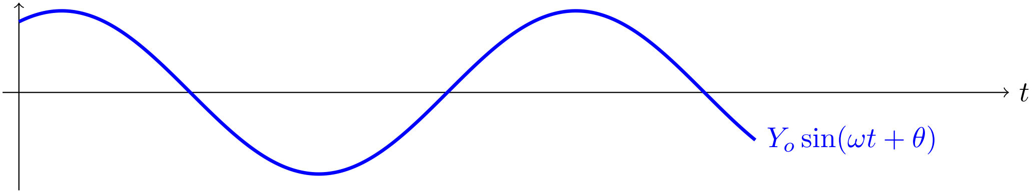
Corriente alterna sinusoidal

Teoría de Circuitos

Oscar Perpiñán Lamigueiro

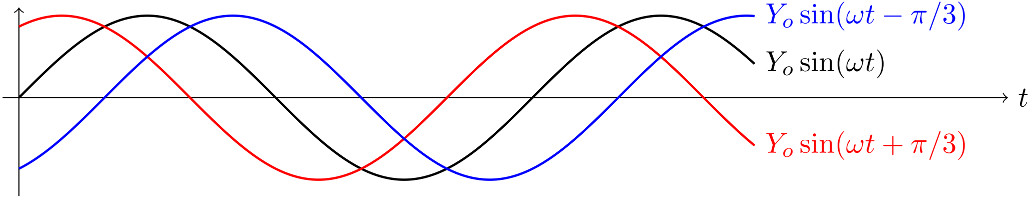
Onda sinusoidal



$$y(t) = Y_o \cdot \sin(\omega \cdot t + \theta)$$

- Y_o valor máximo de la onda.
- $\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T}$: pulsación (radianes/segundo)
- T: periodo de la onda (segundos)
- $f = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} = \frac{1}{T}$: frecuencia (Hz)

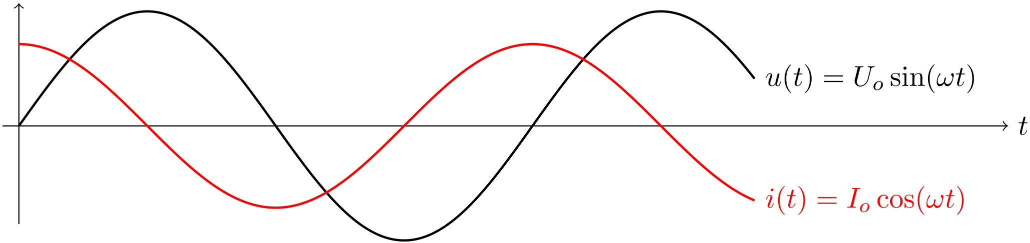
Fase



$$y(t) = Y_o \cdot \sin(\omega \cdot t + \theta)$$

- θ: fase (radianes o grados)
  - Es el argumento de la onda para t=0
  - Tomando una onda como referencia, si la fase es 0º, se dice que están en fase con la onda de referencia.
  - Si la fase es positiva, se dice que la onda adelanta respecto a la referencia.

Señales en Cuadratura



- Cuando el desfase entre dos señales es de 90º ($\theta_I - \theta_U = \pi/2$), se dice que están en cuadratura.
- El paso por cero de una señal coincide con el paso por el máximo/mínimo de la otra señal.

Valor medio y valor eficaz

Valor medio

$$Y_m = \frac{1}{T} \int_0^T y(t)\, dt$$

$$Y_m = \frac{1}{T} \int_0^T Y_o \cdot \sin(\omega \cdot + \theta)\, dt = 0$$

Valor eficaz

$$Y = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T y^2(t)\, dt}$$

$$Y = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T \left(Y_o \cdot \sin(\omega \cdot t + \theta)\right)^2 dt} = \boxed{\frac{Y_o}{\sqrt{2}}}$$

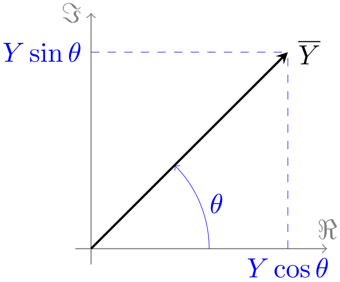
Representación fasorial

- Un fasor es un **número complejo** que representa una señal sinusoidal para simplificar cálculos.
- El **módulo** del fasor es el **valor eficaz**. El **argumento** es la **fase**.
- Descartamos pulsación: No se puede emplear cuando hay frecuencias diferentes en un mismo circuito.

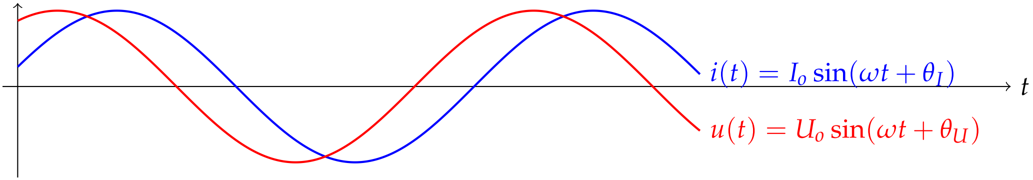
$$\overline{Y} = Y \cdot e^{j\theta}$$

$$\overline{Y} = Y\underline{/\theta}$$

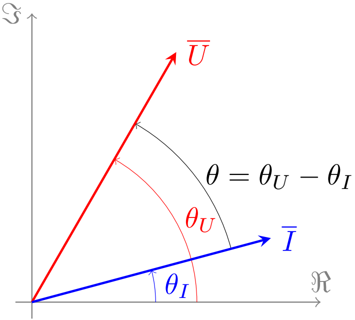
$$\overline{Y} = Y \cdot (\cos(\theta) + \mathrm{j} \cdot \sin(\theta))$$



