Problemas Resueltos de Teoría de Circuitos

Luis Badesa Bernardo
Carmelo Carrero López
Ana Fernández Guillamón
Ricardo Granizo Arrabé
Oscar Perpiñán Lamigueiro

Universidad Politécnica de Madrid

Índice general

1 Corriente continua 1

2 Corriente alterna monofásica 31

3 Corriente alterna trifásica 59

4 Teoremas fundamentales 61

5 Análisis transitorio 63

6 Técnicas generales de análisis 65

7 Transformadores 67

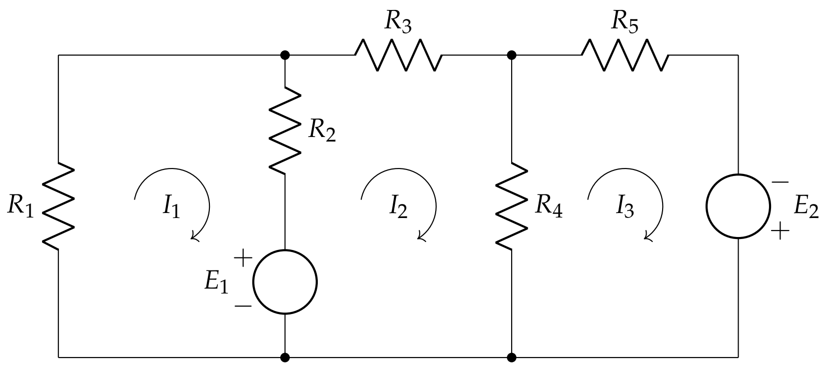
8 Elementos activos 69

Capítulo 1

Corriente continua

1.1. Enunciado

Calcular las corrientes de malla mostradas en el circuito de la figura.



Solución

Se plantea el sistema de ecuaciones en forma matricial, siendo de la forma $[R] \cdot [I] = [U]$. Cada $R_{i,i}$ de la matriz $[R]$ se corresponde con la suma de resistencias incluidas en la malla i; cada $\pm R_{ij}$ se corresponde con la suma de las resistencias incluidas en las ramas compartidas por las mallas i y j, con signo positivo $(+)$ si las corrientes van en el mismo sentido, y negativo $(-)$ en caso contrario; y cada $\sum \epsilon_i$ es la suma algebraica de las fuerzas electromotrices de los generadores de la malla i, considerando un signo positivo $(+)$ si contribuyen al giro de la corriente, y negativo $(-)$ en caso contrario (es decir, si la corriente sale por el polo $+$ de la fuente, se considera positivo; si sale por el polo $-$, se considera negativo). Así:

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 & 0 \\ -R_2 & R_2 + R_3 + R_4 & -R_4 \\ 0 & -R_4 & R_4 + R_5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -E_1 \\ E_1 \\ E_2 \end{bmatrix}$$

Reemplazando con los valores correspondientes, el sistema a resolver es:

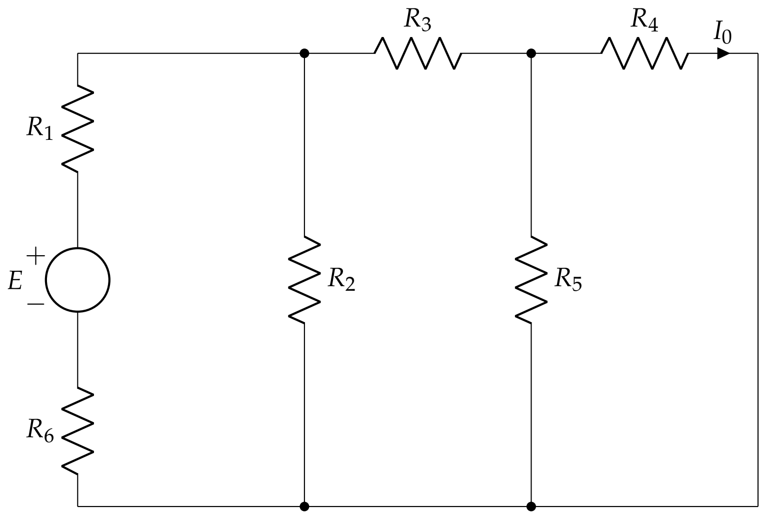
$$\begin{bmatrix} 7 & -5 & 0 \\ -5 & 19 & -4 \\ 0 & -4 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -25 \\ 25 \\ 50 \end{bmatrix}$$

cuya solución es:

$$I_1 = -1{,}31\,\mathrm{A}$$
$$I_2 = 3{,}17\,\mathrm{A}$$
$$I_3 = 10{,}45\,\mathrm{A}$$

1.2. Enunciado

Calcular el valor de E que hace que $I_0 = 7{,}5\,\mathrm{mA}$ en el circuito de la figura.



Solución

Siguiendo las mismas consideraciones del ejercicio anterior, se plantea el sistema de ecuaciones en forma matricial, suponiendo que las tres mallas van en sentido horario:

$$\begin{bmatrix} R_1+R_2+R_6 & -R_2 & 0 \\ -R_2 & R_2+R_3+R_5 & -R_5 \\ 0 & -R_5 & R_4+R_5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Reemplazando con los valores correspondientes, el sistema a resolver es:

$$\begin{bmatrix} 27 & -7 & 0 \\ -7 & 17 & -6 \\ 0 & -6 & 12 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde además se sabe el valor de $I_c = I_0 = 7{,}5\,\mathrm{mA}$. Por tanto, de la tercera ecuación se puede obtener el valor de I_b:

$$-6\,I_b + 12\,I_c = -6\,I_b + 12 \cdot 7{,}5 = 0 \Rightarrow 6\,I_b = 90 \Rightarrow I_b = \frac{90}{6} = 15\,\mathrm{mA}$$

Con I_b calculado, se utiliza la segunda ecuación para determinar I_a:

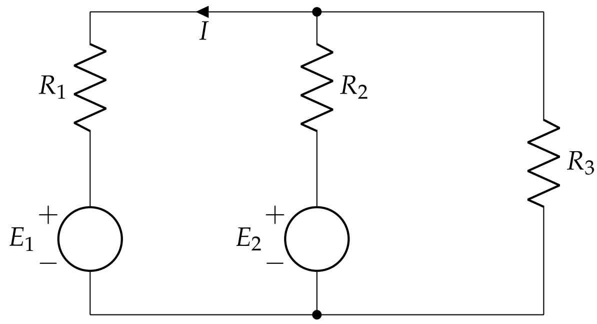
$$-7\,I_a + 17\,I_b - 6\,I_c = -7\,I_a + 17 \cdot 15 - 6 \cdot 7{,}5 = 0 \Rightarrow 7\,I_a = 210 \Rightarrow I_a = \frac{210}{7} = 30\,\mathrm{mA}$$

Determinada I_a, se emplea la primera ecuación para obtener el valor de E:

$$27\,I_a - 7\,I_b = 27 \cdot 30 - 7 \cdot 15 = E = 705\,\mathrm{mV}$$

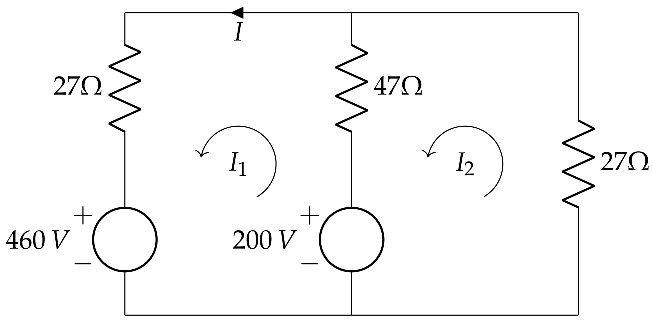
1.3. Enunciado

Calcular la intensidad I en el circuito de la figura.



Solución

Se suponen las mallas mostradas en la siguiente figura.



Se plantea el sistema de ecuaciones en forma matricial:

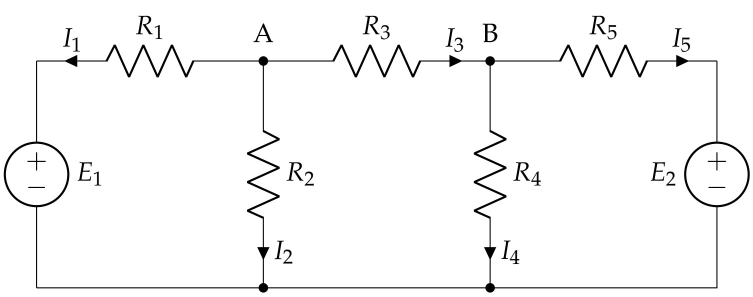
$$\begin{bmatrix} 74 & -47 \\ -47 & 74 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -260 \\ -200 \end{bmatrix}$$

cuya solución es:

$$I_1 = -8{,}77\,\mathrm{A}$$
$$I_2 = -8{,}27\,\mathrm{A}$$

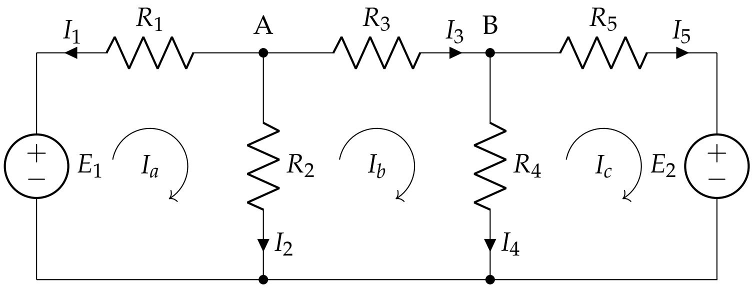
1.4. Enunciado

En el circuito de la figura obtener las intensidades de corriente señaladas primero mediante un análisis por el método de las mallas y posteriormente mediante un análisis por el método de los nudos.



Solución

Se aplica primero el método de las mallas, considerando las corrientes de malla mostradas en la siguiente figura:



Se plantea el sistema de ecuaciones en modo matricial:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 10 & -5 \\ 0 & -5 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix}$$

cuya solución es:

$$I_a = 3{,}31\,\mathrm{A}$$
$$I_b = -0{,}06\,\mathrm{A}$$
$$I_c = -0{,}79\,\mathrm{A}$$

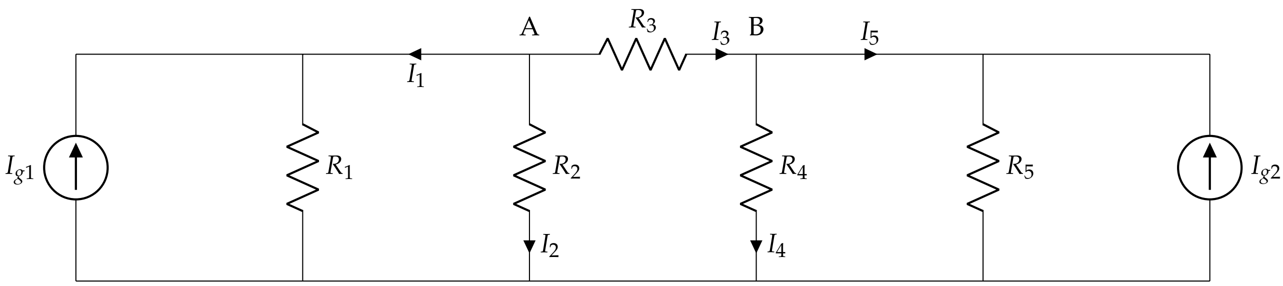
Se establecen las igualdades entre las diferentes corrientes de rama y de malla, y se calculan sus valores:

$$I_1 = -I_a = -3{,}31\,\mathrm{A}$$
$$I_2 = I_a - I_b = 3{,}31 - (-0{,}06) = 3{,}37\,\mathrm{A}$$
$$I_3 = I_b = -0{,}06\,\mathrm{A}$$
$$I_4 = I_b - I_c = -0{,}06 - (-0{,}79) = 0{,}73\,\mathrm{A}$$
$$I_5 = I_c = -0{,}79\,\mathrm{A}$$

Para poder aplicar el método de los nudos, es necesario hacer, en primer lugar, la transformación de las fuentes de tensión (y la resistencia en serie) en fuentes de corriente (con una resistencia en paralelo):

$$I_{g,10V} = \frac{\epsilon_{10V}}{R_{2\Omega}} = \frac{10}{2} = 5\,\mathrm{A}$$
$$I_{g,6V} = \frac{\epsilon_{6V}}{R_{3\Omega}} = \frac{6}{3} = 2\,\mathrm{A}$$

quedando el circuito que se muestra a continuación.



En este caso, se trabaja con las conductancias $G = \frac{1}{R}$. Se escribe el sistema de ecuaciones en modo matricial:

$$\begin{bmatrix} 1{,}75 & -0{,}25 \\ -0{,}25 & 0{,}783 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_A \\ U_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

cuya solución es:

$$U_A = 3{,}37\,\mathrm{V}$$
$$U_B = 3{,}67\,\mathrm{V}$$

Con estos valores, se pueden determinar directamente las corrientes I_2 e I_4, por simple aplicación de la ley de Ohm:

$$I_2 = \frac{U_A}{R_{1\Omega}} = \frac{3{,}37}{1} = 3{,}37\,\mathrm{A}$$
$$I_4 = \frac{U_B}{R_{5\Omega}} = \frac{3{,}67}{5} = 0{,}73\,\mathrm{A}$$

Las corrientes que circulan por las resistencias en paralelo con las fuentes de tensión se determinan de manera análoga:

$$I_{2\Omega} = \frac{U_A}{R_{2\Omega}} = \frac{3{,}37}{2} = 1{,}69\,\mathrm{A}$$
$$I_{3\Omega} = \frac{U_B}{R_{3\Omega}} = \frac{3{,}67}{3} = 1{,}22\,\mathrm{A}$$

Por la 1LK, se determina el valor de I_1, I_3 e I_5:

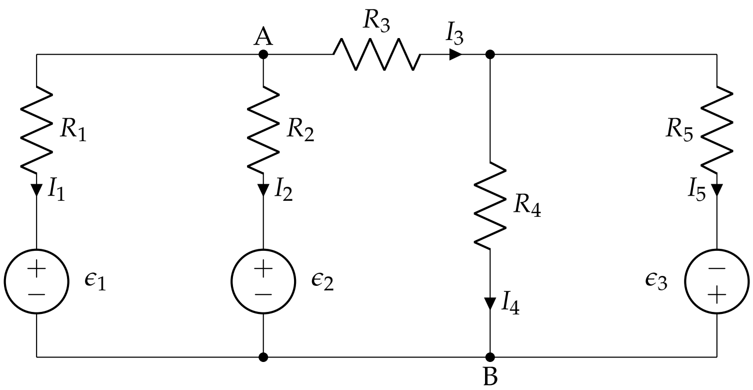
$$I_1 + 5 = I_{2\Omega} \Rightarrow I_1 = I_{2\Omega} - 5 = 1{,}69 - 5 = -3{,}31\,\mathrm{A}$$
$$I_5 + 2 = I_{3\Omega} \Rightarrow I_5 = I_{3\Omega} - 2 = 1{,}22 - 2 = -0{,}78\,\mathrm{A}$$
$$I_3 = I_4 + I_5 = 0{,}73 + (-0{,}78) = -0{,}05\,\mathrm{A}$$

Se observa que los resultados obtenidos con ambos métodos son idénticos.

1.5. Enunciado

Analizar el circuito de la figura mediante el método de las mallas, obteniendo la corriente de cada una de las ramas. Con este resultado, calcular la diferencia de potencial entre A y B, y realizar un balance de potencias comparando la potencia de los elementos activos y la de los elementos pasivos.

Datos: $R_1 = R_2 = 1\,\Omega$; $R_3 = 2\,\Omega$; $R_4 = 3\,\Omega$; $R_5 = 4\,\Omega$; $\epsilon_1 = 118\,\mathrm{V}$; $\epsilon_2 = 236\,\mathrm{V}$; $\epsilon_3 = 118\,\mathrm{V}$.



Solución

Se usan tres corrientes de malla con giro a derechas, de nombre (de izquierda a derecha), I_a, I_b e I_c. Escribiendo el sistema de ecuaciones del método de las mallas en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -118 \\ 236 \\ 118 \end{bmatrix}$$

cuya solución es:

$$I_a = -32\,\mathrm{A}$$
$$I_b = 54\,\mathrm{A}$$
$$I_c = 40\,\mathrm{A}$$

Estableciendo las relaciones entre las corrientes de rama y las corrientes de malla, y sustituyendo, se llega a la conclusión de que:

$$
\begin{aligned}
I_1 &= -I_a = 32\,\text{A} \\
I_2 &= I_a - I_b = -32 - 54 = -86\,\text{A} \\
I_3 &= I_b = 54\,\text{A} \\
I_4 &= I_b - I_c = 54 - 40 = 14\,\text{A} \\
I_5 &= I_c = 40\,\text{A}
\end{aligned}
$$

Se recomienda comprobar que estos resultados cumplen la 1LK en los nudos del circuito, para asegurarse de que la resolución es correcta.

La diferencia de potencial entre A y B es:

$$U_{AB} = I_3 \cdot R_3 + I_4 \cdot R_4 = 54 \cdot 2 + 14 \cdot 3 = 150\,\text{V}$$

La potencia entregada por los generadores del circuito es:

$$
\begin{aligned}
P_{\epsilon_1} &= \epsilon_1 \cdot (-I_1) = -3{,}776\,\text{kW} \\
P_{\epsilon_2} &= \epsilon_2 \cdot (-I_2) = 20{,}296\,\text{kW} \\
P_{\epsilon_3} &= \epsilon_3 \cdot I_5 = 4{,}72\,\text{kW} \\
P_{\epsilon} &= P_{\epsilon_1} + P_{\epsilon_2} + P_{\epsilon_3} = 21{,}42\,\text{kW}
\end{aligned}
$$

Es importante recordar que el criterio de signos de un generador considera que la potencia entregada es positiva cuando la corriente sale del generador por su terminal positivo. Por tanto, I_1 e I_2 son empleadas con un signo negativo. En consecuencia, la potencia del generador ϵ_1 es negativa, lo que quiere decir que este generador funciona como receptor (absorbe potencia) Ahora bien, dado que I_2 tiene valor negativo (es decir, circula en sentido contrario al indicado en la figura), la potencia del generador ϵ_2 es positiva, de forma que este generador actúa como tal.

La potencia disipada por las resistencias es:

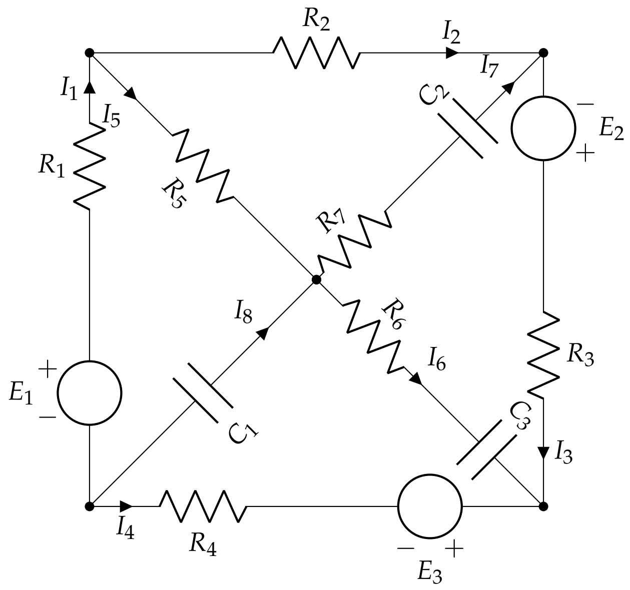
$$
\begin{aligned}
P_{R_1} &= I_1^2 \cdot R_1 = 1{,}024\,\text{kW} \\
P_{R_2} &= I_2^2 \cdot R_2 = 7{,}396\,\text{kW} \\
P_{R_3} &= I_3^2 \cdot R_3 = 5{,}832\,\text{kW} \\
P_{R_4} &= I_4^2 \cdot R_4 = 588\,\text{W} \\
P_{R_5} &= I_5^2 \cdot R_5 = 6{,}4\,\text{kW} \\
P_R &= \sum_i P_{Ri} = 21{,}42\,\text{kW}
\end{aligned}
$$

Comprobamos que se cumple el balance de potencias.

1.6. Enunciado

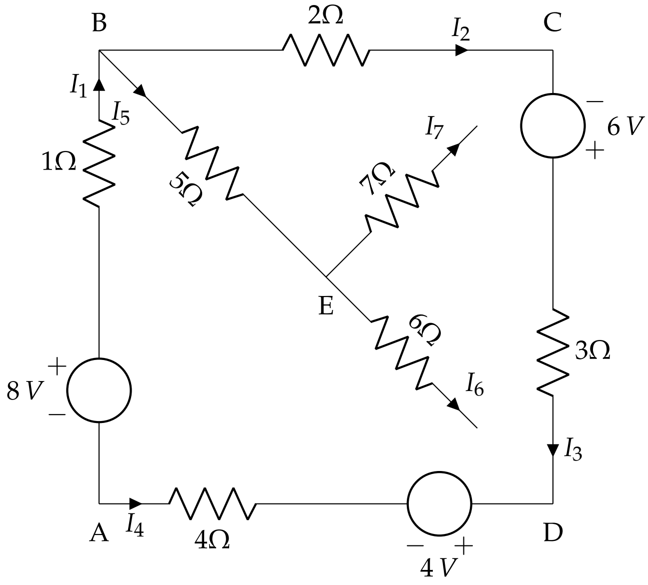
En el circuito de la figura, determinar:

- Todas las intensidades de rama señaladas
- Carga, polaridad y energía almacenada en los condensadores
- Balance de potencias



Solución

Al tratarse de un circuito alimentado por corriente continua, los condensadores se comportan como un circuito abierto, por lo que el circuito a analizar es el mostrado en la figura.



