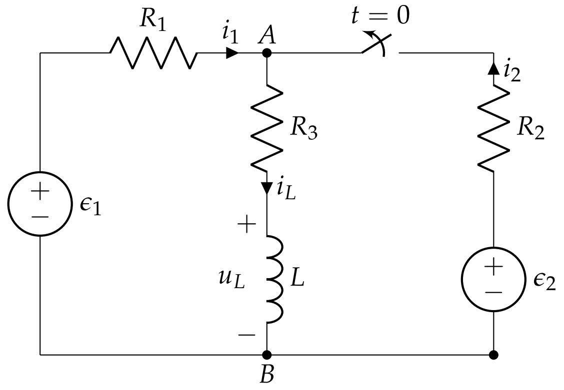
1. Transitorio de primer orden

Problema 1.

El interruptor de la figura ha estado cerrado por un tiempo muy prolongado y en $t = 0$ se abre.



Datos:

$$
\begin{aligned}
R_1 &= 5\,\Omega \\
R_2 &= 5\,\Omega \\
R_3 &= 2\,\Omega \\
L &= 3{,}5\,\mathrm{mH} \\
\epsilon_1 &= 24\,\mathrm{V} \\
\epsilon_2 &= 12\,\mathrm{V}
\end{aligned}
$$

Con esta información se debe calcular:

1. Valores de $i_1(0^+)$, $i_2(0^+)$, $i_L(0+)$, $u_L(0^+)$ y $u_{AB}(0+)$.
2. Expresión de $i_L(t)$ para $t > 0$.
3. Expresiones de $u_L(t)$ y $u_{AB}(t)$ para $t > 0$.

Solución

En el circuito en $t < 0$ la bobina se comporta como un cortocircuito. Resolviendo por mallas el circuito resultante obtenemos los valores para $t = 0^-$:

$$
\begin{aligned}
i_L(0^-) &= 4\,\mathrm{A} \\
i_1(0^-) &= 3{,}2\,\mathrm{A} \\
i_2(0^-) &= 0{,}8\,\mathrm{A}
\end{aligned}
$$

En la bobina podemos plantear la condición de continuidad $i_L(0^-) = i_L(0^+)$, que nos permite obtener los valores para $t = 0^+$, una vez abierto el interruptor:

$$
\begin{aligned}
i_L(0^+) &= 4\,\mathrm{A} \\
i_1(0^+) &= i_L(0^+) \\
i_2(0^+) &= 0\,\mathrm{A} \\
u_L(0^+) &= \epsilon_1 - i_1(0^+) \cdot R_1 - i_L(0^+) \cdot R_3 = -4\,\mathrm{V} \\
u_{AB}(0^+) &= \epsilon_1 - i_1(0^+) \cdot R_1 = 4\,\mathrm{V}
\end{aligned}
$$

Analizamos ahora el circuito para $t > 0$, en el que el interruptor está abierto. La resistencia vista por la bobina es $R_{th} = 7\,\Omega$. Por tanto:

$$\tau = \frac{L}{R_{th}} = 500\,\mu\text{s}$$

Obtenemos la respuesta forzada analizando el circuito en régimen permanente, en el que la bobina se comportará como un cortocircuito:

$$i_L(\infty) = \frac{\epsilon_1}{R_1 + R_3} = 3{,}43\,\text{A}$$

Obtenemos la respuesta natural apagando la fuente ϵ_1:

$$i_{Ln}(t) = A \cdot e^{-2000 \cdot t}$$

Para obtener la constante A recurrimos a la condición inicial $i_L(0^+) = 4\,\text{A}$:

$$A = i_L(0^+) - i_L(\infty) = 0{,}57\,\text{A}$$

Por tanto:

$$i_L(t) = 3{,}43 + 0{,}57 \cdot e^{-2000 \cdot t}\text{A}$$

Con este resultado podemos obtener las tensiones en el circuito:

