

Introducción al régimen transitorio

Teoría de Circuitos

Autor: Luis Badesa Bernardo

(basado en las diapositivas de Óscar Perpiñán Lamigueiro)

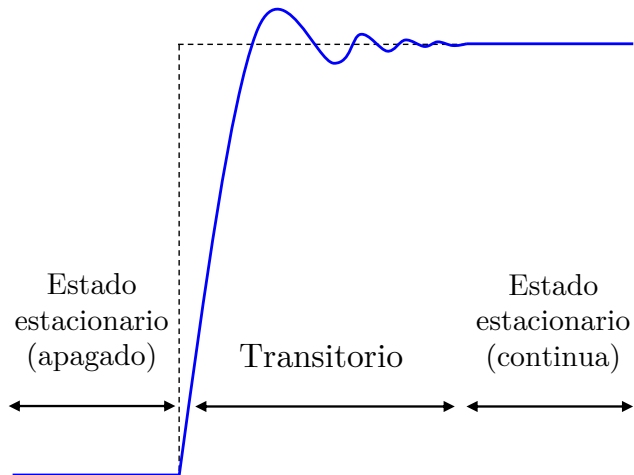
① Introducción

② Circuitos de primer orden

③ Circuitos de segundo orden

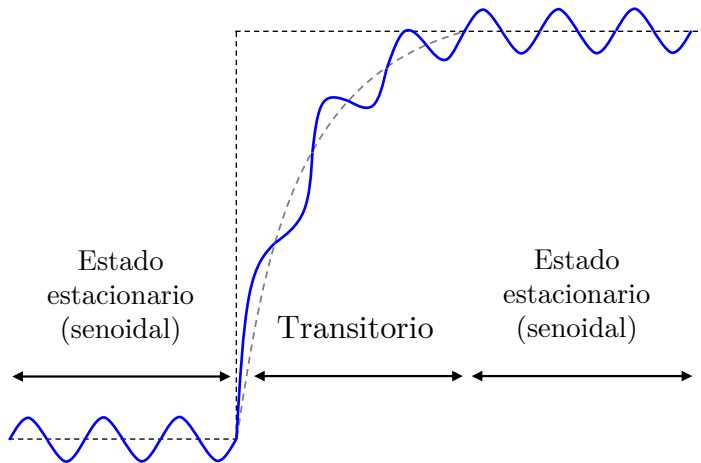
¿Qué es el régimen transitorio?

- Ejemplo: **encendido** de circuito de **continua** (con transitorio *subamortiguado*)



¿Qué es el régimen transitorio?

- Ejemplo: **término de continua** en circuito de **alterna** (con transitorio *sobreamortiguado*)



Régimen transitorio *vs.* estado estacionario

Estado estacionario o “régimen permanente”

- ▶ Circuito **estabilizado**
- ▶ Las **tensiones** y **corrientes** de un circuito son **constantes** (CC) o **periódicas** (CA)
- ▶ Modelado matemático: **ecuaciones algebraicas**

Régimen transitorio

- ▶ **Cambio** en las **condiciones** de funcionamiento de un **circuito**:
encendido o apagado de fuentes, o cambio en las cargas → **interruptores**
- ▶ Variación de $u(t)$ e $i(t)$ hasta alcanzar nuevos valores
- ▶ Modelado matemático: **ecuaciones diferenciales**

Acumulación de energía

Estado estacionario

- ▶ **Energía acumulada** en **bobinas** y **condensadores**

Régimen transitorio

- ▶ **Redistribución** y **disipación** de energía acumulada
- ▶ La redistribución de energía **no** es **inmediata**

Duración corta (típicamente μs) pero superior a 0 s, dependiendo de **relación entre acumulación** (en bobinas y condensadores) y **disipación** (en resistencias)

Consigna habitual: función escalón



$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ K & t \geq 0 \end{cases}$$

Ecuaciones diferenciales

Al aplicar **Kirchhoff** a un circuito lineal obtenemos ecuaciones diferenciales

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L(\tau) d\tau$$

$$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad u_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(\tau) d\tau$$

Por ejemplo, la ecuación de un circuito **RLC serie** será de la forma:

$$L \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + R \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} i(t) = \frac{dE(t)}{dt}$$

(EDO lineal de segundo orden, obtenida aplicando 2LK al circuito)

Respuesta de un circuito lineal a una perturbación o consigna

La **solución** de la ecuación diferencial del circuito para $t \geq 0$ (i.e., la **respuesta del circuito** a la perturbación) tiene **dos componentes**^{*}:

$$f(t) = f_n(t) + f_\infty(t)$$

(donde $f(t)$ puede referirse a tensión o corriente)

- ▶ Respuesta **natural** o propia, $f_n(t)$
- ▶ Respuesta **forzada** o particular, $f_\infty(t)$