Por simple observación, obtenemos:

$$I_5 = I_6 = I_7 = 0\,\mathrm{A}$$

quedando una única malla por la que circula la misma corriente $I_1 = I_2 = I_3 = I_4 = I$. Por la 2LK, considerando que I va en sentido horario, se obtiene que:

$$-8 + 1\,I + 2\,I - 6 + 3\,I + 4 + 4\,I = 0 \Rightarrow I = \frac{8+6-4}{1+2+3+4} = 1\,\mathrm{A} = I_1 = I_2 = I_3 = -I_4$$

Para determinar la carga de los condensadores hay que calcular las tensiones en los diferentes nudos. Considerando E como tierra:

$$U_{AE} = U_A - \cancelto{0}{U_E} = -8 + 1\,I_1 + 5\,I_5 = -8 + 1 \cdot 1 + 5 \cdot 0 = -7\,\mathrm{V}$$

$$U_{CE} = U_C - \cancelto{0}{U_E} = -2\,I_2 + 5\,I_5 = -2 \cdot 1 + 5 \cdot 0 = -2\,\mathrm{V}$$

$$U_{DE} = U_D - \cancelto{0}{U_E} = 4 - 4\,I_4 - 8 + 1\,I_1 + 5\,I_5 = 4 - 4 \cdot (-1) - 8 + 1 \cdot 1 + 5 \cdot 0 = 1\,\mathrm{V}$$

Con estas tensiones, se determina la carga de los condensadores:

$$Q_{1\mu F} = C_{1\mu F}\, U_{AE} = 1 \cdot 10^{-6} \cdot (-7) = -7\,\mu\text{C}$$
$$Q_{2\mu F} = C_{2\mu F}\, U_{CE} = 2 \cdot 10^{-6} \cdot (-2) = -4\,\mu\text{C}$$
$$Q_{3\mu F} = C_{3\mu F}\, U_{DE} = 3 \cdot 10^{-6} \cdot 1 = 3\,\mu\text{C}$$

Aquellos condensadores en los que la carga es negativa, significa que tienen la polaridad contraria a la considerada. La energía es:

$$E_{1\mu F} = \frac{1}{2}\, C_{1\mu F} \cdot U_{AE}^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 10^{-6} \cdot (-7)^2 = 24{,}5\,\mu\text{J}$$
$$E_{2\mu F} = \frac{1}{2}\, C_{2\mu F} \cdot U_{CE}^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10^{-6} \cdot (-2)^2 = 4\,\mu\text{J}$$
$$E_{3\mu F} = \frac{1}{2}\, C_{3\mu F} \cdot U_{DE}^2 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 10^{-6} \cdot 1^2 = 1{,}5\,\mu\text{J}$$

Se calculan las potencias de los elementos activos y las potencias consumidas por las resistencias:

- **Potencias de los elementos activos:**

$$P_{E1} = E_1 \cdot I_1 = 8\,\text{W}$$
$$P_{E2} = E_2 \cdot I_3 = 6\,\text{W}$$
$$P_{E3} = E_3 \cdot I_4 = -4\,\text{W}$$

- **Potencias de las resistencias:**

$$P_{R,1} = R_1\, I_1^2 = 1 \cdot 1^2 = 1W$$
$$P_{R,2} = R_2\, I_2^2 = 2 \cdot 1^2 = 2W$$
$$P_{R,3} = R_3\, I_3^2 = 3 \cdot 1^2 = 3W$$
$$P_{R,4} = R_4\, I_4^2 = 4 \cdot (-1)^2 = 4W$$

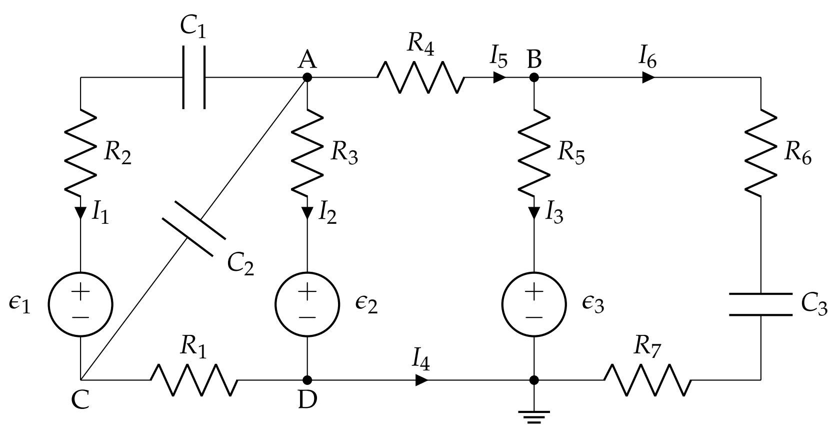
donde se cumple que la potencia total aportada por los generadores es igual a la potencia consumida por las resistencias.

1.7. Enunciado

Aplicar el método de los nudos en el circuito de la figura para determinar:

- Los potenciales de los nudos A, B, C y D.
- Las intensidades de corriente señaladas.
- Carga, polaridad y energía almacenada en los condensadores, supuestos sin carga inicial.

Datos: $R_i = \text{i}\ \Omega; C_i = \text{i}\ \mu F; E_1 = 6V; E_2 = 18V; E_3 = 6V$



Solución

Sustituimos los condensadores por circuitos abiertos. En consecuencia, por las ramas correspondientes no puede circular corriente. En particular:

$$I_1 = 0\,\mathrm{A}$$
$$I_6 = 0\,\mathrm{A}$$

Para aplicar el método de los nudos transformamos las fuentes ϵ_2 y ϵ_3 en fuentes de corriente. Las ecuaciones del método de los nudos son:

$$\begin{bmatrix} G_3 + G_4 & -G_4 \\ -G_4 & G_5 + G_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_2 / R_3 \\ \epsilon_3 / R_5 \end{bmatrix}$$

Sustituimos valores y resolvemos:

$$V_A = 15\,\mathrm{V}$$
$$V_B = 11\,\mathrm{V}$$

Además, $V_D = 0$, dado que está conectado a tierra. Por otra parte, la caída de tensión en la resistencia R_1 es 0 porque $I_1 = 0$, luego $V_C = V_D$.

Con estos resultados podemos obtener los valores de las corrientes de rama. Volvemos al circuito original para plantear las ecuaciones de rama:

$$V_A = I_2 \cdot R_3 + \epsilon_2$$
$$V_B = I_3 \cdot R_5 + \epsilon_3$$

De estas ecuaciones despejamos I_2 e I_3. Además, teniendo en cuenta que $I_1 = I_6 = 0$, tenemos:

$$I_5 = I_3$$
$$I_4 = I_2$$
$$I_2 = -I_3$$

En definitiva:

$$I_1 = 0\,\mathrm{A}$$
$$I_2 = -1\,\mathrm{A}$$
$$I_3 = 1\,\mathrm{A}$$
$$I_4 = -1\,\mathrm{A}$$
$$I_5 = 1\,\mathrm{A}$$
$$I_6 = 0\,\mathrm{A}$$

Finalmente, calculamos las diferencias de potencial en los condensadores. En C_1 asignamos la polaridad positiva en A, y tenemos:

$$U_{AC} = U_{C1} + \epsilon_1 \rightarrow U_{C1} = 9\,\mathrm{V}$$

Para C_2 y C_3 el cálculo es directo, asignando la polaridad positiva en A y B, respectivamente:

$$U_{C2} = U_{AC} = 15\,\mathrm{V}$$
$$U_{C3} = U_{BD} = 11\,\mathrm{V}$$

En consecuencia, las cargas almacenadas en cada condensador son:

$$q_1 = C_1 \cdot U_{C1} = 9\,\mu\text{C}$$
$$q_2 = C_2 \cdot U_{C2} = 30\,\mu\text{C}$$
$$q_3 = C_3 \cdot U_{C3} = 33\,\mu\text{C}$$

Y las energías:

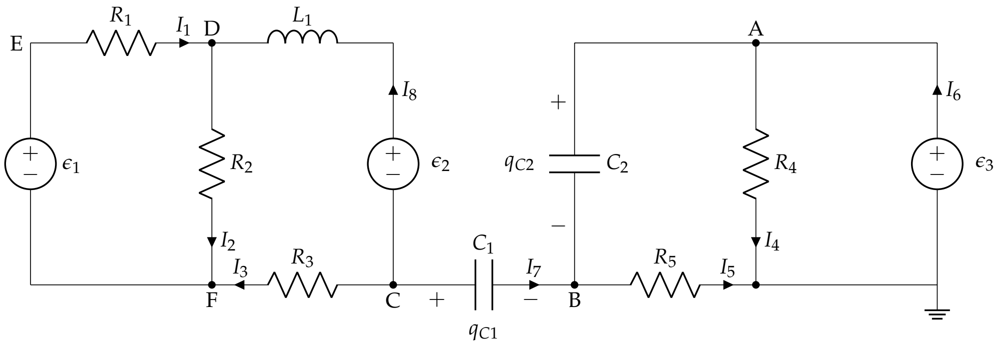
$$E_{C1} = \frac{1}{2} \cdot C_1 \cdot U_{C1}^2 = 40{,}5\,\mu\text{J}$$
$$E_{C2} = \frac{1}{2} \cdot C_2 \cdot U_{C2}^2 = 225\,\mu\text{J}$$
$$E_{C3} = \frac{1}{2} \cdot C_3 \cdot U_{C3}^2 = 181{,}5\,\mu\text{J}$$

1.8. Enunciado

En el circuito de la figura, donde se sabe que la carga inicial de los condensadores era de 10 μC para C_1 y de 20 μC para C_2 con las polaridades indicadas, se pide determinar:

- Intensidades de corriente señaladas
- Potenciales en los puntos A, B, C, D, E y F

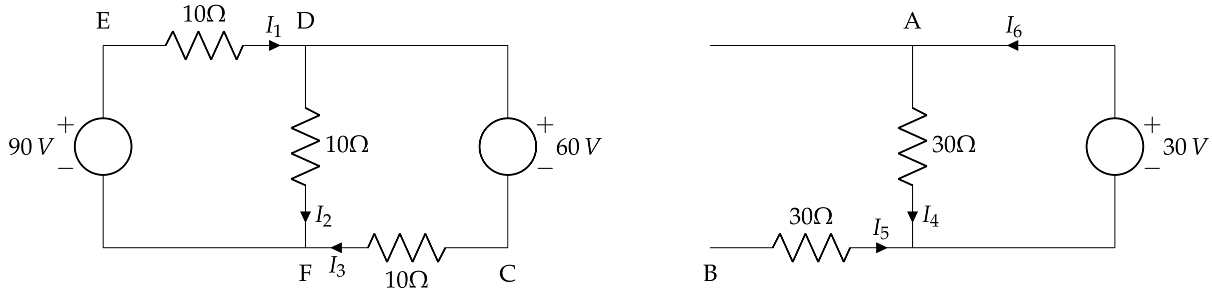
Datos: $\epsilon_A = 90\,\text{V}$; $\epsilon_B = 60\,\text{V}$; $\epsilon_C = 30\,\text{V}$; $R_1 = R_2 = R_3 = 10\,\Omega$; $R_4 = R_5 = 30\,\Omega$; $C_1 = 10\,\mu\text{F}$; $C_2 = 20\,\mu\text{F}$; $L_1 = 1\,\mu\text{H}$



Solución

Sustituimos los condensadores por circuitos abiertos. En consecuencia, por las ramas correspondientes no puede circular corriente. En particular:

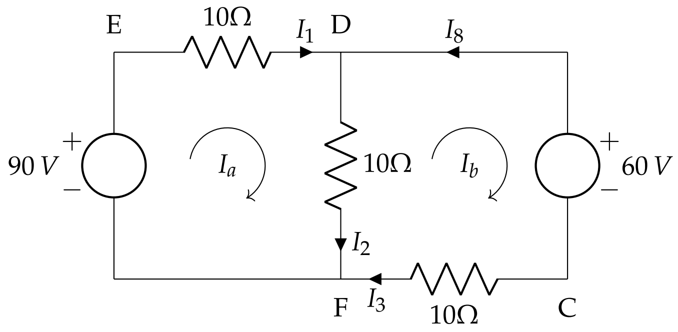
$$I_5 = 0\,\text{A}$$
$$I_7 = 0\,\text{A}$$



En consecuencia,

$$I_3 = -I_8$$
$$I_4 = I_6$$

Además, la bobina L_1 es un cortocircuito.
En el circuito de la izquierda se tienen dos mallas, considerando las corrientes mostradas en la figura.



$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2 + R_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_A \\ -\epsilon_B \end{bmatrix}$$

La solución de este sistema es:

$$I_a = 4\,\mathrm{A}$$
$$I_b = -1\,\mathrm{A}$$

siendo,

$$I_1 = I_a$$
$$I_2 = I_a - I_b$$
$$I_3 = I_b$$
$$I_8 = -I_b$$

Para el circuito de la derecha tenemos una única malla:

$$\epsilon_C = I_4 \cdot R_4 \rightarrow I_4 = 1\,\mathrm{A}$$

Por tanto,

$$I_1 = 4\,\mathrm{A}$$
$$I_2 = 5\,\mathrm{A}$$
$$I_3 = -1\,\mathrm{A}$$
$$I_4 = 1\,\mathrm{A}$$
$$I_5 = 0\,\mathrm{A}$$
$$I_6 = 1\,\mathrm{A}$$
$$I_7 = 0\,\mathrm{A}$$
$$I_8 = 1\,\mathrm{A}$$

Los potenciales en los puntos A y B se calculan así:

$$V_A = \epsilon_C = 30\,\mathrm{V}$$
$$V_B = R_5 \cdot I_5 = 0\,\mathrm{V}$$

Para calcular el potencial en el punto C debemos tener en cuenta que el condensador C_1 conserva su carga inicial porque el circuito no está cerrado en la parte superior. Por tanto,

$$U_{CB} = U_{C1} = \frac{q^0_{C1}}{C_1} = 1\,\mathrm{V}$$

Por tanto,

$$U_C = U_{CB} + U_B = 1\,\mathrm{V}$$

A partir de este resultado podemos calcular el resto de potenciales:

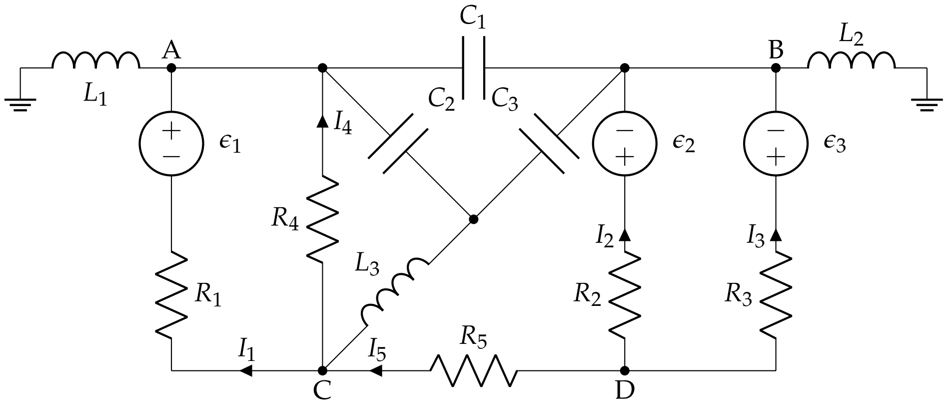
$$U_D = U_{DC} + U_C = \epsilon_B + U_C = 61\,\mathrm{V}$$
$$U_E = U_{ED} + U_D = I_1 \cdot R_1 + U_D = 101\,\mathrm{V}$$
$$U_F = U_{FC} + U_C = -I_3 \cdot R_3 + U_C = 11\,\mathrm{V}$$

1.9. Enunciado

En el circuito de la figura, los condensadores se conectaron sin carga. Mediante el método de las mallas determina:

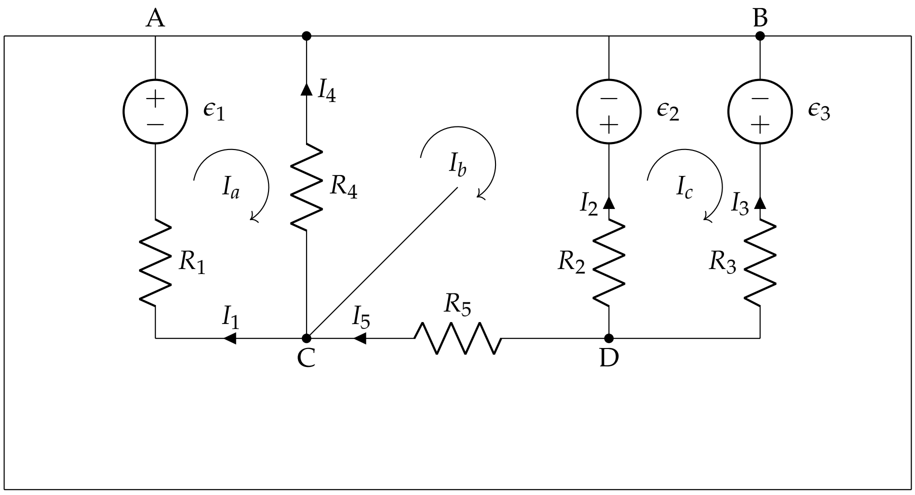
- Intensidades de corriente señaladas
- Potenciales en los puntos A, B, C y D
- Polaridades, cargas, y energías de los condensadores
- Balance de potencias

$$\epsilon_1 = 118\,\mathrm{V}$$
$$\epsilon_2 = 236\,\mathrm{V}$$
$$\epsilon_3 = 118\,\mathrm{V}$$
$$R_1 = 4\,\Omega$$
$$R_2 = R_3 = 1\,\Omega$$
$$R_4 = 3\,\Omega$$
$$R_5 = 2\,\Omega$$
$$C_1 = C_2 = C_3 = 2\,\mu\mathrm{F}$$
$$L_1 = L_2 = L_3 = 1\,\mathrm{mH}$$



Solución

Se sustituyen los condensadores y las bobinas por sus equivalentes en un circuito de corriente continua (circuito abierto y cortocircuito, respectivamente). En el circuito resultante se marcan tres corrientes de malla como se muestra en el circuito de la figura.



$$\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 - E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 + R_4 & -R_4 & 0 \\ -R_4 & R_4 + R_5 + R_2 & -R_2 \\ 0 & -R_2 & R_2 + R_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 118 \\ 236 \\ 118 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{pmatrix}$$

La solución es:

$$\begin{aligned} I_A &= 40\,\mathrm{A} \\ I_B &= 54\,\mathrm{A} \\ I_C &= -32\,\mathrm{A} \end{aligned}$$

Por tanto, las corrientes indicadas en el circuito son:

$$\begin{aligned} I_1 &= 40\,\mathrm{A} \\ I_2 &= -86\,\mathrm{A} \\ I_3 &= 32\,\mathrm{A} \\ I_4 &= 14\,\mathrm{A} \\ I_5 &= 54\,\mathrm{A} \end{aligned}$$

Las tensiones en los puntos indicados son:

$$\begin{aligned} V_A &= 0\,\mathrm{V} \\ V_B &= 0\,\mathrm{V} \\ V_C &= I_4 \cdot R_4 = 42\,\mathrm{V} \\ V_D &= I_5 \cdot R_5 + V_c = 150\,\mathrm{V} \end{aligned}$$

Por tanto, las polaridades de los condensadores son las marcadas en la figura, con los valores de tensión siguientes:

$$\begin{aligned} U_{C1} = U_{BA} &= 0\,\mathrm{V} \\ q_1 = C_1 \cdot U_{C1} &= 0\,\mu\mathrm{C} \\ E_{C2} &= 0\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{C2} = U_{CA} &= 42\,\mathrm{V} \\ q_2 = C_2 \cdot U_{C2} &= 84\,\mu\mathrm{C} \\ E_{C2} &= 1{,}76\,\mathrm{mJ} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{C3} = U_{CB} &= 42\,\mathrm{V} \\ q_3 = C_3 \cdot U_{C3} &= 84\,\mu\mathrm{C} \\ E_{C3} &= 1{,}76\,\mathrm{mJ} \end{aligned}$$

Finalmente, el balance de potencias calcula la potencia entregada por los elementos activos y la potencia consumida por los elementos pasivos.