$$u_L(t) = L \cdot \frac{di_L}{dt} = -4 \cdot e^{-2000 \cdot t}\text{V}$$

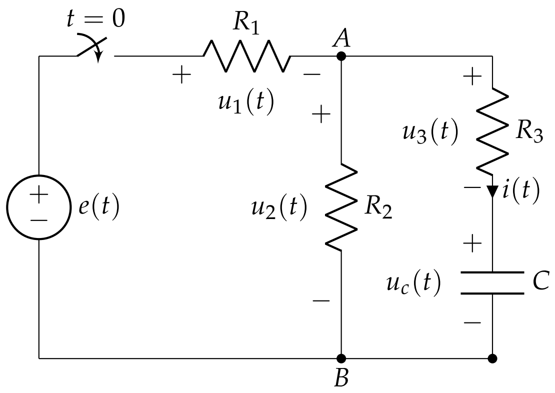
$$u_{AB}(t) = u_L(t) + R_3 \cdot i_L(t) = 6{,}86 - 2{,}86 \cdot e^{-2000 \cdot t}\text{V}$$

Comprobamos que estas expresiones concuerdan con los resultados obtenidos para $u_L(0^+)$ y $u_{AB}(0^+)$.

Problema 2.

El interruptor del circuito de la figura lleva abierto un tiempo indefinido. En el instante $t = 0$ se cierra este interruptor. Hay que obtener:

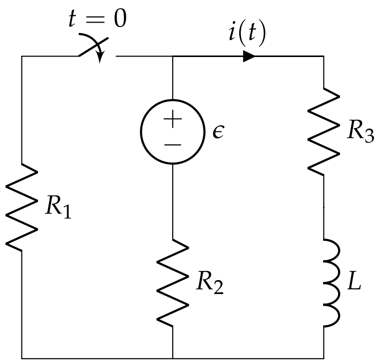
1. Valores de las tensiones $u_1(0^+)$, $u_2(0^+)$, $u_3(0^+)$ y $u_c(0^+)$.
2. Expresión temporal de la tensión $u_c(t)$ para $t > 0$.
3. Expresiones temporales de $u_2(t)$ y $u_3(t)$ para $t > 0$.



Datos:
$e(t) = 10\text{V}$
$R_1 = R_2 = 2\Omega$
$R_3 = 4\Omega$
$C = 1\text{F}$

Problema 3.

Calcular la corriente $i(t)$ para $t > 0$.

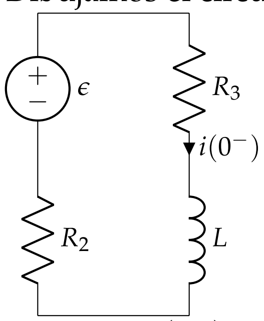


Datos:

$$
\begin{aligned}
\epsilon &= 24\,\text{V} \\
R_1 &= 8\,\Omega \\
R_2 &= 4\,\Omega \\
R_3 &= 4\,\Omega \\
L &= 15\,\text{H}
\end{aligned}
$$

Solución

Calculamos las condiciones iniciales ($t = 0^-$)
Dibujamos el circuito para $t < 0$ y obtenemos:

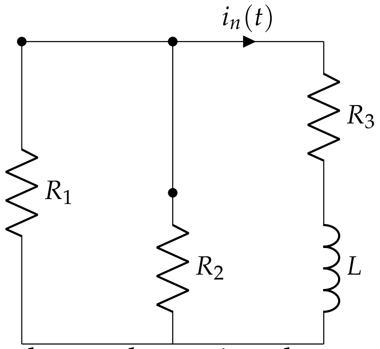


$$i(t) = \frac{\epsilon}{R_2 + R_3}$$

Por tanto, $i(0^-) = 3\,\text{A}$. Al tratarse de una bobina, $i(0^+) = i(0^-) = 3\,\text{A}$.

