Problema 1.

Una resistencia de $5\,\Omega$ y un condensador se unen en serie. La tensión en la resistencia es : $u_R(t) = 25 \cdot \sin(2000t + \pi/6)$. Si la corriente está adelantada 60° respecto de la tensión aplicada, ¿cuál es el valor de la capacidad C del condensador?.

$$\theta = \theta_V - \theta_I \rightarrow \theta = -\pi/3$$

$$\overline{Z} = R - j\frac{1}{\omega C R}$$

$$\tan\theta = -\frac{1}{\omega C R} \rightarrow \sqrt{3} = \frac{1}{10000C}$$

$$\boxed{C = 100\sqrt{3}/3\,\mu\text{F}}$$

Problema 2.

Para determinar las constantes R y L de una bobina, se conecta en serie con una resistencia de $25\,\Omega$ y al conjunto se le aplica una fuente de tensión de $120\,\mathrm{V}$ a $60\,\mathrm{Hz}$, se miden las tensiones en bornes de la resistencia y de la bobina, dando los valores $U_R = 70.8\,\mathrm{V}$ y $U_B = 86\,\mathrm{V}$. ¿ Cuáles son las constantes de la bobina en cuestión?.

$$\overline{U} = \overline{U}_B + \overline{U}_R$$

$$\overline{U}_R = 25\overline{I} \rightarrow I = \frac{U_R}{25} = 2.83\,\mathrm{A}$$

$$\overline{Z}_B = R_B + j\omega L_B$$

$$\overline{U}_B = \overline{I} \cdot \overline{Z}_B \rightarrow 86 = 2{,}83 Z_B \rightarrow Z_B = 30.37\,\Omega$$

$$\overline{Z} = (25 + R_B) + j\omega L_B$$

$$\overline{U} = \overline{I} \cdot \overline{Z} \rightarrow 120 = 2{,}83 Z \rightarrow Z = 42.37\,\Omega$$

$$\begin{aligned} 30{,}37 &= \sqrt{R_B^2 + (\omega L_B)^2} \\ 42{,}37 &= \sqrt{(25 + R_B)^2 + (\omega L_B)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R &= 5\,\Omega \\ L &= 79.5\,\mathrm{mH} \end{aligned}$$

Problema 3.

Un circuito serie RLC con $R = 5\,\Omega$, $L = 0.02\,\mathrm{H}$ y $C = 80\,\mu\mathrm{F}$, tiene aplicada una tensión senoidal de frecuencia variable. Determinar los valores de la pulsación ω para los cuales la corriente:

1. Adelanta 45° a la tensión.
2. Está en fase con ella.
3. Retrasa 45°.

$$\overline{Z} = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})$$

$$\tan\omega = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} = \frac{0{,}02\omega^2 - 12500}{5\omega}$$

1. Adelanta 45° a la tensión.

$$\theta = -\pi/4 \rightarrow \tan\omega = -1$$

$$\frac{0{,}02\omega^2 - 12500}{5\omega} = -1$$

$$\omega^2 + 250\omega - 625000 = 0 \rightarrow \boxed{\omega = 675\,\mathrm{rad\,s^{-1}}}$$

2. Está en fase con ella.

$$\theta = 0 \rightarrow \tan\omega = 0$$

$$0{,}02\omega = \frac{12500}{\omega}$$

$$\omega = 790.6\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$$

3. Retrasa 45°.

$$\theta = +\pi/4 \rightarrow \tan\omega = +1$$

$$\frac{0{,}02\omega^2 - 12500}{5\omega} = 1$$

$$\omega^2 - 250\omega - 625000 = 0 \rightarrow \boxed{\omega = 925.4\,\mathrm{rad\,s^{-1}}}$$

Problema 4.

Determinar el triángulo de potencias de un circuito al que se le aplica una tensión $u(t) = 340 \cdot \text{sen}(\omega t - 60°)$ V y circula una intensidad de corriente $i(t) = 13{,}3 \cdot \text{sen}(\omega t - 48{,}7°)$.

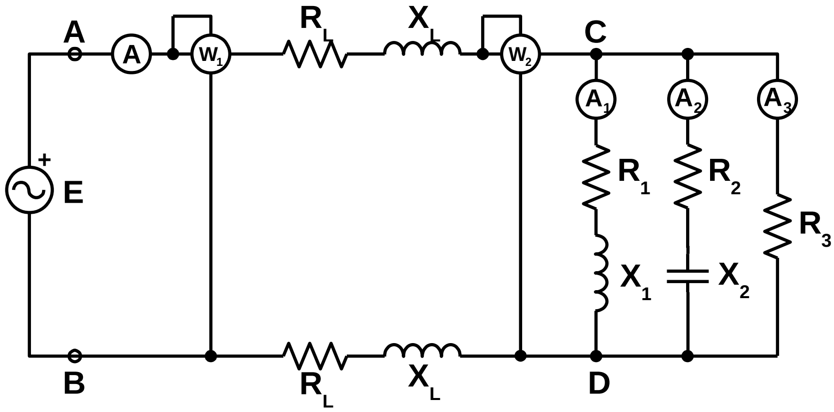
$$\overline{U} = 170\sqrt{2}\underline{/-60°}$$
$$\overline{I} = 6{,}65\sqrt{2}\underline{/-48.7°}$$

$$\overline{S} = \overline{U} \cdot \overline{I}^{*} = 2261\underline{/-11{,}3°}\,\text{VA}$$

$$P = S\cos\theta = 2217.17\,\text{W}$$
$$Q = S\sin\theta = -443.03\,\text{VA}_\text{r}$$

Problema 5.