La potencia total entregada por los elementos activos es 21 240 W:

$$\begin{aligned} P_{E1} = E_1 \cdot I_1 &= 4720\,\mathrm{W} \\ P_{E2} = E_2 \cdot (-I_2) &= 20\,296\,\mathrm{W} \\ P_{E3} = E_3 \cdot (-I_3) &= -3776\,\mathrm{W} \end{aligned}$$

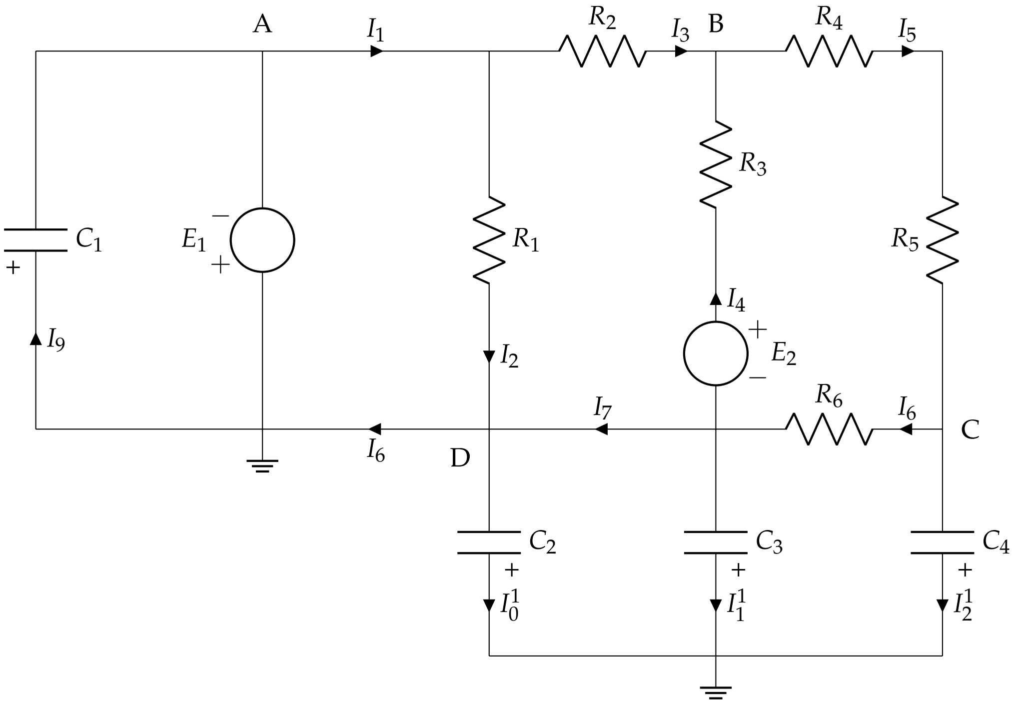
La potencia total consumida por los elementos pasivos también es 21 240 W:

$$\begin{aligned} P_{R1} = R_1 \cdot I_1^2 &= 6400\,\mathrm{W} \\ P_{R2} = R_2 \cdot I_2^2 &= 7396\,\mathrm{W} \\ P_{R3} = R_3 \cdot I_3^2 &= 1024\,\mathrm{W} \\ P_{R4} = R_4 \cdot I_4^2 &= 588\,\mathrm{W} \\ P_{R5} = R_5 \cdot I_5^2 &= 5832\,\mathrm{W} \end{aligned}$$

1.10. Enunciado

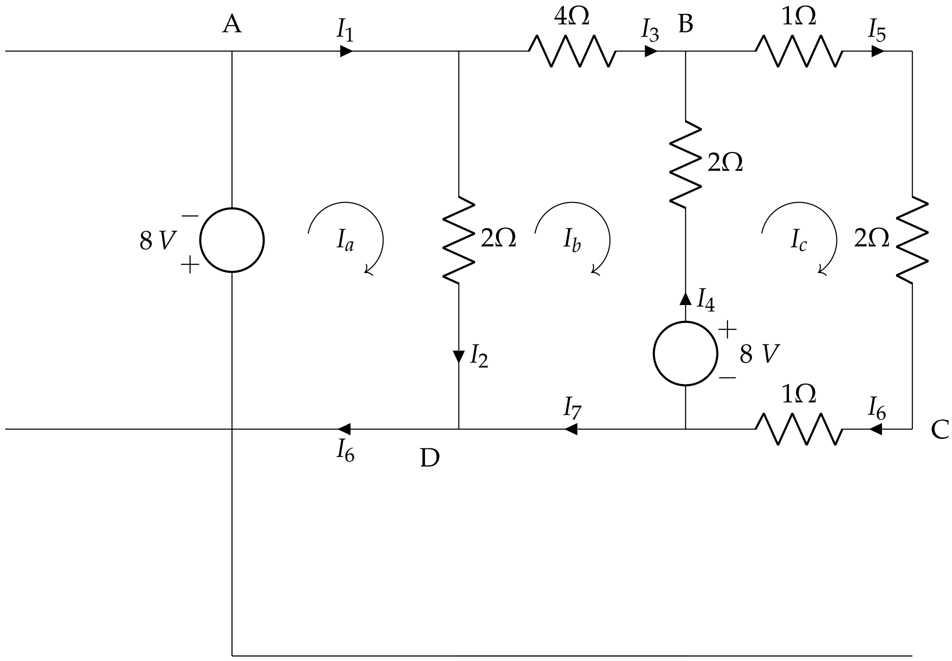
En el circuito de la figura, determinar:

- Las ecuaciones para el cálculo de las intensidades
- Todas las intensidades indicadas
- Potenciales en todos los nudos
- Carga y energía almacenada en los condensadores



Solución

Al tratarse de alimentación en CC, se sustituyen los condensadores por circuitos abiertos, quedando el circuito de la figura:



Aplicando el método de mallas, con las corrientes indicadas, se plantea el sistema de ecuaciones en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 8 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ -8 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones completas para calcular las intensidades son:

$$2\,I_a - 2\,I_b = -8$$
$$-2\,I_a + 8\,I_b - 2\,I_c = -8$$
$$-2\,I_b + 6\,I_c = 8$$

cuya solución es:

$$I_a = -6{,}5\,\mathrm{A}$$
$$I_b = -2{,}5\,\mathrm{A}$$
$$I_c = 0{,}5\,\mathrm{A}$$

Estableciendo las relaciones entre las corrientes de malla y las de rama del circuito:

$$I_1 = I_6 = I_a = -6{,}5\,\mathrm{A}$$
$$I_2 = I_a - I_b = -6{,}5 - (-2{,}5) = -4\,\mathrm{A}$$
$$I_3 = I_7 = I_b = -2{,}5\,\mathrm{A}$$
$$I_4 = I_c - I_b = 0{,}5 - (-2{,}5) = 3\,\mathrm{A}$$
$$I_5 = I_6 = I_c = 0{,}5\,\mathrm{A}$$

Conociendo las corrientes y teniendo el nudo de tierra como referencia, se calculan los potenciales:

$$U_A = -U_{8V} = -8\,\mathrm{V}$$
$$U_B = -U_{R2\Omega} + U_{8V} = -2 \cdot 3 + 8 = 2\,\mathrm{V}$$
$$U_C = U_{R1\Omega} = 1 \cdot 0{,}5 = 0{,}5\,\mathrm{V}$$
$$U_D = 0\,\mathrm{V}$$

Con los potenciales, se determina la carga de los condensadores:

$$
\begin{aligned}
Q_{1\mu F} &= C_{1\mu F}\,(-U_A) = 1\cdot 10^{-6}\cdot(-(-8)) = 8\,\mu\text{C}\\
Q_{2\mu F} &= C_{2\mu F}\,0 = 0\,\mu\text{C}\\
Q_{3\mu F} &= C_{3\mu F}\,0 = 0\,\mu\text{C}\\
Q_{4\mu F} &= C_{4\mu F}\,(-U_C) = 4\cdot 10^{-6}\cdot(-0{,}5) = -2\,\mu\text{C}
\end{aligned}
$$

Aquellos condensadores en los que la carga es negativa, significa que tienen la polaridad contraria a la considerada. La energía es:

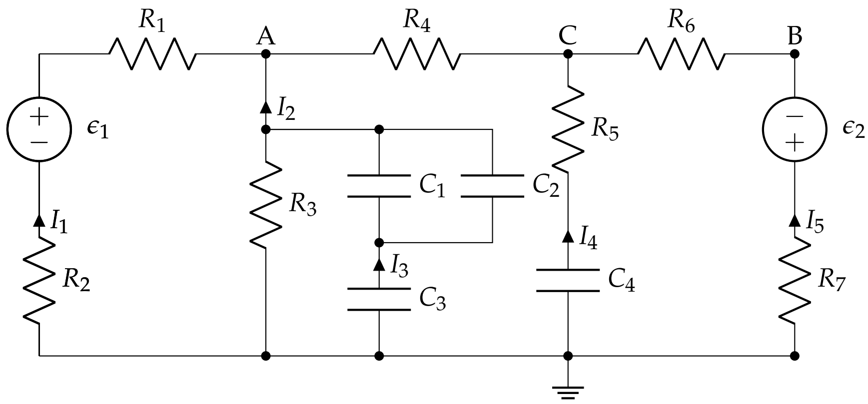
$$
\begin{aligned}
E_{1\mu F} &= \frac{1}{2}C_{1\mu F}\cdot(-U_A)^2 = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 10^{-6}\cdot(-(-8))^2 = 32\,\mu\text{J}\\
E_{2\mu F} &= 0\,\text{J}\\
E_{3\mu F} &= 0\,\text{J}\\
E_{4\mu F} &= \frac{1}{2}C_{4\mu F}\cdot(-U_C)^2 = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 10^{-6}\cdot(-0{,}5)^2 = 0{,}5\,\mu\text{J}
\end{aligned}
$$

1.11. Enunciado

En el circuito de la figura se debe determinar:

- Las corrientes señaladas.
- El balance de potencias, diferenciando entre elementos activos y elementos pasivos.
- Los potenciales en los puntos A, B y C.
- La carga y polaridad en los condensadores, supuestos sin carga inicial.

$$
\begin{aligned}
\epsilon_1 &= 1\,\text{V}\\
\epsilon_2 &= 7\,\text{V}\\
R_i &= 1\,\Omega\\
C_i &= i\,\mu\text{F}
\end{aligned}
$$



Solución

Sustituimos los condensadores por circuitos abiertos. En consecuencia, por las ramas correspondientes no puede circular corriente. En particular:

$$
\begin{aligned}
I_3 &= 0\,\text{A}\\
I_4 &= 0\,\text{A}
\end{aligned}
$$

Tenemos dos mallas, y definimos dos corrientes de malla dextrógiras:

$$
\begin{bmatrix} R_1+R_2+R_3 & -R_3\\ -R_3 & R_3+R_4+R_6+R_7 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} I_a\\ I_b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\epsilon_1\\ \epsilon_2\end{bmatrix}
$$

La solución de este sistema es:

$$
\begin{aligned}
I_a &= 1\,\text{A}\\
I_b &= 2\,\text{A}
\end{aligned}
$$

siendo,

$$
\begin{aligned}
I_1 &= I_a = 1\,\text{A} \\
I_2 &= I_b - I_a = 1\,\text{A} \\
I_5 &= -I_b = -2\,\text{A}
\end{aligned}
$$

La potencia de los dos elementos activos es:

$$
\begin{aligned}
P_{\epsilon 1} &= \epsilon_1 \cdot I_1 = 1\,\text{W} \\
P_{\epsilon 2} &= \epsilon_2 \cdot (-I_5) = 14\,\text{W}
\end{aligned}
$$

En total, $P_\epsilon = 15\,\text{W}$.

Aplicando la ley de Joule en cada resistencia comprobamos que la potencia total disipada en las resistencias del circuito coincide con esta cantidad.

Los potenciales en los puntos indicados son:

$$
\begin{aligned}
V_A &= -I_2 \cdot R_3 = -1\,\text{V} \\
V_B &= -\epsilon_2 - I_5 \cdot R_7 = -5\,\text{V} \\
V_C &= U_{CB} + V_B = -I_5 \cdot R_6 + V_B = -3\,\text{V}
\end{aligned}
$$

La carga almacenada en el condensador C_4 se calcula con la ecuación:

$$q_4 = C_4 \cdot U_{C4} = C_4 \cdot (-U_C) = 12\,\mu\text{C}$$

donde se ha asignado la polaridad positiva en la conexión a tierra.

Los condensadores C_1, C_2 y C_3 forman parte de una asociación. Los condensadores C_1 y C_2 están asociados en paralelo:

$$C_{12} = C_1 // C_2 = C_1 + C_2 = 3\,\mu\text{F}$$

A su vez, están conectados en serie con el condensador C_3:

$$C_T = \frac{C_{12} \cdot C_3}{C_{12} + C_3} = 1{,}5\,\mu\text{F}$$

Este condensador equivalente está conectado entre A y tierra, y asignamos la polaridad positiva a la conexión a tierra. Por tanto:

$$U_{CT} = -U_A = 1\,\text{V} \rightarrow q_T = C_T \cdot U_{CT} = 1{,}5\,\mu\text{C}$$

Al tratarse de una conexión serie, esta carga es la misma que tienen el condensador C_3 y el condensador equivalente C_{12}.

$$
\begin{aligned}
q_3 &= 1{,}5\,\mu\text{C} \\
q_{12} &= 1{,}5\,\mu\text{C}
\end{aligned}
$$

Con estas cargas podemos calcular las diferencias de potencial en estos condensadores:

$$
\begin{aligned}
U_{C3} &= \frac{q_3}{C_3} = 0{,}5\,\text{V} \\
U_{C12} &= \frac{q_{12}}{C_{12}} = 0{,}5\,\text{V}
\end{aligned}
$$

Por tanto,

$$
\begin{aligned}
q_1 &= C_1 \cdot U_{C12} = 0{,}5\,\mu\text{C} \\
q_2 &= C_2 \cdot U_{C12} = 1\,\mu\text{C}
\end{aligned}
$$

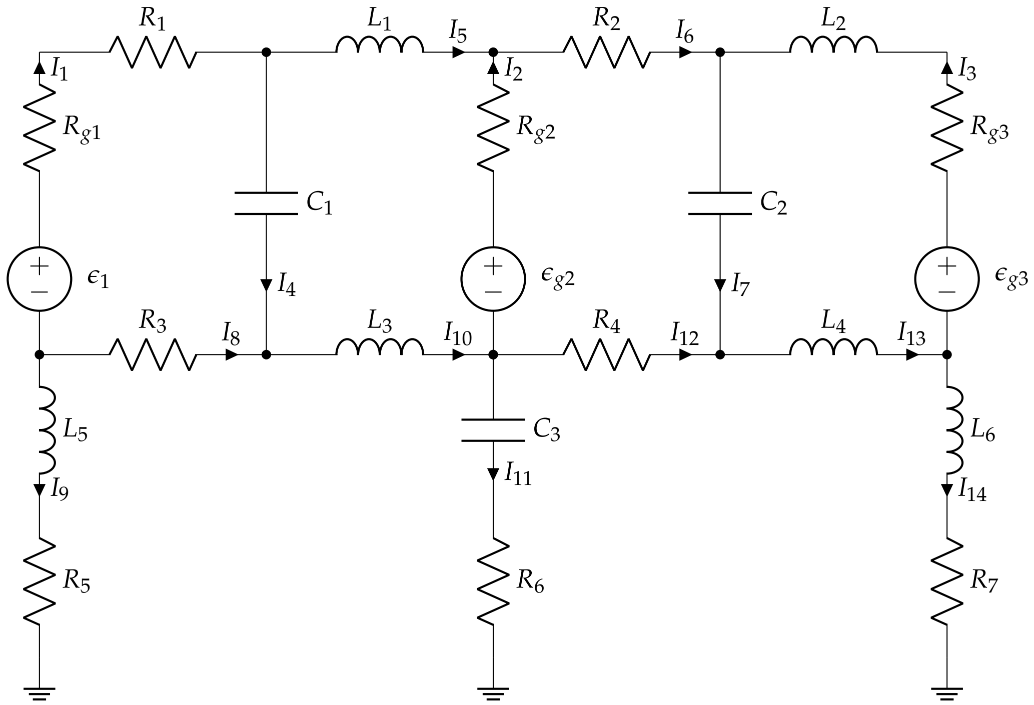
Comprobamos que $q_1 + q_2 = q_{12}$.

1.12. Enunciado

El circuito de la figura está funcionando en régimen estacionario. Los condensadores estaban inicialmente descargados. Resuelve el circuito mediante el método que consideres conveniente para obtener los siguientes resultados:

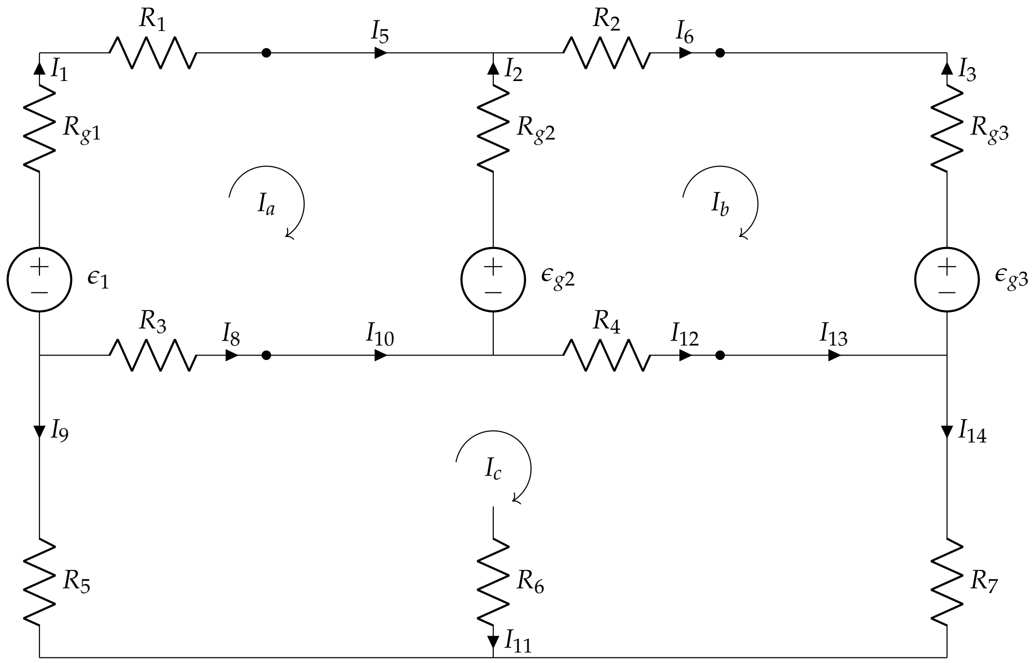
- Las intensidades señaladas.
- Polaridad y energía almacenada en los condensadores.
- Balance de potencias.

Datos: $\epsilon_1 = 40V; \epsilon_2 = 22V; \epsilon_3 = 20V; C_1 = C_2 = C_3 = 2\mu F; R_{g1} = R_{g2} = R_{g3} = 4\Omega; R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 2\Omega; R_5 = R_6 = R_7 = 1\Omega$



Solución

Los condensadores se sustituyen por circuitos abiertos (inicialmente están descargados) y las bobinas por cortocircuitos. De esta forma, el circuito original queda reducido a tres mallas, como se muestra en la siguiente figura:



Se resuelve mediante el método de mallas, cuyo sistema de ecuaciones en forma matricial es:

$$\begin{bmatrix} 12 & -4 & -2 \\ -4 & 12 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cuya solución es:

$$\begin{aligned} I_a &= 2\,A \\ I_b &= 1\,A \\ I_c &= 1\,A \end{aligned}$$

Relacionando estas corrientes de malla con las corrientes de rama señaladas en el circuito original (teniendo en cuenta que las corrientes que circulan por ramas con condensadores son nulas):

$$\begin{aligned} I_1 &= I_a = 2\,A \\ I_2 &= -I_a + I_b = -1\,A \\ I_3 &= -I_b = -1\,A \\ I_4 &= 0\,A \\ I_5 &= I_a = 2\,A \\ I_6 &= I_b = 1\,A \\ I_7 &= 0\,A \\ I_8 &= -I_a + I_c = -1\,A \\ I_9 &= -I_c = -1\,A \\ I_{10} &= -I_a + I_c = -1\,A \\ I_{11} &= 0\,A \\ I_{12} &= -I_b + I_c = 0\,A \\ I_{13} &= -I_b + I_c = 0\,A \\ I_{14} &= I_c = 1\,A \end{aligned}$$

El condensador C_1 está conectado directamente a la rama compuesta por la fuente E_2 y su resistencia E_{g2} (debido a que la bobina se comporta como un cortocircuito). Por tanto, suponiendo que la polaridad positiva de este condensador corresponde a su borne superior, la tensión de este condensador es:

$$U_{C1} = E_2 - I_2 \cdot R_{g2} = 22 - (-1) \cdot 4 = 26\,V$$

siendo correcta la polaridad asignada por el signo positivo de este resultado. La energía almacenada por el condensador es:

$$E_{C1} = 1/2 \cdot V_{c1}^2 \cdot C_1 = 0{,}676\, mJ$$

El condensador C_2 está conectado directamente a la rama compuesta por la fuente E_3 y su resistencia E_{g3} (debido a que la bobina se comporta como un cortocircuito). Por tanto, suponiendo que la polaridad positiva de este condensador corresponde a su borne superior, la tensión de este condensador es:

$$U_{C2} = E_3 - I_3 \cdot R_{g3} = 20 - (-1) \cdot 4 = 24\, V$$

siendo correcta la polaridad asignada por el signo positivo de este resultado. La energía almacenada por el condensador es:

$$E_{C2} = 1/2 \cdot U_{C2}^2 \cdot C_2 = 0{,}576\, mJ$$

El condensador C_3 está en paralelo con la resistencia R_4 y la resistencia R_7 (debido a que las bobinas se comportan como un cortocircuito y a que por la resistencia R_6 no circula corriente). Por tanto, suponiendo que la polaridad positiva de este condensador corresponde a su borne superior, la tensión de este condensador es:

$$U_{C3} = I_{12} \cdot R_4 + I_{14} \cdot R_7 = 0 + 1 \cdot 1 = 1\, V$$

siendo correcta la polaridad asignada por el signo positivo de este resultado. La energía almacenada por el condensador es:

$$E_{C3} = 1/2 \cdot U_{C3}^2 \cdot C_3 = 1\, \mu J$$

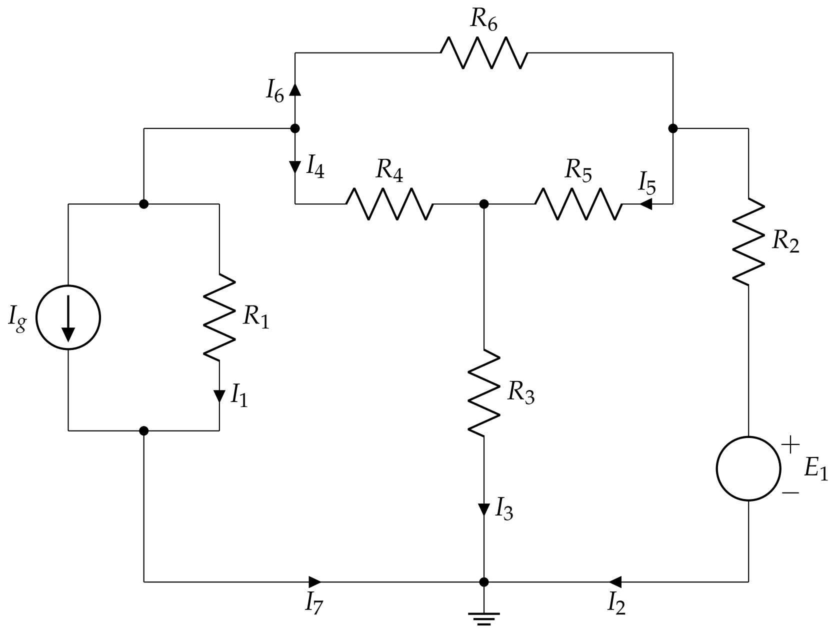
Se calcula ahora el balance de potencias, diferenciando entre elementos activos (generadores) y pasivos (receptores):

- **Potencia de los generadores:**
  - $P_{\epsilon 1} = \epsilon_1\, I_1 = 40 \cdot 2 = 80\,\mathrm{W}$
  - $P_{\epsilon 2} = \epsilon_2\, I_2 = 22 \cdot (-1) = -22\,\mathrm{W}$
  - $P_{\epsilon 3} = \epsilon_3\, I_3 = 20 \cdot (-1) = -20\,\mathrm{W}$.
- **Potencia de las resistencias:**
  - $P_{Rg1} = R_{g1}\, I_1^2 = 4 \cdot 2^2 = 16\ \mathrm{W}$
  - $P_{Rg2} = R_{g2}\, I_2^2 = 4 \cdot (-1)^2 = 4\ \mathrm{W}$
  - $P_{Rg3} = R_{g3}\, I_3^2 = 4 \cdot (-1)^2 = 4\ \mathrm{W}$
  - $P_{R1} = R_1\, I_1^2 = 2 \cdot 2^2 = 8\ \mathrm{W}$
  - $P_{R2} = R_2\, I_6^2 = 2 \cdot 1^2 = 2\ \mathrm{W}$
  - $P_{R3} = R_3\, I_8^2 = 2 \cdot (-1)^2 = 2\ \mathrm{W}$
  - $P_{R4} = R_4\, I_{12}^2 = 2 \cdot 0^2 = 0\ \mathrm{W}$
  - $P_{R5} = R_5\, I_9^2 = 1 \cdot (-1)^2 = 1\ \mathrm{W}$
  - $P_{R6} = R_6\, I_{11}^2 = 1 \cdot 0^2 = 0\ \mathrm{W}$
  - $P_{R7} = R_7\, I_{14}^2 = 1 \cdot 1^2 = 1\ \mathrm{W}$

cumpliéndose que $P_g = P_R = 38\,\mathrm{W}$.