^{*}Esta es la solución general a una Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO) lineal de orden arbitrario. Para más detalles, consultar, e.g., libro [Zill](#)

Respuesta *natural*, $f_n(t)$

- Respuesta **sin fuentes de alimentación** → solución de la **ec. homogénea**

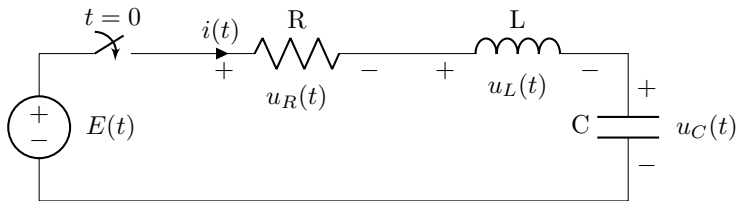
Volviendo al ejemplo del **circuito RLC**, la ec. homogénea sería:

$$L \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + R \frac{d i(t)}{dt} + \frac{1}{C} i(t) = \cancel{\frac{d E(t)}{dt}}^0$$

- $f_n(t)$ representa la redistribución de **energía almacenada previamente** o **que será almacenada** por los elementos de acumulación

Respuesta *forzada*, $f_{\infty}(t)$

- Es una **solución particular** a la ecuación diferencial **no homogénea** → determinada por las fuentes existentes en $t > 0$, $E(t)$ en el ejemplo RLC



- Modela el estado del circuito **tras un tiempo** suficientemente **largo** después de la perturbación (régimen permanente), ya que la respuesta natural se extingue

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f_n(t) = 0 \quad (\text{demostración más adelante})$$

① Introducción

Condiciones iniciales

② Circuitos de primer orden

③ Circuitos de segundo orden

Condiciones iniciales

- ▶ El **instante del cambio** se representa habitualmente con $t = 0$
 - ▶ $t = 0^- \rightarrow$ tiempo inmediatamente **anterior** al cambio
 - ▶ $t = 0^+ \rightarrow$ tiempo inmediatamente **posterior** al cambio
- ▶ Las **condiciones iniciales** son el estado del circuito en $t = 0$
 - ▶ Se calculan con las **energías almacenadas** en bobinas y condensadores en $t = 0^-$
 - ▶ Se aplican a la **topología** del circuito en $t = 0^+$
- ▶ Las cond. iniciales determinan las **ctes. de integración** de la respuesta **natural**, $f_n(t)$

Condiciones iniciales, resistencia

No acumula energía → sigue los cambios de forma instantánea

$$u(t) = R \cdot i(t)$$

(no aparece ninguna derivada en su ec. de definición)

Condiciones iniciales, bobina

La **corriente** por una **bobina no puede** variar de **forma brusca**, debido a que:

Tensiones infinitas y corrientes infinitas son físicamente imposibles

Partamos de la ec. de definición de la bobina:

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad \boxed{i_L(0^-) = i_L(0^+)}$$

Si la corriente cambiara de forma brusca (**función escalón**), **su derivada sería infinita**, luego la tensión en bornes sería infinita

Esta es la ***condición de continuidad*** de la bobina

Condiciones iniciales, condensador

De forma equivalente, la **tensión** en un **condensador no puede** variar de **forma brusca**

Partamos de su ec. de definición:

$$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}$$

Si la tensión cambiara de forma brusca, **su derivada sería infinita**, luego la corriente de carga o descarga sería infinita. Entonces:

$$u_C(0^-) = u_C(0^+)$$

Esta es la **condición de continuidad** del condensador

① Introducción

② Circuitos de primer orden

③ Circuitos de segundo orden

Circuitos de primer orden: definición

- ▶ Circuitos compuestos por:
 - ▶ Un **único elemento de acumulación** (o varios elementos que pueden ser simplificados a un elemento equivalente, *e.g.*, bobinas en serie)
 - ▶ Y **resistencias**
- ▶ Modelados mediante una **ec. diferencial de 1^{er} orden**:

$$a_1 \cdot f'(t) + a_0 \cdot f(t) = g(t)$$

ejemplo de **RL serie**: $L \cdot i'(t) + R \cdot i(t) = E(t)$

Circuitos de primer orden: resolución

- Modelados mediante una **ec. diferencial de 1^{er} orden**:

$$a_1 \cdot f'(t) + a_0 \cdot f(t) = g(t)$$

- Resolución

- 1 Cálculo de las **condiciones iniciales**, analizando el circuito en $t = 0^-$
- 2 **Respuesta natural**: análisis de la **ec. homogénea** ($g(t) = 0$, sin fuentes) en $t > 0$

$$f_n(t) = K \cdot e^{-\frac{a_0}{a_1} t} \quad (\text{demostración a continuación})$$