En el esquema de la figura los elementos tienen los siguientes valores:
$R_1 = R_2 = R_3 = 10\,\Omega$
$X_1 = X_2 = 1\,\Omega$
$R_L = X_L = 1\,\Omega$



Sabiendo que $V_{CD} = 200\,\text{V}$ se debe calcular:

1. Intensidades de corriente I, I_1, I_2 e I_3 **en forma fasorial**, tomando V_{CD} como referencia de fase.

$$\overline{V}_{CD} = 200\underline{/0}\,\text{V}$$
$$\overline{Z}_1 = 10 + \text{j}\,\Omega$$
$$\overline{Z}_2 = 10 - \text{j}\,\Omega$$

$$\overline{I}_1 = \frac{\overline{V}_{CD}}{\overline{Z}_1} = 19{,}8 - 1{,}98\text{j}\,\text{A}$$
$$\overline{I}_2 = \frac{\overline{V}_{CD}}{\overline{Z}_2} = 19{,}8 + 1{,}98\text{j}\,\text{A}$$
$$\overline{I}_3 = \frac{\overline{V}_{CD}}{R_3} = 20\underline{/0°}\,\text{A}$$
$$\overline{I} = \overline{I}_1 + \overline{I}_2 + \overline{I}_3 = 59{,}6\underline{/0°}\,\text{A}$$

2. Lectura de los vatímetros W_1 y W_2.

   Calculamos con tensión y corriente:

$$\overline{S}_2 = \overline{V}_{CD} \cdot \overline{I}^* = 11920\underline{/0°}\,\text{VA}$$
$$W_2 = \text{Re}\{\overline{S}_2\} = 11\,920\,\text{W}$$

O mediante teorema de Boucherot:

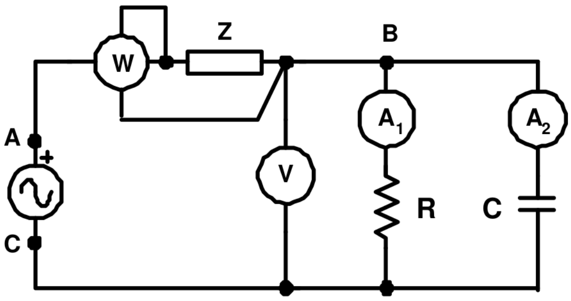
$$\begin{aligned} P_1 &= I_1^2 \cdot R_1 = 3959.6\,\mathrm{W} \\ P_2 &= I_2^2 \cdot R_2 = 3959.6\,\mathrm{W} \\ P_3 &= I_3^2 \cdot R_3 = 4000\,\mathrm{W} \\ W_2 = P &= P_1 + P_2 + P_3 = 11\,919.2\,\mathrm{W} \end{aligned}$$

Para el vatímetro 1 hay que tener en cuenta la potencia disipada en la línea, y aplicar nuevamente el teorema de Boucherot.

$$\begin{aligned} P_l &= 2 \cdot I^2 \cdot R_L = 7105.3\,\mathrm{W} \\ W_1 &= W_2 + P_l = 19\,026\,\mathrm{W} \end{aligned}$$

Problema 6.

En el circuito los amperímetros A_1 y A_2 marcan 4.5 A y 6 A, respectivamente; el voltímetro, 150 V y el vatímetro 900 W.



Sabiendo que la frecuencia del generador es de 250 Hz y el f.d.p. de la impedancia Z es de 0.8 en retraso, calcula:

1. Valores de R, C y Z en forma compleja.

$$R = \frac{U_{BC}}{A_1} = \frac{150}{4{,}5} = 33.3\,\Omega$$

$$X_c = \frac{U_{BC}}{A_2} = \frac{150}{6} = 25\,\Omega$$

$$C = \frac{1}{X_c \omega} = \frac{1}{25 \cdot 2\pi \cdot 250} = 25.46\,\mu\text{F}$$

Tomando $\overline{U}_{BC}$ como origen de fases, $\overline{U}_{BC} = 150\underline{/0}\,\text{V}$, obtenemos:

$$\overline{I}_1 = 4{,}5\underline{/0}\,\text{A}$$
$$\overline{I}_2 = 6\underline{/\pi/2}\,\text{A}$$

Por tanto,

$$\overline{I} = \overline{I}_1 + \overline{I}_2 = 4{,}5 + 6\text{j}\,\text{A} = 7{,}5\underline{/53{,}13^\circ}\,\text{A}$$

