Fundamentos. Circuitos de Corriente Continua

Teoría de Circuitos

Ana Fernández-Guillamón

¿Qué es la electricidad?

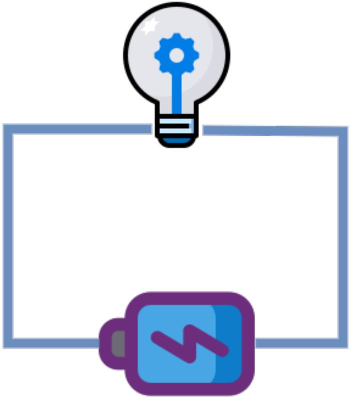
¿Qué es la electricidad?

- Forma de energía
- Prácticamente todas las actividades dependen de ella
- Efectos luminosos, mecánicos, caloríficos, etc.
- Movimiento de electrones de los átomos

Circuito eléctrico

Un **circuito eléctrico** es un conjunto de componentes eléctricos combinados que crean un camino cerrado por el que puede circular corriente eléctrica. Incluye:

- **Elementos activos** (generadores): motivan la circulación de corriente
- **Elementos pasivos** (receptores): transforman o almacenan la energía eléctrica



Análisis VS. Diseño

El **análisis** (o resolución) de un circuito eléctrico existente persigue determinar sus condiciones de funcionamiento:

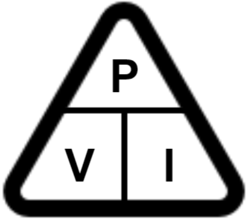
1. Definir las ecuaciones correspondientes al circuito
2. Obtener los valores de determinadas variables importantes a partir de dichas ecuaciones

El **diseño** (o síntesis) de un circuito eléctrico tiene como objetivo definir el circuito eléctrico, es decir, determinar los componentes necesarios y su interconexión, para obtener unas condiciones de funcionamiento

Variables

Las principales **variables** con las que se trabaja en los circuitos eléctricos son:

- Corriente eléctrica
- Tensión eléctrica
- Potencia eléctrica
- Energía eléctrica



Corriente eléctrica

y densidad de corriente

La **intensidad de la corriente eléctrica** es la variación de la carga $q(t)$ que atraviesa la sección transversal de un conductor por unidad de tiempo:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

Se produce por el **movimiento de electrones** (de $-$ a $+$). Sin embargo, por convenio se considera el **movimiento de cargas positivas** (de $+$ a $-$)

La **unidad** de la corriente es el **amperio** [A]

En ocasiones se habla de **densidad de corriente**:

$$\delta = \frac{i(t)}{S}$$

Tipos de corriente

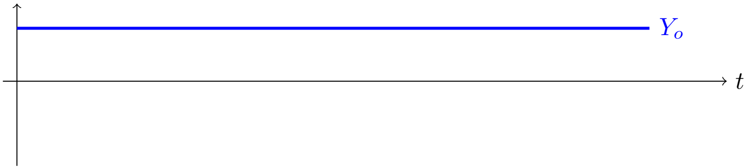
Corriente Continua (CC) y Corriente Alterna (CA)

- Corriente continua: siempre fluye en el mismo sentido ($+$ o $-$)
  - **CC constante** $\equiv$ corriente continua
  - CC variable
- Corriente alterna: cambia de sentido cada cierto tiempo
  - **CA sinusoidal** $\equiv$ corriente alterna
  - CA periódica
  - CA aperiódica

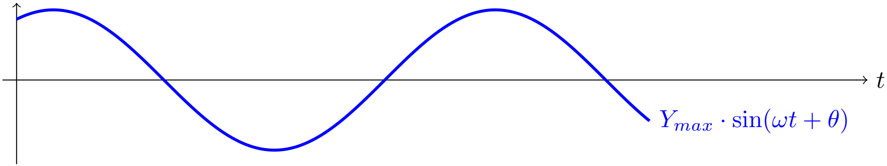
Tipos de corriente

Corriente Continua (CC) y Corriente Alterna (CA)

- Corriente Continua ($\frac{d}{dt} = 0$)



- Corriente Alterna ($\frac{d}{dt} \neq 0$)



Tensión eléctrica y f.e.m.

El **potencial eléctrico en un punto**, $v(t)$, es la energía potencial que tiene una carga unitaria en ese punto debida al campo eléctrico

La **tensión** o **diferencia de potencial entre dos puntos** A y B, $u_{AB}(t)$, es el trabajo realizado por el campo eléctrico al desplazar una carga unitaria entre esos puntos

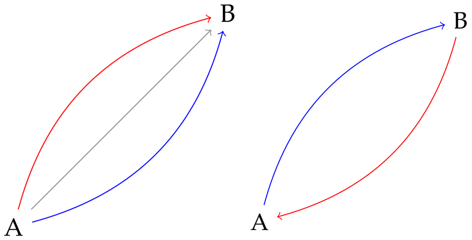
$$u_{AB}(t) = v_A(t) - v_B(t) = \frac{dW_e}{dq}$$

La **fuerza electromotriz** (f.e.m.) es la causa que mantiene a los electrones en movimiento (energía cedida por unidad de carga), y la proporcionan los elementos activos (**generadores**)

La **unidad** de todas estas magnitudes es el **voltio** [V]

La trayectoria no importa, pero el signo depende del sentido

- $u_{AB}(t)$ **no depende de la trayectoria** del desplazamiento, sino solo del potencial en cada punto $\rightarrow$ **campo conservativo**
- Aunque la trayectoria no sea relevante, hay que tener en cuenta el **sentido del desplazamiento**



Si el movimiento se produce desde B hasta A, el signo es contrario al anterior:

$$u_{BA} = v_B - v_A = -u_{AB}$$

Potencia eléctrica

La **potencia eléctrica** es la variación del trabajo del campo eléctrico por unidad de tiempo:

$$p(t) = \frac{dW_e}{dt} = \underbrace{\frac{dW_e}{dq(t)}}_{u(t)} \cdot \underbrace{\frac{dq(t)}{dt}}_{i(t)}$$

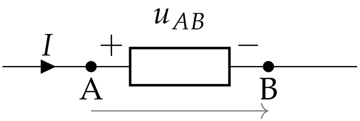
La **unidad** de la potencia eléctrica es el **vatio** [W]

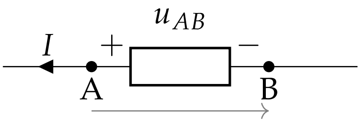
Potencia eléctrica

Convenio de signos – Receptores y generadores

Para determinar el **signo de la potencia eléctrica** hay que tener en consideración los signos de las variables de las que depende, la tensión y la corriente.

- Flechas en **mismo sentido**: potencia **positiva** (absorbe potencia) $\rightarrow$ **receptor**
  - La corriente *entra* por el terminal de mayor potencial
- Flechas en **sentidos opuestos**: potencia **negativa** (genera potencia) $\rightarrow$ **generador**
  - La corriente *sale* por el terminal de mayor potencial





Potencia y Energía

Potencia Cantidad de trabajo realizado por unidad de tiempo

- **Unidades** [W], [kW]

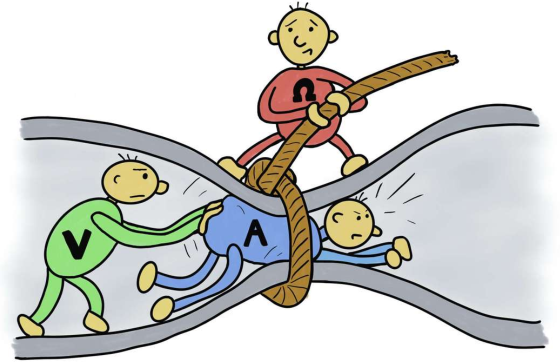
Energía Capacidad para realizar un trabajo: $E = P \cdot t$

- **Unidades** [J], [Wh], [kWh]

Ley de Ohm

Relación **lineal** entre tensión e intensidad:

$$\boxed{u(t) = R \cdot i(t)}$$



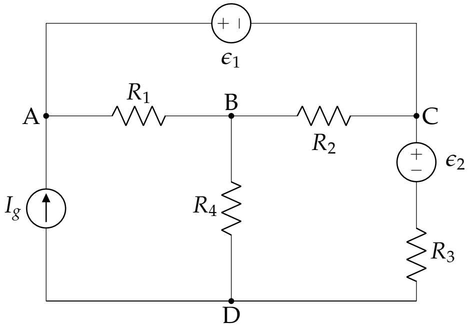
Definiciones

Nudo unión de **3** o más conductores

Rama elementos conectados entre dos nudos consecutivos

Lazo conjunto de ramas que forman un camino cerrado

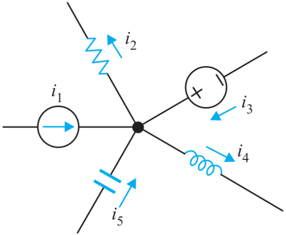
Malla lazo que no contiene ningún otro en su interior



Primera Ley de Kirchhoff (1LK)

- La **1LK** es el principio de conservación de la carga aplicado a los circuitos eléctricos
- **LKC**: la suma de las corrientes que llegan a un nudo es igual a la suma de las que salen:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} i_i(t) = 0}$$

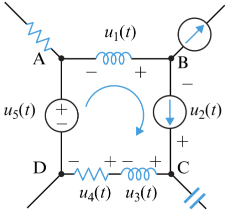


Segunda Ley de Kirchhoff (2LK)

- La **2LK** es el principio de conservación de la energía aplicado a los circuitos eléctricos
- **LKV**: la suma (con signo) de las tensiones a lo largo de un camino cerrado es cero:

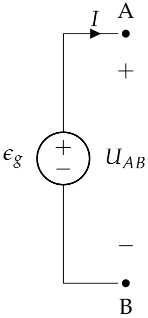
$$\boxed{\sum_{j=1}^{m} u_i(t) = 0}$$

  - La energía producida por un generador es consumida por los receptores del circuito para producir trabajo (mecánico, químico, etc.) o calor.