A continuación dibujamos el circuito para $t > 0$ para obtener la respuesta natural y la respuesta forzada.

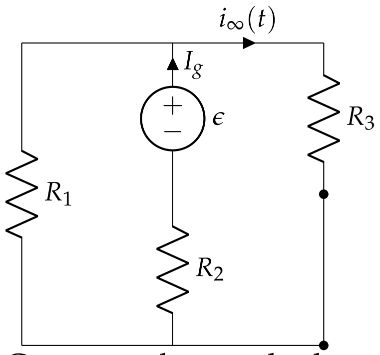
Para obtener la respuesta natural apagamos las fuentes. En este circuito obtenemos:



$$
\begin{aligned}
R_{th} &= R_3 + R_1 || R_2 = 20/3\Omega \\
\tau &= L/R_{th} = 9/4\text{s} \\
i_n(t) &= A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = A \cdot e^{-4t/9}
\end{aligned}
$$

Queda por determinar la constante de integración.

Para obtener la respuesta forzada volvemos a activar las fuentes. En este circuito obtenemos:



$$I_g = \frac{\epsilon}{R_2 + R_1||R_3}$$
$$i_\infty(t) = I_g \cdot \frac{G_3}{G_3 + G_1} = 2{,}4\,\mathrm{A}$$

Con estos dos resultados podemos obtener la respuesta completa:

$$i(t) = i_n(t) + i_\infty(t)$$
$$i(t) = A \cdot e^{-4t/9} + 2{,}4$$

Para determinar la constante de integración recurrimos a las condiciones iniciales:

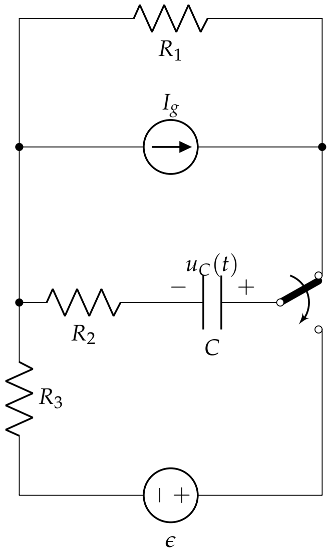
$$i(0^+) = A + 2{,}4$$
$$i(0^+) = 3$$
$$A = 0{,}6$$

Por tanto,

$$i(t) = 0{,}6 \cdot e^{-4t/9} + 2{,}4$$

Problema 4.

Calcular la tensión en bornes del condensador para $t > 0$.

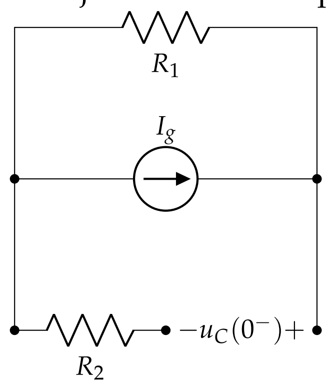


Datos:

$$\begin{aligned} \epsilon &= 20\,\mathrm{V} \\ I_g &= 4\,\mathrm{A} \\ R_1 &= 6\,\Omega \\ R_2 &= 4\,\Omega \\ R_3 &= 12\,\Omega \\ C &= 1/16\,\mathrm{F} \end{aligned}$$

Solución

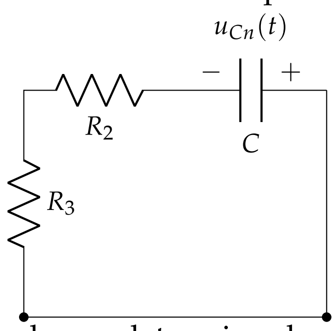
Calculamos las condiciones iniciales ($t = 0^-$)
Dibujamos el circuito para $t < 0$ y obtenemos:



$$u_C(t) = I_g \cdot R_1$$

Por tanto, $u_c(0^-) = 24\,\mathrm{V}$. Al tratarse de un condensador, $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 24\,\mathrm{V}$.
A continuación dibujamos el circuito para $t > 0$ para obtener la respuesta natural y la respuesta forzada.

