3 = 10\,\Omega$; $R_4 = R_5 = 30\,\Omega$; $C_1 = 10\,\mu\mathrm{F}$; $C_2 = 20\,\mu\mathrm{F}$; $L_1 = 1\,\mu\mathrm{H}$



Solución

Sustituimos los condensadores por circuitos abiertos, lo que implica que por las ramas correspondientes no puede circular corriente:

$$I_5 = 0\,\mathrm{A}$$
$$I_7 = 0\,\mathrm{A}$$



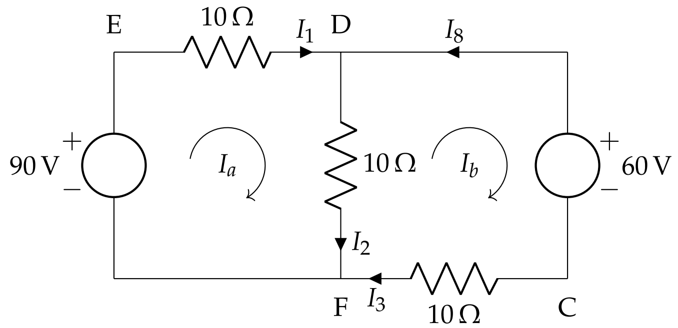
En consecuencia:

$$I_3 = -I_8$$
$$I_4 = I_6$$

Además, la bobina L_1 se sustituye por un cortocircuito.

Dado que el circuito original está "partido" en dos porciones inconexas, podemos analizar de manera independiente cada una de las dos porciones. Si aplicáramos la ecuación general de mallas al circuito en su conjunto, obtendríamos una matriz con ceros en los elementos comunes entre la malla 3 (malla en la que se incluye el generador 3), y las mallas 1 y 2, por lo que el sistema de ecuaciones 3×3 sería separable en dos partes (de dimensiones 2×2 y 1×1).

Por lo tanto, en el circuito de la izquierda se tienen dos mallas, considerando las corrientes de malla mostradas en la siguiente figura:



$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2 + R_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ -\epsilon_2 \end{bmatrix}$$

La solución de este sistema es:

$$I_a = 4\,\mathrm{A}$$
$$I_b = -1\,\mathrm{A}$$

siendo,

$$I_1 = I_a$$
$$I_2 = I_a - I_b$$
$$I_3 = I_b$$
$$I_8 = -I_b$$

En el circuito de la derecha tenemos una única malla:

$$\epsilon_3 = I_4 \cdot R_4 \rightarrow I_4 = 1\,\mathrm{A}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} I_1 &= 4\,\mathrm{A} \\ I_2 &= 5\,\mathrm{A} \\ I_3 &= -1\,\mathrm{A} \\ I_4 &= 1\,\mathrm{A} \\ I_5 &= 0\,\mathrm{A} \\ I_6 &= 1\,\mathrm{A} \\ I_7 &= 0\,\mathrm{A} \\ I_8 &= 1\,\mathrm{A} \end{aligned}$$

Para calcular los potenciales en los puntos A y B:

$$\begin{aligned} V_A &= \epsilon_3 = 30\,\mathrm{V} \\ V_B &= R_5 \cdot I_5 = 0\,\mathrm{V} \end{aligned}$$

Para calcular el potencial en el punto C, debemos tener en cuenta que el condensador C_1 conserva su carga inicial porque el circuito no está cerrado en la parte superior. Por tanto:

$$U_{CB} = U_{C_1} = \frac{q_{C_1,0}}{C_1} = 1\,\mathrm{V}$$

(para comprobar que nunca circula corriente por un elemento que esté conectado como C_1, se puede aplicar 1LK en los nudos D, F, y C, y sumando las 3 ecs. se obtiene que $I_7 = 0$)

Luego:

$$U_C = U_{CB} + U_B = 1\,\mathrm{V}$$

A partir de este resultado, podemos calcular el resto de potenciales:

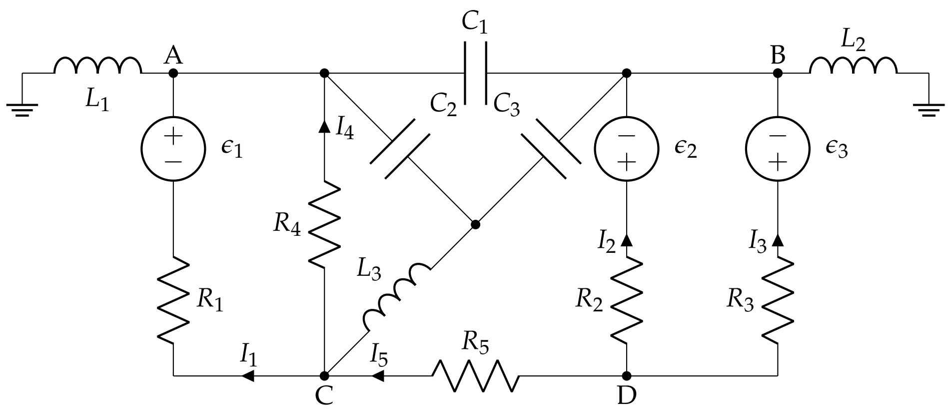
$$\begin{aligned} U_D &= U_{DC} + U_C = \epsilon_2 + U_C = 61\,\mathrm{V} \\ U_E &= U_{ED} + U_D = I_1 \cdot R_1 + U_D = 101\,\mathrm{V} \\ U_F &= U_{FC} + U_C = -I_3 \cdot R_3 + U_C = 11\,\mathrm{V} \end{aligned}$$

1.9. Enunciado

En el circuito de la figura, los condensadores se conectaron sin carga. Mediante el método de las mallas, se pide determinar:

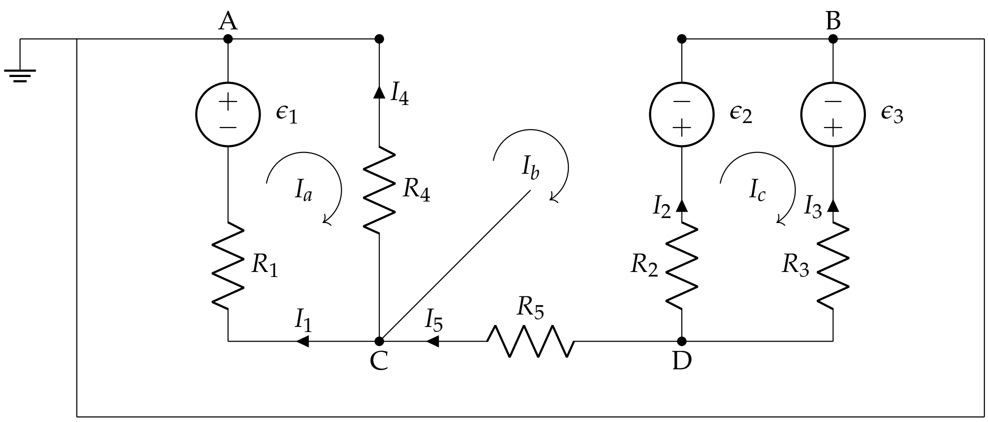
- Intensidades de corriente señaladas.
- Potenciales en los puntos A, B, C y D.
- Polaridades, cargas, y energías de los condensadores.
- Balance de potencias.

$\epsilon_1 = 118\,\mathrm{V}$
$\epsilon_2 = 236\,\mathrm{V}$
$\epsilon_3 = 118\,\mathrm{V}$
$R_1 = 4\,\Omega$
$R_2 = R_3 = 1\,\Omega$
$R_4 = 3\,\Omega$
$R_5 = 2\,\Omega$
$C_1 = C_2 = C_3 = 2\,\mu\mathrm{F}$
$L_1 = L_2 = L_3 = 1\,\mathrm{mH}$



Solución

Se sustituyen los condensadores y las bobinas por sus equivalentes en un circuito de corriente continua (circuito abierto y cortocircuito, respectivamente). Por otro lado, dado que hay dos tomas de tierra en el esquema, esto no implica que haya dos referencias de potencial distintas: simplemente indica que esos dos puntos están cortocircuitados. En el circuito resultante, se definen tres corrientes de malla, como se muestra en el circuito de la figura:



(la malla b puede definirse de esta forma porque los puntos A y B están cortocircuitados)

Usamos la ecuación general del método de mallas:

$$\begin{bmatrix} R_1+R_4 & -R_4 & 0 \\ -R_4 & R_4+R_5+R_2 & -R_2 \\ 0 & -R_2 & R_2+R_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3-\epsilon_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 7 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 118 \\ 236 \\ -118 \end{bmatrix}$$

Cuya solución es:

$$\begin{aligned} I_a &= 40\,\mathrm{A} \\ I_b &= 54\,\mathrm{A} \\ I_c &= -32\,\mathrm{A} \end{aligned}$$

Por tanto, las corrientes indicadas en el circuito son:

$$\begin{aligned} I_1 &= 40\,\mathrm{A} \\ I_2 &= -86\,\mathrm{A} \\ I_3 &= 32\,\mathrm{A} \\ I_4 &= 14\,\mathrm{A} \\ I_5 &= 54\,\mathrm{A} \end{aligned}$$

Los potenciales en los puntos indicados son:

$$V_A = 0\,\text{V}$$
$$V_B = 0\,\text{V}$$
$$V_C = I_4 \cdot R_4 = 42\,\text{V}$$
$$V_D = I_5 \cdot R_5 + V_C = 150\,\text{V}$$

Por tanto, las polaridades de los condensadores y sus valores de tensión son los siguientes:

$$\begin{aligned} U_{C_1} = U_{BA} &= 0\,\text{V} \\ q_1 = C_1 \cdot U_{C_1} &= \boxed{0\,\text{C}} \\ E_{C_1} = \frac{1}{2} C_1 \cdot (U_{C_1})^2 &= \boxed{0\,\text{J}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{C_2} = U_{CA} &= 42\,\text{V} \\ q_2 = C_2 \cdot U_{C_2} &= \boxed{84\,\mu\text{C}} \\ E_{C_2} = \frac{1}{2} C_2 \cdot (U_{C_2})^2 &= \boxed{1{,}76\,\text{mJ}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{C_3} = U_{CB} &= 42\,\text{V} \\ q_3 = C_3 \cdot U_{C_3} &= \boxed{84\,\mu\text{C}} \\ E_{C_3} = \frac{1}{2} C_3 \cdot (U_{C_3})^2 &= \boxed{1{,}76\,\text{mJ}} \end{aligned}$$

Finalmente, podemos formular el balance de potencias como potencia entregada por los elementos activos frente a potencia consumida por los elementos pasivos:

- La potencia total entregada por los elementos activos es 21 240 W:

$$\begin{aligned} P_{\epsilon_1} = \epsilon_1 \cdot I_1 &= 4720\,\text{W} \\ P_{\epsilon_2} = \epsilon_2 \cdot (-I_2) &= 20\,296\,\text{W} \\ P_{\epsilon_3} = \epsilon_3 \cdot (-I_3) &= -3776\,\text{W} \end{aligned}$$

- La potencia total consumida por los elementos pasivos también es 21 240 W:

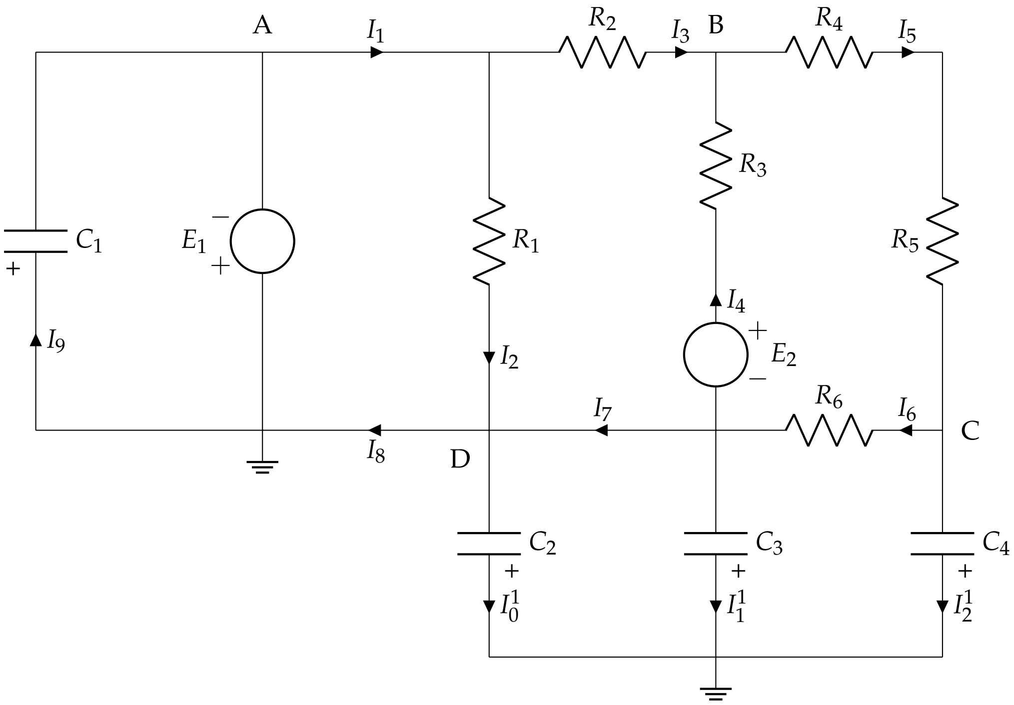
$$\begin{aligned} P_{R_1} = R_1 \cdot (I_1)^2 &= 6400\,\text{W} \\ P_{R_2} = R_2 \cdot (I_2)^2 &= 7396\,\text{W} \\ P_{R_3} = R_3 \cdot (I_3)^2 &= 1024\,\text{W} \\ P_{R_4} = R_4 \cdot (I_4)^2 &= 588\,\text{W} \\ P_{R_5} = R_5 \cdot (I_5)^2 &= 5832\,\text{W} \end{aligned}$$

1.10. Enunciado

En el circuito de la figura, determinar:

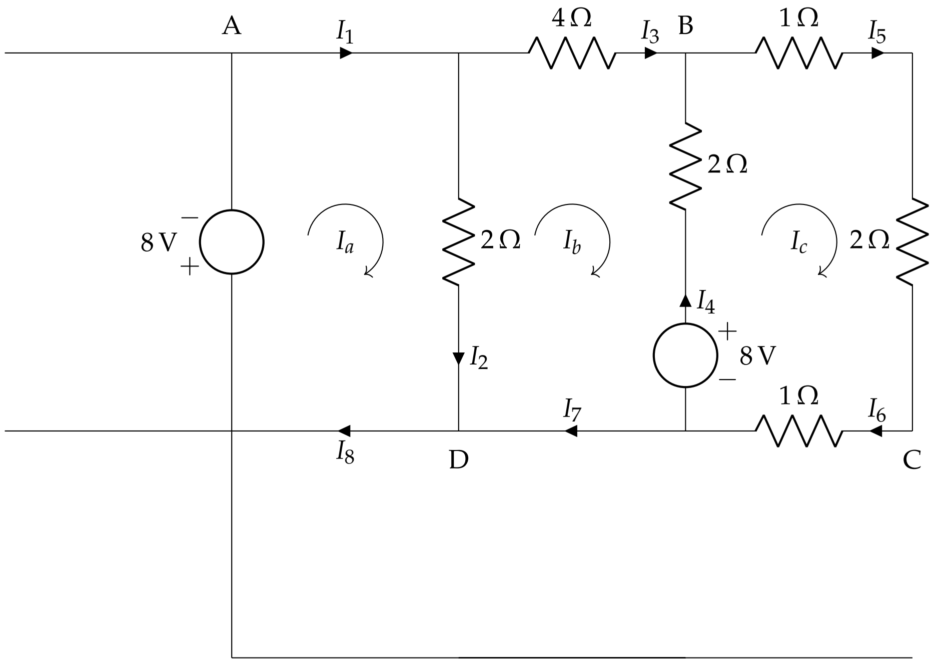
- Las ecuaciones para el cálculo de las intensidades.
- Todas las intensidades indicadas.
- Potenciales en todos los nudos.
- Carga y energía almacenada en los condensadores.

Datos: $R_1 = 2\,\Omega$; $R_2 = 4\,\Omega$; $R_3 = 2\,\Omega$; $R_4 = 1\,\Omega$; $R_5 = 2\,\Omega$; $R_6 = 1\,\Omega$; $E_1 = 8\,\text{V}$; $E_2 = 8\,\text{V}$; $C_i = i\,\mu\text{F}$



Solución

Al tratarse de alimentación en CC, se sustituyen los condensadores por circuitos abiertos, quedando el circuito de la figura:



Aplicando el método de mallas, con las corrientes indicadas, se plantea el sistema de ecuaciones en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 8 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ -8 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones completas para calcular las intensidades son:

$$2\,I_a - 2\,I_b = -8$$
$$-2\,I_a + 8\,I_b - 2\,I_c = -8$$
$$-2\,I_b + 6\,I_c = 8$$

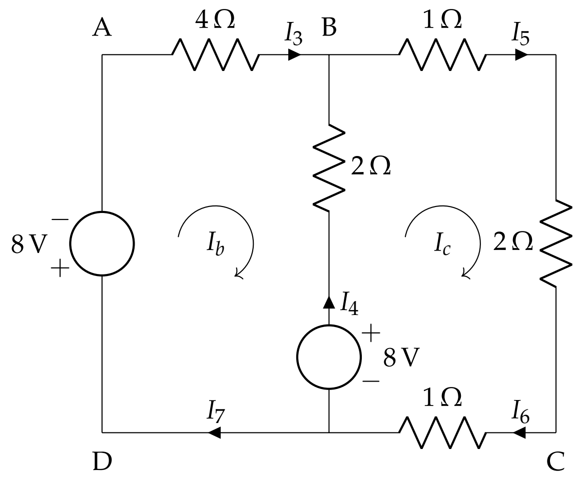
Cuya solución es:

$$I_a = -6{,}5\,\mathrm{A}$$
$$I_b = -2{,}5\,\mathrm{A}$$
$$I_c = 0{,}5\,\mathrm{A}$$

Estableciendo las relaciones entre las corrientes de malla y las de rama del circuito:

$$I_1 = I_8 = I_a = \boxed{-6{,}5\,\mathrm{A}}$$
$$I_2 = I_a - I_b = -6{,}5 - (-2{,}5) = \boxed{-4\,\mathrm{A}}$$
$$I_3 = I_7 = I_b = \boxed{-2{,}5\,\mathrm{A}}$$
$$I_4 = I_c - I_b = 0{,}5 - (-2{,}5) = \boxed{3\,\mathrm{A}}$$
$$I_5 = I_6 = I_c = \boxed{0{,}5\,\mathrm{A}}$$

Una forma alternativa de resolver el circuito consiste en reparar en que E_1 es generador dominante, por lo que puede determinarse directamente el valor de $I_2 = -E_1/R_1 = -4$A. Esto permite usar únicamente 2 mallas, lo que reduce el sistema de ecuaciones a 2×2:



$$\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Cuya solución es la misma que la obtenida anteriormente.

Conociendo las corrientes y teniendo el nudo de tierra como referencia, se calculan los potenciales:

$$U_A = -U_{8\mathrm{V}} = \boxed{-8\,\mathrm{V}}$$
$$U_B = -U_{R2\Omega} + U_{8\mathrm{V}} = -2 \cdot 3 + 8 = \boxed{2\,\mathrm{V}}$$
$$U_C = U_{R1\Omega} = 1 \cdot 0{,}5 = \boxed{0{,}5\,\mathrm{V}}$$
$$U_D = \boxed{0\,\mathrm{V}}$$

Con los potenciales, se determina la carga de los condensadores:

$$Q_{1\mu\mathrm{F}} = C_{1\mu\mathrm{F}}\,(-U_A) = 1 \cdot 10^{-6} \cdot (-(-8)) = \boxed{8\,\mu\mathrm{C}}$$
$$Q_{2\mu\mathrm{F}} = C_{2\mu\mathrm{F}} \cdot 0\,\mathrm{V} = \boxed{0\,\mu\mathrm{C}}$$
$$Q_{3\mu\mathrm{F}} = C_{3\mu\mathrm{F}} \cdot 0\,\mathrm{V} = \boxed{0\,\mu\mathrm{C}}$$
$$Q_{4\mu\mathrm{F}} = C_{4\mu\mathrm{F}}\,(-U_C) = 4 \cdot 10^{-6} \cdot (-0{,}5) = \boxed{-2\,\mu\mathrm{C}}$$

Aquellos condensadores en los que la carga es negativa, significa que tienen polaridad contraria a la considerada. La energía almacenada en cada uno de ellos es:

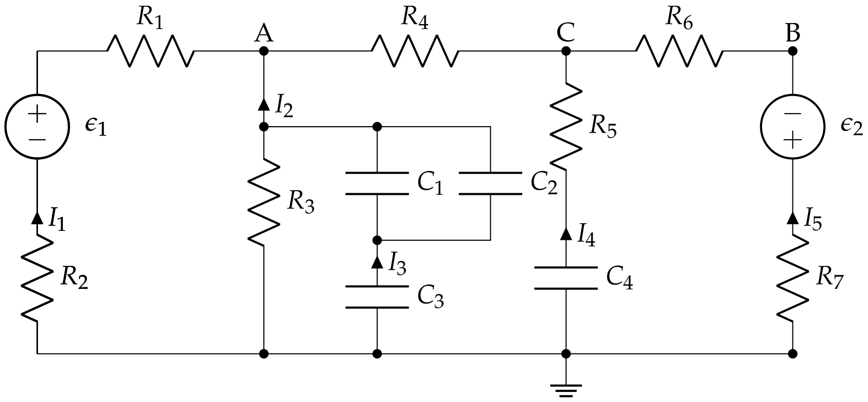
$$
\begin{aligned}
E_{1\mu F} &= \frac{1}{2} C_{1\mu F} \cdot (-U_A)^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 10^{-6} \cdot (-(-8))^2 = \boxed{32\,\mu J} \\
E_{2\mu F} &= \boxed{0\,\mu J} \\
E_{3\mu F} &= \boxed{0\,\mu J} \\
E_{4\mu F} &= \frac{1}{2} C_{4\mu F} \cdot (-U_C)^2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 10^{-6} \cdot (-0{,}5)^2 = \boxed{0{,}5\,\mu J}
\end{aligned}
$$

1.11. Enunciado

En el circuito de la figura se debe determinar:

- Las corrientes señaladas.
- El balance de potencias, diferenciando entre elementos activos y elementos pasivos.
- Los potenciales en los puntos A, B y C.
- La carga y polaridad en los condensadores, supuestos sin carga inicial.

$\epsilon_1 = 1\,V$
$\epsilon_2 = 7\,V$
$R_i = 1\,\Omega$
$C_i = i\,\mu F$



Solución

Sustituimos los condensadores por circuitos abiertos. En consecuencia, por las ramas correspondientes no puede circular corriente:

$$
\begin{aligned}
I_3 &= \boxed{0\,A} \\
I_4 &= \boxed{0\,A}
\end{aligned}
$$

Tenemos dos mallas, y definimos dos corrientes de malla dextrógiras (sentido horario):

$$
\begin{bmatrix} R_1 + R_2 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_3 + R_4 + R_6 + R_7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \end{bmatrix}
$$

La solución de este sistema es:

$$
\begin{aligned}
I_a &= 1\,A \\
I_b &= 2\,A
\end{aligned}
$$

siendo,

$$
\begin{aligned}
I_1 &= I_a = \boxed{1\,A} \\
I_2 &= I_b - I_a = \boxed{1\,A} \\
I_5 &= -I_b = \boxed{-2\,A}
\end{aligned}
$$

La potencia de los dos elementos activos es:

$$P_{\epsilon 1} = \epsilon_1 \cdot I_1 = 1\,\mathrm{W}$$
$$P_{\epsilon 2} = \epsilon_2 \cdot (-I_5) = 14\,\mathrm{W}$$

En total, $P_\epsilon = \boxed{15\,\mathrm{W}}$

Aplicando la ley de Joule en cada resistencia comprobaríamos que la potencia total disipada en las resistencias del circuito coincide con los 15 W.

Los potenciales en los puntos indicados son:

$$V_A = -I_2 \cdot R_3 = -1\,\mathrm{V}$$
$$V_B = -\epsilon_2 - I_5 \cdot R_7 = -5\,\mathrm{V}$$
$$V_C = U_{CB} + V_B = -I_5 \cdot R_6 + V_B = -3\,\mathrm{V}$$

La carga almacenada en el condensador C_4 se calcula con la ecuación:

$$q_4 = C_4 \cdot U_{C4} = C_4 \cdot (-U_C) = 12\,\mu\mathrm{C}$$

donde se ha asignado la polaridad positiva en la conexión a tierra.

Los condensadores C_1, C_2 y C_3 forman parte de una asociación. Los condensadores C_1 y C_2 están asociados en paralelo:

$$C_{12} = C_1 \parallel C_2 = C_1 + C_2 = 3\,\mu\mathrm{F}$$

A su vez, están conectados en serie con el condensador C_3:

$$C_T = \frac{C_{12} \cdot C_3}{C_{12} + C_3} = 1{,}5\,\mu\mathrm{F}$$

Este condensador equivalente está conectado entre A y tierra, y asignamos la polaridad positiva a la conexión a tierra. Por tanto:

$$U_{C_T} = -U_A = 1\,\mathrm{V} \quad \rightarrow \quad q_T = C_T \cdot U_{C_T} = 1{,}5\,\mu\mathrm{C}$$

Al tratarse de una conexión serie, esta carga es la misma que tienen el condensador C_3 y el condensador equivalente C_{12}.

$$q_3 = \boxed{1{,}5\,\mu\mathrm{C}}$$
$$q_{12} = 1{,}5\,\mu\mathrm{C}$$

Con estas cargas podemos calcular las diferencias de potencial en estos condensadores:

$$U_{C3} = \frac{q_3}{C_3} = 0{,}5\,\mathrm{V}$$
$$U_{C12} = \frac{q_{12}}{C_{12}} = 0{,}5\,\mathrm{V}$$

Por tanto:

$$q_1 = C_1 \cdot U_{C12} = \boxed{0{,}5\,\mu\mathrm{C}}$$
$$q_2 = C_2 \cdot U_{C12} = \boxed{1\,\mu\mathrm{C}}$$

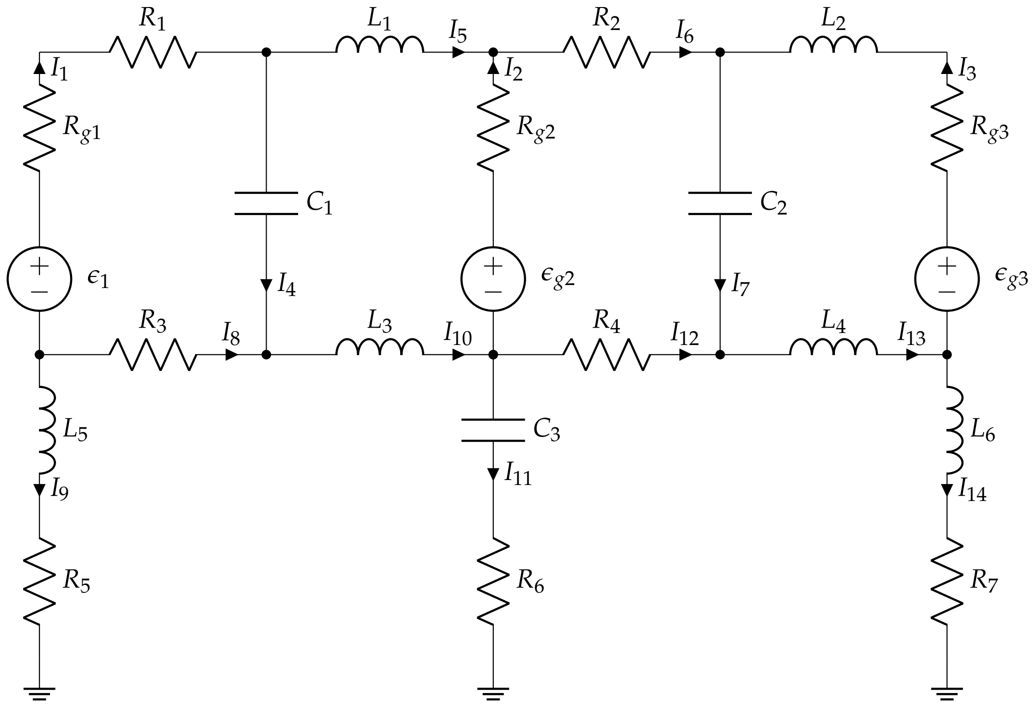
Comprobamos que $q_1 + q_2 = q_{12}$.

1.12. Enunciado

El circuito de la figura está funcionando en régimen estacionario. Los condensadores estaban inicialmente descargados. Resuelve el circuito mediante el método que consideres conveniente para obtener los siguientes resultados:

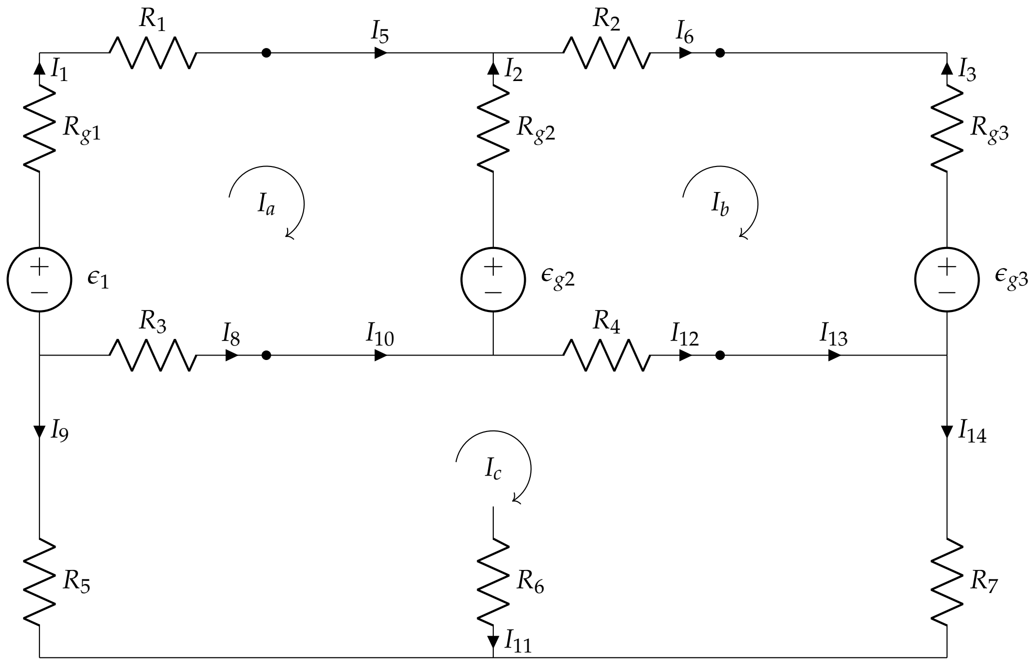
- Las intensidades señaladas.
- Polaridad y energía almacenada en los condensadores.
- Balance de potencias.

Datos: $\epsilon_1 = 40\,\text{V}$; $\epsilon_2 = 22\,\text{V}$; $\epsilon_3 = 20\,\text{V}$; $C_1 = C_2 = C_3 = 2\,\mu\text{F}$; $R_{g1} = R_{g2} = R_{g3} = 4\,\Omega$; $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 2\,\Omega$; $R_5 = R_6 = R_7 = 1\,\Omega$



Solución

Los condensadores se sustituyen por circuitos abiertos (inicialmente están descargados) y las bobinas por cortocircuitos. De esta forma, el circuito original queda reducido a tres mallas, como se muestra en la siguiente figura:



Se resuelve mediante el método de mallas, cuyo sistema de ecuaciones en forma matricial es:

$$\begin{bmatrix} 12 & -4 & -2 \\ -4 & 12 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cuya solución es:

$$I_a = 2\,\mathrm{A}$$
$$I_b = 1\,\mathrm{A}$$
$$I_c = 1\,\mathrm{A}$$

Relacionando estas corrientes de malla con las corrientes de rama señaladas en el circuito original (teniendo en cuenta que las corrientes que circulan por ramas con condensadores son nulas):

$$\begin{aligned}
I_1 &= I_a = 2\,\mathrm{A} \\
I_2 &= -I_a + I_b = -1\,\mathrm{A} \\
I_3 &= -I_b = -1\,\mathrm{A} \\
I_4 &= 0\,\mathrm{A} \\
I_5 &= I_a = 2\,\mathrm{A} \\
I_6 &= I_b = 1\,\mathrm{A} \\
I_7 &= 0\,\mathrm{A} \\
I_8 &= -I_a + I_c = -1\,\mathrm{A} \\
I_9 &= -I_c = -1\,\mathrm{A} \\
I_{10} &= -I_a + I_c = -1\,\mathrm{A} \\
I_{11} &= 0\,\mathrm{A} \\
I_{12} &= -I_b + I_c = 0\,\mathrm{A} \\
I_{13} &= -I_b + I_c = 0\,\mathrm{A} \\
I_{14} &= I_c = 1\,\mathrm{A}
\end{aligned}$$

El condensador C_1 está conectado directamente a la rama compuesta por la fuente E_2 y su resistencia E_{g2} (debido a que la bobina se comporta como un cortocircuito). Por tanto, suponiendo que la polaridad positiva de este condensador corresponde a su borne superior, la tensión de este condensador es:

$$U_{C1} = E_2 - I_2 \cdot R_{g2} = 22 - (-1) \cdot 4 = 26\,\mathrm{V}$$

siendo correcta la polaridad asignada por el signo positivo de este resultado. La energía almacenada por el condensador es:

$$E_{C1} = 1/2 \cdot V_{C1}^2 \cdot C_1 = 0{,}676\,\text{mJ}$$

El condensador C_2 está conectado directamente a la rama compuesta por la fuente E_3 y su resistencia E_{g3} (debido a que la bobina se comporta como un cortocircuito). Por tanto, suponiendo que la polaridad positiva de este condensador corresponde a su borne superior, la tensión de este condensador es:

$$U_{C2} = E_3 - I_3 \cdot R_{g3} = 20 - (-1) \cdot 4 = 24\,\text{V}$$

siendo correcta la polaridad asignada por el signo positivo de este resultado. La energía almacenada por el condensador es:

$$E_{C2} = 1/2 \cdot U_{C2}^2 \cdot C_2 = 0{,}576\,\text{mJ}$$

El condensador C_3 está en paralelo con la resistencia R_4 y la resistencia R_7 (debido a que las bobinas se comportan como un cortocircuito y a que por la resistencia R_6 no circula corriente). Por tanto, suponiendo que la polaridad positiva de este condensador corresponde a su borne superior, la tensión de este condensador es:

$$U_{C3} = I_{12} \cdot R_4 + I_{14} \cdot R_7 = 0 + 1 \cdot 1 = 1\,\text{V}$$

siendo correcta la polaridad asignada por el signo positivo de este resultado. La energía almacenada por el condensador es:

$$E_{C3} = 1/2 \cdot U_{C3}^2 \cdot C_3 = 1\,\mu\text{J}$$

Se calcula ahora el balance de potencias, diferenciando entre elementos activos (generadores) y pasivos (receptores):

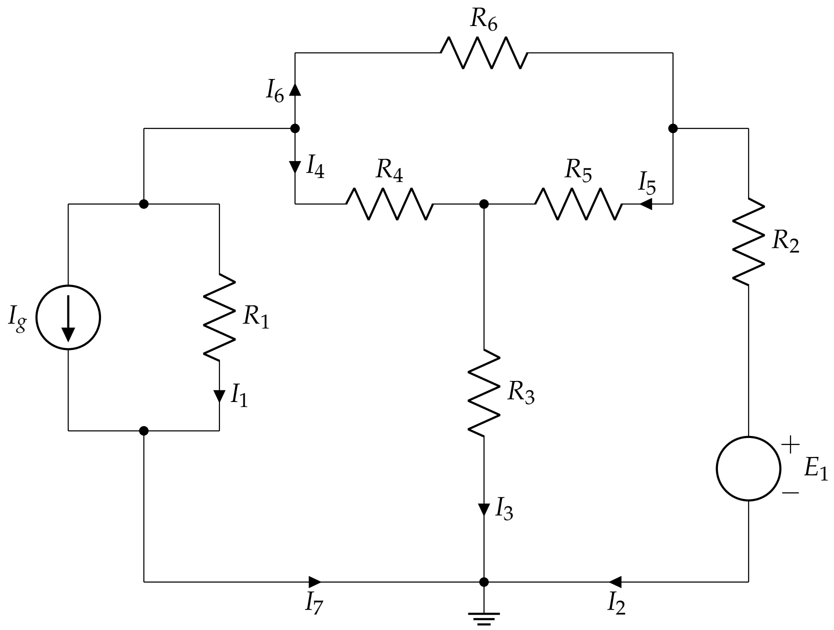
- Potencia de los generadores:
  - $P_{\epsilon 1} = \epsilon_1\, I_1 = 40 \cdot 2 = 80\,\text{W}$
  - $P_{\epsilon 2} = \epsilon_2\, I_2 = 22 \cdot (-1) = -22\,\text{W}$
  - $P_{\epsilon 3} = \epsilon_3\, I_3 = 20 \cdot (-1) = -20\,\text{W}$.
- Potencia de las resistencias:
  - $P_{Rg1} = R_{g1}\, I_1^2 = 4 \cdot 2^2 = 16\,\text{W}$
  - $P_{Rg2} = R_{g2}\, I_2^2 = 4 \cdot (-1)^2 = 4\,\text{W}$
  - $P_{Rg3} = R_{g3}\, I_3^2 = 4 \cdot (-1)^2 = 4\,\text{W}$
  - $P_{R1} = R_1\, I_1^2 = 2 \cdot 2^2 = 8\,\text{W}$
  - $P_{R2} = R_2\, I_6^2 = 2 \cdot 1^2 = 2\,\text{W}$
  - $P_{R3} = R_3\, I_8^2 = 2 \cdot (-1)^2 = 2\,\text{W}$
  - $P_{R4} = R_4\, I_{12}^2 = 2 \cdot 0^2 = 0\,\text{W}$
  - $P_{R5} = R_5\, I_9^2 = 1 \cdot (-1)^2 = 1\,\text{W}$
  - $P_{R6} = R_6\, I_{11}^2 = 1 \cdot 0^2 = 0\,\text{W}$
  - $P_{R7} = R_7\, I_{14}^2 = 1 \cdot 1^2 = 1\,\text{W}$

cumpliéndose que $P_g = P_R = 38\,\text{W}$.