El vatímetro está midiendo $P_Z = U_Z \cdot I \cos\theta_Z$, y por tanto:

$$U_Z = \frac{900}{7{,}5 \cdot 0{,}8} = 150\,\text{V}$$

$$Z = \frac{U_Z}{I} = 20\,\Omega$$

También puede obtenerse este resultado calculando primero la parte resistiva de la impedancia:

$$R_Z = \frac{P_Z}{I^2} = 16\,\Omega$$

y a continuación el módulo teniendo en cuenta que $R = Z \cdot \cos\theta$:

$$Z = \frac{R}{\cos\theta} = \frac{16}{0{,}8} = 20\,\Omega$$

Con su factor de potencia obtenemos el ángulo (teniendo en cuenta que es inductiva al ser en retraso), $\theta_Z = \arccos(0{,}8) = 36.87°$:

$$\overline{Z} = 16 + 12j = 20\underline{/36{,}87°}\,\Omega$$

2. Tensión del generador.

$$\overline{U}_{AC} = \overline{U}_{AB} + \overline{U}_{BC}$$

$$\overline{U}_{AB} = \overline{Z} \cdot \overline{I} = 150\underline{/90°}\,\text{V}$$

$$\overline{U}_{AC} = 150 + 150j = 150\sqrt{2}\underline{/45°}\,\text{V}$$

3. Triángulo de potencias totales en forma compleja.

   Podemos calcular a partir de la tensión y la corriente:

$$\begin{aligned}\overline{S}_T &= \overline{U}_{AC}\overline{I}^* = \\ &= 150\sqrt{2}\underline{/45°} \cdot 7{,}5\underline{/-53.13°} = \\ &= 1591\underline{/-8{,}13°}\,\text{VA} = \\ &= 1575 - \text{j}225\,\text{VA}\end{aligned}$$

   o mediante el teorema de Boucherot:

$$\begin{aligned}P_Z &= 900\,\text{W} \\ P_R &= 4{,}5^2 \cdot 33{,}3 = 675\,\text{W} \\ P &= P_Z + P_R = 1575\,\text{W}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Q_Z &= 7{,}5^2 \cdot 12 = 675\,\text{VA}_\text{r} \\ Q_c &= -6^2 \cdot 25 = -900\,\text{VA}_\text{r} \\ Q &= Q_Z + Q_c = -225\,\text{VA}_\text{r}\end{aligned}$$

   Por tanto:

$$\overline{S} = P + jQ = 1575 - \text{j}225\,\text{VA}$$

Problema 7.

Un motor monofásico de $S = 10\,\text{kVA}$ y $fdp = 0{,}8$ está alimentado por una fuente de 230 V a $f = 50\,\text{Hz}$. Calcula:

1. El valor eficaz de la corriente absorbida por el motor.

$$\overline{S}_m = \overline{V} \cdot \overline{I}^*$$
$$I = \frac{10\,000}{230} = 43.5\,\text{A}$$

2. La potencia aparente del generador. Suponemos línea ideal (sin perdidas):

$$S_g = S_m = 10\,\text{kVA}$$

3. La capacidad del condensador necesario para compensar el factor de potencia a la unidad.

$$Q_m = S \cdot \sin(\theta_m) = 6\,\text{kVA}_\text{r}$$
$$Q_c = Q_m$$
$$C = \frac{Q_m}{\omega \cdot V^2} = 361\,\mu\text{F}$$

4. El valor eficaz de la corriente absorbida por el conjunto condensador-motor.

$$Q' = 0\,\text{VA}_\text{r}$$
$$S' = P_m = 8\,\text{kVA}$$
$$I' = \frac{S'}{V} = 34.8\,\text{A}$$

5. La potencia aparente del generador necesario una vez conectado el condensador del tercer apartado.

$$S'_g = S' = 8\,\text{kVA}$$

6. Compara de forma razonada los resultados de los apartados 4 y 5 con los valores calculados en los apartados 1 y 2.

   La compensación de reactiva mediante la inserción del condensador ha reducido la corriente que circula por la línea y la potencia del generador en un 20 %.

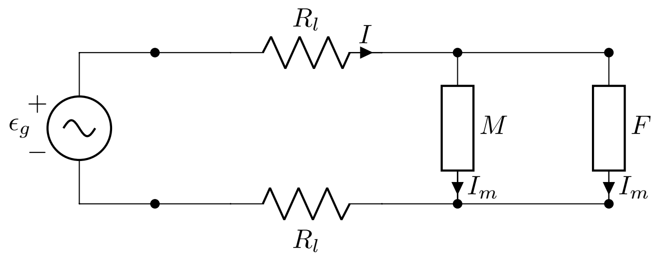
Problema 8.

Un generador de corriente alterna monofásica ($f = 50\,\mathrm{Hz}$) alimenta a dos cargas a través de una línea de cobre. Esta línea, de resistividad $\rho = 0.017\,\Omega\,\mathrm{mm}^2\,\mathrm{m}^{-1}$, tiene una longitud de $40\,\mathrm{m}$ y una sección de $6\,\mathrm{mm}^2$. Las dos cargas, cuya tensión de alimentación es de $200\,\mathrm{V}$, son:

1. Un motor de $7\,\mathrm{kW}$ con f.d.p. $0,7$.
2. Un grupo de lámparas fluorescentes con potencia total $200\,\mathrm{W}$ y f.d.p. $0,5$.

