

Demostración de raíces complejas dando lugar a oscilaciones atenuadas

La respuesta natural de un circuito de 2º orden es una combinación lineal de funciones exponenciales:

$$f_n(t) = K_1 \cdot e^{s_1 \cdot t} + K_2 \cdot e^{s_2 \cdot t}$$

Donde s_1 y s_2 son las soluciones de la ec. característica. Si estas **soluciones** son **complejas**:

$$f_n(t) = K_1 \cdot e^{(-a+jb) \cdot t} + K_2 \cdot e^{(-a-jb) \cdot t} \quad (1)$$

Donde se ha tenido en cuenta que las soluciones **deben ser complejas conjugadas**, debido a **este** teorema: "si un polinomio en una variables con coefs. reales tiene una raíz compleja, el conjugado también es raíz del polinomio".

Usando la **fórmula de Euler**, vamos a **demostrar** que esta expresión es equivalente a una **suma** de funciones **seno** y **coseno**

La fórmula de Euler establece:

$$e^{jt} = \cos(t) + j \sin(t), \quad e^{-jt} = \cos(t) - j \sin(t)$$

Sustituyendo en (1):

$$e^{-a \cdot t} \cdot (K_1 \cdot e^{jbt} + K_2 \cdot e^{-jbt}) = e^{-a \cdot t} \cdot (K_1 \cdot [\cos(bt) + j \sin(bt)] + K_2 \cdot [\cos(bt) - j \sin(bt)])$$

Agrupando las partes real e imaginaria llegamos a:

$$e^{-a \cdot t} \cdot [(K_1 + K_2) \cdot \cos(bt) + j(K_1 - K_2) \cdot \sin(bt)] \quad (2)$$

Esta expresión es generalmente compleja porque incluye términos reales e imaginarios. Sin embargo, dado que en este contexto la expresión corresponde a una **tensión** o **corriente** en un circuito eléctrico, que son magnitudes medibles en un sistema físico, la expresión **debe contener únicamente términos reales**.

Para que esto ocurra, **las constantes K_1 y K_2** deben cumplir una condición: **deben ser números complejos**. En concreto, deben ser complejos conjugados:

$$K_1 = \gamma + j\beta, \quad K_2 = \gamma - j\beta \quad (\text{donde } \gamma \text{ y } \beta \text{ son números reales})$$

Sustituyendo en (2):

$$e^{-a \cdot t} \cdot [2\gamma \cos(bt) - 2\beta \sin(bt)]$$

Por lo tanto, el **resultado final** es:

$$e^{-a \cdot t} \cdot (K_1 \cdot e^{jbt} + K_2 \cdot e^{-jbt}) = e^{-a \cdot t} \cdot [2\gamma \cos(bt) - 2\beta \sin(bt)] = \boxed{B' \cdot e^{-\alpha \cdot t} \cdot \sin(\omega t + \theta)}$$

En el último sumando se ha usado la primera propiedad de la senoidal recogida **aquí**, donde **$\alpha = a$** y **$\omega = b$** (a y b son la parte real e imaginaria de s_1, s_2 , definidas en (1)).

Las **ctes. B' y θ** dependen de las **condiciones iniciales** del circuito (ver ejcs. 14 y 15 como ejemplos de cómo calcularlas).