1.13. Enunciado

En el circuito de la figura, obtener las intensidades de corriente señaladas mediante un análisis por el método de las mallas y mediante un análisis por el método de los nudos.

Datos: $R_1 = 9\,\Omega$; $R_2 = 4\,\Omega$; $R_3 = 18\,\Omega$; $R_4 = R_5 = R_6 = 20\,\Omega$; $E_1 = 16\,\text{V}$; $I_g = 2\,\text{A}$



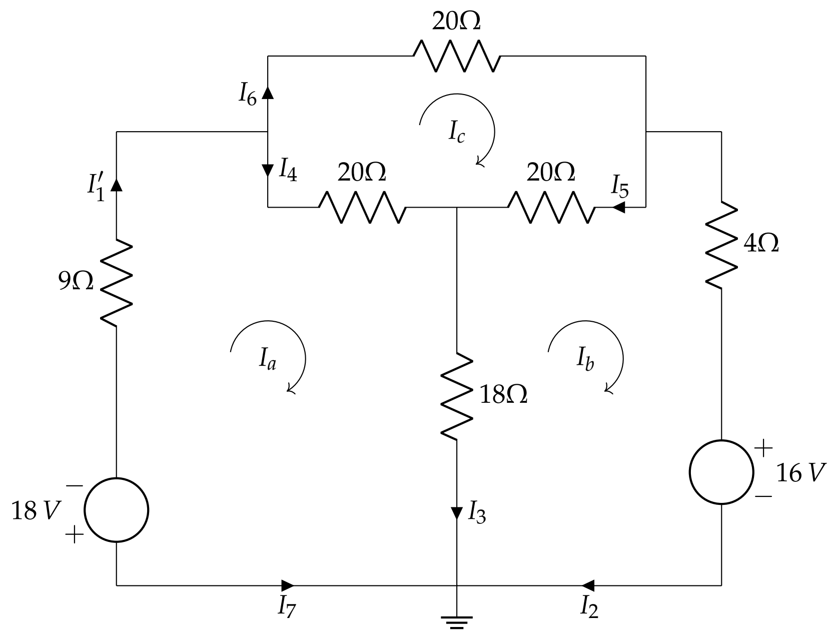
Solución

Resolución mediante mallas

Se hace la transformación de la fuente de corriente en una fuente de tensión:

$$\epsilon_{Ig} = I_g \cdot R_9 = 2 \cdot 9 = 18\,\mathrm{V}$$

Así, el circuito está formado por 3 mallas como se muestra en la figura:



Se plantea el sistema en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 47 & -18 & -20 \\ -18 & 42 & -20 \\ -20 & -20 & 60 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18 \\ -16 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cuya solución es:

$$I_a = -1{,}26\,\text{A}$$
$$I_b = -1{,}33\,\text{A}$$
$$I_c = -0{,}87\,\text{A}$$

Estableciendo las relaciones con las corrientes de rama indicadas:

$$I_1' = I_a = -1{,}26\,\text{A}$$
$$I_2 = I_b = -1{,}33\,\text{A}$$
$$I_3 = I_a - I_b = -1{,}26 - (-1{,}33) = 0{,}07\,\text{A}$$
$$I_4 = I_a - I_c = -1{,}26 - (-0{,}87) = -0{,}39\,\text{A}$$
$$I_5 = I_c - I_b = -0{,}87 - (-1{,}33) = 0{,}46\,\text{A}$$
$$I_6 = I_c = -0{,}87\,\text{A}$$
$$I_7 = -I_a = 1{,}26\,\text{A}$$

La corriente I_1 del circuito original se obtiene aplicando el 1LK:

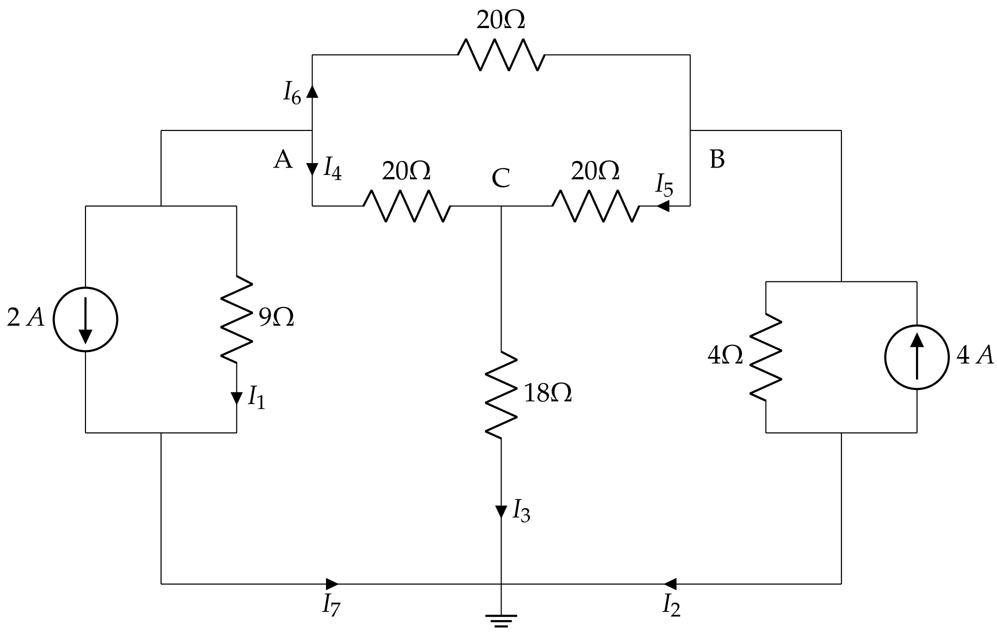
$$I_g + I_1 = I_7 \Rightarrow I_1 = I_7 - I_g = 1{,}26 - 2 = -0{,}74\,\text{A}$$

Resolución mediante nudos

Se transforma la fuente de tensión en una de corriente:

$$I_{\epsilon,g} = \frac{\epsilon_g}{R_4} = \frac{16}{4} = 4\,\text{A}$$

quedando el circuito que se muestra en la figura:



Con los nudos indicados, se aplica el método de nudos en su forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \frac{19}{90} & -\frac{1}{20} & -\frac{1}{20} \\ -\frac{1}{20} & \frac{7}{20} & -\frac{1}{20} \\ -\frac{1}{20} & -\frac{1}{20} & \frac{7}{45} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_A \\ U_B \\ U_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cuya solución es:

$$U_A = -6{,}64\,\text{V}$$
$$U_B = 10{,}66\,\text{V}$$
$$U_C = 1{,}29\,\text{V}$$

A partir de 1LK, 2LK y ley de Ohm, se obtienen las corrientes indicadas:

$$I_1 = \frac{U_A}{R_9} = \frac{-6{,}64}{9} = -0{,}74\,\text{A}$$

$$I_2 = I_{R_4} - I_{\epsilon,g} = \frac{U_B}{R_4} - 4 = \frac{10{,}66}{4} - 4 = -1{,}34\,\text{A}$$

$$I_3 = \frac{U_C}{R_{18}} = \frac{1{,}29}{18} = 0{,}07\,\text{A}$$

$$I_4 = \frac{U_{AC}}{R_{20}} = \frac{U_A - U_C}{R_{20}} = \frac{-6{,}64 - 1{,}29}{20} = -0{,}39\,\text{A}$$

$$I_5 = \frac{U_{BC}}{R_{20}} = \frac{U_B - U_C}{R_{20}} = \frac{10{,}66 - 1{,}29}{20} = 0{,}47\,\text{A}$$

$$I_6 = \frac{U_{AB}}{R_{20}} = \frac{U_A - U_B}{R_{20}} = \frac{-6{,}64 - 10{,}66}{20} = -0{,}87\,\text{A}$$

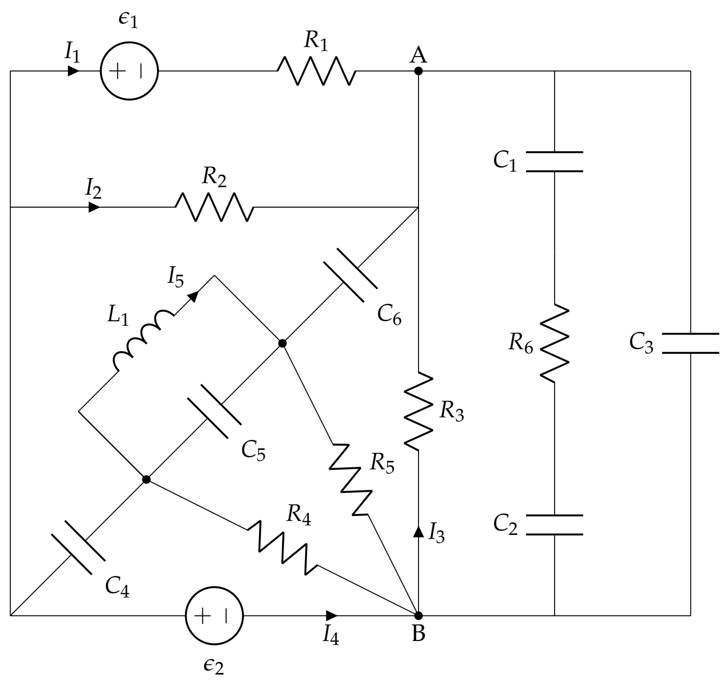
$$I_7 = I_g + I_1$$

Se observa que los valores obtenidos son idénticos con ambos métodos.

1.14. Enunciado

Resolver el circuito por el método que se estime conveniente, obteniendo:

- El valor de las corrientes indicadas (I_1, I_2, I_3, I_4, I_5).
- La carga y polaridad de C_1, C_2 y C_3.
- La potencia entregada o absorbida por los elementos activos.

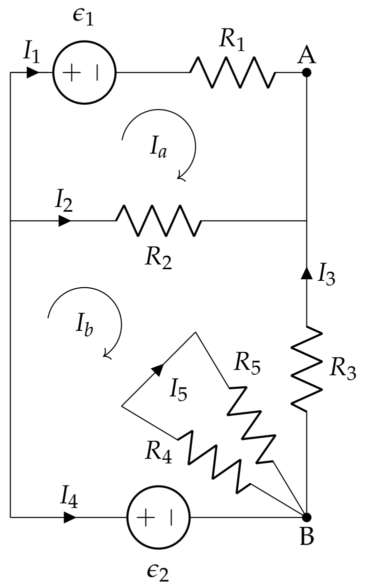


Datos:

$R_1 = R_2 = 2\,\Omega$
$R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = 1\,\Omega$
$C_i = i\,\mu\text{F}$
$L_1 = 1\,\text{mH}$
$\epsilon_1 = 10\,\text{V}$
$\epsilon_2 = 10\,\text{V}$

Solución

Para analizar el circuito, sustituimos los condensadores por circuito abierto, y la bobina por cortocircuito:



En el circuito resultante: $I_5 = 0$, $I_3 = I_4$.

Resolviendo por mallas, definiendo las corrientes de malla I_a e I_b en sentido horario:

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2 + R_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\epsilon_1 \\ \epsilon_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$I_a = -1{,}25\,\text{A}\,, \qquad I_b = 2{,}5\,\text{A}$$

Luego las corrientes de rama pedidas son:

$$I_1 = I_a = \boxed{-1{,}25\,\text{A}}\,, \quad I_2 = I_b - I_a = \boxed{3{,}75\,\text{A}}\,,$$
$$I_3 = I_4 = -I_b = \boxed{-2{,}5\,\text{A}}\,, \quad \boxed{I_5 = 0\,\text{A}}$$

Si no se hubiera visto inmediatamente que $I_5 = 0$, siempre podría haberse definido una tercera corriente de malla, $I_c = I_5$, con lo que el sistema de ecs. quedaría:

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 & 0 \\ -R_2 & R_2 + R_3 & 0 \\ 0 & 0 & R_4 + R_5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La tercera ecuación no tiene incógnitas en común con las dos primeras, y de ella se obtiene directamente $I_c = I_5 = 0$.

Para calcular la carga en los condensadores, hay que tener en cuenta que, al no circular corriente por R_6 en régimen permanente del circuito, su tensión es de 0 V. Luego la asociación serie de C_1 y C_2 está sometida a la tensión U_{AB}.

Asumiendo polaridad positiva en el punto A, la carga de C_3 es:

$$q_3 = C_3 \cdot U_{C_3} = C_3 \cdot (-I_3 \cdot R_3) = \boxed{7{,}5\,\mu\text{C}}$$

La carga de la asociación serie de C_1 y C_2, asumiendo polaridad positiva en A, es:

$$q_{\text{serie}} = C_{12} \cdot U_{C_{12}} = C_{12} \cdot (-I_3 \cdot R_3) = \frac{5}{3}\,\mu\text{C}$$

donde la capacidad equivalente de la asociación serie ha sido calculada como:

$$C_{12} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = \frac{2}{3}\,\mu\text{F}$$

Al estar C_1 y C_2 asociados en serie, su carga es la misma, luego $q_{\text{serie}} = \boxed{q_1 = q_2 = \frac{5}{3}\,\mu\text{C}}$

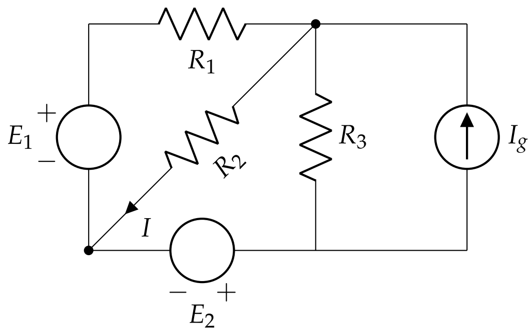
Finalmente, la potencia entregada por los elementos activos es:

$$P_{\epsilon 1} = \epsilon_1 \cdot (-I_1) = \boxed{12{,}5\,\text{W}} \qquad P_{\epsilon 2} = \epsilon_2 \cdot (-I_4) = \boxed{25\,\text{W}}$$

1.15. Enunciado

Calcular la intensidad que circula por la resistencia de 30 Ω del circuito de la figura aplicando el principio de superposición.

Datos: $R_1 = 20\,\Omega$; $R_2 = 30\,\Omega$; $R_3 = 20\,\Omega$; $E_1 = 32\,\mathrm{V}$; $E_2 = 64\,\mathrm{V}$; $I_g = 4\,\mathrm{A}$



Solución

El circuito es equivalente a la suma de tres circuitos en los que únicamente aparece un generador, anulándose el resto (cortocircuitando las fuentes de tensión y dejando en circuito abierto la fuente de corriente). Se analiza cada circuito por separado.

<u>Actúa solo la fuente de tensión de 32 V</u>

Las resistencia equivalente del paralelo es:

$$R_{paralelo} = \frac{20 \cdot 30}{20 + 30} = 12\,\Omega$$

siendo la corriente total del circuito, por ley de Ohm:

$$I = \frac{32}{20 + 12} = 1\,\mathrm{A}$$

Con el concepto de divisor de corriente, la corriente I' (la que circula por la resistencia de 30 Ω en este caso) es:

$$I' = I \cdot \frac{R_{paralelo}}{R} = 1 \cdot \frac{12}{30} = 0{,}4\,\mathrm{A}$$

<u>Actúa solo la fuente de tensión de 64 V</u>

Las resistencia equivalente del paralelo es:

$$R_{paralelo} = \frac{20 \cdot 30}{20 + 30} = 12\,\Omega$$

siendo la corriente total del circuito, por ley de Ohm:

$$I = \frac{64}{20 + 12} = 2\,\mathrm{A}$$

Aplicando divisor de corriente, la corriente I'' (la que circula por la resistencia de 30 Ω en este caso) es:

$$I'' = I \cdot \frac{R_{paralelo}}{R} = 2 \cdot \frac{12}{30} = 0{,}8\,\mathrm{A}$$

<u>Actúa solo la fuente de corriente de 4 A</u>

Las resistencia equivalente del circuito es (las tres están en paralelo):

$$R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30}} = 7{,}5\,\Omega$$

Dado que la corriente total del circuito son 4 A, aplicando divisor de corriente, la corriente I''' (la que circula por la resistencia de 30 Ω en este caso) es:

$$I''' = I \cdot \frac{R_{eq}}{R} = 4 \cdot \frac{7{,}5}{30} = 1\,\mathrm{A}$$

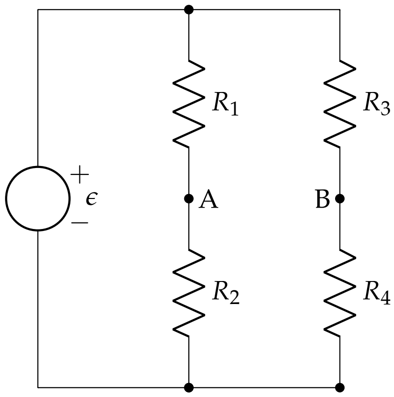
Por tanto, la corriente total que circula por la resistencia de 30 Ω es:

$$I = I' + I'' + I''' = 0{,}4 + 0{,}8 + 1 = \boxed{2{,}2\,\mathrm{A}}$$

1.16. Enunciado

Obtener el generador equivalente de Thévenin del circuito de la figura respecto de A y B. A partir de este generador, calcula la resistencia a colocar en A-B para obtener la máxima potencia, calculando esta potencia y la potencia entregada por el generador ϵ.

Datos: $\epsilon = 54\,\mathrm{V}$; $R_1 = R_4 = 8\,\Omega$; $R_2 = R_3 = 10\,\Omega$



Solución

Para obtener la tensión U_{AB}, aplicamos divisor de tensión en ambas ramas:

$$U_A = \epsilon \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$U_B = \epsilon \cdot \frac{R_4}{R_3 + R_4}$$

$$U_{AB} = U_A - U_B = \epsilon \cdot \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_4}{R_3 + R_4} \right) = \boxed{6\,\mathrm{V} = \epsilon_{th}}$$

Para calcular la resistencia equivalente apagamos la fuente de tensión (es decir, la cortocircuitamos). En el circuito resultante obtenemos:

$$R_{th} = (R_1 \parallel R_2) + (R_3 \parallel R_4) = \boxed{\frac{80}{9}\,\Omega}$$

Para obtener la máxima potencia, hay que conectar una resistencia $R_L = R_{th}$. Con esta resistencia el balance de potencias es:

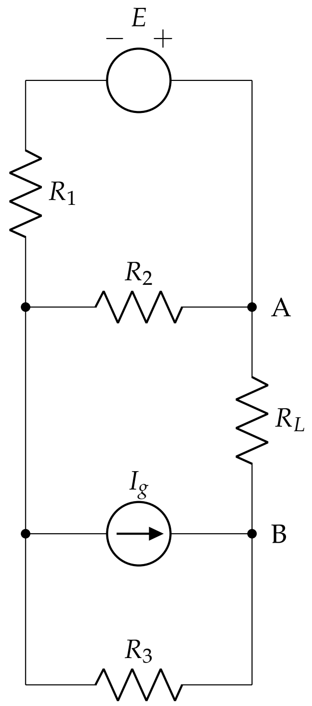
$$P_L = \frac{\epsilon_{th}^2}{4R_{th}} = 1{,}0125\,\mathrm{W}$$

$$P_\epsilon = 2 \cdot P_L = 2{,}025\,\mathrm{W}$$

1.17. Enunciado

Determinar el equivalente Thévenin del circuito de la figura entre los nudos A-B. ¿Qué resistencia habría que conectar en dichos terminales para transferir la máxima potencia? ¿Cuál sería dicha potencia?

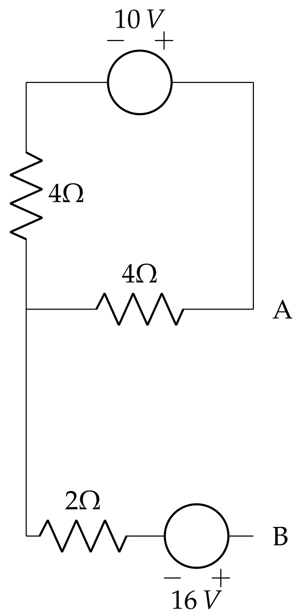
Datos: $R_1 = R_2 = 4\,\Omega$; $R_3 = 2\,\Omega$; $E = 10\,\mathrm{V}$; $I_g = 8\,\mathrm{A}$



Solución

Se transforma la fuente de corriente en paralelo con la resistencia de 2Ω en una fuente de tensión en serie con dicha resistencia, como en la figura:

$$U_{I_g} = I_g \cdot R_2 = 8 \cdot 2 = 16\,\mathrm{V}$$



Cálculo de ϵ_{th}

Hay que determinar la tensión U_{AB}. Considerando el nudo de la izquierda como masa, y dado que por la resistencia de 2Ω no circula corriente (circuito abierto entre $A - B$), el potencial en B es:

$$U_B = 16\,\text{V}$$

Aplicando la ley de Ohm a la malla superior:

$$I = \frac{10}{4+4} = 1{,}25\,\text{A}$$

por lo que el potencial en el punto A:

$$U_A = 4 \cdot 1{,}25 = 5\,\text{V}$$

Así, la tensión $U_{AB} = \epsilon_{th}$:

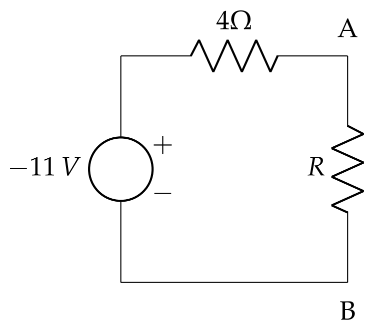
$$U_{AB} = U_A - U_B = \epsilon_{th} = 5 - 16 = -11\,\text{V}$$

Cálculo de R_{th}

Al no haber fuentes dependientes, se puede obtener esta resistencia como la R_{eq} vista desde los terminales $A - B$, anulando las fuentes:

$$R_{eq} = R_{th} = 2 + \frac{4 \cdot 4}{4+4} = 4\,\Omega$$

El equivalente de Thévenin es por tanto:



Aplicando el Tª de máxima transferencia de potencia, la resistencia a conectar es:

$$R_L = R_{th} = 4\,\Omega$$

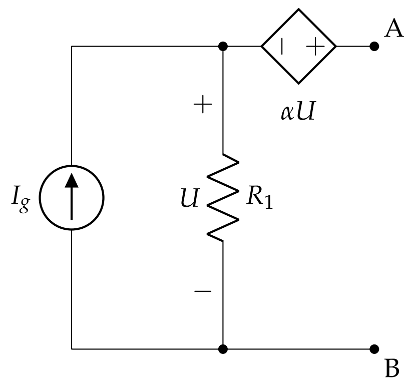
siendo la máxima potencia transferida:

$$P_{max} = \frac{\epsilon_{th}^2}{4\,R_{th}} = \frac{(-11)^2}{4 \cdot 4} = 7{,}56\,\text{W}$$

1.18. Enunciado

Obtener el generador equivalente de Thévenin del circuito de la figura respecto de A y B.

Datos: $I_g = 10\,\text{A}$; $R_1 = 1\,\Omega$; $\alpha = 5$



Solución

Para calcular ϵ_{th}, es necesario calcular U_{AB} en circuito abierto.

Aplicando 2LK desde A hasta B, pasando necesariamente por la fuente dependiente de tensión y la resistencia (dado que no conocemos la tensión en el generador de corriente):

$$U_{AB} = \alpha U + U = (1+\alpha)U = (1+5)U = 6\,U$$

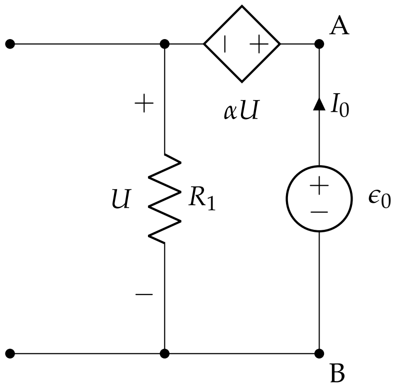
Además, dado que los terminales A-B están en circuito abierto, toda la corriente del generador I_g circula por la resistencia, luego:

$$U = I_g \cdot R_1 = 10 \cdot 1 = 10\,\mathrm{V}$$

Por tanto, el generador de Thévenin tiene una *fem* de:

$$U_{AB} = 6\,U = 6 \cdot 10 = \boxed{60\,\mathrm{V} = \epsilon_{th}}$$

Para calcular la resistencia Thévenin, se apaga la fuente independiente. Como la fuente dependiente permanece, es necesario aplicar un generador de prueba a la salida:



$$\epsilon_0 = \alpha U + U = U(1+\alpha) = 6\,U$$

$$U = I_0 \cdot R_1 = I_0 \cdot 1 = I_0$$

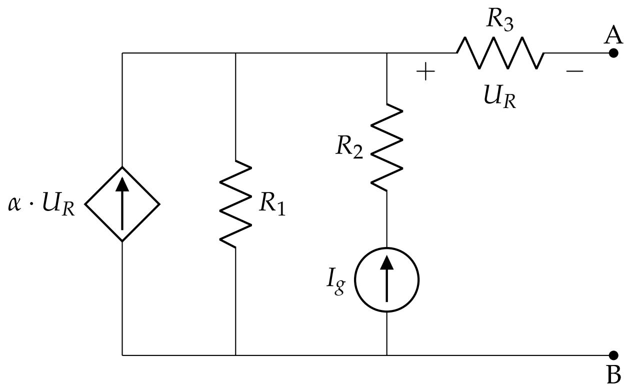
Por tanto:

$$R_{th} = \frac{\epsilon_0}{I_0} = \frac{6\,U}{U} = \boxed{6\,\Omega}$$

Nota: el generador de prueba puede entenderse como una medida que habría que tomar en el laboratorio. Sin tomar esta medida virtual de la corriente que entregaría un generador de prueba, no nos es posible calcular el efecto que tiene una fuente dependiente en la R equivalente del circuito.

1.19. Enunciado

En el circuito de la figura, se debe calcular el equivalente de Norton entre terminales A-B.



Datos:

$R_1 = R_3 = 1\,\Omega$

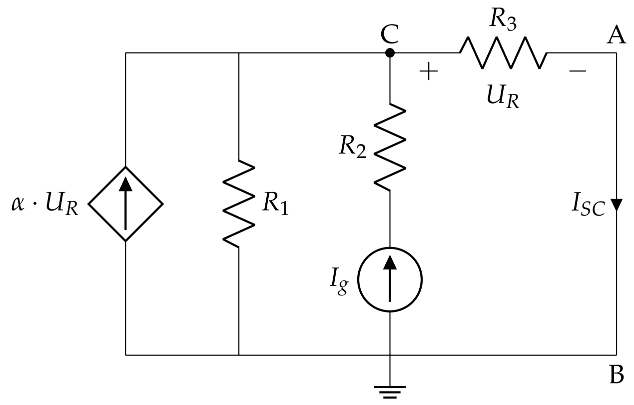
$R_2 = 2\,\Omega$

$\alpha = 0{,}5\,\Omega^{-1}$

$I_g = 6\,\mathrm{A}$

Solución

Para calcular I_N, hay que cortocircuitar los terminales A-B y calcular la corriente de cortocircuito:



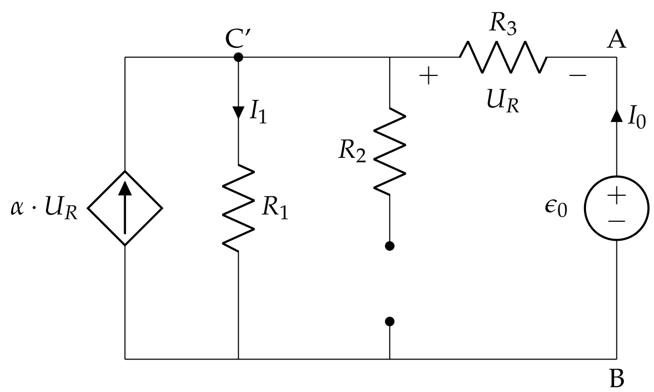
Dado que únicamente hay 2 nudos, solo es necesaria una ecuación para resolver. Definiendo el nudo C, y tomando B como referencia, aplicamos 1LK en C:

$$\alpha \cdot U_R + I_g - U_C \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3}\right)}_{=\frac{1}{1}+\frac{1}{1}=2\,\Omega^{-1}} = 0$$

donde $U_R = U_C$, luego:

$$I_g = U_C \cdot (2 - \alpha) \quad \rightarrow \quad I_{SC} = \frac{U_C}{R_3} = \frac{I_g/1{,}5}{R_3} = \boxed{4\,\mathrm{A} = I_N}$$

Para calcular R_N, se apagan las fuentes independientes y se conecta un generador de prueba entre A y B:



Aplicando 2LK:

$$\epsilon_0 = I_0 \cdot R_3 + I_1 \cdot R_1 \overset{\overset{R_1 = R_3 = 1\,\Omega}{\downarrow}}{=} I_0 + I_1$$

Y aplicando 1LK en C′:

$$\alpha \cdot U_R - I_1 + I_0 = 0 \overset{\overset{U_R = -I_0 \cdot R_3 = -I_0}{\downarrow}}{=} \alpha \cdot (-I_0) - I_1 + I_0$$

Finalmente, sustituyendo la primera ecuación ($I_1 = \epsilon_0 - I_0$) en la segunda:

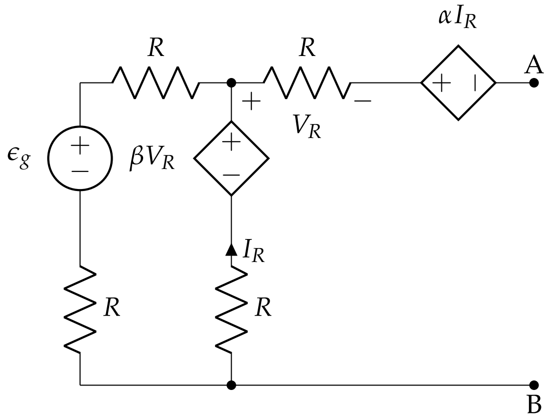
$$-\alpha \cdot I_0 - \epsilon_0 + I_0 + I_0 = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\epsilon_0}{I_0} = \boxed{\frac{3}{2}\,\Omega = R_N}$$

1.20. Enunciado

En el circuito de la figura, calcular:

- La corriente del generador equivalente de Norton respecto de A y B, I_N.
- La resistencia del generador equivalente de Norton respecto de A y B, R_N.
- La resistencia de carga que se debe conectar entre A y B para conseguir la máxima potencia disponible, y el valor de esta potencia.

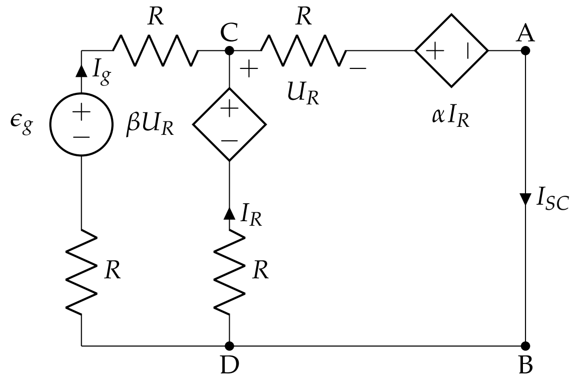
Datos: $R = 1\,\Omega$; $\epsilon_g = 10\,\text{V}$; $\alpha = 2\,\Omega$; $\beta = 1$



Solución

Para calcular el equivalente de Norton, cortocircuitamos la salida del circuito.

Para calcular I_{sc}, podríamos aplicar el método de las mallas, pero la presencia de fuentes dependientes hace que su aplicación no sea directa. Es más sencillo aplicar 1LK y 2LK para obtener las siguientes ecuaciones:



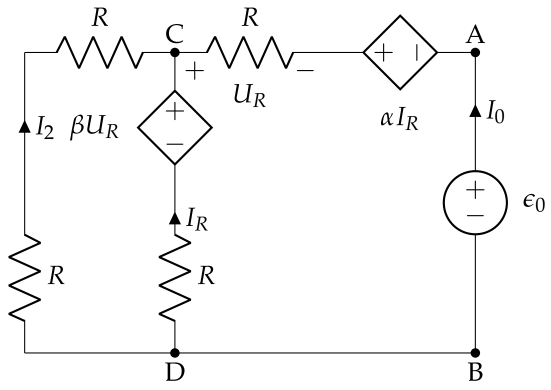
$$
\begin{aligned}
I_g + I_R &= I_{sc} && (1.1)\\
U_{CD} &= \epsilon_g - 2 \cdot R \cdot I_g && (1.2)\\
U_{CD} &= \beta \cdot U_R - I_R \cdot R && (1.3)\\
U_{CD} &= U_R + \alpha \cdot I_R && (1.4)\\
U_R &= R \cdot I_{sc} && (1.5)
\end{aligned}
$$

(5 ecs. y 5 incógnitas: $I_g, I_R, I_{sc}, U_{CD}, U_R$)

Sustituyendo (1.5) en (1.3) y (1.4), y combinando estas dos, tenemos que $I_R = 0$, luego de (1.1) obtenemos $I_g = I_{sc}$. Sustituyendo este resultado y $U_{CD} = R \cdot I_{sc}$ (de la ec. 1.4) en (1.2), tenemos $R \cdot I_{sc} = \epsilon_g - 2R \cdot I_{sc}$, que finalmente resulta en:

$$I_{sc} = \boxed{\frac{10}{3}\,\text{A} = I_N}$$

Para obtener la resistencia equivalente Norton, apagamos la fuente independiente (la cortocircuitamos) y conectamos un generador de prueba en AB:



$$\begin{aligned} I_2 + I_R + I_0 &= 0 && (1.6) \\ U_{CD} &= U_R + \alpha \cdot I_R + \epsilon_0 && (1.7) \\ U_{CD} &= \beta \cdot U_R - I_R \cdot R && (1.8) \\ U_{CD} &= -2R \cdot I_2 && (1.9) \\ U_R &= -I_0 \cdot R && (1.10) \end{aligned}$$

(5 ecs. y 5 incógnitas: $I_2, I_R, I_0, U_{CD}, U_R$)

Sustituyendo (1.10) en (1.8) y (1.6) en (1.9), tenemos:

$$-\beta \cdot I_0 \cdot R - I_R \cdot R = -2R \cdot (-I_R - I_0) \quad \rightarrow \quad -I_0 - I_R = 2 \cdot (I_R + I_0) \quad \rightarrow \quad I_R = -I_0$$

donde se ha usado $R = 1\,\Omega$ y $\beta = 1$.

Ahora, combinando (1.7) y (1.8):

$$-I_0 \cdot R + \alpha \cdot I_R + \epsilon_0 = -\beta \cdot I_0 \cdot R - I_R \cdot R \quad \rightarrow \quad -I_0 + 2I_R + \epsilon_0 = -I_0 - I_R \quad \rightarrow \quad \frac{\epsilon_0}{I_0} = 3\,\Omega$$

donde se ha usado $R = 1\,\Omega$, $\beta = 1$ y $\alpha = 2\,\Omega$, además del resultado ya obtenido de $I_R = -I_0$.