Tensión y corriente en notación fasorial



$$\overline{U} = U\underline{/\theta_U}$$
$$\bar{I} = I\underline{/\theta_I}$$

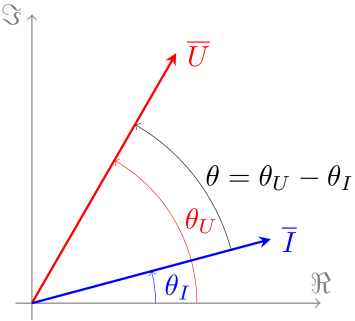


Impedancia: relación entre fasores de tensión y corriente

$$\overline{U} = \overline{Z} \cdot \overline{I}$$

$$\overline{Z} = \frac{\overline{U}}{\overline{I}}$$

$$\boxed{\overline{Z} = \frac{U}{I} \underline{/\theta_U - \theta_I} \Rightarrow \begin{cases} Z = \frac{U}{I} \\ \theta = \theta_U - \theta_I \end{cases}}$$

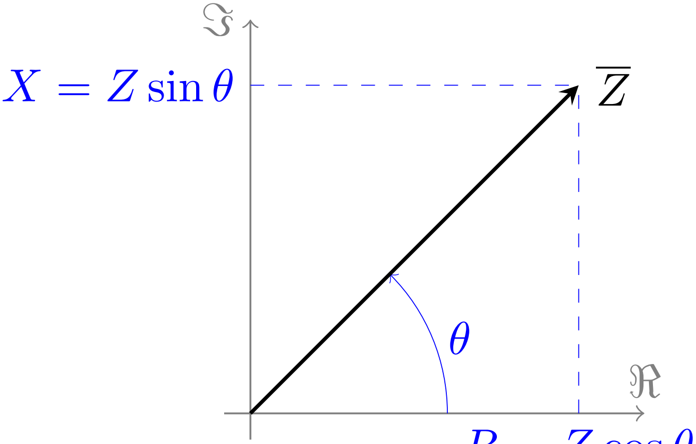


Convenio de origen de fases

$$\theta_U = 0 \Rightarrow \begin{cases} Z = \frac{U}{I} \\ \theta = -\theta_I \end{cases}$$

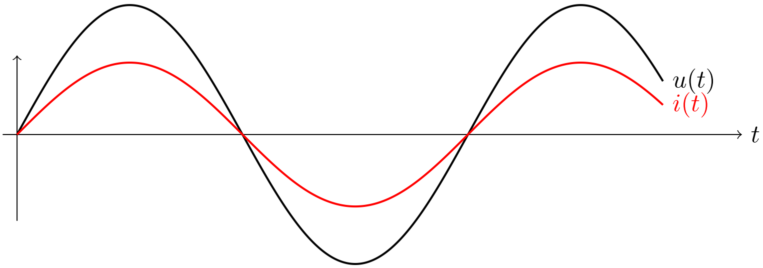
Impedancia Genérica

$$\overline{Z} = R + jX$$



Circuito Resistivo

Un circuito resistivo no desfasa (**tensión y corriente en fase**).

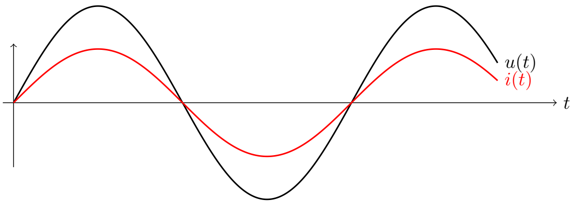


$$i(t) = I_o \cdot \sin(\omega t + \theta_I)$$

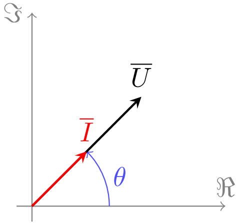
$$\begin{aligned} u(t) &= R \cdot i(t) = \\ &= RI_o \cdot \sin(\omega t + \theta_I + 0) = \\ &= U_o \cdot \sin(\omega t + \theta_I + 0) \end{aligned}$$

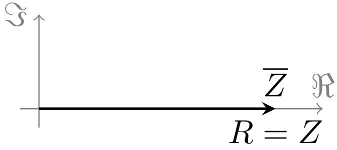
Circuito Resistivo

Un circuito resistivo no desfasa (**tensión y corriente en fase**).



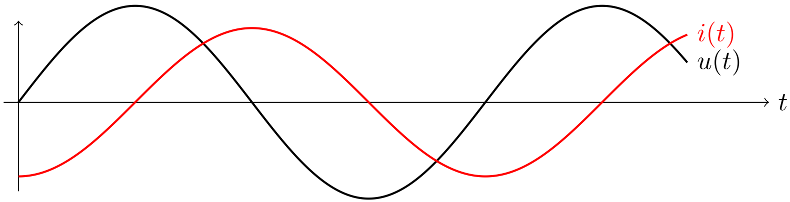
$$\overline{Z}_R = R = R\underline{/0}$$





Circuito Inductivo puro

Un circuito inductivo puro genera **señales en cuadratura** y **retrasa la corriente**.