La resolución de este problema incluye:

1. Esquema del circuito señalando adecuadamente los elementos, corrientes y tensiones.



2. Potencias activa, reactiva y aparente de cada carga.

$$
\begin{aligned}
P_M &= 7000\,\mathrm{W} \\
Q_M &= 7141.4\,\mathrm{VA}_r \\
S_M &= 10\,000\,\mathrm{VA} \\
P_F &= 200\,\mathrm{W} \\
Q_F &= 346.4\,\mathrm{VA}_r \\
S_F &= 400\,\mathrm{VA}
\end{aligned}
$$

3. Valor eficaz de las corrientes en cada carga, y de la corriente total.

$$
\begin{aligned}
I_M &= S_M/V = 50\,\mathrm{A} \\
I_F &= S_F/V = 2\,\mathrm{A}
\end{aligned}
$$

Por teorema de Boucherot la potencia total en cargas es:

$$
\begin{aligned}
P_T &= 7200\,\mathrm{W} \\
Q_T &= 7487.8\,\mathrm{VA}_r \\
S_T &= 10\,387.9\,\mathrm{VA}
\end{aligned}
$$

Y, por tanto, la corriente total es:

$$I = S_T/V = 51.9\,\mathrm{A}$$

4. Potencia activa y reactiva entregada por el generador. La resistencia de la línea (una resistencia por cada conductor) es:

$$R_L = \rho L/S = 0.113\,\Omega$$

La potencia activa disipada en la línea es:

$$P_L = 2 \cdot I^2 R_L = 611.48\,\mathrm{W}$$

Por tanto, la potencia entregada por el generador es:

$$\begin{aligned} P_g &= P_L + P_T = 7811.5\,\mathrm{W} \\ Q_g &= Q_T = 7487.8\,\mathrm{VA}_r \\ S_g &= 10\,820.7\,\mathrm{VA} \end{aligned}$$

5. Valor eficaz de la tensión en bornes del generador.

$$V_g = S_g/I = 208.3\,\mathrm{V}$$

6. Capacidad necesaria a instalar en bornes de las cargas para mejorar el factor de potencia de las mismas a la unidad.

$$C = \frac{Q_t}{\omega V^2} = 595.9\,\mathrm{\mu F}$$

7. Valor eficaz de la tensión en bornes del generador, y potencia aparente entregada por el mismo una vez instalada la capacidad determinada en el apartado anterior.

Una vez instalado este condensador, la corriente total en las cargas es:

$$I' = P_T/V = 36\,\mathrm{A}$$

La potencia disipada en la línea es ahora:

$$P'_L = 2 \cdot I'^2 R_L = 293.8\,\mathrm{W}$$

Y la potencia entregada por el generador es:

$$\begin{aligned} P'_g &= 7493.8\,\mathrm{W} \\ Q'_g &= 0\,\mathrm{VA}_r \\ S'_g &= 7493.8\,\mathrm{VA} \end{aligned}$$

Por tanto, la tensión en bornes del generador es:

$$V'_g = S'_g/I' = 208.2\,\mathrm{V}$$

Problema 9.

Un generador de corriente alterna ($f = 50\,\mathrm{Hz}$) alimenta una instalación eléctrica a través de una línea de cobre ($\rho = 0.017\,\Omega\,\mathrm{mm}^2\,\mathrm{m}^{-1}$) de $25\,\mathrm{mm}^2$ de sección. La instalación eléctrica está compuesta por un motor de $S_m = 10\,\mathrm{kVA}$ y fdp $= 0{,}8$, una instalación de alumbrado fluorescente de $P_f = 800\,\mathrm{W}$ y fdp $= 0{,}9$, y diversas cargas electrónicas con una potencia conjunta $P_e = 540\,\mathrm{W}$ y fdp $= 0{,}5$ en retraso.

Suponiendo que las cargas trabajan a su tensión nominal de $230\,\mathrm{V}$ y que están situadas a $100\,\mathrm{m}$ del generador, calcule:

1. Triángulo de potencias total de las cargas (P_T, Q_T, S_T) y factor de potencia.

   Motor:

   $$P_m = 8000\,\mathrm{W}$$
   $$Q_m = 6000\,\mathrm{VA}_r$$

   Alumbrado

   $$P_f = 800\,\mathrm{W}$$
   $$Q_f = 387.5\,\mathrm{VA}_r$$

   Cargas Electrónicas

   $$P_e = 540\,\mathrm{W}$$
   $$Q_e = 935.3\,\mathrm{VA}_r$$

   Total (Teorema de Boucherot)

   $$P_T = P_m + P_f + P_e = 9340\,\mathrm{W}$$
   $$Q_T = Q_m + Q_f + Q_e = 7322.8\,\mathrm{VA}_r$$

   Por tanto, $S_T = 11\,868.4\,\mathrm{VA}$ y $\mathrm{fdp}_T = 0{,}787$.