Luego:

$$R_N = \frac{\epsilon_0}{I_0} = \boxed{3\,\Omega}$$

Por tanto, hay que conectar una $\boxed{R_L = 3\,\Omega}$ para obtener la máxima potencia disponible, siendo esta máxima potencia de:

$$P_L = \frac{\epsilon_{th}^2}{4 \cdot R_L} = \frac{(I_N \cdot R_N)^2}{4 \cdot R_L} = \boxed{\frac{25}{3}\mathrm{W}}$$

Una opción alternativa para resolver el problema es aplicar el método de las mallas dos veces. Definiendo corrientes de malla en sentido horario en el primer ciruito dibujado para el método de resolución anterior, tenemos:

$$\begin{bmatrix} 3R & -R \\ -R & 2R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_g - \beta \cdot U_R \\ \beta \cdot U_R - \alpha \cdot I_R \end{bmatrix}$$

Dado que aparecen incógnitas en el lado derecho del sistema de ecuaciones, expresamos los términos de los generadores dependientes en función de las corrientes de malla:

$$U_R = I_b \cdot R$$
$$I_R = I_b - I_a$$

Reorganizando el sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 3R & -R + \beta \cdot R \\ -R - \alpha & 2R + \alpha - \beta \cdot R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_g \\ 0 \end{bmatrix}$$

(observación: todos los elementos de la matriz de coeficientes tienen unidades de resistencia)

Resolviendo, se obtiene la misma solución que con el método de resolución anterior:

$$I_a = \frac{10}{3}\,\mathrm{A}$$

$$I_b = \frac{10}{3}\,\mathrm{A} = I_{sc}$$

Para obtener la resistencia Norton, podemos aplicar mallas en el segundo circuito dibujado para el método de resolución anterior. Definiendo corrientes de malla en sentido horario:

$$\begin{bmatrix} 3R & -R \\ -R & 2R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_a' \\ I_b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta \cdot U_R \\ \beta \cdot U_R - \alpha \cdot I_R - \epsilon_0 \end{bmatrix}$$

Reorganizando términos, de la misma forma que hemos hecho en el sistema anterior:

$$\begin{bmatrix} 3R & -R + \beta \cdot R \\ -R - \alpha & 2R + \alpha - \beta \cdot R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_a' \\ I_b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\epsilon_0 \end{bmatrix}$$

Para poder resolver el sistema de ecs., es necesario asignar un valor a ϵ_0. En la práctica, esto equivale a elegir un valor de fuente de tensión que se conectaría en terminales A-B del circuito, tras lo cual mediríamos la corriente I_0 que esta aportaría.

Por ejemplo, elegimos $\epsilon_0 = 1\,\mathrm{V}$ y resolvemos:

$$I_a' = 0$$

$$I_b' = -\frac{1}{3}\,\mathrm{A} = -I_0$$

Luego $R_N = \dfrac{\epsilon_0}{I_0} = \boxed{3\,\Omega}$, mismo resultado que con el método de resolución anterior.

Capítulo 2

Corriente alterna monofásica

2.1. Enunciado

En un circuito serie RL con $R = 5\,\Omega$ y $L = 0{,}06\,\mathrm{H}$, la tensión en bornes de la bobina es $u_L(t) = 15\sin(200\,t)$ V. Determinar:

- La tensión total.
- Intensidad de corriente.
- Ángulo de desfase de la intensidad respecto de la tensión.
- Impedancia del circuito.

Solución

De la expresión temporal de $u_L(t)$ se tiene que $\omega = 200\,\mathrm{rad/s}$, por lo que:

$$\overline{X}_L = \mathrm{j}\,\omega L = \mathrm{j}\,200 \cdot 0{,}06 = \mathrm{j}\,12\,\Omega$$

siendo la impedancia del circuito:

$$\overline{Z}_{eq} = R + \overline{X}_L = \boxed{5 + \mathrm{j}\,12 = 13\underline{/67{,}3801^\circ}\,\Omega}$$

(es preferible usar cuatro decimales en los ángulos, para reducir los errores numéricos por aproximación).

El fasor correspondiente a $u_L(t)$ es:

$$\overline{U}_L = \frac{15}{\sqrt{2}}\underline{/0^\circ}\,\mathrm{V}$$

Por la ley de Ohm, la intensidad de corriente en la bobina (igual a la total, al estar en serie):

$$\overline{I} = \frac{\overline{U}_L}{\overline{X}_L} = \frac{\frac{15}{\sqrt{2}}\underline{/0^\circ}}{\mathrm{j}\,12} = \boxed{0{,}88\underline{/-90^\circ}\,\mathrm{A}}$$

y la tensión total, por la 2LK:

$$\overline{U} = \overline{U}_R + \overline{U}_L = 5 \cdot (0{,}88\underline{/-90^\circ}) + \frac{15}{\sqrt{2}}\underline{/0^\circ} = \boxed{11{,}48\underline{/-22{,}5304^\circ}\,\mathrm{V}}$$

siendo el ángulo de desfase de la intensidad respecto a la tensión:

$$\phi = \theta_U - \theta_I = -22{,}5304 - (-90) = \boxed{67{,}4696^\circ}$$

(la ligera diferencia en los decimales respecto al ángulo de $\overline{Z}_{eq}$ es debida a las aproximaciones en decimales en operaciones previas).

2.2. Enunciado

Una resistencia de 5 Ω y un condensador se unen en serie. La tensión en la resistencia es $u_R(t) = 25 \cdot \sin(2000t + \pi/6)$ V. Si la corriente está adelantada 60° respecto de la tensión aplicada, ¿cuál es el valor de la capacidad C del condensador?

Solución

El ángulo de la impedancia total es:

$$\theta = \theta_V - \theta_I \quad \rightarrow \quad \theta = -60^\circ = -\pi/3\,\mathrm{rad}$$

Y el fasor de dicha impedancia:

$$\overline{Z} = R - \mathrm{j}\frac{1}{\omega C}$$

A partir del cual puede calcularse la capacidad del condensador:

$$\tan\theta = -\frac{1}{\omega C R} \quad \rightarrow \quad \sqrt{3} = \frac{1}{10^4 C}$$

$$\boxed{C = 100\sqrt{3}/3\,\mu\mathrm{F}}$$

2.3. Enunciado

Para determinar las constantes R y L de una bobina, se conecta en serie con una resistencia de 25 Ω y al conjunto se le aplica una fuente de tensión de 120 V a 60 Hz. Se miden las tensiones en bornes de la resistencia y de la bobina, obteniendo los valores $U_R = 70{,}8$ V y $U_B = 86$ V. ¿Cuáles son las constantes de la bobina en cuestión?

Solución

Por la 2LK, se debe cumplir que:

$$\overline{U} = \overline{U}_B + \overline{U}_R$$

La tensión en la resistencia de 25 Ω, por la ley de Ohm:

$$\overline{U}_R = 25 \cdot \overline{I} \quad \rightarrow \quad I = \frac{U_R}{25} = 2{,}83\,\mathrm{A}$$

Dado que

$$\overline{Z}_B = R_B + \mathrm{j}\,\omega L_B$$

y conocido el módulo de la corriente que circula por el circuito, obtenemos:

$$\overline{U}_B = \overline{I} \cdot \overline{Z}_B \quad \rightarrow \quad 86 = 2{,}83\,Z_B \quad \rightarrow \quad Z_B = 30{,}37\,\Omega$$

La impedancia equivalente total del circuito es:

$$\overline{Z} = (25 + R_B) + \mathrm{j}\,\omega L_B$$

y por la ley de Ohm:

$$\overline{U} = \overline{I} \cdot \overline{Z} \quad \rightarrow \quad 120 = 2{,}83\,Z \quad \rightarrow \quad Z = 42{,}37\,\Omega$$

Planteamos el sistema de ecuaciones resultantes:

$$30{,}37 = \sqrt{R_B^2 + (\omega L_B)^2}$$

$$42{,}37 = \sqrt{(25 + R_B)^2 + (\omega L_B)^2}$$

cuyas soluciones son:

$$\boxed{R = 5\,\Omega}$$

$$\boxed{L = 79{,}5\,\mathrm{mH}}$$

2.4. Enunciado

Un circuito serie RLC con $R = 5\,\Omega$, $L = 0{,}02\,\mathrm{H}$ y $C = 80\,\mu\mathrm{F}$, tiene aplicada una tensión senoidal de frecuencia variable. Determinar los valores de la pulsación ω para los cuales la corriente:

1. Adelanta 45° a la tensión.
2. Está en fase con ella.
3. Retrasa 45°.

Solución

La impedancia equivalente del sistema es:

$$\overline{Z} = R + \mathrm{j}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

La tangente del ángulo es:

$$\tan\theta = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} = \frac{0{,}02\,\omega^2 - 12{,}5\cdot 10^3}{5\,\omega}$$

En esta ecuación, planteamos las condiciones particulares del enunciado:

1. Adelanta 45° a la tensión:

$$\theta = -\pi/4 \quad \rightarrow \quad \tan\theta = -1$$

$$\frac{0{,}02\,\omega^2 - 12{,}5\cdot 10^3}{5\,\omega} = -1$$

$$\omega^2 + 250\,\omega - 62{,}5\cdot 10^4 = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\omega = 675{,}4\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}}$$

(se descarta la solución negativa de la ecuación de 2° grado por carecer de sentido físico)

2. Está en fase con ella:

$$\theta = 0 \quad \rightarrow \quad \tan\theta = 0$$

$$0{,}02\,\omega = \frac{12{,}5\cdot 10^3}{\omega}$$

$$\boxed{\omega = 790{,}6\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}}$$

3. Retrasa 45°:

$$\theta = +\pi/4 \quad \rightarrow \quad \tan\theta = +1$$

$$\frac{0{,}02\,\omega^2 - 12{,}5\cdot 10^3}{5\omega} = 1$$

$$\omega^2 - 250\,\omega - 62{,}5\cdot 10^4 = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\omega = 925{,}4\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}}$$

2.5. Enunciado

Determinar el triángulo de potencias de un circuito al que se le aplica una tensión $u(t) = 340\cdot\cos(\omega t - \pi/3)$ V y por el que circula una intensidad de corriente $i(t) = 13{,}3\cdot\cos(\omega t - 0{,}85)$ A.

Solución

Los fasores de dicha tensión y corriente son:

$$\overline{U} = 170\sqrt{2}\underline{/-60^\circ}\,\mathrm{V}$$
$$\overline{I} = 6{,}65\sqrt{2}\underline{/-48{,}7^\circ}\,\mathrm{A}$$

Por definición, la potencia aparente es:

$$\overline{S} = \overline{U}\cdot\overline{I}^* = 2261\underline{/-11{,}3^\circ}\,\mathrm{VA}$$

que expresada en forma binómica, resulta en los valores de P y Q:

$$P = S\cos\theta = 2217{,}17\,\mathrm{W}$$
$$Q = S\sin\theta = -443{,}03\,\mathrm{VA_r}$$

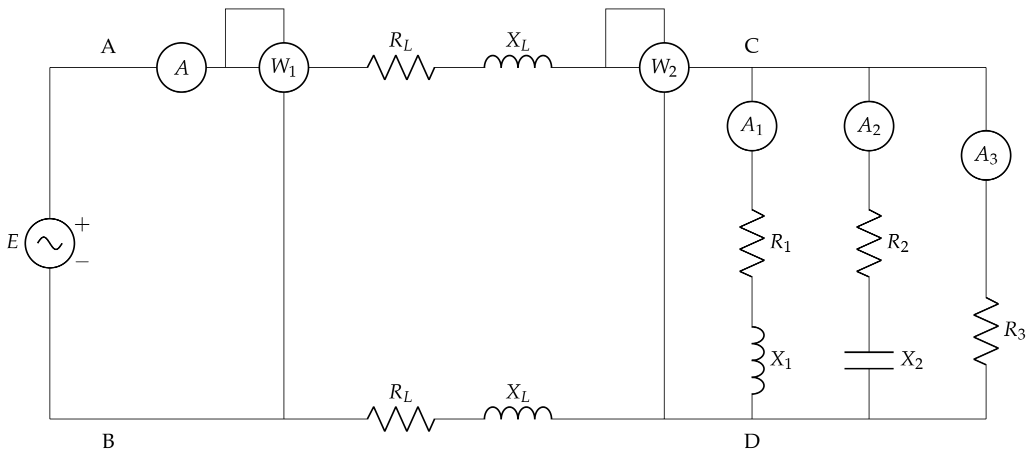
2.6. Enunciado

En el esquema de la figura, los elementos tienen los siguientes valores:

$$R_1 = R_2 = R_3 = 10\,\Omega$$
$$X_1 = X_2 = 1\,\Omega$$
$$R_L = X_L = 1\,\Omega$$

Sabiendo que $U_{CD} = 200\,\mathrm{V}$, se debe calcular:

- Intensidades de corriente I, I_1, I_2 e I_3 en forma fasorial, tomando U_{CD} como referencia de fase
- Lectura de los vatímetros W_1 y W_2



Solución

Se dice que se tome como referencia de fase el fasor $\overline{U}_{CD}$:

$$\overline{U}_{CD} = 200\underline{/0^\circ}\,\mathrm{V}$$

Esta tensión está aplicada en tres ramas en paralelo, por lo que podemos calcular las corrientes en esas ramas. En primer lugar, calculamos las impedancias:

$$\overline{Z}_1 = 10 + \mathrm{j}\,\Omega$$
$$\overline{Z}_2 = 10 - \mathrm{j}\,\Omega$$

A continuación calculamos las corrientes de rama y la corriente total:

$$\overline{I}_1 = \frac{\overline{U}_{CD}}{\overline{Z}_1} = 19{,}8 - 1{,}98\text{j A}$$
$$\overline{I}_2 = \frac{\overline{U}_{CD}}{\overline{Z}_2} = 19{,}8 + 1{,}98\text{j A}$$
$$\overline{I}_3 = \frac{\overline{U}_{CD}}{R_3} = 20\underline{/0^\circ}\text{ A}$$
$$\overline{I} = \overline{I}_1 + \overline{I}_2 + \overline{I}_3 = 59{,}6\underline{/0^\circ}\text{ A}$$

Para obtener la lectura del vatímetro 2, podemos calcular con tensión y corriente:

$$\overline{S}_2 = \overline{U}_{CD} \cdot \overline{I}^* = 11920\underline{/0^\circ}\text{ VA}$$
$$W_2 = \text{Re}\{\overline{S}_2\} = 11\,920\text{ W}$$

O mediante el teorema de Boucherot:

$$P_1 = I_1^2 \cdot R_1 = 3959{,}6\text{ W}$$
$$P_2 = I_2^2 \cdot R_2 = 3959{,}6\text{ W}$$
$$P_3 = I_3^2 \cdot R_3 = 4000\text{ W}$$
$$W_2 = P = P_1 + P_2 + P_3 = 11\,919{,}2\text{ W}$$

Para el vatímetro 1, hay que tener en cuenta la potencia disipada en la línea, y aplicar nuevamente el teorema de Boucherot:

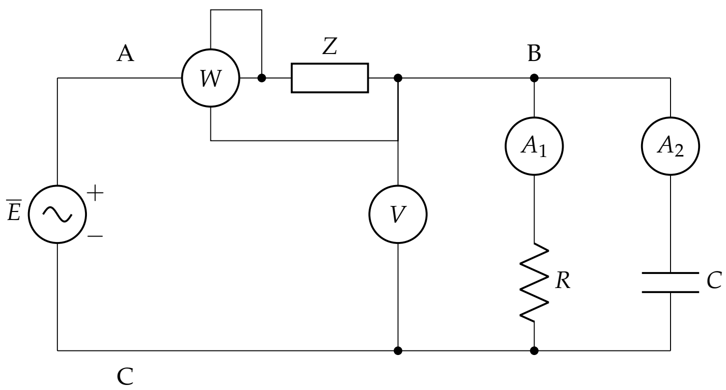
$$P_l = 2 \cdot I^2 \cdot R_L = 7104{,}3\text{ W}$$
$$W_1 = W_2 + P_l = 19\,024{,}3\text{ W}$$

2.7. Enunciado

En el circuito de la figura, los amperímetros A_1 y A_2 marcan 4,5 A y 6 A, respectivamente, el voltímetro, 150 V, y el vatímetro, 900 W.

Sabiendo que la frecuencia del generador es de 250 Hz y el f.d.p. de la impedancia Z es de 0,8 en retraso, calcula:

- Valores de R, C y Z en forma compleja.
- La tensión del generador.
- Triángulo de potencias totales.



Solución

1. Valores de R, C y Z en forma compleja.

$$R = \frac{U_{BC}}{A_1} = \frac{150}{4{,}5} = 33{,}3\,\Omega$$

$$X_c = \frac{U_{BC}}{A_2} = \frac{150}{6} = 25\,\Omega$$

$$C = \frac{1}{X_c\omega} = \frac{1}{25 \cdot 2\pi \cdot 250} = 25{,}46\,\mu\text{F}$$

Tomando $\overline{U}_{BC}$ como origen de fases, $\overline{U}_{BC} = 150\underline{/0}\,\text{V}$, obtenemos:

$$\overline{I}_1 = 4{,}5\underline{/0}\,\text{A}$$
$$\overline{I}_2 = 6\underline{/\pi/2}\,\text{A}$$

Por tanto,

$$\overline{I} = \overline{I}_1 + \overline{I}_2 = 4{,}5 + 6j\,\text{A} = 7{,}5\underline{/53{,}13^\circ}\ \text{A}$$

El vatímetro está midiendo $P_Z = U_Z \cdot I \cdot \cos\theta_Z$, y por tanto:

$$U_Z = \frac{900}{7{,}5 \cdot 0{,}8} = 150\,\text{V}$$

$$Z = \frac{U_Z}{I} = 20\,\Omega$$

También puede obtenerse este resultado calculando primero la parte resistiva de la impedancia:

$$R_Z = \frac{P_Z}{I^2} = 16\,\Omega$$

y a continuación el módulo, teniendo en cuenta que $R = Z \cdot \cos\theta$:

$$Z = \frac{R}{\cos\theta} = \frac{16}{0{,}8} = 20\,\Omega$$

Con su factor de potencia obtenemos el ángulo (teniendo en cuenta que es inductiva al ser en retraso), $\theta_Z = \arccos(0{,}8) = 36{,}87^\circ$:

$$\overline{Z} = 16 + 12j = 20\underline{/36{,}87^\circ}\ \Omega$$

2. Tensión del generador.

$$\overline{U}_{AC} = \overline{U}_{AB} + \overline{U}_{BC}$$
$$\overline{U}_{AB} = \overline{Z} \cdot \overline{I} = 150\underline{/90^\circ}\ \text{V}$$
$$\overline{U}_{AC} = 150 + 150j = 150\sqrt{2}\underline{/45^\circ}\ \text{V}$$

3. Triángulo de potencias totales en forma compleja.

   Podemos calcular a partir de la tensión y la corriente:

$$\begin{aligned}\overline{S}_T &= \overline{U}_{AC}\overline{I}^* = \\ &= 150\sqrt{2}\underline{/45^\circ} \cdot 7{,}5\underline{/-53{,}13^\circ} = \\ &= 1591\underline{/-8{,}13^\circ}\ \text{VA} = \\ &= 1575 - j225\,\text{VA}\end{aligned}$$

o mediante el teorema de Boucherot:

$$P_Z = 900\,\text{W}$$
$$P_R = 4{,}5^2 \cdot 33{,}3 = 675\,\text{W}$$
$$P = P_Z + P_R = 1575\,\text{W}$$

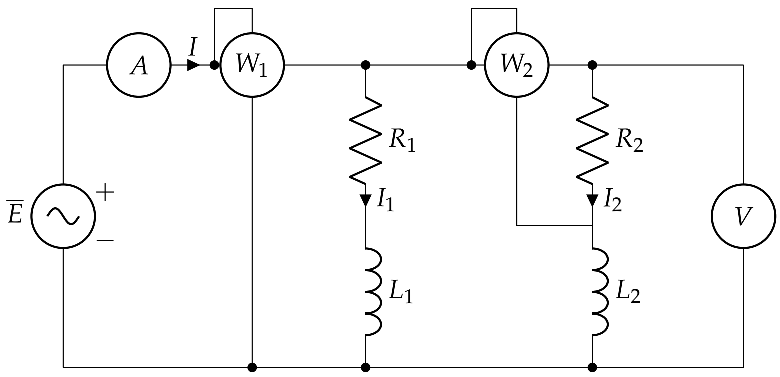
$$Q_Z = 7{,}5^2 \cdot 12 = 675\,\text{VA}_\text{r}$$
$$Q_c = -6^2 \cdot 25 = -900\,\text{VA}_\text{r}$$
$$Q = Q_Z + Q_c = -225\,\text{VA}_\text{r}$$

Por tanto:

$$\overline{S} = P + jQ = 1575 - j225\,\text{VA}$$

2.8. Enunciado

En el circuito de la figura, determinar las lecturas de los aparatos de medida y el balance de potencias activas y reactivas, así como el triángulo global de potencias.
Datos: $e(t) = 100\sqrt{2}\cos(\omega\, t)\,\text{V}$; $R_1 = 2\,\Omega$; $R_2 = 4\,\Omega$; $\omega L_1 = 3\,\Omega$; $\omega L_2 = 4\,\Omega$.



Solución

El voltímetro V mide la tensión eficaz de la fuente, por lo que:

$$V = 100\,\text{V}$$

Las impedancias de las dos ramas son:

$$\overline{Z}_1 = R_1 + jX_1 = 2 + j3\,\Omega$$
$$\overline{Z}_2 = R_2 + jX_2 = 4 + j4\,\Omega$$

Calculamos el valor eficaz de las corrientes de rama:

$$I_1 = \frac{E}{Z_1} = 27{,}74\,\text{A}$$
$$I_2 = \frac{E}{Z_2} = 17{,}68\,\text{A}$$

El vatímetro W_2 mide la potencia de R_2:

$$W_2 = R_2 \cdot I_2^2 = 1250{,}33\,\text{W}$$

El vatímetro W_1 mide la potencia total del circuito:

$$W_1 = P_{R2} + P_{R1} = R_2 \cdot I_2^2 + R_1 \cdot I_1^2 = 2789{,}35\,\text{W}$$

Por otra parte, las potencias reactivas de las bobinas son:

$$Q_{L1} = X_1 \cdot I_1^2 = 2308{,}52\,\mathrm{VA}_r$$
$$Q_{L2} = X_2 \cdot I_2^2 = 1250{,}33\,\mathrm{VA}_r$$

Por tanto, la potencia reactiva total es $Q = 3558{,}82\,\mathrm{VA}_r$. Con el valor de la potencia activa podemos obtener la potencia aparente total:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 4521{,}69\,\mathrm{VA}$$

Y, finalmente, la corriente medida por el amperímetro:

$$I = \frac{S}{V} = 45{,}2\,\mathrm{A}$$

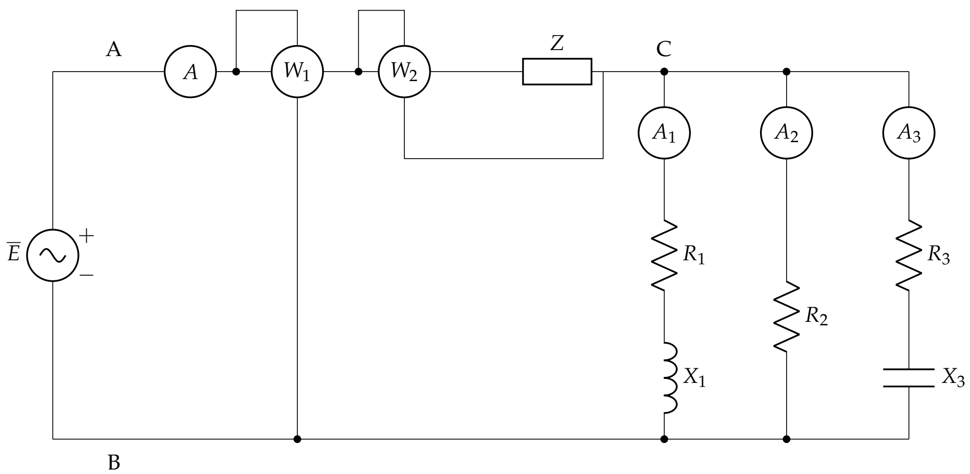
2.9. Enunciado

El circuito de la figura tiene carácter inductivo. La impedancia de línea es $Z = 10\sqrt{2}\,\Omega$ con f.d.p. $\sqrt{2}/2$ en retraso. Tómese como referencia de fases la intensidad total, I.

Se debe calcular:

1. Potencia activa y reactiva consumida por Z.
2. Expresiones complejas de las intensidades medidas por los amperímetros, I, I_1, I_2 e I_3.
3. Expresiones complejas de las tensiones U_{AB}, U_{AC} y U_{CB}.
4. Valores de R_1, X_1, R_2, R_3 y X_3.

Datos: $A = 5\sqrt{5}\,\mathrm{A}$; $A_1 = 5\sqrt{2}\,\mathrm{A}$; $A_2 = 5\,\mathrm{A}$; $A_3 = \sqrt{10}\,\mathrm{A}$; $U_{AB} = 247\,\mathrm{V}$; $W_1 = 2350\,\mathrm{W}$; $R_1 = R_3$



Solución

Dado que disponemos de la potencia y corriente total y la tensión a la entrada, podemos calcular el factor de potencia del circuito:

$$\cos\phi = \frac{P_1}{U_{AB} \cdot I} = 0{,}851$$

Teniendo en cuenta que la corriente total es la referencia de fases,

$$\overline{U}_{AB} = 247\underline{/31{,}68^\circ}\,\mathrm{V}$$

También podemos calcular la potencia reactiva del circuito (positiva dado que el circuito es inductivo):

$$Q = P_1 \tan\phi = 1450{,}2\,\mathrm{VA_r}$$

En cuanto a la impedancia Z, sabemos que la tensión en sus bornes es:

$$\overline{U}_{AC} = \overline{I} \cdot \overline{Z} = 5\sqrt{5}\underline{/0^\circ} \cdot 10\sqrt{2}\underline{/45^\circ} = 50\sqrt{10}\underline{/45^\circ}\,\mathrm{V}$$

Se cumple que $\overline{U}_{AB} = \overline{U}_{AC} + \overline{U}_{CB}$, y por tanto:

$$\overline{U}_{CB} = 100\underline{/10{,}32^\circ}\,\mathrm{V}$$

Por otra parte, podemos descomponer esta impedancia en:

$$R = Z \cdot \cos\phi_Z = 10\,\Omega$$
$$X = Z \cdot \sin\phi_Z = 10\,\Omega$$

y por tanto,

$$P_z = I^2 \cdot R_z = 1250\,\mathrm{W}$$
$$Q_z = I^2 \cdot X_z = 1250\,\mathrm{VA_r}$$

Aplicando el teorema de Boucherot, podemos calcular la potencia activa y la potencia reactiva del circuito paralelo:

$$P_{CB} = P - P_z = 1100\,\mathrm{W}$$
$$Q_{CB} = Q - Q_z = 200{,}2\,\mathrm{VA_r}$$
$$\overline{S}_{CB} = P_{CB} + \mathrm{j}\,Q_{CB} = 1118{,}07\underline{/10{,}32^\circ}\,\mathrm{VA}$$

Podemos comprobar que estos resultados son coherentes con los resultados anteriores, usando $\overline{S}_{CB} = \overline{U}_{CB} \cdot \overline{I}^*$.

Ahora podemos obtener los módulos de R_2, Z_1 y Z_3:

$$R_2 = \frac{U_{CB}}{I_2} = 20\,\Omega$$
$$Z_1 = \frac{U_{CB}}{I_1} = 10\sqrt{2}\,\Omega$$
$$Z_3 = \frac{U_{CB}}{I_3} = 10\sqrt{10}\,\Omega$$

Por otra parte, la potencia activa del circuito paralelo es:

$$P_{CB} = P_1 + P_2 + P_3 = 1100\,\mathrm{W}$$
$$P_1 = I_1^2 \cdot R_1 = 50 \cdot R_1$$
$$P_2 = I_2^2 \cdot R_2 = 500\,\mathrm{W}$$
$$P_3 = I_3^2 \cdot R_3 = 10 \cdot R_3$$

Dado que sabemos que $R_1 = R_3$:

$$P_1 + P_3 = (50 + 10) \cdot R_1 = 600\,\mathrm{W} \quad \rightarrow \quad R_1 = R_3 = 10\,\Omega$$

Con este resultado, y teniendo en cuenta el módulo de Z_1 y Z_3, podemos calcular las respectivas reactancias:

$$R_1 = 10\,\Omega$$
$$X_1 = \sqrt{(10\sqrt{2})^2 - 10^2} = 10\,\Omega$$
$$\overline{Z}_1 = 10 + 10j = 10\sqrt{2}\underline{/45^\circ}\,\Omega$$

$$R_3 = 10\,\Omega$$
$$X_3 = \sqrt{(10\sqrt{10})^2 - 10^2} = 30\,\Omega$$
$$\overline{Z}_3 = 10 - 30j = 10\sqrt{10}\underline{/-71{,}56^\circ}\,\Omega$$

Podemos comprobar que estas soluciones concuerdan con la potencia reactiva de cada impedancia y con la total del circuito paralelo:

$$Q_1 = I_1^2 \cdot X_1 = 500\,\mathrm{VA_r}$$
$$Q_3 = -I_3^2 \cdot X_3 = -300\,\mathrm{VA_r}$$
$$Q_{CB} = Q_1 + Q_3 = 200\,\mathrm{VA_r}$$

Con estos resultados, recordando que $\overline{U}_{CB} = 100\angle 10{,}32^\circ$ podemos calcular las corrientes de rama en forma compleja:

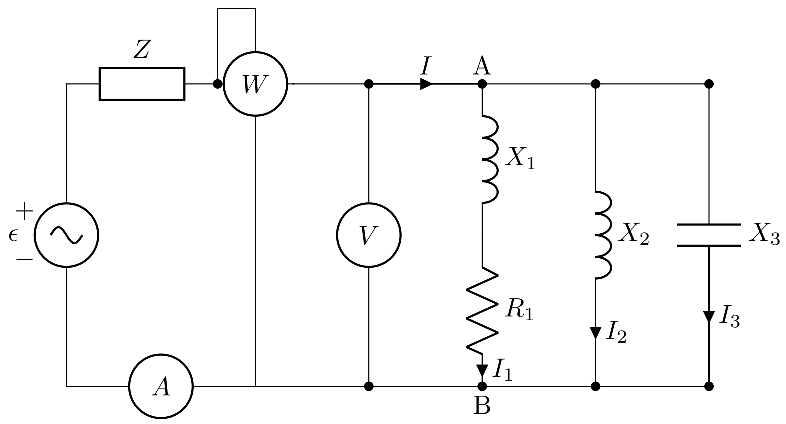
$$\overline{I}_1 = 5\sqrt{2}\angle -34{,}68^\circ\,\mathrm{A}$$
$$\overline{I}_2 = 5\angle 10{,}32^\circ\,\mathrm{A}$$
$$\overline{I}_3 = \sqrt{10}\angle 81{,}89^\circ\,\mathrm{A}$$

Para terminar, podemos comprobar que $\overline{I} = \overline{I}_1 + \overline{I}_2 + \overline{I}_3$.

2.10. Enunciado

La potencia reactiva del circuito de la figura es $80\,\mathrm{VA_r}$ de tipo capacitivo. La tensión en la impedancia Z está en fase con la intensidad I_1 y las lecturas de los aparatos son $A = 4\,\mathrm{A}$, $V = 50\,\mathrm{V}$, $W = 200\,\mathrm{W}$. Sabiendo que $R_1 = 10\,\Omega$ y $X_2 = 50\,\Omega$, calcula:

1. Las corrientes I_1, I_2, I_3 en forma fasorial.
2. Las reactancias X_1, X_3, y la impedancia $\overline{Z}$.
3. La fuerza electromotriz $\overline{\epsilon}$.



Solución

El vatímetro está midiendo la potencia activa del circuito paralelo conectado entre A y B. El único elemento que consume potencia activa en ese circuito es la resistencia R_1. Por tanto,

$$P_{R1} = 200 = I_1^2 R_1 \rightarrow I_1 = 2\sqrt{5}\,\mathrm{A}$$

Dado que conocemos la tensión entre A y B, podemos determinar la impedancia de la rama 1:

$$Z_1 = \frac{V_{AB}}{I_1} = 5\sqrt{5}\,\Omega$$

y, por tanto, obtenemos X_1:

$$Z_1 = \sqrt{R_1^2 + X_1^2} \rightarrow X_1 = 5\,\Omega$$

$$\overline{Z}_1 = 10 + j5 = 5\sqrt{5}\,\Omega$$

Para obtener las corrientes en forma fasorial necesitamos una referencia de fases, y será la tensión U_{AB}:

$$\overline{U}_{AB} = 50\angle\,\mathrm{V}$$

Además, del circuito AB conocemos la tensión, la corriente y la potencia, luego podemos obtener su factor de potencia:

$$\cos\theta_{AB} = \frac{P_{AB}}{I \cdot U_{AB}} = 1$$

Por tanto,

$$\overline{I} = 4\angle\,\mathrm{A}$$

Con $\overline{U}_{AB}$ podemos calcular el ángulo de la corriente I_1:

$$\overline{I}_1 = \frac{\overline{U}_{AB}}{\overline{Z}_1} = 2\sqrt{5}\angle\,\mathrm{A}$$

De la misma forma podemos calcular la corriente I_2:

$$\overline{I}_2 = \frac{\overline{U}_{AB}}{jX_2} = 1\angle\,\mathrm{A}$$

Mediante la LKC podemos obtener la corriente en la rama 3:

$$\overline{I} = \overline{I}_1 + \overline{I}_2 + \overline{I}_3 \rightarrow \overline{I}_3 = 3\underline{/\pi/2}\,\mathrm{A}$$

Aplicamos el teorema de Boucherot para obtener la reactancia de la rama 3, teniendo que en cuenta que $\cos(\theta_{AB}) = 1 \rightarrow Q_{AB} = 0$:

$$\begin{aligned} Q &= Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0 \\ Q_1 &= I_1^2 X_1 = 100\,\mathrm{VA_r} \\ Q_2 &= I_2^2 X_2 = 50\,\mathrm{VA_r} \\ Q_3 &= -I_3^2 X_3 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$Q_3 = -150\,\mathrm{VA_r} \rightarrow X_3 = \frac{50}{3}\,\Omega$$

Una forma alternativa de calcular X_3 es simplemente a partir del cociente entre tensión y corriente:

$$\overline{Z}_3 = \frac{\overline{U}_{AB}}{\overline{I}_3} = jX_3$$

Para determinar $\overline{Z}$ tenemos en cuenta que la potencia reactiva total es $80\,\mathrm{VA_r}$ de tipo capacitivo y que $Q_{AB} = 0\,\mathrm{VA}_r$:

$$Q = Q_Z + Q_{AB} \rightarrow Q_Z = -80\,\mathrm{VA_r}$$

Por tanto:

$$X_Z = \frac{|Q_Z|}{I^2} = 5\,\Omega$$

Por otra parte, el enunciado indica que la tensión en esta impedancia está en fase con la intensidad I_1. Por tanto, $\theta_{VZ} = -26{,}56^\circ$, y $\theta_Z = \theta_{VZ} - \theta_I = -25{,}56^\circ$. Con este ángulo podemos calcular el valor de la resistencia:

$$R_Z = \frac{X_Z}{|\tan\theta_Z|} = 10\,\Omega$$

$$\overline{Z} = 10 - j5\,\Omega$$

Finalmente, para calcular la fuerza electromotriz podemos hacerlo de dos formas, mediante potencias o mediante tensiones:

Mediante el teorema de Boucherot calculamos la potencia activa:

$$P = P_Z + P_{AB} = I^2 R_Z + 200 = 360\,\mathrm{W}$$

Y con la potencia reactiva Q obtenemos la potencia aparente:

$$\overline{S} = P + jQ = 360 - j80\,\mathrm{VA}$$

y la tensión:

$$\overline{\epsilon} = \frac{\overline{S}}{\overline{I}^*} = 90 - j20 = 10\sqrt{85}\,\mathrm{V}$$

Podemos llegar a este mismo resultado con un balance de tensiones:

$$\overline{\epsilon} = \overline{U}_Z + \overline{U}_{AB} = \overline{Z} \cdot \overline{I} + \overline{V}_{AB}$$

2.11. Enunciado

Un motor monofásico de $S = 10\,\mathrm{kVA}$ y $fdp = 0{,}8$ está alimentado por una fuente de 230 V a $f = 50\,\mathrm{Hz}$. Calcula:

1. El valor eficaz de la corriente absorbida por el motor.
2. La potencia aparente del generador.
3. La capacidad del condensador necesario para compensar el factor de potencia a la unidad.
4. El valor eficaz de la corriente absorbida por el conjunto condensador-motor.
5. La potencia aparente del generador necesario una vez conectado el condensador del tercer apartado.
6. Compara de forma razonada los resultados de los apartados 4 y 5 con los valores calculados en los apartados 1 y 2.

Solución

1. El valor eficaz de la corriente absorbida por el motor.

$$\overline{S}_m = \overline{U} \cdot \overline{I}^*$$
$$I = \frac{10\,000}{230} = 43{,}5\,\mathrm{A}$$

2. La potencia aparente del generador. Suponemos línea ideal (sin pérdidas):

$$S_g = S_m = 10\,\mathrm{kVA}$$

3. La capacidad del condensador necesario para compensar el factor de potencia a la unidad.

$$Q_m = S \cdot \sin(\theta_m) = 6\,\mathrm{kVA_r}$$
$$Q_c = Q_m$$
$$C = \frac{Q_m}{\omega \cdot V^2} = 361\,\mathrm{\mu F}$$

4. El valor eficaz de la corriente absorbida por el conjunto condensador-motor.

$$Q' = 0\,\mathrm{VA_r}$$
$$S' = P_m = 8\,\mathrm{kVA}$$
$$I' = \frac{S'}{V} = 34{,}8\,\mathrm{A}$$

5. La potencia aparente del generador necesario una vez conectado el condensador del tercer apartado.

$$S'_g = S' = 8\,\mathrm{kVA}$$

6. Compara de forma razonada los resultados de los apartados 4 y 5 con los valores calculados en los apartados 1 y 2.

   La compensación de reactiva mediante la inserción del condensador ha reducido la corriente que circula por la línea y la potencia del generador en un 20 %.