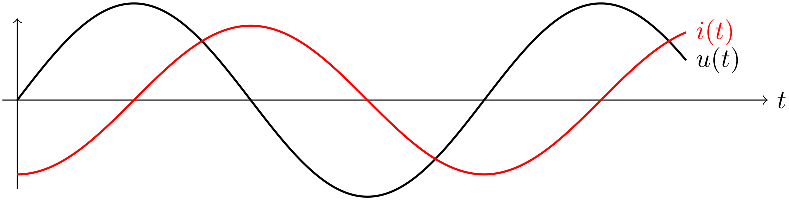


$$i(t) = I_o \cdot \sin(\omega t + \theta_I)$$

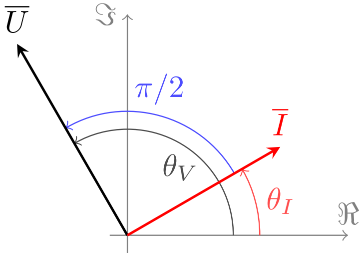
$$\begin{aligned} u(t) &= L \cdot \frac{di(t)}{dt} = \\ &= L\omega I_o \cdot \sin(\omega t + \theta_I + \pi/2) = \\ &= U_o \cdot \sin(\omega t + \theta_I + \pi/2) \end{aligned}$$

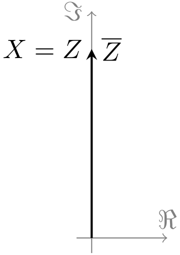
Circuito Inductivo puro

Un circuito inductivo puro genera **señales en cuadratura** y **retrasa la corriente**.



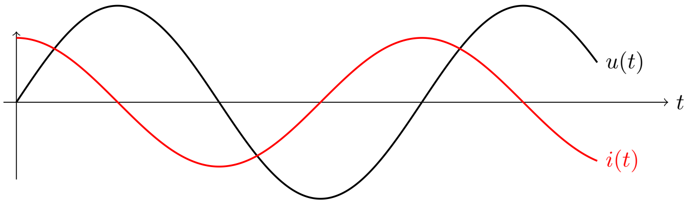
$$\overline{Z}_L = j\omega L = \omega L \underline{/90^\circ}$$





Circuito Capacitivo puro

Un circuito capacitivo puro genera **señales en cuadratura** y **adelanta la corriente**.



$$i(t) = I_o \cdot \sin(\omega t + \theta_I)$$

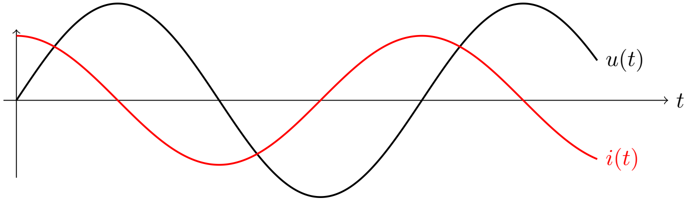
$$u(t) = 1/C \cdot \int_{-\infty}^{t} i(\tau) d\tau =$$

$$= \frac{1}{\omega C} I_o \cdot \sin(\omega t + \theta_I - \pi/2) =$$

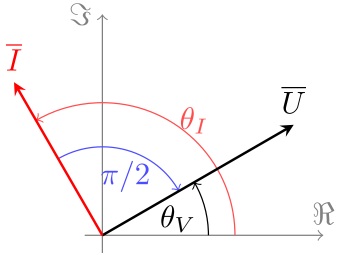
$$= U_o \cdot \sin(\omega t + \theta_I - \pi/2)$$

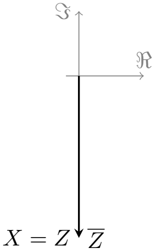
Circuito Capacitivo puro

Un circuito capacitivo puro genera **señales en cuadratura** y **adelanta la corriente**.

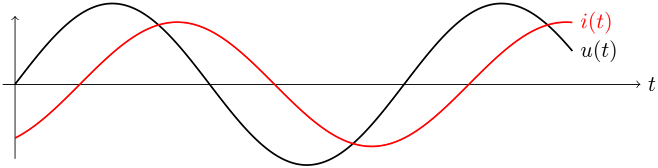


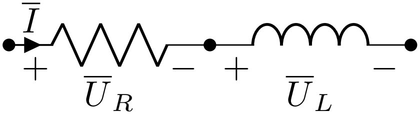
$$\overline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{\omega C}\underline{/-90^\circ}$$

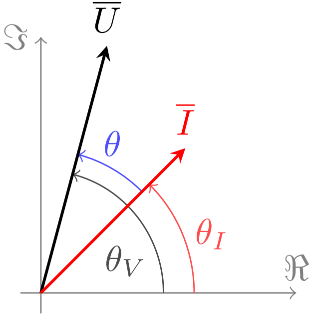




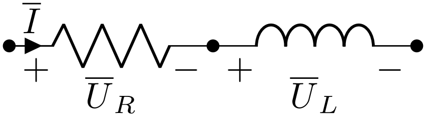
Circuito RL (inductivo con pérdidas)







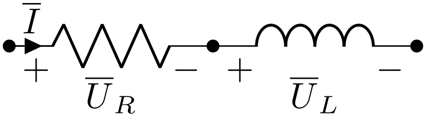
Circuito RL (inductivo con pérdidas)



$$\overline{U}_R = R\bar{I}$$
$$\overline{U}_L = j\omega L\bar{I}$$

$$\overline{U} = \overline{U}_R + \overline{U}_L = $$
$$= (R + j\omega L)\bar{I}$$

