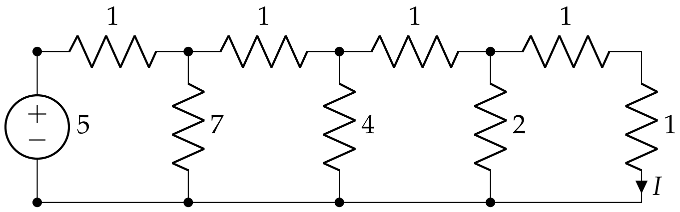
Problema 1.

En el circuito de la figura los valores se dan en voltios y ohmios, según corresponda. Determinar el valor de la intensidad I aplicando la propiedad de proporcionalidad.

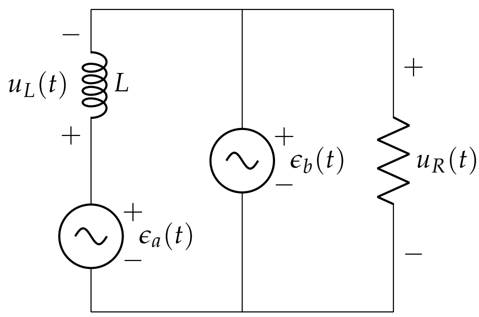


Suponiendo que $I = 1\,\mathrm{A}$, resolvemos el circuito hacia el generador. Obtenemos $\epsilon = 11\,\mathrm{V}$. Por tanto, con un generador de $5\,\mathrm{V}$ la corriente será $I = 5/11\,\mathrm{A}$ (regla de tres simple).

Problema 2.

En el circuito de la figura determina:

- $u_R(t)$ y $u_L(t)$.
- Balance de potencias.



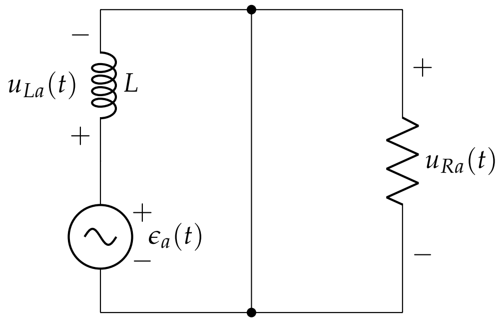
Datos:

$$
\begin{aligned}
e_a(t) &= 3\sqrt{2}\sin(10^3 t)\,\mathrm{V} \\
e_b(t) &= 30\sqrt{2}\sin(10^4 t)\,\mathrm{V} \\
R &= 30\,\Omega \\
L &= 3\,\mathrm{mH}
\end{aligned}
$$

Solución

Dado que las fuentes trabajan a frecuencias diferentes, hay que resolver mediante superposición.

Activamos una de las fuentes:

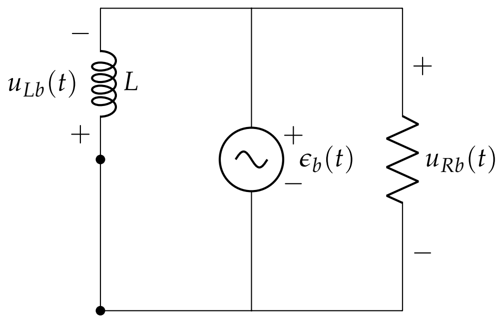


La resistencia está cortocircuitada. Por tanto:

$$u_{Ra}(t) = 0\,\mathrm{V}$$
$$u_{La}(t) = \epsilon_a(t)$$

En este circuito la potencia disipada por la resistencia es $P_{Ra} = 0\,\mathrm{W}$ y, en consecuencia, la potencia entregada por el generador es $P_{\epsilon_a} = 0\,\mathrm{W}$.

Hacemos el análisis con la otra fuente:



En este circuito:

$$u_{Rb}(t) = \epsilon_b(t)$$
$$u_{Lb}(t) = -\epsilon_b(t)$$

El balance de potencias es:

$$P_{Rb} = \frac{\epsilon_b^2}{R_b} = 30\,\mathrm{W} = P_{\epsilon_b}$$

Por tanto:

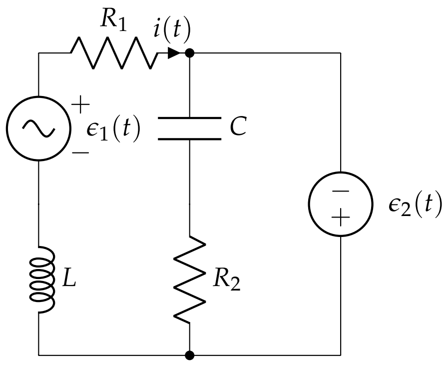
$$
\begin{aligned}
u_R(t) &= u_{Ra}(t) + u_{Rb}(t) = 30\sqrt{2}\sin(10^4 t) \\
u_L(t) &= u_{La}(t) + u_{Lb}(t) = 3\sqrt{2}\sin(10^3 t) - 30\sqrt{2}\sin(10^4 t)
\end{aligned}
$$

Además, dado que las dos señales de los generadores son ortogonales, podemos sumar las potencias calculadas en cada circuito:

$$
\begin{aligned}
P_R &= P_{Ra} + P_{Rb} = 30\,\mathrm{W} \\
P_\epsilon &= P_{\epsilon_a} + P_{\epsilon_b} = 30\,\mathrm{W}
\end{aligned}
$$

Problema 3.