2.12. Enunciado

Un generador de corriente alterna monofásica ($f = 50\,\mathrm{Hz}$) alimenta a dos cargas a través de una línea de cobre. Esta línea, de resistividad $\rho = 21\,\mathrm{m\Omega\,mm^2/m}$, tiene una longitud de 100 m y una sección de 16 mm^2. Las dos cargas, cuya tensión de alimentación es de 230 V, son dos motores, uno con potencia de 7 kW y f.d.p. de 0,65, y otro con una potencia de 5 kW y f.d.p. de 0,85. Con esta información, se pide calcular:

- Triángulo de potencias de cada carga y del conjunto de ambas.
- Valor eficaz de las corrientes en cada carga y de la corriente total.
- Triángulo de potencias del generador.
- Valor eficaz de la tensión en bornes del generador.
- Capacidad del condensador a instalar en bornes de las cargas para mejorar el factor de potencia a 0,95.
- Valor eficaz de la corriente entregada por el generador una vez instalado el condensador.
- Triángulo de potencias del generador una vez instalado el condensador.

Solución

Las potencias del motor 1 son:

$$P_1 = 7000\,\mathrm{W}$$
$$Q_1 = P_1\,\tan(\phi_1) = 7000 \cdot \tan(\arccos(0{,}65)) = 8183{,}91\,\mathrm{VA_r}$$
$$S_1 = \frac{P_1}{\cos(\phi_1)} = \frac{7000}{0{,}65} = 10\,769{,}23\,\mathrm{VA}$$

y las del motor 2:

$$P_2 = 5000\,\mathrm{W}$$
$$Q_2 = P_2\,\tan(\phi_2) = 5000 \cdot \tan(\arccos(0{,}85)) = 3098{,}72\,\mathrm{VA_r}$$
$$S_2 = \frac{P_2}{\cos(\phi_2)} = \frac{5000}{0{,}85} = 5882{,}53\,\mathrm{VA}$$

Por el teorema de Boucherot, la potencia total de las cargas es:

$$P_T = P_1 + P_2 = 12\,000\,\mathrm{W}$$
$$Q_T = Q_1 + Q_2 = 11\,282{,}63\,\mathrm{VA_r}$$
$$S_T = \sqrt{P_T^2 + Q_T^2} = 16\,471{,}12\,\mathrm{VA}$$

por lo que la instalación conjunta tiene un f.d.p. de:

$$\text{f.d.p.}_{total} = \frac{P_T}{S_T} = \frac{12000}{16471{,}12} = 0{,}7285$$

Usando la definición de potencia activa, se obtienen los valores eficaces de las corrientes:

$$I_1 = \frac{P_1}{U\,\cos(\phi_1)} = \frac{7000}{230 \cdot 0{,}65} = 46{,}82\,\mathrm{A}$$
$$I_2 = \frac{P_2}{U\,\cos(\phi_2)} = \frac{5000}{230 \cdot 0{,}85} = 25{,}58\,\mathrm{A}$$
$$I_T = \frac{P_T}{U\,\cos(\phi_T)} = \frac{12000}{230 \cdot 0{,}7285} = 71{,}62\,\mathrm{A}$$

La resistencia de cada conductor de la línea es:

$$R_l = \rho\,\frac{l}{S} = 21 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{100}{16} = 0{,}13\,\Omega$$

Así, las pérdidas en la línea son:

$$P_l = 2 \cdot R_l \cdot I^2 = 1346{,}2\,\mathrm{W}$$

y el triángulo de potencias del generador, por el teorema de Boucherot:

$$P_g = P_l + P_T = 13\,346{,}23\,\mathrm{W}$$
$$Q_g = Q_T = 11\,282{,}63\,\mathrm{VA_r}$$
$$S_g = \sqrt{P_g^2 + Q_g^2} = 17\,476{,}26\,\mathrm{VA}$$

por lo que la tensión a la salida del generador es:

$$U_g = \frac{S_g}{I} = 244{,}4\,\mathrm{V}$$

Para mejorar el factor de potencia, se sabe que la potencia reactiva inicial es $11\,282{,}63\,\mathrm{VA_r}$. Puesto que se quiere un f.d.p.′ de 0,95, la potencia reactiva final será:

$$Q'_T = P_T\,\tan(\phi') = 12000 \cdot \tan(\arccos(0{,}95)) = 3944{,}21\,\mathrm{VA_r}$$

siendo la potencia reactiva restante la generada por la batería de condensadores ($Q_C = Q'_T - Q_T = 3944{,}21 - 11282{,}63 = -7338{,}42\,\mathrm{VA_r}$). Por tanto, la capacidad del condensador equivalente a instalar es:

$$Q_c = X_c\,I^2 = \frac{U^2}{X_c} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{Q}{\omega\,U^2} = \frac{7338{,}42}{2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 230^2} = 441{,}57\,\mu\mathrm{F}$$

A este mismo resultado se llegaría a partir de la expresión:

$$C = \frac{P_T\,[\tan(\phi) - \tan(\phi')]}{\omega U^2} = \frac{12000\,[\tan(\arccos(0{,}7285)) - \tan(\arccos(0{,}95))]}{2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 230^2} = 441{,}66\,\mu\mathrm{F}$$

Una vez instalado el condensador, la potencia aparente es:

$$S'_T = \sqrt{P_T^2 + Q_T'^2} = \sqrt{12000^2 + 3944{,}21^2} = 12\,631{,}58\,\mathrm{VA}$$

siendo la corriente total en las cargas (entregada por el generador):

$$I' = \frac{S'}{U} = \frac{12631{,}58}{230} = 54{,}92\,\mathrm{A}$$

Con esta corriente, las pérdidas en la línea se reducen a:

$$P'_l = 2 \cdot R_l \cdot I'^2 = 791{,}76\,\mathrm{W}$$

y el triángulo de potencias del generador, por el teorema de Boucherot:

$$\begin{aligned} P'_g &= P'_l + P_T = 12\,791{,}75\,\mathrm{W} \\ Q'_g &= Q'_T = 3944{,}21\,\mathrm{VA_r} \\ S'_g &= \sqrt{P'^2_g + Q'^2_g} = 13\,386{,}02\,\mathrm{VA} \end{aligned}$$

2.13. Enunciado

Un generador de corriente alterna monofásica ($f = 50\,\mathrm{Hz}$) alimenta a dos cargas a través de una línea de cobre. Esta línea, de resistividad $\rho = 0{,}017\,\Omega/(\mathrm{mm^2\,m})$, tiene una longitud de 40 m y una sección de 6 mm^2. Las dos cargas, cuya tensión de alimentación es de 200 V, son:

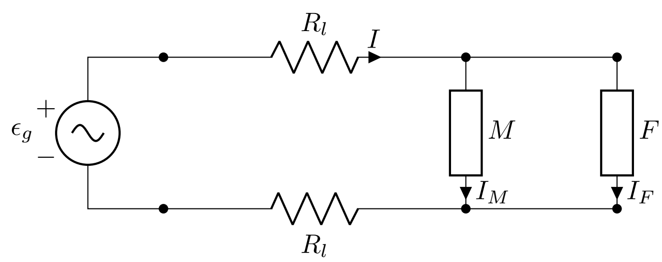
1. Un motor de 7 kW con f.d.p. 0,7.
2. Un grupo de lámparas fluorescentes con potencia total 200 W y f.d.p. 0,5.

Se pide:

- Esquema del circuito señalando adecuadamente los elementos, corrientes y tensiones
- Potencias activa, reactiva y aparente de cada carga
- Valor eficaz de las corrientes en cada carga, y de la corriente total
- Potencia activa y reactiva entregada por el generador
- Valor eficaz de la tensión en bornes del generador
- Capacidad necesaria a instalar en bornes de las cargas para mejorar el factor de potencia de las mismas a la unidad
- Valor eficaz de la tensión en bornes del generador, y potencia aparente entregada por el mismo una vez instalada la capacidad determinada en el apartado anterior

Solución

1. El esquema del circuito es el mostrado en la figura.



2. Potencias activa, reactiva y aparente de cada carga.

$$
\begin{aligned}
P_M &= 7000\,\mathrm{W} \\
Q_M &= 7141{,}4\,\mathrm{VA}_r \\
S_M &= 10\,000\,\mathrm{VA} \\
P_F &= 200\,\mathrm{W} \\
Q_F &= 346{,}4\,\mathrm{VA}_r \\
S_F &= 400\,\mathrm{VA}
\end{aligned}
$$

3. Valor eficaz de las corrientes en cada carga, y de la corriente total.

$$
\begin{aligned}
I_M &= S_M/V = 50\,\mathrm{A} \\
I_F &= S_F/V = 2\,\mathrm{A}
\end{aligned}
$$

Por teorema de Boucherot la potencia total en cargas es:

$$
\begin{aligned}
P_T &= 7200\,\mathrm{W} \\
Q_T &= 7487{,}8\,\mathrm{VA}_r \\
S_T &= 10\,387{,}9\,\mathrm{VA}
\end{aligned}
$$

Y, por tanto, la corriente total es:

$$I = S_T/U = 51{,}9\,\mathrm{A}$$

4. Potencia activa y reactiva entregada por el generador. La resistencia de la línea (una resistencia por cada conductor) es:

$$R_L = \rho L/S = 0{,}113\,\Omega$$

La potencia activa disipada en la línea es:

$$P_L = 2 \cdot I^2 R_L = 611{,}48\,\mathrm{W}$$

Por tanto, la potencia entregada por el generador es:

$$
\begin{aligned}
P_g &= P_L + P_T = 7811{,}5\,\mathrm{W} \\
Q_g &= Q_T = 7487{,}8\,\mathrm{VA}_r \\
S_g &= 10\,820{,}7\,\mathrm{VA}
\end{aligned}
$$

5. Valor eficaz de la tensión en bornes del generador.

$$U_g = S_g/I = 208{,}3\,\mathrm{V}$$

6. Capacidad necesaria a instalar en bornes de las cargas para mejorar el factor de potencia de las mismas a la unidad.

$$C = \frac{Q_t}{\omega V^2} = 595{,}9\,\mu\mathrm{F}$$

7. Valor eficaz de la tensión en bornes del generador, y potencia aparente entregada por el mismo una vez instalada la capacidad determinada en el apartado anterior.

   Una vez instalado este condensador, la corriente total en las cargas es:

$$I' = P_T/V = 36\,\text{A}$$

La potencia disipada en la línea es ahora:

$$P'_L = 2 \cdot I'^2 R_L = 293{,}8\,\text{W}$$

Y la potencia entregada por el generador es:

$$\begin{aligned} P'_g &= 7493{,}8\,\text{W} \\ Q'_g &= 0\,\text{VA}_r \\ S'_g &= 7493{,}8\,\text{VA} \end{aligned}$$

Por tanto, la tensión en bornes del generador es:

$$U'_g = S'_g/I' = 208{,}2\,\text{V}$$

2.14. Enunciado

Un generador de corriente alterna ($f = 50\,\text{Hz}$) alimenta una instalación eléctrica a través de una línea de cobre ($\rho = 0{,}017\,\Omega\,\text{mm}^2/\text{m}$) de $25\,\text{mm}^2$ de sección. La instalación eléctrica está compuesta por un motor de $S_m = 10\,\text{kVA}$ y fdp $= 0{,}8$, una instalación de alumbrado fluorescente de $P_f = 800\,\text{W}$ y fdp $= 0{,}9$, y diversas cargas electrónicas con una potencia conjunta $P_e = 540\,\text{W}$ y fdp $= 0{,}5$ en retraso.

Suponiendo que las cargas trabajan a su tensión nominal de 230 V y que están situadas a 100 m del generador, calcule:

1. Triángulo de potencias total de las cargas (P_T, Q_T, S_T) y factor de potencia.
2. Valor eficaz de la corriente que circula por la línea.
3. Potencia disipada en la línea.
4. Triángulo de potencias del generador (P_g, Q_g, S_g) y factor de potencia.
5. Valor eficaz de la tensión de salida del generador.
6. Capacidad del banco de condensadores a instalar en bornes de la carga necesario para reducir la corriente que circula por la línea a un valor de 45 A.

Independientemente del resultado obtenido, suponga que la capacidad instalada es $C = 172\,\mu\text{F}$. En estas condiciones, calcule:

7. Potencia aparente de las cargas (incluyendo al banco de condensadores)
8. Valor eficaz de la corriente que circula por la línea y potencia disipada en la misma.
9. Triángulo de potencias del generador y factor de potencia.
10. Tensión de trabajo del generador.

Solución

1. Triángulo de potencias total de las cargas (P_T, Q_T, S_T) y factor de potencia.

   Motor:

$$\begin{aligned} P_m &= 8000\,\text{W} \\ Q_m &= 6000\,\text{VA}_r \end{aligned}$$

Alumbrado

$$\begin{aligned} P_f &= 800\,\mathrm{W} \\ Q_f &= 387{,}5\,\mathrm{VA}_r \end{aligned}$$

Cargas Electrónicas

$$\begin{aligned} P_e &= 540\,\mathrm{W} \\ Q_e &= 935{,}3\,\mathrm{VA}_r \end{aligned}$$

Total (Teorema de Boucherot)

$$\begin{aligned} P_T &= P_m + P_f + P_e = 9340\,\mathrm{W} \\ Q_T &= Q_m + Q_f + Q_e = 7322{,}8\,\mathrm{VA}_r \end{aligned}$$

Por tanto, $S_T = 11\,868{,}4\,\mathrm{VA}$ y $\mathrm{fdp}_T = 0{,}787$.

2. Valor eficaz de la corriente que circula por la línea.

$$I = \frac{S_T}{U} = \frac{11868{,}4}{230} = 51{,}6\,\mathrm{A}$$

3. Potencia disipada en la línea.

$$\begin{aligned} R &= 0{,}068\,\Omega \\ P_L &= 2 \cdot I^2 \cdot R = 362{,}1\,\mathrm{W} \end{aligned}$$

4. Triángulo de potencias del generador (P_g, Q_g, S_g) y factor de potencia.

$$\begin{aligned} P_g &= P_T + P_L = 9702{,}1\,\mathrm{W} \\ Q_g &= Q_T = 7322{,}8\,\mathrm{VA}_r \\ S_g &= 12\,155{,}4\,\mathrm{VA} \\ \mathrm{fdp} &= 0{,}798 \end{aligned}$$

5. Valor eficaz de la tensión de salida del generador.

$$U_g = \frac{S_g}{I} = 235{,}6\,\mathrm{V}$$

6. Capacidad del banco de condensadores a instalar en bornes de la carga necesario para reducir la corriente que circula por la línea a un valor de 45 A.

   Si la corriente en línea se reduce a 45 A la potencia aparente resultante en cargas (incluyendo al condensador) es $S'_T = 230 \cdot 45 = 10\,350\,\mathrm{VA}$. Por tanto, $Q'_T = 4459{,}5\,\mathrm{VA}_r$. Así, es necesario instalar un banco de condensadores que aporte $Q_c = Q_T - Q'_T = 2863{,}3\,\mathrm{VA}_r$.

$$C = \frac{Q_c}{\omega U^2} = 172{,}3\,\mu\mathrm{F}$$

Independientemente del resultado obtenido, suponga que la capacidad instalada es $C = 172\,\mu\mathrm{F}$. En estas condiciones, calcule:

7. Potencia aparente de las cargas (incluyendo al banco de condensadores)

$$S'_T = \sqrt{P_T^2 + Q_T'^2} = 10\,350{,}1\,\mathrm{VA}$$

8. Valor eficaz de la corriente que circula por la línea y potencia disipada en la misma.

$$I' = \frac{S'_T}{U} = 45\,\mathrm{A}$$

$$P'_L = 2 \cdot I'^2 \cdot R = 275{,}4\,\mathrm{W}$$

9. Triángulo de potencias del generador y factor de potencia.

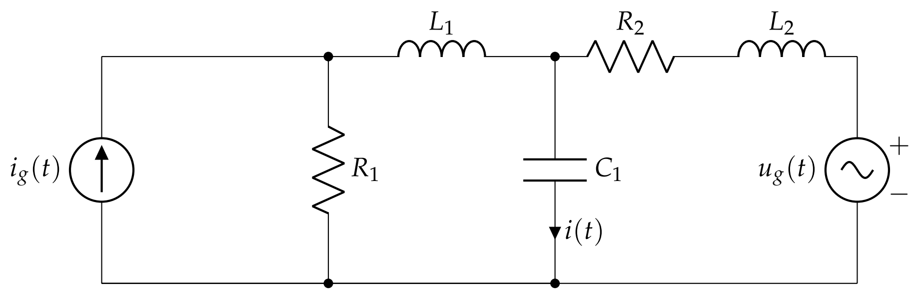
$$\begin{aligned} P'_g &= P_T + P'_L = 9615{,}4\,\mathrm{W} \\ Q'_g &= Q'_T = 4459{,}5\,\mathrm{VA}_r \\ S'_g &= 10\,599{,}2\,\mathrm{VA} \end{aligned}$$

10. Tensión de trabajo del generador.

$$U'_g = \frac{S'_g}{I'} = 235{,}5\,\mathrm{V}$$

2.15. Enunciado

Calcular la corriente $i(t)$ del circuito de la figura.



Datos: $i_g(t) = 10\sqrt{2}\sin(100t)\mathrm{A}$; $R_1 = R_2 = 1\,\Omega$; $L_1 = L_2 = 0{,}01\,\mathrm{H}$; $C_1 = 0{,}01\,\mathrm{F}$; $u_g(t) = 10\sqrt{2}\cos(100t)\mathrm{V}$

Solución

En primer lugar, se deben indicar las dos expresiones de tensión y corriente en una misma función senoidal. En este caso, se opta por pasar la corriente a función coseno:

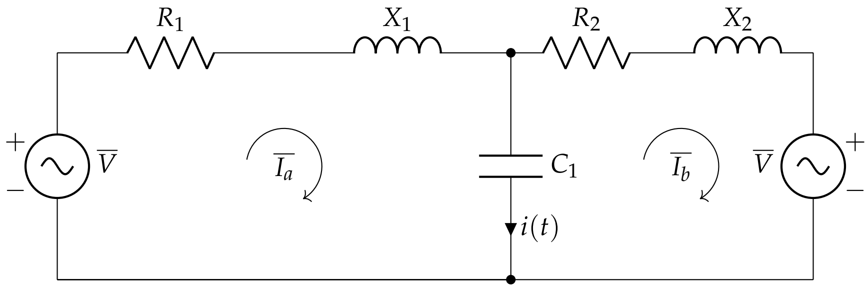
$$\begin{aligned} u(t) &= \sqrt{2}\,10\,\cos(100\,t)V \Rightarrow \overline{U} = 10\underline{/0^\circ}V \\ i(t) &= \sqrt{2}\,10\,\cos(100\,t - \frac{\pi}{2})A \Rightarrow \overline{I} = 10\underline{/-90^\circ}A \end{aligned}$$

Se transforma la fuente de corriente en una fuente de tensión en serie con la resistencia de 1Ω:

$$\overline{U_{Ig}} = \overline{I}\,R_1 = (10\underline{/-90^\circ}) \cdot 1 = 10\underline{/-90^\circ}V$$

y estableciendo corrientes de malla como se muestra en la siguiente figura, se puede plantear el sistema de ecuaciones en forma matricial tras determinar el valor de las imepdancias:

$$\begin{aligned} \overline{X_L} &= \mathrm{j}\omega\,L = \mathrm{j}100 \cdot 0{,}01 = \mathrm{j}\Omega \\ \overline{X_C} &= -\mathrm{j}\frac{1}{\omega\,C} = -\mathrm{j}\frac{1}{100 \cdot 0{,}01} = -\mathrm{j}\Omega \end{aligned}$$



$$\begin{bmatrix} 1+\mathrm{j}-\mathrm{j} & -(-\mathrm{j}) \\ -(-\mathrm{j}) & 1+\mathrm{j}-\mathrm{j} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \overline{I_a} \\ \overline{I_b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10\angle{-90^\circ} \\ -10\angle{0^\circ} \end{bmatrix}$$

cuya solución es:

$$\overline{I_a} = 0\,A$$
$$\overline{I_b} = -10\,A$$

Dado que la corriente $i(t)$ se relaciona con las corrientes de malla por:

$$\overline{I} = \overline{I_a} - \overline{I_b} = 0 - (-10) = 10\,A$$

siendo su expresión temporal:

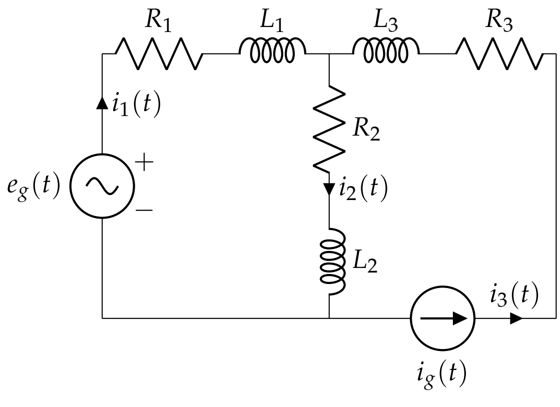
$$i(t) = \sqrt{2}\,10\,\cos(100\,t)\,A$$

2.16. Enunciado

Del circuito de la figura, obtener:

- Expresiones analíticas de las intensidades $i_1(t)$ e $i_2(t)$.
- Potencia disipada por todas las resistencias.

Datos: $e_g(t) = 50\sqrt{2}\cos(1000\,t)$ V; $i_g(t) = 10$ A; $R_1 = R_2 = 2\Omega$; $R_3 = 7\Omega$; $L_1 = L_2 = 1$ mH; $L_3 = 2$ mH



Solución

En el circuito hay dos fuentes funcionando a diferentes frecuencias. Por tanto, hay que resolver mediante el principio de superposición.

Circuito cuando solo actúa $i_g(t)$

La fuente $e_g(t)$ se cortocircuita y se deja únicamente la fuente $i_g(t)$. Al ser una fuente de continua, las bobinas se cortocircuitan. Queda un circuito de dos mallas, donde se sabe que $I_3' = 10$ A. Resolviendo el circuito (dos opciones: 1) por nudos; 2) aplicando directamente divisor de corriente), se obtiene que:

$$I_1' = -5\,\mathrm{A}$$
$$I_2' = 5\,\mathrm{A}$$

Las potencias en este caso:

$$\begin{aligned} P'_{R1} &= R_1 \cdot I'^2_1 = 2 \cdot (-5)^2 = 50\,\mathrm{W} \\ P'_{R2} &= R_2 \cdot I'^2_2 = 2 \cdot 5^2 = 50\,\mathrm{W} \\ P'_{R3} &= R_3 \cdot I'^2_3 = 7 \cdot 10^2 = 700\,\mathrm{W} \end{aligned}$$

Circuito cuando solo actúa $e_g(t)$

La fuente $i_g(t)$ queda como un circuito abierto; por tanto, queda un circuito de una malla e $I''_3 = 0$ A. Se calculan las reactancias de las bobinas L_1 y L_2, sabiendo que $\omega = 1000$ rad/s:

$$\overline{X}_{L1} = \overline{X}_{L2} = \mathrm{j}\omega L = \mathrm{j}\,1000 \cdot 0{,}001 = \mathrm{j}\,\Omega$$

Por la ley de Ohm, tomando valores eficaces, se obtiene el valor de $\overline{I}''_1 = \overline{I}''_2$:

$$\overline{I}''_1 = \overline{I}''_2 = \frac{\overline{U}}{\overline{Z}_{eq}} = \frac{50\underline{/0^\circ}}{2+\mathrm{j}+2+\mathrm{j}} = \underbrace{5\sqrt{5}}_{11{,}18}\underline{/-26{,}57^\circ}\ \mathrm{A}$$

Las potencias en este caso:

$$\begin{aligned} P''_{R1} &= R_1 \cdot I''^2_1 = 2 \cdot (5\sqrt{5})^2 = 250\,\mathrm{W} \\ P''_{R2} &= R_2 \cdot I''^2_2 = 2 \cdot (5\sqrt{5})^2 = 250\,\mathrm{W} \\ P''_{R3} &= R_3 \cdot I''^2_3 = 7 \cdot 0^2 = 0\,\mathrm{W} \end{aligned}$$

Por tanto, las expresiones de $i_1(t)$ e $i_2(t)$ son:

$$\begin{aligned} i_1(t) &= -5 + 5\sqrt{10}\cos(1000t - 0{,}46)\ \mathrm{A} \\ i_2(t) &= 5 + 5\sqrt{10}\cos(1000t - 0{,}46)\ \mathrm{A} \end{aligned}$$

Y la potencia activa total disipada por las resistencias, debido a la ortogonalidad de las señales implicadas (continua y alterna senoidal), es:

$$\begin{aligned} P_T &= R_1\,(I'^2_1 + I''^2_1) + R_2\,(I'^2_2 + I''^2_2) + R_3\,(I'^2_3 + I''^2_3) = \\ &= 2 \cdot ((-5)^2 + (5\sqrt{5})^2) + 2 \cdot (5^2 + (5\sqrt{5})^2) + 7 \cdot (10^2 + 0^2) = 1300\,\mathrm{W} \end{aligned}$$

Dado que ya habíamos calculado las potencias disipadas por cada componente de la corriente, y dada la ortogonalidad de estas señales, podemos obtener el mismo valor como:

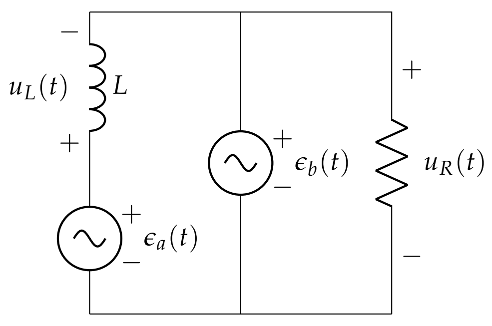
$$P_T = P'_{R1} + P'_{R2} + P'_{R3} + P''_{R1} + P''_{R2} + P''_{R3} = 50 + 50 + 700 + 250 + 250 + 0 = 1300\,\mathrm{W}$$

2.17. Enunciado

En el circuito de la figura, determina:

- $u_R(t)$ y $u_L(t)$.
- Balance de potencias activas.

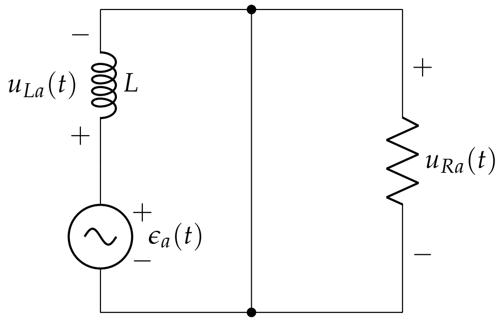
Datos: $e_a(t) = 3\sqrt{2}\sin(10^3 t)$ V; $e_b(t) = 30\sqrt{2}\sin(10^4 t)$ V; $R = 30\,\Omega$; $L = 3\,\mathrm{mH}$



Solución

Dado que las fuentes trabajan a frecuencias diferentes, hay que resolver mediante superposición.

Cortocircuitamos una de las fuentes:

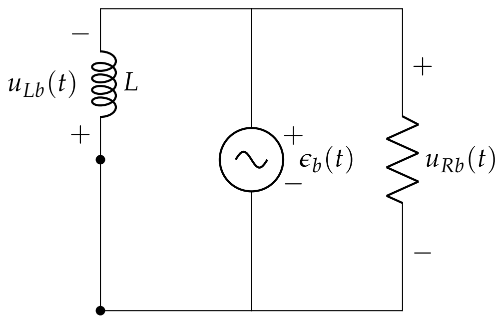


La resistencia está cortocircuitada. Por tanto:

$$u_{Ra}(t) = 0\,\mathrm{V}$$
$$u_{La}(t) = \epsilon_a(t)$$

En este circuito la potencia disipada por la resistencia es $P_{Ra} = 0\,\mathrm{W}$ y, en consecuencia, la potencia entregada por el generador es $P_{\epsilon_a} = 0\,\mathrm{W}$.

Hacemos el análisis con la otra fuente:



En este circuito:

$$u_{Rb}(t) = \epsilon_b(t)$$
$$u_{Lb}(t) = -\epsilon_b(t)$$

El balance de potencia activa es:

$$P_{Rb} = \frac{\epsilon_b^2}{R_b} = 30\,\mathrm{W} = P_{\epsilon_b}$$

Por tanto:

$$u_R(t) = u_{Ra}(t) + u_{Rb}(t) = 30\sqrt{2}\sin(10^4 t)\,\mathrm{V}$$
$$u_L(t) = u_{La}(t) + u_{Lb}(t) = 3\sqrt{2}\sin(10^3 t) - 30\sqrt{2}\sin(10^4 t)\,\mathrm{V}$$

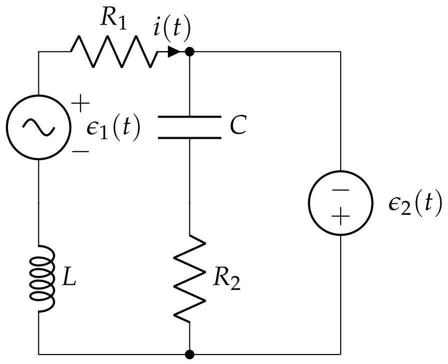
Además, dado que las dos señales de los generadores son ortogonales, podemos sumar las potencias calculadas en cada circuito:

$$P_R = P_{Ra} + P_{Rb} = 30\,\mathrm{W}$$
$$P_\epsilon = P_{\epsilon_a} + P_{\epsilon_b} = 30\,\mathrm{W}$$

2.18. Enunciado

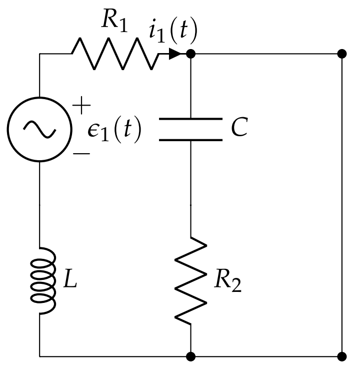
El circuito de la figura se encuentra en régimen permanente. Determinar analíticamente la expresión de $i(t)$, así como las potencias activas entregadas por los generadores y disipadas por las resistencias R_1 y R_2.

Datos: $e_1(t) = 50\sin(1000t)$ V; $e_2(t) = 30$ V; $R_1 = 6\,\Omega$; $R_2 = 6\,\Omega$; $L = 8$ mH; $C = 10\,\mu$F



Solución

Aplicamos superposición.
Analizamos con la fuente de corriente alterna:



La rama $R_2 - C$ está cortocircuitada y, por tanto, podemos prescindir de ella:

$$\overline{Z}_1 = R_1 + jX_L = 6 + 8j\text{A}$$
$$\overline{I}_1 = \overline{e}_1/\overline{Z}_1 = 5\sqrt{2}/2\underline{/-53{,}13^\circ}\text{A}$$

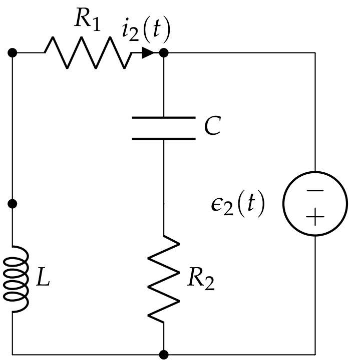
En el dominio del tiempo obtenemos:

$$i_1(t) = 5\sin(1000t - 0{,}9273)\text{A}$$

En cuanto al balance de potencias:

$$P_{R11} = I_1^2 R_1 = 75\,\text{W}$$
$$P_{R21} = 0\,\text{W}$$
$$P_{\epsilon_1} = \Re(\overline{\epsilon}_1 \cdot \overline{I}_1^*) = 75\,\text{W}$$

Analizamos con la fuente de corriente continua:



En este circuito sustituimos la bobina por un cortocircuito y el condensador por un circuito abierto. En consecuencia:

$$i_2(t) = \epsilon_2(t)/R_1 = 5\,\mathrm{A}$$

En cuanto al balance de potencias:

$$\begin{aligned} P_{R12} &= I_2^2 \cdot R_1 = 150\,\mathrm{W} \\ P_{R22} &= 0\,\mathrm{W} \\ P_{\epsilon 2} &= \epsilon_2 \cdot I_2 = 150\,\mathrm{W} \end{aligned}$$

Por tanto:

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) = 5 + 5\sin(1000t - 0{,}9273)\mathrm{A}$$

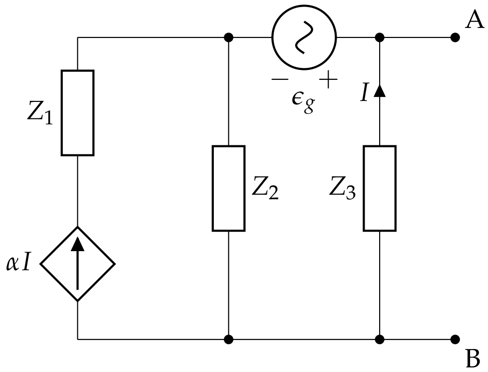
Además, como las señales son ortogonales, podemos hacer el balance de potencias conjunto con los dos circuitos:

$$\begin{aligned} P_{R1} &= P_{R11} + P_{R12} = 225\,\mathrm{W} \\ P_{R2} &= P_{R21} + P_{R22} = 0\,\mathrm{W} \\ P_{\epsilon} &= P_{\epsilon 1} + P_{\epsilon 2} = 225\,\mathrm{W} \end{aligned}$$

2.19. Enunciado

Obtén el equivalente de Thévenin del circuito de la figura respecto de A y B, así como la impedancia a conectar en estos terminales para obtener la máxima potencia posible.

Datos: $\overline{\epsilon}_g = 12 - 16j\,\mathrm{V}$; $\overline{Z}_1 = 1 - j\,\Omega$; $\overline{Z}_2 = 1 + j\,\Omega$; $\overline{Z}_3 = 5 + 3j\,\Omega$; $\alpha = 2$



Solución

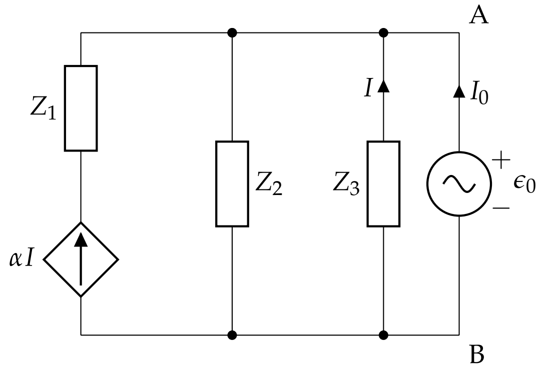
Dejamos el circuito en abierto y calculamos la tensión en AB:

$$\overline{U}_{AB} = \overline{\epsilon}_g + (1+\alpha)\overline{I} \cdot \overline{Z}_2$$
$$\overline{U}_{AB} = -\overline{I} \cdot \overline{Z}_3$$

Combinando estas ecuaciones obtenemos la tensión:

$$\overline{\epsilon}_{th} = \overline{U}_{AB} = \frac{\overline{\epsilon}_g}{1 + (1+\alpha)\dfrac{\overline{Z}_2}{\overline{Z}_3}} = 6 - 10j = 11{,}66\underline{/-59{,}04^\circ}\,\mathrm{V}$$

Para obtener la impedancia equivalente, apagamos las fuentes independientes. Como hay fuentes dependientes, debemos aplicar una fuente de prueba a la salida del circuito, con fuerza electromotriz $\overline{\epsilon}_0$ y corriente inyectada $\overline{I}_0$:



$$\overline{\epsilon}_0 = [(1+\alpha)\overline{I} + \overline{I}_0] \cdot \overline{Z}_2$$
$$\overline{\epsilon}_0 = -\overline{I} \cdot \overline{Z}_3$$

Combinando ambas expresiones obtenemos:

$$\overline{Z}_{th} = \frac{\overline{\epsilon}_0}{\overline{I}_0} = \frac{\overline{Z}_2 \cdot \overline{Z}_3}{(1+\alpha)\overline{Z}_2 + \overline{Z}_3} = 0{,}64 + 0{,}52j\,\Omega$$

Para obtener la máxima potencia disponible hay que conectar una impedancia igual a:

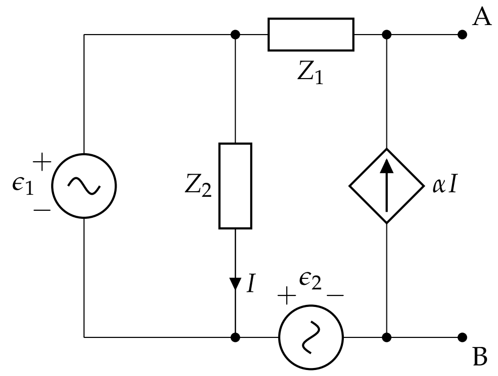
$$\overline{Z}_L = \overline{Z}_{th}^* = 0{,}64 - 0{,}52j\,\Omega$$

Esta impedancia disipará una potencia:

$$P_L = \frac{\epsilon_{th}^2}{4 \cdot R_{th}} = 53{,}11\,\mathrm{W}$$

2.20. Enunciado

Obtén el generador equivalente de Thévenin del circuito de la figura respecto de A y B. A partir de este equivalente, calcula la impedancia a colocar en AB para obtener la máxima potencia, calculando también dicha potencia.