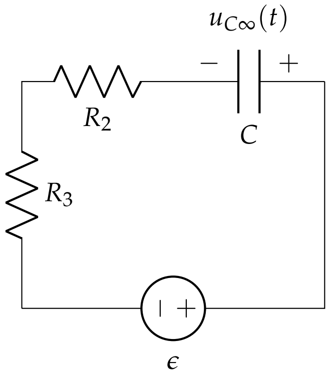
Para obtener la respuesta natural apagamos las fuentes. En este circuito obtenemos:



$$\begin{aligned} R_{th} &= R_2 + R_3 = 16\,\Omega \\ \tau &= C/G_{th} = 1\,\mathrm{s} \\ u_{Cn}(t) &= A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = A \cdot e^{-t} \end{aligned}$$

Queda por determinar la constante de integración.

Para obtener la respuesta forzada volvemos a activar las fuentes. En este circuito obtenemos:



$$u_{c\infty}(t) = \epsilon = 20\,\mathrm{V}$$

Con estos dos resultados podemos obtener la respuesta completa:

$$u_C(t) = u_{Cn}(t) + u_{c\infty}(t)$$
$$u_C(t) = A \cdot e^{-t} + 20$$

Para determinar la constante de integración recurrimos a las condiciones iniciales:

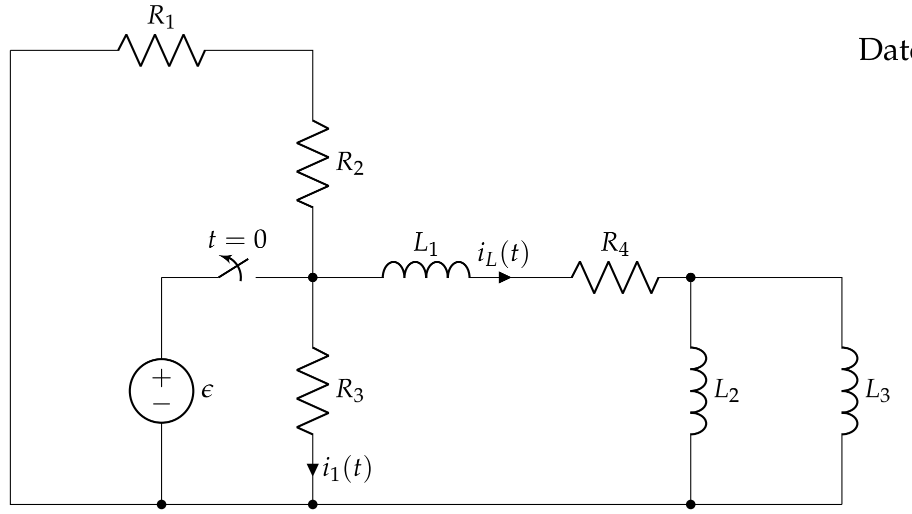
$$u_C(0^+) = A + 20$$
$$u_C(0^+) = 24$$
$$A = 4\,\mathrm{V}$$

Por tanto,

$$u_C(t) = 4 \cdot e^{-t} + 20$$

Problema 5.

Determina las corrientes $i_L(t)$ e $i_1(t)$ para $t > 0$.