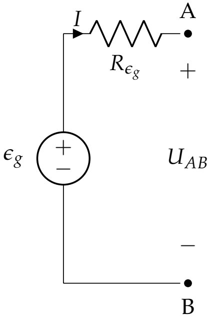
Generadores de tensión

Proporcionan una diferencia de potencial U entre sus bornes de salida (**impone la tensión**)



Ideal

$$u_{AB} = \epsilon_g$$



Real (pérdidas)

$$u_{AB} < \epsilon_g$$

$$P_g = \epsilon_g \cdot I$$

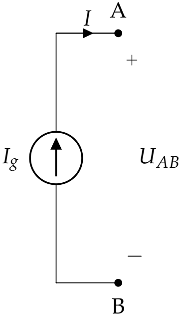
$$P_p = R_{\epsilon_g} \cdot I^2$$

$$P_u = U_{AB} \cdot I$$

$$\boxed{\epsilon_g = U_{AB} + R_{\epsilon_g} \cdot I}$$

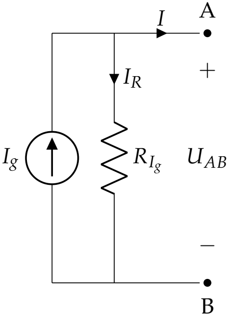
Generadores de corriente

Proporcionan una corriente I (**impone la corriente**)



Ideal

$$I = I_g$$



Real (pérdidas)

$$I < I_g$$

$$P_g = U_{AB} \cdot I_g$$

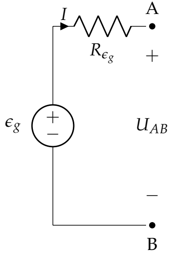
$$P_p = \frac{U_{AB}^2}{R_{I_g}}$$

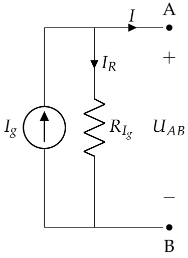
$$P_u = U_{AB} \cdot I$$

$$\boxed{I_g = I + \frac{U_{AB}}{R_{I_g}}}$$

Dualidad de generadores

Dos fuentes son equivalentes cuando suministran el **mismo valor de tensión y corriente** a un circuito externo (solo puede darse entre **fuentes reales**)





Si $R_g = R_{\epsilon_g} = R_{I_g}$:

$$\boxed{\epsilon_g = R_g \cdot I_g \Leftrightarrow I_g = \frac{\epsilon_g}{R_g}}$$

El polo + queda en la misma posición que la flecha

$$U_{AB} = \epsilon_g - R_{\epsilon_g} \cdot I$$

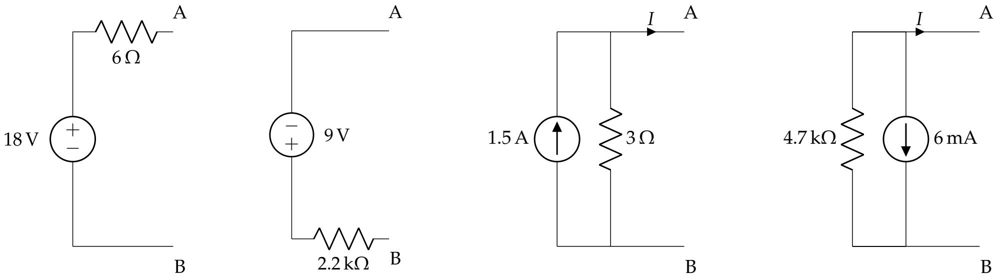
$$I = I_g - \frac{U_{AB}}{R_{I_g}}$$

$$U_{AB} = R_{I_g} \cdot I_g - R_{I_g} \cdot I$$

Dualidad de generadores

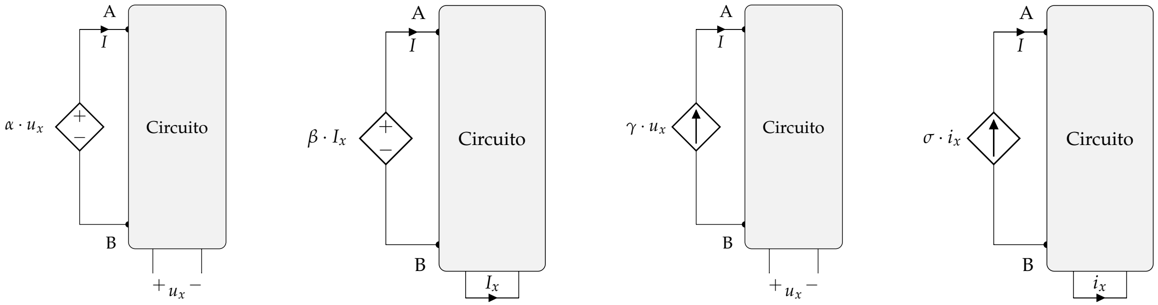
Ejemplo

Convertir en fuente de tensión o intensidad, según corresponda



Generadores dependientes

No tienen valores de ϵ o i_g fijos, sino que **dependen de la tensión o corriente en otros puntos de la red**:

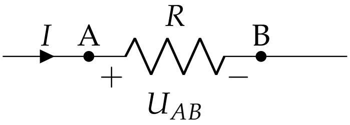


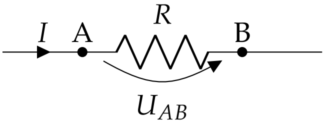
Resistencia

- Una **resistencia** R provoca una **diferencia de potencial** entre sus terminales **directamente proporcional** a su corriente: [Ω]

$$\boxed{u(t) = R \cdot i(t)}$$

- **Criterio de signos**: la tensión es positiva en el terminal por el que entra la corriente (las flechas de tensión y corriente tienen el mismo sentido)





La **resistividad** del material determina si éste es mejor o peor conductor (depende de T)

$$R = \rho \cdot \frac{l}{S}$$

- La **sección** se expresa en mm^2
- La **resistividad** depende del material conductor y de la temperatura ambiente:
  - Cobre a 20ºC: $1/58\,\Omega\mathrm{mm}^2/\mathrm{m}$
  - Aluminio a 20ºC: $1/36\,\Omega\mathrm{mm}^2/\mathrm{m}$

Para otras temperaturas:

$$\rho_f = \rho_{20} \cdot (1 + \alpha \cdot (T_f - 20))$$
$$R_f = R_{20} \cdot (1 + \alpha \cdot (T_f - 20))$$

$\alpha \equiv$ coeficiente de temperatura

Conductancia

Conductividad

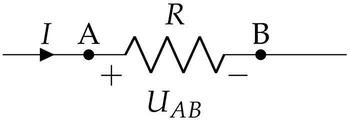
La inversa de la resistencia es la **conductancia** [S]: facilidad de los conductores al paso de la corriente eléctrica:

$$\boxed{G = \frac{1}{R}}$$

La inversa de la resistividad es la **conductividad** [$\mathrm{m}/\Omega\,\mathrm{mm}^2$]: facilidad de los materiales al paso de la corriente:

$$\gamma = \frac{1}{\rho}$$

Ley de Joule

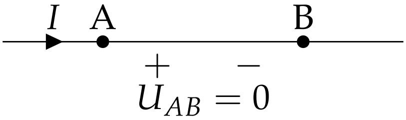


- **Ley de Joule**: una resistencia disipa energía eléctrica produciendo **calor**

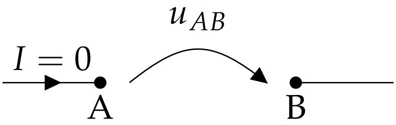
$$\boxed{p(t) = R \cdot i^2(t)}$$

Cortocircuito y Circuito Abierto

- Cortocircuito: resistencia nula (tensión nula)

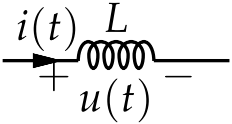


- Circuito abierto: resistencia infinita (corriente nula)



Bobina o inductancia

Bobina: conductor arrollado alrededor de un núcleo



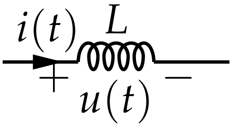
La tensión en sus terminales es directamente proporcional al cambio de la corriente: coeficiente de autoinducción o **inductancia** [H]:

$$u_L(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} \rightarrow i(t_f) = i(t_i) + \frac{1}{L} \cdot \int_{t_i}^{t_f} u(t) \cdot dt$$

La inductancia L expresa la relación entre el cambio de flujo y el cambio de corriente:

$$L = \frac{d\phi(t)}{di(t)}$$

Bobina o inductancia



- Almacena **energía magnética**:

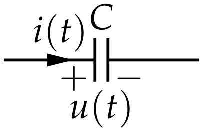
$$E_L(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau) \cdot i(\tau) d\tau = \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2(t)$$

- En circuitos de CC es un **cortocircuito**:

$$\frac{di(t)}{dt} = 0 \Rightarrow U_L = 0$$

Condensador

Condensador: dos placas metálicas separadas por una capa dieléctrica. Al aplicar tensión se produce una **separación de cargas opuestas** que se **acumulan** en cada placa