2. Valor eficaz de la corriente que circula por la línea.

   $$I = \frac{S_T}{U} = \frac{11868{,}4}{230} = 51.6\,\mathrm{A}$$

3. Potencia disipada en la línea.

   $$R = 0.068\,\Omega$$
   $$P_L = 2 \cdot I^2 \cdot R = 362.1\,\mathrm{W}$$

4. Triángulo de potencias del generador (P_g, Q_g, S_g) y factor de potencia.

$$\begin{aligned} P_g &= P_T + P_L = 9702.1\,\mathrm{W} \\ Q_g &= Q_T = 7322.8\,\mathrm{VA}_r \\ S_g &= 12\,155.4\,\mathrm{VA} \\ \mathrm{fdp} &= 0{,}798 \end{aligned}$$

5. Valor eficaz de la tensión de salida del generador.

$$U_g = \frac{S_g}{I} = 235.6\,\mathrm{V}$$

6. Capacidad del banco de condensadores a instalar en bornes de la carga necesario para reducir la corriente que circula por la línea a un valor de 45 A.

   Si la corriente en línea se reduce a 45 A la potencia aparente resultante en cargas (incluyendo al condensador) es $S'_T = 230 \cdot 45 = 10\,350\,\mathrm{VA}$. Por tanto, $Q'_T = 4459.5\,\mathrm{VA}_r$. Así, es necesario instalar un banco de condensadores que aporte $Q_c = Q_T - Q'_T = 2863.3\,\mathrm{VA}_r$.

$$C = \frac{Q_c}{\omega U^2} = 172.3\,\mu\mathrm{F}$$

Independientemente del resultado obtenido, suponga que la capacidad instalada es $C = 172\,\mu\mathrm{F}$. En estas condiciones, calcule:

1. Potencia aparente de las cargas (incluyendo al banco de condensadores)

$$S'_T = \sqrt{(P_T^2 + Q_T'^2)} = 10\,350.1\,\mathrm{VA}$$

2. Valor eficaz de la corriente que circula por la línea y potencia disipada en la misma.

$$I' = \frac{S'_T}{U} = 45\,\mathrm{A}$$

$$P'_L = 2 \cdot I'^2 \cdot R = 275.4\,\mathrm{W}$$

3. Triángulo de potencias del generador y factor de potencia.

$$\begin{aligned} P'_g &= P_T + P'_L = 9615.4\,\mathrm{W} \\ Q'_g &= Q'_T = 4459.5\,\mathrm{VA}_r \\ S'_g &= 10\,599.2\,\mathrm{VA} \end{aligned}$$

4. Tensión de trabajo del generador.

$$U'_g = \frac{S'_g}{I'} = 235.5\,\mathrm{V}$$

Problema 10.

El circuito de la figura tiene carácter inductivo. La impedancia de linea es $Z = 10\sqrt{2}\,\Omega$ con f.d.p. $\sqrt{2}/2$ en retraso.

Se debe calcular:

a) **(1p.)** Potencia activa y reactiva consumida por Z.

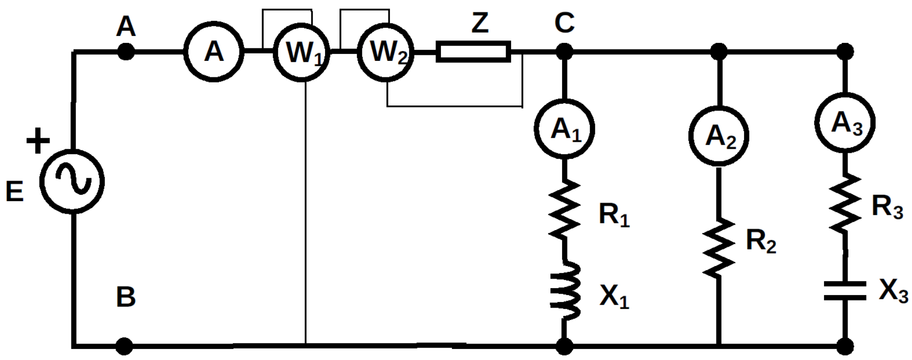
b) **(3p.)** Expresiones complejas de las intensidades medidas por los amperímetros, I, I_1, I_2 e I_3.

c) **(3p.)** Expresiones complejas de las tensiones U_{AB}, U_{AC} y U_{CB}.

d) **(3p.)** Valores de R_1, X_1, R_2, R_3 y X_3.

Datos:

- Tómese como referencia de fases la intensidad total, I.
- $A = 5\sqrt{5}\,\mathrm{A}$.
- $A_1 = 5\sqrt{2}\,\mathrm{A}$.
- $A_2 = 5\,\mathrm{A}$.
- $A_3 = \sqrt{10}\,\mathrm{A}$.
- $U_{AB} = 247\,\mathrm{V}$
- $W_1 = 2350\,\mathrm{W}$
- $R_1 = R_3$