Datos:

$$\overline{\epsilon}_1 = 10\underline{/0}\,\mathrm{V}$$
$$\overline{\epsilon}_2 = 10j\,\mathrm{V}$$
$$\overline{Z}_1 = 4 - 3j\,\Omega$$
$$\overline{Z}_2 = 3 + 4j\,\Omega$$
$$\alpha = 2$$

Solución

La tensión en circuito abierto es:

$$\overline{U}_{AB} = \alpha \overline{I} \cdot \overline{Z}_1 + \overline{\epsilon}_1 + \overline{\epsilon}_2$$

siendo $\overline{\epsilon}_1 = \overline{Z}_2 \cdot \overline{I}$. Por tanto:

$$\overline{\epsilon}_{th} = \alpha \cdot \overline{\epsilon}_1 \cdot \frac{\overline{Z}_1}{\overline{Z}_2} + \overline{\epsilon}_1 + \overline{\epsilon}_2 = 10 - 10j\,\mathrm{V}$$

Para obtener la impedancia equivalente, apagamos las fuentes independientes. Al apagar la fuente ϵ_1, la impedancia Z_2 queda cortocircuitada y, por tanto, $I = 0$. En consecuencia, la fuente dependiente también queda apagada y obtenemos:

$$\overline{Z}_{th} = \overline{Z}_1 = 4 - 3j\,\Omega$$

Para obtener la máxima potencia debemos conectar la impedancia:

$$\overline{Z}_L = \overline{Z}_{th}^* = 4 + 3j\,\Omega$$

El balance de potencias es:

$$P_L = \frac{\epsilon_{th}^2}{4 \cdot R_{th}} = 12{,}5\,\mathrm{W}$$
$$P_\epsilon = 2 \cdot P_L = 25\,\mathrm{W}$$

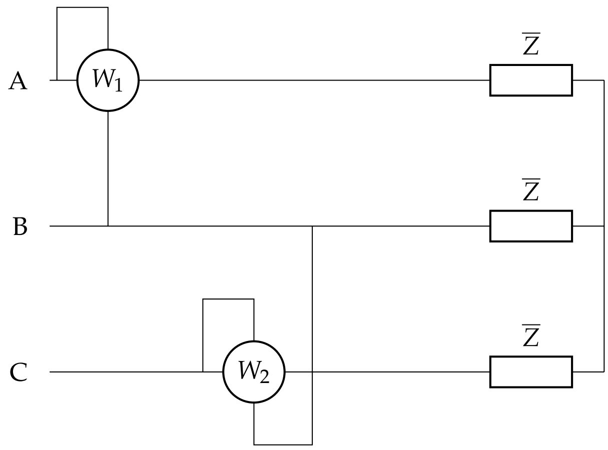
Capítulo 3

Corriente alterna trifásica

3.1. Enunciado

El receptor trifásico de la figura tiene secuencia de fases inversa y tensión de línea $200\sqrt{3}$ V. Su potencia activa es 12 kW, y el vatímetro 2 (W_2) indica 6 kW. Hallar:

- Valor de la impedancia $\overline{Z}$, en forma compleja.
- Fasores correspondientes a las intensidades de línea.



Solución

El receptor está conectado en estrella a tres hilos (sin neutro). Al ser secuencia de fases inversa, se tiene que al principio de la línea:

$$\overline{U}_{AB} = 200\sqrt{3}\underline{/-120^\circ} \text{ V}$$
$$\overline{U}_{BC} = 200\sqrt{3}\underline{/0^\circ} \text{ V}$$
$$\overline{U}_{CA} = 200\sqrt{3}\underline{/120^\circ} \text{ V}$$
$$\overline{U}A = 200\underline{/-90^\circ} \text{ V}$$
$$\overline{U}_B = 200\underline{/30^\circ} \text{ V}$$
$$\overline{U}_C = 200\underline{/150^\circ} \text{ V}$$

La potencia activa del receptor es 12000 W, por lo que:

$$P_T = 3 \cdot R_f \cdot I_f^2 = 3 \cdot \frac{U_f^2}{R_f} \quad \rightarrow \quad R_f = 3 \cdot \frac{U_f^2}{P_T} = 3 \cdot \frac{200^2}{12000} = 10 \ \Omega/\text{fase}$$

Dado que se trata de un receptor equilibrado, por el método de los dos vatímetros, se cumple que:

$$P_T = W_1 + W_2 \quad \rightarrow \quad W_1 = P_T - W_2 = 12000 - 6000 = 6000 \text{ W}$$

Con esto se puede obtener la potencia reactiva consumida por la carga. Al tratarse de una secuencia inversa:

$$Q_T = \sqrt{3}\,(W_1 - W_2) = \sqrt{3}\cdot(6000 - 6000) = 0 \text{ VAr}$$

Por lo que la impedancia $\overline{Z}$ es puramente resistiva de valor $\overline{Z} = 10\underline{/0°}\Omega/\text{fase}$.

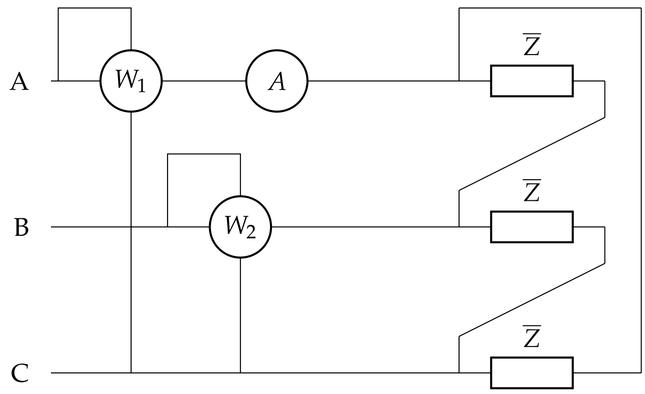
A partir de la tensión de fase, y aplicando la ley de Ohm, se puede obtener la intensidad de fase que circula por el receptor (igual a la de línea, por estar en estrella)[1]:

$$\overline{I}_A = \frac{\overline{U}_A}{\overline{Z}} = \frac{200\underline{/-90}}{10} = 20\underline{/-90°} \text{ A}$$
$$\overline{I}_B = \frac{\overline{U}_B}{\overline{Z}} = \frac{200\underline{/30}}{10} = 20\underline{/30°} \text{ A}$$
$$\overline{I}_C = \frac{\overline{U}_C}{\overline{Z}} = \frac{200\underline{/150}}{10} = 20\underline{/150°} \text{ A}$$

3.2. Enunciado

En el sistema trifásico de la figura, de secuencia de fases directa y $f = 60$ Hz, el receptor equilibrado disipa una potencia total $P_T = 51\,984$ W con un factor de potencia de 0,6 en retraso. Sabiendo que el amperímetro indica $76\sqrt{3}$ A, determinar:

- Lecturas de los vatímetros 1 y 2
- Valor de la impedancia $\overline{Z}$ en forma compleja
- Capacidad mínima para mejorar el factor de potencia a 0,95



Solución

Las tres impedancias están conectadas en triángulo. El amperímetro mide el módulo de la corriente de línea $\overline{I}_A$. Dado que se conoce el factor de potencia $\cos(\varphi) = 0{,}6$ (en retraso), se tiene que $\varphi = +53{,}1301°$. Por el método de los dos vatímetros:

$$P_T = W_1 + W_2 = 51\,984 = \sqrt{3}\,U_L\,I_L\,\cos\phi \quad \rightarrow \quad U_L = \frac{P_T}{\sqrt{3}\,I_L\,\cos\phi} = \frac{51\,984}{\sqrt{3}\cdot 76\sqrt{3}\cdot 0{,}6} = 380 \text{ V}$$

por lo que:

$$W_1 = U_L\,I_L\,\cos(\phi - 30°) = 380\cdot 76\sqrt{3}\cdot\cos(53{,}1301° - 30°) = 46\,000{,}65\,\text{W}$$
$$W_2 = U_L\,I_L\,\cos(\phi + 30°) = 380\cdot 76\sqrt{3}\cdot\cos(53{,}1301° + 30°) = 5983{,}35\,\text{W}$$

[1] Con el módulo de I_L, podría determinarse también el valor de $\overline{Z}$ considerando la medida de W_2. Según el método de los dos vatímetros, se sabe que $W_2 = U_L\,I_L\,\cos(\theta + 30°) = 200\sqrt{3}\cdot 20\cdot\cos(\theta + 30°) = 6000 \Rightarrow \theta = 0° \Rightarrow \overline{Z} = 10\Omega/\text{fase}$

Considerando la referencia de tensiones para SFD:

$$\overline{U}_{AB} = 380\angle 120^\circ\,\text{V} \qquad \overline{U}_{BC} = 380\angle 0^\circ\,\text{V} \qquad \overline{U}_{CA} = 380\angle -120^\circ\,\text{V}$$

El módulo de las corrientes de fase es:

$$I_f = \frac{I_L}{\sqrt{3}} = \frac{76\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 76\,\text{A}$$

y, dado que $\phi = \theta_U - \theta_I \rightarrow \theta_I = \theta_U - \phi$, se tiene que las corrientes de fase son:

$$\overline{I}_{AB} = 76\angle 66{,}87^\circ\,\text{A} \qquad \overline{I}_{BC} = 76\angle -53{,}13^\circ\,\text{A} \qquad \overline{I}_{CA} = 76\angle -173{,}13^\circ\,\text{A}$$

Por tanto, el valor de la impedancia $\overline{Z}$ es:

$$\overline{Z} = \frac{\overline{U}_{AB}}{\overline{I}_{AB}} = \frac{\overline{U}_{BC}}{\overline{I}_{BC}} = \frac{\overline{U}_{CA}}{\overline{I}_{CA}} = 5\angle 53{,}1301^\circ\,\Omega = 3 + \mathrm{j}\,4\,\Omega$$

Al indicarse que la capacidad para mejorar el factor de potencia debe ser la mínima, se opta por una configuración en triángulo para el banco de condensadores. La potencia reactiva inicial Q_T es:

$$Q_T = P \cdot \tan(\phi) = 51\,984 \cdot \tan(53{,}1301^\circ) = 69\,312\,\text{VA}_\text{r}$$

El nuevo factor de potencia es $\cos\phi' = 0{,}95 \rightarrow \phi' = 18{,}1949^\circ$, siendo la potencia reactiva Q'_T:

$$Q'_T = P \cdot \tan(\phi') = 51\,984 \cdot \tan(18{,}1949^\circ) = 17\,086{,}34\,\text{VA}_\text{r}$$

Por tanto, la potencia reactiva que genera la batería de condensadores a conectar es:

$$Q_C = Q'_T - Q_T = 17\,086{,}34 - 69\,312 = -52\,225{,}66\,\text{VA}_\text{r}$$

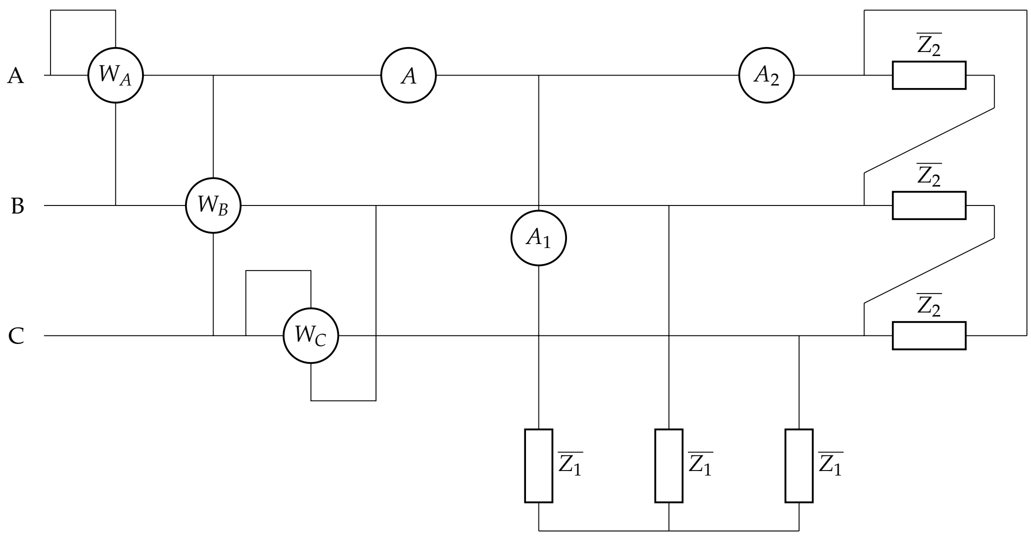
teniendo una capacidad C (conectada en triángulo, $C_\triangle$) de:

$$C_\triangle = \frac{|Q_C|}{3 \cdot \omega \cdot U^2} = \frac{52\,225{,}66}{3 \cdot 2\,\pi\,60 \cdot 380^2} = 319{,}8\,\mu\text{F}$$

3.3. Enunciado

En el sistema trifásico de la figura, de secuencia de fases inversa y tensión de línea $200\sqrt{3}$ V, los dos receptores son equilibrados, con impedancias $\overline{Z}_1 = 6 + \mathrm{j}\,8\,\Omega$ y $\overline{Z}_2 = 8 + \mathrm{j}\,6\,\Omega$. Determinar:

- Lecturas de los amperímetros.
- Lecturas de los vatímetros y la potencia compleja total.



Solución

Las impedancias $\overline{Z}_1$ están conectadas en estrella, mientras que las $\overline{Z}_2$ lo están en triángulo; entre ellas, están conectadas en paralelo.

El amperímetro A_1 mide la corriente de línea que va a la impedancia $\overline{Z}_{1,A}$ (módulo de $\overline{I}_{1,A}$). Puesto que se tiene la tensión de fase $\overline{U}_A$ y el valor de la impedancia de $\overline{Z}_1$, la corriente $\overline{I}_{1,A}$ es:

$$I_{1,A} = \frac{U_f}{Z_1} = 20\,\text{A}$$

por lo que el amperímetro A_1 marca 20 A.

El amperímetro A_2 mide la corriente de línea que va a la impedancia $\overline{Z}_{2,A}$ (módulo de $\overline{I}_{2,A}$). La corriente que circula por esta impedancia (corriente de fase) es:

$$I_{2f} = \frac{U}{Z_2} = 20\sqrt{3}\,\text{A}$$

Por tanto, el amperímetro A_2, que marca el módulo de la corriente de línea $I_{2,A}$:

$$I_{2,A} = \sqrt{3} \cdot I_{2f} = 60\,\text{A}$$

por lo que el amperímetro A_2 marca 60 A.

El amperímetro A mide la corriente de línea I_A. Se puede obtener su valor mediante la LKC, para lo que sería necesario obtener los fasores de las corrientes I_{1A} e I_{2A} o, de forma más sencilla, mediante el Teorema de Boucherot. Las potencias de cada carga y total son:

- Carga $\overline{Z}_1$:

$$P_1 = 3 \cdot R_1 \cdot I_{f,1}^2 = 3 \cdot 6 \cdot 20^2 = 7200\,\text{W}$$
$$Q_1 = 3 \cdot X_1 \cdot I_{f,1}^2 = 3 \cdot 8 \cdot 20^2 = 9600\,\text{VA}_\text{r}$$

- Carga $\overline{Z}_2$:

$$P_2 = 3 \cdot R_2 \cdot I_{f,2}^2 = 3 \cdot 8 \cdot (20\sqrt{3})^2 = 28\,800\,\text{W}$$
$$Q_2 = 3 \cdot X_2 \cdot I_{f,2}^2 = 3 \cdot 6 \cdot (20\sqrt{3})^2 = 21\,600\,\text{VA}_\text{r}$$

- Total:

$$P_T = P_1 + P_2 = 7200 + 28\,800 = 36\,000\,\text{W}$$
$$Q_T = Q_1 + Q_2 = 9600 + 21\,600 = 31\,200\,\text{VA}_\text{r}$$
$$\overline{S}_T = P_T + j\,Q_T = 36\,000 + \text{j}\,31\,200 = 47\,638{,}64\underline{/40{,}9144^\circ}\ \text{VA}$$

Por tanto, teniendo en cuenta que $S_T = \sqrt{3}\,U \cdot I$, obtenemos la corriente de línea (lectura del amperímetro A):

$$I = \frac{47\,638{,}6}{\sqrt{3} \cdot 200\sqrt{3}} = 79{,}4\,\text{A}$$

El vatímetro W_A mide la corriente de línea A (I_A) y la tensión de línea U_{AB}; el vatímetro W_B mide la corriente de línea B (I_B) y la tensión de línea $U_{AC} = -U_{CA}$; por último, el vatímetro W_C mide la corriente de línea C (I_C) y la tensión de línea U_{BC}.

Por el método de los dos vatímetros, W_A y W_C miden la potencia total:

$$P_T = W_A + W_C = 36\,000\,\text{W}$$
$$Q_T = \sqrt{3} \cdot (W_A - W_C) = 31\,200\,\text{VA}_\text{r}$$

Por tanto:

$$W_A = 27\,007{,}43\,\text{W}$$
$$W_C = 8993{,}58\,\text{W}$$

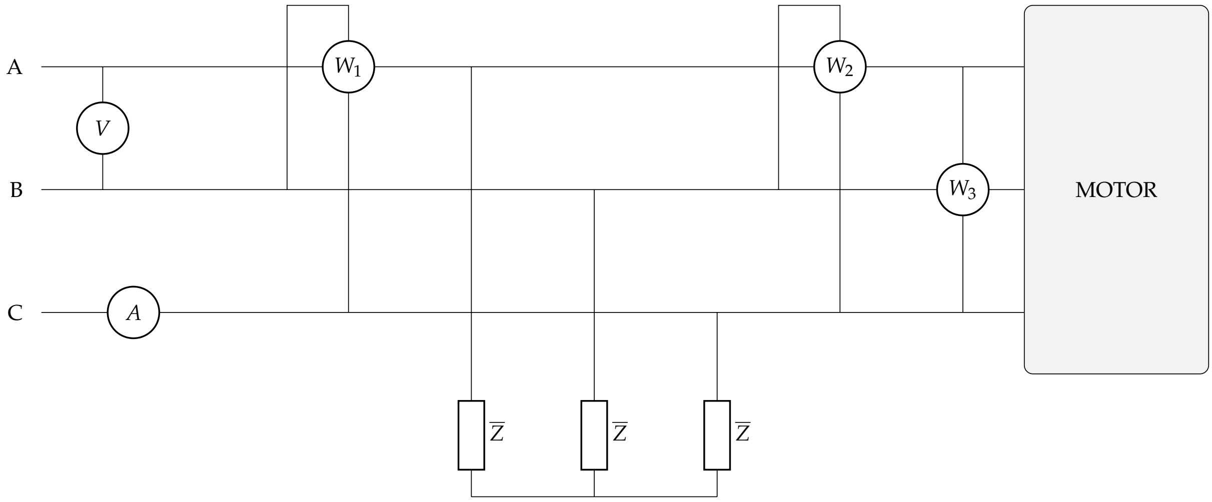
Por otra parte, el vatímetro W_B mide la potencia reactiva total entre $\sqrt{3}$:

$$W_B = \frac{Q_T}{\sqrt{3}} = 18\,013{,}85\,\text{W}$$

3.4. Enunciado

El sistema trifásico de la figura es de 380 V a 50 Hz y secuencia de fases inversa. $\overline{Z}$ es un elemento pasivo ideal, tal que el factor global de potencia es la unidad. El motor es de 1,8 CV, rendimiento 90 % y factor de potencia 0,8. Determinar:

- Impedancia $\overline{Z}$ en forma compleja.
- Intensidad en el motor.
- Fasores intensidad de línea.
- Lectura de los aparatos de medida: V, A, W_1, W_2 y W_3.



Solución

El motor tiene una potencia útil de 1.8 CV que, en W:

$$P_u = 1{,}8 \cdot 746 = 1342{,}8 \text{ W}$$

Su potencia activa, considerando el rendimiento, es:

$$P_M = \frac{P_u}{\eta} = \frac{1342{,}8}{0{,}9} = 1492 \text{ W}$$

Al ser secuencia de fases inversa, se tiene que al principio de la línea:

$$\begin{aligned}
\overline{U}_{AC} &= 380\underline{/-120^\circ} \text{ V}\\
\overline{U}_{BC} &= 380\underline{/0^\circ} \text{ V}\\
\overline{U}_{CA} &= 380\underline{/120^\circ} \text{ V}\\
\overline{U}_{A} &= 220\underline{/-90^\circ} \text{ V}\\
\overline{U}_{B} &= 220\underline{/30^\circ} \text{ V}\\
\overline{U}_{C} &= 220\underline{/150^\circ} \text{ V}
\end{aligned}$$

Se sabe que el factor de potencia global es 1. Dado que el motor tiene un comportamiento inductivo, con factor de potencia de 0,8, y la impedancia $\overline{Z}$ es un elemento pasivo ideal, esta debe ser una batería de condensadores conectados en estrella que mejoren el factor de potencia a 1. La potencia reactiva del motor Q_M es:

$$Q_M = P_M \cdot \tan(\phi_M) = 1492 \cdot \tan(36{,}8699^\circ) = 1119 \text{ VAr}$$

El factor de potencia global es $\cos\phi = 1 \rightarrow \phi = 0^\circ$, siendo la potencia reactiva Q_T:

$$Q_T = P_M \cdot \tan(\phi) = 1492 \cdot \tan(0) = 0 \text{ VAr}$$

Por tanto, la potencia reactiva que genera la batería de condensadores (impedancia $\overline{Z}$) es:

$$Q_Z = Q_T - Q_M = 0 - 1119 = -1119 \text{ VAr}$$

que, al estar conectados en estrella, tienen una impedancia de:

$$Q_Z = 3 \cdot \frac{U_f^2}{Z} \quad \rightarrow \quad Z = 3 \cdot \frac{U_f^2}{Q_Z} = 3 \cdot \frac{220^2}{-1119} = -129{,}76\ \Omega \quad \rightarrow \quad \overline{Z} = -\mathrm{j}\,129{,}76\ \Omega/\text{fase}$$

La intensidad en el motor es:

$$I_M = \frac{P_M}{\sqrt{3}\,U_L\,\cos(\phi_M)} = \frac{1492}{\sqrt{3} \cdot 380 \cdot 0{,}8} = 2{,}83\text{ A}$$

Dado que los condensadores no consumen potencia activa, las intensidades de línea se pueden calcular a partir de la potencia activa consumida por el motor, y el factor de potencia global de la instalación:

$$I_L = \frac{P_T}{\sqrt{3} \cdot U_L \cdot \cos(\phi)} = \frac{1492}{\sqrt{3} \cdot 380 \cdot 1} = 2{,}27\text{ A}$$

que, en forma fasorial, teniendo en cuenta que $\phi' = 0°$:

$$\overline{I}_A = 2{,}27\underline{/-90°}\text{ A}$$
$$\overline{I}_B = 2{,}27\underline{/30°}\text{ A}$$
$$\overline{I}_C = 2{,}27\underline{/150°}\text{ A}$$

El voltímetro V mide el módulo de la tensión $\overline{U}_{AB} \rightarrow V = 380$ V. El amperímetro A mide el módulo de la corriente $\overline{I}_C \rightarrow A = 2{,}27$ A. El vatímetro W_1 mide la corriente $\overline{I}_A$ y la tensión $\overline{U}_{BC}$, por lo que:

$$W_1 = U_{BC} \cdot I_A \cdot \cos(\theta_{U_{BC}} - \theta_{I_A}) = 380 \cdot 2{,}27 \cdot \cos(0 - (-90°)) = 0\text{ W}$$

También podemos obtener este valor teniendo en cuenta que, por la conexión que tiene, y al tratarse de SFI, está midiendo $-Q_T/\sqrt{3}$. Al tener la instalación en su conjunto un $\cos(\phi) = 0$, la potencia reactiva total es $Q_T = 0$, por lo que $W_1 = 0$ W.

El vatímetro W_2 mide la corriente $\overline{I}_{A,M}$ y la tensión $\overline{U}_{BC}$. El ángulo de $\overline{I}_{A,M}$, considerando que el motor está conectado en estrella, es $\theta_{I_{A,M}} = \theta_{U_{A,M}} - \phi_M = -90° - (-36{,}8699°) = 126{,}8699°$, por lo que:

$$W_2 = U_{BC} \cdot I_{A,M} \cdot \cos(\theta_{U_{BC}} - \theta_{I_{A,M}}) = 380 \cdot 2{,}83 \cdot \cos(0 - 126{,}8699°) = -645{,}24\text{ W}$$

Como alternativa, viendo la conexión que tiene, y al tratarse de SFI, se sabe que está midiendo $-Q_M/\sqrt{3}$. Al tener el motor una $Q_M = 1119$ VAr, $W_2 = -1119/\sqrt{3} = -646{,}05$ W.

Por último, el vatímetro W_3 mide el módulo de la corriente $\overline{I}_{B,M}$ y de la tensión $\overline{U}_{AC}$. El ángulo de $\overline{I}_{B,M}$, considerando que el motor está conectado en estrella, es $\theta_{I_{B,M}} = \theta_{U_{B,M}} - \phi_M = 30° - (-36{,}8699°) = 66{,}8699°$; y el ángulo de $\overline{U}_{AC} = -\overline{U}_{CA} = 380\underline{/-60°}$ V, por lo que:

$$W_3 = U_{AC} \cdot I_{B,M} \cdot \cos(\theta_{U_{AC}} - \theta_{I_{B,M}}) = 380 \cdot 2{,}83 \cdot \cos(-60° - 66{,}8699°) = 645{,}24\text{ W}$$

De otra forma, por la conexión que tiene, y al tratarse de SFI, se sabe que está midiendo $Q_M/\sqrt{3}$, por lo que $W_3 = 1119/\sqrt{3} = 646{,}05$ W.

3.5. Enunciado

Una plantación agrícola emplea dos bombas sumergibles para extraer agua de un pozo y transportarla a través de un sistema de riego por goteo. Estas dos bombas están alimentadas a 400 V por una línea trifásica en secuencia de fases directa y frecuencia 50 Hz. Una de las bombas funciona con un motor trifásico de 30 kW y factor de potencia de 0,78. La otra bomba trabaja con un motor de 7,5 kW y factor de potencia de 0,67. La línea que alimenta estas dos bombas es resistiva, con resistividad $\rho = 0{,}017\ \Omega\,\text{mm}^2/\text{m}$, longitud de 300 m y una sección de 35 mm^2.

1. Calcula el triángulo de potencias (potencia activa, reactiva, y aparente) de cada carga, y total de las cargas (a la salida de la línea).
2. Calcula el valor eficaz de la corriente de línea de cada carga y de la corriente total.
3. Determina la lectura de los siguientes aparatos de medida conectados a la entrada de las cargas:
   - Un vatímetro en la fase A, midiendo tensión entre las fases A y C.
   - Un vatímetro en la fase B, midiendo tensión entre las fases B y C.
   - Un vatímetro en la fase C, midiendo tensión entre las fases B y A.
4. Calcula el triángulo de potencias a la entrada de la línea.
5. Calcula el valor eficaz de la tensión a la entrada de la línea.
6. Calcula los condensadores que se deben conectar a la salida de la línea para mejorar el factor de potencia del sistema hasta la unidad. Indica modo de conexión más eficiente.

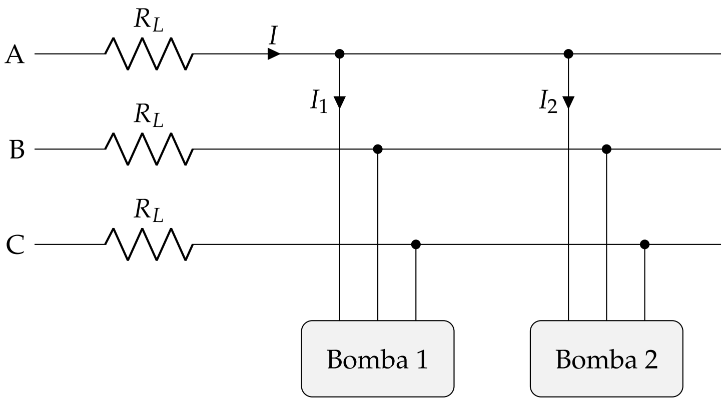
Una vez conectados los condensadores del último apartado:

7. Calcula el valor eficaz de la corriente de línea total.
8. Calcula el triángulo de potencias a la entrada de la línea.
9. Calcule el valor eficaz de la tensión a la entrada de la línea.
10. Determina la lectura de los vatímetros descritos anteriormente.

Solución

El esquema del circuito que nos plantean es:

(donde desconocemos si los motores de las bombas están conectados en ⅄ o △)



Las potencias de cada carga son:

$$P_1 = 30\,\mathrm{kW} \qquad P_2 = 7{,}5\,\mathrm{kW}$$

$$Q_1 = P_1 \tan\theta_1 = 24{,}06\,\mathrm{kVA}_r \qquad Q_2 = P_2 \tan\theta_2 = 8{,}31\,\mathrm{kVA}_r$$

$$S_1 = \sqrt{P_1^2 + Q_1^2} = 38{,}46\,\mathrm{kVA} \qquad S_2 = \sqrt{P_2^2 + Q_2^2} = 11{,}19\,\mathrm{kVA}$$

Aplicando Boucherot, el triángulo de potencias total es:

$$P_T = P_1 + P_2 = 37{,}5\,\mathrm{kW}$$

$$Q_T = Q_1 + Q_2 = 32{,}37\,\mathrm{kVA}_r$$

$$S_T = \sqrt{P_T^2 + Q_T^2} = 49{,}54\,\mathrm{kVA}$$

Por tanto, el ángulo de la impedancia global es:

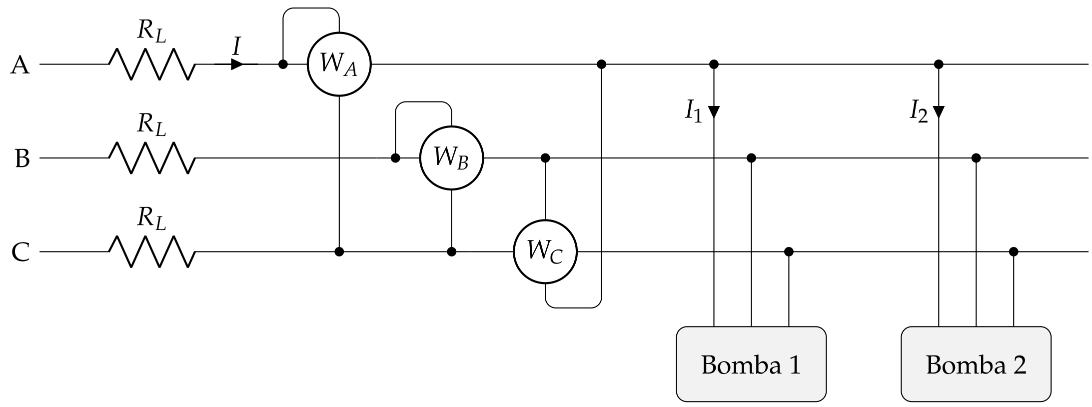
$$\tan(\theta) = \frac{Q_T}{P_T} = 0{,}8632 \quad \rightarrow \quad \theta = 40{,}8^\circ$$

Las corrientes en cada carga son:

$$I_1 = \frac{S_1}{\sqrt{3}\,U} = 55{,}51\,\mathrm{A}$$
$$I_2 = \frac{S_2}{\sqrt{3}\,U} = 16{,}15\,\mathrm{A}$$

La corriente total es:

$$I = \frac{S_T}{\sqrt{3}\,U} = 71{,}5\,\mathrm{A}$$



Denominaremos W_1 al vatímetro conectado en la fase A midiendo tensión entre las fases A y C, y W_2 al vatímetro conectado en la fase B midiendo tensión entre las fases B y C.

La conexión de estos 2 vatímetros corresponde al montaje de Aron.

Teniendo en cuenta que se trata de una SFD:

$$W_1 + W_2 = P_T$$
$$W_1 - W_2 = \frac{Q_T}{\sqrt{3}}$$

Sumando y restando las dos expresiones anteriores se obtiene, respectivamente:

$$W_1 = \frac{1}{2}\left(P_T + \frac{Q_T}{\sqrt{3}}\right) = 28{,}09\,\mathrm{kW}$$
$$W_2 = \frac{1}{2}\left(P_T - \frac{Q_T}{\sqrt{3}}\right) = 9{,}41\,\mathrm{kW}$$

También podemos obtener estos resultados con las siguientes ecuaciones:

$$W_1 = UI\cos(30^\circ - \theta) = 28{,}09\,\mathrm{kW}$$
$$W_2 = UI\cos(30^\circ + \theta) = 9{,}41\,\mathrm{kW}$$

Por otra parte, el vatímetro de la fase C mide:

$$W_{C,BA} = -\frac{Q_T}{\sqrt{3}} = -18{,}66\,\mathrm{kW}$$

La resistencia de la línea (una resistencia por cada conductor) es:

$$R_L = \rho\,\frac{l}{S} = 0{,}146\,\Omega$$

La potencia activa disipada en la línea es:

$$P_L = 3 \cdot I^2 R_L = 2234{,}8\,\mathrm{W}$$

Por tanto, la potencia a la entrada de la línea es:

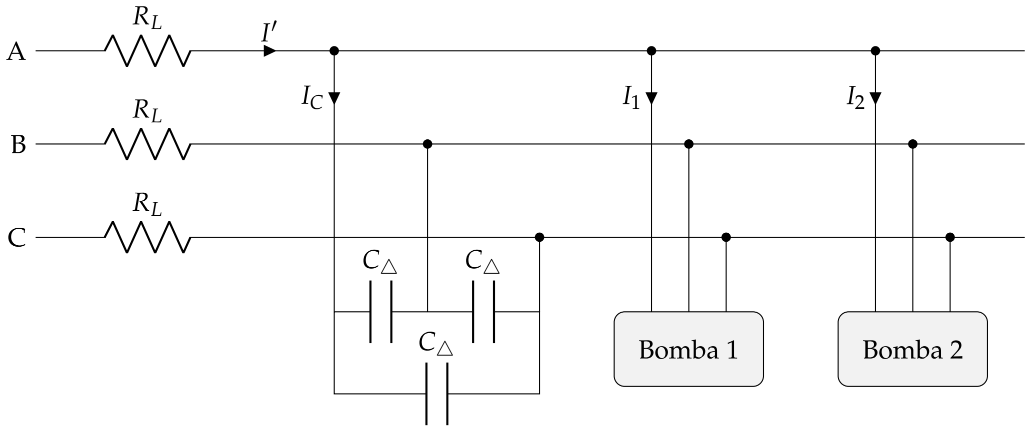
$$P_g = P_L + P_T = 39{,}73\,\mathrm{kW}$$
$$Q_g = Q_T = 32{,}33\,\mathrm{kVA}_r$$
$$S_g = \sqrt{P_g^2 + Q_g^2} = 51{,}22\,\mathrm{kVA}$$

Y la tensión a la salida del generador (entrada de la línea) es:

$$U_g = \frac{S_g}{\sqrt{3}\,I} = 413{,}64\,\mathrm{V}$$

Para mejorar el factor de potencia a la unidad en las cargas, se necesita una batería de condensadores conectados en triángulo en las cargas (a la salida de la línea). Cada uno de los tres condensadores debe tener una capacidad de:

$$C_\triangle = \frac{Q_T}{3\,\omega\,U^2} = 214{,}4\,\mu\mathrm{F}$$



Una vez instalada la batería de condensadores, la corriente total a la salida de la línea es:

$$I' = \frac{P_T}{\sqrt{3}\,U} = 54{,}13\,\mathrm{A}$$

La potencia disipada en la línea es ahora:

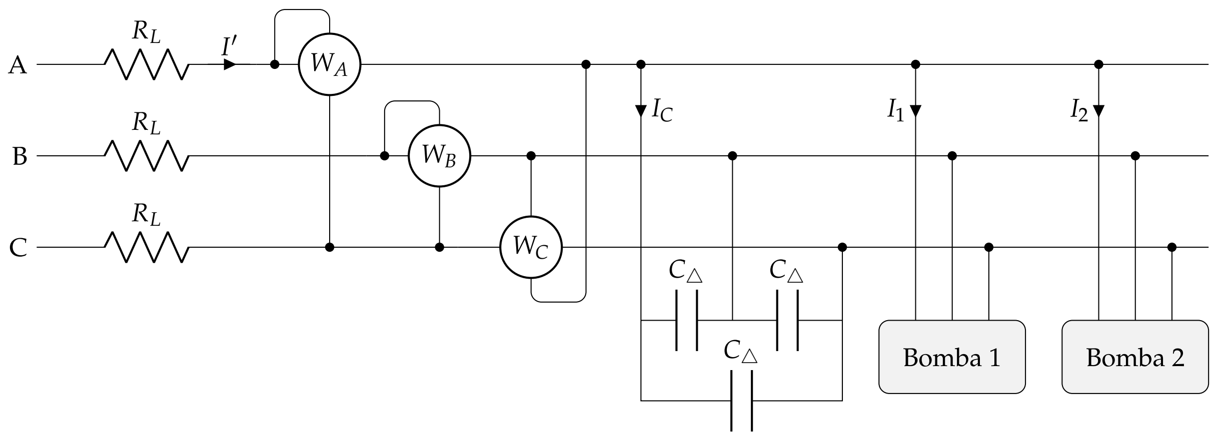
$$P'_L = 3 \cdot I'^2 R_L = 1282{,}9\,\mathrm{W}$$

Por tanto, el triángulo de potencias a la entrada de la línea es:

$$P'_g = P'_L + P_T = 38{,}78\,\mathrm{kW}$$
$$Q'_g = Q'_T = 0\,\mathrm{kVA}_r$$
$$S'_g = 38{,}78\,\mathrm{kVA}$$

Consecuentemente, la tensión a la entrada de la línea es:

$$U' = \frac{S'_g}{\sqrt{3}\,I'} = 413{,}63\,\mathrm{V}$$



Con la inserción de los condensadores, los vatímetros miden:

$$W'_{C,BA} = -\frac{Q'_T}{\sqrt{3}} = 0\,\mathrm{W}$$

Y dado que $W'_1 - W'_2 = \dfrac{Q'_T}{\sqrt{3}} = 0$:

$$W'_1 + W'_2 = P_T \qquad \rightarrow \qquad W'_1 = W'_2 = \frac{1}{2}\,P_T = 18{,}75\,\mathrm{kW}$$

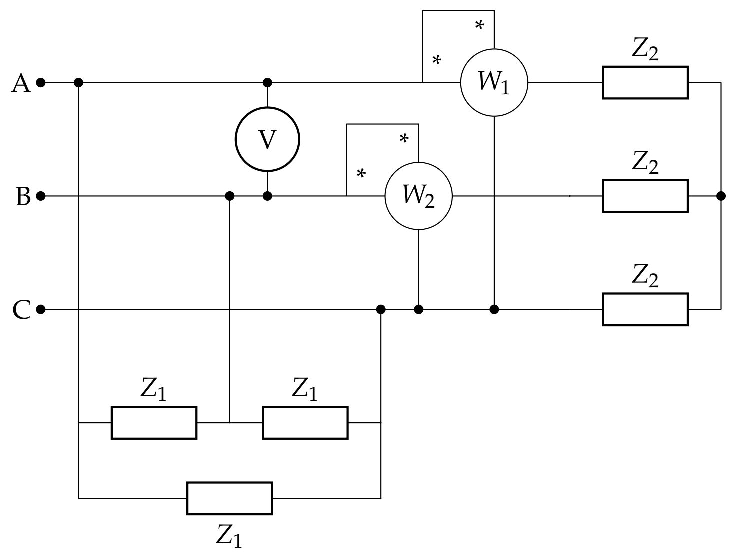
3.6. Enunciado

El circuito de la figura es de secuencia de fases directa y 50 Hz. Determinar:

1. Potencias activas y reactivas totales.
2. Capacidad mínima de los condensadores a instalar para mejorar el factor de potencia total hasta la unidad.
3. Intensidades de línea, en forma fasorial, una vez mejorado el factor de potencia.