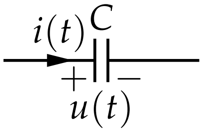
- La **carga acumulada** en un instante es **proporcional** a la **diferencia de potencial** en ese instante: **capacidad** [F]

$$q(t) = C \cdot u(t)$$

- En el proceso de carga se produce una corriente eléctrica entre las dos placas:

$$i_C(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C\frac{du(t)}{dt} \rightarrow u(t_f) = u(t_i) + \frac{1}{C} \cdot \int_{t_i}^{t_f} i(t) \cdot dt$$

Condensador



- Un condensador almacena **energía eléctrica**:

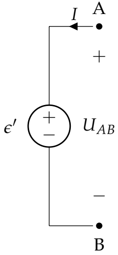
$$E_c(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau) \cdot i(\tau) d\tau = \frac{1}{2} \cdot C \cdot u^2(t)$$

- En un circuito de corriente continua se comporta como un **circuito abierto**:

$$\frac{du(t)}{dt} = 0 \Rightarrow I_c = 0$$

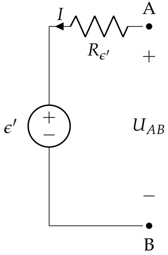
Otros receptores

- Compuestos por combinaciones de los elementos básicos
- Se caracterizan por su **fuerza contraelectromotriz** (f.c.e.m, E′ o ε'): energía por unidad de carga que transforman en otro tipo (no calor)



Ideal

$$u_{AB} = \epsilon'$$



Real (pérdidas)

$$u_{AB} > \epsilon'$$

$$P_u = \epsilon' \cdot I$$

$$P_p = R_{\epsilon'} \cdot I^2$$

$$P_a = U_{AB} \cdot I$$

$$\boxed{U_{AB} = \epsilon' + R_{\epsilon'} \cdot I}$$

Eficiencia

Cociente entre la potencia de salida y la potencia de entrada:

- Receptor (generalmente, motor):

$$\eta_m = \frac{P_{util}}{P_{absorbida}}$$

- Generador:

$$\eta_g = \frac{P_{entregada}}{P_{producida}}$$

Cualquier máquina tiene pérdidas:

$$\boxed{\eta < 1}$$

Un generador de corriente continua, *fem* $= 500\,\mathrm{V}$ y $0{,}75\,\Omega$ de resistencia, alimenta mediante una línea de cobre de $18\,\mathrm{m\Omega\,mm\,m^{-1}}$ y $16\,\mathrm{mm^2}$ de sección a un motor de 1 CV y rendimiento 74.49%, situado a $1\,\mathrm{km}$ de distancia. Se pide determinar:

- Intensidad de corriente en el motor y densidad de corriente, sabiendo que ésta no debe superar $2\,\mathrm{A/mm^2}$
- Tensiones en bornes del generador y del motor, así como la caída de tensión en la línea
- *fcem* del motor y su resistencia

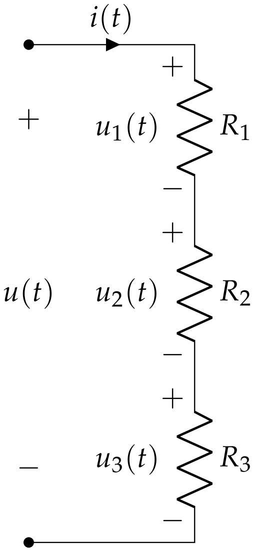
Asociación de elementos

Las asociaciones principales de los elementos son:

- **Serie**: final con principio $\rightarrow$ misma corriente
- **Paralelo**: todos los principios en un punto, todos los finales en otro $\rightarrow$ misma diferencia de potencial
- **Mixto**: combinación de serie y paralelo
- **Estrella - Triángulo**: conexión de cargas trifásicas

Conexión en serie

Resistencias

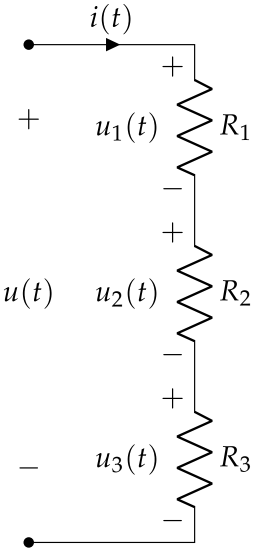


$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) + u_3(t)$$
$$u_1(t) = R_1 \cdot i(t)$$
$$u_2(t) = R_2 \cdot i(t)$$
$$u_3(t) = R_3 \cdot i(t)$$
$$u(t) = i(t) \cdot (R_1 + R_2 + R_3)$$

$$\boxed{R_{eq} = \sum_{i=1}^{n} R_i}$$

Conexión en serie

Divisor de tensión



$$i(t) = \frac{u(t)}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$u_3(t) = R_3 \cdot i(t)$$

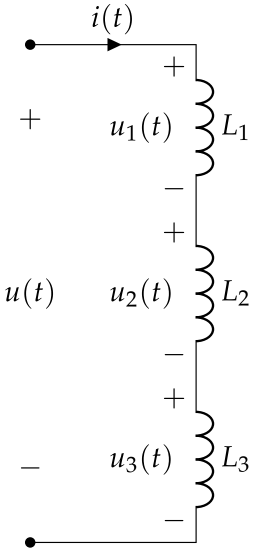
$$u_3(t) = u(t) \cdot \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

En general:

$$\boxed{u_o(t) = u(t) \cdot \frac{R_o}{R_{eq}}}$$

Conexión en serie

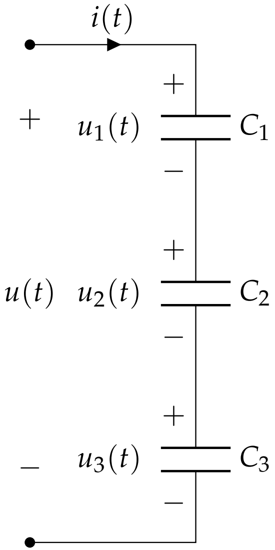
Bobinas



$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) + u_3(t)$$
$$u_1(t) = L_1 \cdot \frac{di(t)}{dt}$$
$$u_2(t) = L_2 \cdot \frac{di(t)}{dt}$$
$$u_3(t) = L_3 \cdot \frac{di(t)}{dt}$$
$$u(t) = \frac{di(t)}{dt} \cdot (L_1 + L_2 + L_3)$$
$$\boxed{L_{eq} = \sum_{i=1}^{n} L_i}$$

Conexión en serie

Condensadores



$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) + u_3(t)$$

$$i(t) = C_1 \cdot \frac{du_1(t)}{dt} = C_2 \cdot \frac{du_2(t)}{dt} = C_3 \cdot \frac{du_3(t)}{dt}$$

$$u_1(t) = \frac{1}{C_1} \cdot \int_0^t i(t)\,dt$$

$$u_2(t) = \frac{1}{C_2} \cdot \int_0^t i(t)\,dt$$

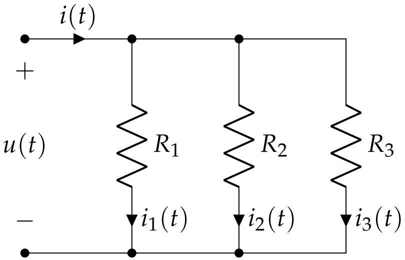
$$u_3(t) = \frac{1}{C_3} \cdot \int_0^t i(t)\,dt$$

$$u(t) = \int i(t)\,dt \cdot \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right)$$

$$\boxed{\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}}$$

Conexión en paralelo

Resistencias



$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) + i_3(t)$$
$$i_1(t) = u(t)/R_1$$
$$i_2(t) = u(t)/R_2$$
$$i_3(t) = u(t)/R_3$$
$$i(t) = u(t) \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)$$
$$\boxed{\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}}$$

Conexión en paralelo

Caso particular de dos resistencias

En el caso concreto de **dos** resistencias en paralelo ...

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

... la expresión es:

$$\boxed{R_{eq} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}}$$

Conexión en paralelo

Conductancia

Para facilitar las operaciones es conveniente utilizar el inverso de la resistencia:

$$G = \frac{1}{R}$$

Así, en lugar de...

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}$$

$$u(t) = R_{eq} \cdot i(t)$$

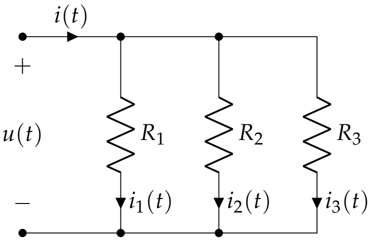
... se puede escribir:

$$\boxed{G_{eq} = \sum_{i=1}^{n} G_i}$$

$$i(t) = G_{eq} \cdot u(t)$$

Conexión en paralelo

Divisor de corriente



$$u(t) = \frac{i(t)}{G_1 + G_2 + G_3}$$

$$i_3(t) = G_3 \cdot u(t)$$

$$i_3(t) = i(t)\,\frac{G_3}{G_1 + G_2 + G_3}$$

En general:

$$\boxed{i_o(t) = i(t) \cdot \frac{G_o}{G_{eq}}}$$

$$u(t) = \frac{i(t)}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

$$i_3(t) = \frac{u(t)}{R_3}$$

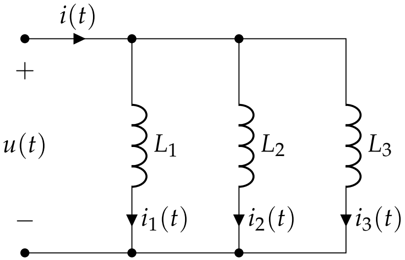
$$i_3(t) = \frac{i(t)}{R_3}\left[\frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}\right]$$