1.13. Enunciado

En el circuito de la figura, obtener las intensidades de corriente señaladas mediante un análisis por el método de las mallas y mediante un análisis por el método de los nudos.



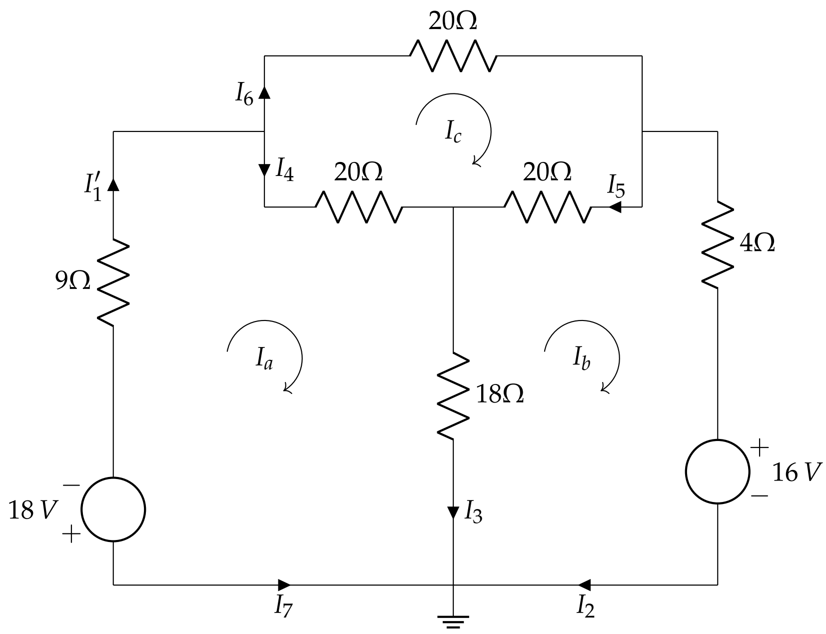
Solución

Resolución mediante mallas

Se hace la transformación de la fuente de corriente en una fuente de tensión:

$$\epsilon_{Ig} = I_g \cdot R_9 = 2 \cdot 9 = 18\,V$$

Así, el circuito está formado por 3 mallas como se muestra en la figura:



Se plantea el sistema en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 47 & -18 & -20 \\ -18 & 42 & -20 \\ -20 & -20 & 60 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18 \\ -16 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cuya solución es:

$$I_a = -1{,}26\,\text{A}$$
$$I_b = -1{,}33\,\text{A}$$
$$I_c = -0{,}87\,\text{A}$$

Estableciendo las relaciones con las corrientes de rama indicadas:

$$\begin{aligned}
I_1' &= I_a = -1{,}26\,\text{A}\\
I_2 &= I_b = -1{,}33\,\text{A}\\
I_3 &= I_a - I_b = -1{,}26 - (-1{,}33) = 0{,}07\,\text{A}\\
I_4 &= I_a - I_c = -1{,}26 - (-0{,}87) = -0{,}39\,\text{A}\\
I_5 &= I_c - I_b = -0{,}87 - (-1{,}33) = 0{,}46\,\text{A}\\
I_6 &= I_c = -0{,}87\,\text{A}\\
I_7 &= -I_a = 1{,}26\,\text{A}
\end{aligned}$$

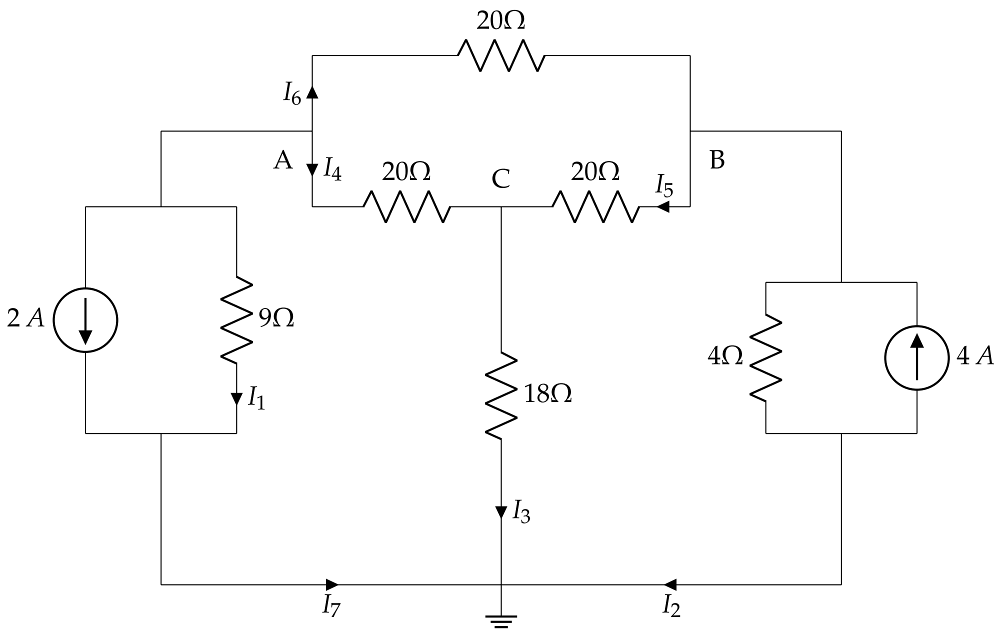
La corriente I_1 del circuito original se obtiene aplicando el 1LK:

$$I_g + I_1 = I_7 \Rightarrow I_1 = I_7 - I_g = 1{,}26 - 2 = -0{,}74\,\text{A}$$

Resolución mediante nudos
Se transforma la fuente de tensión en una de corriente:

$$I_{\epsilon,g} = \frac{\epsilon_g}{R_4} = \frac{16}{4} = 4\,\text{A}$$

quedando el circuito que se muestra en la figura:



Con los nudos indicados, se aplica el método de nudos en su forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \frac{19}{90} & -\frac{1}{20} & -\frac{1}{20} \\ -\frac{1}{20} & \frac{7}{20} & -\frac{1}{20} \\ -\frac{1}{20} & -\frac{1}{20} & \frac{7}{45} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_A \\ U_B \\ U_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cuya solución es:

$$U_A = -6{,}64\,V$$
$$U_B = 10{,}66\,V$$
$$U_C = 1{,}29\,V$$

A partir de 1LK, 2LK y ley de Ohm, se obtienen las corrientes indicadas:

$$I_1 = \frac{U_A}{R_9} = \frac{-6{,}64}{9} = -0{,}74\,\mathrm{A}$$

$$I_2 = I_{R_4} - I_{\epsilon,g} = \frac{U_B}{R_4} - 4 = \frac{10{,}66}{4} - 4 = -1{,}34\,\mathrm{A}$$

$$I_3 = \frac{U_C}{R_{18}} = \frac{1{,}29}{18} = 0{,}07\,\mathrm{A}$$

$$I_4 = \frac{U_{AC}}{R_{20}} = \frac{U_A - U_C}{R_{20}} = \frac{-6{,}64 - 1{,}29}{20} = -0{,}39\,\mathrm{A}$$

$$I_5 = \frac{U_{BC}}{R_{20}} = \frac{U_B - U_C}{R_{20}} = \frac{10{,}66 - 1{,}29}{20} = 0{,}47\,\mathrm{A}$$

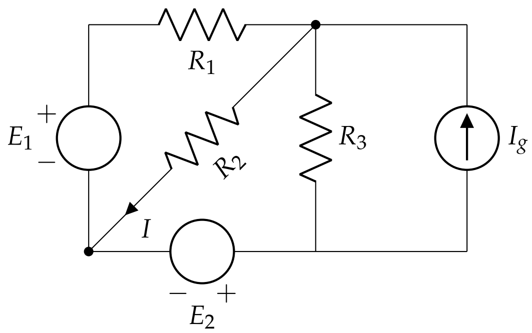
$$I_6 = \frac{U_{AB}}{R_{20}} = \frac{U_A - U_B}{R_{20}} = \frac{-6{,}64 - 10{,}66}{20} = -0{,}87\,\mathrm{A}$$

$$I_7 = I_g + I_1$$

Se observa que los valores obtenidos son idénticos con ambos métodos.

1.14. Enunciado

Calcular la intensidad que circula por la resistencia de 30 Ω del circuito de la figura aplicando el principio de superposición.



Solución

El circuito es equivalente a la suma de tres circuitos en los que únicamente aparece un generador, anulándose el resto (cortocircuitando la fuente de tensión y dejando en circuito abierto la fuente de corriente). Se analiza cada circuito por separado.

Actúa solo la fuente de tensión de 32 V

Las resistencia equivalente del paralelo es:

$$R_{paralelo} = \frac{20 \cdot 30}{20 + 30} = 12\Omega$$

siendo la corriente total del circuito, por ley de Ohm:

$$I = \frac{32}{20 + 12} = 1\,\mathrm{A}$$

Con el concepto de divisor de corriente, la corriente I' (la que circula por la resistencia de 30 Ω en este caso) es:

$$I' = I \cdot \frac{R_{paralelo}}{R} = 1 \cdot \frac{12}{30} = 0{,}4\,\mathrm{A}$$

Actúa solo la fuente de tensión de 64 V
Las resistencia equivalente del paralelo es:

$$R_{paralelo} = \frac{20 \cdot 30}{20 + 30} = 12\Omega$$

siendo la corriente total del circuito, por ley de Ohm:

$$I = \frac{64}{20 + 12} = 2\,\mathrm{A}$$

Con el concepto de divisor de corriente, la corriente I'' (la que circula por la resistencia de 30 Ω en este caso) es:

$$I'' = I \cdot \frac{R_{paralelo}}{R} = 2 \cdot \frac{12}{30} = 0{,}8\,\mathrm{A}$$

Actúa solo la fuente de corriente de 4 A
Las resistencia equivalente del circuito es (las tres están en paralelo):

$$R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30}} = 7{,}5\Omega$$

Dado que la corriente total del circuito son 4 A, con el concepto de divisor de corriente, la corriente I''' (la que circula por la resistencia de 30 Ω en este caso) es:

$$I''' = I \cdot \frac{R_{eq}}{R} = 4 \cdot \frac{7{,}5}{30} = 1\,\mathrm{A}$$

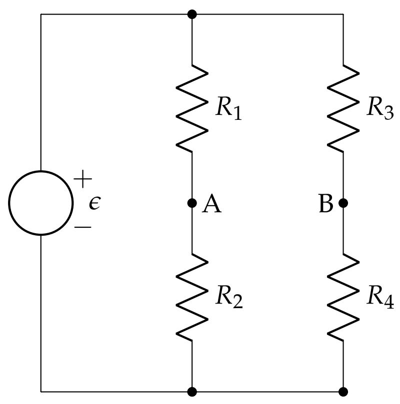
Por tanto, la corriente total que circula por la resistencia de 30Ω es:

$$I = I' + I'' + I''' = 0{,}4 + 0{,}8 + 1 = 2{,}2\,\mathrm{A}$$

1.15. Enunciado

Obtener el generador equivalente de Thévenin del circuito de la figura respecto de A y B. A partir de este generador, calcula la resistencia a colocar en AB para obtener la máxima potencia, calculando esta potencia y la potencia entregada por el generador ϵ.

Datos: $\epsilon = 54\,\mathrm{V}$; $R_1 = R_4 = 8\,\Omega$; $R_2 = R_3 = 10\,\Omega$



Solución

Para obtener la tensión U_{AB} aplicamos divisor de tensión en ambas ramas:

$$U_A = \epsilon \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$
$$U_B = \epsilon \cdot \frac{R_4}{R_3 + R_4}$$
$$U_{AB} = \epsilon \cdot (\frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_4}{R_3 + R_4}) = 6\,\mathrm{V} = \epsilon_{th}$$

Para calcular la resistencia equivalente apagamos la fuente de tensión. En el circuito resultante obtenemos:

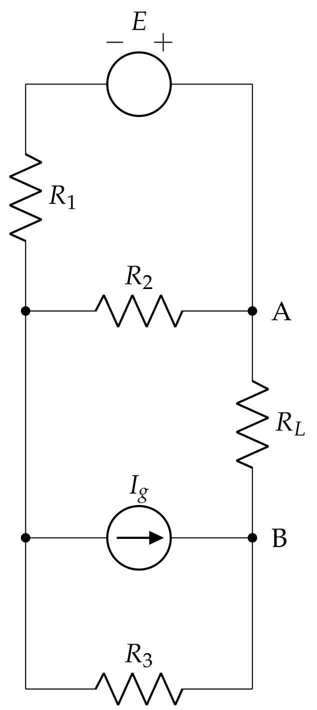
$$R_{th} = (R_1||R_2) + (R_3||R_4) = 80/9\Omega$$

Para obtener la máxima potencia hay que conectar una resistencia $R_L = R_{th}$. Con esta resistencia el balance de potencias es:

$$P_L = \frac{\epsilon_{th}^2}{4R_{th}} = 1{,}0125\,\mathrm{W}$$
$$P_\epsilon = 2 \cdot P_L = 2{,}025\,\mathrm{W}$$

1.16. Enunciado

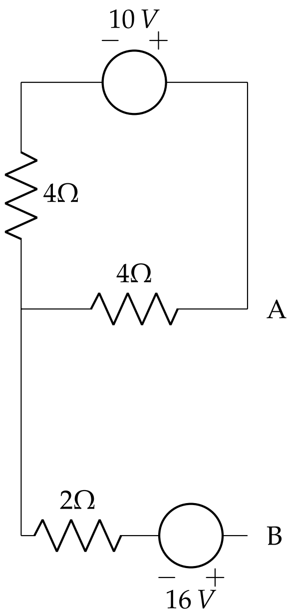
Determinar el equivalente Thévenin del circuito de la figura entre los nudos $A - B$. ¿Qué resistencia habría que conectar en dichos terminales para transferir la máxima potencia? ¿Cuál sería dicha potencia?



Solución

Se transforma la fuente de corriente en paralelo con la resistencia de 2Ω en una fuente de tensión en serie con dicha resistencia, como en la Figura **??**:

$$U_{I_g} = I_g \cdot R_2 = 8 \cdot 2 = 16\,V$$



Cálculo de ϵ_{th}

Hay que determinar la tensión U_{AB}. Considerando el nudo de la izquierda como masa, y dado que por la resistencia de 2Ω no circula corriente (circuito abierto entre $A - B$), la tensión en B es:

$$U_B = 16\,V$$

Aplicando la ley de Ohm a la malla superior:

$$I = \frac{10}{4+4} = 1{,}25\,\mathrm{A}$$

por lo que la tensión en el punto A:

$$U_A = 4 \cdot 1{,}25 = 5\,V$$

Así, la tensión $U_{AB} = \epsilon_{th}$:

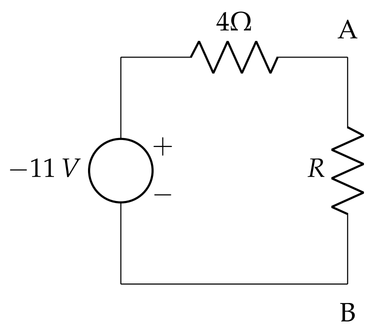
$$U_{AB} = U_A - U_B = \epsilon_{th} = 5 - 16 = -11\,V$$

Cálculo de R_{th}

Al no haber fuentes dependientes, se puede obtener esta resistencia como la R_{eq} vista desde los terminales $A - B$, anulando las fuentes:

$$R_{eq} = R_{th} = 2 + \frac{4 \cdot 4}{4+4} = 4\Omega$$

Equivalente Thévenin El equivalente de Thévenin queda como se muestra a continuación:



Aplicando el T. Máx. Trans. Potencia, la resistencia a conectar es:

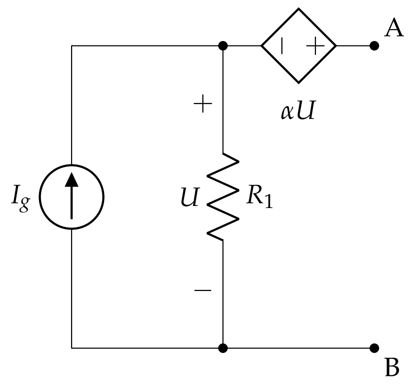
$$R_L = R_{th} = 4\Omega$$

siendo la máxima potencia transferida:

$$P_{max} = \frac{\epsilon_{th}^2}{4\,R_{th}} = \frac{(-11)^2}{4 \cdot 4} = 7{,}56\,W$$

1.17. Enunciado

Obtener el generador equivalente de Thévenin del circuito de la figura respecto de A y B.
Datos: $I_g = 10\,\mathrm{A}; R_1 = 1\,\Omega; \alpha = 5$



Solución

Por una parte:

$$U_{AB} = \alpha U + U = (1+\alpha)U = (1+5)U = 6\,U$$

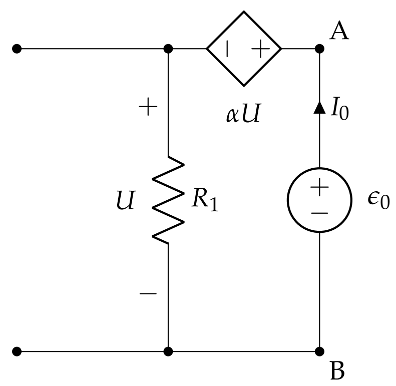
Además:

$$U = I_g \cdot R_1 = 10 \cdot 1 = 10\,V$$

Por tanto, el generador de Thévenin tiene una fem de:

$$U_{AB} = 6\,U = 6 \cdot 10 = 60V = \epsilon_{th}$$

Para calcular la impedancia, se apaga la fuente independiente. Como la fuente dependiente permanece, es necesario aplicar un generador de prueba a la salida:



$$\epsilon_0 = \alpha U + U = U(1+\alpha) = 6\,U$$
$$U = I_0\,R_1 = I_0 \cdot 1 = I_0$$

Por tanto,

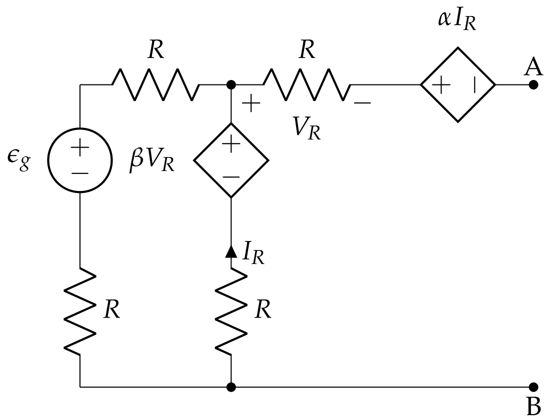
$$R_{th} = \frac{\epsilon_0}{I_0} = \frac{6\,U}{U} = 6\Omega$$

1.18. Enunciado

En el circuito de la figura, calcular:

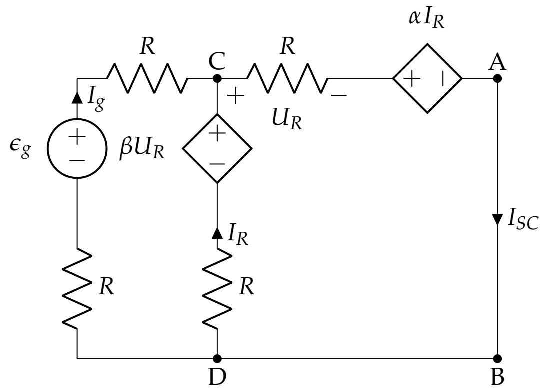
- La corriente del generador equivalente de Norton respecto de A y B, I_N.
- La resistencia del generador equivalente de Norton respecto de A y B, R_N.
- La resistencia de carga que se debe conectar entre A y B para conseguir la máxima potencia disponible, y el valor de esta potencia.