El circuito de la figura se encuentra en régimen permanente. Determina analíticamente la expresión de $i(t)$, así como las potencias entregadas por los generadores y disipadas por las resistencias R_1, y R_2.

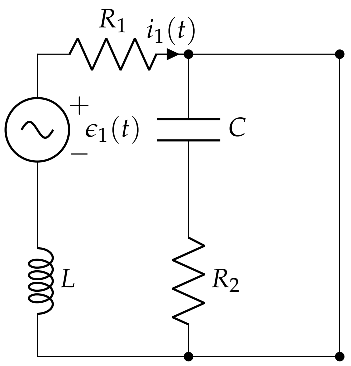


Datos:

$$
\begin{aligned}
e_1(t) &= 50\sin(1000t)\,\mathrm{V}\\
e_2(t) &= 30\,\mathrm{V}\\
R_1 &= 6\,\Omega\\
R_2 &= 6\,\Omega\\
L &= 8\,\mathrm{mH}\\
C &= 10\,\mu\mathrm{F}
\end{aligned}
$$

Solución

Aplicamos superposición.
Analizamos con la fuente de corriente alterna:



La rama $R_2 - C$ está cortocircuitada y, por tanto, podemos prescindir de ella:

$$
\begin{aligned}
\overline{Z}_1 &= R_1 + jX_L = 6 + 8j\mathrm{A}\\
\overline{I}_1 &= \overline{\epsilon}_1/\overline{Z}_1 = 5\sqrt{2}/2\underline{/-53{,}13°}\mathrm{A}
\end{aligned}
$$

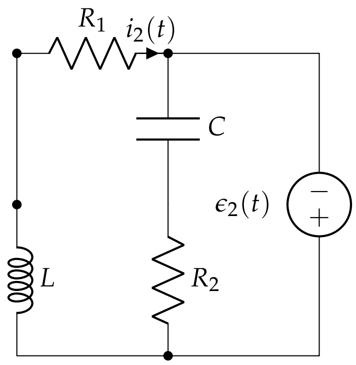
En el dominio del tiempo obtenemos:

$$i_1(t) = 5\sin(1000t - 0{,}9273)\,\mathrm{A}$$

En cuanto al balance de potencias:

$$\begin{aligned} P_{R11} &= I_1^2 R_1 = 75\,\mathrm{W} \\ P_{R21} &= 0\,\mathrm{W} \\ P_{\epsilon_1} &= \Re(\overline{\epsilon}_1 \cdot \overline{I}_1^*) = 75\,\mathrm{W} \end{aligned}$$

Analizamos con la fuente de corriente continua:



En este circuito sustituimos la bobina por un cortocircuito y el condensador por un circuito abierto. En consecuencia:

$$i_2(t) = \epsilon_2(t)/R_1 = 5\,\mathrm{A}$$

En cuanto al balance de potencias:

$$\begin{aligned} P_{R12} &= I_2^2 \cdot R_1 = 150\,\mathrm{W} \\ P_{R22} &= 0\,\mathrm{W} \\ P_{\epsilon 2} &= \epsilon_2 \cdot I_2 = 150\,\mathrm{W} \end{aligned}$$

Por tanto:

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) = 5 + 5\sin(1000t - 0{,}9273)\,\mathrm{A}$$

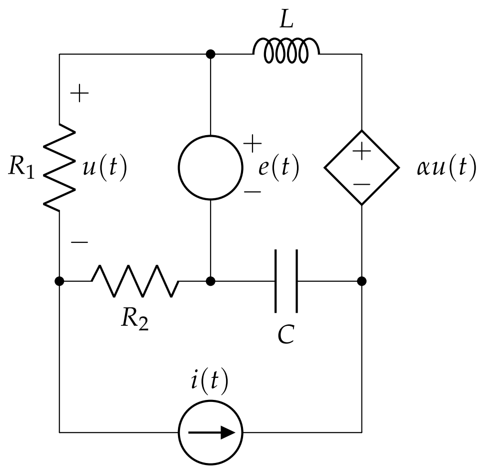
Además, como las señales son ortogonales, podemos hacer el balance de potencias conjunto con los dos circuitos:

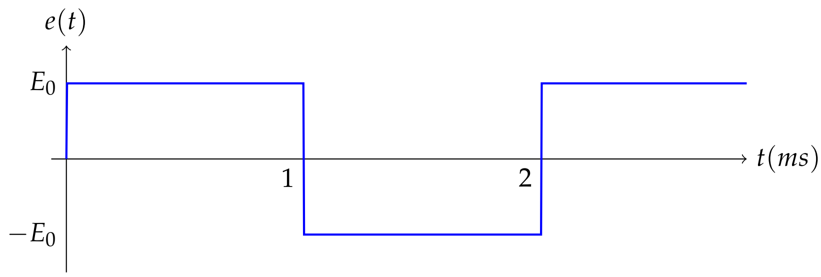
$$\begin{aligned} P_{R1} &= P_{R11} + P_{R12} = 225\,\mathrm{W} \\ P_{R2} &= P_{R21} + P_{R22} = 0\,\mathrm{W} \\ P_{\epsilon} &= P_{\epsilon 1} + P_{\epsilon 2} = 225\,\mathrm{W} \end{aligned}$$

Problema 4.

En el circuito de la figura el generador de tensión $e(t)$ es de onda cuadrada simétrica, tal y como se muestra en la figura. La potencia total disipada por las resistencias R_1 y R_2 es de 40 W. Determina:

- Valor máximo E_0 de la onda cuadrada.
- Forma de onda de la tensión $u(t)$ y su valor eficaz.
- Potencias disipadas en R_1 y R_2 si la frecuencia de la onda $e(t)$ aumenta al doble.





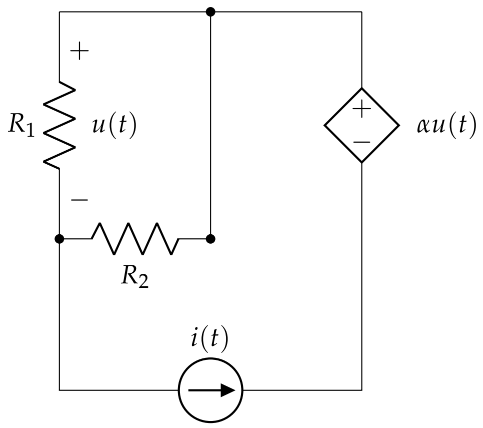
Datos:

$$
\begin{aligned}
i(t) &= 1\,\mathrm{A} \\
R_1 &= 60\,\Omega \\
R_2 &= 40\,\Omega \\
L &= 10\,\mathrm{mH} \\
C &= 1\,\mu\mathrm{F}
\end{aligned}
$$

Solución

Aplicamos superposición.

Activamos en primer lugar la fuente de corriente porque es de la que tenemos información completa para resolver.

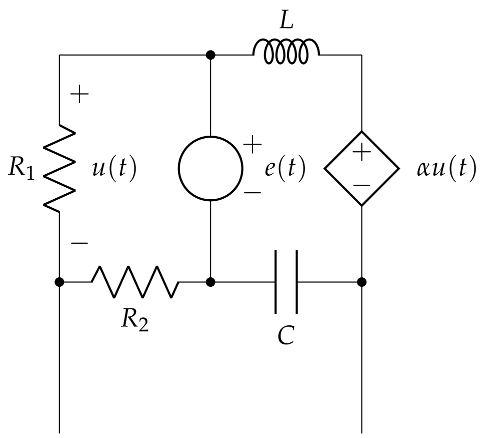


Podemos sustituir las dos resistencias por su equivalente paralelo, $R_p = 24\,\Omega$, y calcular la potencia y la tensión:

$$U_{Ig} = I_g R_p = 24\,\mathrm{V}$$
$$P_{R_1R_2I_g} = I_g^2 \cdot R_p = 24\,\mathrm{W}$$

Este último resultado podemos utilizarlo en el circuito de la otra fuente, porque las señales son ortogonales. Por tanto:

$$P_{R1R2} = P_{R1R2e} + P_{R1R2I_g} \rightarrow P_{R1R2e} = 16\,\mathrm{W}$$



En este circuito la fuente está conectada en paralelo con la conexión serie de las dos resistencias. Así, la potencia disipada por las dos resistencias en este circuito es:

$$P_{R1R2e} = \frac{E^2}{R_1 + R_2} = \frac{E^2}{100} = 16\,\mathrm{W} \rightarrow E = 40\,\mathrm{V}$$

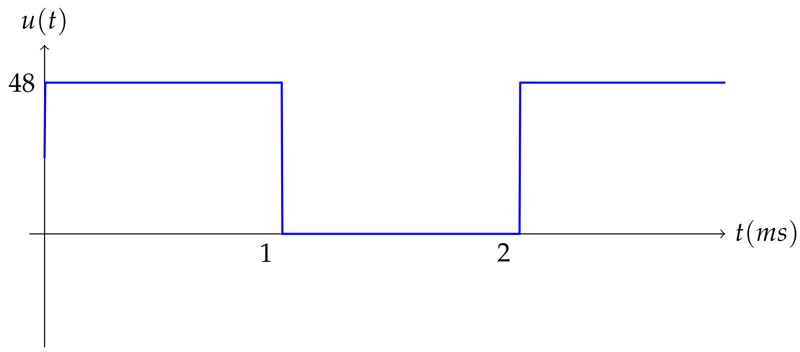
Teniendo en cuenta que en un tren de pulsos simétrico el valor eficaz, E, coincide con el valor máximo, E_0, obtenemos $E_0 = 40\,\mathrm{V}$.