En general:

$$\boxed{i_o(t) = i(t) \cdot \frac{R_{eq}}{R_o}}$$

Conexión en paralelo

Bobinas



$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) + i_3(t)$$

$$u(t) = L_1 \cdot \frac{di_1(t)}{dt} = L_2 \cdot \frac{di_2(t)}{dt} = L_3 \cdot \frac{di_3(t)}{dt}$$

$$i_1(t) = \frac{1}{L_1} \cdot \int_0^t u(t)\,dt$$

$$i_2(t) = \frac{1}{L_2} \cdot \int_0^t u(t)\,dt$$

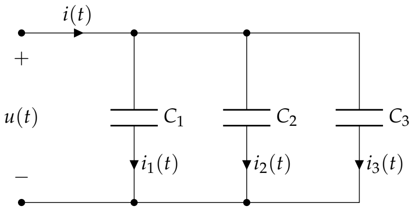
$$i_3(t) = \frac{1}{L_3} \cdot \int_0^t u(t)\,dt$$

$$i(t) = \int u(t)\,dt \cdot \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3}\right)$$

$$\boxed{\frac{1}{L_{eq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{L_i}}$$

Conexión en paralelo

Condensadores



$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) + i_3(t)$$

$$i_1(t) = C_1 \cdot \frac{du(t)}{dt}$$

$$i_2(t) = C_2 \cdot \frac{du(t)}{dt}$$

$$i_3(t) = C_3 \cdot \frac{du(t)}{dt}$$

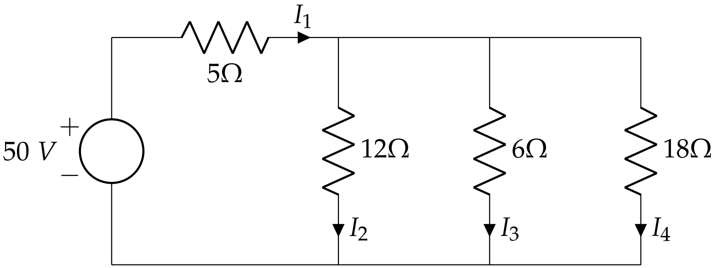
$$i(t) = \frac{du(t)}{dt} \cdot (C_1 + C_2 + C_3)$$

$$\boxed{C_{eq} = \sum_{i=1}^{n} C_i}$$

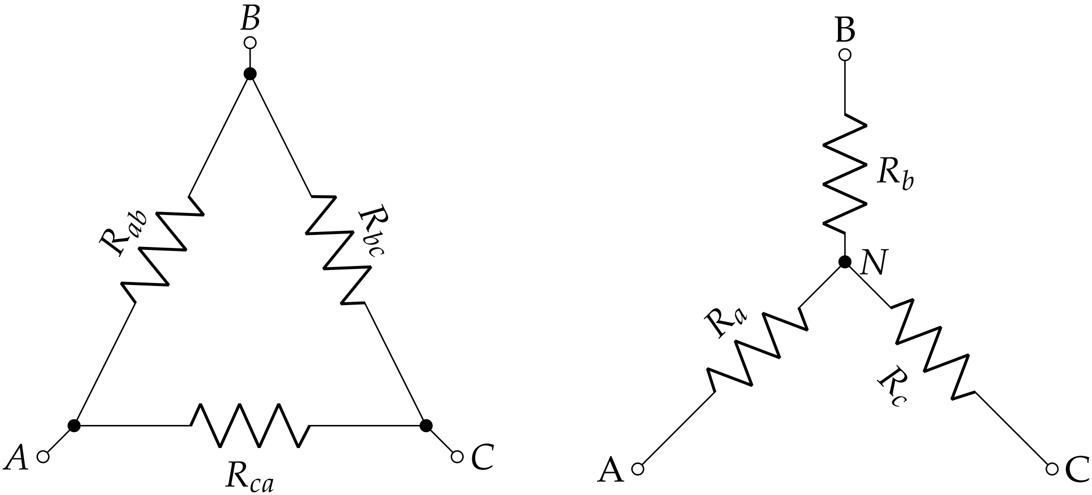
Conexión mixta

Ejemplo

Calcular la corriente que pasa por la fuente de tensión de la figura.

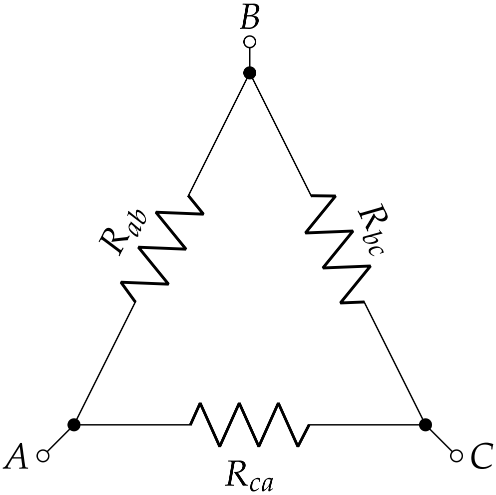


Conexión estrella - triángulo



Conexión estrella - triángulo

Triángulo



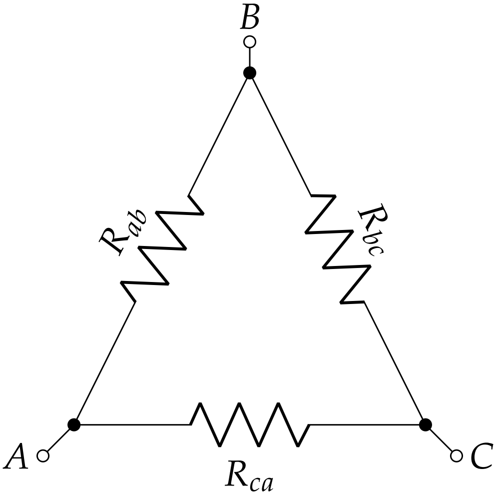
$$R_{AB} = \frac{R_{ab} \cdot (R_{bc} + R_{ca})}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}$$

$$R_{BC} = \frac{R_{bc} \cdot (R_{ab} + R_{ca})}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}$$

$$R_{CA} = \frac{R_{ca} \cdot (R_{ab} + R_{bc})}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}$$

Conexión estrella - triángulo

Triángulo



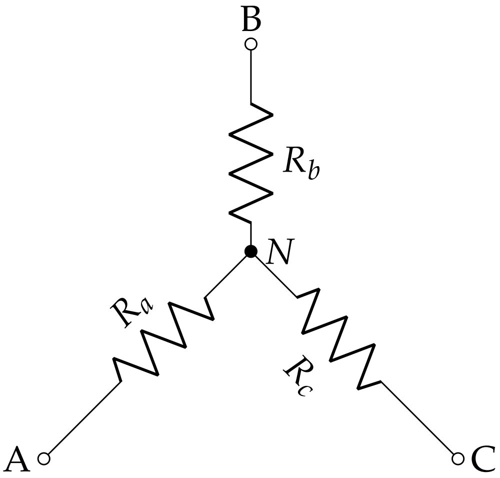
$$R_{AB} = \frac{R_{ab} \cdot R_{bc}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}} + \frac{R_{ab} \cdot R_{ca}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}$$

$$R_{BC} = \frac{R_{bc} \cdot R_{ab}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}} + \frac{R_{bc} \cdot R_{ca}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}$$

$$R_{CA} = \frac{R_{ca} \cdot R_{ab}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}} + \frac{R_{ca} \cdot R_{bc}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}$$

Conexión estrella - triángulo

Estrella



$$R_{AB} = R_a + R_b$$

$$R_{BC} = R_b + R_c$$

$$R_{CA} = R_c + R_a$$

Conexión estrella - triángulo

Equivalencia

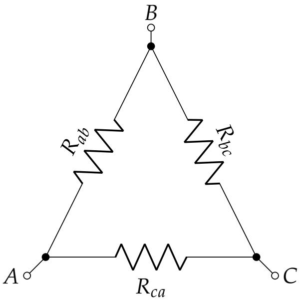
$$\frac{R_{ab} \cdot R_{bc}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}} + \frac{R_{ab} \cdot R_{ca}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}} = R_a + R_b$$

$$\frac{R_{ab} \cdot R_{bc}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}} + \frac{R_{bc} \cdot R_{ca}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}} = R_b + R_c$$

$$\frac{R_{ab} \cdot R_{ca}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}} + \frac{R_{bc} \cdot R_{ca}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}} = R_c + R_a$$

Conexión estrella - triángulo

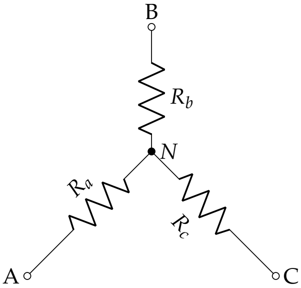
Conversión de triángulo a estrella



$$R_a = \frac{R_{ab} \cdot R_{ca}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}$$

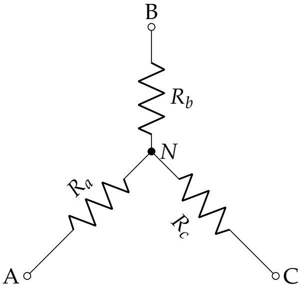
$$R_b = \frac{R_{ab} \cdot R_{bc}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}$$

$$R_c = \frac{R_{bc} \cdot R_{ca}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}$$