Datos: $R = 1\Omega$; $\epsilon_g = 10V$; $\alpha = \beta = 1$



Solución

Para calcular el equivalente de Norton cortocircuitamos la salida del circuito. Podemos escribir las siguientes ecuaciones:

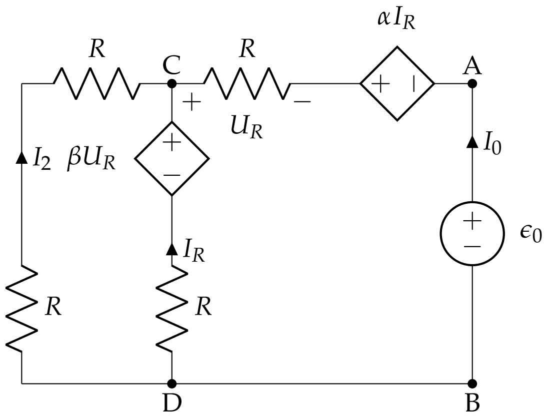


$$
\begin{aligned}
U_R &= R \cdot I_{sc} \\
I_g + I_R &= I_{sc} \\
U_{CD} &= \epsilon_g - 2 \cdot R \cdot I_g \\
U_{CD} &= \beta \cdot U_r - I_R \cdot R \\
U_{CD} &= U_R + \alpha \cdot I_R
\end{aligned}
$$

Combinando estas ecuaciones obtenemos:

$$I_{sc} = 10/3\text{A} = I_N$$

Para obtener la resistencia equivalente apagamos la fuente independiente y conectamos un generador de prueba en AB:



$$
\begin{aligned}
U_R &= -I_0 \cdot R \\
I_2 + I_R + I_0 &= 0 \\
U_{CD} &= -2R \cdot I_2 \\
U_{CD} &= \beta \cdot U_R - I_R \cdot R \\
U_{CD} &= U_R + \alpha \cdot I_R + \epsilon_0
\end{aligned}
$$

Combinando estas ecuaciones obtenemos:

$$R_{th} = \frac{\epsilon_0}{I_0} = 2\,\Omega$$

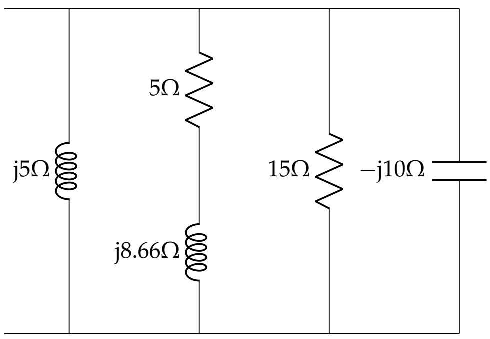
Por tanto, habrá que conectar una resistencia de $2\,\Omega$ para obtener la máxima potencia disponible.

Capítulo 2

Corriente alterna monofásica

2.1. Enunciado

Calcular la impedancia equivalente $\overline{Z_{eq}}$ del circuito de la figura expresándolo en forma binaria y polar.



Solución

La impedancia equivalente de la rama formada por la resistencia y la bobina es:

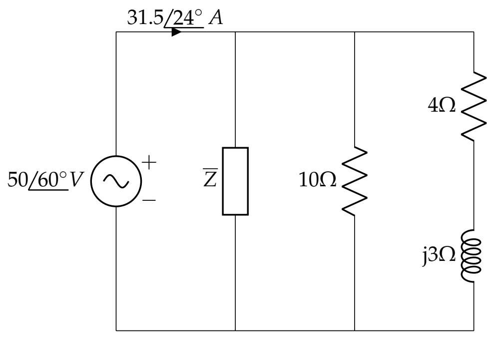
$$\overline{Z_{R,L}} = R + \overline{X_L} = 5 + \mathrm{j}8{,}66\Omega$$

La impedancia equivalente total se obtiene del paralelo de todas las impedancias:

$$\overline{Z_{eq}} = \frac{1}{\frac{1}{\overline{X_{L1}}} + \frac{1}{\overline{Z_{R,L}}} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{\overline{X_c}}} = \frac{1}{\frac{1}{\mathrm{j}5} + \frac{1}{5+\mathrm{j}8{,}66} + \frac{1}{15} + \frac{1}{-\mathrm{j}10}} = 4{,}54\underline{/57{,}9855^\circ}\Omega = 2{,}41 + \mathrm{j}3{,}85\Omega$$

2.2. Enunciado

Determinar $\overline{Z}$ en el circuito de la figura.



Solución

La impedancia equivalente de la rama resistencia y bobina es:

$$\overline{Z_{R,L}} = R + \overline{X_L} = 4 + \mathrm{j}3\Omega$$

Puesto que todas las ramas están en paralelo, se puede determinar las corrientes de las ramas de la resistencia y la resistencia y bobina a partir de la ley d Ohm:

$$\overline{I_R} = \frac{\overline{U}}{R} = \frac{50\underline{/60^\circ}}{10} = 5\underline{/60^\circ}A$$
$$\overline{I_{R,L}} = \frac{\overline{U}}{\overline{Z_{R,L}}} = \frac{50\underline{/60^\circ}}{4+\mathrm{j}3} = 10\underline{/23{,}1301^\circ}A$$

Aplicando la 1LK, se obtiene la corriente que circula por $\overline{Z}$:

$$\overline{I_Z} = \overline{I_T} - \overline{I_R} - \overline{I_{R,L}} = 31{,}5\underline{/24^\circ} - 5\underline{/60^\circ} - 10\underline{/23{,}1301^\circ} = 17{,}68\underline{/14{,}9285^\circ}A$$

por lo que con la ley de Ohm, se obtiene el valor de $\overline{Z}$:

$$\overline{Z} = \frac{\overline{U}}{\overline{I_Z}} = \frac{50\underline{/60^\circ}}{17{,}68\underline{/14{,}9285^\circ}} = 2{,}83\underline{/45{,}0715^\circ}\Omega$$

2.3. Enunciado

Un circuito serie con dos elementos consume una potencia activa de 940 W y tiene un factor de potencia 0,707 en *adelanto*. Determinar los elementos del circuito si la tensión tiene un valor máximo 99 V.

Solución

Puesto que los dos elementos están en serie, la corriente que circula por ellos es la misma. Suponiendo que la fase inicial de la tensión es 0°, la tensión eficaz es:

$$\overline{U} = \frac{U_{max}}{\sqrt{2}}\underline{/0^\circ} = 70\underline{/0^\circ}V$$

y, por definición de potencia activa:

$$P = U\,I\,\cos\phi \Rightarrow I = \frac{P}{U\,\cos(\phi)} = \frac{940}{70 \cdot 0{,}707} = 19\,A \Rightarrow \overline{I} = 19\underline{/45^\circ}A$$

Al consumir potencia activa, el circuito cuenta con una resistencia, cuyo valor es:

$$R = \frac{P}{I^2} = \frac{940}{19^2} = 2{,}60\Omega$$

Al ser un fdp en adelanto, el otro elemento es un condensador. La potencia reactiva del circuito:

$$Q = U\,I\,\cos(\phi) = 70 \cdot 19 \cdot \cos(45^\circ) = 940\mathrm{VAr} = X\,I^2 \Rightarrow X = \frac{Q}{I^2} = \frac{940}{19^2} = 2{,}60\Omega$$

por lo que la capacidad del condensador es:

$$X_c = \frac{1}{\omega C} \Rightarrow C = \frac{1}{\omega\,X_c} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 2{,}60} = 1{,}22\,mF$$

2.4. Enunciado

Un circuito en serie con una resistencia 10Ω y una inductancia j5Ω tiene una tensión eficaz aplicada de 120 V. Determinar las potencias consumidas y el factor de potencia, indicando si éste va en retraso o adelanto.

Solución

La impedancia equivalente es:

$$\overline{Z_{eq}} = R + \mathrm{j}X_L = 10 + \mathrm{j}5\Omega$$

Por la ley de Ohm, asumiendo la fase inicial de la tensión como 0°, la corriente del circuito:

$$\overline{I} = \frac{\overline{U}}{\overline{Z_{eq}}} = \frac{120\underline{/0^\circ}}{10 + \mathrm{j}5} = 10{,}73\underline{/-26{,}5651^\circ}\,A$$

Las diferentes potencias son:

$$\begin{aligned} P &= R\,I^2 = 10 \cdot 10{,}73^2 = 1151{,}33\,W \\ Q &= X_L\,I^2 = 5 \cdot 10{,}73^2 = 575{,}66\,VAr \\ \overline{S} &= P + \mathrm{j}Q = 1151{,}33 + \mathrm{j}575{,}66\,VA = 1287{,}22\underline{/26{,}5649^\circ}\,VA \end{aligned}$$

El factor de potencia es $\cos(\phi) = \cos(-26{,}5651) = 0{,}894$, en retraso.

2.5. Enunciado

Para determinar las constantes R y L de una bobina, se conecta en serie con una resistencia de 25 Ω y al conjunto se le aplica una fuente de tensión de 120 V a 60 Hz, se miden las tensiones en bornes de la resistencia y de la bobina, dando los valores $U_R = 70{,}8\,\mathrm{V}$ y $U_B = 86\,\mathrm{V}$. ¿ Cuáles son las constantes de la bobina en cuestión?.

Solución

Por la 2LK, se debe cumplir que:

$$\overline{U} = \overline{U}_B + \overline{U}_R$$

La tensión en la resistencia de 25 Ω, por la ley de Ohm:

$$\overline{U}_R = 25\overline{I} \rightarrow I = \frac{U_R}{25} = 2{,}83\,\mathrm{A}$$

Dado que

$$\overline{Z}_B = R_B + j\omega L_B$$

y conocido el módulo de la corriente que circula por el circuito, obtenemos:

$$\overline{U}_B = \overline{I} \cdot \overline{Z}_B \rightarrow 86 = 2{,}83 Z_B \rightarrow Z_B = 30{,}37\,\Omega$$

La impedancia equivalente total del circuito es:

$$\overline{Z} = (25 + R_B) + j\omega L_B$$

y por la ley de Ohm:

$$\overline{U} = \overline{I} \cdot \overline{Z} \rightarrow 120 = 2{,}83 Z \rightarrow Z = 42{,}37\,\Omega$$

Planteamos el sistema de ecuaciones resultantes:

$$\begin{aligned} 30{,}37 &= \sqrt{R_B^2 + (\omega L_B)^2} \\ 42{,}37 &= \sqrt{(25 + R_B)^2 + (\omega L_B)^2} \end{aligned}$$

cuyas soluciones son:

$$\begin{aligned} R &= 5\,\Omega \\ L &= 79{,}5\,\mathrm{mH} \end{aligned}$$

2.6. Enunciado

En un circuito serie RL con $R = 5\Omega$ y $L = 0{,}06H$, la tensión en bornes de la bobina es $u_L(t) = 15\cos(200\,t)$ V. Determinar:

- La tensión total
- Intensidad de corriente
- Ángulo de desfase de la intensidad respecto de la tensión
- Impedancia del circuito

Solución

De la expresión temporal de $u_L(t)$ se tiene que $\omega = 200$ rad/s, por lo que:

$$\overline{X_L} = \mathrm{j}\,\omega\,L = \mathrm{j}\,200 \cdot 0{,}06 = \mathrm{j}\,12\Omega$$

siendo la impedancia del circuito:

$$\overline{Z_{eq}} = R + \overline{X_L} = 5 + \mathrm{j}\,12 = 13\underline{/67{,}3801^\circ}\,\Omega$$

El fasor correspondiente a $u_L(t)$ es:

$$\overline{U_L} = \frac{15}{\sqrt{2}}\underline{/0^\circ}V$$

Por la ley de Ohm, la intensidad de corriente en la bobina (igual a la total, al estar en serie):

$$\overline{I} = \frac{\overline{U_L}}{\overline{X_L}} = \frac{\frac{15}{\sqrt{2}}\underline{/0^\circ}}{\mathrm{j}\,12} = 0{,}88\underline{/-90^\circ}A$$

y la tensión total, por la 2LK:

$$\overline{U} = \overline{U_R} + \overline{U_L} = 5 \cdot (0{,}88\underline{/-90^\circ}) + \frac{15}{\sqrt{2}}\underline{/0^\circ} = 11{,}48\underline{/-22{,}5304^\circ}V$$

siendo el ángulo de desfase de la intensidad respecto a la tensión:

$$\phi = \theta_U - \theta_I = -22{,}5304 - (-90) = 67{,}4696^\circ$$

2.7. Enunciado

Un circuito serie RLC con $R = 5\,\Omega$, $L = 0{,}02$ H y $C = 80\,\mu$F, tiene aplicada una tensión senoidal de frecuencia variable. Determinar los valores de la pulsación ω para los cuales la corriente:

1. Adelanta 45° a la tensión.
2. Está en fase con ella.
3. Retrasa 45°.

Solución

La impedancia equivalente del sistema es:

$$\overline{Z} = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})$$

La tangente del ángulo es:

$$\tan\theta = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} = \frac{0{,}02\omega^2 - 12500}{5\omega}$$

En esta ecuación planteamos las condiciones particulares del enunciado.

1. Adelanta 45° a la tensión.

$$\theta = -\pi/4 \rightarrow \tan\omega = -1$$

$$\frac{0{,}02\omega^2 - 12500}{5\omega} = -1$$

$$\omega^2 + 250\omega - 625000 = 0 \rightarrow \boxed{\omega = 675\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}}$$

2. Está en fase con ella.

$$\theta = 0 \rightarrow \tan\omega = 0$$

$$0{,}02\omega = \frac{12500}{\omega}$$

$$\omega = 790{,}6\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

3. Retrasa 45°.

$$\theta = +\pi/4 \rightarrow \tan\omega = +1$$

$$\frac{0{,}02\omega^2 - 12500}{5\omega} = 1$$

$$\omega^2 - 250\omega - 625000 = 0 \rightarrow \boxed{\omega = 925{,}4\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}}$$

2.8. Enunciado

Determinar el triángulo de potencias de un circuito al que se le aplica una tensión $u(t) = 340 \cdot \cos(\omega t - 60°)$ V y circula una intensidad de corriente $i(t) = 13{,}3 \cdot \cos(\omega t - 48{,}7°)$.

Solución

Los fasores de dicha tensión y corriente son:

$$\overline{U} = 170\sqrt{2}\underline{/-60°}$$
$$\overline{I} = 6{,}65\sqrt{2}\underline{/-48{,}7°}$$

Por definición, la potencia aparente es:

$$\overline{S} = \overline{U} \cdot \overline{I}^* = 2261_{,}\text{VA}$$

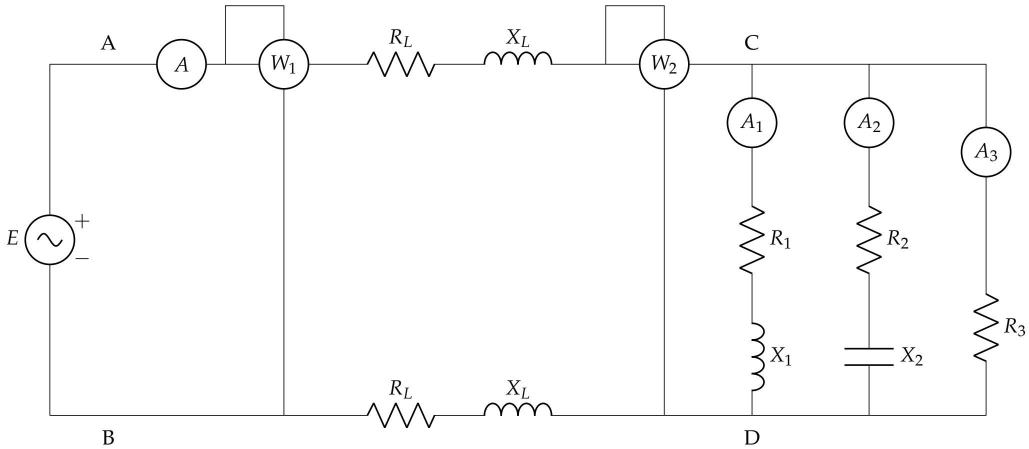
que expresada en forma binómica da los valores de P y Q:

$$P = S\cos\theta = 2217{,}17\,\text{W}$$
$$Q = S\sin\theta = -443{,}03\,\text{VA}_\text{r}$$

2.9. Enunciado

En el esquema de la figura los elementos tienen los siguientes valores:

$$R_1 = R_2 = R_3 = 10\,\Omega$$
$$X_1 = X_2 = 1\,\Omega$$
$$R_L = X_L = 1\,\Omega$$



Sabiendo que $U_{CD} = 200\,\mathrm{V}$ se debe calcular:

- Intensidades de corriente I, I_1, I_2 e I_3 en forma fasorial, tomando U_{CD} como referencia de fase
- Lectura de los vatímetros W_1 y W_2

Solución

Se dice que se tome como referencia de fase el fasor $\overline{U_{CD}}$:

$$\overline{U}_{CD} = 200\underline{/0}\,\mathrm{V}$$

Esta tensión está aplicada en tres ramas en paralelo, por lo que podemos calcular las corrientes en esas ramas. En primer lugar, calculamos las impedancias:

$$\overline{Z}_1 = 10 + \mathrm{j}\,\Omega$$
$$\overline{Z}_2 = 10 - \mathrm{j}\,\Omega$$

A continuación calculamos las corrientes de rama y la corriente total:

$$\overline{I}_1 = \frac{\overline{U}_{CD}}{\overline{Z}_1} = 19{,}8 - 1{,}98\mathrm{j}\,\mathrm{A}$$
$$\overline{I}_2 = \frac{\overline{U}_{CD}}{\overline{Z}_2} = 19{,}8 + 1{,}98\mathrm{j}\,\mathrm{A}$$
$$\overline{I}_3 = \frac{\overline{U}_{CD}}{R_3} = 20\,\mathrm{A}$$
$$\overline{I} = \overline{I}_1 + \overline{I}_2 + \overline{I}_3 = 59{,}6\,\mathrm{A}$$

Para obtener la lectura del vatímetro 2 podemos calcular con tensión y corriente:

$$\overline{S}_2 = \overline{U}_{CD} \cdot \overline{I}^* = 11920\,\mathrm{VA}$$
$$W_2 = \mathrm{Re}\{\overline{S}_2\} = 11\,920\,\mathrm{W}$$

O mediante teorema de Boucherot:

$$P_1 = I_1^2 \cdot R_1 = 3959{,}6\,\mathrm{W}$$
$$P_2 = I_2^2 \cdot R_2 = 3959{,}6\,\mathrm{W}$$
$$P_3 = I_3^2 \cdot R_3 = 4000\,\mathrm{W}$$
$$W_2 = P = P_1 + P_2 + P_3 = 11\,919{,}2\,\mathrm{W}$$

Para el vatímetro 1 hay que tener en cuenta la potencia disipada en la línea, y aplicar nuevamente el teorema de Boucherot.

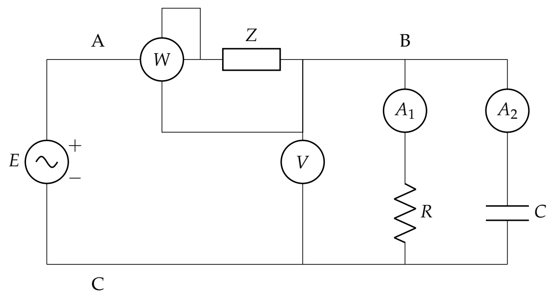
$$P_l = 2 \cdot I^2 \cdot R_L = 7105{,}3\,\mathrm{W}$$
$$W_1 = W_2 + P_l = 19\,026\,\mathrm{W}$$

2.10. Enunciado

En el circuito los amperímetros A_1 y A_2 marcan 4,5 A y 6 A, respectivamente; el voltímetro, 150 V y el vatímetro 900 W.

Sabiendo que la frecuencia del generador es de 250 Hz y el f.d.p. de la impedancia Z es de 0.8 en retraso, calcula:

- Valores de R, C y Z en forma compleja
- La tensión del generador
- Triángulo de potencias totales.



Solución

1. Valores de R, C y Z en forma compleja.

$$R = \frac{U_{BC}}{A_1} = \frac{150}{4{,}5} = 33{,}3\,\Omega$$

$$X_c = \frac{U_{BC}}{A_2} = \frac{150}{6} = 25\,\Omega$$

$$C = \frac{1}{X_c\omega} = \frac{1}{25 \cdot 2\pi \cdot 250} = 25{,}46\,\mu\mathrm{F}$$

Tomando $\overline{U}_{BC}$ como origen de fases, $\overline{U}_{BC} = 150\underline{/0}\,\mathrm{V}$, obtenemos:

$$\overline{I}_1 = 4{,}5\underline{/0}\,\mathrm{A}$$
$$\overline{I}_2 = 6\underline{/\pi/2}\,\mathrm{A}$$

Por tanto,

$$\overline{I} = \overline{I}_1 + \overline{I}_2 = 4{,}5 + 6j\,\mathrm{A} = 7{,}5\,\mathrm{A}$$

El vatímetro está midiendo $P_Z = U_Z \cdot I \cos\theta_Z$, y por tanto:

$$U_Z = \frac{900}{7{,}5 \cdot 0{,}8} = 150\,\mathrm{V}$$

$$Z = \frac{U_Z}{I} = 20\,\Omega$$

También puede obtenerse este resultado calculando primero la parte resistiva de la impedancia:

$$R_Z = \frac{P_Z}{I^2} = 16\,\Omega$$

y a continuación el módulo teniendo en cuenta que $R = Z \cdot \cos\theta$:

$$Z = \frac{R}{\cos\theta} = \frac{16}{0{,}8} = 20\,\Omega$$

Con su factor de potencia obtenemos el ángulo (teniendo en cuenta que es inductiva al ser en retraso), $\theta_Z = \arccos(0{,}8) = 36{,}87°$:

$$\overline{Z} = 16 + 12j = 20\,\Omega$$

2. Tensión del generador.

$$\overline{U}_{AC} = \overline{U}_{AB} + \overline{U}_{BC}$$

$$\overline{U}_{AB} = \overline{Z} \cdot \overline{I} = 150\,\mathrm{V}$$

$$\overline{U}_{AC} = 150 + 150j = 150\sqrt{2}\,\mathrm{V}$$

3. Triángulo de potencias totales en forma compleja.

   Podemos calcular a partir de la tensión y la corriente:

$$\begin{aligned}\overline{S}_T &= \overline{U}_{AC}\overline{I}^* = \\ &= 150\sqrt{2}\underline{/45°} \cdot 7{,}5\underline{/-53{,}13°} = \\ &= 1591\,\mathrm{VA} = \\ &= 1575 - j225\,\mathrm{VA}\end{aligned}$$

o mediante el teorema de Boucherot:

$$\begin{aligned}P_Z &= 900\,\mathrm{W} \\ P_R &= 4{,}5^2 \cdot 33{,}3 = 675\,\mathrm{W} \\ P &= P_Z + P_R = 1575\,\mathrm{W}\end{aligned}$$

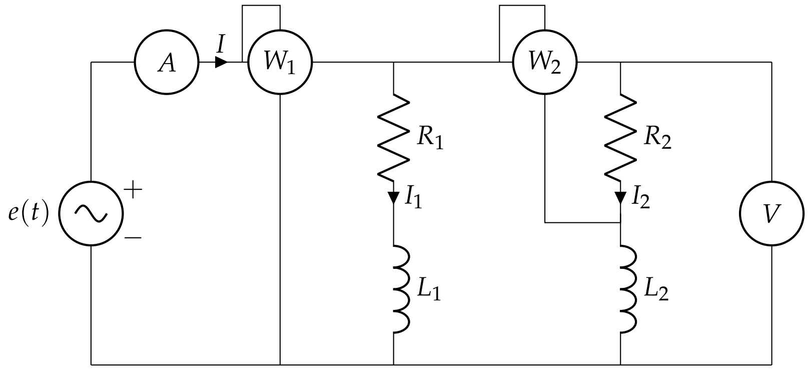
$$\begin{aligned}Q_Z &= 7{,}5^2 \cdot 12 = 675\,\mathrm{VA_r} \\ Q_c &= -6^2 \cdot 25 = -900\,\mathrm{VA_r} \\ Q &= Q_Z + Q_c = -225\,\mathrm{VA_r}\end{aligned}$$

Por tanto:

$$\overline{S} = P + jQ = 1575 - j225\,\mathrm{VA}$$

2.11. Enunciado

En el circuito de la figura, determinar las lecturas de los aparatos de medida y el balance de potencias activas y reactivas, así como el triángulo global de potencias.
Datos: $e(t) = 100\sqrt{2}\cos(\omega\, t)$; $R_1 = 2\Omega$; $R_2 = 4\Omega$; $\omega\, L_1 = 3\Omega$; $\omega L_2 = 4\Omega$.