- 3 **Respuesta forzada**, $f_\infty(t)$: análisis del circuito con fuentes en $t > 0$

① Introducción

② Circuitos de primer orden

Circuito RL serie

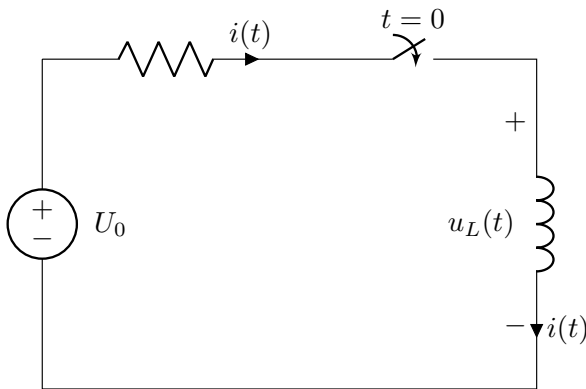
Circuito RC paralelo

Procedimiento general

③ Circuitos de segundo orden

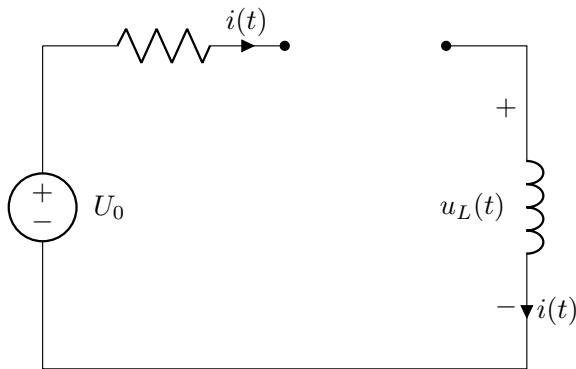
Circuito RL serie básico

- ▶ En $t < 0$ la fuente está desconectada
- ▶ En $t = 0$ la fuente se conecta
- ▶ En $t > 0$ la fuente alimenta el circuito RL (la bobina almacena energía)



Condiciones iniciales

Analizando el circuito para $t < 0 \dots$

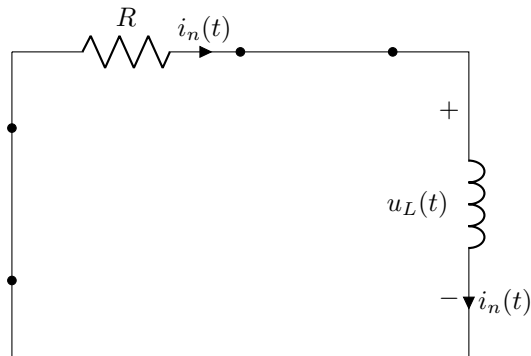


...obtenemos

$$i(0^-) = 0$$

Respuesta natural, $i_n(t)$

Siguiendo los pasos de la diapositiva 19, analizamos el circuito para $t > 0$ **apagando la fuente** (ec. homogénea):



$$\mathbf{2LK} \rightarrow u_R(t) + u_L(t) = 0$$

Sustituyendo las **ecs. de definición** de R y L :

$$R \cdot i_n(t) + L \frac{di_n(t)}{dt} = 0$$

Cuya **solución general** es:

$$i_n(t) = K \cdot e^{st}$$

(deducción en la siguiente diapositiva)

Respuesta natural, $i_n(t)$

La ec. homogénea a resolver es:

$$L \frac{di_n(t)}{dt} + R \cdot i_n(t) = 0$$

Para resolverla, debe hallarse una función cuya **derivada sea igual a la propia función**, multiplicada por una constante \rightarrow la **función exponencial** cumple esta propiedad

Sustituyendo entonces $i_n(t) = K \cdot e^{st}$ (donde **K** y **s** son **constantes** a determinar):

$$L \frac{d(K \cdot e^{st})}{dt} + R \cdot K \cdot e^{st} = 0 \quad \rightarrow \quad s \cdot K \cdot e^{st} + \frac{R}{L} \cdot K \cdot e^{st} = 0$$

Dividiendo a ambos lados por $K \cdot e^{st}$ se obtiene la **ec. característica**:

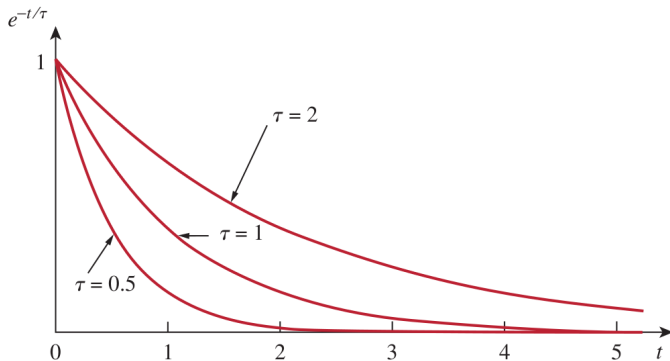
$$s + \frac{R}{L} = 0 \quad \rightarrow \quad s = -\frac{R}{L} \quad \xrightarrow[\substack{\text{sustituyendo en} \\ i_n(t) = K \cdot e^{st}}]{} \quad \boxed{i_n(t) = K \cdot e^{-\frac{R}{L}t}}$$