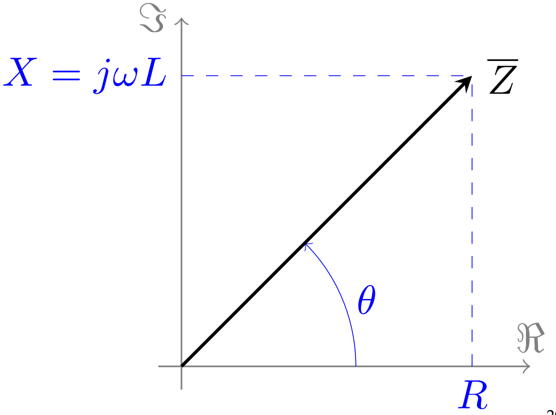
Circuito RL (inductivo con pérdidas)



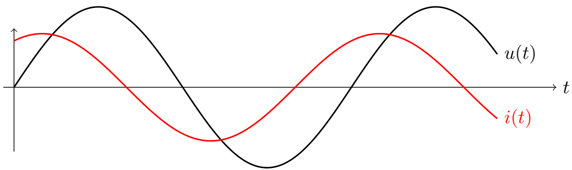
$$\overline{Z} = R + j\omega L \Rightarrow \boxed{\theta > 0}$$

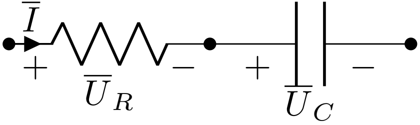
$$|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$

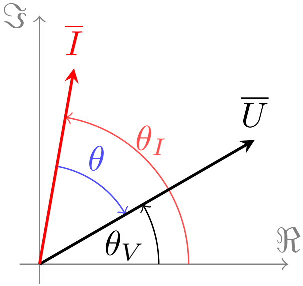
$$\theta = \text{atan}\frac{\omega L}{R}$$



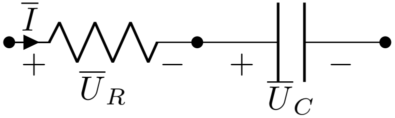
Circuito RC (capacitivo con pérdidas)







Circuito RC (capacitivo con pérdidas)



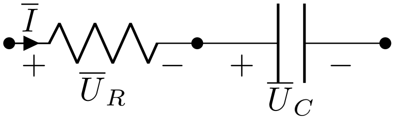
$$\overline{U}_R = R\overline{I}$$

$$\overline{U}_C = -j\frac{1}{\omega C}\overline{I}$$

$$\overline{U} = \overline{U}_R + \overline{U}_C =$$

$$= (R - j\frac{1}{\omega C})\overline{I}$$

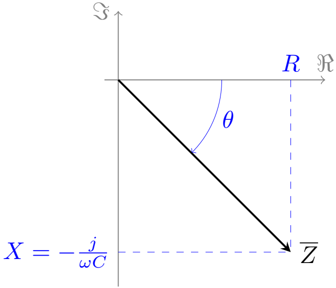
Circuito RC (capacitivo con pérdidas)



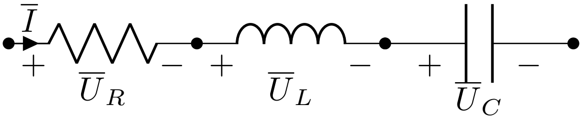
$$\overline{Z} = R - \frac{j}{\omega C} \Rightarrow \boxed{\theta < 0}$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}$$

$$\theta = -\text{atan}\frac{1}{\omega RC}$$



Circuito RLC serie



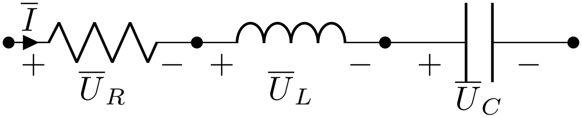
$$\overline{U}_R = R\overline{I}$$

$$\overline{U}_L = j\omega L\overline{I}$$

$$\overline{U}_C = -j\frac{1}{\omega C}\overline{I}$$

$$\begin{aligned}\overline{U} &= \overline{U}_R + \overline{U}_L + \overline{U}_C = \\ &= \left(R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})\right)\overline{I}\end{aligned}$$

Circuito RLC serie



$$\overline{Z} = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})$$

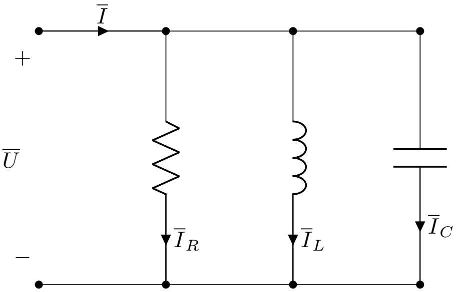
$$|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$$

$$\theta = \operatorname{atan} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