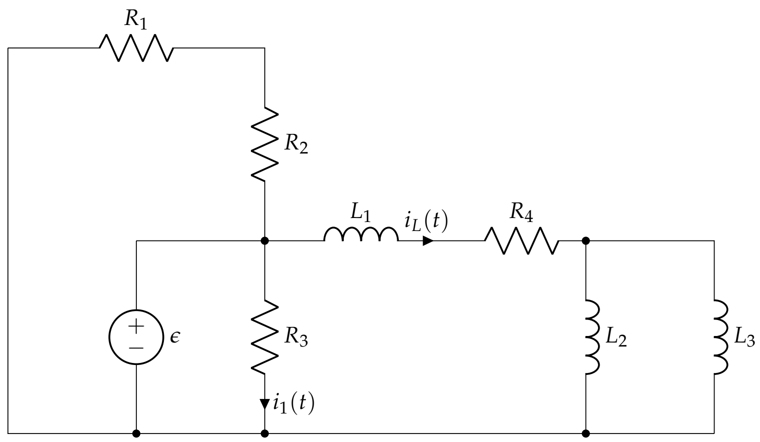


Datos:

$$\epsilon = 18\,\mathrm{V}$$
$$R_1 = 120\,\Omega$$
$$R_2 = 60\,\Omega$$
$$R_3 = 90\,\Omega$$
$$R_4 = 50\,\Omega$$
$$L_1 = 1\,\mathrm{mH}$$
$$L_2 = 2\,\mathrm{mH}$$
$$L_3 = 3\,\mathrm{mH}$$

Solución

Calculamos las condiciones iniciales ($t = 0^-$)
Dibujamos el circuito para $t < 0$:



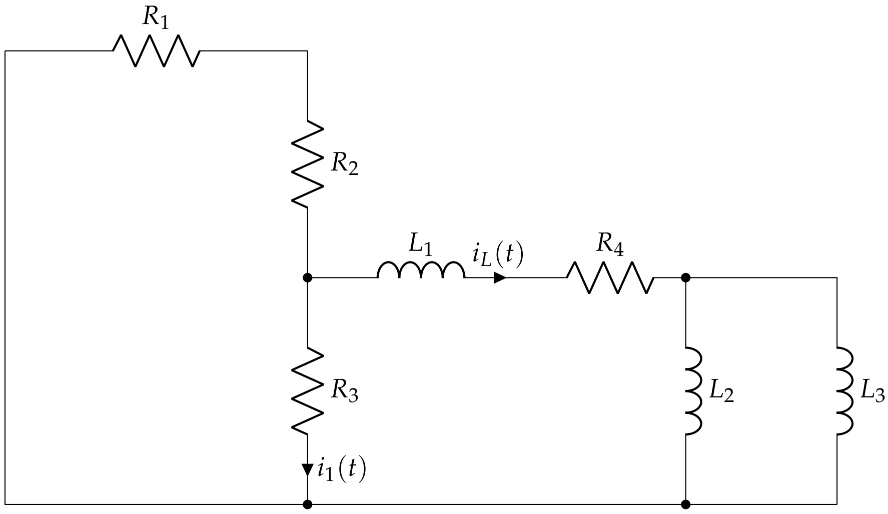
Obtenemos:

$$i_L(t) = \frac{\epsilon}{R_4} = 360\,\mathrm{mA}$$

Al tratarse de una bobina, $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 360\,\mathrm{mA}$.

En este circuito podemos calcular $i_1(0^-) = \frac{\epsilon}{R_3} = 200\,\mathrm{mA}$. Este valor nos servirá de referencia cuando calculemos $i_1(t)$.

A continuación dibujamos el circuito para $t > 0$ para obtener la respuesta natural y la respuesta forzada. En el circuito resultante no hay fuentes, por lo que únicamente tendremos respuesta natural.



$$
\begin{aligned}
L_{eq} &= L_1 + L_2||L_3 = 2{,}2\,\mathrm{mH} \\
R_{th} &= (R_1 + R_2)||R_3 + R_4 = 110\,\Omega \\
\tau &= L_{eq}/R_{th} = 20\,\mu\mathrm{s} \\
i_{Ln}(t) &= A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = A \cdot e^{-5\cdot 10^{-4}\cdot t}
\end{aligned}
$$