Conexión estrella - triángulo

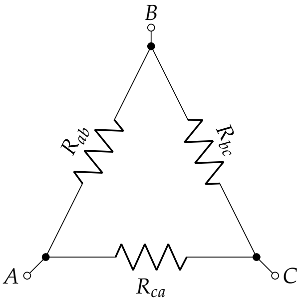
Conversión de estrella a triángulo



$$G_{ab} = \frac{G_a \cdot G_b}{G_a + G_b + G_c}$$

$$G_{bc} = \frac{G_b \cdot G_c}{G_a + G_b + G_c}$$

$$G_{ca} = \frac{G_c \cdot G_a}{G_a + G_b + G_c}$$



Conexión estrella - triángulo

Conversión si $R_a = R_b = R_c = R_Y$ y $R_{ab} = R_{bc} = R_{ca} = R_D$

En el caso concreto de que las resistencias de la estrella/triángulo sean **iguales**…

$$R_a = R_b = R_c = R_Y$$
$$R_{ab} = R_{bc} = R_{ca} = R_D$$

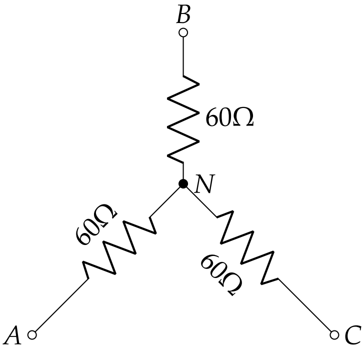
… la expresión es:

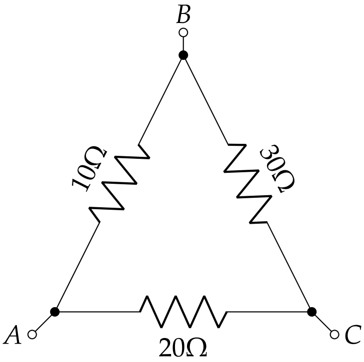
$$\boxed{R_D = 3 \cdot R_Y}$$

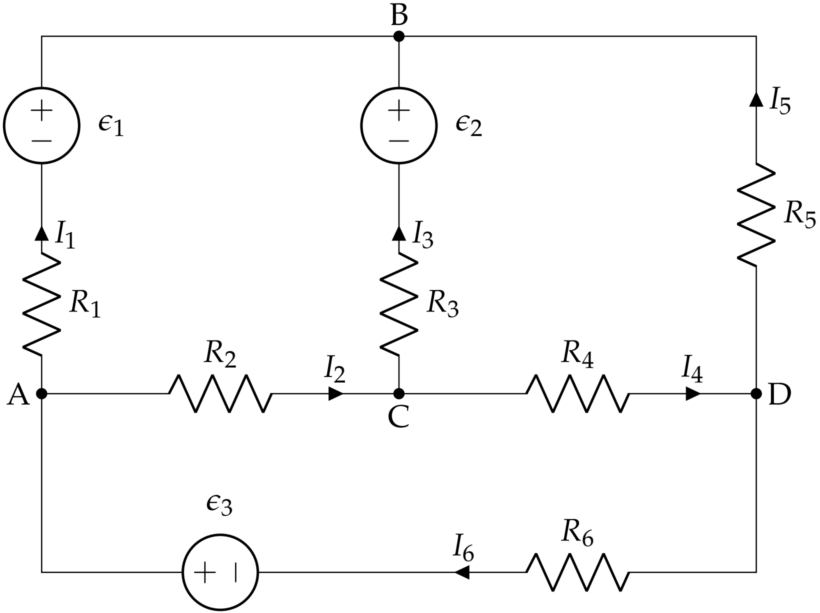
Conexión estrella - triángulo

Ejemplo

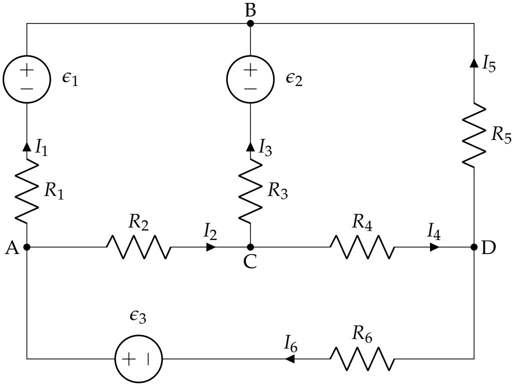
Convertir los circuitos de la figura en triángulo o estrella equivalente, según corresponda.






B
ϵ_1
ϵ_2
I_5
R_5
I_1
I_3
R_1
R_3
R_2
R_4
I_2
I_4
A
C
D
ϵ_3
I_6
R_6

Aplicar 1LK



Nudo A

$$I_6 = I_1 + I_2$$

Nudo B

$$I_1 + I_3 + I_5 = 0$$

Nudo C

$$I_2 = I_3 + I_4$$

Nudo D

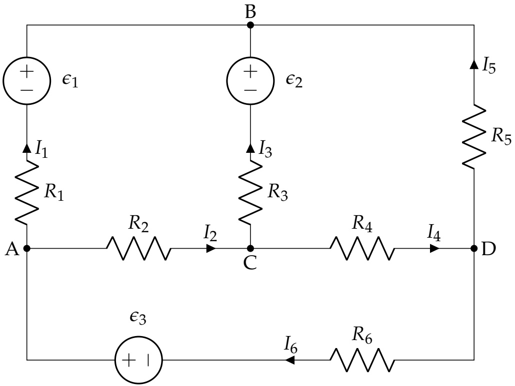
$$I_4 = I_5 + I_6$$

No son ecuaciones linealmente independientes:

$$C = A + B + D$$

El número de ecuaciones linealmente independientes aplicando 1LK son $N - 1$

Aplicar 2LK



Malla ABCA

$$I_1 \cdot R_1 - \epsilon_1 + \epsilon_2 - I_3 \cdot R_3 - I_2 \cdot R_2 = 0$$

Malla BDCB

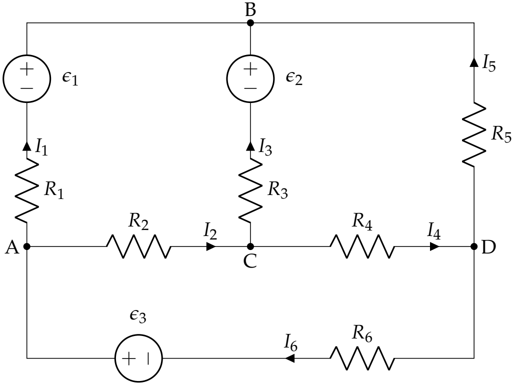
$$-I_5 \cdot R_5 - I_4 \cdot R_4 + I_3 \cdot R_3 - \epsilon_2 = 0$$

Malla ACDA

$$I_2 \cdot R_2 + I_4 \cdot R_4 + I_6 \cdot R_6 - \epsilon_3 = 0$$

El número de ecuaciones linealmente independientes aplicando 2LK son $R - N + 1$

Combinar las ecuaciones



$$
\begin{aligned}
-I_1 - I_2 + I_6 &= 0 \\
I_1 + I_3 + I_5 &= 0 \\
I_4 - I_5 - I_6 &= 0 \\
I_1 \cdot R_1 - I_2 \cdot R_2 - I_3 \cdot R_3 &= \epsilon_1 - \epsilon_2 \\
I_3 \cdot R_3 - I_4 \cdot R_4 - I_5 \cdot R_5 &= \epsilon_2 \\
I_2 \cdot R_2 + I_4 \cdot R_4 + I_6 \cdot R_6 &= \epsilon_3
\end{aligned}
$$

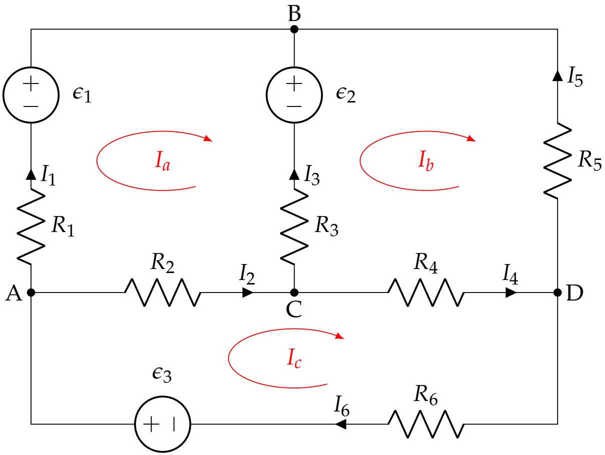
Y en forma matricial

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ R_1 & -R_2 & -R_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & -R_4 & -R_5 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & R_4 & 0 & R_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \epsilon_1 - \epsilon_2 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{bmatrix}$$

Resolver el circuito implica resolver un sistema lineal de **6 ecuaciones**, en el que las incógnitas son las corrientes de cada rama

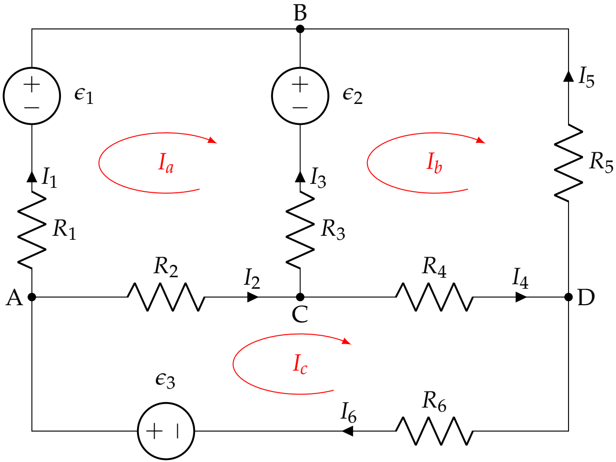
Método de las mallas

El método de las mallas simplifica el sistema de ecuaciones necesario mediante unas corrientes *ficticias* denominadas **corrientes de malla**, aprovechando las relaciones entre tensiones de la 2LK