Por otra parte, en este circuito podemos obtener la tensión en la resistencia R_1 mediante un divisor de tensión:

$$u_e(t) = e(t) \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 0{,}6 \cdot e(t)$$

El resultado es un tren de pulsos simétrico con valor máximo $U_{e0} = 24\,\mathrm{V}$. Combinando los dos circuitos obtenemos:

$$u(t) = u_{Ig}(t) + u_e(t) = 24 + 0{,}6 \cdot e(t)$$



Para calcular el valor eficaz de esta señal podemos aplicar la definición:

$$\begin{aligned} U &= \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\mathrm{d}t} = \\ &= \sqrt{500\int_0^{10^{-3}} 48^2 \mathrm{d}t} = \\ &= 24\sqrt{2}\,\mathrm{V} \end{aligned}$$

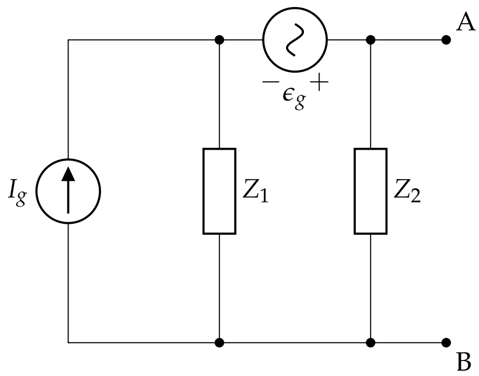
También podemos aprovechar el hecho de que sean señales ortogonales:

$$P_{R1} = \frac{U^2}{R_1} = \frac{U_{Ig}^2}{R_1} + \frac{U_e^2}{R_1} \rightarrow U^2 = U_{Ig}^2 + U_e^2$$

Por tanto, $U = 24\sqrt{2}\,\mathrm{V}$.

Problema 5.

Obtén los generadores equivalentes de Thévenin y Norton del circuito de la figura respecto de A y B.



Datos:

$$\begin{aligned}\overline{\epsilon_g} &= 32 + 12j\,\text{V}\\ \overline{I} &= 2\underline{/0}\,\text{A}\\ \overline{Z}_1 &= 8 - 6j\,\Omega\\ \overline{Z}_2 &= 8 + 6j\,\Omega\end{aligned}$$

Solución

Para obtener el generador dejamos el circuito en abierto y transformamos el generador de corriente en fuente de tensión. En el circuito resultante calculamos la corriente:

$$\overline{I} = \frac{\overline{\epsilon}_g + \overline{\epsilon}_1}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2} = 3\underline{/0°}\text{A}$$

Con esta corriente podemos calcular la tensión en la impedancia Z_2:

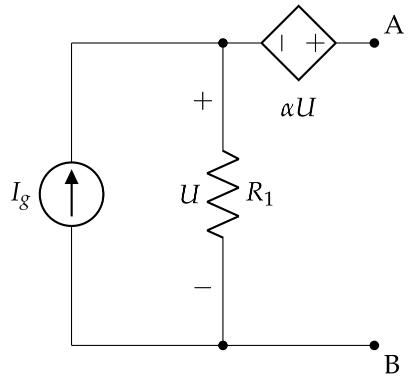
$$\overline{U}_{AB} = \overline{I} \cdot \overline{Z}_2 = 24 + 18j = 30\underline{/36{,}87°}\text{V} = \overline{\epsilon}_{th}$$

Para obtener la impedancia apagamos las fuentes independientes. La impedancia vista desde AB es:

$$\overline{Z}_{AB} = \overline{Z}_1 || \overline{Z}_2 = 6{,}25\underline{/0°}\Omega = \overline{Z}_{th}$$

Problema 6.

Obtén el generador equivalente de Thévenin del circuito de la figura respecto de A y B.



Solución

Por una parte:

$$U_{AB} = \alpha U + U = (1 + \alpha)U$$

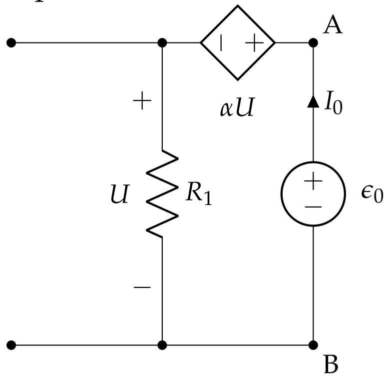
Además,

$$U = I_g \cdot R_1$$

Por tanto:

$$U_{AB} = (1 + \alpha) I_g R_1 = \epsilon_{th}$$

Para calcular la impedancia apagamos la fuente independiente. Como la fuente dependiente permanece, es necesario aplicar un generador de prueba a la salida.