Constante de tiempo

Definimos $\tau = \frac{L}{R}$ como la **constante de tiempo** del circuito (unidades [s])

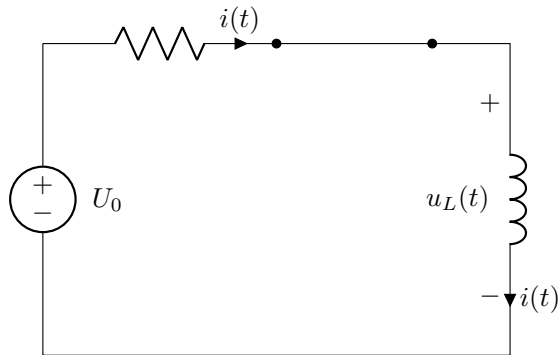
$$i_n(t) = K \cdot e^{-t/\tau}$$

- ▶ Ratio entre **almacenamiento** (L) y **disipación** (R)
- ▶ Valores altos de τ implican decaimiento lento
- ▶ La respuesta natural **se extingue** tras $\simeq 5\tau$



Respuesta forzada, $i_{\infty}(t)$

Volvemos a **activar la fuente**, analizando para $t \gg 0$:



$$\mathbf{2LK} \rightarrow u_R(t) + u_L(t) = u_g(t)$$

$$R i(t) + L \frac{di(t)}{dt} = U_0 \quad \nearrow 0 \text{ (CC)}$$

Al ser un circuito de **Corriente Continua**, la **bobina** se sustituye por un **cortocircuito**

La **solución** es entonces:

$$i_{\infty}(t) = \frac{U_0}{R}$$

Respuesta completa, $i(t) = i_n(t) + i_\infty(t)$

$$i(t) = i_n(t) + i_\infty(t) \rightarrow \begin{cases} i_n(t) = K \cdot e^{-t/\tau} \\ i_\infty(t) = U_0/R \end{cases}$$

Para **determinar** el valor de la **constante de integración** K , **particularizamos en $t = 0^+$** :

$$i(0^+) = i_n(0^+) + i_\infty(0^+) = K + \frac{U_0}{R} \rightarrow K = i(0^+) - i_\infty(0^+)$$

Teniendo en cuenta la **condición de continuidad**, $i(0^+) = i(0^-) = 0$, obtenemos:

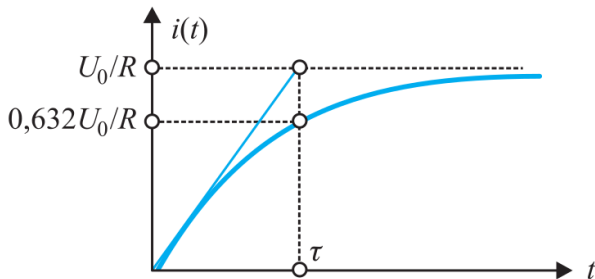
$$K = 0 - \frac{U_0}{R}$$

La **solución completa** es:

$$i(t) = \frac{U_0}{R} (1 - e^{-t/\tau})$$

Respuesta completa

$$i(t) = \frac{U_0}{R} \left(1 - e^{-t/\tau} \right)$$



① Introducción

② Circuitos de primer orden

Circuito RL serie

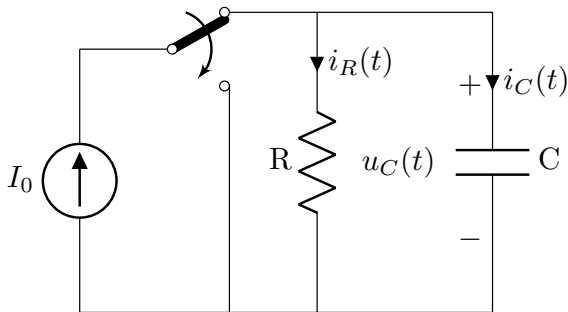
Circuito RC paralelo

Procedimiento general

③ Circuitos de segundo orden

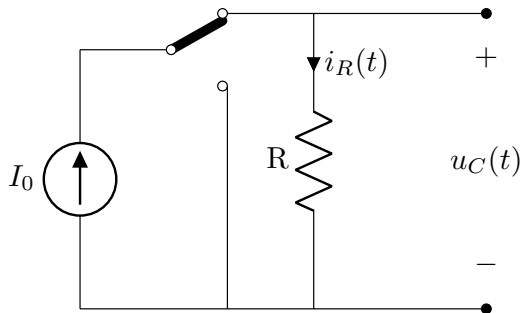
Circuito RC paralelo básico

- ▶ En $t < 0$ la fuente alimenta el circuito RC (el condensador está cargado)
- ▶ En $t = 0$ se desconecta la fuente
- ▶ En $t > 0$ el condensador comienza a descargarse en la resistencia