Método de las mallas

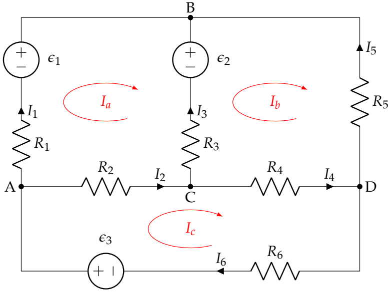
Relaciones entre las corrientes de rama y malla



$$I_1 = I_a$$
$$I_5 = -I_b$$
$$I_6 = I_c$$
$$I_2 = I_c - I_a$$
$$I_3 = I_b - I_a$$
$$I_4 = I_c - I_b$$

Método de las mallas

Aplicar 2LK



Malla ABCA (I_a)

$$I_a \cdot R_1 - \epsilon_1 + \epsilon_2 + (I_a - I_b) \cdot R_3 + (I_a - I_c) \cdot R_2 = 0$$
$$I_a \cdot (R_1 + R_3 + R_2) - I_b \cdot R_3 - I_c \cdot R_2 = \epsilon_1 - \epsilon_2$$

Malla BDCB (I_b)

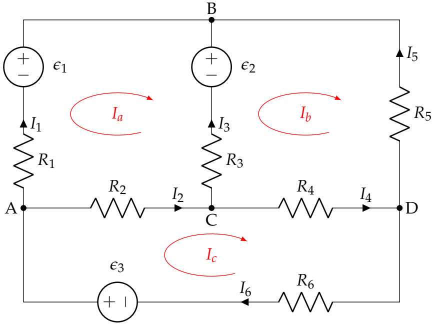
$$I_b \cdot R_5 + (I_b - I_c) \cdot R_4 + (I_b - I_a) \cdot R_3 - \epsilon_2 = 0$$
$$-I_a \cdot R_3 + I_b \cdot (R_5 + R_4 + R_3) - I_c \cdot R_4 = \epsilon_2$$

Malla ACDA (I_c)

$$(I_c - I_a) \cdot R_2 + (I_c - I_b) \cdot R_4 + I_c \cdot R_6 - \epsilon_3 = 0$$
$$-I_a \cdot R_2 - I_b \cdot R_4 + I_c \cdot (R_2 + R_4 + R_6) = \epsilon_3$$

Método de las mallas

En forma matricial



$$\begin{bmatrix} (R_1 + R_3 + R_2) & -R_3 & -R_2 \\ -R_3 & (R_5 + R_4 + R_3) & -R_4 \\ -R_2 & -R_4 & (R_2 + R_4 + R_6) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 - \epsilon_2 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{bmatrix}$$

Método de las mallas

Ecuación general en forma matricial

$$
\begin{bmatrix}
\sum R_{11} & \pm\sum R_{12} & \dots & \pm\sum R_{1n} \\
\pm\sum R_{21} & \sum R_{22} & \dots & \pm\sum R_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\pm\sum R_{n1} & \pm\sum R_{n2} & \dots & \sum R_{nn}
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix}
I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\sum \epsilon_1 \\ \sum \epsilon_2 \\ \vdots \\ \sum \epsilon_n
\end{bmatrix}
$$

$\sum R_{ii}$ suma de las resistencias incluidas en la malla de I_i

$\sum R_{ij}$ suma de las resistencias incluidas en las ramas compartidas por las mallas de I_i e I_j ($+$ si las corrientes van en el mismo sentido, $-$ en caso contrario)

$\sum \epsilon_i$ suma algebraica de las fuerzas electromotrices de los generadores de la malla de I_i ($+$ si I_i sale por $+$ de la fuente, $-$ en caso contrario)

Método de las mallas

Procedimiento

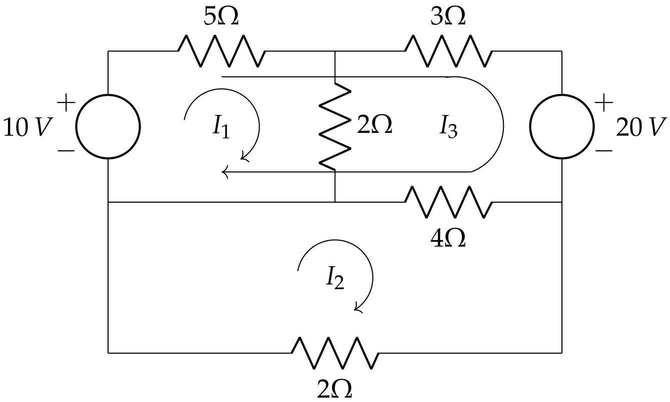
1. Identificar las corrientes de rama
2. Asignar un sentido a las corrientes de malla
3. Relacionar corrientes de rama con corrientes de malla
4. Escribir ecuación de mallas
5. Resolver la ecuación, obteniendo las corrientes de malla
6. Obtener las corrientes de rama con las relaciones del punto 3

Importante: todos los generadores deben ser fuentes de tensión

Método de las mallas

Ejemplo

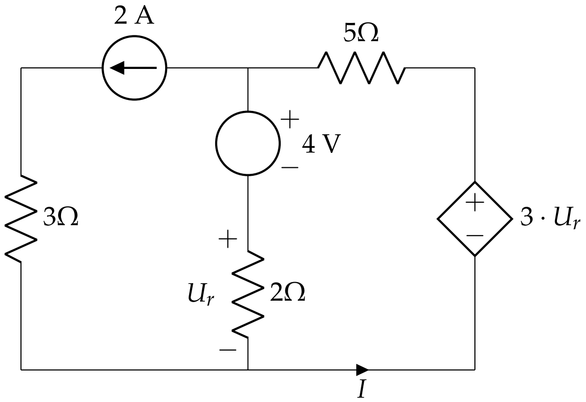
Calcular las tres intensidades de malla del circuito de la figura.



Método de las mallas

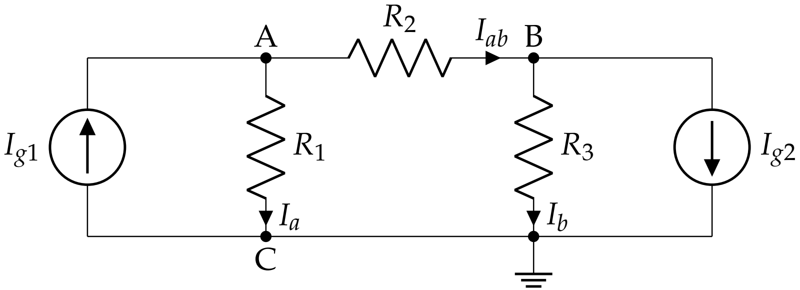
Ejemplo

Calcular la corriente I en el circuito de la figura.



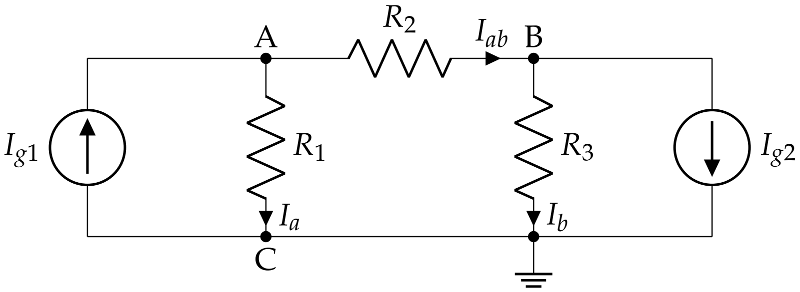
Método de los nudos

El método de los nudos aprovecha las relaciones entre corrientes de la 1LK



Método de los nudos

Aplicar 1LK



Nudo A

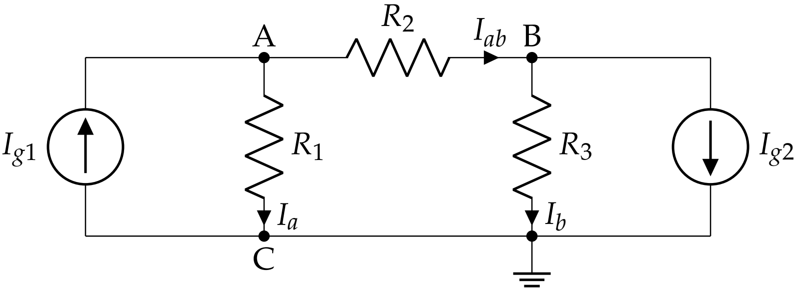
$$I_{g1} - I_a - I_{ab} = 0$$

Nudo B

$$I_{ab} - I_{g2} - I_b = 0$$

Método de los nudos

Tensiones en las resistencias



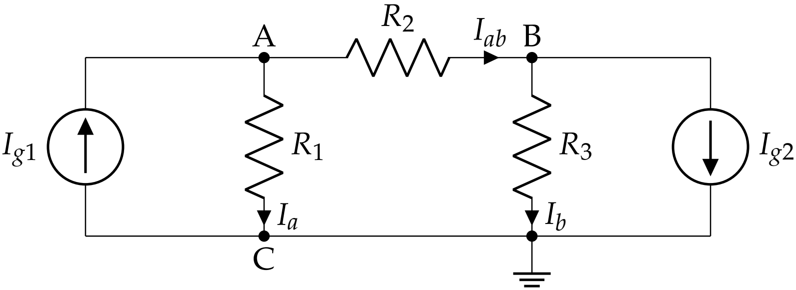
$$V_A = I_a \cdot R_1 \rightarrow I_a = \frac{V_A}{R_1}$$

$$V_B = I_b \cdot R_3 \rightarrow I_b = \frac{V_B}{R_3}$$

$$V_{AB} = I_{ab} \cdot R_2 \rightarrow I_{ab} = \frac{V_A - V_B}{R_2}$$

Método de los nudos

Combinar las ecuaciones



Nudo A

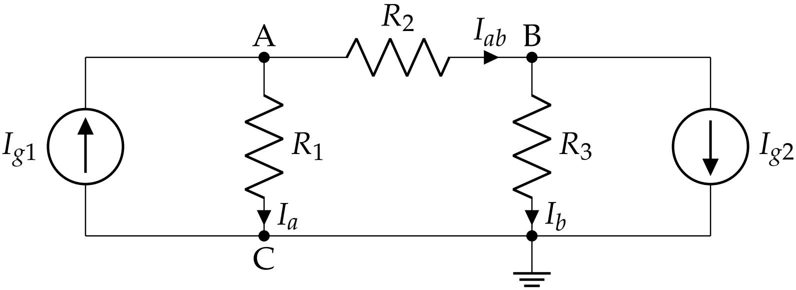
$$I_{g1} - \frac{V_A}{R_1} - \frac{V_A - V_B}{R_2} = 0 \rightarrow I_{g1} = V_A \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) - \frac{V_B}{R_2}$$