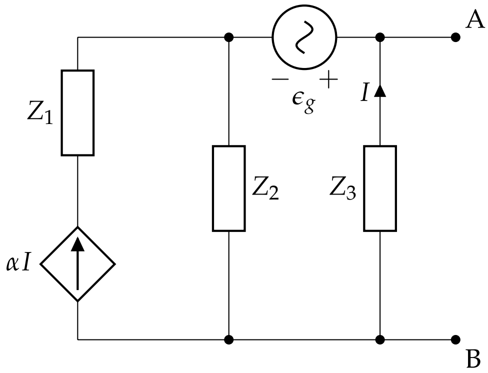
$$\epsilon_0 = (1 + \alpha)U$$
$$U = I_0 R_1$$

Por tanto,

$$Z_{th} = \frac{\epsilon_0}{I_0} = (1 + \alpha) R_1$$

Problema 7.

Obtén el generador equivalente de Thévenin del circuito de la figura respecto de A y B.



Datos:

$$
\begin{aligned}
\overline{\epsilon_g} &= 12 - 16j\,\mathrm{V} \\
\overline{Z}_1 &= 1 - j\,\Omega \\
\overline{Z}_2 &= 1 + j\,\Omega \\
\overline{Z}_3 &= 5 + 3j\,\Omega \\
\alpha &= 2
\end{aligned}
$$

Solución

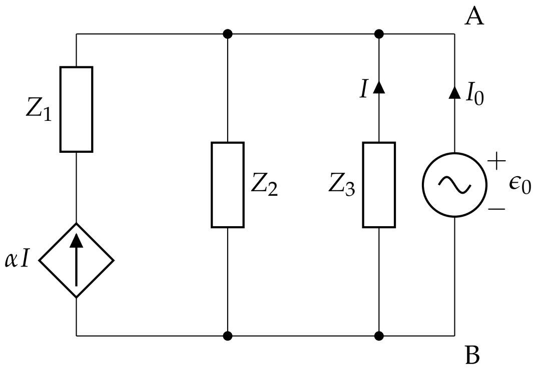
Dejamos el circuito en abierto y calculamos la tensión en AB:

$$
\begin{aligned}
\overline{U}_{AB} &= \overline{\epsilon}_g + (1+\alpha)\overline{I}\cdot\overline{Z}_2 \\
\overline{U}_{AB} &= -\overline{I}\cdot\overline{Z}_3
\end{aligned}
$$

Combinando estas ecuaciones obtenemos la tensión:

$$\overline{\epsilon}_{th} = \overline{U}_{AB} = \frac{\overline{\epsilon}_g}{1+(1+\alpha)\frac{\overline{Z}_2}{\overline{Z}_3}} = 6 - 10j = 11{,}66\underline{/-59{,}04°}\mathrm{V}$$

Para obtener la impedancia apagamos las fuentes independientes. Como hay fuentes dependientes debemos aplicar una fuente de prueba a la salida del circuito, con fuerza electromotriz $\overline{\epsilon}_0$ y corriente inyectada $\overline{I}_0$.



$$\overline{\epsilon}_0 = [(1+\alpha)\overline{I} + \overline{I}_0] \cdot \overline{Z}_2$$
$$\overline{\epsilon}_0 = -\overline{I} \cdot \overline{Z}_3$$

Combinando ambas expresiones obtenemos:

$$\overline{Z}_{th} = \frac{\overline{\epsilon}_0}{\overline{I}_0} = \frac{\overline{Z}_2 \cdot \overline{Z}_3}{(1+\alpha)\overline{Z}_2 + \overline{Z}_3} = 0{,}64 + 0{,}52j\Omega$$

Para obtener la máxima potencia disponible hay que conectar una impedancia:

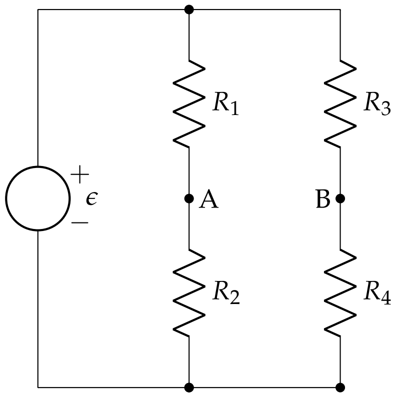
$$\overline{Z}_L = \overline{Z}^*_{th} = 0{,}64 - 0{,}52j\Omega$$

Esta impedancia disipará una potencia:

$$P_L = \frac{\epsilon^2_{th}}{4 \cdot R_{th}} = 53{,}11\,\text{W}$$

Problema 8.