Dado que disponemos de la potencia y corriente total y la tensión a la entrada, podemos calcular el factor de potencia del circuito:

$$\cos\phi = \frac{P_1}{U_{AB} I} = 0,851$$

Teniendo en cuenta que la corriente total es la referencia de fases,

$$\overline{U}_{AB} = 247\underline{/31{,}68^\circ}\,\mathrm{V}$$

También podemos calcular la potencia reactiva del circuito (positiva dado que el circuito es inductivo):

$$Q = P \tan \phi = 1450.4\,\mathrm{VA}r$$

En cuanto a la impedancia Z, sabemos que la tensión en sus bornes es:

$$\overline{U}_{AC} = \overline{I} \cdot \overline{Z} = 5\sqrt{5}\underline{/0°} \cdot 10\sqrt{2}\underline{/45°} = 50\sqrt{10}\underline{/45°}\,\mathrm{V}$$

Se cumple que $\overline{U}_{AB} = \overline{U}_{AC} + \overline{U}_{CB}$, y por tanto:

$$\overline{U}_{CB} = 100\underline{/10{,}3°}\,\mathrm{V}$$

Por otra parte, podemos descomponer esta impedancia en:

$$R = Z \cdot \cos \phi_Z = 10\,\Omega$$
$$X = Z \cdot \sin \phi_Z = 10\,\Omega$$

y por tanto,

$$P_z = I^2 \cdot R_z = 1250\,\mathrm{W}$$
$$Q_z = I^2 \cdot X_z = 1250\,\mathrm{VA}r$$

Aplicando el teorema de Boucherot podemos calcular la potencia activa y la potencia reactiva del circuito paralelo:

$$P_{CB} = P - P_z = 1100\,\mathrm{W}$$
$$Q_{CB} = Q - Q_z = 200\,\mathrm{VA}r$$
$$\overline{S}_{CB} = P_{CB} + iQ_{CB} = 1118{,}03\underline{/10{,}3°}\,\mathrm{VA}$$

Podemos comprobar que estos resultados son coherentes con los resultados anteriores usando $\overline{S}_{CB} = \overline{U}_{CB} \cdot \overline{I}^*$.

Ahora podemos obtener R_2, Z_1 y Z_3:

$$R_2 = \frac{U_{CB}}{I_2} = 20\,\Omega$$
$$Z_1 = \frac{U_{CB}}{I_1} = 10\sqrt{2}\,\Omega$$
$$Z_3 = \frac{U_{CB}}{I_3} = 10\sqrt{10}\,\Omega$$

Con los valores de Z_1 y Z_3 podemos escribir:

$$
\begin{aligned}
Z_1^2 &= R_1^2 + X_1^2 = 200 \\
Z_3^2 &= R_3^2 + X_3^2 = 1000
\end{aligned}
$$

Por otra parte, la potencia activa del circuito paralelo es:

$$
\begin{aligned}
P_{CB} &= P_1 + P_2 + P_2 = 1100\,\mathrm{W} \\
P_1 &= I_1^2 \cdot R_1 = 50 \cdot R_1 \\
P_2 &= I_2^2 \cdot R_2 = 500\,\mathrm{W} \\
P_3 &= I_3^2 \cdot R_3 = 10 \cdot R_3
\end{aligned}
$$

Por tanto,

$$R_1 = R_3 = 10\,\Omega$$

Con este resultado, teniendo en cuenta el módulo de Z_1 y Z_3, podemos calcular las reactancias respectivas.

$$
\begin{aligned}
R_1 &= 10\,\Omega \\
X_1 &= 10\,\Omega \\
\overline{Z}_1 &= 10 + 10i = 10\sqrt{2}\underline{/45^\circ}\,\Omega
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_3 &= 10\,\Omega \\
X_3 &= 30\,\Omega \\
\overline{Z}_3 &= 10 - 30i = 10\sqrt{10}\underline{/-71{,}56^\circ}\,\Omega
\end{aligned}
$$

Podemos comprobar que estas soluciones concuerdan con la potencia reactiva de cada impedancia y con la total.

$$
\begin{aligned}
Q_1 &= I_1^2 \cdot X_1 = 500\,\mathrm{VA}r \\
Q_3 &= -I_3^2 \cdot X_3 = -300\,\mathrm{VA}r \\
Q_{CB} &= Q_1 + Q_3 = 200\,\mathrm{VA}r
\end{aligned}
$$

Con estos resultados, recordando que $\overline{U}_{CB} = 100\underline{/10.3^\circ}$ podemos calcular las corrientes en forma compleja:

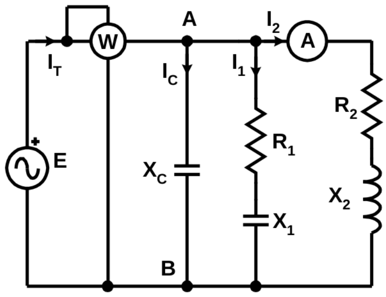
$$
\begin{aligned}
\overline{I}_1 &= 5\sqrt{2}\underline{/-34{,}7^\circ}\,\mathrm{A} \\
\overline{I}_2 &= 5\underline{/10{,}3^\circ}\,\mathrm{A} \\
\overline{I}_3 &= \sqrt{10}\underline{/81{,}9^\circ}\,\mathrm{A}
\end{aligned}
$$

Para terminar, podemos comprobar que $\overline{I} = \overline{I_1} + \overline{I_2} + \overline{I_3}$.

Problema 11.