Nudo B

$$\frac{V_A - V_B}{R_2} - I_{g2} - \frac{V_B}{R_3} = 0 \rightarrow -I_{g2} = -\frac{V_A}{R_2} + V_B \cdot \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)$$

Método de los nudos

Expresión matricial



$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{g1} \\ -I_{g2} \end{bmatrix}$$

Método de los nudos

Ecuación general

$$\begin{bmatrix} \sum G_1 & -\sum G_{12} & \dots & -\sum G_{1n} \\ -\sum G_{21} & \sum G_2 & \dots & -\sum G_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\sum G_{n1} & -\sum G_{n2} & \dots & \sum G_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum I_{g1} \\ \sum I_{g2} \\ \vdots \\ \sum I_{gn} \end{bmatrix}$$

- $\sum G_i$ Suma de las conductancias conectadas al nudo i
- $\sum G_{ij}$ Suma de las conductancias conectadas entre los nudos i y j
- $\sum I_{gi}$ Suma algebraica de las corrientes de los generadores conectados en el nudo i (+ si entra al nudo, − en caso contrario)

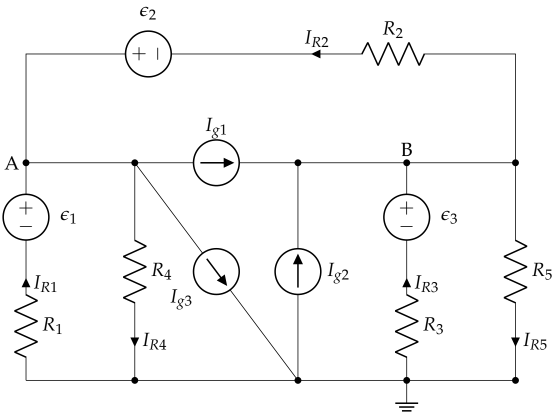
Importante: todos los generadores deben ser fuentes de corriente

Método de los nudos

Ejemplo

Determinar las tensiones en los nudos A y B

$$\epsilon_1 = 6\,\text{V}$$
$$\epsilon_2 = 12\,\text{V}$$
$$\epsilon_3 = 24\,\text{V}$$
$$I_{g1} = 15\,\text{A}$$
$$I_{g2} = 9\,\text{A}$$
$$I_{g3} = 6\,\text{A}$$
$$R_1 = R_3 = R_4 = R_5 = 2\,\Omega$$
$$R_2 = 1\,\Omega$$



Método de los nudos modificados

En el circuito puede haber **fuentes de tensión y de corriente**:

1. Se supone que, en cada nudo independiente, las corrientes **salen** de él
2. Cada nudo debe cumplir con la 1LK: $\sum I = 0$
3. En cada nudo, aplicar la siguiente expresión:

$$I_{i,j} = \frac{U_i - U_j + \sum \pm \epsilon_g}{\sum R}$$

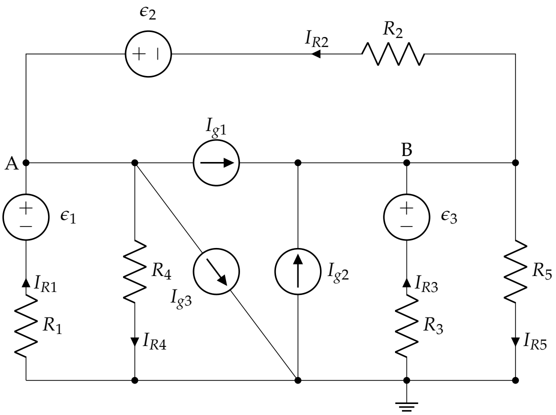
$I_{i,j}$ Corriente que va del nudo i al j
U_i Tensión del nudo del que se sale
U_j Tensión del nudo al que se llega
ϵ_g *fem* de los generadores por los que se pasa ($+$ si I sale por $+$ de la fuente, $-$ en caso contrario

Método de los nudos modificados

Ejemplo

Determinar las tensiones en los nudos A y B

$$\epsilon_1 = 6\,\mathrm{V}$$
$$\epsilon_2 = 12\,\mathrm{V}$$
$$\epsilon_3 = 24\,\mathrm{V}$$
$$I_{g1} = 15\,\mathrm{A}$$
$$I_{g2} = 9\,\mathrm{A}$$
$$I_{g3} = 6\,\mathrm{A}$$
$$R_1 = R_3 = R_4 = R_5 = 2\,\Omega$$
$$R_2 = 1\,\Omega$$



Circuitos lineales

Un circuito eléctrico es **lineal** si los elementos pasivos y activos que incluye son lineales:

- **Elemento pasivo**: la relación entre tensión y corriente es lineal (R, L, C)
- **Fuente dependiente**: su salida tiene una relación lineal con la magnitud del circuito de la que depende

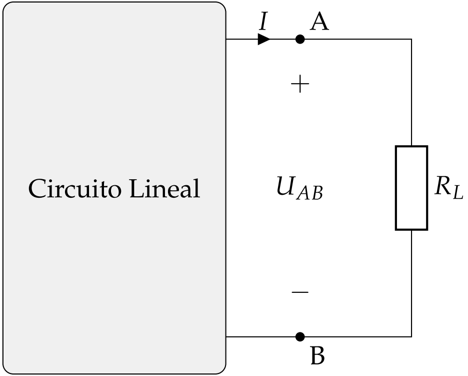
Propiedades:

- **Proporcionalidad**: Sea $y(t)$ la respuesta de un circuito lineal a una excitación $x(t)$. Si la excitación es multiplicada por una constante, $K \cdot x(t)$, la respuesta del circuito será modificada por la misma constante, $K \cdot y(t)$.
- **Superposición**: La respuesta de un circuito lineal a varias fuentes de excitación actuando simultáneamente es igual a la suma de las respuestas que se tendrían cuando actuase cada una de ellas por separado:

$$y(t) = \sum_i y_i(t)$$

Teoremas de Thévenin y Norton

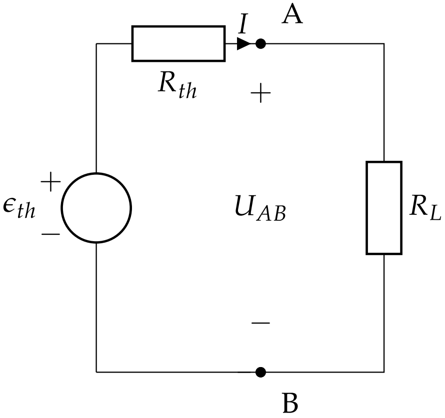
- Interés solo en **una parte** del circuito
- Transforman red compleja en una equivalente **más simple**



Teoremas de Thévenin y Norton

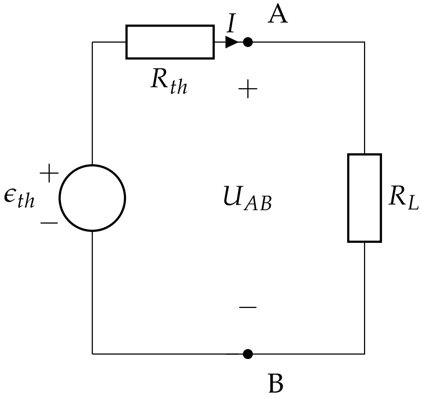
Thévenin

Cualquier **red lineal** compuesta por elementos activos y pasivos puede sustituirse, desde el punto de vista de sus terminales externos AB, por una **fuente de tensión** (generador de Thévenin, ϵ_{th}) en **serie** con una resistencia (resistencia de Thévenin, R_{th}).