Obtén el generador equivalente de Thévenin del circuito de la figura respecto de A y B. A partir de este generador, calcula la resistencia a colocar en AB para obtener la máxima potencia, calculando esta potencia y la potencia entregada por el generador ϵ.



Datos:

$$\epsilon = 54\,\text{V}$$
$$R_1 = R_4 = 8\,\Omega$$
$$R_2 = R_3 = 10\,\Omega$$

Solución

Para obtener la tensión U_{AB} aplicamos divisor de tensión en ambas ramas:

$$U_A = \epsilon \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$
$$U_B = \epsilon \cdot \frac{R_4}{R_3 + R_4}$$
$$U_{AB} = \epsilon \cdot (\frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_4}{R_3 + R_4}) = 6\,\text{V} = \epsilon_{th}$$

Para calcular la resistencia equivalente apagamos la fuente de tensión. En el circuito resultante obtenemos:

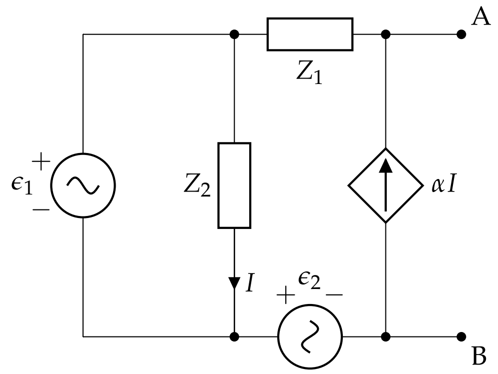
$$R_{th} = (R_1||R_2) + (R_3||R_4) = 80/9\Omega$$

Para obtener la máxima potencia hay que conectar una resistencia $R_L = R_{th}$. Con esta resistencia el balance de potencias es:

$$P_L = \frac{\epsilon_{th}^2}{4R_{th}} = 1{,}0125\,\text{W}$$
$$P_\epsilon = 2 \cdot P_L = 2{,}025\,\text{W}$$

Problema 9.

Obtén el generador equivalente de Thévenin del circuito de la figura respecto de A y B. A partir de este generador, calcula la impedancia a colocar en AB para obtener la máxima potencia, calculando esta potencia.



Datos:

$$\overline{\epsilon_1} = 10\underline{/0}\,\text{V}$$
$$\overline{\epsilon_2} = 10j\,\text{V}$$
$$\overline{Z}_1 = 4 - 3j\,\Omega$$
$$\overline{Z}_2 = 3 + 4j\,\Omega$$
$$\alpha = 2$$

Solución

La tensión en circuito abierto es:

$$\overline{U}_{AB} = \alpha\overline{I} \cdot \overline{Z}_1 + \overline{\epsilon}_1 + \overline{\epsilon}_2$$

siendo $\epsilon_1 = \overline{Z}_2 \cdot \overline{I}$. Por tanto,

$$\epsilon_{th} = \alpha \cdot \overline{\epsilon}_1 \cdot \frac{\overline{Z}_1}{\overline{Z}_2} + \overline{\epsilon}_1 + \overline{\epsilon}_2 = 10 - 10j\text{V}$$

Para obtener la impedancia apagamos las fuentes independientes. Al apagar la fuente ϵ_1, la impedancia Z_2 queda cortocircuitada y, por tanto, $I = 0$. En consecuencia, la fuente dependiente también queda apagada y obtenemos:

$$\overline{Z}_{th} = \overline{Z}_1 = 4 - 3j\text{V}$$

Para obtener la máxima potencia debemos conectar la impedancia:

$$\overline{Z}_L = \overline{Z}_{th}^{*} = 4 + 3j\text{V}$$

El balance de potencias es:

$$
\begin{aligned}
P_L &= \frac{\epsilon_{th}^2}{4 \cdot R_{th}} = 12{,}5\,\mathrm{W} \\
P_\epsilon &= 2 \cdot P_L = 25\,\mathrm{W}
\end{aligned}
$$

Problema 10.

En el circuito de la figura calcula:

1. La fuerza electromotriz del generador equivalente de Thévenin respecto de A y B, $\overline{\epsilon_{th}}$.
2. La impedancia del generador equivalente de Thévenin respecto de A y B, $\overline{Z_{th}}$.
3. La impedancia de carga que se debe conectar entre A y B para conseguir la máxima potencia disponible.
4. La potencia activa entregada entre A y B cuando se conecta cada una de las siguientes impedancias de carga. Comenta los resultados obtenidos.
   - $\overline{Z_L} = \overline{Z_{th}}$.
   - $\overline{Z_L} = R_{th}$ (parte resistiva de $\overline{Z_{th}}$).
   - $\overline{Z_L} = jX_{th}$ (parte reactiva de $\overline{Z_{th}}$).
   - Impedancia calculada en el apartado 3.