Condiciones iniciales

Analizando el circuito para $t < 0 \dots$

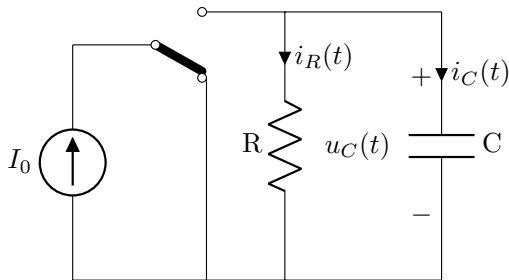


\dots obtenemos

$$u_C(0^-) = R \cdot I_0$$

Respuesta natural, $u_n(t)$

Siguiendo los pasos de la diapositiva 19, analizamos el circuito para $t > 0$ **apagando la fuente** (ec. homogénea)



(en este caso, la fuente
ya está apagada en $t > 0$)

$$\mathbf{1LK} \rightarrow i_R(t) + i_C(t) = 0$$

$$\frac{u_n(t)}{R} + C \frac{du_n(t)}{dt} = 0$$

Cuya **solución general** es:

$$u_n(t) = K \cdot e^{st}$$

(deducción equivalente a la diapositiva 24)

Luego la **respuesta natural**, $u_n(t)$ del circuito es:

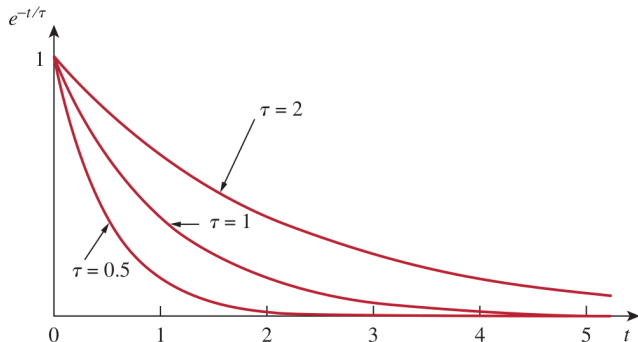
$$u_n(t) = K \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}$$

Constante de tiempo

Definimos $\tau = R \cdot C$ como la **constante de tiempo** del circuito (unidades [s])

$$u_n(t) = K \cdot e^{-t/\tau}$$

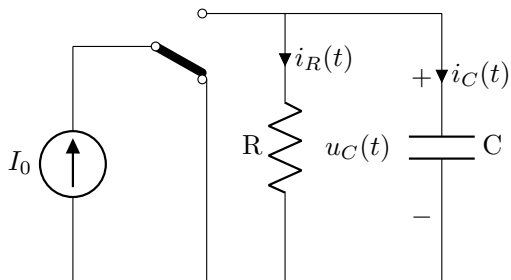
- ▶ Valores altos de τ implican decaimiento lento
- ▶ La respuesta natural **se extingue** tras $\simeq 5\tau$



La **energía almacenada** en el C en $t = 0^-$ se **disipa en las resistencias** en $t > 0$

Respuesta forzada, $u_{\infty}(t)$

Analizando para $t > 0$ con la **fente encendida**:



Dado que en $t > 0$ **no hay fuentes** presentes en el circuito RC, toda la **energía almacenada** en el condensador **se disipa** en la resistencia

Luego la **respuesta forzada**, $u_{\infty}(t)$, es:

$$u_{\infty}(t) = 0$$

Respuesta completa, $u(t) = u_n(t) + u_\infty(t)$

$$u(t) = u_n(t) + u_\infty(t) \rightarrow \begin{cases} u_n(t) = K \cdot e^{-t/\tau} \\ u_\infty(t) = 0 \end{cases}$$