Teoremas de Thévenin y Norton

Cálculo del equivalente de Thévenin



- Circuito Abierto ($R_L \to \infty, \quad U_{AB} = U_{oc}$)

$$\boxed{\epsilon_{th} = U_{oc}}$$

- Cortocircuito ($R_L = 0, \quad I = I_{sc}$)

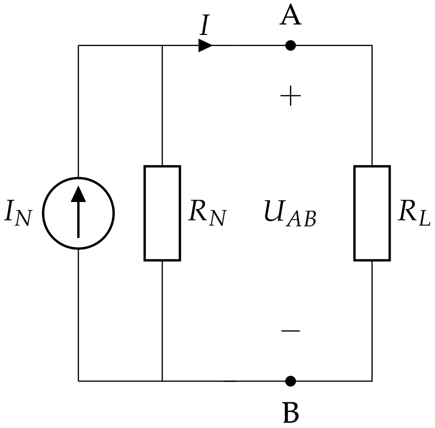
$$\boxed{R_{th} = \frac{\epsilon_{th}}{I_{sc}} = \frac{U_{oc}}{I_{sc}}}$$

Importante: Si no hay fuentes dependientes, R_{th} se puede calcular como la **resistencia** equivalente desde los terminales AB (anulando las fuentes independientes)

Teoremas de Thévenin y Norton

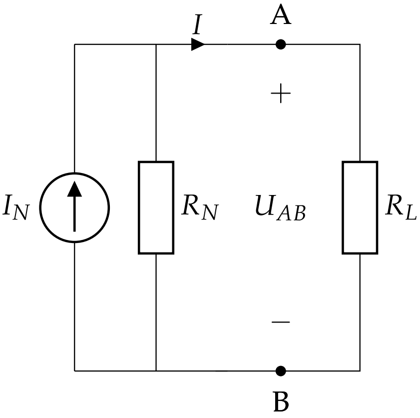
Norton

Cualquier **red lineal** compuesta por elementos activos y pasivos puede sustituirse, desde el punto de vista de sus terminales externos AB, por una **fuente de corriente** (generador de Norton, I_N) en **paralelo** con una resistencia (resistencia de Norton, R_N).



Teoremas de Thévenin y Norton

Cálculo del equivalente de Norton



- Cortocircuito ($R_L = 0, \quad I = I_{sc}$)

$$\boxed{I_N = I_{sc}}$$

- Circuito Abierto ($R_L \to \infty, \quad U_{AB} = U_{oc}$)

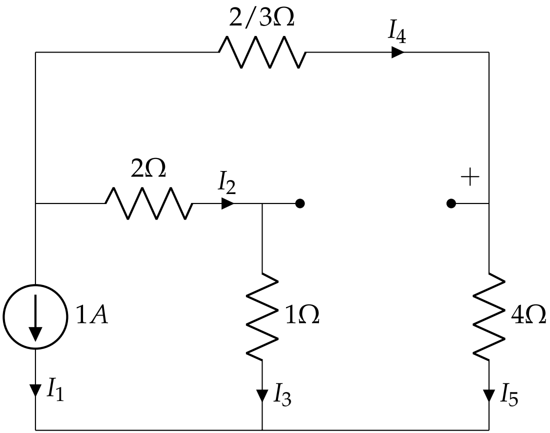
$$\boxed{R_N = \frac{U_{oc}}{I_N} = \frac{U_{oc}}{I_{sc}}}$$

Importante: Si no hay fuentes dependientes, R_N se puede calcular como la **resistencia** equivalente desde los terminales AB (anulando las fuentes independientes)

Teoremas de Thévenin y Norton

Ejemplo

Determinar el equivalente de Thévenin del circuito de la figura visto desde los terminales $A - B$, y la potencia que se disiparía si se conectase una resistencia de 5Ω.

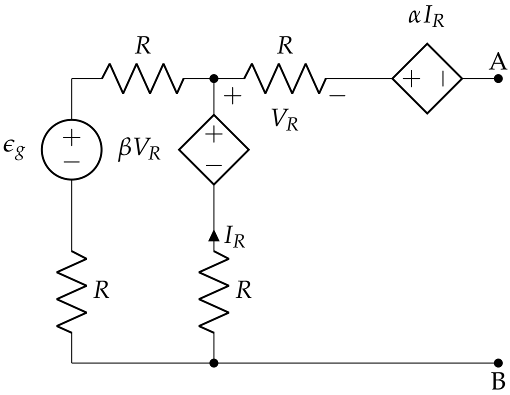


Teoremas de Thévenin y Norton

Ejemplo

En el circuito de la figura, calcular el equivalente de Norton.

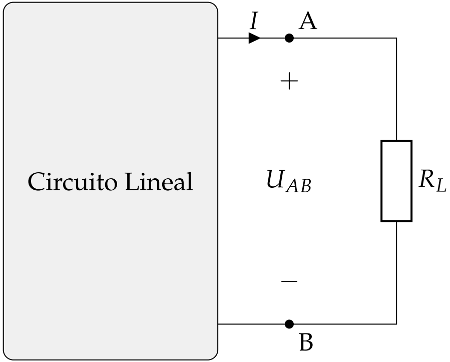
Datos: $R = 1\Omega$; $\epsilon_g = 10V$; $\alpha = \beta = 1$



Teorema de la máxima transferencia de potencia

Planteamiento

¿Qué resistencia R_L hay que conectar en los terminales AB para que el circuito entregue la **máxima potencia disponible**?

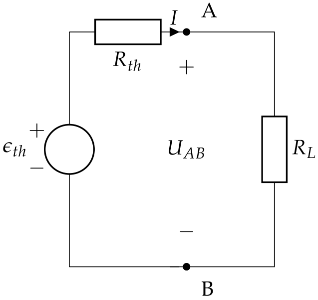


Se aplica el **equivalente de Thévenin**

Teorema de la máxima transferencia de potencia

Ecuaciones

Calculamos la potencia activa en la impedancia de carga Z_L:



$$I = \frac{\epsilon_{th}}{R_{th} + R_L}$$

$$P_L = I^2 \cdot R_L$$

$$\boxed{P_L = \frac{\epsilon_{th}^2}{(R_{th} + R_L)^2} \cdot R_L}$$

La condición de máximo es:

$$\boxed{\frac{\partial P_L}{\partial R_L} = 0}$$

Teorema de la máxima transferencia de potencia

Resistencia

$$\frac{\partial P_L}{\partial R_L} = \epsilon_{th}^2 \cdot \left[\frac{1}{(R_L + R_{th})^2} - 2 \cdot \frac{R_L}{(R_L + R_{th})^3} \right] = \frac{\epsilon_{th}^2 \cdot (R_{th} - R_L)}{(R_L + R_{th})^3}$$

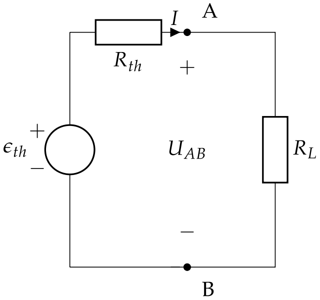
Aplicando la condición de máximo:

$$\frac{\partial P_L}{\partial R_L} = 0 \Rightarrow \boxed{R_L = R_{th}}$$

Teorema de la máxima transferencia de potencia

Impedancia de carga

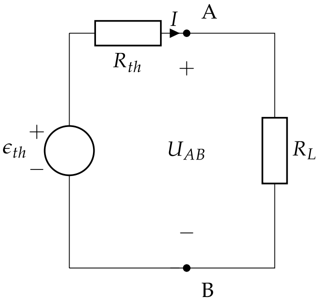
Dado un circuito lineal (del que se puede calcular su equivalente de Thévenin) ...



... la resistencia de carga que hay que conectar entre sus terminales AB para obtener la máxima potencia disponible es:

$$\boxed{R_L = R_{th}}$$

La máxima potencia disponible en la carga es:



$$\left.\begin{array}{c} R_L = R_{th} \\ P_L = \frac{\epsilon_{th}^2}{(R_{th}+R_L)^2} \cdot R_L \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{P_L = \frac{\epsilon_{th}^2}{4R_{th}}}$$

Importante

Esta expresión es **válida únicamente** para calcular la máxima transferencia de potencia

Teorema de superposición

Elementos lineales

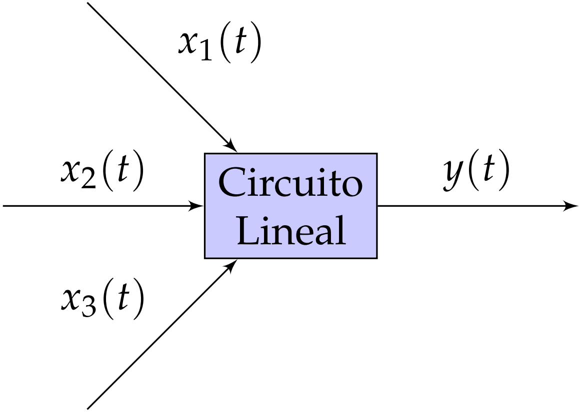
Un circuito eléctrico es lineal si los elementos pasivos y activos que incluye son lineales:

- Un **elemento pasivo** es lineal si la relación entre la tensión entre sus terminales y la corriente que lo recorre es lineal: **resistencias, condensadores y bobinas**.
- Una **fuente dependiente** es lineal si su salida (tensión o corriente) tiene una relación lineal con la magnitud del circuito de la que depende.
- Un circuito lineal tiene dos propiedades:
  - Homogeneidad o **proporcionalidad**
  - Aditividad o **superposición**

Teorema de superposición

La respuesta de un **circuito lineal** a varias fuentes de excitación actuando simultáneamente es igual a la suma de las respuestas que se tendrían cuando actuase cada una de ellas por separado

$$y(t) = \sum_i y_i(t)$$



Procedimiento

1. Se apagan todas las fuentes **independientes** del circuito menos una
   - Las fuentes de tensión se sustituyen por un cortocircuito ($U = 0$)
   - Las fuentes de corriente se sustituyen por un circuito abierto ($I = 0$)
   - Las fuentes dependientes no se modifican
2. Se analiza el circuito, obteniendo la respuesta individual a la fuente que permanece activa
3. Se repite este procedimiento para cada una de las fuentes **independientes** del circuito
4. La respuesta total del circuito es la suma de las respuestas individuales

Teorema de superposición

Ejemplo

Usar el principio de superposición para encontrar U_0 en el circuito de la figura.