Datos:

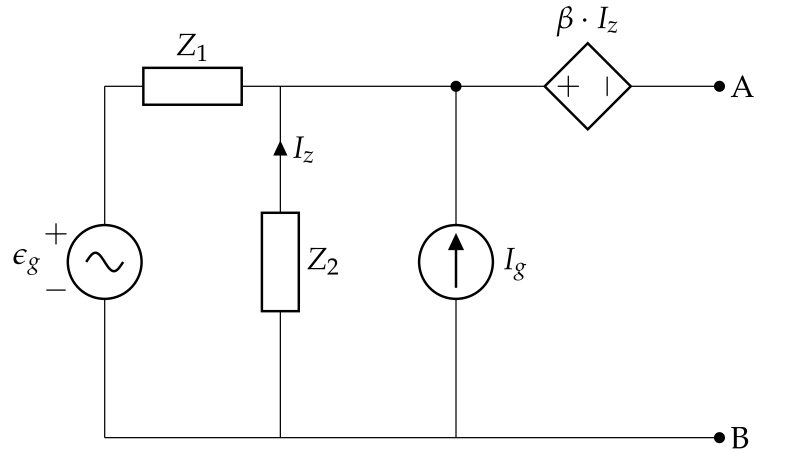
$$\overline{Z}_1 = 3 + j4\Omega$$

$$\overline{Z}_2 = 2 + j\Omega$$

$$\overline{\epsilon}_g = 10\angle 30^\circ V$$

$$\overline{I}_g = 2\angle 15^\circ A$$

$$\beta = 5\Omega$$



Solución

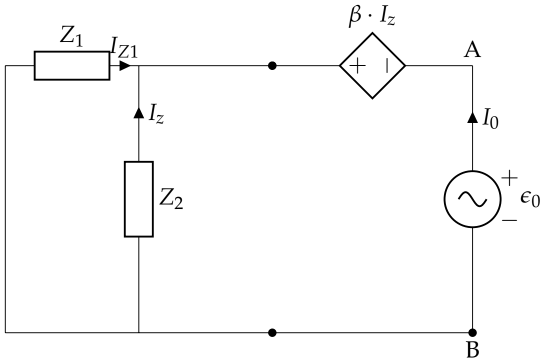
Calculamos la tensión en circuito abierto, planteando las siguientes ecuaciones:

$$\overline{I}_g + \overline{I}_Z + \overline{I}_{Z1} = 0$$
$$-\overline{I}_Z \cdot \overline{Z}_2 = \overline{\epsilon}_g - \overline{I}_{Z1} \cdot \overline{Z}_1$$
$$\overline{U}_{AB} = -\beta \cdot \overline{I}_Z - \overline{I}_Z \cdot \overline{Z}_2$$

Combinando estas ecuaciones obtenemos:

$$\overline{U}_{AB} = (\beta + \overline{Z}_2) \cdot \frac{\overline{\epsilon}_g + \overline{I}_g \cdot \overline{Z}_1}{\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2} = 138{,}48 + 3{,}99j\text{V} = \overline{\epsilon}_{th}$$

Para calcular la impedancia apagamos las fuentes independientes y conectamos un generador de prueba en AB:



$$\overline{I}_0 + \overline{I}_Z + \overline{I}_{Z1} = 0$$
$$\overline{I}_Z \cdot \overline{Z}_2 = \overline{I}_{Z1} \cdot \overline{Z}_1$$
$$\overline{\epsilon}_0 = -\beta \cdot \overline{I}_Z - \overline{I}_Z \cdot \overline{Z}_2$$

Por tanto,

$$\overline{Z}_{th} = \frac{\overline{\epsilon}_0}{\overline{I}_0} = \frac{\beta + \overline{Z}_2}{1 + \overline{Z}_2/\overline{Z}_1} = 4{,}8 + 1{,}4j\Omega$$

La potencia en AB depende de la carga conectada:

$$P_{AB} = R_L \cdot \frac{\epsilon_{th}^2}{|\overline{Z}_L + \overline{Z}_{th}|^2}$$

- Cuando $\overline{Z}_L = \overline{Z}_{th}$, $P_{AB} = 17{,}15\,\mathrm{W}$
- Cuando $\overline{Z}_L = R_{th}$, $P_{AB} = 18{,}22\,\mathrm{W}$
- Cuando $\overline{Z}_L = jX_{th}$, $P_{AB} = 0\,\mathrm{W}$
- Cuando $\overline{Z}_L = \overline{Z}_{th}^*$, $P_{AB} = 18{,}61\,\mathrm{W}$

Comprobamos que el máximo valor se obtiene cuando conectamos la impedancia de Thévenin conjugada.