Datos:

$$\overline{Z}_1 = 100\underline{/60^\circ}\,\Omega$$
$$W_1 = 300\,\mathrm{W}$$
$$W_2 = 300\,\mathrm{W}$$
$$V = 200\sqrt{3}\,\mathrm{V}$$



Solución

Los dos vatímetros miden la potencia de la impedancia Z_2:

$$P_2 = W_1 + W_2 = 600\,\mathrm{W}$$
$$Q_2 = \sqrt{3}\cdot(W_1 - W_2) = 0\,\mathrm{VA_r}$$

Para calcular la potencia de Z_1, debemos obtener la corriente de fase:

$$I_{1f} = \frac{U}{Z_1} = 2\sqrt{3}\,\mathrm{A}$$

Por tanto:

$$P_1 = 3 \cdot I_{1f}^2\, R_1 = 3 \cdot (2\sqrt{3})^2 \cdot 100\, \cos(60^\circ) = 1800\,\mathrm{W}$$
$$Q_1 = 3 \cdot I_{1f}^2\, X_1 = 3 \cdot (2\sqrt{3})^2 \cdot 100\, \sin(60^\circ) = 1800\sqrt{3}\,\mathrm{VA_r}$$

Aplicando Boucherot:

$$P = P_1 + P_2 = 2400\,\mathrm{W}$$
$$Q = Q_1 + Q_2 = 1800\sqrt{3}\,\mathrm{VA_r}$$

Para compensar completamente el factor de potencia, se deben instalar tres condensadores en triángulo con capacidad:

$$C_\triangle = \frac{Q}{3\,\omega\, U^2} = 27{,}57\,\mu\mathrm{F} \qquad \text{(en cada fase)}$$

Al instalar estos condensadores, la corriente que circula por la línea es:

$$P = \sqrt{3} \cdot U \cdot I' \quad \rightarrow \quad I' = 4\,\mathrm{A}$$

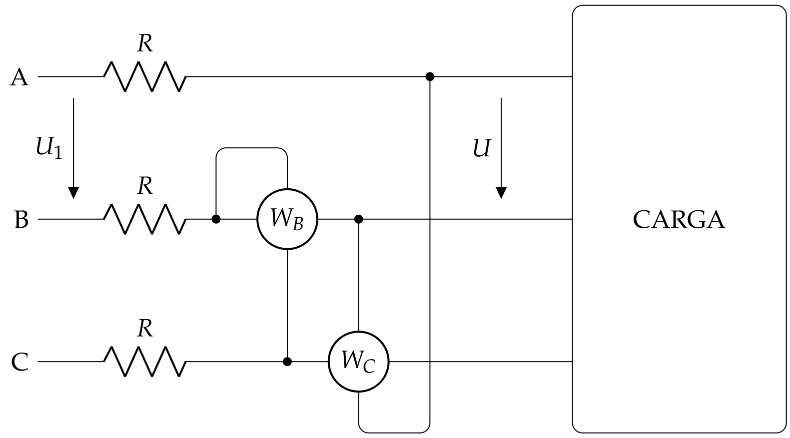
En forma fasorial, teniendo en cuenta que $\theta' = 0^\circ$:

$$\overline{I}_A = 4\underline{/90^\circ}\,\mathrm{A}$$
$$\overline{I}_B = 4\underline{/-30^\circ}\,\mathrm{A}$$
$$\overline{I}_C = 4\underline{/-150^\circ}\,\mathrm{A}$$

3.7. Enunciado

En la figura, dos vatímetros miden una carga trifásica inductiva equilibrada, alimentada a una tensión $U = 400\,\mathrm{V}$. El vatímetro W_B indica una lectura de 11 320 W, y el vatímetro W_C indica una lectura de 1815 W. A partir de esta información se pide:

1. Determinar la secuencia de fases del sistema.
2. Triángulo de potencias de la carga.
3. Impedancia equivalente de la carga en estrella y en triángulo.
4. Tensión de alimentación a la entrada de la línea U_1, sabiendo que la línea de alimentación es resistiva pura con valor $R = 0{,}1\,\Omega$.
5. Capacidad de los condensadores que se deben conectar en bornes de la carga para conseguir mejorar su factor de potencia a la unidad. Determinar las nuevas lecturas de los vatímetros W_B y W_C.



Solución

El vatímetro W_C está conectado de forma que mide la potencia reactiva:

$$W_C = \mp \frac{Q}{\sqrt{3}}$$

Dado que el vatímetro está conectado entre B y A, el signo negativo corresponde a SFD y el positivo a SFI. Dado que la carga es inductiva, consume potencia reactiva, luego $Q > 0$. Como $W_C > 0$, debemos elegir el signo positivo, lo que implica SFI.

Al vatímetro W_B podríamos añadirle un hipotético vatímetro W_A conectado en la fase A, midiendo tensión entre A y C, para emplear el método de los dos vatímetros:

$$\begin{aligned} W_B + W_A &= P \\ W_B - W_A &= \frac{Q}{\sqrt{3}} = W_C \end{aligned}$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos:

$$P = 2\,W_B - W_C = 20\,825\,\mathrm{W}$$

La potencia reactiva se calcula directamente con el vatímetro W_C:

$$Q = \sqrt{3}\,W_C = 3143{,}7\,\mathrm{VA}_r$$

Por tanto:

$$\overline{S} = 21\,060{,}9\underline{/8{,}58^\circ}\,\mathrm{VA}$$

El módulo de la impedancia en triángulo se obtiene con $Z_\triangle = U/I_f$. Teniendo en cuenta que $S = \sqrt{3}\,U\,I$ y que $I = \sqrt{3}\,I_f$, obtenemos $I_f = S/3U$. Por tanto:

$$\overline{Z}_\triangle = \frac{3\,U^2}{S}\underline{/8{,}58^\circ} = 22{,}8\underline{/8{,}58^\circ}\,\Omega$$

Para obtener la impedancia en estrella basta con usar las relaciones entre tensiones y corrientes de fase y línea:

$$\begin{aligned} Z_\curlywedge &= \frac{U_f}{I} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{U}{I} \\ Z_\triangle &= \frac{U}{I_f} = \sqrt{3} \cdot \frac{U}{I} \end{aligned}$$

Por tanto, $\overline{Z}_\curlywedge = \overline{Z}_\triangle/37{,}6\underline{/8{,}58^\circ}\,\Omega$.

La corriente de línea es:

$$I = \frac{S}{\sqrt{3}\,U} = 30{,}4\,\mathrm{A}$$

La potencia disipada en la línea es:

$$P_L = 3 \cdot I^2 \cdot R_L = 277{,}23\,\mathrm{W}$$

La potencia aparente total a la entrada de la línea es:

$$S_T = \sqrt{(P + P_L)^2 + Q^2} = 21\,335{,}1\,\mathrm{VA}$$

Y, por tanto:

$$U_1 = \frac{S_T}{\sqrt{3}\,I} = 405{,}21\,\mathrm{V}$$

Suponiendo $f = 50\,\mathrm{Hz}$:

$$C_\triangle = \frac{Q}{3\,\omega\,U^2} = 20{,}85\,\mu\mathrm{F}$$

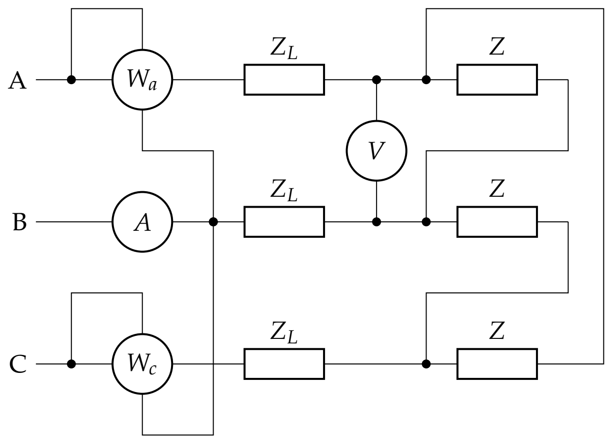
Ahora, dado que $Q' = 0\,\mathrm{VA}_r$, las lecturas serán $W'_C = 0\,\mathrm{W}$ y $W'_B = P/2 = 10\,412{,}5\,\mathrm{W}$.

3.8. Enunciado

Del circuito de la figura se sabe que tiene una secuencia de fases directa ABC. El amperímetro indica 5 A, el voltímetro 400 V, y los vatímetros W_a y W_c muestran una lectura idéntica. Se pide:

1. Valor de la impedancia Z en forma compleja.
2. Expresión fasorial de todas las intensidades del circuito.
3. Lecturas de los vatímetros W_a y W_c.

Dato: $\overline{Z}_L = 1 + j\,\Omega$



Solución

Al ser un circuito equilibrado, las intensidades de fase, que circulan por las impedancias del triángulo, tienen un valor de $5/\sqrt{3}$ V. La impedancia Z tendrá un módulo de valor:

$$Z = \frac{U_L}{I_f} = \frac{400}{5/\sqrt{3}} = 80\sqrt{3}\,\Omega$$

Los vatímetros W_a y W_c están conectados según el montaje de Aron. Dado que indican el mismo valor, el circuito tiene característica resistiva pura. Por tanto, la potencia reactiva consumida por la reactancia inductiva de las líneas será igual pero de tipo contrario que la potencia reactiva aportada por la reactancia capacitiva de la impedancia Z:

$$Q_{\text{línea}} = 3 \cdot Q_{Z_L} = 3 \cdot I_L^2 \cdot X_L = 3 \cdot 5^2 \cdot 1 = 75\,\text{VA}_r$$

$$Q_Z = -75\,\text{VA}_r \quad \rightarrow \quad X_Z = \frac{Q_Z}{3 \cdot I_f^2} = 3\,\Omega$$

Por tanto:

$$R_Z = \sqrt{Z^2 - X_Z^2} = 138{,}5\,\Omega \quad \rightarrow \quad \overline{Z} = 138{,}5 - j\,3\,\Omega$$

Tomando como referencia las tensiones de secuencia directa ABC en el triángulo de impedancias Z, se obtienen las siguientes intensidades de fase:

$$\bar{I}_{AB} = \frac{\overline{U}_{AB}}{\overline{Z}} = \frac{400\underline{/120^\circ}}{138{,}5 - j\,3} = 2{,}89\underline{/121{,}24^\circ} = \frac{5\sqrt{3}}{3}\underline{/121{,}24^\circ}\,\text{A}$$

$$\bar{I}_{BC} = \frac{\overline{U}_{BC}}{\overline{Z}} = \frac{400\underline{/0^\circ}}{138{,}5 - j\,3} = 2{,}89\underline{/1{,}24^\circ} = \frac{5\sqrt{3}}{3}\underline{/1{,}24^\circ}\,\text{A}$$

$$\bar{I}_{CA} = \frac{\overline{U}_{CA}}{\overline{Z}} = \frac{400\underline{/-120^\circ}}{138{,}5 - j\,3} = 2{,}89\underline{/-118{,}76^\circ} = \frac{5\sqrt{3}}{3}\underline{/-118{,}76^\circ}\,\text{A}$$

A partir de estas corrientes de fase, se obtienen las corrientes de línea aplicando 1LK:

$$\overline{I}_A = \overline{I}_{AB} - \overline{I}_{CA} = 5\underline{/91{,}24^\circ}\,\text{A}$$

$$\overline{I}_B = \overline{I}_{BC} - \overline{I}_{AB} = 5\underline{/-28{,}76^\circ}\,\text{A}$$

$$\overline{I}_C = \overline{I}_{CA} - \overline{I}_{BC} = 5\underline{/-148{,}76^\circ}\,\text{A}$$

Dado que ambos vatímetros marcan el mismo valor, el circuito es de carácter resistivo. Este valor se corresponde con la mitad de la potencia activa total consumida por el circuito. Calculamos esta potencia con Boucherot:

$$P_{Z_L} = 3 \cdot I_L^2 \cdot R_L = 3 \cdot 5^2 \cdot 1$$

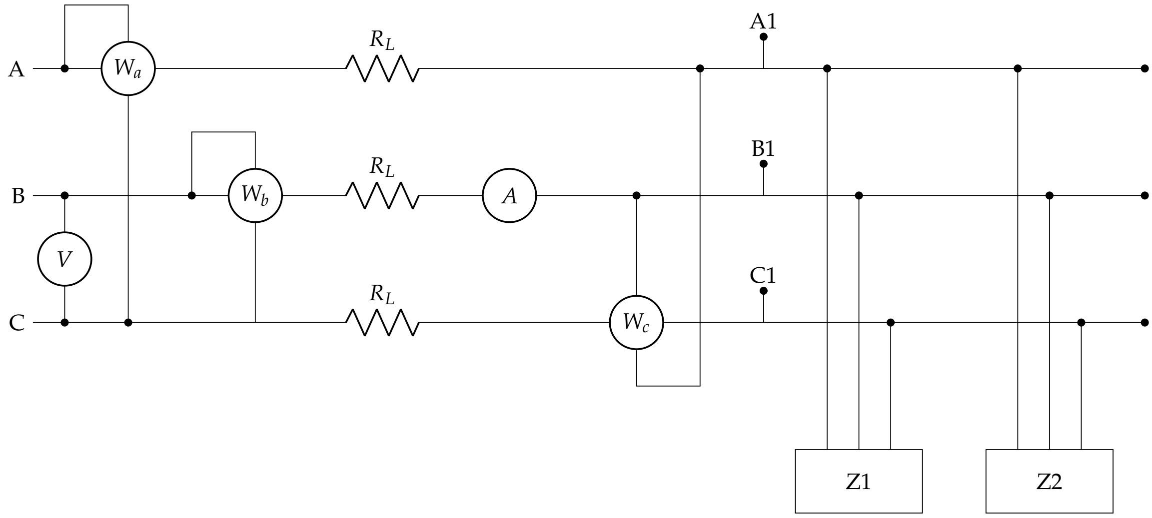
$$P_Z = 3 \cdot I_f^2 \cdot R = 3 \cdot \left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot 138{,}5$$

$$P = P_{Z_L} + P_Z = 3537{,}5\,\text{W}$$

$$W_a = W_c = \frac{1}{2}\,P = 1768{,}8\,\text{W}$$

3.9. Enunciado

En el circuito de la figura se debe determinar:



1. Lectura del vatímetro W_c.
2. Lectura del amperímetro.
3. Factor de potencia total de las cargas (en retraso o adelanto).
4. Lectura de los vatímetros W_a y W_b.
5. Lectura del voltímetro.
6. Valor de los condensadores conectados en $A_1B_1C_1$ para que el f.d.p. en ese punto sea la unidad.
7. Lecturas de los cinco aparatos de medida tras el apartado anterior.

Datos:

- Secuencia de fases directa, $f = 50\,\text{Hz}$, $(A_1B_1C_1)$ $U_1 = 420\,\text{V}$.
- Z_1: motor de 10 CV, con $\eta = 0{,}83$, y f.d.p. de 0,9.
- Z_2: conjunto de iluminación fluorescente, con $P = 2400\,\text{W}$, y f.d.p. de 0,85.
- $R_L = 1\,\Omega$.

Solución

A partir de los datos del enunciado, teniendo en cuenta que las dos cargas son inductivas, obtenemos:

$$\begin{aligned} P_1 &= 8867{,}5\,\mathrm{W} \\ Q_1 &= 4294{,}7\,\mathrm{VA}_r \\ P_2 &= 2400\,\mathrm{W} \\ Q_2 &= 1487{,}4\,\mathrm{VA}_r \end{aligned}$$

Por tanto, el triángulo de potencias de las cargas ($A_1B_1C_1$) es:

$$\begin{aligned} P &= 11\,267{,}5\,\mathrm{W} \\ Q &= 5782{,}1\,\mathrm{VA}_r \\ S &= 12\,664{,}5\,\mathrm{VA} \end{aligned}$$

Dado que se trata de un sistema de SFD, la lectura del vatímetro W_c es:

$$W_c = -\frac{Q}{\sqrt{3}} = -3338{,}3\,\mathrm{W}$$

La lectura del amperímetro es:

$$A = \frac{S}{\sqrt{3}\,U} = 17{,}41\,\mathrm{A}$$

El factor de potencia de las cargas es:

$$fdp = \cos\arctan\frac{Q}{P} = 0{,}89$$

La potencia disipada en la línea es:

$$P_L = 3 \cdot I^2 \cdot R_L = 909{,}32\,\mathrm{W}$$

Y, por tanto, el triángulo de potencias total es:

$$\begin{aligned} P_T &= P + P_L = 12\,176{,}8\,\mathrm{W} \\ Q_T &= Q = 5782{,}1\,\mathrm{VA}_r \\ S_T &= 13\,479{,}9\,\mathrm{VA} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned} W_A + W_B &= P_T \\ W_A - W_B &= \frac{Q_T}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} W_A &= 7757{,}6\,\mathrm{W} \\ W_B &= 4419{,}27\,\mathrm{W} \end{aligned}$$

La tensión a la entrada de la línea es:

$$U' = \frac{S_T}{\sqrt{3}\,I} = 447{,}02\,\mathrm{V}$$

Los condensadores necesarios (conectados en triángulo) deben tener una capacidad de:

$$C = \frac{Q_T}{3\,U^2\,\omega} = 34{,}78\,\mu\mathrm{F}$$

Con estos condensadores conectados, las lecturas de los aparatos de medida son:

$$\begin{aligned} W_c &= 0 \\ A &= 15{,}5\,\text{A} \\ P_L &= 720{,}75\,\text{W} \\ P_T &= 11\,988{,}25\,\text{W} \\ W_A = W_B &= 5994{,}1\,\text{W} \\ U' &= 446{,}5\,\text{V} \end{aligned}$$

3.10. Enunciado

Una línea ideal trifásica de 4 hilos alimenta a dos cargas a una tensión de 400 V, en secuencia de fases inversa (SFI) y frecuencia 50 Hz.

Las cargas tienen las siguientes características:

- Un motor trifásico de 70 kW y f.d.p. de 0,8.
- Un conjunto equilibrado de 90 lámparas fluorescentes. Las características de cada lámpara son: potencia de 12 W, f.d.p. de 0,7 en retraso, tensión 230 V.

Con esta información se pide:

1. Conectar adecuadamente los siguientes aparatos de medida antes de las cargas.
   - Un voltímetro que mida la tensión de línea (etiquetado como V_L) y otro voltímetro que mida la tensión de fase (etiquetado como V_F).
   - Un vatímetro que permita calcular la potencia reactiva total del sistema (etiquetado como W_r).
   - Dos vatímetros que, de forma conjunta, permitan calcular la potencia activa total del sistema (etiquetados como W_X y W_Y).
2. Calcular el valor eficaz de la corriente de línea total.
3. Calcular la lectura de cada uno de los aparatos de medida del primer apartado.
4. Calcular los condensadores necesarios para mejorar el factor de potencia hasta 0,9, indicando cómo se deben conectar.
5. Una vez conectados los condensadores del anterior apartado, determinar la corriente de línea y la lectura de todos los aparatos de medida del apartado 2.

Solución

El motor consume una potencia activa de $P_m = 70\,\text{kW}$. Su potencia reactiva es $Q_m = P_m \cdot \tan(\theta_m) = 52{,}5\,\text{kVAr}$. Las lámparas consumen una potencia activa de $P_f = 90 \cdot 12 = 1080\,\text{W}$. Su potencia reactiva (inductiva) es $Q_f = 1101{,}8\,\text{VAr}$. Aplicando Boucherot, la potencia activa total es $P = P_m + P_f = 71{,}08\,\text{kW}$ y la potencia reactiva total es $Q = Q_m + Q_f = 53{,}6\,\text{kVAr}$. Con estas magnitudes podemos calcular el factor de potencia global, $\cos(\theta) = 0{,}798$. Finalmente, la corriente de línea es:

$$I = \frac{P}{\sqrt{3} \cdot U \cdot \cos(\theta)} = 128{,}5\,\text{A}$$

Teniendo en cuenta que es un sistema equilibrado y que es SFI:

- Para medir la tensión de línea hay que conectar un voltímetro entre dos fases. La medida será $V_L = 400\,\text{V}$. Para medir la tensión de fase hay que conectar un voltímetro entre una fase y el neutro, cuya medida será $V_{AN} = 400/\sqrt{3} = 230{,}9\,\text{V}$.

- Hay que conectar un vatímetro midiendo tensión entre dos fases y la corriente por la tercera. Para que la medida coincida en signo con la de la potencia reactiva, la conexión entre fases debe ser BA, CB, o AC. Así, por ejemplo, un vatímetro midiendo tensión entre A y C, y corriente por B medirá $W_r = Q/\sqrt{3} = 30\,947\,\mathrm{W}$

- Hay que usar el método de Aron. Una posibilidad es conectar un vatímetro midiendo tensión entre las fases A y C, y corriente en A (W_X), y otro vatímetro midiendo tensión entre las fases B y C, y corriente por B (W_Y). Para obtener la potencia activa total del sistema basta con sumar las dos medidas: $W_X + W_Y = P$. Además, podemos usar la diferencia para obtener la reactiva. Teniendo en cuenta que se trata de una SFI, $W_Y - W_X = Q/\sqrt{3}$. Por tanto, $W_X = 20\,666{,}5\,\mathrm{W}$, $W_Y = 51\,013{,}5\,\mathrm{W}$.

Serán necesarios tres condensadores conectados en triángulo en paralelo con las cargas. Deben suministrar una potencia reactiva $Q_c = P \cdot (\tan(\theta) - \tan(\theta')) = 19\,176{,}2\,\mathrm{VAr}$

Por tanto, la capacidad de cada condensador es:

$$C = \frac{Q_c}{3 \cdot \omega \cdot U^2} = 127{,}2\,\mathrm{\mu F}$$

El sistema incluyendo los condensadores consume la misma potencia activa. Por tanto, la corriente es ahora:

$$I' = \frac{P}{\sqrt{3} \cdot U \cdot cos(\theta')} = 114\,\mathrm{A}$$

La potencia reactiva es ahora:

$$Q' = P \cdot \tan(\theta') = 34\,425{,}62\,\mathrm{VAr}$$

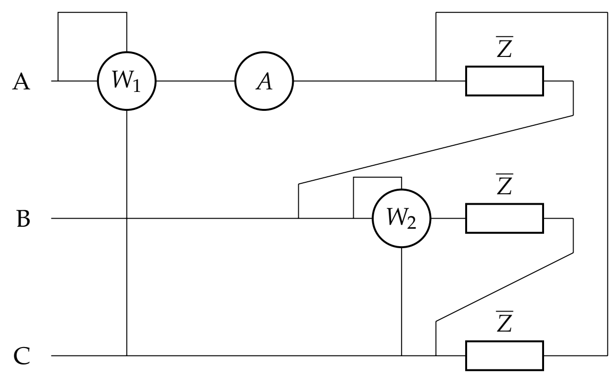
Los aparatos de medida descritos antes miden ahora:

- La medida de los voltímetros no cambia.
- $W_X = 25\,602{,}2\,\mathrm{W}$
- $W_Y = 45\,477{,}8\,\mathrm{W}$
- $W_R = 19\,875{,}6\,\mathrm{W}$

3.11. Enunciado

En el sistema de la figura de secuencia de fases directa y frecuencia $f = 60\,\mathrm{Hz}$, se dispone de un receptor equilibrado con una potencia total $P_T = 51\,984\,\mathrm{W}$ y factor de potencia de 0,6 en retraso. Sabiendo que el amperímetro marca $76\sqrt{3}\,\mathrm{A}$, determinar:

1. Medida de los vatímetros 1 y 2.
2. Valor de la impedancia $\overline{Z}$ en forma módulo-argumento.
3. Valor de la capacidad mínima para mejorar el factor de potencia a 0,95 en retraso.
4. Valor de la impedancia equivalente en estrella.



Solución

Para resolver este problema, antes de calcular nada, podemos extraer la siguiente información del enunciado:

- Se tiene una sola carga trifásica equilibrada de valor Z y con $\cos\phi = 0,6 \rightarrow 53{,}13°$ en retraso. Esto significa que la impedancia $\overline{Z}$ es de carácter inductivo y su potencia reactiva será positiva.
- Se tiene una secuencia de fases directa ABC. Esto significa que el sistema de alimentación tiene las siguientes tensiones de línea: $\overline{U}_{AB} = U_{AB}\underline{/120°}$ V, $\overline{U}_{BC} = U_{BC}\underline{/0°}$ V y $\overline{U}_{CA} = U_{CA}\underline{/-120°}$ V. Así pues, las tensiones de fase son: $\overline{U}_A = U_A\underline{/90°}$ V, $\overline{U}_B = U_B\underline{/-30°}$ V y $\overline{U}_C = U_C\underline{/-150°}$V.
- Anotamos la frecuencia de red de valor 60 Hz por si hemos de calcular alguna reactancia inductiva y/o capacitiva.
- La potencia activa total que demanda el triángulo de impedancia $\overline{Z}$ es de valor $P_T = 51\,984$ W. De este valor, sacamos como conclusión que cada impedancia $\overline{Z}$ del triángulo consume un tercio de dicha potencia activa, al ser un receptor equilibrado.
- El vatímetro W_2 está conectado midiendo la intensidad $\overline{I}_{BC}$ y la tensión $\overline{U}_{BC}$, es decir, nos da el valor de la potencia activa que disipa la fase BC del triángulo, cuyo valor ya sabemos que es:

$$W_2 = \frac{P_T}{3} = \frac{51\,984}{3} = 17\,328\,\mathrm{W}$$

- El amperímetro dispuesto en la línea A mide el valor eficaz de $76\sqrt{3}$ A. Esto significa que, al tener un receptor equilibrado conectado en triángulo, las intensidades por las otras dos líneas B y C tienen el mismo valor de intensidad de valor eficaz de $76\sqrt{3}$ A.
- También, al ser un receptor equilibrado conectado en triángulo, las intensidades $\overline{I}_{AB}$, $\overline{I}_{BC}$ e $\overline{I}_{CA}$ que circulan dentro del triángulo, toman por valor eficaz:

$$I_L = \frac{76\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 76\,\mathrm{A}$$

- Los argumentos de las intensidades dentro de triángulo se pueden obtener del propio enunciado. Cada intensidad $\overline{I}_{AB}$, $\overline{I}_{BC}$ e $\overline{I}_{CA}$ retrasa 53,13° a las tensiones $\overline{U}_{AB}$, $\overline{U}_{BC}$ y $\overline{U}_{CA}$ correspondientes, es decir, la intensidad $\overline{I}_{AB}$ tiene un argumento de valor $120° - 53,13° = 66{,}87°$, la intensidad $\overline{I}_{BC}$ tiene un argumento de valor $0° - 53,13° = -53{,}13°$ y la intensidad $\overline{I}_{CA}$ tiene un argumento de valor $-120° - 53,13° = -153{,}13°$.
- Los argumentos de las intensidades de línea también se pueden obtener del propio enunciado. Cada intensidad $\overline{I}_A$, $\overline{I}_B$ e $\overline{I}_C$ retrasa 53,13° a las tensiones del sistema de alimentación $\overline{U}_A$, $\overline{U}_B$ y $\overline{U}_C$ correspondientes, es decir, la intensidad $\overline{I}_A$ tiene un argumento de valor $90° - 53,13° = 36{,}87°$, la intensidad $\overline{I}_B$ tiene un argumento de valor $-30° - 53,13° = -83{,}13°$ y la intensidad $\overline{I}_C$ tiene un argumento de valor $-150° - 53,13° = -203{,}13°$.

Tras estas consideraciones, se pueden iniciar los cálculos necesarios para responder a las preguntas del problema:

1. Medida de los vatímetros 1 y 2:

   La lectura del vatímetro 1, según está conectado, es la siguiente:

$$[W_1] = \Re(\overline{U}_{AC} \cdot \overline{I}_A) = U_{AC} \cdot I_A \cdot \cos(\langle \overline{U}_{AC}, \overline{I}_A \rangle)$$

   Se desconoce el módulo de la tensión $\overline{U}_{AC}$. Se calcula a partir del vatímetro 2, cuya lectura es de $[W_2] = 17\,328$ W:

$$[W_2] = \Re(\overline{U}_{BC} \cdot \overline{I}_{BC}) = U_{BC} \cdot I_{BC} \cdot \cos(\langle \overline{U_{BC}}, \overline{I_{BC}} \rangle)$$

$$17\,328 = U_{BC} \cdot 76 \cdot 0{,}6 \quad \Rightarrow \quad U_{BC} = 380\,\mathrm{V}$$

   Por tanto, al ser un sistema equilibrado ($U_{AB} = U_{BC} = U_{CA}$), y sabiendo que $\overline{U}_{AC} = -\overline{U}_{CA} = U_{CA}\underline{/-120° + 180°} = 380\underline{/60°}$ V, la lectura del vatímetro 1:

$$[W_1] = \Re(\overline{U}_{AC} \cdot \overline{I}_A) = U_{AC} \cdot I_A \cdot \cos(\langle \overline{U}_{AC}, \overline{I}_A \rangle) = 380 \cdot 76\sqrt{3} \cdot \cos(\langle 60°; 36{,}87° \rangle) = 46\,001\,\mathrm{W}$$

2. Valor de la impedancia $\overline{Z}$ en forma módulo-argumento:

   Al conocer ya el valor de la tensión a la que está alimentada y la intensidad que circula por ella, se obtiene su valor fácilmente a partir de la ley de Ohm:

$$\overline{Z} = \frac{\overline{U}_{AB}}{\overline{I}_{AB}} = \frac{380\underline{/120^\circ}}{76\underline{/66{,}87^\circ}} = 5\underline{/53{,}13^\circ}\,\Omega$$

3. Valor de la capacidad mínima para mejorar el factor de potencia a 0,95 en retraso.

4. Valor de la impedancia equivalente en estrella.

3.12. Enunciado

Un sistema trifásico a cuatro hilos de 200 V, 50 Hz y secuencia de fases directa está constituido por un motor a cuatro hilos de 3200 W de potencia y factor de potencia de 0,9, y un triángulo de impedancias $20\underline{/30^\circ}\,\Omega$. Con esta información, se debe determinar:

1. Impedancia equivalente del motor.
2. Impedancia equivalente de todo el sistema.

Solución

1. Para calcular la impedancia del motor, necesitamos obtener la corriente que lo alimenta. Dado que tenemos la potencia activa y su factor de potencia, el cálculo es inmediato:

$$P_m = \sqrt{3} \cdot U.I_m \cdot \cos(\theta_m) \quad \rightarrow \quad I_m = 10{,}26\,\text{A}$$

   Donde el ángulo se ha obtenido del factor de potencia: $\theta_m = \arccos(0{,}9) = 25{,}84^\circ$. Con estos valores podemos calcular la impedancia equivalente en triángulo:

$$\overline{Z}_{m\triangle} = \frac{U}{I_{mf}}\underline{/\theta_m} = \frac{200}{10{,}26/\sqrt{3}}\underline{/25{,}84^\circ} = 33{,}76\underline{/25{,}84^\circ}\,\Omega$$

   O en estrella:

$$\overline{Z}_{m\curlywedge} = \frac{U_f}{I_m}\underline{/\theta_m} = \frac{200/\sqrt{3}}{10{,}26}\underline{/25{,}84^\circ} = 11{,}25\underline{/25{,}84^\circ}\,\Omega$$

2. Para calcular la impedancia equivalente del conjunto necesitamos obtener la corriente total del sistema y, por tanto, el triángulo de potencias total. En primer lugar, el motor:

$$\begin{aligned} P_m &= 3200\,\text{W} \\ Q_m &= P_m \tan(25{,}84^\circ) = 1549{,}83\,\text{VA}_\text{r} \end{aligned}$$

   A continuación, la impedancia. Primer debemos obtener la corriente de esta impedancia:

$$I_{z,f} = \frac{U}{Z_\triangle} = 10\,\text{A}$$

$$I_z = \sqrt{3} \cdot I_{z,f} = 10\sqrt{3}\,\text{A}$$

   Y ya podemos obtener las potencias de esta impedancia:

$$P_z = \sqrt{3} \cdot U \cdot I_z \cdot \cos(30^\circ) = 5196{,}2\,\text{W}$$

$$Q_z = P_m\ \tan(30^\circ) = 3000\,\text{VA}_\text{r}$$

   Aplicando Boucherot:

$$\begin{aligned} P &= P_m + P_z = 8396{,}2\,\text{W} \\ Q &= Q_m + Q_z = 4549{,}8\,\text{VA}_\text{r} \\ S &= \sqrt{P^2 + Q^2} = 9549{,}7\,\text{VA} \end{aligned}$$

Con estos resultados obtenemos la corriente total y el ángulo de la impedancia equivalente:

$$I = \frac{S}{\sqrt{3}\,U} = 27{,}6\,\mathrm{A}$$

$$\theta = \arctan\frac{Q}{P} = 28{,}45^\circ$$

Por tanto:

$$\overline{Z}_\triangle = \frac{U}{I_f}\underline{/\theta} = 12{,}57\underline{/28{,}45^\circ}\,\Omega$$

$$\overline{Z}_\curlywedge = \frac{U_f}{I}\underline{/\theta} = 4{,}19\underline{/28{,}45^\circ}\,\Omega$$

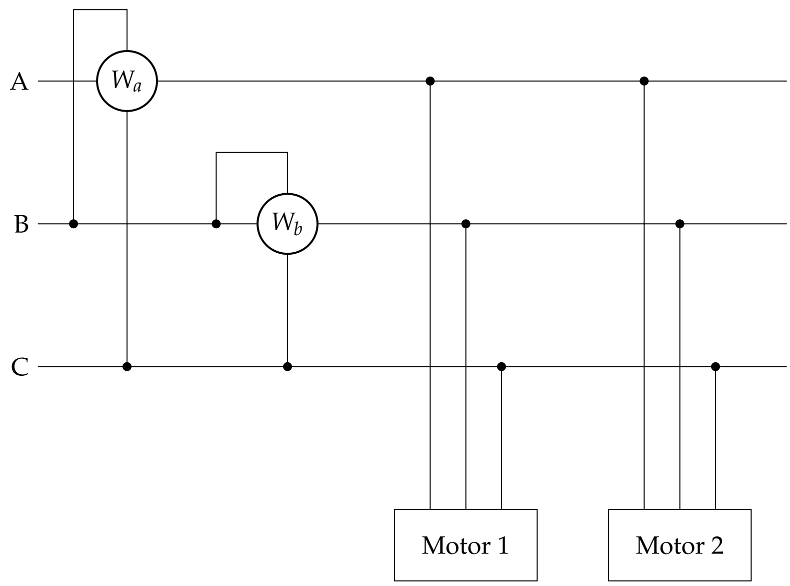
Otra opción para resolver este segundo aparto consiste simplemente en calcular la asociación paralelo de $\overline{Z}_{m\triangle}$ con el receptor de $20\underline{/30^\circ}\,\Omega$ en triángulo:

$$\overline{Z}_\triangle = \frac{\overline{Z}_{m\triangle}\cdot 20\underline{/30^\circ}}{\overline{Z}_{m\triangle} + 20\underline{/30^\circ}} = 12{,}57\underline{/28{,}45^\circ}\,\Omega$$

3.13. Enunciado

En el circuito de la figura la tensión es $275\sqrt{3}$ V. Los motores 1 y 2 tienen factores de potencia 0,96 y 0,8, respectivamente. El vatímetro W_a da una lectura de $2420\sqrt{3}$ W. Al medir las intensidades de los motores se comprueba que son iguales en ambos. Con esta información se debe determinar:

1. Secuencia de fases del sistema.
2. Lectura del vatímetro W_b.
3. Impedancias de cada uno de los motores e impedancia equivalente del conjunto.