- $\theta > 0 \Rightarrow \omega L > \frac{1}{\omega C}$: inductivo
- $\theta < 0 \Rightarrow \omega L < \frac{1}{\omega C}$: capacitivo
- $\theta = 0 \Rightarrow \omega L = \frac{1}{\omega C}$: resistivo (resonancia)

$$\boxed{u(t) = Z \cdot I_o \sin(\omega t + \theta_I + \theta)}$$

Circuito RLC paralelo



$$\overline{I}_R = 1/R \cdot \overline{U}$$

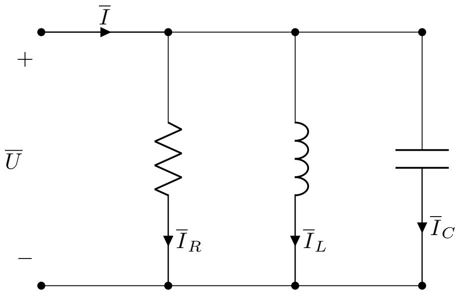
$$\overline{I}_L = -j\frac{1}{\omega L} \cdot \overline{U}$$

$$\overline{I}_C = j\omega C \cdot \overline{U}$$

$$\overline{I} = \overline{I}_R + \overline{I}_L + \overline{I}_C =$$

$$= \left(\frac{1}{R} + j(\omega C - \frac{1}{\omega L})\right)\overline{U}$$

Circuito RLC paralelo

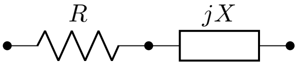


$$\overline{Y} = \frac{\overline{I}}{\overline{U}} = 1/R + j(\omega C - \frac{1}{\omega L})$$

$$|Y| = \sqrt{1/R^2 + (\omega C - \frac{1}{\omega L})^2}$$

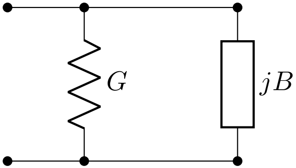
$$\theta_Y = \text{atan}\left(R \cdot (\omega C - \frac{1}{\omega L})\right)$$

Impedancia y Admitancia



$$\overline{U} = \overline{Z} \cdot \overline{I}$$

$$\overline{Z} = R + jX$$

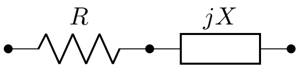


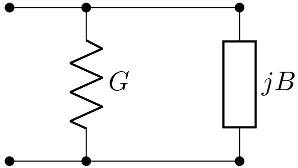
$$\overline{I} = \overline{Y} \cdot \overline{U}$$

$$\overline{Y} = G + jB$$

$$\boxed{\overline{Y} = \frac{1}{\overline{\overline{Z}}} \rightarrow \begin{cases} |Y| = \frac{1}{|Z|} \\ \theta_Y = -\theta_Z = -\theta \end{cases}}$$

Impedancia y Admitancia





$$\overline{Z} = \frac{1}{G + jB} \rightarrow \begin{cases} R = \frac{G}{G^2+B^2} \\ X = -j\frac{B}{G^2+B^2} \end{cases}$$

$$\overline{Y} = \frac{1}{R + jX} \rightarrow \begin{cases} G = \frac{R}{R^2+X^2} \\ B = -j\frac{X}{R^2+X^2} \end{cases}$$

Expresión general

Sea la tensión referencia de fases. Si $\theta > 0$ (inductivo) la corriente está retrasada respecto de la tensión (*circuito en retraso*).

$$
\begin{aligned}
u(t) &= U_o \cos \omega t \\
i(t) &= I_o \cos(\omega t - \theta) \\
p(t) &= u(t) \cdot i(t)
\end{aligned}
$$

Expresión general

$$
\begin{aligned}
p(t) &= U_o I_o \cdot \cos(\omega t) \cdot \cos(\omega t - \theta) = \\
&= \frac{1}{2} \cdot U_o I_o \cdot (\cos(2\omega t - \theta) + \cos(\theta)) \\
&= UI \cdot (\cos(2\omega t - \theta) + \cos(\theta)) = \\
&= UI \cdot (\cos(2\omega t) \cos(\theta) + \sin(2\omega t) \sin(\theta) + \cos(\theta))
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{p(t) = UI \cos(\theta) + UI \cos(\theta) \cos(2\omega t) + UI \sin(\theta) \sin(2\omega t)}
$$

Expresión general

$$p(t) = UI\cos(\theta) + UI\cos(\theta)\cos(2\omega t) + UI\sin(\theta)\sin(2\omega t)$$

$$P = UI\cos\theta \quad Q = UI\sin\theta$$

$$\boxed{p(t) = P \cdot (1 + \cos(2\omega t)) + Q \cdot \sin(2\omega t)}$$

Circuito Resistivo

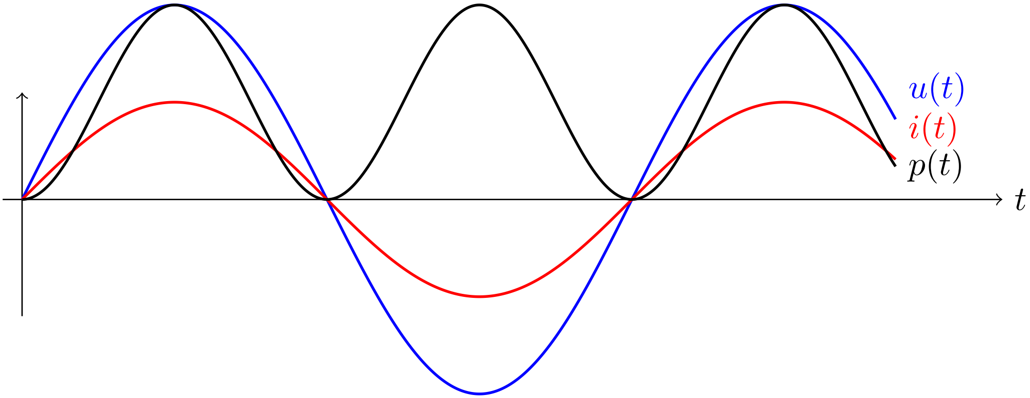
$$P = UI\cos\theta \quad Q = UI\sin\theta$$

$$p(t) = P\cdot(1+\cos(2\omega t)) + Q\cdot\sin(2\omega t)$$

$$\theta = 0 \rightarrow \begin{cases} P = UI = U^2/R = I^2R \\ Q = 0 \end{cases}$$

$$p(t) = P\cdot(1+\cos(2\omega t))$$

Circuito Resistivo



- Fluctúa al doble de frecuencia.
- Es siempre positiva.