Problema 11.

En el circuito de la figura calcula:

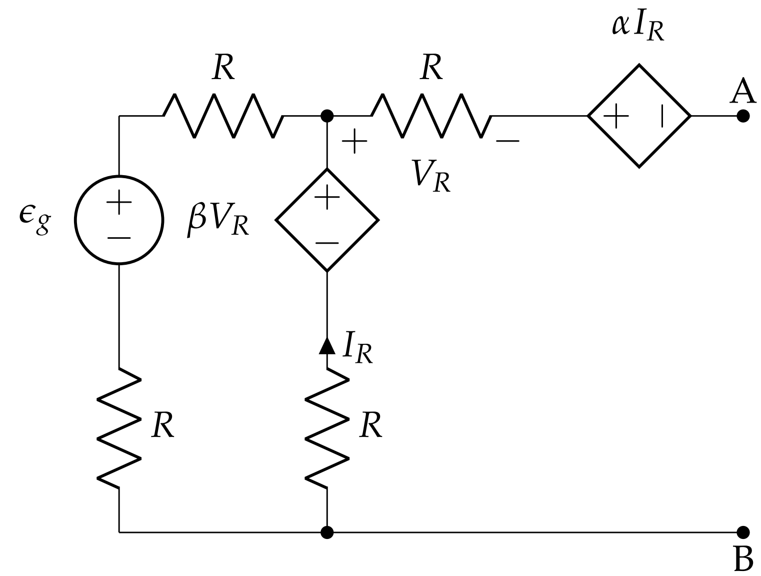
1. La corriente del generador equivalente de Norton respecto de A y B, I_N.
2. La resistencia del generador equivalente de Norton respecto de A y B, R_N.
3. La resistencia de carga que se debe conectar entre A y B para conseguir la máxima potencia disponible, y el valor de esta potencia.

Datos:

$R = 1\,\Omega$

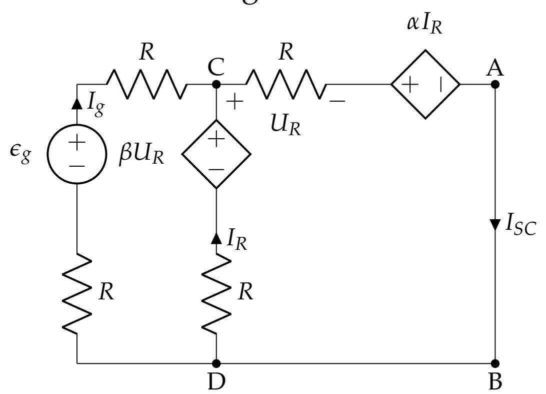
$\epsilon_g = 10\,\mathrm{V}$

$\alpha = \beta = 1$



Solución

Para calcular el equivalente de Norton cortocircuitamos la salida del circuito. Podemos escribir las siguientes ecuaciones:

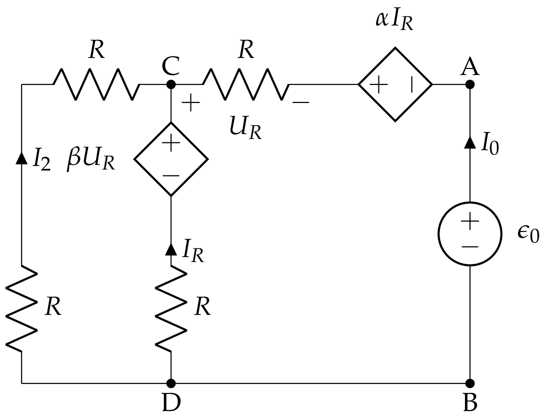


$$
\begin{aligned}
U_R &= R \cdot I_{sc} \\
I_g + I_R &= I_{sc} \\
U_{CD} &= \epsilon_g - 2 \cdot R \cdot I_g \\
U_{CD} &= \beta \cdot U_r - I_R \cdot R \\
U_{CD} &= U_R + \alpha \cdot I_R
\end{aligned}
$$

Combinando estas ecuaciones obtenemos:

$$I_{sc} = 10/3\text{A} = I_N$$

Para obtener la resistencia equivalente apagamos la fuente independiente y conectamos un generador de prueba en AB:



$$
\begin{aligned}
U_R &= -I_0 \cdot R \\
I_2 + I_R + I_0 &= 0 \\
U_{CD} &= -2R \cdot I_2 \\
U_{CD} &= \beta \cdot U_R - I_R \cdot R \\
U_{CD} &= U_R + \alpha \cdot I_R + \epsilon_0
\end{aligned}
$$

Combinando estas ecuaciones obtenemos:

$$R_{th} = \frac{\epsilon_0}{I_0} = 2\,\Omega$$

Por tanto, habrá que conectar una resistencia de $2\,\Omega$ para obtener la máxima potencia disponible.