Queda por determinar la constante de integración. Dado que la respuesta forzada es 0 podemos calcular directamente esta constante con la respuesta natural y las condiciones iniciales:

$$
\begin{aligned}
i_L(t) &= i_{Ln}(t) = A \cdot e^{-5\cdot 10^{-4}\cdot t} \\
i_L(0^+) &= A = 0{,}36
\end{aligned}
$$

Por tanto,

$$i_L(t) = 0{,}36 \cdot e^{-5\cdot 10^{-4}\cdot t}\mathrm{A}$$

Para calcular la corriente $i_1(t)$ usamos un divisor de corriente a partir de $i_L(t)$:

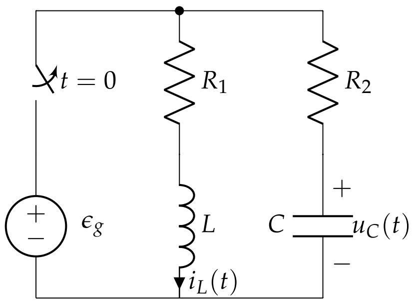
$$i_1(t) = -i_L(t) \cdot \frac{1/R_3}{1/R_3 + 1/(R_1 + R_2)} = -0{,}24 \cdot e^{-5\cdot 10^{-4}\cdot t}\mathrm{A}$$

En el primer apartado habíamos obtenido $i_1(0^-) = 200\,\mathrm{mA}$. Con esta ecuación obtenemos $i_1(0^+) = -240\,\mathrm{mA}$. Los valores no coinciden porque en una resistencia no hay condición de continuidad.

2. Transitorio de segundo orden

Problema 1.

El circuito de la figura ha alcanzado el régimen permanente con el interruptor cerrado. El interruptor se abre en $t = 0$. Calcula las expresiones de la tensión en bornes del condensador y de la corriente por la bobina para $t > 0$.

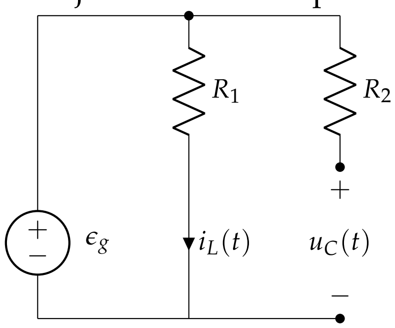


Datos:

$$\begin{aligned} \epsilon_g &= 10\,\mathrm{V} \\ R_1 &= 10\,\Omega \\ R_2 &= 5\,\Omega \\ L &= 2{,}5\,\mathrm{H} \\ C &= 0{,}2\,\mathrm{F} \end{aligned}$$

Solución

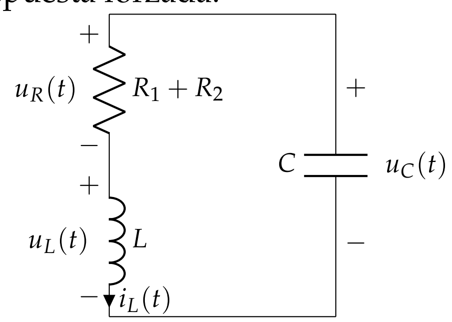
Calculamos las condiciones iniciales ($t = 0^-$)
Dibujamos el circuito para $t < 0$ y obtenemos:



$$u_C(t) = 10\,\mathrm{V}$$
$$i_L(t) = \frac{\epsilon_g}{R_1} = 1\,\mathrm{A}$$

Por tanto, $u_c(0^+) = u_c(0^-) = 10\,\mathrm{V}$ y $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 1\,\mathrm{A}$.

A continuación dibujamos el circuito para $t > 0$ para obtener la respuesta natural y la respuesta forzada. En el circuito resultante no hay fuentes, por lo que no habrá respuesta forzada.

