Demostración de **raíces complejas** dando lugar a **oscilaciones atenuadas**

La respuesta natural de un circuito de 2º orden es una combinación lineal de funciones exponenciales:

$$f_n(t) \;=\; K_1 \cdot e^{s_1 \cdot t} \;+\; K_2 \cdot e^{s_2 \cdot t}$$

Donde s_1 y s_2 son las soluciones de la ec. característica. Si estas **soluciones** son **complejas**:

$$f_n(t) \;=\; K_1 \cdot e^{(-a + \mathrm{j}\, b)\cdot t} \;+\; K_2 \cdot e^{(-a - \mathrm{j}\, b)\cdot t} \tag{1}$$

Donde se ha tenido en cuenta que las soluciones **deben ser complejas conjugadas**, debido a este teorema: “si un polinomio en una variables con coefs. reales tiene una raíz compleja, el conjugado también es raíz del polinomio”.

Usando la fórmula de Euler, vamos a **demostrar** que esta expresión es equivalente a una **suma** de funciones **seno** y **coseno**

La fórmula de Euler establece:

$$e^{jt} \;=\; \cos(t) \,+\, j\,\sin(t)\,, \qquad e^{-jt} \;=\; \cos(t) \,-\, j\,\sin(t)$$

Sustituyendo en (1):

$$e^{-a\cdot t} \cdot (K_1 \cdot e^{jbt} \;+\; K_2 \cdot e^{-jbt}) \;=\; e^{-a\cdot t} \cdot (K_1 \cdot [\cos(b\,t) + j\,\sin(b\,t)] \;+\; K_2 \cdot [\cos(b\,t) - j\,\sin(b\,t)]\;)$$

Agrupando las partes real e imaginaria llegamos a:

$$e^{-a\cdot t} \cdot [\;(K_1 + K_2)\cdot \cos(b\,t) \;+\; j\,(K_1 - K_2)\cdot \sin(b\,t)\;] \tag{2}$$

Esta expresión es generalmente compleja porque incluye términos reales e imaginarios. Sin embargo, dado que en este contexto la expresión corresponde a una **tensión** o **corriente** en un circuito eléctrico, que son magnitudes medibles en un sistema físico, la expresión **debe contener únicamente términos reales**.

Para que esto ocurra, **las constantes K_1 y K_2** deben cumplir una condición: **deben ser números complejos**. En concreto, deben ser complejos conjugados:

$$K_1 = \gamma + j\,\beta\,, \qquad K_2 = \gamma - j\,\beta \qquad\qquad \text{(donde } \gamma \text{ y } \beta \text{ son números reales)}$$

Sustituyendo en (2):

$$e^{-a\cdot t} \cdot [2\,\gamma\cos(b\,t) - 2\,\beta\sin(b\,t)]$$

Por lo tanto, el **resultado final** es:

$$e^{-a\cdot t} \cdot (K_1 \cdot e^{jbt} \;+\; K_2 \cdot e^{-jbt}) \;=\; e^{-a\cdot t} \cdot [2\,\gamma\cos(b\,t) - 2\,\beta\sin(b\,t)] \;=\; \boxed{B' \cdot e^{-\alpha\cdot t} \cdot \sin(\omega t + \theta)}$$

En el último sumando se ha usado la primera propiedad de la senoidal recogida aquí, donde $\boldsymbol{\alpha = a}$ y $\boldsymbol{\omega = b}$ (a y b son la parte real e imaginaria de s_1, s_2, definidas en (1)).

Las **ctes. B'** y **θ** dependen de las **condiciones iniciales** del circuito (ver ejs. 14 y 15 como ejemplos de cómo calcularlas).