En el circuito de la figura, el vatímetro marca 300 W y el amperímetro $\sqrt{2}$ A. Se sabe que $X_C = 400\,\Omega$, y $X_1 = R_1 = 2 \cdot X_2$. La fuente que alimenta el circuito es $e(t) = 200\sqrt{2}\sin(\omega t)$Sabiendo que el factor de potencia del circuito es la unidad, calcula:

1. Valores de R_1, R_2, X_1, X_2.
2. Corrientes I, I_c, I_1, e I_2 en forma fasorial.



Pasamos a fasores:

$$\overline{E} = 200\underline{/0}\,\mathrm{V}$$

Además de la tensión a la entrada, conocemos la lectura del vatímetro, y el factor de potencia del circuito. Podemos, por tanto, calcular la corriente total:

$$I = \frac{P}{E\cos\theta} = \frac{300}{200} = 1.5\,\mathrm{A}$$

Dado que $\cos\theta = 1$ y $\theta_V = 0°$, $\overline{I} = 1{,}5\underline{/0}\,\mathrm{A}$.
Con la tensión del generador podemos calcular la corriente del condensador:

$$I_c = \frac{V_{AB}}{X_c} = 0.5\,\mathrm{A} \rightarrow \overline{I}_c = 0{,}5\underline{/\pi/2}\,\mathrm{A}$$

Para las dos ramas siguientes podemos plantear las siguientes ecuaciones:

$$\overline{V_{AB}} = \overline{Z}_1 \cdot \overline{I}_1 = (R_1 - jX_1) \cdot \overline{I}_1$$
$$\overline{V_{AB}} = \overline{Z}_2 \cdot \overline{I}_2 = (R_2 + jX_2) \cdot \overline{I}_2$$

Empleando la equivalencia del enunciado, $X_1 = R_1 = 2 \cdot X_2$:

$$200\underline{/0}\,\mathrm{V} = 2X_2 \cdot (1 - j) \cdot \overline{I}_1$$
$$200\underline{/0}\,\mathrm{V} = (R_2 + jX_2) \cdot \overline{I}_2$$

El módulo de la primera ecuación nos proporciona una primera relación útil:

$$200 = 2\sqrt{2}X_2 I_1$$

Por otra parte, mediante el teorema de Boucherot podemos escribir:

$$P = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2$$
$$Q = -I_c^2 X_c - I_1^2 X_1 + I_2^2 X_2$$

Sustituyendo valores y empleando la relación $X_1 = R_1 = 2X_2$:

$$300 = 2I_1^2 X_2 + 2R_2$$
$$0 = -1/4 \cdot 400 - 2I_1^2 X_2 + 2X_2$$

La última ecuación podemos reescribirla como:

$$50 = X_2 \cdot (1 - I_1^2)$$

Teniendo en cuenta la relación entre X_2 e I_1 que hemos obtenido antes:

$$50 = X_2 \cdot (1 - I_1^2)$$
$$200 = 2\sqrt{2} X_2 I_1$$

que desemboca en la ecuación:

$$\sqrt{2} I_1^2 + I_1 - \sqrt{2} = 0 \rightarrow I_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{A}$$

y, por tanto:

$$X_2 = 100\,\Omega$$
$$X_1 = 200\,\Omega$$
$$R_1 = 200\,\Omega$$

Para obtener el valor de R_2 recuperamos la ecuación de la potencia activa:

$$300 = 2I_1^2 X_2 + 2R_2 \rightarrow R_2 = 100\,\Omega$$

Finalmente, para obtener los fasores de las corrientes I_1 e I_2 recuperamos las ecuaciones de las dos ramas sustituyendo los valores obtenidos:

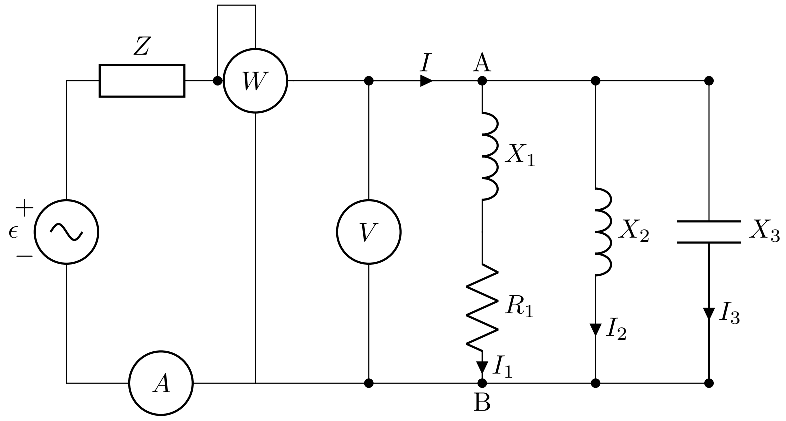
$$200\underline{/0}\,\mathrm{V} = (200 - j200) \cdot \overline{I}_1$$
$$200\underline{/0}\,\mathrm{V} = (100 + j100) \cdot \overline{I}_2$$

$$\overline{I}_1 = \sqrt{2}/2\underline{/45^\circ}\,\mathrm{A}$$
$$\overline{I}_2 = \sqrt{2}\underline{/-45^\circ}\,\mathrm{A}$$

Problema 12.