Solución

El fasor de $e(t)$ es: $\overline{E} = 100\underline{/0^\circ}$ V. El voltímetro V mide la tensión eficaz de la fuente, por lo que:

$$V = 100\, V$$

La impedancia equivalente del circuito es:

$$\overline{Z_{eq}} = \frac{1}{\dfrac{1}{R_1 + \mathrm{j}\,\omega\, L_1} + \dfrac{1}{R_2 + \mathrm{j}\,\omega\, L_2}} = \frac{1}{\dfrac{1}{2+\mathrm{j}3} + \dfrac{1}{4+\mathrm{j}4}} = 2{,}21\underline{/51{,}9112^\circ}\ \Omega$$

por lo que, por la ley de Ohm, la corriente I que mide el amperímetro A es:

$$\overline{I} = \frac{\overline{E}}{\overline{Z_{eq}}} = \frac{100\underline{/0^\circ}}{2{,}21\underline{/51{,}9112^\circ}} = 45{,}20\underline{/-51{,}9112^\circ}A \Rightarrow A = 45{,}20A$$

Las corrientes I_1 e I_2 se obtienen también por la ley de Ohm:

$$\overline{I_1} = \frac{\overline{E}}{R_1 + \mathrm{j}\,\omega\, L_1} = \frac{100\underline{/0^\circ}}{2+\mathrm{j}3} = 27{,}74\underline{/-56{,}31^\circ}A$$

$$\overline{I_2} = \frac{\overline{E}}{R_2 + \mathrm{j}\,\omega\, L_2} = \frac{100\underline{/0^\circ}}{4+\mathrm{j}4} = 17{,}68\underline{/-45^\circ}A$$

El vatímetro W_1 mide la potencia total del circuito:

$$W_1 = E\, I\, \cos(\theta_E - \theta_I) = 100 \cdot 45{,}20 \cdot \cos(0 - (-51{,}9112)) = 2788{,}31W$$

mientras que el vatímetro W_2 mide la potencia consumida por la resistencia R_2:

$$W_2 = R_2\, I_2^2 = 4 \cdot 17{,}68^2 = 1250{,}33\, W$$

Potencias:

- **Potencia activa:**
  - R_1: $P_{R1} = R_1\, I_1^2 = 2 \cdot 27{,}74^2 = 1539{,}02$ W
  - R_2: $P_{R2} = W_2 = 1250{,}33$ W
- **Potencia reactiva:**
  - L_1: $Q_{L1} = (\omega\, L_1)\, I_1^2 = 3 \cdot 27{,}74^2 = 2308{,}52$ VAr
  - L_2: $Q_{L2} = (\omega\, L_2)\, I_2^2 = 4 \cdot 17{,}68^2 = 1250{,}33$ VAr
- **Triángulo global:** se calcula por Boucherot P y Q
  - Potencia activa total: $P_T = P_1 + P_2 = 1539{,}02 + 1250{,}33 = 2789{,}35$ W
  - Potencia reactiva total: $Q_T = Q_1 + Q_2 = 2308{,}52 + 1250{,}33 = 3558{,}82$ VAr
  - Potencia aparente total: $\overline{S_T} = P_T + \mathrm{j}\, Q_T = 2789{,}35 + \mathrm{j}3558{,}82$ VA

2.12. Enunciado

Un motor monofásico de $S = 10\,\text{kVA}$ y $fdp = 0{,}8$ está alimentado por una fuente de $230\,\text{V}$ a $f = 50\,\text{Hz}$. Calcula:

1. El valor eficaz de la corriente absorbida por el motor.
2. La potencia aparente del generador.
3. La capacidad del condensador necesario para compensar el factor de potencia a la unidad.
4. El valor eficaz de la corriente absorbida por el conjunto condensador-motor.
5. La potencia aparente del generador necesario una vez conectado el condensador del tercer apartado.
6. Compara de forma razonada los resultados de los apartados 4 y 5 con los valores calculados en los apartados 1 y 2.

1. El valor eficaz de la corriente absorbida por el motor.

   Solución

$$\overline{S}_m = \overline{U} \cdot \overline{I}^*$$
$$I = \frac{10\,000}{230} = 43{,}5\,\text{A}$$

2. La potencia aparente del generador. Suponemos línea ideal (sin perdidas):

$$S_g = S_m = 10\,\text{kVA}$$

3. La capacidad del condensador necesario para compensar el factor de potencia a la unidad.

$$Q_m = S \cdot \sin(\theta_m) = 6\,\text{kVA}_\text{r}$$
$$Q_c = Q_m$$
$$C = \frac{Q_m}{\omega \cdot V^2} = 361\,\mu\text{F}$$

4. El valor eficaz de la corriente absorbida por el conjunto condensador-motor.

$$Q' = 0\,\text{VA}_\text{r}$$
$$S' = P_m = 8\,\text{kVA}$$
$$I' = \frac{S'}{V} = 34{,}8\,\text{A}$$

5. La potencia aparente del generador necesario una vez conectado el condensador del tercer apartado.

$$S'_g = S' = 8\,\text{kVA}$$

6. Compara de forma razonada los resultados de los apartados 4 y 5 con los valores calculados en los apartados 1 y 2.

   La compensación de reactiva mediante la inserción del condensador ha reducido la corriente que circula por la línea y la potencia del generador en un 20 %.

2.13. Enunciado

Un generador de corriente alterna monofásica ($f = 50$ Hz) alimenta a dos cargas a través de una línea de cobre. Esta línea, de resistividad $\rho = 21$ mΩ mm^2/m, tiene una longitud de 100 m y una sección de 16 mm^2. Las dos cargas, cuya tensión de alimentación es de 230 V, son dos motores, uno con potencia de 7 kW y f.d.p. de 0,65, y otro con una potencia de 5 kW y f.d.p. de 0,85. Con esta información, se pide calcular:

- Triángulo de potencias de cada carga y del conjunto de ambas
- Valor eficaz de las corrientes en cada carga y de la corriente total
- Triángulo de potencias del generador
- Valor eficaz de la tensión en bornes del generador
- Capacidad del condensador a instalar en bornes de las cargas para mejorar el factor de potencia a 0,95
- Valor eficaz de la corriente entregada por el generador una vez instalado el condensador
- Triángulo de potencias del generador una vez instalado el condensador

Solución

Las potencias del motor 1 son:

$$\begin{aligned} P_1 &= 7000W \\ Q_1 &= P_1\ \tan(\phi_1) = 7000 \cdot \tan(\arccos(0{,}65)) = 8183{,}91VAr \\ S_1 &= \frac{P_1}{\cos(\phi_1)} = \frac{7000}{0{,}65} = 10769{,}23VA \end{aligned}$$

y las del motor 2:

$$\begin{aligned} P_2 &= 5000W \\ Q_2 &= P_5\ \tan(\phi_2) = 5000 \cdot \tan(\arccos(0{,}85)) = 5882{,}35VAr \\ S_2 &= \frac{P_2}{\cos(\phi_2)} = \frac{5000}{0{,}85} = 3098{,}72VA \end{aligned}$$

Por el T. Boucherot, la potencia total de las cargas es:

$$\begin{aligned} P_T &= P_1 + P_2 = 7000 + 5000 = 12000W \\ Q_T &= Q_1 + Q_2 = 8183{,}91 + 5882{,}35 = 11282{,}63VAr \\ S_T &= \sqrt{P_T^2 + Q_T^2} = \sqrt{12000^2 + 11282{,}63^2} = 16471{,}12VA \end{aligned}$$

por lo que la instalación conjunta tiene un f.d.p. de:

$$f.d.p._T = \frac{P_T}{S_T} = \frac{12000}{16471{,}12} = 0{,}7285$$

Por definición de potencia activa, se obtienen los valores eficaces de las corrientes:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{P_1}{U\ \cos(\phi_1)} = \frac{7000}{230 \cdot 0{,}65} = 46{,}82\ A \\ I_2 &= \frac{P_2}{U\ \cos(\phi_2)} = \frac{5000}{230 \cdot 0{,}85} = 25{,}58\ A \\ I_T &= \frac{P_T}{U\ \cos(\phi_T)} = \frac{12000}{230 \cdot 0{,}7285} = 71{,}62\ A \end{aligned}$$

La resistencia de cada conductor de la línea es:

$$R_l = \rho\,\frac{L}{S} = \frac{21}{1000}\cdot\frac{100}{16} = 0{,}13\Omega \Rightarrow R_{L,T} = 2\,R_l = 2\cdot 0{,}13 = 0{,}26\Omega$$

Así, la potencia perdida en la línea:

$$P_L = R_{L,T}\,I^2 = 0{,}26\cdot 71{,}62^2 = 1333{,}65W$$

y el triángulo de potencias del generador, por el T. Boucherot:

$$\begin{aligned}
P_g &= P_L + P_T = 1333{,}62 + 12000 = 13333{,}65W\\
Q_g &= Q_T = 11282{,}63VAr\\
S_g &= \sqrt{P_g^2 + Q_g^2} = \sqrt{13333{,}65^2 + 11282{,}63^2} = 17466{,}65VA
\end{aligned}$$

por lo que la tensión a la salida del generador es:

$$U_g = \frac{S_g}{I} = \frac{17466{,}65}{71{,}62} = 243{,}88V$$

Para mejorar el factor de potencia, se sabe que la potencia reactiva inicial es 11282.63 VAr. Puesto que se quiere un f.d.p.′ de 0,95, la potencia reactiva final:

$$Q'_T = P_T\,\tan(\phi') = 12000\cdot\tan(\arccos(0{,}95)) = 3944{,}21VAr$$

siendo la potencia reactiva restante la generada por la batería de condensadores ($Q_C = Q'_T - Q_T = 3944{,}21 - 11282{,}63 = -7338{,}42$ VAr). Por tanto, la capacidad del condensador:

$$Q_c = X_c\,I^2 = \frac{U^2}{X_c} \Rightarrow C = \frac{Q}{\omega\,U^2} = \frac{7338{,}42}{2\cdot\pi\cdot 50\cdot 230^2} = 441{,}57\mu F$$

A este mismo resultado se llegaría a partir de la fórmula:

$$C = \frac{P_T\,[\tan(\phi) - \tan(\phi')]}{\omega U^2} = \frac{12000\,[\tan(\arccos(0{,}7285)) - \tan(\arccos(0{,}95))]}{2\cdot\pi\cdot 50\cdot 230^2} = 441{,}66\mu F$$

Una vez instalado el condensador, la potencia aparente es:

$$S'_T = \sqrt{P_T^2 + Q_T'^2} = \sqrt{12000^2 + 3944{,}21^2} = 12631{,}58\,VA$$

siendo la corriente total en las cargas (entregada por el generador):

$$I' = \frac{S'}{U} = \frac{12631{,}58}{230} = 54{,}92A$$

Con esta corriente, la potencia perdida en la línea:

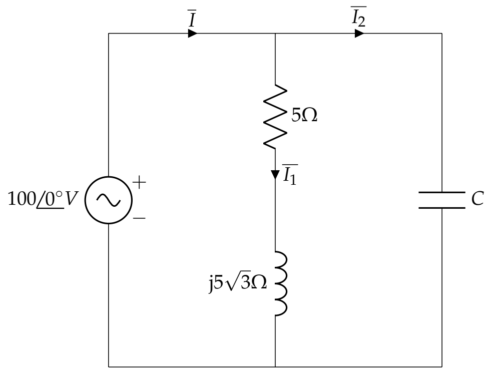
$$P'_L = R_{L,T}\,I'^2 = 0{,}26\cdot 54{,}92^2 = 784{,}21W$$

y el triángulo de potencias del generador, por el T. Boucherot:

$$\begin{aligned}
P'_g &= P_L + P_T = 784{,}21 + 12000 = 12784{,}21W\\
Q'_g &= Q'_T = 3944{,}21VAr\\
S'_g &= \sqrt{P_g'^2 + Q_g'^2} = \sqrt{12784{,}21^2 + 3944{,}21^2} = 13378{,}82VA
\end{aligned}$$

2.14. Enunciado

Determinar la capacidad del condensador de la figura para que la corriente de la fuente esté en fase con la tensión de alimentación, sabiendo que $f = 50$ Hz.



Solución

La impedancia equivalente de la rama R y L es:

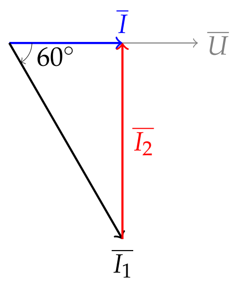
$$\overline{Z_{eq}} = R + \overline{X_L} = 5 + j5\sqrt{3}\Omega = 10\underline{/60°}\Omega$$

por lo que la corriente que circula por esa rama, según la ley de Ohm, es:

$$\overline{I_1} = \frac{\overline{U}}{\overline{\overline{Z_{eq}}}} = \frac{100\underline{/0°}}{10\underline{/60°}} = 10\underline{/-60°}\,A$$

Puesto que se quiere que la corriente de la fuente $\overline{I}$ esté en fase con la tensión, se puede dibujar el diagrama fasorial de corrientes, como se muestra en la siguiente figura.

- $\overline{I}$ está en fase con $\overline{U}$
- La corriente del condensador $\overline{I_2}$ está 90° adelantada a $\overline{U}$
- Por la 1LK, se debe cumplir que $\overline{I} = \overline{I_1} + \overline{I_2}$



Aplicando trigonometría al triángulo de corrientes, se deduce que:

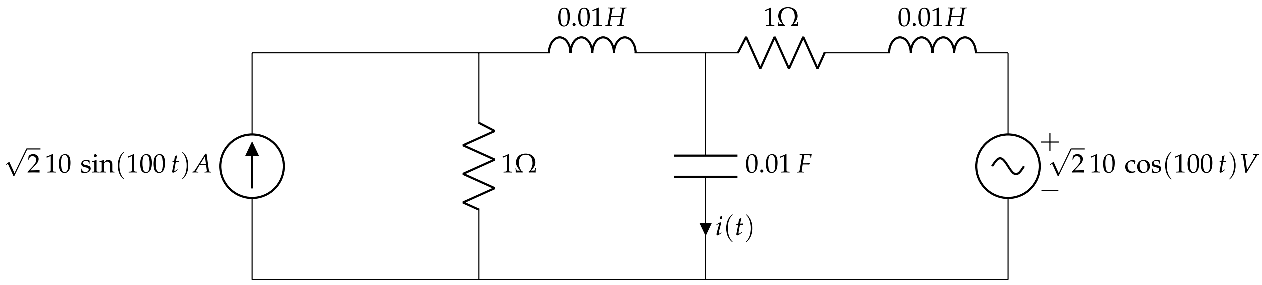
$$\cos(60°) = \frac{I}{10} \Rightarrow I = 5\,A \Rightarrow \overline{I} = 5\underline{/0°}\,A$$
$$\tan(60°) = \frac{I}{I_2} = \frac{5}{I_2} \Rightarrow I_2 = 5\sqrt{3}\,A \Rightarrow \overline{I_2} = 5\sqrt{3}\underline{/90°}\,A$$

y por la ley de Ohm se obtiene el valor de $\overline{X_c}$:

$$\overline{X_c} = \frac{\overline{U}}{\overline{\overline{I_2}}} = \frac{100\underline{/0°}}{5\sqrt{3}\underline{/90°}} = 11{,}55\underline{/-90°} = -j\,11{,}55 = -j\frac{1}{\omega\,C} \Rightarrow C = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 11{,}55} = 275{,}59\,\mu F$$

2.15. Enunciado

Calcular la corriente $i(t)$ del circuito de la figura.



Solución

En primer lugar, se deben indicar las dos expresiones de tensión y corriente en una misma función senoidal. En este caso, se opta por pasar la corriente a función coseno:

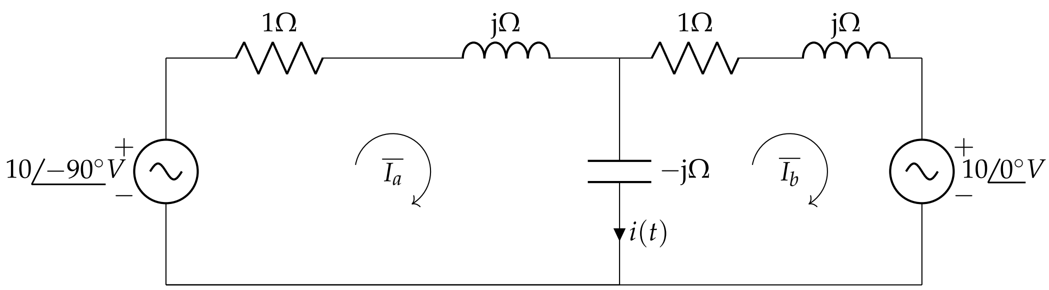
$$u(t) = \sqrt{2}\,10\,\cos(100\,t)V \Rightarrow \overline{U} = 10\underline{/0^\circ}V$$
$$i(t) = \sqrt{2}\,10\,\cos(100\,t - \frac{\pi}{2})A \Rightarrow \overline{I} = 10\underline{/-90^\circ}A$$

Se transforma la fuente de corriente en una fuente de tensión en serie con la resistencia de 1Ω:

$$\overline{U_{Ig}} = \overline{I}\,R_1 = (10\underline{/-90^\circ}) \cdot 1 = 10\underline{/-90^\circ}V$$

y estableciendo corrientes de malla como se muestra en la siguiente figura, se puede plantear el sistema de ecuaciones en forma matricial tras determinar el valor de las imepdancias:

$$\overline{X_L} = \mathrm{j}\omega\,L = \mathrm{j}100 \cdot 0{,}01 = \mathrm{j}\Omega$$
$$\overline{X_C} = -\mathrm{j}\frac{1}{\omega\,C} = -\mathrm{j}\frac{1}{100 \cdot 0{,}01} = -\mathrm{j}\Omega$$



$$\begin{bmatrix} 1+\mathrm{j}-\mathrm{j} & -(-\mathrm{j}) \\ -(-\mathrm{j}) & 1+\mathrm{j}-\mathrm{j} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \overline{I_a} \\ \overline{I_b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10\underline{/-90^\circ} \\ -10\underline{/0^\circ} \end{bmatrix}$$

cuya solución es:

$$\overline{I_a} = 0\,A$$
$$\overline{I_b} = -10\,A$$

Dado que la corriente $i(t)$ se relaciona con las corrientes de malla por:

$$\overline{I} = \overline{I_a} - \overline{I_b} = 0 - (-10) = 10\,A$$

siendo su expresión temporal:

$$i(t) = \sqrt{2}\,10\,\cos(100\,t)A$$

2.16. Enunciado

Un generador de corriente alterna monofásica ($f = 50\,\mathrm{Hz}$) alimenta a dos cargas a través de una línea de cobre. Esta línea, de resistividad $\rho = 0{,}017\,\Omega/(\mathrm{mm}^2\,\mathrm{m})$, tiene una longitud de 40 m y una sección de 6 mm^2. Las dos cargas, cuya tensión de alimentación es de 200 V, son:

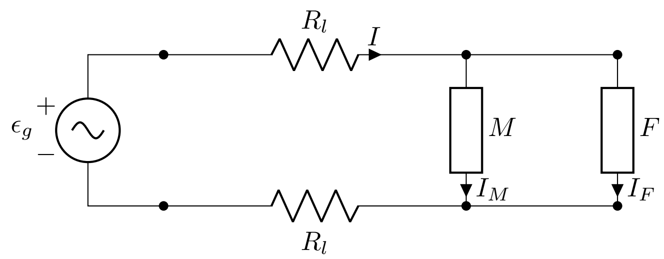
1. Un motor de 7 kW con f.d.p. 0,7.
2. Un grupo de lámparas fluorescentes con potencia total 200 W y f.d.p. 0,5.

