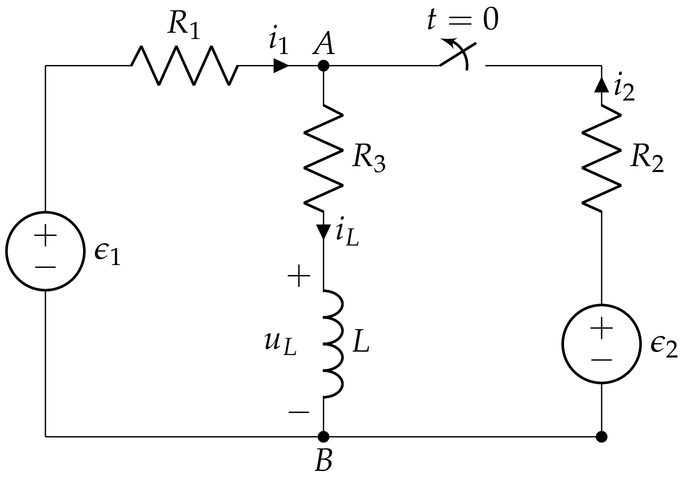
Ejercicio 8 de la colección de problemas

Enunciado:

El interruptor de la figura ha estado cerrado por un tiempo prolongado y en $t = 0$ se abre



Datos:

$$
\begin{aligned}
R_1 &= 5\,\Omega \\
R_2 &= 5\,\Omega \\
R_3 &= 2\,\Omega \\
L &= 3{,}5\,\text{mH} \\
\epsilon_1 &= 24\,\text{V} \\
\epsilon_2 &= 12\,\text{V}
\end{aligned}
$$

Con esta información, se debe calcular:

1. Valores de $i_1(0^+)$, $i_2(0^+)$, $i_L(0^+)$, $u_L(0^+)$ y $u_{AB}(0^+)$
2. Expresión de $i_L(t)$ para $t > 0$
3. Expresiones de $u_L(t)$ y $u_{AB}(t)$ para $t > 0$

Solución:

En el circuito en $t < 0$, la bobina se comporta como un cortocircuito. Resolviendo por mallas el circuito resultante, obtenemos los valores para $t = 0^-$:

$$
\begin{aligned}
i_L(0^-) &= 4\,\text{A} \\
i_1(0^-) &= 3{,}2\,\text{A} \\
i_2(0^-) &= 0{,}8\,\text{A}
\end{aligned}
$$

En la bobina podemos plantear la condición de continuidad, $i_L(0^-) = i_L(0^+)$, que nos permite obtener los valores para $t = 0^+$, una vez abierto el interruptor:

$$
\begin{aligned}
i_L(0^+) &= 4\,\text{A} \\
i_1(0^+) &= i_L(0^+) \\
i_2(0^+) &= 0\,\text{A} \\
u_L(0^+) &= \epsilon_1 - i_1(0^+) \cdot R_1 - i_L(0^+) \cdot R_3 = -4\,\text{V} \\
u_{AB}(0^+) &= \epsilon_1 - i_1(0^+) \cdot R_1 = 4\,\text{V}
\end{aligned}
$$

Analizamos ahora el circuito para $t > 0$, en el que el interruptor está abierto. La resistencia vista por la bobina es $R_{th} = R_1 + R_3 = 7\,\Omega$. Por tanto:

$$\tau = \frac{L}{R_{th}} = 500\,\mu\text{s}$$

Obtenemos la respuesta forzada analizando el circuito en régimen permanente, en el que la bobina se comportará como un cortocircuito:

$$i_{L,\infty}(t) = \frac{\epsilon_1}{R_1 + R_3} = 3{,}43\,\mathrm{A}$$

Obtenemos la respuesta natural apagando la fuente ϵ_1. La ec. diferencial correspondiente a este circuito es:

$$(R_1 + R_3) \cdot i_{L,n}(t) \; + \; L \, \frac{d\, i_{L,n}(t)}{dt} \; = \; 0$$

Cuya solución es de la forma:

$$i_{L,n}(t) = K \cdot e^{-t/\tau} = K \cdot e^{-2000 \cdot t}$$

Para obtener la constante K, recurrimos a la condición inicial $i_L(0^+) = 4\,\mathrm{A}$:

$$K = i_L(0^+) - i_{L,\infty}(0^+) = 4 - 3{,}43 = 0{,}57\,\mathrm{A}$$

Por tanto:

$$i_L(t) = i_{L,n}(t) + i_{L,\infty}(t) = 3{,}43 + 0{,}57 \cdot e^{-2000 \cdot t}\ \mathrm{A}$$

Con este resultado podemos obtener las tensiones en el circuito:

$$u_L(t) = L \cdot \frac{d\, i_L}{dt} = 3{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}57 \cdot (-2 \cdot 10^3) \cdot e^{-2000 \cdot t} = -4 \cdot e^{-2000 \cdot t}\ \mathrm{V}$$

$$u_{AB}(t) = u_L(t) + R_3 \cdot i_L(t) = 6{,}86 - 2{,}86 \cdot e^{-2000 \cdot t}\ \mathrm{V}$$

Comprobamos que estas expresiones concuerdan con los resultados obtenidos para $u_L(0^+)$ y $u_{AB}(0^+)$.