Para **determinar** el valor de la **constante de integración** K , **particularizamos en $t = 0^+$** :

$$u(0^+) = u_n(0^+) + u_\infty(0^+) = K + 0 \rightarrow K = u(0^+)$$

Teniendo en cuenta la **condición de continuidad**, $u(0^+) = u(0^-) = R \cdot I_0 = U_0$:

$$K = U_0$$

La **solución completa** es:

$$u(t) = U_0 \cdot e^{-t/\tau}$$

Balance energético

Podemos comprobar que **toda la energía** acumulada en el condensador en $t < 0$ realmente **se disipa** en la resistencia en $t > 0$:

$$\begin{aligned}\boxed{W_R} &= \int_0^\infty u_R(t) \cdot i_R(t) \, dt = \int_0^\infty \frac{u_R^2(t)}{R} \, dt = \int_0^\infty \frac{1}{R} (U_0 \cdot e^{-t/\tau})^2 \, dt = \\ &= \frac{U_0^2}{R} \int_0^\infty e^{-\frac{2}{R \cdot C} t} \, dt = \frac{U_0^2}{R} \cdot \frac{-R \cdot C}{2} \left[e^{-\frac{2}{R \cdot C} t} \right]_0^\infty = \frac{-1}{2} C \cdot U_0^2 \cdot [0 - 1] \\ &= \frac{1}{2} C \cdot U_0^2 = \boxed{W_C}\end{aligned}$$

① Introducción

② Circuitos de primer orden

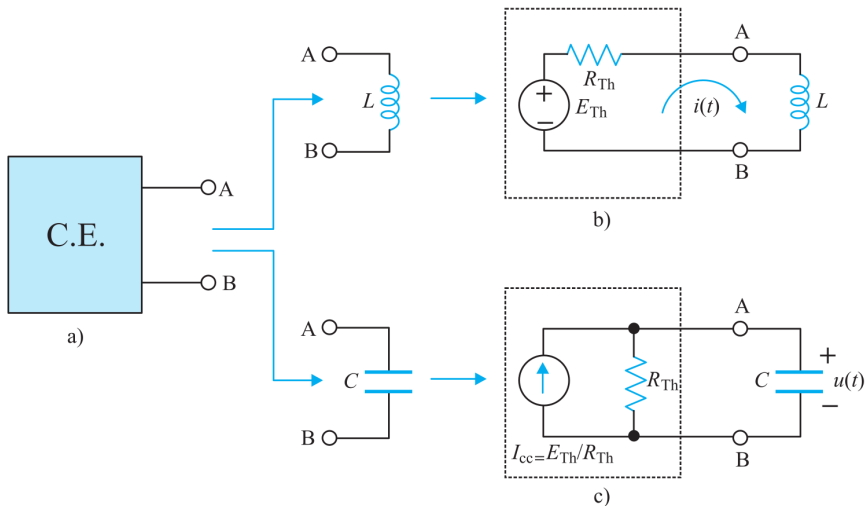
Circuito RL serie

Circuito RC paralelo

Procedimiento general

③ Circuitos de segundo orden

Procedimiento general → equivalente de Thévenin/Norton



R_{th} es la **resistencia vista desde los bornes** del condensador o de la bobina, cuando se anulan todas las fuentes independientes

Procedimiento general

① Dibujar el circuito para $t < 0$

- ▶ Obtener el valor de $i_L(0^-)$ o $u_C(0^-)$
- ▶ Aplicar el **principio de continuidad** para determinar $i_L(0^+)$ o $u_C(0^+)$

② Dibujar el circuito para $t > 0$

- ▶ Calcular el equivalente de **Thévenin/Norton** visto por L o C
- ▶ Determinar la **constante de tiempo** del circuito: $\tau = \frac{L}{R_{th}}$ o $\tau = R_{th} \cdot C$
- ▶ Calcular la respuesta en **régimen permanente**, $i_\infty(t)$ o $u_\infty(t)$

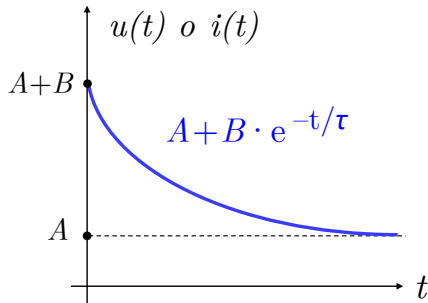
③ Obtener la **respuesta completa**:

$$i_L(t) = i_n(t) + i_\infty(t)$$

$$u_C(t) = u_n(t) + u_\infty(t)$$

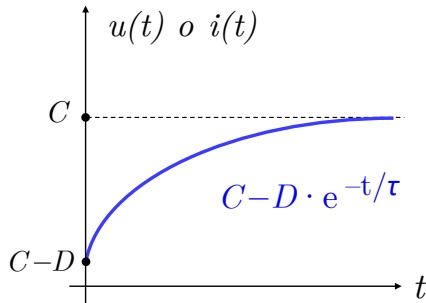
Resumen: respuestas posibles de un 1^{er} orden (corriente continua)

Elemento que se **descarga** (parcialmente)



Caso particular: $A = 0$, no hay fuentes en $t > 0$ (el elemento se **descarga totalmente**)