Solución

1. El sistema está equilibrado y es inductivo (dado que un motor es una carga inductiva). Por tanto, la reactiva total es positiva. Por otra parte, la lectura de W_a corresponde a::

$$W_a = \pm\frac{Q}{\sqrt{3}}$$

Dado que la lectura del vatímetro es positiva y la potencia reactiva total también es positiva, hay que elegir el signo positivo. Este vatímetro está conectado entre B y C, luego se trata de una $\boxed{\text{SFD}}$ (BC $\in$ SFD).

2. Con la lectura del vatímetro W_a tenemos la potencia reactiva total del sistema. Por Boucherot sería:

$$Q = Q_1 + Q_2 = \sqrt{3} \cdot U \cdot I_1[\mathrm{sen}(\theta_1) + \mathrm{sen}(\theta_2)]\ , \quad \text{donde}\ \ \theta_1 = \arccos(\mathrm{fdp}_1)\ ,\ \theta_2 = \arccos(\mathrm{fdp}_2)$$

donde se ha tenido en cuenta que las corrientes de los dos motores son iguales, $I_1 = I_2$. De esta expresión podemos obtener el valor de estas corrientes:

$$I_1 = I_2 = \frac{Q}{\sqrt{3} \cdot U \cdot [\mathrm{sen}(\theta_1) + \mathrm{sen}(\theta_2)]} = 10\,\mathrm{A}$$

Con una operación similar para la potencia activa:

$$P = P_1 + P_2 = \sqrt{3} \cdot U \cdot I_1[\cos(\theta_1) + \cos(\theta_2)] = 14\,520\,\mathrm{W}$$

Con este resultado podemos calcular la lectura del vatímetro W_b. Este vatímetro forma parte de un montaje Aron. Si añadimos un vatímetro ficticio en la fase A, W_x, tendríamos:

$$\begin{aligned} W_x + W_b &= P \\ W_x - W_b &= Q/\sqrt{3} = W_a \end{aligned}$$

Por tanto:

$$W_b = 1/2 \cdot (P - W_a) = 5164{,}2\,\mathrm{W}$$

3. Las impedancias de los dos motores podemos calcularlas con la tensión del sistema y las corrientes que los alimentan, calculadas en el apartado anterior, $I_1 = I_2 = 10\,\mathrm{A}$:

$$\begin{aligned} \overline{Z}_{1\curlywedge} &= \frac{U_f}{I_1}\underline{/\theta_1} = \frac{U_L/\sqrt{3}}{I_1}\underline{/\theta_1} = 27{,}5\underline{/16{,}26^\circ}\,\Omega \\ \overline{Z}_{2\curlywedge} &= \frac{U_f}{I_2}\underline{/\theta_2} = \frac{U_L/\sqrt{3}}{I_2}\underline{/\theta_2} = 27{,}5\underline{/36{,}87^\circ}\,\Omega \end{aligned}$$

Para calcular la impedancia equivalente del conjunto necesitamos la corriente total y el ángulo, que se obtienen del triángulo de potencias:

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{P^2 + Q^2} = 16\,233{,}9\,\mathrm{VA} \\ I &= \frac{S}{\sqrt{3} \cdot U} = 19{,}7\,\mathrm{A} \\ \theta &= \arctan\frac{Q}{P} = 26{,}56^\circ \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\overline{Z}_{\curlywedge} = \frac{U_f}{I}\underline{/\theta} = 13{,}97\underline{/26{,}56^\circ}\,\Omega$$

A este mismo resultado se puede llegar calculando la impedancia equivalente del paralelo de $\overline{Z}_{1\curlywedge}$ y $\overline{Z}_{2\curlywedge}$:

$$\overline{Z}_{\curlywedge} = \frac{\overline{Z}_{1\curlywedge} \cdot \overline{Z}_{2\curlywedge}}{\overline{Z}_{1\curlywedge} + \overline{Z}_{2\curlywedge}} = 13{,}97\underline{/26{,}56^\circ}\,\Omega$$

Capítulo 4

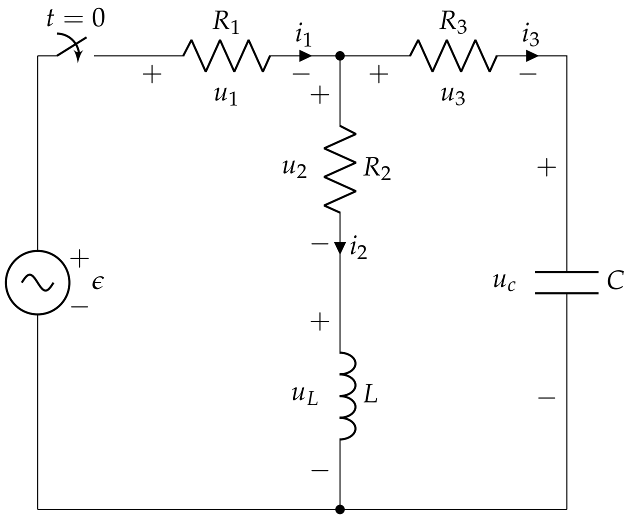
Teoremas fundamentales

Capítulo 5

Análisis transitorio

5.1. Enunciado

En el circuito de la figura, el interruptor ha estado abierto durante un tiempo prolongado, y en el instante $t = 0$ se cierra. Se debe determinar el valor de las tensiones y corrientes del circuito en $t = 0^+$.



Datos:

$$
\begin{aligned}
R_1 &= 3\,\Omega \\
R_2 &= 5\,\Omega \\
R_3 &= 2\,\Omega \\
L &= 0{,}2\,\mathrm{H} \\
C &= 0{,}5\,\mathrm{mF} \\
\epsilon(t) &= 20\cos(t)\,\mathrm{V}
\end{aligned}
$$

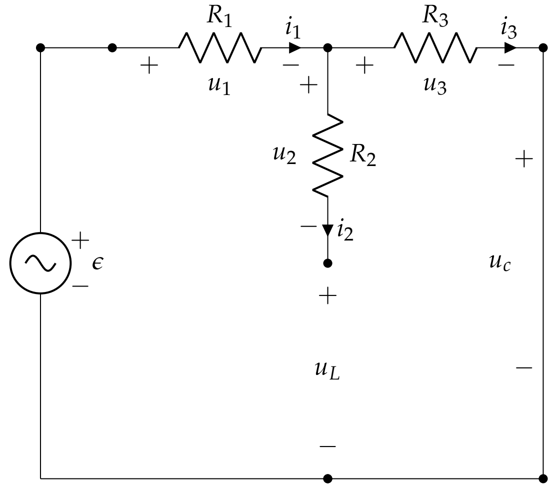
Solución

En $t < 0$, dado que el interruptor ha estado abierto, la bobina y el condensador están descargados. Por tanto, $i_2(0^-) = 0\,\mathrm{A}$ y $u_C(0^-) = 0\,\mathrm{V}$.

En $t > 0$, al cerrarse el interruptor, la fuente de tensión alimenta al circuito. En el instante de cierre, $\epsilon(0^+) = 20\,\mathrm{V}$. Por otra parte, aplicando el principio de continuidad en la bobina y el condensador, tenemos:

$$
\begin{aligned}
i_2(0^+) &= i_2(0^-) = 0\,\mathrm{A} \\
u_C(0^+) &= u_C(0^-) = 0\,\mathrm{V}
\end{aligned}
$$

Estos resultados implican que, en ese instante, la bobina se comporta como un circuito abierto y el condensador como un cortocircuito.



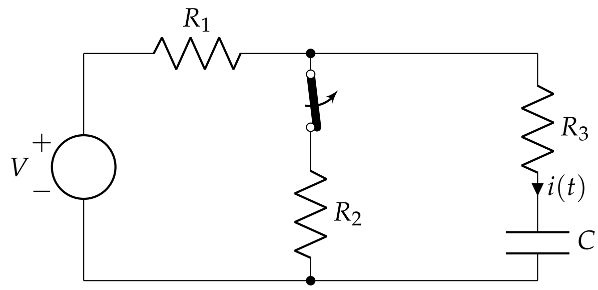
En estas condiciones calculamos el resto de variables en $t = 0^+$:

$$\begin{aligned} i_1(0^+) = i_3(0^+) = \frac{\epsilon(0^+)}{R_1 + R_3} &= 4\,\text{A} \\ u_1(0^+) = R_1 \cdot i_1(0^+) &= 12\,\text{V} \\ u_2(0^+) = R_2 \cdot i_2(0^+) &= 0\,\text{V} \\ u_3(0^+) = R_3 \cdot i_3(0^+) &= 8\,\text{V} \\ u_L(0^+) = u_3(0^+) &= 8\,\text{V} \end{aligned}$$

5.2. Enunciado

El interruptor de la figura lleva cerrado un tiempo que se puede considerar infinito. En el instante $t = 0$, se abre, permaneciendo en esta posición definitivamente. Calcular la expresión de la intensidad $i(t)$ desde $t = 0$ en adelante.

Datos: $E = 1\,\text{V}$; $R_1 = 1\,\Omega$; $R_2 = R_3 = 2\,\Omega$; $C = 4\,\text{mF}$



Solución

1. El circuito para $t < 0$ tiene el interruptor cerrado. Al estar alimentado por CC, el condensador se comporta como un circuito abierto, por lo que el valor de $u_C(0^-)$ es:

$$I = \frac{E}{R_{eq}} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}\,\text{A}$$

$$U_{R2} = R_2 \cdot I = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\,\text{V} \qquad u_C(0^-) = U_{R2} = \frac{2}{3}\,\text{V}$$

Por continuidad, se deduce que $u_C(0^-) = u_C(0^+) = \frac{2}{3}\,\text{V}$

2. Para $t > 0$, el interruptor se abre, por lo que la resistencia central de 2Ω queda sin alimentación ($i = 0$). La resistencia de Thévenin vista desde los extremos del condensador, cuando se anula la fuente de tensión, es:

$$R_{th} = 1 + 2 = 3\,\Omega$$

siendo la constante de tiempo:

$$\tau = R_{th}\, C = 3 \cdot 4 \cdot 10^{-3} = 0{,}012\,\text{s}$$

Para la respuesta en régimen permanente, se sustituye de nuevo el condensador por un circuito abierto (por estar alimentado en CC), siendo entonces:

$$u_\infty(t) = E = 1\,\text{V}$$

3. La expresión completa de $u_C(t)$ es:

$$u_C(t) = \left(\frac{2}{3} - 1\right) \text{e}^{-\frac{t}{0{,}012}} + 1 = 1 - \frac{1}{3}\,\text{e}^{-\frac{t}{0{,}012}}\,\text{V}$$

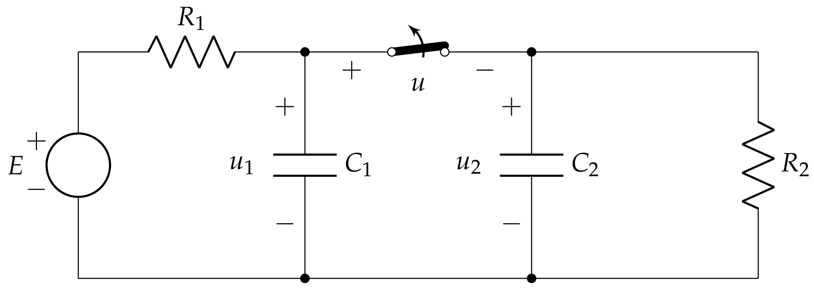
Puesto que se pide el valor de $i(t)$, que es la corriente que circula por la rama del condensador, la relación entre tensión y corriente de éste:

$$i_C(t) = C\,\frac{d\,u_C(t)}{dt}$$
$$\frac{d\,u_C(t)}{dt} = -\frac{1}{3}\,\frac{-1}{0{,}012}\;\mathrm{e}^{-\frac{t}{0{,}012}} = \frac{250}{9}\;\mathrm{e}^{-\frac{t}{0{,}012}}\;\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{s}}$$
$$i_C(t) = C\,\frac{d\,u_C(t)}{dt} = 0{,}004\cdot\frac{250}{9}\;\mathrm{e}^{-\frac{t}{0{,}012}} = \frac{1}{9}\;\mathrm{e}^{-\frac{t}{0{,}012}}\;\mathrm{A}$$

5.3. Enunciado

El circuito de la figura se encuentra en régimen permanente. En el instante $t = 0$ se abre el interruptor. Calcular u_1 y u_2 para $t > 0$.

Datos: $E = 15\,\mathrm{V}$; $R_1 = 200\,\Omega$; $R_2 = 100\,\Omega$; $C_1 = 2\,\mu\mathrm{F}$; $C_2 = 4\,\mu\mathrm{F}$



Solución

1. El circuito para $t < 0$ tiene el interruptor cerrado. Al estar alimentado por CC, los condensadores se comportan como circuitos abiertos, por lo que:

$$I = \frac{E}{R_{eq}} = \frac{15}{200+100} = 0{,}05\,\mathrm{A}$$
$$U_{R100} = R_{100}\cdot I = 100\cdot 0{,}05 = 5\,\mathrm{V}$$
$$u_{C1}(0^-) = u_{C2}(0^-) = U_{R100} = 5\,\mathrm{V}$$

Por continuidad, se deduce que $u_{C1}(0^-) = u_{C1}(0^+) = u_{C2}(0^-) = u_{C2}(0^+) = 5\,\mathrm{V}$

2. Para $t > 0$, el interruptor se abre, quedando dos circuitos independientes.

   a) **Circuito de la izquierda**
   La resistencia de Thévenin vista desde los extremos del condensador, cuando se anula la fuente de tensión, es:

$$R_{th1} = 200\,\Omega$$

   siendo la constante de tiempo:

$$\tau_1 = R_{th1}\,C_1 = 200\cdot 2\cdot 10^{-6} = 0{,}0004\,\mathrm{s}$$

   Para la respuesta en régimen permanente, se sustituye de nuevo el condensador por un circuito abierto (por estar alimentado en CC), siendo entonces:

$$u_{\infty 1}(t) = E = 15\,\mathrm{V}$$

   b) **Circuito de la derecha**
   La resistencia de Thévenin vista desde los extremos del condensador es:

$$R_{th2} = 100\,\Omega$$

   siendo la constante de tiempo:

$$\tau_2 = R_{th2}\,C_2 = 100\cdot 4\cdot 10^{-6} = 0{,}0004\,\mathrm{s}$$

   Para la respuesta en régimen permanente, al no haber ninguna fuente de alimentación:

$$u_{\infty 2}(t) = 0\,\mathrm{V}$$

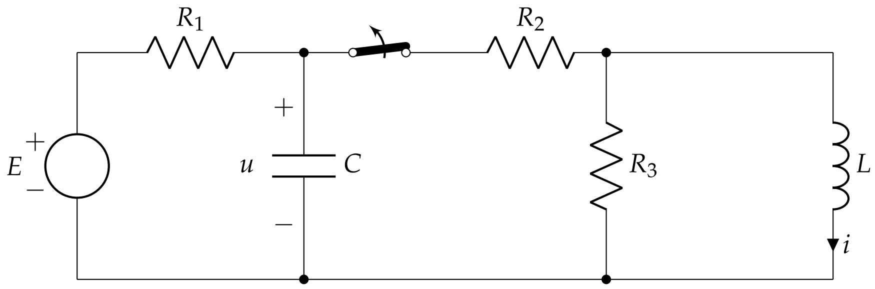
3. Las expresiones completas de $u_1(t)$ y $u_2(t)$ son:

$$u_1(t) = (5 - 15)\ \mathrm{e}^{-2500\,t} + 15 = 15 - 10\,\mathrm{e}^{-2500\,t}\ \mathrm{V}$$
$$u_2(t) = (5 - 0)\ \mathrm{e}^{-2500\,t} + 0 = 5\,\mathrm{e}^{-2500\,t}\ \mathrm{V}$$

5.4. Enunciado

El interruptor del circuito de la figura lleva cerrado un timepo que se considera infinito. En el instante $t = 0$, se abre y permanece en dicha posición definitivamente. Hállese la expresión de $u(t)$ e $i(t)$ para $t > 0$.

Datos: $E = 36\,\mathrm{V}$; $R_1 = 2\,\Omega$; $R_2 = 4\,\Omega$; $R_3 = 3\,\Omega$; $C = 3\,\mathrm{mF}$; $L = 6\,\mathrm{mH}$



Solución

1. El circuito para $t < 0$ tiene el interruptor cerrado. Al estar alimentado por CC, el condensador se comporta como circuito abierto y la bobina como cortocircuito, por lo que la resistencia de 3Ω queda cortocircuitada:

$$I = \frac{E}{R_{eq}} = \frac{36}{2+4} = 6\,\mathrm{A}$$
$$i(0^-) = I = 6\,\mathrm{A}$$
$$u(0^-) = E - I\,R_2 = 36 - 6 \cdot 2 = 24\,\mathrm{V}$$

Por continuidad, se deduce que $i(0^-) = i(0^+) = 6$ A y $u(0^-) = u(0^+) = 24\,\mathrm{V}$

2. Para $t > 0$, el interruptor se abre, quedando dos circuitos independientes.

a) **Circuito de la izquierda**
La resistencia de Thévenin vista desde los extremos del condensador, cuando se anula la fuente de tensión, es:

$$R_{th1} = 2\,\Omega$$

siendo la constante de tiempo:

$$\tau_1 = R_{th1}\,C = 2 \cdot 3 \cdot 10^{-3} = 0{,}006\,\mathrm{s}$$

Para la respuesta en régimen permanente, se sustituye de nuevo el condensador por un circuito abierto (por estar alimentado en CC), siendo entonces:

$$u_\infty(t) = E = 36\,\mathrm{V}$$

b) **Circuito de la derecha**
La resistencia de Thévenin vista desde los extremos de la bobina es:

$$R_{th2} = 3\,\Omega$$

siendo la constante de tiempo:

$$\tau_2 = \frac{L}{R_{th2}} = \frac{6 \cdot 10^{-3}}{3} = 0{,}002\,\mathrm{s}$$

Para la respuesta en régimen permanente, al no haber ninguna fuente de alimentación:

$$i_\infty(t) = 0\,\mathrm{A}$$

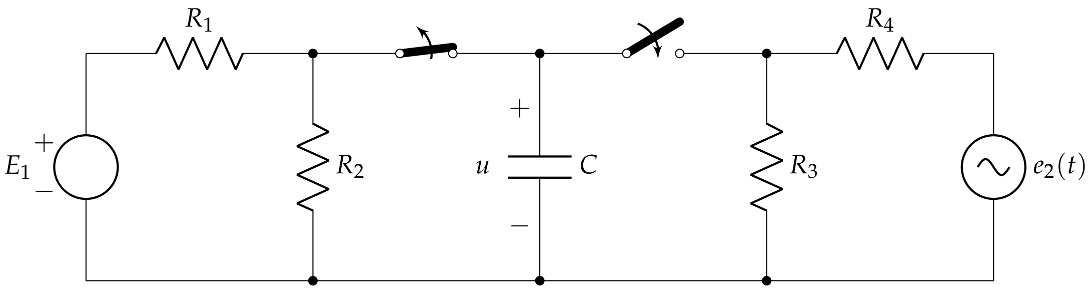
3. Las expresiones completas de $u(t)$ e $i(t)$ son:

$$u(t) = (24 - 36)\ \mathrm{e}^{-166{,}67\,t} + 36 = 36 - 12\,\mathrm{e}^{-166{,}67\,t}\ \mathrm{V}$$
$$i(t) = (6 - 0)\ \mathrm{e}^{-500\,t} + 0 = 6\,\mathrm{e}^{-500\,t}\ \mathrm{A}$$

5.5. Enunciado

El circuito de la figura lleva en esa posición un tiempo que se puede considerar infinito. En el instante $t = 0$, ambos interruptores cambian su posición. Calcular la expresión de $u(t)$ para $t > 0$.

Datos: $E_1 = 40\,\mathrm{V}$; $R_1 = 20\,\Omega$; $R_2 = 60\,\Omega$; $R_3 = 3\,\Omega$; $R_4 = 6\,\Omega$; $C = 0{,}5\,\mathrm{mF}$; $e_2(t) = 120\ \cos(1000t)\mathrm{V}$



Solución

1. El circuito para $t < 0$ tiene el interruptor de la izquierda cerrado y el de la derecha abierto. Por tanto, el condensador está alimentado por CC, comportándose como un circuito abierto:

$$I = \frac{E_{CC}}{R_{eq}} = \frac{40}{20 + 60} = 0{,}5\,\mathrm{A}$$
$$U_{R60} = I\,R_{60} = 0{,}5 \cdot 60 = 30\,\mathrm{V}$$
$$u(0^-) = U_{R60} = 30\,\mathrm{V}$$

Por continuidad, se deduce que $u(0^-) = u(0^+) = 30\,\mathrm{V}$

2. Para $t > 0$, el interruptor de la izquierda se abre y se cierra el de la derecha, quedando el condensador alimentado por la fuente de CA. La resistencia de Thévenin vista desde los extremos del condensador, cuando se anula la fuente de tensión, es:

$$R_{th} = \frac{6 \cdot 3}{6 + 3} = 2\,\Omega$$

siendo la constante de tiempo:

$$\tau = R_{th} \cdot C = 2 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-3} = 0{,}001\,\mathrm{s}$$

Para la respuesta en régimen permanente, se trabaja con fasores (considerando el valor eficaz), teniendo un circuito formado por dos resistencias (6 y 3 Ω) y un condensador ($\overline{X}_C = \frac{1}{\mathrm{j}\,\omega C} = \frac{1}{\mathrm{j}\,1000 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-3}} = -\mathrm{j}\,2\,\Omega$). La tensión del condensador:

$$\overline{Z}_{eq} = 6 + \frac{3\,(-\mathrm{j}2)}{3 - \mathrm{j}2} = 7{,}06\angle{-11{,}31^\circ}\,\Omega$$
$$\overline{I}_T = \frac{\overline{E}_{CA}}{\overline{Z}_{eq}} = \frac{\frac{120}{\sqrt{2}}\angle{0^\circ}}{7{,}06\angle{-11{,}31^\circ}} = 12{,}02\angle{11{,}31^\circ}\,\mathrm{A}$$
$$\overline{U}_{\text{paralelo}} = \overline{U}_C = \overline{I}_T \cdot \overline{Z}_{\text{paralelo}} = 12{,}02\angle{11{,}31^\circ} \cdot \frac{3\,(-\mathrm{j}2)}{3 - \mathrm{j}2} = 20\angle{-45^\circ}\,\mathrm{V}$$
$$u_\infty(t) = 20\sqrt{2}\ \cos\left(1000\,t - \frac{\pi}{4}\right)\ \mathrm{V} \quad \rightarrow \quad u_\infty(0^+) = 20\,\mathrm{V}$$

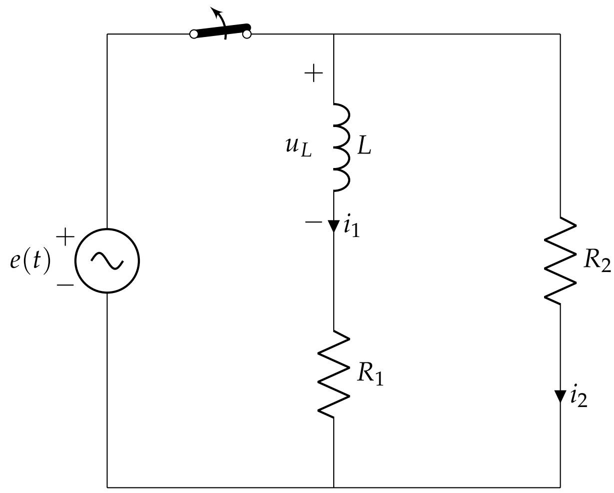
3. La expresión completa de $u(t)$ es:

$$u(t) = (30 - 20)\ \mathrm{e}^{-1000\,t} + 20\sqrt{2}\ \cos\left(1000\,t - \frac{\pi}{4}\right) = 10\,\mathrm{e}^{-1000\,t} + 20\sqrt{2}\ \cos\left(1000\,t - \frac{\pi}{4}\right)\ \mathrm{V}$$

5.6. Enunciado

En el circuito de la figura se abre el interruptor después de un tiempo suficientemente grande para considerar que el circuito funcionaba en régimen permanente. Expresar las formas de onda de i_1, i_2 y u_L para $t > 0$.

Datos: $e(t) = 220\sqrt{2}\,\cos(100\pi\,t)\,\mathrm{V}$; $L = 0{,}2\,\mathrm{H}$; $R_1 = 25\,\Omega$; $R_2 = 275\,\Omega$



Solución

1. El circuito para $t < 0$ tiene el interruptor cerrado:

$$\overline{X}_L = \mathrm{j}\,\omega\,L = \mathrm{j}\,2\cdot\pi\cdot 50\cdot 0{,}2 = \mathrm{j}\,20\pi\,\Omega$$

$$\overline{I}_1 = \frac{\overline{E}}{R_{25} + \overline{X}_L} = \frac{220\underline{/0}}{25 + \mathrm{j}\,20\pi} = 3{,}25\underline{/-68{,}303^\circ}\,A \quad \rightarrow \quad i_1(t) = 3{,}25\sqrt{2}\,\cos(100\pi\,t - 1{,}192)\,\mathrm{A}$$

Por tanto, en $t = 0^-$ la corriente en la bobina es $i_1(0^-) = 1{,}7\,\mathrm{V} = i_1(0^+)$, por continuidad.

2. Para $t > 0$, el interruptor se abre, quedando el circuito sin alimentación externa. La resistencia de Thévenin vista desde los extremos de la bobina es:

$$R_{th} = 275 + 25 = 300\,\Omega$$

siendo la constante de tiempo:

$$\tau = \frac{L}{R_{th}} = \frac{0{,}2}{300} = 0{,}00067\,\mathrm{s}$$

Para la respuesta en régimen permanente, al no haber fuente de alimentación:

$$i_{\infty 1} = 0$$

3. La expresión completa de $i_1(t)$ es:

$$i_1(t) = (1{,}7 - 0)\,\mathrm{e}^{-1500\,t} + 0 = 1{,}7\,\mathrm{e}^{-1500\,t}\,\mathrm{A}$$

La tensión en la bobina se puede determinar a partir de su relación con la corriente:

$$u_L(t) = L\,\frac{d\,i(t)}{dt}$$

$$\frac{d\,i(t)}{dt} = 1{,}7\cdot(-1500)\,\mathrm{e}^{-1500\,t} = -2550\,\mathrm{e}^{-1500\,t}\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{s}}$$

$$u_L(t) = L\,\frac{d\,i(t)}{dt} = 0{,}2\cdot(-2550)\,\mathrm{e}^{-1500\,t} = -510\,\mathrm{e}^{-1500\,t}\,\mathrm{V}$$

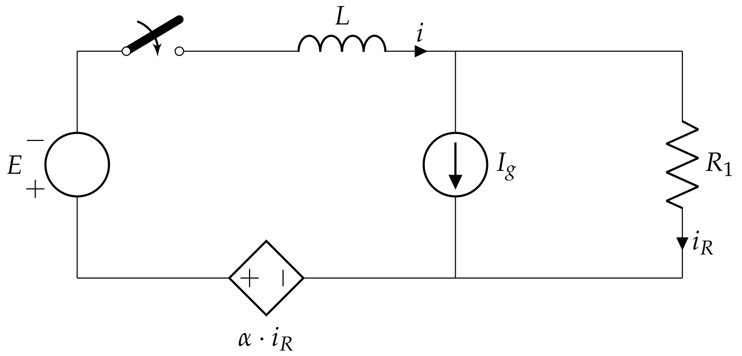
y, al estar únicamente la malla de resistencias y bobina:

$$i_2(t) = -1{,}7\,\mathrm{e}^{-1500\,t}\,\mathrm{A}$$

5.7. Enunciado

En el circuito de la figura, en $t = 0$ se cierra el interruptor. Obtener la expresión analítica de la intensidad $i(t)$, para $t > 0$.

Datos: $E = 10\,\mathrm{V}$; $L = 0{,}2\,\mathrm{H}$; $I_g = 1\,\mathrm{A}$; $R_1 = 10\,\Omega$; $\alpha = 3\,\Omega$



Solución

1. El circuito para $t < 0$ tiene el interruptor abierto, por lo que:

$$i(0^-) = 0\,\mathrm{A}$$

Por continuidad, $i(0^-) = i(0^+) = 0\,\mathrm{A}$

2. Para $t > 0$, el interruptor se cierra. Para calcular la resistencia de Thévenin apagamos los generadores independientes y conectamos un generador de prueba en los terminales de la bobina. Obtenemos:

$$\begin{aligned} \epsilon_0 &= 3 \cdot i_r + 10\, I_0 \\ i_r &= -I_0 \\ R_{th} &= \frac{\epsilon_0}{I_0} = 7\,\Omega \end{aligned}$$

siendo la constante de tiempo:

$$\tau = \frac{L}{R_{th}} = \frac{0{,}2}{7} = 0{,}0286\,\mathrm{s}$$

Para la respuesta en régimen permanente, la bobina sería un cortocircuito (por ser CC), por lo que:

$$-10 + 3 \cdot i_r = 10 \cdot i_r \quad \rightarrow \quad i_r = -\frac{10}{7}\,\mathrm{A}$$

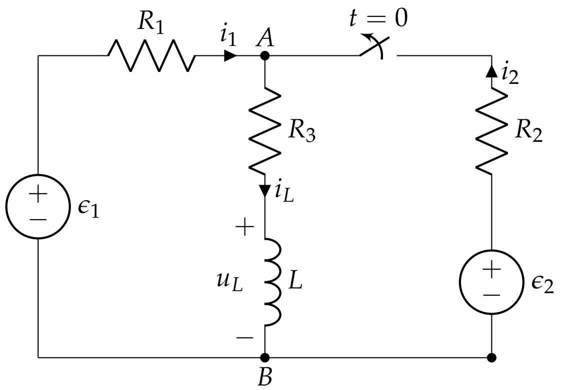
$$i_\infty = I_g + i_r = -\frac{3}{7}\,\mathrm{A}$$

3. La expresión completa de $i(t)$ es:

$$i(t) = \left(0 - \left(-\frac{3}{7}\right)\right) \mathrm{e}^{-35\,t} + \left(-\frac{3}{7}\right) = \frac{3}{7}\,(\mathrm{e}^{-35\,t} - 1)\ \mathrm{A}$$

5.8. Enunciado

El interruptor de la figura ha estado cerrado por un tiempo prolongado y en $t = 0$ se abre.



Datos:

$$R_1 = 5\,\Omega$$
$$R_2 = 5\,\Omega$$
$$R_3 = 2\,\Omega$$
$$L = 3{,}5\,\text{mH}$$
$$\epsilon_1 = 24\,\text{V}$$
$$\epsilon_2 = 12\,\text{V}$$

Con esta información, se debe calcular:

1. Valores de $i_1(0^+)$, $i_2(0^+)$, $i_L(0^+)$, $u_L(0^+)$ y $u_{AB}(0^+)$.
2. Expresión de $i_L(t)$ para $t > 0$.
3. Expresiones de $u_L(t)$ y $u_{AB}(t)$ para $t > 0$.

Solución

En el circuito en $t < 0$, la bobina se comporta como un cortocircuito. Resolviendo por mallas el circuito resultante, obtenemos los valores para $t = 0^-$:

$$\begin{aligned} i_L(0^-) &= 4\,\text{A} \\ i_1(0^-) &= 3{,}2\,\text{A} \\ i_2(0^-) &= 0{,}8\,\text{A} \end{aligned}$$

En la bobina podemos plantear la condición de continuidad, $i_L(0^-) = i_L(0^+)$, que nos permite obtener los valores para $t = 0^+$, una vez abierto el interruptor:

$$\begin{aligned} i_L(0^+) &= 4\,\text{A} \\ i_1(0^+) &= i_L(0^+) \\ i_2(0^+) &= 0\,\text{A} \\ u_L(0^+) &= \epsilon_1 - i_1(0^+) \cdot R_1 - i_L(0^+) \cdot R_3 = -4\,\text{V} \\ u_{AB}(0^+) &= \epsilon_1 - i_1(0^+) \cdot R_1 = 4\,\text{V} \end{aligned}$$

Analizamos ahora el circuito para $t > 0$, en el que el interruptor está abierto. La resistencia vista por la bobina es $R_{th} = R_1 + R_3 = 7\,\Omega$. Por tanto:

$$\tau = \frac{L}{R_{th}} = 500\,\mu\text{s}$$

Obtenemos la respuesta forzada analizando el circuito en régimen permanente, en el que la bobina se comportará como un cortocircuito:

$$i_{L,\infty}(t) = \frac{\epsilon_1}{R_1 + R_3} = 3{,}43\,\text{A}$$

Obtenemos la respuesta natural apagando la fuente ϵ_1. La ec. diferencial correspondiente a este circuito es:

$$(R_1 + R_3) \cdot i_{L,n}(t) \, + \, L \, \frac{d\, i_{L,n}(t)}{dt} \, = \, 0$$

Cuya solución es de la forma:

$$i_{L,n}(t) = K \cdot e^{-t/\tau} = K \cdot e^{-2000 \cdot t}$$

Para obtener la constante K, recurrimos a la condición inicial $i_L(0^+) = 4\,\mathrm{A}$:

$$K = i_L(0^+) - i_{L,\infty}(0^+) = 4 - 3{,}43 = 0{,}57\,\mathrm{A}$$

Por tanto:

$$i_L(t) = i_{L,n}(t) + i_{L,\infty}(t) = 3{,}43 + 0{,}57 \cdot e^{-2000 \cdot t}\ \mathrm{A}$$

Con este resultado podemos obtener las tensiones en el circuito:

$$u_L(t) = L \cdot \frac{d\,i_L}{dt} = 3{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}57 \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot e^{-2000 \cdot t} = -4 \cdot e^{-2000 \cdot t}\ \mathrm{V}$$

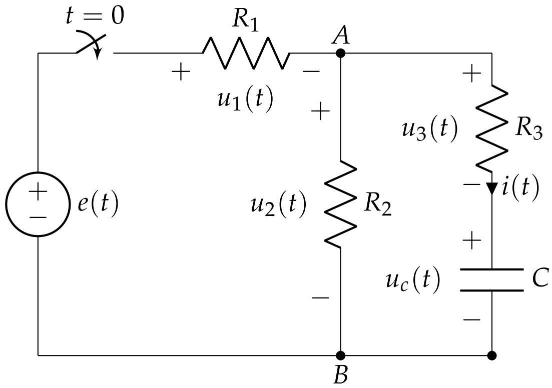
$$u_{AB}(t) = u_L(t) + R_3 \cdot i_L(t) = 6{,}86 - 2{,}86 \cdot e^{-2000 \cdot t}\ \mathrm{V}$$

Comprobamos que estas expresiones concuerdan con los resultados obtenidos para $u_L(0^+)$ y $u_{AB}(0^+)$.

5.9. Enunciado

El interruptor del circuito de la figura lleva abierto un tiempo indefinido. En el instante $t = 0$ se cierra este interruptor. Hay que obtener:

1. Valores de las tensiones $u_1(0^+)$, $u_2(0^+)$, $u_3(0^+)$ y $u_c(0^+)$.
2. Expresión temporal de la tensión $u_c(t)$ para $t > 0$.
3. Expresiones temporales de $u_2(t)$ y $u_3(t)$ para $t > 0$.



Datos:

$e(t) = 10\,\mathrm{V}$

$R_1 = R_2 = 2\,\Omega$

$R_3 = 4\,\Omega$

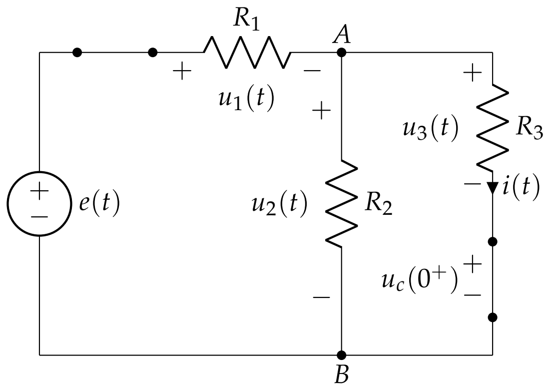
$C = 1\,\mathrm{F}$

Solución

1. En $t < 0$, dado que el interruptor lleva abierto un tiempo largo, la fuente está aislada del circuito, por lo que el condensador se comporta como un circuito abierto.