La potencia reactiva del circuito de la figura es 80 VA_r de tipo capacitivo. La tensión en la impedancia Z está en fase con la intensidad I_1 y las lecturas de los aparatos son $A = 4\,\mathrm{A}$, $V = 50\,\mathrm{V}$, $W = 200\,\mathrm{W}$. Sabiendo que $R_1 = 10\,\Omega$ y $X_2 = 50\,\Omega$, calcula:

1. Las corrientes I_1, I_2, I_3 en forma fasorial.
2. Las reactancias X_1, X_3, y la impedancia $\overline{Z}$.
3. La fuerza electromotriz $\overline{E}$.



El vatímetro está midiendo la potencia activa del circuito paralelo conectado entre A y B. El único elemento que consume potencia activa en ese circuito es la resistencia R_1. Por tanto,

$$P_{R1} = 200 = I_1^2 R_1 \rightarrow I_1 = 2\sqrt{5}\,\mathrm{A}$$

Dado que conocemos la tensión entre A y B, podemos determinar la impedancia de la rama 1:

$$Z_1 = \frac{V_{AB}}{I_1} = 5\sqrt{5}\,\Omega$$

y, por tanto, obtenemos X_1:

$$Z_1 = \sqrt{R_1^2 + X_1^2} \rightarrow X_1 = 5\,\Omega$$

$$\overline{Z}_1 = 10 + j5 = 5\sqrt{5}\underline{/26{,}56^\circ}\,\Omega$$

Usando la tensión V_{AB} como referencia de fases podemos calcular el ángulo de la corriente I_1:

$$\overline{I}_1 = \frac{\overline{V}_{AB}}{\overline{Z}_1} = 2\sqrt{5}\underline{/-26{,}56^\circ}\,\mathrm{A}$$

De la misma forma podemos calcular la corriente I_2:

$$\overline{I}_2 = \frac{\overline{V}_{AB}}{jX_2} = 1\underline{/-90^\circ}\,\mathrm{A}$$

De la rama 3 no tenemos información directa, luego debemos obtener información del conjunto para aplicarla a esta rama. En particular, del circuito AB conocemos la tensión, la corriente y la potencia, luego podemos obtener su factor de potencia:

$$\cos\theta_{AB} = \frac{P_{AB}}{I \cdot V_{AB}} = 1$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} Q_{AB} &= 0 \\ \overline{I} &= 4\underline{/0^\circ}\,\mathrm{A} \end{aligned}$$

Gracias a este último resultado podemos obtener la corriente en la rama 3:

$$\overline{I} = \overline{I}_1 + \overline{I}_2 + \overline{I}_3 \rightarrow \overline{I}_3 = 3\underline{/\pi/2}\,\mathrm{A}$$

Aplicamos el teorema de Boucherot para obtener reactancia de la rama 3:

$$\begin{aligned} Q &= Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0 \\ Q_1 &= I_1^2 X_1 = 100\,\mathrm{VA_r} \\ Q_2 &= I_2^2 X_2 = 50\,\mathrm{VA_r} \\ Q_3 &= -I_3^2 X_3 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$Q_3 = -150\,\mathrm{VA_r} \rightarrow X_3 = \frac{50}{3}\,\Omega$$

Para determinar $\overline{Z}$ tenemos en cuenta que la potencia reactiva total es $80\,\mathrm{VA_r}$ de tipo capacitivo y que $Q_{AB} = 0\,\mathrm{VA}_r$:

$$Q = Q_Z + Q_{AB} \rightarrow Q_Z = -80\,\mathrm{VA_r}$$

Por tanto:

$$X_Z = \frac{|Q_Z|}{I^2} = 5\,\Omega$$

Por otra parte, el enunciado indica que la tensión en esta impedancia está en fase con la intensidad I_1. Por tanto, $\theta_{VZ} = -26.56^\circ$, y $\theta_Z = \theta_{VZ} - \theta_I = -25.56^\circ$. Con este ángulo podemos calcular el valor de la resistencia:

$$R_Z = \frac{X_Z}{|\tan\theta_Z|} = 10\,\Omega$$

$$\overline{Z} = 10 - \mathrm{j}5\,\Omega$$

Finalmente, para calcular la fuerza electromotriz podemos hacerlo de dos formas, mediante potencias o mediante tensiones:

Mediante el teorema de Boucherot calculamos la potencia activa:

$$P = P_Z + P_{AB} = I^2 R_Z + 200 = 360\,\mathrm{W}$$

Y con la potencia reactiva Q obtenemos la potencia aparente:

$$\overline{S} = P + jQ = 360 - \mathrm{j}80\,\mathrm{VA}$$

y la tensión:

$$\overline{E} = \frac{\overline{E}}{\overline{I}^*} = 90 - j20 = 10\sqrt{85}\underline{/-12{,}53^\circ}\,\mathrm{V}$$

Podemos llegar a este mismo resultado con un balance de tensiones:

$$\overline{E} = \overline{V}_Z + \overline{V}_{AB} = \overline{Z} \cdot \overline{I} + \overline{V}_{AB}$$