Circuito Inductivo puro

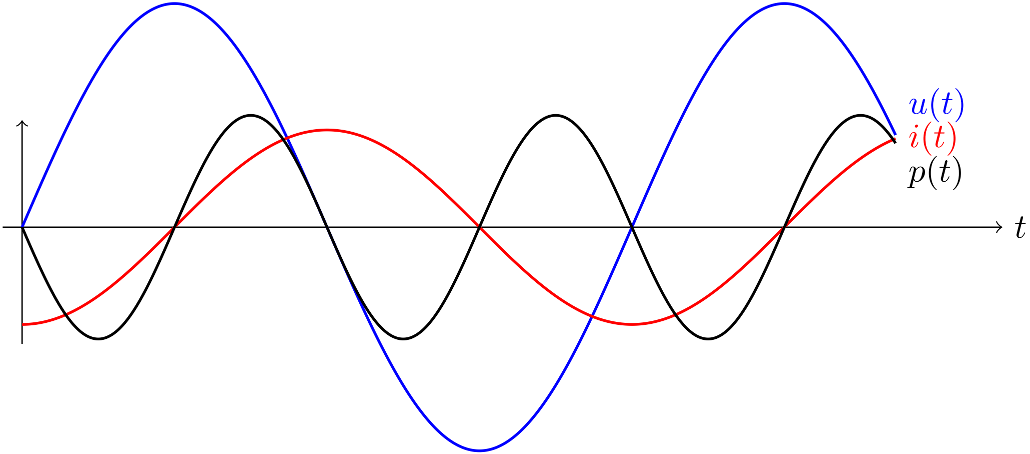
$$P = UI\cos\theta \quad Q = UI\sin\theta$$

$$p(t) = P\cdot(1+\cos(2\omega t)) + Q\cdot\sin(2\omega t)$$

$$\theta = \pi/2 \rightarrow \begin{cases} P = 0 \\ Q = UI = \frac{U^2}{\omega L} = I^2\omega L \end{cases}$$

$$p(t) = Q\cdot\sin(2\omega t)$$

Circuito Inductivo puro



- Fluctúa al doble de frecuencia.
- Pasa por los ceros de tensión y corriente.
- Su valor medio es nulo.

Circuito Capacitivo puro

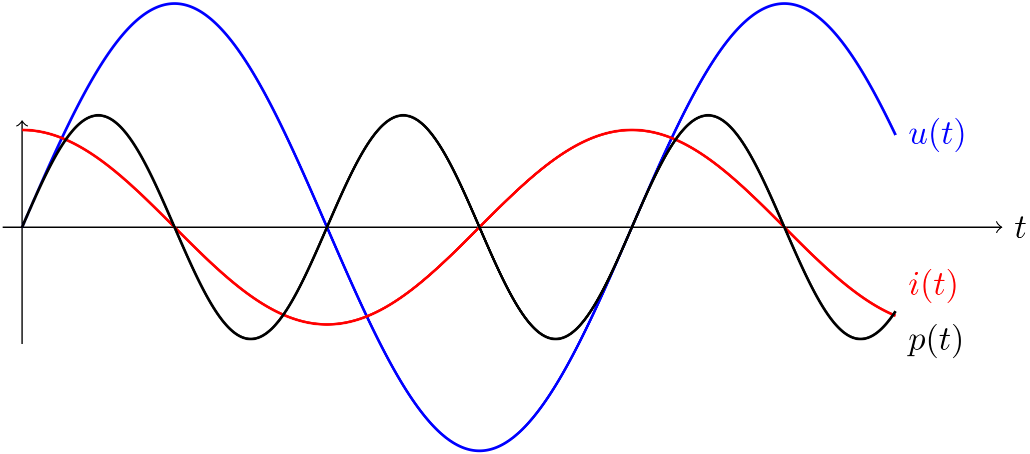
$$P = UI\cos\theta \quad Q = UI\sin\theta$$

$$p(t) = P\cdot(1+\cos(2\omega t)) + Q\cdot\sin(2\omega t)$$

$$\theta = -\pi/2 \rightarrow \begin{cases} P = 0 \\ Q = -UI = -U^2\omega C = -\frac{I^2}{\omega C} \end{cases}$$

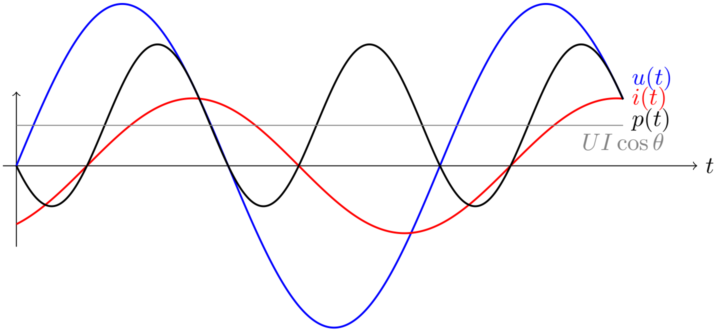
$$p(t) = Q\cdot\sin(2\omega t)$$

Circuito Capacitivo puro



- Fluctúa al doble de frecuencia.
- Pasa por los ceros de tensión y corriente.
- Su valor medio es nulo.