   En estas condiciones $u_c(0^-) = 0\,\mathrm{V}$. Debido a la condición de continuidad, $u_c(0^+) = u_c(0^-) = 0\,\mathrm{V}$.

   Con este resultado podemos determinar el resto de tensiones del circuito en $t = 0^+$, teniendo en cuenta que el interruptor está cerrado y el condensador es equivalente a un cortocircuito ($u_c(0^+) = 0\,\mathrm{V}$).

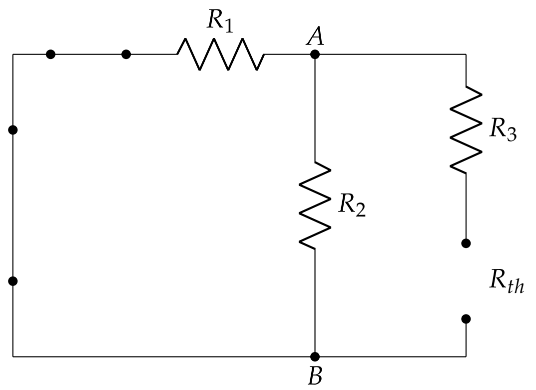


En este circuito, R_2 y R_3 están en paralelo entre sí, siendo $R_{23} = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}$. Esta resistencia paralelo está en serie con R_1, formando un divisor de tensión. Por tanto:

$$u_2(0^+) = u_3(0^+) = e(t) \cdot \frac{R_{23}}{R_1 + R_{23}} = 4\,\text{V}$$

$$\text{Por 2LK:} \qquad u_1(0^+) = e(t) - u_2(0^+) = 6\,\text{V}$$

2. Analizamos ahora el circuito para $t > 0$, obteniendo la respuesta forzada y la respuesta natural:



Planteamos el equivalente de Thévenin (apagando la fuente de tensión) para calcular la resistencia vista por el condensador:

$$R_{th} = R_3 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = 5\,\Omega$$

Por tanto:

$$\tau = \frac{C}{G_{th}} = 5\,\text{s}$$

Obtenemos la respuesta forzada analizando el circuito en régimen permanente, en el que el condensador se comportará como un circuito abierto:

$$u_{C,\infty}(t) = e(t) \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 5\,\text{V}$$

Obtenemos la respuesta natural resolviendo la ec. homogénea (apagando la fuente $e(t)$). Su solución es:

$$u_{C,n}(t) = A \cdot e^{-t/\tau} = A \cdot e^{-0{,}2\,t}$$

Para obtener la constante A, recurrimos a la condición inicial $u_C(0^+) = 0\,\text{V}$:

$$A = u_{C,n}(t = 0^+) = u_C(0^+) - u_{C,\infty}(0^+) = 0 - 5 = -5\,\text{V}$$

Por tanto:

$$u_C(t) = u_{C,n}(t) + u_{C,\infty}(t) = 5 \cdot (1 - e^{-0{,}2\,t})\ \text{V}$$

3. Con este resultado podemos obtener la corriente que circula por el condensador:

$$i_C(t) = C \cdot \frac{d\,u_C}{dt} = (-5) \cdot (-0{,}2) \cdot e^{-0{,}2\,t} = e^{-0{,}2\,t}\,\text{A}$$

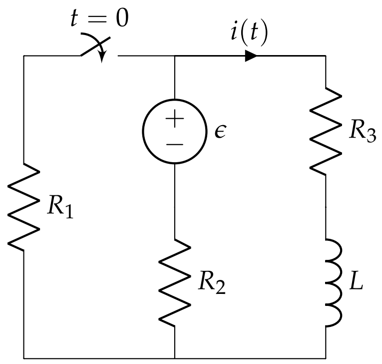
y a partir de esta, las tensiones en las resistencias:

$$u_{R3}(t) = R_3 \cdot i_C(t) = 4 \cdot e^{-0{,}2\,t}\ \text{V}$$

$$u_{R2}(t) = u_{R3}(t) + u_C(t) = 5 - e^{-0{,}2\,t}\ \text{V}$$

5.10. Enunciado

Calcular la corriente $i(t)$ para $t > 0$.

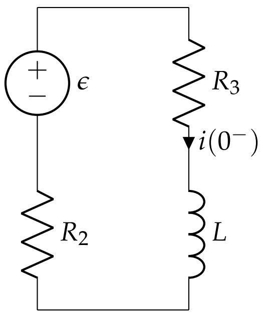


Datos:

$$\begin{aligned}\epsilon &= 24\,\mathrm{V}\\ R_1 &= 8\,\Omega\\ R_2 &= 4\,\Omega\\ R_3 &= 4\,\Omega\\ L &= 15\,\mathrm{H}\end{aligned}$$

Solución

Calculamos las condiciones iniciales ($t = 0^-$). Dibujamos el circuito para $t < 0$ y obtenemos:

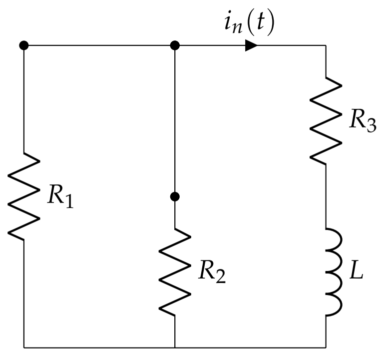


$$i(t) = \frac{\epsilon}{R_2 + R_3}$$

Por tanto, $i(0^-) = 3\,\mathrm{A}$. Al tratarse de una bobina, $i(0^+) = i(0^-) = 3\,\mathrm{A}$.

A continuación dibujamos el circuito para $t > 0$ para obtener la respuesta natural y la respuesta forzada.

Para obtener la respuesta natural, apagamos las fuentes. En este circuito obtenemos:



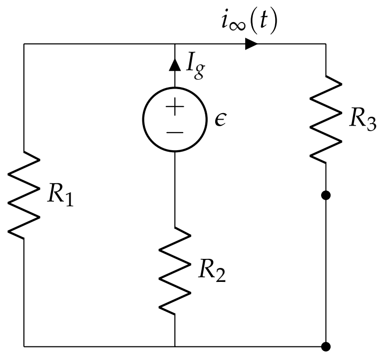
$$R_{th} = R_3 + (R_1 \parallel R_2) = \frac{20}{3}\,\Omega$$

$$\tau = \frac{L}{R_{th}} = \frac{9}{4}\,\mathrm{s}$$

$$i_n(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = A \cdot e^{-4t/9}$$

Queda por determinar la constante de integración.

Para obtener la respuesta forzada volvemos a activar las fuentes. En este circuito obtenemos:



$$I_g = \frac{\epsilon}{R_2 + (R_1 \parallel R_3)}$$

$$i_\infty(t) = I_g \cdot \frac{G_3}{G_3 + G_1} = 2{,}4\,\mathrm{A}$$

Con estos dos resultados podemos obtener la respuesta completa:

$$i(t) = i_n(t) + i_\infty(t)$$
$$i(t) = A \cdot e^{-4t/9} + 2{,}4 \text{ A}$$

Para determinar la constante de integración recurrimos a las condiciones iniciales:

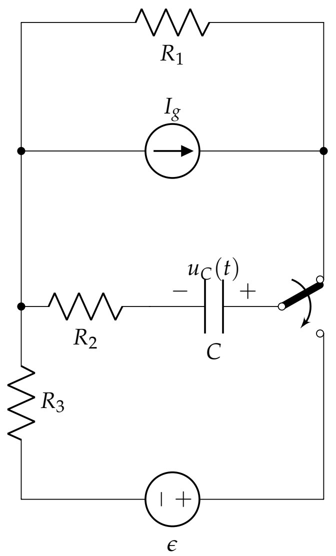
$$i(0^+) = A + 2{,}4$$
$$i(0^+) = 3$$
$$A = 0{,}6$$

Por tanto:

$$i(t) = 0{,}6 \cdot e^{-4t/9} + 2{,}4 \text{ A}$$

5.11. Enunciado

Calcular la tensión en bornes del condensador para $t > 0$.

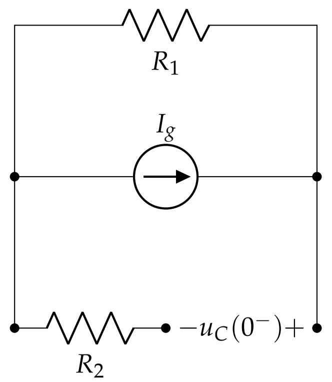


Datos:

$$\epsilon = 20\,\text{V}$$
$$I_g = 4\,\text{A}$$
$$R_1 = 6\,\Omega$$
$$R_2 = 4\,\Omega$$
$$R_3 = 12\,\Omega$$
$$C = 1/16\,\text{F}$$

Solución

Calculamos las condiciones iniciales ($t = 0^-$). Dibujamos el circuito para $t < 0$ y obtenemos:

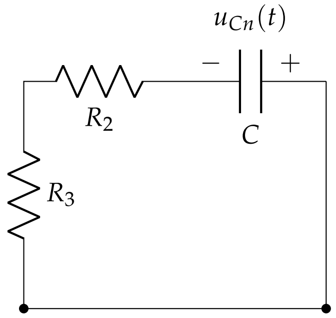


$$u_C(t) = I_g \cdot R_1$$

Por tanto, $u_c(0^-) = 24\,\text{V}$. Al tratarse de un condensador, $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 24\,\text{V}$.

A continuación dibujamos el circuito para $t > 0$ para obtener la respuesta natural y la respuesta forzada.

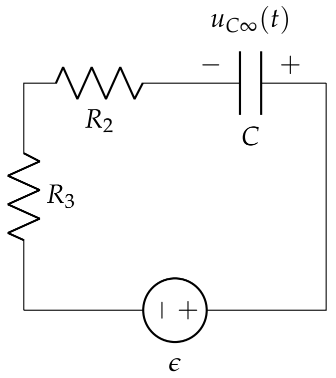
Para obtener la respuesta natural apagamos las fuentes. En este circuito obtenemos:



$$R_{th} = R_2 + R_3 = 16\,\Omega$$
$$\tau = C/G_{th} = 1\,\text{s}$$
$$u_{Cn}(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = A \cdot e^{-t}$$

Queda por determinar la constante de integración.

Para obtener la respuesta forzada, volvemos a activar las fuentes. En este circuito obtenemos:



$$u_{c\infty}(t) = \epsilon = 20\,\text{V}$$

Con estos dos resultados podemos obtener la respuesta completa:

$$u_C(t) = u_{Cn}(t) + u_{c\infty}(t)$$
$$u_C(t) = A \cdot e^{-t} + 20$$

Para determinar la constante de integración recurrimos a las condiciones iniciales:

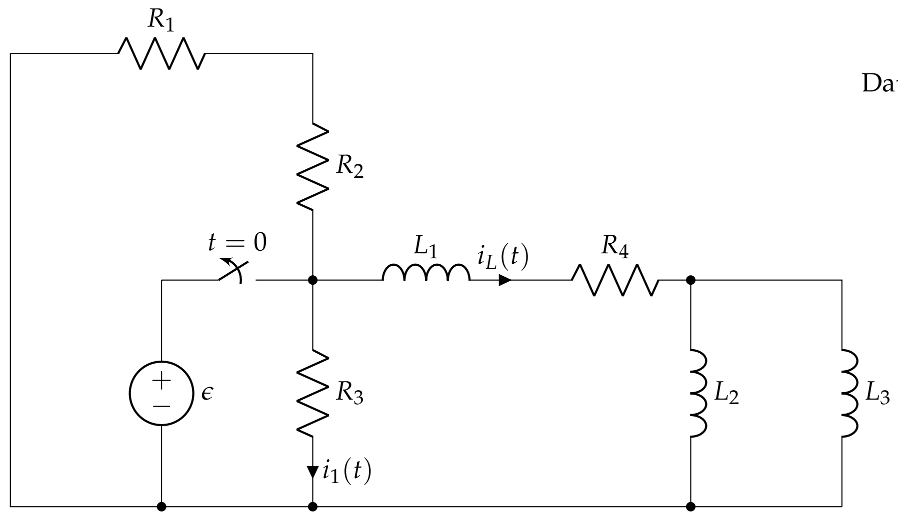
$$u_C(0^+) = A + 20$$
$$u_C(0^+) = 24$$
$$A = 4\,\text{V}$$

Por tanto:

$$u_C(t) = 4 \cdot e^{-t} + 20\ \text{V}$$

5.12. Enunciado

Determina las corrientes $i_L(t)$ e $i_1(t)$ para $t > 0$.

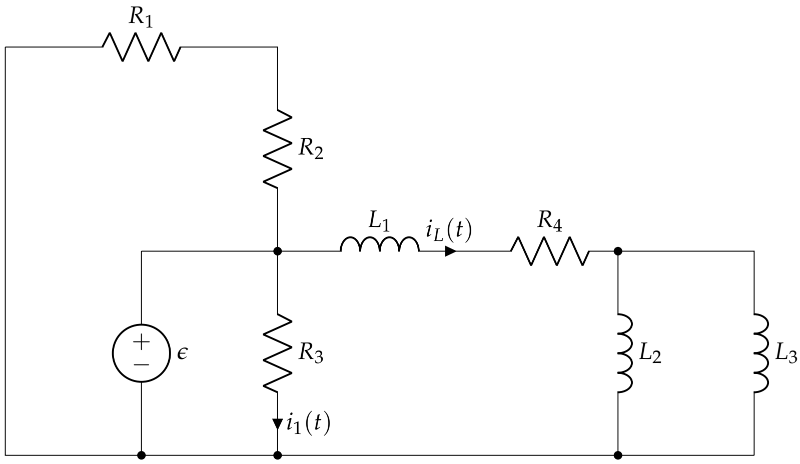


Datos:

$$\epsilon = 18\,\text{V}$$
$$R_1 = 120\,\Omega$$
$$R_2 = 60\,\Omega$$
$$R_3 = 90\,\Omega$$
$$R_4 = 50\,\Omega$$
$$L_1 = 1\,\text{mH}$$
$$L_2 = 2\,\text{mH}$$
$$L_3 = 3\,\text{mH}$$

Solución

Calculamos las condiciones iniciales ($t = 0^-$). Dibujamos el circuito para $t < 0$:



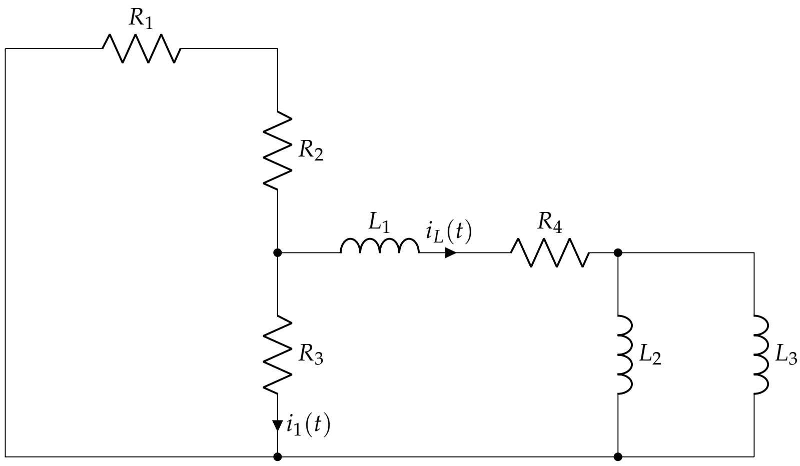
Obtenemos:

$$i_L(t) = \frac{\epsilon}{R_4} = 360\,\text{mA}$$

Al tratarse de una bobina, $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 360\,\text{mA}$.

En este circuito podemos calcular $i_1(0^-) = \frac{\epsilon}{R_3} = 200\,\text{mA}$. Este valor nos servirá de referencia cuando calculemos $i_1(t)$.

A continuación dibujamos el circuito para $t > 0$ para obtener la respuesta natural y la respuesta forzada. En el circuito resultante no hay fuentes, por lo que únicamente tendremos respuesta natural.



$$\begin{aligned}
L_{eq} &= L_1 + L_2||L_3 = 2{,}2\,\text{mH} \\
R_{th} &= (R_1 + R_2)||R_3 + R_4 = 110\,\Omega \\
\tau &= L_{eq}/R_{th} = 20\,\mu\text{s} \\
i_{Ln}(t) &= A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = A \cdot e^{-5\cdot 10^4 \cdot t}
\end{aligned}$$

Queda por determinar la constante de integración. Dado que la respuesta forzada es 0 podemos calcular directamente esta constante con la respuesta natural y las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned}
i_L(t) &= i_{Ln}(t) = A \cdot e^{-5\cdot 10^4 \cdot t} \\
i_L(0^+) &= A = 0{,}36
\end{aligned}$$

Por tanto:

$$i_L(t) = 0{,}36 \cdot e^{-5\cdot 10^4 \cdot t}\ \mathrm{A}$$

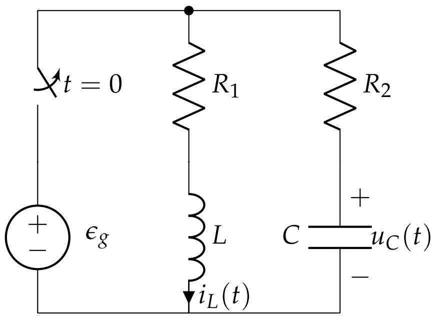
Para calcular la corriente $i_1(t)$ usamos un divisor de corriente a partir de $i_L(t)$:

$$i_1(t) = -i_L(t) \cdot \frac{1/R_3}{1/R_3 + 1/(R_1+R_2)} = -0{,}24 \cdot e^{-5\cdot 10^4 \cdot t}\ \mathrm{A}$$

En el primer apartado habíamos obtenido $i_1(0^-) = 200\,\mathrm{mA}$. Con esta ecuación obtenemos $i_1(0^+) = -240\,\mathrm{mA}$. Los valores no coinciden porque en una resistencia no hay condición de continuidad.

5.13. Enunciado

El circuito de la figura ha alcanzado el régimen permanente con el interruptor cerrado. El interruptor se abre en $t = 0$. Calcula las expresiones de la tensión en bornes del condensador y de la corriente por la bobina para $t > 0$.

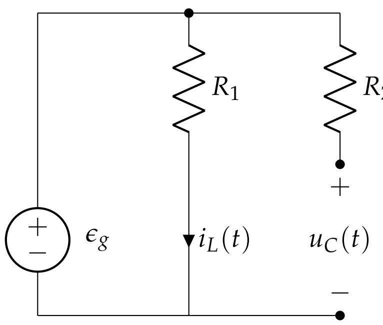


Datos:

$$\begin{aligned} \epsilon_g &= 10\,\mathrm{V} \\ R_1 &= 10\,\Omega \\ R_2 &= 5\,\Omega \\ L &= 2{,}5\,\mathrm{H} \\ C &= 0{,}2\,\mathrm{F} \end{aligned}$$

Solución

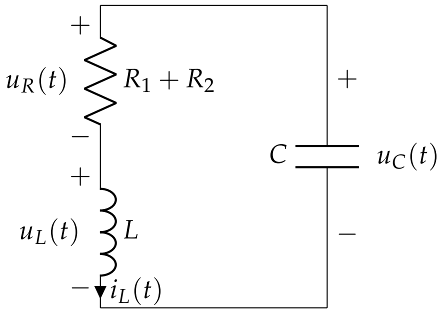
Calculamos las condiciones iniciales ($t = 0^-$). Dibujamos el circuito para $t < 0$ y obtenemos:



$$u_C(t) = 10\,\mathrm{V}$$
$$i_L(t) = \frac{\epsilon_g}{R_1} = 1\,\mathrm{A}$$

Por tanto, $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 10\,\mathrm{V}$ y $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 1\,\mathrm{A}$.

A continuación dibujamos el circuito para $t > 0$ para obtener la respuesta natural y la respuesta forzada. En el circuito resultante no hay fuentes, por lo que no habrá respuesta forzada.

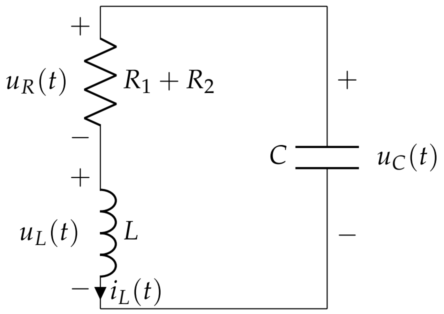


$$\alpha = \frac{R}{2L} = 3\,\mathrm{s}^{-1}$$
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \sqrt{2}\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$$

Dado que $\alpha > \omega_0$, se trata de un transitorio sobreamortiguado:

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -0{,}354\,\mathrm{s}^{-1}$$
$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -5{,}645\,\mathrm{s}^{-1}$$
$$i_L(t) = A_1 \cdot e^{-0{,}354 \cdot t} + A_2 \cdot e^{-5{,}645 \cdot t}$$

Para determinar las constantes de integración recurrimos a las condiciones iniciales:



$$u_R(t) + u_L(t) = u_C(t)$$
$$u_L(0^+) = u_C(0^+) - u_R(0^+)$$
$$u_R(0^+) = (R_1 + R_2) \cdot i_L(0^+) = 15\,\mathrm{V}$$
$$u_L(0^+) = 10 - 15 = -5\,\mathrm{V}$$

Por tanto:

$$i_L(0^+) = 1\,\mathrm{A}$$
$$\left.\frac{di_L(t)}{dt}\right|_{t=0^+} = \frac{1}{L} \cdot u_L(0^+) = -2\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{s}}$$

Con estos resultados, particularizamos la ecuación de $i_L(t)$ para $t = 0$ y así planteamos las ecuaciones para obtener A_1 y A_2:

$$i_L(0^+) = A_1 + A_2 = 1$$
$$\left.\frac{d\,i_L(t)}{dt}\right|_{t=0^+} = A_1 \cdot s_1 + A_2 \cdot s_2 = -2$$

Por tanto:

$$A_1 = 0{,}689\,\mathrm{A}$$
$$A_2 = 0{,}311\,\mathrm{A}$$

Finalmente:

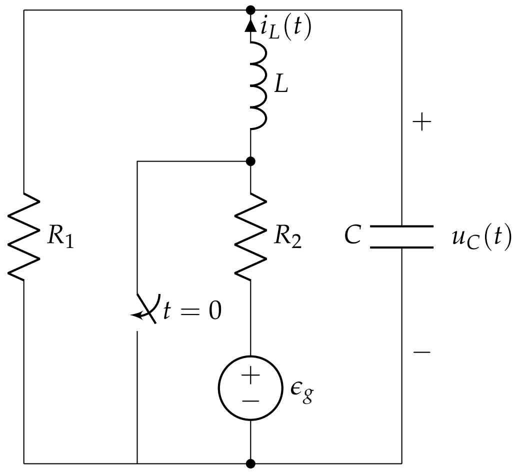
$$i_L(t) = 0{,}689 \cdot e^{-0{,}354 \cdot t} + 0{,}311 \cdot e^{-5{,}645 \cdot t}\ \mathrm{A}$$

Para obtener la tensión en el condensador recurrimos a la LKV:

$$\begin{aligned} u_C(t) &= u_R(t) + u_L(t) = \\ &= (R_1 + R_2) \cdot i_L(t) + L\,\frac{d\,i_L(t)}{dt} = \\ &= 9{,}728 \cdot e^{-0{,}354 \cdot t} + 0{,}275 \cdot e^{-5{,}645 \cdot t}\ \mathrm{V} \end{aligned}$$

5.14. Enunciado

En el circuito de la figura, calcular la tensión $u_C(t)$ para $t > 0$.

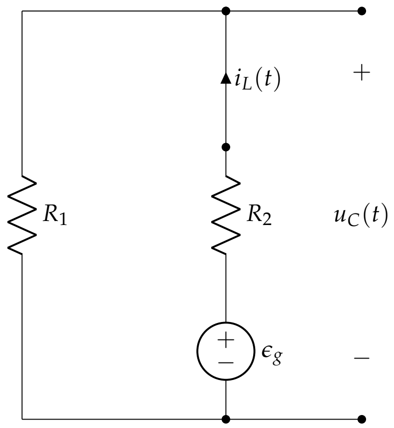


Datos:

$$\epsilon_g = 4\,\mathrm{V}$$
$$R_1 = 2\,\Omega$$
$$R_2 = 2\,\Omega$$
$$L = 1\,\mathrm{H}$$
$$C = 0{,}25\,\mathrm{F}$$

Solución

Calculamos las condiciones iniciales ($t = 0^-$). Dibujamos el circuito para $t < 0$ y obtenemos:

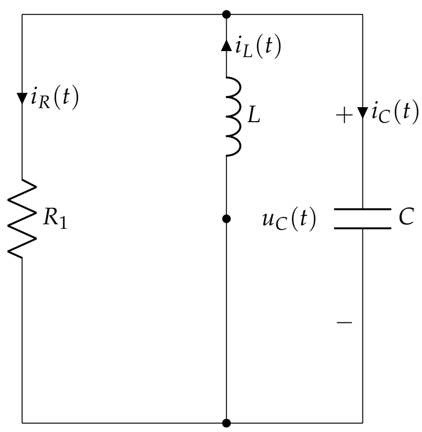


$$i_L(t) = \frac{\epsilon_g}{R_1 + R_2} = 1\,\mathrm{A}$$

$$u_C(t) = R_1 \cdot i_L(t) = 2\,\mathrm{V}$$

Por tanto, $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 2\,\mathrm{V}$ y $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 1\,\mathrm{A}$.

A continuación dibujamos el circuito para $t > 0$, para obtener la respuesta natural y la respuesta forzada. En el circuito resultante no hay fuentes, por lo que no habrá respuesta forzada.

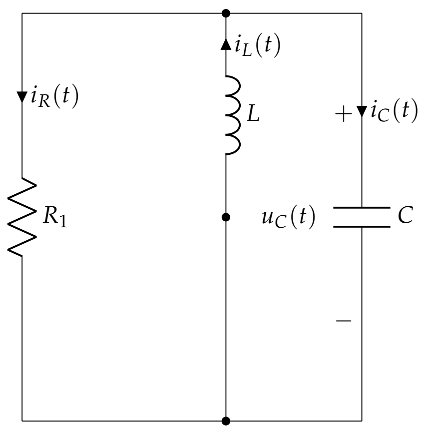


$$\alpha = \frac{G}{2C} = 1\,\mathrm{s}^{-1}$$
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$$

Dado que $\alpha < \omega_0$, se trata de un transitorio subamortiguado:

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \sqrt{3}\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$$
$$u_C(t) = [B_1 \cdot \cos(\sqrt{3} \cdot t) + B_2 \cdot \sin(\sqrt{3} \cdot t)] \cdot e^{-t}$$

Para determinar las constantes de integración recurrimos a las condiciones iniciales:



$$i_C(0^+) = i_L(0^+) - i_R(0^+)$$
$$i_R(0^+) = G_1 \cdot u_C(0^+) = 1\,\text{A}$$
$$i_C(0^+) = 1 - 1 = 0\,\text{A}$$

Por tanto:

$$u_C(0^+) = 2\,\text{V}$$
$$\left.\frac{du_C(t)}{dt}\right|_{t=0^+} = \frac{1}{C} \cdot i_C(0^+) = 0\,\frac{\text{V}}{\text{s}}$$

Con estos resultados, particularizamos la ecuación de $u_C(t)$ para $t = 0$ y así planteamos las ecuaciones para obtener B_1 y B_2:

$$u_C(0^+) = B_1 = 2\,\text{V}$$
$$\left.\frac{du_C(t)}{dt}\right|_{t=0^+} = \Big[- e^{-t} \cdot (2\cos(\sqrt{3}t) + B_2 \sin(\sqrt{3}t)) +$$
$$+ e^{-t} \cdot (-2\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t) + \sqrt{3}B_2\cos(\sqrt{3}t)) \Big]_{t=0^+} =$$
$$= 0$$

Por tanto:

$$B_1 = 2$$
$$B_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Finalmente:

$$u_C(t) = \mathrm{e}^{-t} \left[2\,\cos(\sqrt{3}\,t) + \frac{2}{\sqrt{3}}\,\sin(\sqrt{3}\,t) \right] = \frac{4\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{e}^{-t}\,\sin\left(\sqrt{3}\,t + \frac{\pi}{6}\right)\ \text{V}$$

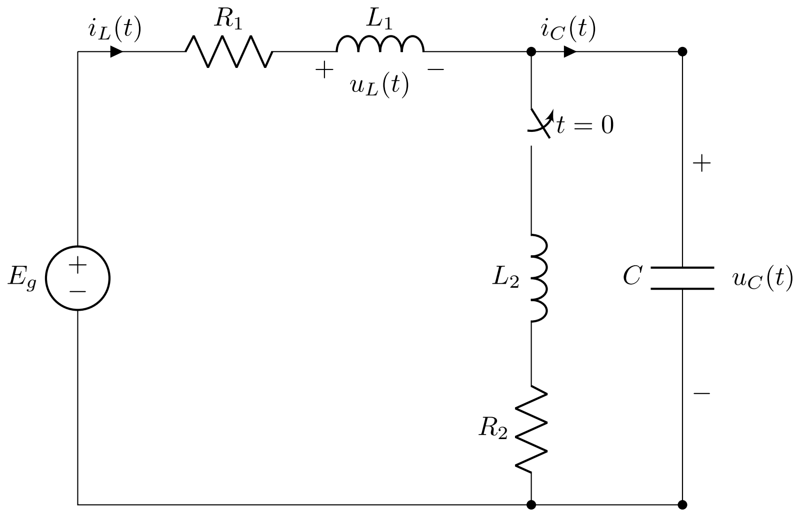
5.15. Enunciado

En el circuito de la figura el interruptor ha estado cerrado durante un tiempo elevado, y en $t = 0$ se abre. En estas condiciones se debe determinar:

1. Tipo de transitorio presente en el circuito.
2. Condiciones iniciales de las siguientes variables del circuito: $u_C(0^+)$, $i_L(0^+)$, $i_C(0^+)$, $u_L(0^+)$.
3. Valores en régimen permanente de las siguientes variables del circuito: $u_C(\infty)$, $i_L(\infty)$, $i_C(\infty)$, $u_L(\infty)$.
4. Expresión de la corriente $i_L(t)$ para $t > 0$.
5. Expresión de la tensión $u_C(t)$ para $t > 0$.

Datos:

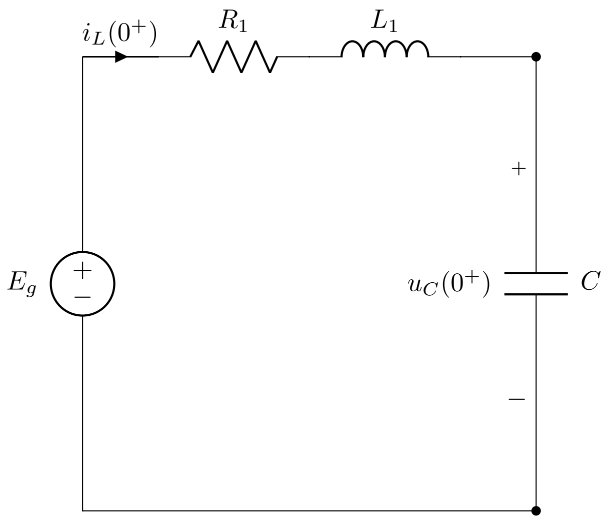
$$
\begin{aligned}
E_g &= 500\,\mathrm{V}\\
R_1 &= 375\,\Omega\\
R_2 &= 125\,\Omega\\
L_1 &= 40\,\mathrm{mH}\\
L_2 &= 40\,\mathrm{mH}\\
C &= 1\,\mu\mathrm{F}
\end{aligned}
$$



Solución

1. Tipo de transitorio

   La siguiente figura representa el circuito para $t > 0$.



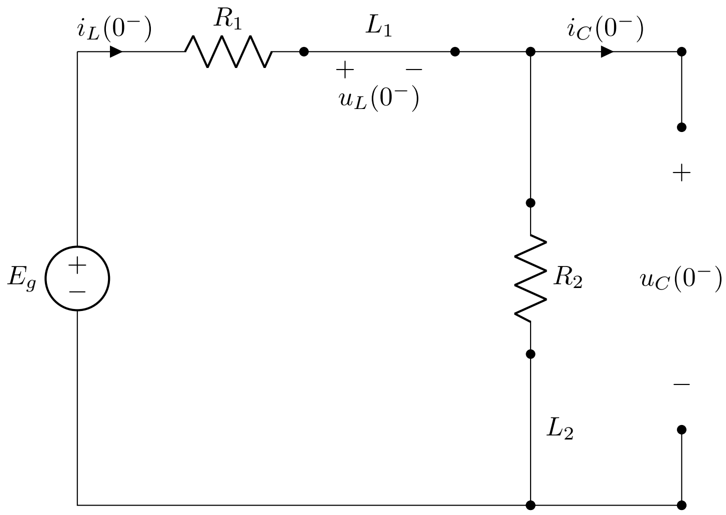
   Al apagar las fuentes en este circuito comprobamos que se trata de un RLC serie. Por tanto podemos calcular:

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \frac{R_1}{2L_1} = 4687{,}5\,\mathrm{s}^{-1}\\
\omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{L_1 C}} = 5000\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\\
\xi &= \frac{\alpha}{\omega_0} = 0{,}9375\\
\omega_d &= \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = 1740\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}
\end{aligned}
$$

   Dado que $\alpha < \omega_0$ ($\xi < 1$), el transitorio es subamortiguado.

2. Condiciones iniciales

   La siguiente figura representa el circuito para $t < 0$ en régimen permanente, con las variables particularizadas para $t = 0^-$.



En este circuito, teniendo en cuenta las condiciones de continuidad, se puede deducir que:

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 1\,\mathrm{A}$$
$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = 125\,\mathrm{V}$$

Además, considerando el circuito en $t = 0^+$:

$$E_g = u_R(0^+) + u_L(0^+) + u_C(0^+)$$

Por tanto:

$$u_L(0^+) = E_g - R_1 \cdot i_L(0^+) - u_C(0^+) = 0\,\mathrm{V}$$

Finalmente, $i_C(0^+) = i_L(0^+) = 1\,\mathrm{A}$.

3. Valores en régimen permanente.

   El circuito en régimen permanente está abierto debido al condensador. Por tanto:

$$u_c(\infty) = 500\,\mathrm{V}$$
$$u_L(\infty) = 0\,\mathrm{V}$$
$$i_c(\infty) = 0\,\mathrm{A}$$
$$i_L(\infty) = 0\,\mathrm{A}$$

4. Expresión de $i_L(t)$

   La expresión genérica de la corriente es:

$$i_L(t) = i_L(\infty) + e^{-\alpha t}\left(A_1 \operatorname{sen}(\omega_d t) + A_2 \cos(\omega_d t)\right)$$

siendo $\omega_d = \sqrt{\omega_o^2 - \alpha^2} = 1740\,\mathrm{rad/s}$.

Teniendo en cuenta las condiciones iniciales y el valor en régimen permanente obtenemos:

$$i_L(0^+) = 1 = A_2$$
$$\left.\frac{d\,i_L(t)}{dt}\right|_{t=0^+} = \frac{1}{L}\,u_L(0^+) = 0 = -\alpha A_2 + A_1\omega_d$$

La solución de este sistema es:

$$A_1 = \frac{\alpha}{\omega_d} = 2{,}7\,\mathrm{A}$$
$$A_2 = 1\,\mathrm{A}$$

Por tanto:

$$
\begin{aligned}
i_L(t) &= e^{-\alpha \cdot t}\left(\frac{\alpha}{\omega_d}\,\mathrm{sen}(\omega_d t) + \cos(\omega_d t)\right)\\
i_L(t) &= e^{-4687{,}5 \cdot t}\,(2{,}7\,\mathrm{sen}(1740 \cdot t) + \cos(1740 \cdot t))\\
&= 2{,}88 \cdot e^{-4687{,}5 \cdot t} \cdot \mathrm{sen}(1740 \cdot t + 0{,}3559)\ \mathrm{A}
\end{aligned}
$$

5. Expresión de $u_C(t)$

   A partir de la expresión anterior podemos calcular la correspondiente a la tensión en el condensador, teniendo en cuenta que:

$$
u_C(t) = E_g - R_1 \cdot i_L(t) - L_1\,\frac{d\,i_L(t)}{dt}
$$

$$
\begin{aligned}
u_C(t) &= 500 - e^{-4687{,}5 \cdot t}\,[435{,}9\,\mathrm{sen}(1740 \cdot t) + 375\cos(1740 \cdot t)]\\
&= 500 - 575{,}01 \cdot e^{-4687{,}5 \cdot t} \cdot \mathrm{sen}(1740 \cdot t + 0{,}7104)\ \mathrm{V}
\end{aligned}
$$

   Este resultado se puede comprobar mediante las condiciones iniciales:

$$
u_C(0^+) = 125\,\mathrm{V}
$$

$$
\left.\frac{d\,u_C(t)}{dt}\right|_{t=0^+} = \frac{1}{C}\,i_C(0^+) = 10^6\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{s}}
$$

Capítulo 6

Técnicas generales de análisis

Capítulo 7

Transformadores

Capítulo 8

Elementos activos