Elemento que **aumenta su carga**

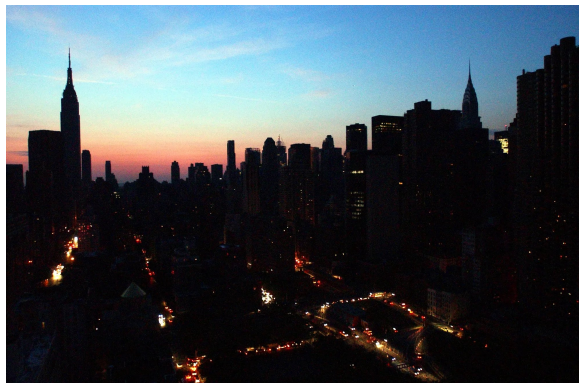


Caso particular: $C = D$, el elemento estaba inicialmente **descargado**

Interludio: transitorios inestables, apagón EE. UU. 2003

- ▶ **55 millones** de personas sin luz
- ▶ **6.000 millones de \$** en pérdidas

- ▶ **Nueva York** perdió gran parte del suministro durante **13 horas**
- ▶ Ocurrió en agosto a las 16h: **podría haber sido mucho peor** (e.g. diciembre a las 16h, sin luz natural)



① Introducción

② Circuitos de primer orden

③ Circuitos de segundo orden

Circuitos de segundo orden

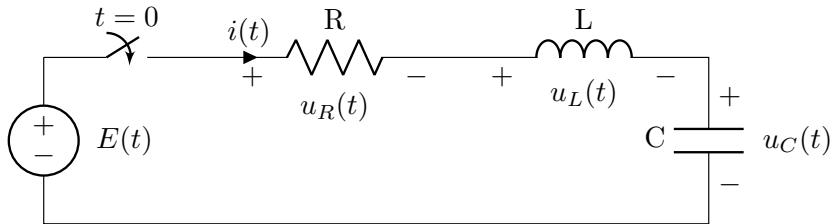
- ▶ Circuitos que contienen **dos elementos de acumulación**, además de elementos de disipación (resistencias)
- ▶ Modelados mediante una **ec. diferencial de 2^{do} orden**:

$$a_2 \cdot f''(t) + a_1 \cdot f'(t) + a_0 \cdot f(t) = g(t)$$

- ▶ Resolución → obtención de **respuesta natural** $f_n(t)$ y **respuesta forzada** $f_\infty(t)$

$$f(t) = f_n(t) + f_\infty(t)$$

Ejemplo: circuito RLC serie



$$\mathbf{2LK} \rightarrow \overbrace{L \frac{di(t)}{dt}}^{u_L(t)} + \overbrace{R \cdot i(t)}^{u_R(t)} + \overbrace{\frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau}^{u_C(t)} = E(t)$$

Derivando a ambos lados de la ecuación:

$$L \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + R \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} i(t) = \frac{dE(t)}{dt}$$

Circuitos de segundo orden: respuesta natural, $f_n(t)$

$$a_2 \cdot f''(t) + a_1 \cdot f'(t) + a_0 \cdot f(t) = 0 \quad \rightarrow \quad f''(t) + \frac{a_1}{a_2} \cdot f'(t) + \frac{a_0}{a_2} \cdot f(t) = 0$$

- Redefinición de constantes:

$$\frac{a_1}{a_2} = 2 \zeta \omega_n \qquad \frac{a_0}{a_2} = \omega_n^2$$

ω_n pulsación natural

ζ coeficiente de **amortiguamiento**

- Resolviendo la **ec. característica**^{*}:

$$s^2 + 2 \zeta \omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} s_1 = -\omega_n \left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \\ s_2 = -\omega_n \left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \end{cases}$$

^{*}Obtenida mediante el mismo procedimiento que en la diapositiva 24, sustituyendo la solución de prueba $f_n(t) = K \cdot e^{st}$. Para más detalles, consultar págs. 423 - 424 del [Fraile Mora](#), edición 2012

Circuitos de segundo orden: respuesta natural, $f_n(t)$

(continuación)

- Resolviendo la **ec. característica**:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} s_1 = -\omega_n \left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \\ s_2 = -\omega_n \left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \end{cases}$$

- Por lo tanto, la **solución de la ec. diferencial** es:

$$f_n(t) = K_1 \cdot e^{s_1 \cdot t} + K_2 \cdot e^{s_2 \cdot t}$$

donde K_1 y K_2 son ctes. que dependen de las **condiciones iniciales**

Circuitos de segundo orden: tipos

Dependiendo de los **valores de las soluciones** de la ec. característica, hay **3 posibilidades de transitorio**:

$$s_1 = -\omega_n \left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \quad s_2 = -\omega_n \left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1} \right)$$

- ▶ Soluciones **reales distintas** \rightarrow circuito sobreamortiguado (transitorio “lento”)
- ▶ Solución **real doble** \rightarrow circuito críticamente amortiguado
- ▶ Soluciones **complejas conjugadas**^{*} \rightarrow circuito subamortiguado (con oscilaciones)