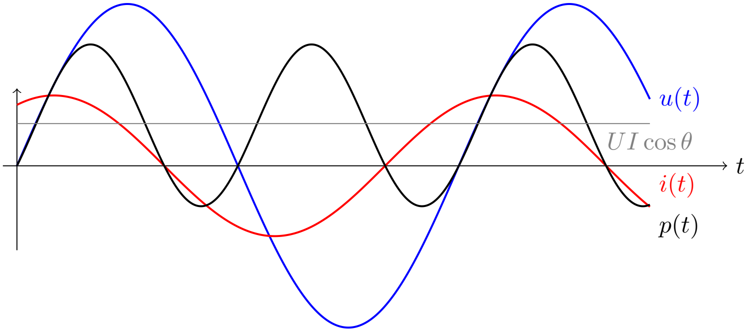
Circuito Inductivo con pérdidas



$$p(t) = P \cdot (1 + \cos(2\omega t)) + Q \cdot \sin(2\omega t)$$

Valor medio positivo, $P = UI\cos\theta$

Circuito Capacitivo con pérdidas



$$p(t) = P \cdot (1 + \cos(2\omega t)) + Q \cdot \sin(2\omega t)$$

Valor medio positivo, $P = UI\cos\theta$

Triángulo de Potencias

- Potencia Activa [W]

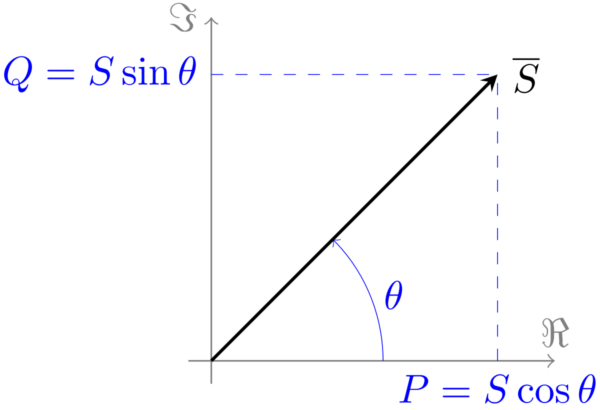
$$\boxed{P = U \cdot I \cdot \cos(\theta) = R \cdot I^2}$$

- Potencia Reactiva [VA_r]

$$\boxed{Q = U \cdot I \cdot \sin(\theta) = X \cdot I^2}$$

- Potencia Aparente [VA]

$$\boxed{\overline{S} = P + jQ = \overline{U} \cdot \overline{I}^*}$$



$$\begin{aligned}
\overline{U} &= U\underline{/0} \\
\overline{I} &= I\underline{/-\theta} \\
\overline{U}\overline{I}^* &= U\underline{/0} \cdot I\underline{/\theta} = UI\underline{/\theta} \\
&= UI(\cos\theta + j\sin\theta) = \\
&= P + jQ
\end{aligned}$$

$$|S| = U \cdot I$$

$$\theta_S = \theta_Z = \theta$$

Potencia de elementos: Resistencia

$$\theta = 0 \Rightarrow \begin{cases} P_R = RI^2 \\ Q_R = 0 \\ S_R = P_R \end{cases}$$

- Consume potencia activa
- No consume potencia reactiva

Potencia de elementos: Inductancia

$$\theta = \pi/2 \Rightarrow \begin{cases} P_L = 0 \\ Q_L = \omega L I^2 \\ \overline{S}_L = \omega L I^2 \underline{/\pi/2} \end{cases}$$

- No consume potencia activa
- Consume potencia reactiva ($Q > 0$)

Potencia de elementos: Condensador

$$\theta = -\pi/2 \Rightarrow \begin{cases} P_L = 0 \\ Q_C = -\omega C U^2 \\ \overline{S}_C = \omega C U^2 \underline{/-\pi/2} \end{cases}$$

- No consume potencia activa
- Genera potencia reactiva ($Q < 0$)

Teorema de Boucherot

- En un circuito con múltiples elementos, la potencia aparente total es la suma de las potencias aparentes individuales.

$$\overline{S} = \sum_{i=1}^{n} \overline{S}_i$$

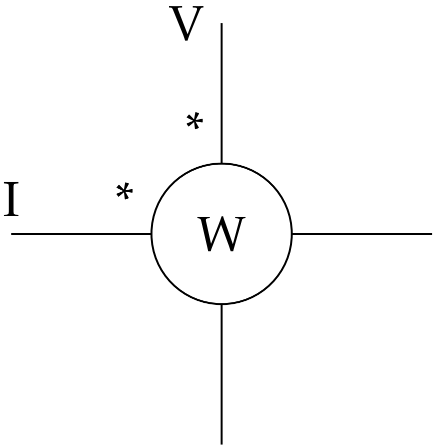
$$P + jQ = \sum_{i=1}^{n} (P_i + jQ_i)$$

- La potencia activa (reactiva) total es la suma de las potencias activas (reactivas) individuales.