Se pide:

- Esquema del circuito señalando adecuadamente los elementos, corrientes y tensiones
- Potencias activa, reactiva y aparente de cada carga
- Valor eficaz de las corrientes en cada carga, y de la corriente total
- Potencia activa y reactiva entregada por el generador
- Valor eficaz de la tensión en bornes del generador
- Capacidad necesaria a instalar en bornes de las cargas para mejorar el factor de potencia de las mismas a la unidad
- Valor eficaz de la tensión en bornes del generador, y potencia aparente entregada por el mismo una vez instalada la capacidad determinada en el apartado anterior

Solución

1. El esquema del circuito es el mostrado en la figura.



2. Potencias activa, reactiva y aparente de cada carga.

$$
\begin{aligned}
P_M &= 7000\,\mathrm{W} \\
Q_M &= 7141{,}4\,\mathrm{VA}_r \\
S_M &= 10\,000\,\mathrm{VA} \\
P_F &= 200\,\mathrm{W} \\
Q_F &= 346{,}4\,\mathrm{VA}_r \\
S_F &= 400\,\mathrm{VA}
\end{aligned}
$$

3. Valor eficaz de las corrientes en cada carga, y de la corriente total.

$$
\begin{aligned}
I_M &= S_M/V = 50\,\mathrm{A} \\
I_F &= S_F/V = 2\,\mathrm{A}
\end{aligned}
$$

Por teorema de Boucherot la potencia total en cargas es:

$$
\begin{aligned}
P_T &= 7200\,\mathrm{W} \\
Q_T &= 7487{,}8\,\mathrm{VA}_r \\
S_T &= 10\,387{,}9\,\mathrm{VA}
\end{aligned}
$$

Y, por tanto, la corriente total es:

$$I = S_T/U = 51{,}9\,\mathrm{A}$$

4. Potencia activa y reactiva entregada por el generador. La resistencia de la línea (una resistencia por cada conductor) es:

$$R_L = \rho L/S = 0{,}113\,\Omega$$

La potencia activa disipada en la línea es:

$$P_L = 2 \cdot I^2 R_L = 611{,}48\,\mathrm{W}$$

Por tanto, la potencia entregada por el generador es:

$$
\begin{aligned}
P_g &= P_L + P_T = 7811{,}5\,\mathrm{W} \\
Q_g &= Q_T = 7487{,}8\,\mathrm{VA}_r \\
S_g &= 10\,820{,}7\,\mathrm{VA}
\end{aligned}
$$

5. Valor eficaz de la tensión en bornes del generador.

$$U_g = S_g/I = 208{,}3\,\mathrm{V}$$

6. Capacidad necesaria a instalar en bornes de las cargas para mejorar el factor de potencia de las mismas a la unidad.

$$C = \frac{Q_t}{\omega V^2} = 595{,}9\,\mu\mathrm{F}$$

7. Valor eficaz de la tensión en bornes del generador, y potencia aparente entregada por el mismo una vez instalada la capacidad determinada en el apartado anterior.

Una vez instalado este condensador, la corriente total en las cargas es:

$$I' = P_T/V = 36\,\mathrm{A}$$

La potencia disipada en la línea es ahora:

$$P'_L = 2 \cdot I'^2 R_L = 293{,}8\,\mathrm{W}$$

Y la potencia entregada por el generador es:

$$
\begin{aligned}
P'_g &= 7493{,}8\,\mathrm{W} \\
Q'_g &= 0\,\mathrm{VA}_r \\
S'_g &= 7493{,}8\,\mathrm{VA}
\end{aligned}
$$

Por tanto, la tensión en bornes del generador es:

$$U'_g = S'_g/I' = 208{,}2\,\mathrm{V}$$

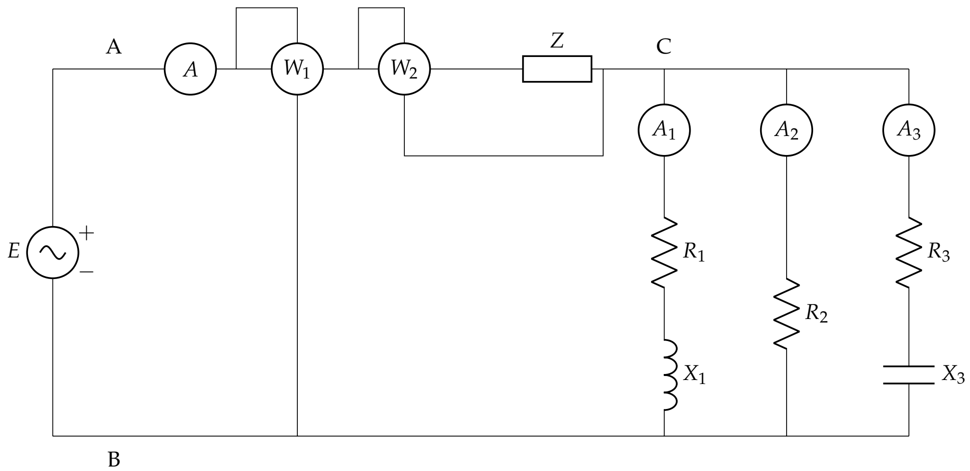
2.17. Enunciado

El circuito de la figura tiene carácter inductivo. La impedancia de linea es $Z = 10\sqrt{2}\,\Omega$ con f.d.p. $\sqrt{2}/2$ en retraso. Tómese como referencia de fases la intensidad total, I

Se debe calcular:

1. **P**otencia activa y reactiva consumida por Z.
2. **E**xpresiones complejas de las intensidades medidas por los amperímetros, I, I_1, I_2 e I_3.
3. **E**xpresiones complejas de las tensiones U_{AB}, U_{AC} y U_{CB}.
4. **V**alores de R_1, X_1, R_2, R_3 y X_3.

Datos: $A = 5\sqrt{5}\,\mathrm{A}$; $A_1 = 5\sqrt{2}\,\mathrm{A}$; $A_2 = 5\,\mathrm{A}$; $A_3 = \sqrt{10}\,\mathrm{A}$; $U_{AB} = 247\,\mathrm{V}$; $W_1 = 2350\,\mathrm{W}$; $R_1 = R_3$.



Solución

Dado que disponemos de la potencia y corriente total y la tensión a la entrada, podemos calcular el factor de potencia del circuito:

$$\cos\phi = \frac{P_1}{U_{AB} I} = 0{,}851$$

Teniendo en cuenta que la corriente total es la referencia de fases,

$$\overline{U}_{AB} = 247\,\mathrm{V}$$

También podemos calcular la potencia reactiva del circuito (positiva dado que el circuito es inductivo):

$$Q = P\tan\phi = 1450{,}4\,\mathrm{VA}r$$

En cuanto a la impedancia Z, sabemos que la tensión en sus bornes es:

$$\overline{U}_{AC} = \overline{I}\cdot\overline{Z} = 5\sqrt{5}\underline{/0^\circ}\cdot 10\sqrt{2}\underline{/45^\circ} = 50\sqrt{10}\,\mathrm{V}$$

Se cumple que $\overline{U}_{AB} = \overline{U}_{AC} + \overline{U}_{CB}$, y por tanto:

$$\overline{U}_{CB} = 100\,\mathrm{V}$$

Por otra parte, podemos descomponer esta impedancia en:

$$R = Z\cdot\cos\phi_Z = 10\,\Omega$$
$$X = Z\cdot\sin\phi_Z = 10\,\Omega$$

y por tanto,

$$P_z = I^2 \cdot R_z = 1250\,\mathrm{W}$$
$$Q_z = I^2 \cdot X_z = 1250\,\mathrm{VA}r$$

Aplicando el teorema de Boucherot podemos calcular la potencia activa y la potencia reactiva del circuito paralelo:

$$P_{CB} = P - P_z = 1100\,\mathrm{W}$$
$$Q_{CB} = Q - Q_z = 200\,\mathrm{VA}r$$
$$\overline{S}_{CB} = P_{CB} + iQ_{CB} = 1118{,}03_{\measuredangle}\,\mathrm{VA}$$

Podemos comprobar que estos resultados son coherentes con los resultados anteriores usando $\overline{S}_{CB} = \overline{U}_{CB} \cdot \overline{I}^*$.

Ahora podemos obtener R_2, Z_1 y Z_3:

$$R_2 = \frac{U_{CB}}{I_2} = 20\,\Omega$$
$$Z_1 = \frac{U_{CB}}{I_1} = 10\sqrt{2}\,\Omega$$
$$Z_3 = \frac{U_{CB}}{I_3} = 10\sqrt{10}\,\Omega$$

Con los valores de Z_1 y Z_3 podemos escribir:

$$Z_1^2 = R_1^2 + X_1^2 = 200$$
$$Z_3^2 = R_3^2 + X_3^2 = 1000$$

Por otra parte, la potencia activa del circuito paralelo es:

$$P_{CB} = P_1 + P_2 + P_2 = 1100\,\mathrm{W}$$
$$P_1 = I_1^2 \cdot R_1 = 50 \cdot R_1$$
$$P_2 = I_2^2 \cdot R_2 = 500\,\mathrm{W}$$
$$P_3 = I_3^2 \cdot R_3 = 10 \cdot R_3$$

Por tanto,

$$R_1 = R_3 = 10\,\Omega$$

Con este resultado, teniendo en cuenta el módulo de Z_1 y Z_3, podemos calcular las reactancias respectivas.

$$R_1 = 10\,\Omega$$
$$X_1 = 10\,\Omega$$
$$\overline{Z}_1 = 10 + 10i = 10\sqrt{2}_{\measuredangle}\,\Omega$$

$$R_3 = 10\,\Omega$$
$$X_3 = 30\,\Omega$$
$$\overline{Z}_3 = 10 - 30i = 10\sqrt{10}_{\measuredangle}\,\Omega$$

Podemos comprobar que estas soluciones concuerdan con la potencia reactiva de cada impedancia y con la total.

$$Q_1 = I_1^2 \cdot X_1 = 500\,\mathrm{VA}r$$
$$Q_3 = -I_3^2 \cdot X_3 = -300\,\mathrm{VA}r$$
$$Q_{CB} = Q_1 + Q_3 = 200\,\mathrm{VA}r$$

Con estos resultados, recordando que $\overline{U}_{CB} = 100\underline{/10{,}3^\circ}$ podemos calcular las corrientes en forma compleja:

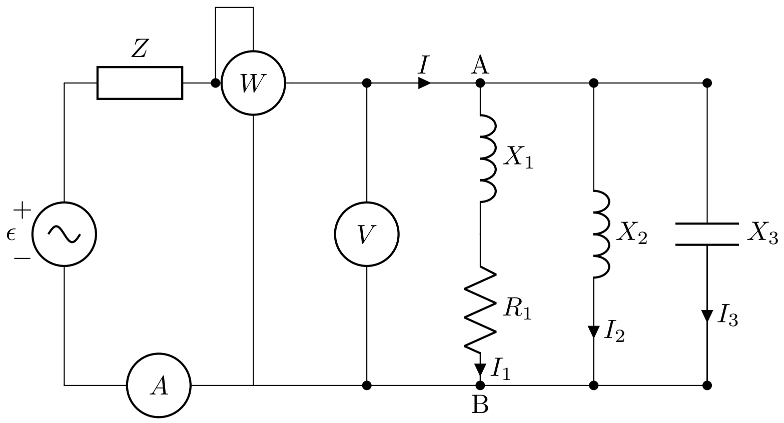
$$\overline{I}_1 = 5\sqrt{2}\angle\,\mathrm{A}$$
$$\overline{I}_2 = 5\angle\,\mathrm{A}$$
$$\overline{I}_3 = \sqrt{10}\angle\,\mathrm{A}$$

Para terminar, podemos comprobar que $\overline{I} = \overline{I_1} + \overline{I_2} + \overline{I_3}$.

2.18. Enunciado

La potencia reactiva del circuito de la figura es $80\,\mathrm{VA_r}$ de tipo capacitivo. La tensión en la impedancia Z está en fase con la intensidad I_1 y las lecturas de los aparatos son $A = 4\,\mathrm{A}$, $V = 50\,\mathrm{V}$, $W = 200\,\mathrm{W}$. Sabiendo que $R_1 = 10\,\Omega$ y $X_2 = 50\,\Omega$, calcula:

1. Las corrientes I_1, I_2, I_3 en forma fasorial.
2. Las reactancias X_1, X_3, y la impedancia $\overline{Z}$.
3. La fuerza electromotriz $\overline{\epsilon}$.



Solución

El vatímetro está midiendo la potencia activa del circuito paralelo conectado entre A y B. El único elemento que consume potencia activa en ese circuito es la resistencia R_1. Por tanto,

$$P_{R1} = 200 = I_1^2 R_1 \rightarrow I_1 = 2\sqrt{5}\,\mathrm{A}$$

Dado que conocemos la tensión entre A y B, podemos determinar la impedancia de la rama 1:

$$Z_1 = \frac{V_{AB}}{I_1} = 5\sqrt{5}\,\Omega$$

y, por tanto, obtenemos X_1:

$$Z_1 = \sqrt{R_1^2 + X_1^2} \rightarrow X_1 = 5\,\Omega$$

$$\overline{Z}_1 = 10 + j5 = 5\sqrt{5}\angle\,\Omega$$

Para obtener las corrientes en forma fasorial necesitamos una referencia de fases, y será la tensión U_{AB}:

$$\overline{U}_{AB} = 50\angle\,\mathrm{V}$$

Además, del circuito AB conocemos la tensión, la corriente y la potencia, luego podemos obtener su factor de potencia:

$$\cos\theta_{AB} = \frac{P_{AB}}{I \cdot U_{AB}} = 1$$

Por tanto,

$$\overline{I} = 4\angle\,\mathrm{A}$$

Con $\overline{U}_{AB}$ podemos calcular el ángulo de la corriente I_1:

$$\overline{I}_1 = \frac{\overline{U}_{AB}}{\overline{Z}_1} = 2\sqrt{5}\angle\,\mathrm{A}$$

De la misma forma podemos calcular la corriente I_2:

$$\overline{I}_2 = \frac{\overline{U}_{AB}}{jX_2} = 1\angle\,\mathrm{A}$$

Mediante la LKC podemos obtener la corriente en la rama 3:

$$\overline{I} = \overline{I}_1 + \overline{I}_2 + \overline{I}_3 \rightarrow \overline{I}_3 = 3\underline{/\pi/2}\,\mathrm{A}$$

Aplicamos el teorema de Boucherot para obtener la reactancia de la rama 3, teniendo que en cuenta que $\cos(\theta_{AB}) = 1 \rightarrow Q_{AB} = 0$:

$$\begin{aligned} Q &= Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0 \\ Q_1 &= I_1^2 X_1 = 100\,\mathrm{VA_r} \\ Q_2 &= I_2^2 X_2 = 50\,\mathrm{VA_r} \\ Q_3 &= -I_3^2 X_3 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$Q_3 = -150\,\mathrm{VA_r} \rightarrow X_3 = \frac{50}{3}\,\Omega$$

Para determinar $\overline{Z}$ tenemos en cuenta que la potencia reactiva total es $80\,\mathrm{VA_r}$ de tipo capacitivo y que $Q_{AB} = 0\,\mathrm{VA}_r$:

$$Q = Q_Z + Q_{AB} \rightarrow Q_Z = -80\,\mathrm{VA_r}$$

Por tanto:

$$X_Z = \frac{|Q_Z|}{I^2} = 5\,\Omega$$

Por otra parte, el enunciado indica que la tensión en esta impedancia está en fase con la intensidad I_1. Por tanto, $\theta_{VZ} = -26{,}56°$, y $\theta_Z = \theta_{VZ} - \theta_I = -25{,}56°$. Con este ángulo podemos calcular el valor de la resistencia:

$$R_Z = \frac{X_Z}{|\tan\theta_Z|} = 10\,\Omega$$

$$\overline{Z} = 10 - j5\,\Omega$$

Finalmente, para calcular la fuerza electromotriz podemos hacerlo de dos formas, mediante potencias o mediante tensiones:

Mediante el teorema de Boucherot calculamos la potencia activa:

$$P = P_Z + P_{AB} = I^2 R_Z + 200 = 360\,\mathrm{W}$$

Y con la potencia reactiva Q obtenemos la potencia aparente:

$$\overline{S} = P + jQ = 360 - j80\,\mathrm{VA}$$

y la tensión:

$$\overline{\epsilon} = \frac{\overline{S}}{\overline{I}^*} = 90 - j20 = 10\sqrt{85}\,\mathrm{V}$$

Podemos llegar a este mismo resultado con un balance de tensiones:

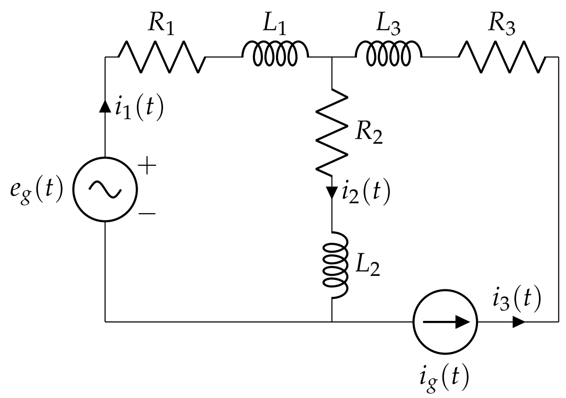
$$\overline{\epsilon} = \overline{U}_Z + \overline{U}_{AB} = \overline{Z} \cdot \overline{I} + \overline{V}_{AB}$$

2.19. Enunciado

Del circuito de la figura, obtener:

- Expresiones analíticas de las intensidades $i_1(t)$ e $i_2(t)$
- Potencia disipada por todas las resistencias

Datos: $e_g(t) = 50\sqrt{2}\cos(1000\,t)$ V; $i_g(t) = 10$ A; $R_1 = R_2 = 2\Omega$; $R_3 = 7\Omega$; $L_1 = L_2 = 1$ mH; $L_3 = 2$ mH



Solución

Circuito cuando solo actúa $i_g(t)$

La fuente $e_g(t)$ se cortocircuita y se deja únicamente la fuente $i_g(t)$. Al ser una fuente de continua, las bobinas se cortocircuitan. Queda un circuito de dos mallas, donde se sabe que $I_3' = 10$ A. Resolviendo el circuito (por leyes básicas, mallas o nudos), se obtiene que:

$$I_1' = -5\,A$$
$$I_2' = 5\,A$$

Las potencias en este caso:

$$P_{R1}' = R_1\,I_1'^2 = 2 \cdot (-5)^2 = 50\,W$$
$$P_{R2}' = R_2\,I_2'^2 = 2 \cdot 5^2 = 50\,W$$
$$P_{R3}' = R_3\,I_3'^2 = 7 \cdot 10^2 = 700\,W$$

Circuito cuando solo actúa $e_g(t)$

La fuente $i_g(t)$ queda como un circuito abierto; por tanto, queda un circuito de una malla e $I_3'' = 0$ A. Se calculan las reactancias de las bobinas L_1 y L_2, sabiendo que $\omega = 1000$ rad/s:

$$\overline{X_{L1}} = \overline{X_{L2}} = \mathrm{j}\omega L = \mathrm{j}\,1000 \cdot 0{,}001 = \mathrm{j}\Omega$$

Por la ley de Ohm, tomando valores eficaces, se obtiene el valor de $\overline{I_1''} = \overline{I_2''}$:

$$\overline{I_1''} = \overline{I_2''} = \frac{\overline{U}}{\overline{Z_{eq}}} = \frac{50\underline{/0^\circ}}{2+\mathrm{j}+2+\mathrm{j}} = \underbrace{5\sqrt{5}}_{11{,}18}\underline{/-26{,}57^\circ}\,A$$

Las potencias en este caso:

$$\begin{aligned} P_{R1}'' &= R_1\, I_1''^2 = 2 \cdot (5\sqrt{5})^2 = 250\,W \\ P_{R2}'' &= R_2\, I_2''^2 = 2 \cdot (5\sqrt{5})^2 = 250\,W \\ P_{R3}'' &= R_3\, I_3''^2 = 7 \cdot 0^2 = 0\,W \end{aligned}$$

Expresiones temporales
Por tanto, las expresiones de $i_1(t)$, $i_2(t)$ e $i_3(t)$ son:

$$\begin{aligned} i_1(t) &= -5 + 5\sqrt{10}\cos(1000t - 0{,}46)\,A \\ i_2(t) &= 5 + 5\sqrt{10}\cos(1000t - 0{,}46)\,A \\ i_3(t) &= 10A \end{aligned}$$

Cálculo de P_T
La potencia activa total consumida por las resistencias es:

$$\begin{aligned} P_T &= R_1\,(I_1'^2 + I_1''^2) + R_2\,(I_2'^2 + I_2''^2) + R_3\,(I_3'^2 + I_3''^2) = \\ &= 2 \cdot ((-5)^2 + (5\sqrt{5})^2) + 2 \cdot (5^2 + (5\sqrt{5})^2) + 7 \cdot (10^2 + 0^2) = 1300\,W \end{aligned}$$

que coincide con el valor obtenido al sumar las potencias de cada circuito (debido a la ortogonalidad de las señales implicadas):

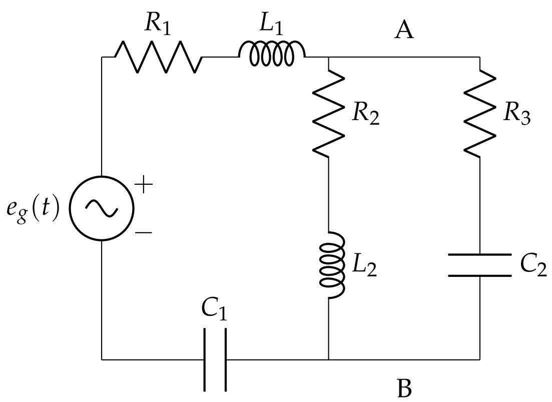
$$P_T = P_{R1}' + P_{R2}' + P_{R3}' + P_{R1}'' + P_{R2}'' + P_{R3}'' = 50 + 50 + 700 + 250 + 250 + 0 = 1300\,W$$

2.20. Enunciado

Del esquema de la figura hallar:

- Equivalente de Thévenin del circuito situado a la izquierda de los terminales de $A - B$
- Potencia disipada por la impedancia conectada a la derecha de los terminales $A - B$
- Impedancia a conectar al equivalente de Thévenin para que éste entregue la máxima potencia, así como dicha potencia

Datos: $u(t) = 80\sqrt{2}\cos(t + \frac{\pi}{2})$ V; $R_1 = R_2 = 2\Omega$; $R_3 = 3\Omega$; $L_1 = 3$ H; $L_2 = 2$ H; $C_1 = 1$ F; $C_2 = 0{,}2$ F



Solución

De la expresión temporal de $e_g(t)$, se sabe que su valor eficaz es $\overline{U} = 80\underline{/90^\circ}$ V y $\omega = 1$ rad/s. Los valores de las impedancias de bobinas y condensadores:

$$\overline{X_{L1}} = \mathrm{j}\omega L_1 = \mathrm{j}\cdot 1\cdot 3 = \mathrm{j}3\Omega$$
$$\overline{X_{L2}} = \mathrm{j}\omega L_2 = \mathrm{j}\cdot 1\cdot 2 = \mathrm{j}2\Omega$$
$$\overline{X_{C1}} = -\mathrm{j}\frac{1}{\omega C_1} = -\mathrm{j}\frac{1}{1\cdot 1} = -\mathrm{j}\Omega$$
$$\overline{X_{C2}} = -\mathrm{j}\frac{1}{\omega C_2} = -\mathrm{j}\frac{1}{1\cdot 0{,}2} = -\mathrm{j}5\Omega$$