^{*}Por el **T^a de la raíz conjugada compleja**: si un polinomio en una variables con coefs. reales tiene una raíz compleja, el conjugado también es raíz del polinomio

Circuitos de segundo orden: tipos

- ▶ Circuito sobreamortiguado (transitorio “lento”)

$$\zeta > 1$$

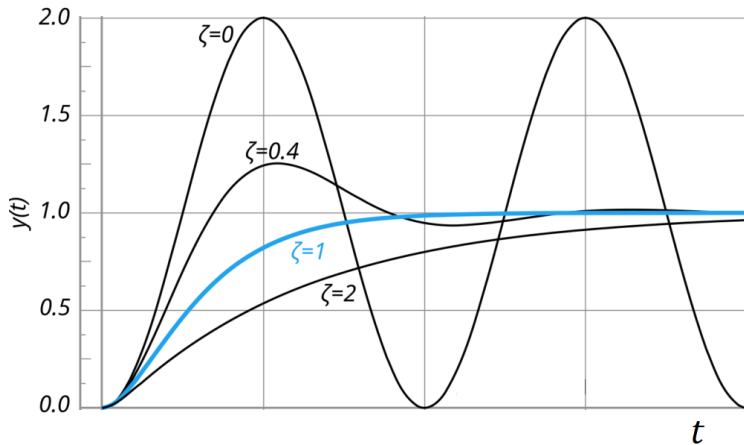
- ▶ Circuito críticamente amortiguado

$$\zeta = 1$$

- ▶ Circuito subamortiguado (con oscilaciones)

$$\zeta < 1$$

Circuitos de segundo orden: tipos



Circuitos de segundo orden *subamortiguados*

El caso **subamortiguado** ($\zeta < 1$) da lugar a **oscilaciones atenuadas**. Demostración:

$$f_n(t) = K_1 \cdot e^{s_1 \cdot t} + K_2 \cdot e^{s_2 \cdot t} \quad s_1, s_2 \in \mathbb{C} \rightarrow f_n(t) = K_1 \cdot e^{(-a+jb) \cdot t} + K_2 \cdot e^{(-a-jb) \cdot t}$$

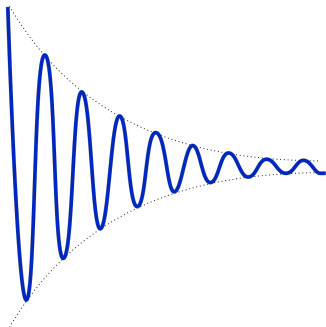
Nota: la **parte real es siempre negativa** en las soluciones complejas de un circuito de 2^{do} orden

Lo contrario implicaría $\zeta < 0$, y por tanto implicaría resistencia negativa, lo cual carece de sentido físico (se omite la demostración)

Usando la **fórmula de Euler** ($e^{j\phi} = \cos \phi + j \sin \phi$), puede llegarse a:

$$\begin{aligned} f_n(t) &= e^{-\alpha \cdot t} \cdot [B_1 \cdot \sin(\omega t) + B_2 \cdot \cos(\omega t)] \\ &= \boxed{B' \cdot e^{-\alpha \cdot t} \cdot \sin(\omega t + \theta)} \quad (\text{demostración}) \end{aligned}$$

(la forma de obtener las ctes. B' , α , ω y θ se detalla en los ejs. [14](#) y [15](#))



Circuitos de segundo orden, resolución

① Obtener la **respuesta natural** del circuito

- ▶ Se escribe la **ec. diferencial del circuito** sin fuentes, usando 1LK o 2LK
- ▶ Se resuelve la **ec. característica**, primero obteniendo el valor de las **ctes.** ω_n y ζ
- ▶ El **tipo de soluciones** de la ec. característica determina el **tipo de transitorio** \rightarrow debe comprobarse que el **transitorio** es **coherente** con el **valor de ζ**
($\zeta > 1$, $\zeta = 1$ o $0 < \zeta < 1$)

② Determinar el valor de las **ctes. de integración** de la respuesta natural usando las **condiciones iniciales**, y aplicando el **principio de continuidad** para L o C

- ▶ Son **necesarias 2 condiciones iniciales**: una para la propia magnitud ($u(t)$ o $i(t)$) y otra para su primera derivada ($u'(t)$ o $i'(t)$)
- ▶ Más detalles en **ejercicios resueltos**

③ Obtener la **respuesta forzada**, $f_\infty(t)$: análisis del circuito con fuentes en $t > 0$

Interludio: temas de investigación en sistemas eléctricos

**¿Quién debería pagar por la
estabilidad de la red eléctrica?**

Spoiler: tú, no 😁