$$P = \sum_{i=1}^{n} P_i$$

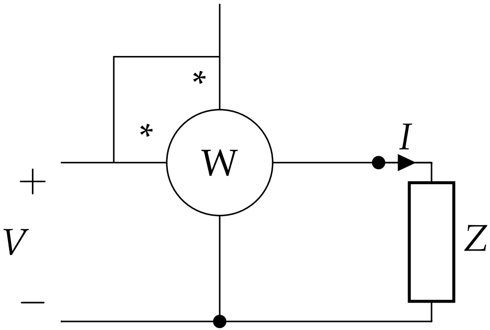
$$Q = \sum_{i=1}^{n} Q_i$$

Medida de potencia



Vatímetro: equipo de medida de 4 terminales (1 par para tensión, 1 par para corriente)

Medida de potencia



Habitualmente se emplea con 3 terminales cortocircuitando terminales con *.

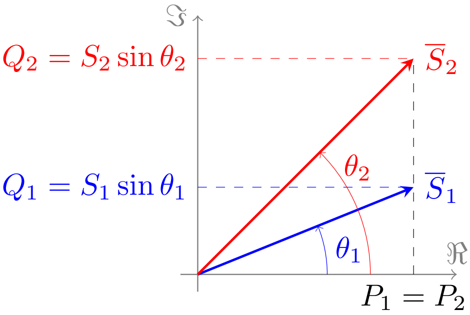
$$\boxed{W = |V||I|\cos(\theta_V - \theta_I) = P_Z}$$

Factor de potencia

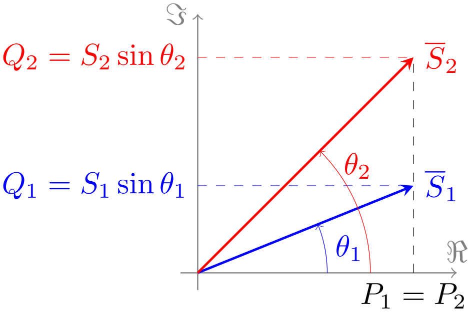
El factor de potencia, $\cos(\theta)$, representa la aportación de potencia activa dentro de la potencia aparente.

$$P = S\cos\theta$$

Sean dos sistemas con **misma tensión y potencia activa**, y factores de potencia $\cos\theta_2 < \cos\theta_1$ $(Q_2 > Q_1)$



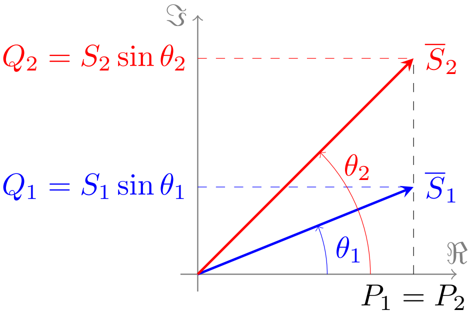
Potencia Aparente



El sistema 2 requiere **mayor potencia aparente** (generador mayor) para alimentar la misma potencia activa.

$$\left(\frac{P}{\cos\theta_1} = S_1\right) < \left(S_2 = \frac{P}{\cos\theta_2}\right)$$

Sección de Conductores



El sistema 2 requiere **mayor sección** de cable para transportar la misma potencia activa.

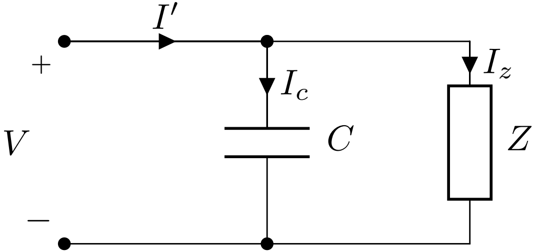
$$\left(\frac{P}{U\cos\theta_1} = I_1\right) < \left(I_2 = \frac{P}{U\cos\theta_2}\right)$$

Generación Local de Reactiva

- Comúnmente, el factor de potencia es **inductivo** (máquinas eléctricas industriales).
- La red debe suministrar potencia reactiva inductiva (influye en secciones de líneas y tamaños de generadores)
- Es necesario mejorar **localmente** el factor de potencia. Solución común: utilizar **bancos de condensadores** como suministradores de potencia reactiva.

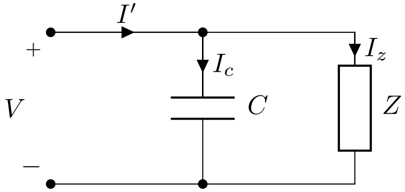
Compensación de Reactiva con Condensadores

Sea una carga de potencia activa P_z, potencia reactiva Q_z, factor de potencia $\cos\theta$. Se desea **mejorar el factor de potencia** a $\cos\theta' > \cos\theta$.



$$P' = P_z$$
$$Q' = Q_c + Q_z \quad (Q' < Q_z)$$
$$\bar{I}' = \bar{I}_c + \overline{I_z} \quad (I' < I_z)$$

Cálculo de la Capacidad



$$
\begin{aligned}
Q_z &= P_z \tan\theta \\
Q' &= P_z \tan\theta' \\
|Q_c| &= Q_z - Q' = P_z(\tan\theta - \tan\theta')
\end{aligned}
$$

$$|Q_c| = \omega C U^2 \rightarrow \boxed{C = \frac{P_z(\tan\theta - \tan\theta')}{\omega U^2}}$$