Cálculo de $\overline{E_{Th}}$

La tensión $\overline{E_{Th}}$ es igual a la tensión que hay entre los extremos $A - B$ del circuito original, prescindiendo de la rama de $R_3 - C_2$. Queda un circuito de una rama:

$$\overline{I} = \frac{\overline{U}}{\overline{Z_{eq}}} = \frac{80\underline{/90^\circ}}{2+\mathrm{j}3+2+\mathrm{j}2-\mathrm{j}} = \underbrace{10\sqrt{2}}_{14{,}14}\underline{/45^\circ}\,A$$

por lo que:

$$\overline{E_{Th}} = (R_2 + \overline{X_{L2}})\overline{I} = (2+\mathrm{j}2)\cdot(10\sqrt{2}\underline{/45^\circ}) = 40\underline{/90^\circ}\,V$$

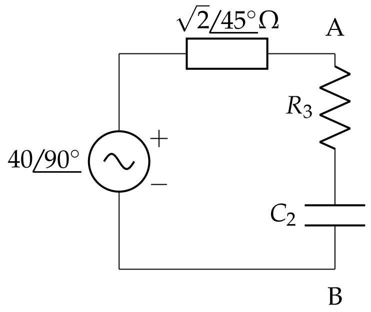
Cálculo de $\overline{Z_{Th}}$

Corresponde con la impedancia vista desde los terminales $A - B$. Al no haber fuentes dependientes, puede obtenerse anulando la fuente de tensión (cortocircuitándola) y determinando la impedancia equivalente. Por tanto:

$$\overline{Z_{Th}} = \frac{(R_1 + \overline{X_{L1}} + \overline{X_{C1}})\,(R_2 + \overline{X_{L2}})}{R_1 + \overline{X_{L1}} + \overline{X_{C1}} + R_2 + \overline{X_{L2}}} = \frac{(2+\mathrm{j}3-\mathrm{j})\cdot(2+\mathrm{j}2)}{2+\mathrm{j}3-\mathrm{j}+2+\mathrm{j}2} = \underbrace{\sqrt{2}}_{1{,}41}\underline{/45^\circ} = 1+\mathrm{j}\,\Omega$$

Potencia en $R_3 - C_2$

El circuito para calcular la potencia pedida es el de la siguiente figura:



Para calcular potencia de la carga $R3 - C2$ se determina la corriente de la malla:

$$\overline{I} = \frac{\overline{U_{Th}}}{\overline{Z_{Th}} + R_3 + \overline{X_{C2}}} = \frac{40\underline{/90^\circ}}{\sqrt{2}\underline{/45^\circ} + 3 - \mathrm{j}5} = \underbrace{5\sqrt{2}}_{7{,}07}\underline{/135^\circ}A$$

por lo que la potencia en dicha rama (únicamente consumida por la resistencia R_3):

$$P = R_3\,I^2 = 3\cdot(5\sqrt{2})^2 = 150\,W$$

Impedancia para máxima potencia y valor de P

Por el T. Máx. Trans. Potencia, la impedancia de carga que hay que conectar entre los terminales $A - B$ del equivalente de Thévenin:

$$\overline{Z}_L = \overline{Z}^*_{th} = R_{Th} - \mathrm{j}\,X_{Th} = 1 - \mathrm{j}\,\Omega$$

siendo la máxima potencia disponible en la carga:

$$P_L = \frac{U^2_{Th}}{4R_{Th}} = \frac{40^2}{4\cdot 1} = 400\,W$$

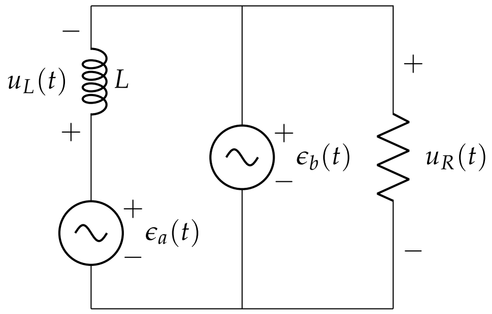
2.21. Enunciado

En el circuito de la figura determina:

- $u_R(t)$ y $u_L(t)$
- Balance de potencias

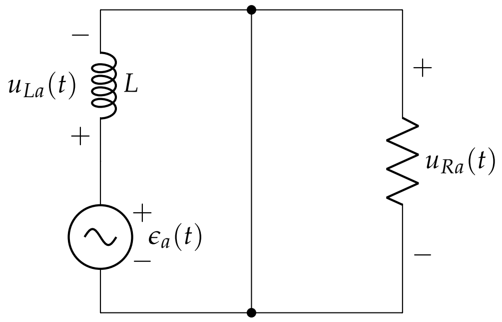
Datos:

$$e_a(t) = 3\sqrt{2}\sin(10^3 t)\,\mathrm{V}; e_b(t) = 30\sqrt{2}\sin(10^4 t)\,\mathrm{V}; R = 30\,\Omega; L = 3\,\mathrm{mH}$$



Solución

Dado que las fuentes trabajan a frecuencias diferentes, hay que resolver mediante superposición. Activamos una de las fuentes:

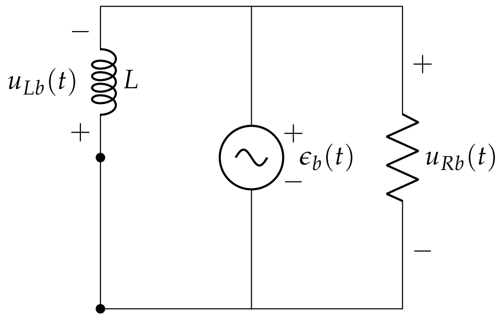


La resistencia está cortocircuitada. Por tanto:

$$u_{Ra}(t) = 0\,\mathrm{V}$$
$$u_{La}(t) = \epsilon_a(t)$$

En este circuito la potencia disipada por la resistencia es $P_{Ra} = 0\,\mathrm{W}$ y, en consecuencia, la potencia entregada por el generador es $P_{\epsilon_a} = 0\,\mathrm{W}$.

Hacemos el análisis con la otra fuente:



En este circuito:

$$u_{Rb}(t) = \epsilon_b(t)$$
$$u_{Lb}(t) = -\epsilon_b(t)$$

El balance de potencias es:

$$P_{Rb} = \frac{\epsilon_b^2}{R_b} = 30\,\mathrm{W} = P_{\epsilon_b}$$

Por tanto:

$$u_R(t) = u_{Ra}(t) + u_{Rb}(t) = 30\sqrt{2}\sin(10^4 t)$$
$$u_L(t) = u_{La}(t) + u_{Lb}(t) = 3\sqrt{2}\sin(10^3 t) - 30\sqrt{2}\sin(10^4 t)$$

Además, dado que las dos señales de los generadores son ortogonales, podemos sumar las potencias calculadas en cada circuito:

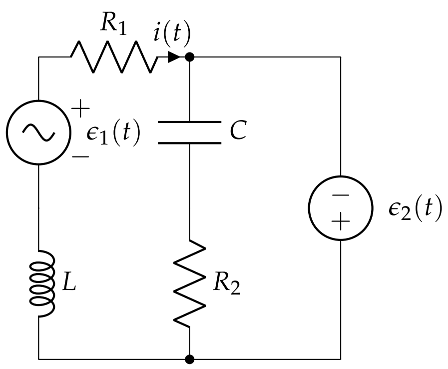
$$P_R = P_{Ra} + P_{Rb} = 30\,\mathrm{W}$$
$$P_\epsilon = P_{\epsilon_a} + P_{\epsilon_b} = 30\,\mathrm{W}$$

2.22. Enunciado

El circuito de la figura se encuentra en régimen permanente. Determinar analíticamente la expresión de $i(t)$, así como las potencias entregadas por los generadores y disipadas por las resistencias R_1 y R_2.

Datos:

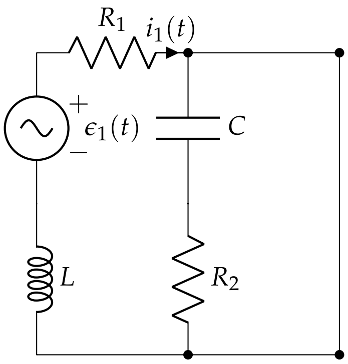
$$e_1(t) = 50\sin(1000t)\,\mathrm{V}; e_2(t) = 30\,\mathrm{V}; R_1 = 6\,\Omega; R_2 = 6\,\Omega; L = 8\,\mathrm{mH}; C = 10\,\mu\mathrm{F}$$



Solución

Aplicamos superposición.

Analizamos con la fuente de corriente alterna:



La rama $R_2 - C$ está cortocircuitada y, por tanto, podemos prescindir de ella:

$$\overline{Z}_1 = R_1 + jX_L = 6 + 8j\mathrm{A}$$
$$\overline{I}_1 = \overline{\epsilon}_1/\overline{Z}_1 = 5\sqrt{2}/2\underline{/-53{,}13°}\mathrm{A}$$

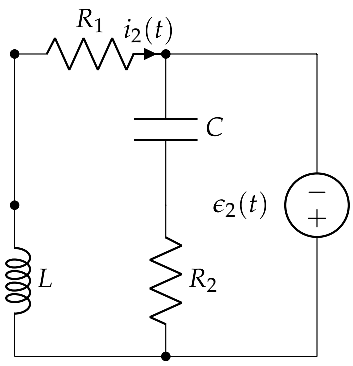
En el dominio del tiempo obtenemos:

$$i_1(t) = 5\sin(1000t - 0{,}9273)\mathrm{A}$$

En cuanto al balance de potencias:

$$P_{R11} = I_1^2 R_1 = 75\,\mathrm{W}$$
$$P_{R21} = 0\,\mathrm{W}$$
$$P_{\epsilon_1} = \Re(\overline{\epsilon}_1 \cdot \overline{I}_1^*) = 75\,\mathrm{W}$$

Analizamos con la fuente de corriente continua:



En este circuito sustituimos la bobina por un cortocircuito y el condensador por un circuito abierto. En consecuencia:

$$i_2(t) = \epsilon_2(t)/R_1 = 5\,\mathrm{A}$$

En cuanto al balance de potencias:

$$P_{R12} = I_2^2 \cdot R_1 = 150\,\mathrm{W}$$
$$P_{R22} = 0\,\mathrm{W}$$
$$P_{\epsilon 2} = \epsilon_2 \cdot I_2 = 150\,\mathrm{W}$$

Por tanto:

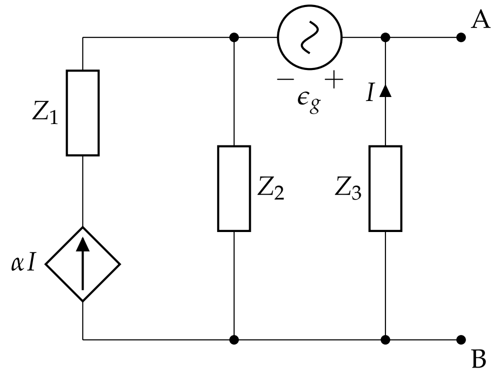
$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) = 5 + 5\sin(1000t - 0{,}9273)\mathrm{A}$$

Además, como las señales son ortogonales, podemos hacer el balance de potencias conjunto con los dos circuitos:

$$P_{R1} = P_{R11} + P_{R12} = 225\,\mathrm{W}$$
$$P_{R2} = P_{R21} + P_{R22} = 0\,\mathrm{W}$$
$$P_{\epsilon} = P_{\epsilon 1} + P_{\epsilon 2} = 225\,\mathrm{W}$$

2.23. Enunciado

Obtén el generador equivalente de Thévenin del circuito de la figura respecto de A y B.



Datos:

$$\overline{\epsilon_g} = 12 - 16j\,\mathrm{V}; \overline{Z}_1 = 1 - j\,\Omega; \overline{Z}_2 = 1 + j\,\Omega; \overline{Z}_3 = 5 + 3j\,\Omega \alpha = 2$$

Solución

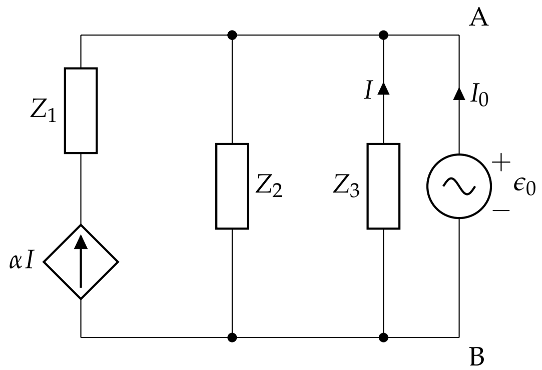
Dejamos el circuito en abierto y calculamos la tensión en AB:

$$\overline{U}_{AB} = \overline{\epsilon}_g + (1+\alpha)\overline{I} \cdot \overline{Z}_2$$
$$\overline{U}_{AB} = -\overline{I} \cdot \overline{Z}_3$$

Combinando estas ecuaciones obtenemos la tensión:

$$\overline{\epsilon}_{th} = \overline{U}_{AB} = \frac{\overline{\epsilon}_g}{1 + (1+\alpha)\frac{\overline{Z}_2}{\overline{Z}_3}} = 6 - 10j = 11{,}66\underline{/-59{,}04^{\circ}}\mathrm{V}$$

Para obtener la impedancia apagamos las fuentes independientes. Como hay fuentes dependientes debemos aplicar una fuente de prueba a la salida del circuito, con fuerza electromotriz $\overline{\epsilon}_0$ y corriente inyectada $\overline{I}_0$.



$$\overline{\epsilon}_0 = [(1+\alpha)\overline{I} + \overline{I}_0] \cdot \overline{Z}_2$$
$$\overline{\epsilon}_0 = -\overline{I} \cdot \overline{Z}_3$$

Combinando ambas expresiones obtenemos:

$$\overline{Z}_{th} = \frac{\overline{\epsilon}_0}{\overline{I}_0} = \frac{\overline{Z}_2 \cdot \overline{Z}_3}{(1+\alpha)\overline{Z}_2 + \overline{Z}_3} = 0{,}64 + 0{,}52j\Omega$$

Para obtener la máxima potencia disponible hay que conectar una impedancia:

$$\overline{Z}_L = \overline{Z}_{th}^* = 0{,}64 - 0{,}52j\Omega$$

Esta impedancia disipará una potencia:

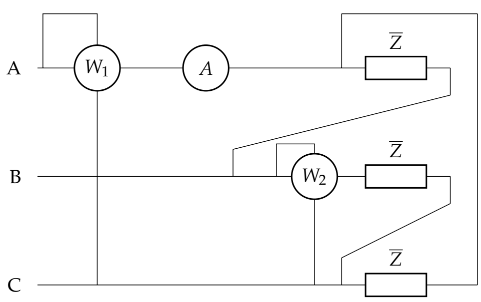
$$P_L = \frac{\epsilon_{th}^2}{4 \cdot R_{th}} = 53{,}11\,\mathrm{W}$$

Capítulo 3

Corriente alterna trifásica

3.1. Enunciado

En el sistema de la figura de secuencia de fases directa y frecuencia $f = 60\,\text{Hz}$, se dispone de un receptor equilibrado con una potencia total $P_T = 51\,984\,\text{W}$ factor de potencia de 0,6 en retraso. Sabiendo que el amperímetro marca $76\sqrt{3}\,\text{A}$, determinar:



1. Medida delos vatímetros 1 y 2.
2. Valor de la impedancia $\overline{Z}$ en forma módulo-argumento.
3. Valor de la capacidad mínima para mejorar el factor de potencia a 0,95 en retraso.
4. Valor de la impedancia equivalente en estrella.

3.1.1. Solución

Para solucionar las preguntas en este problema, antes de calcular nada, podemos extraer la siguiente información del enunciado:

- Se tiene una sola carga trifásica equilibrada de valor Z y con $\cos\phi = 0,6 \rightarrow 53{,}13°$ en retraso. Esto significa que la impedancia $\overline{Z}$ es de carácter inductivo y su potencia reactiva será positiva.
- Se tiene una secuencia de fases directa ABC. Esto significa que el sistema de alimentación tiene las siguientes tensiones de línea: $\overline{U}_{AB} = U_{AB,}$V, $\overline{U}_{BC} = U_{BC,}$V y $\overline{U}_{CA} = U_{CA,}$V. Así pues, las tensiones de fase son: $\overline{U}_A = U_{A,}$V, $\overline{U}_B = U_{B,}$V y $\overline{U}_C = U_{C,}$V.
- Anotamos la frecuencia de red de valor 60 Hz por si hemos de calcular alguna reactancia inductiva y/o capacitiva.
- La potencia activa total que demanda el triángulo de impedancia $\overline{Z}$ es de valor $P_T = 51\,984\,\text{W}$. De este valor, sacamos como conclusión que cada impedancia $\overline{Z}$ del triángulo consume un tercio de dicha potencia activa al ser un receptor equilibrado.
- El vatímetro W_2 está conectado midiendo la intensidad $\overline{I}_{BC}$ y la tensión $\overline{U}_{BC}$, es decir, nos da el valor de la potencia activa que disipa la fase BC del triángulo, cuyo valor ya sabemos que es:

$$W_2 = \frac{P_T}{3} = \frac{51984}{3} = 17\,328\,\text{W}$$

- El amperímetro dispuesto en la línea A mide el valor eficaz de $76\sqrt{3}\,\text{A}$. Esto significa que, al tener un receptor equilibrado conectado en triángulo, las intensidades por las otras dos líneas B y C tienen el mismo valor de intensidad de valor eficaz de $76\sqrt{3}\,\text{A}$.

- También, al ser un receptor equilibrado conectado en triángulo, las intensidades $\overline{I}_{AB}$, $\overline{I}_{BC}$ e $\overline{I}_{CA}$ que circulan dentro del triángulo, toman por valor eficaz:

$$\frac{76\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 76\,\mathrm{A}$$

- Los argumentos de las intensidades dentro de triángulo se pueden obtener del propio enunciado. Cada intensidad $\overline{I}_{AB}$, $\overline{I}_{BC}$ e $\overline{I}_{CA}$ retrasa 53,13° a las tensiones $\overline{U}_{AB}$, $\overline{U}_{BC}$ y $\overline{U}_{CA}$ correspondientes, es decir, la intensidad $\overline{I}_{AB}$ tiene un argumento de valor $120 - 53,13 = 66{,}87°$, la intensidad $\overline{I}_{BC}$ tiene un argumento de valor $0 - 53,13 = -53{,}13°$ y la intensidad $\overline{I}_{CA}$ tiene un argumento de valor $-120 - 53,13 = -153{,}13°$.
- Los argumentos de las intensidades de línea también se pueden obtener del propio enunciado. Cada intensidad $\overline{I}_{A}$, $\overline{I}_{B}$ e $\overline{I}_{C}$ retrasa 53,13° a las tensiones del sistema de alimentación $\overline{U}_{A}$, $\overline{U}_{B}$ y $\overline{U}_{C}$ correspondientes, es decir, la intensidad $\overline{I}_{A}$ tiene un argumento de valor $90 - 53,13 = 36{,}87°$, la intensidad $\overline{I}_{B}$ tiene un argumento de valor $-30 - 53,13 = -83{,}13°$ y la intensidad $\overline{I}_{C}$ tiene un argumento de valor $-150 - 53,13 = -203{,}13°$.

Tras estas consideraciones, se pueden iniciar los cálculos necesarios para responder a las preguntas del problema:

1. Medida de los vatímetros 1 y 2.

   La lectura del vatímetro 1, según está conectado, es la siguiente:

$$[W_1] = \Re(\overline{U}_{AC} \cdot \overline{I}_{A}) = U_{AC} \cdot I_A \cdot \cos(\langle \overline{U}_{AC}, \overline{I}_{A} \rangle)$$

   Se desconoce el módulo de la tensión $\overline{U}_{AC}$. Se calcula a partir del vatímetro 2 cuya lectura es de $[W_2] = 17\,328\,\mathrm{W}$:

$$[W_2] = \Re(\overline{U}_{BC} \cdot \overline{I}_{BC}) = U_{BC} \cdot I_{BC} \cdot \cos(\langle \overline{U_{BC}}, \overline{I_{BC}} \rangle)$$
$$17328 = U_{BC} \cdot 76 \cdot 0{,}6 \Rightarrow U_{BC} = 380\,\mathrm{V}$$

   Por tanto, al ser un sistema equilibrado ($U_{AB} = U_{BC} = U_{CA}$), y sabiendo que $\overline{U}_{AC} = -\overline{U}_{CA} = U_{CA}\underline{/-120+180} = 380\,\mathrm{V}$, la lectura del vatímetro 1:

$$[W_1] = \Re(\overline{U}_{AC} \cdot \overline{I}_{A}) = U_{AC} \cdot I_A \cdot \cos(\langle \overline{U}_{AC}, \overline{I}_{A} \rangle) = 380 \cdot 76\sqrt{3} \cdot \cos(\langle 60; 36{,}87 \rangle) = 46\,001\,\mathrm{W}$$

2. Valor de la impedancia $\overline{Z}$ en forma módulo-argumento.

   Al conocer ya el valor de la tensión a la que está alimentada y la intensidad que circula por ella, se obtiene su valor fácilmente a partir de la ley de Ohm:

$$\overline{Z} = \frac{\overline{U}_{AB}}{\overline{I}_{AB}} = \frac{380\underline{/120}}{76\underline{/66{,}87}} = 5\,\Omega$$

3. Valor de la capacidad mínima para mejorar el factor de potencia a 0,95 en retraso.
4. Valor de la impedancia equivalente en estrella.

3.2.

3.2.1.

Capítulo 4

Teoremas fundamentales

Capítulo 5

Análisis transitorio

Capítulo 6

Técnicas generales de análisis

Capítulo 7

Transformadores

Capítulo 8

Elementos activos