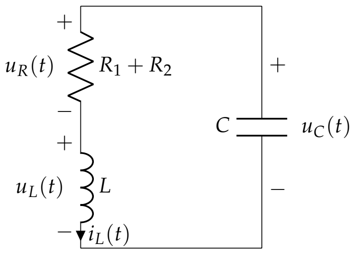


$$\alpha = \frac{R}{2L} = 3\,\mathrm{s}^{-1}$$
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \sqrt{2}\mathrm{rad\,s}^{-1}$$

Dado que $\alpha > \omega_0$ se trata de un transitorio sobreamortiguado:

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -0{,}354\,\mathrm{s}^{-1}$$
$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -5{,}645\,\mathrm{s}^{-1}$$
$$i_L(t) = A_1 \cdot e^{-0{,}354\cdot t} + A_2 \cdot e^{-5{,}645\cdot t}$$

Para determinar las constantes de integración recurrimos a las condiciones iniciales:



$$u_R(t) + u_L(t) = u_C(t)$$
$$u_L(0^+) = u_C(0^+) - u_R(0^+)$$
$$u_R(0^+) = R \cdot i_L(0^+) = 15\,\mathrm{V}$$
$$u_L(0^+) = 10 - 15 = -5\,\mathrm{V}$$

Por tanto,

$$i_L(0^+) = 1\,\mathrm{A}$$
$$\frac{di_L(t)}{dt}t = 0^+ = \frac{1}{L} \cdot u_L(0^+) = -2\,\mathrm{A\,s}^{-1}$$

Con estos resultados, particularizamos la ecuación de $i_L(t)$ para $t = 0$ y así planteamos las ecuaciones para obtener A_1 y A_2:

$$i_L(0^+) = A_1 + A_2 = 1$$
$$\frac{di_L(t)}{dt}t = 0^+ = A_1 \cdot s_1 + A_2 \cdot s_2 = -2$$

Por tanto,

$$A_1 = 0{,}689$$
$$A_2 = 0{,}311$$

Finalmente,

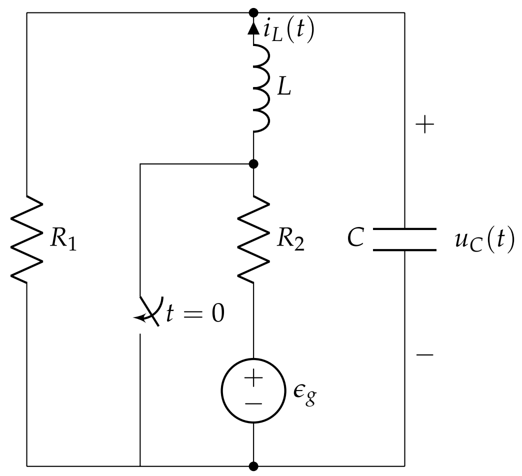
$$i_L(t) = 0{,}689 \cdot e^{-0{,}354\cdot t} + 0{,}311 \cdot e^{-5{,}645\cdot t}$$

Para obtener la tensión en el condensador recurrimos a la LKV:

$$\begin{aligned} u_C(t) &= u_R(t) + u_L(t) = \\ &= R \cdot i_L(t) + L\frac{di_L(t)}{dt} = \\ &= 9{,}7275 \cdot e^{-0{,}354\cdot t} + 0{,}275 \cdot e^{-5{,}645\cdot t} \end{aligned}$$

Problema 2.

En el circuito de la figura, calcula la tensión $u_c(t)$ para $t > 0$.

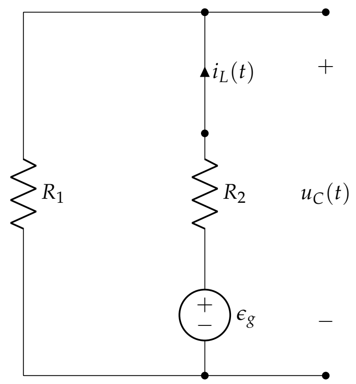


Datos:

$$\begin{aligned} \epsilon_g &= 4\,\mathrm{V} \\ R_1 &= 2\,\Omega \\ R_2 &= 2\,\Omega \\ L &= 2\,\mathrm{H} \\ C &= 0{,}25\,\mathrm{F} \end{aligned}$$

Solución

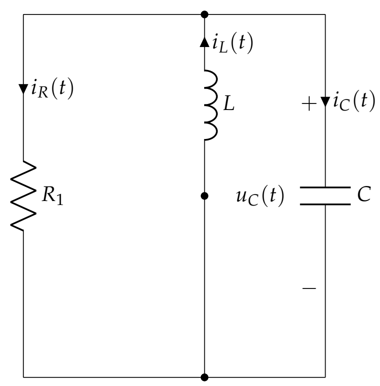
Calculamos las condiciones iniciales ($t = 0^-$). Dibujamos el circuito para $t < 0$ y obtenemos:



$$\begin{aligned} u_C(t) &= 2\,\mathrm{V} \\ i_L(t) &= \frac{\epsilon_g}{R_1 + R_2} = 1\,\mathrm{A} \end{aligned}$$

Por tanto, $u_c(0^+) = u_c(0^-) = 2\,\mathrm{V}$ y $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 1\,\mathrm{A}$.

A continuación dibujamos el circuito para $t > 0$ para obtener la respuesta natural y la respuesta forzada. En el circuito resultante no hay fuentes, por lo que no habrá respuesta forzada.

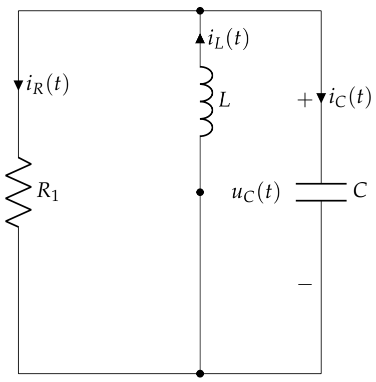


$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{G}{2C} = 1\,\mathrm{s}^{-1} \\ \omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2\mathrm{rad}\,\mathrm{s}^{-1} \end{aligned}$$

Dado que $\alpha < \omega_0$, se trata de un transitorio subamortiguado:

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \sqrt{3}\mathrm{rad\,s^{-1}}$$
$$u_C(t) = (B_1 \cdot \cos(\sqrt{3} \cdot t) + B_2 \cdot \sin(\sqrt{3} \cdot t)) \cdot e^{-t}$$

Para determinar las constantes de integración recurrimos a las condiciones iniciales:



$$i_C(0^+) = i_L(0^+) - i_R(0^+)$$
$$i_R(0^+) = G_1 \cdot u_C(0^+) = 1\,\mathrm{A}$$
$$i_C(0^+) = 1 - 1 = 0\,\mathrm{A}$$

Por tanto,

$$u_C(0^+) = 2\,\mathrm{V}$$
$$\frac{du_C(t)}{dt}t = 0^+ = \frac{1}{C} \cdot i_C(0^+) = 0\,\mathrm{V\,s^{-1}}$$

Con estos resultados, particularizamos la ecuación de $u_C(t)$ para $t = 0$ y así planteamos las ecuaciones para obtener B_1 y B_2:

$$u_C(0^+) = B_1 = 2$$
$$\frac{du_C(t)}{dt}t = 0^+ = -e^{-t} \cdot (2\cos(\sqrt{3}t) + B_2\sin(\sqrt{3}t)) +$$
$$+ e^{-t} \cdot (-2\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t) + \sqrt{3}B_2\cos(\sqrt{3}t)) =$$
$$= 0$$

Por tanto,

$$B_1 = 2$$
$$B_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Finalmente,

$$u_C(t) = (2 \cdot \cos(\sqrt{3} \cdot t) + \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \sin(\sqrt{3} \cdot t)) \cdot e^{-t}$$