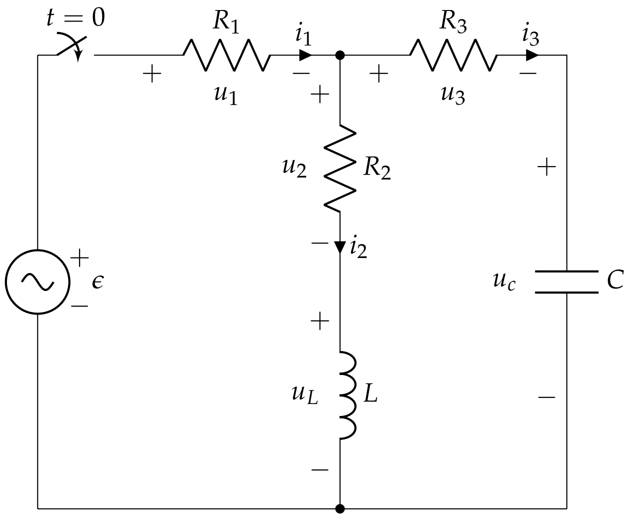
1. Condiciones Iniciales

Problema 1.

En el circuito de la figura el interruptor ha estado abierto durante un tiempo prolongado, y en el instante $t = 0$ se cierra. Hay que determinar las respuestas del circuito en $t = 0^+$.



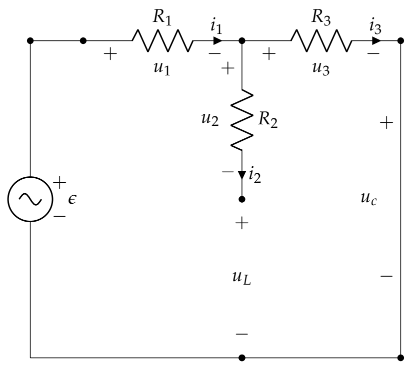
Datos:

$R1 = 3\Omega$
$R2 = 5\Omega$
$R3 = 2\Omega$
$L = 0,2\text{H}$
$C = 0,5\text{mF}$
$\epsilon(t) = 20\cos(t)\text{V}$

Solución

En $t < 0$, dado que el interruptor ha estado abierto, la bobina y el condensador están descargados. Por tanto, $i_2(0^-) = 0\,\text{A}$ y $u_C(0^-) = 0\,\text{V}$.

En $t > 0$, al cerrarse el interruptor, la fuente de tensión alimenta al circuito. En el instante de cierre $e(0^+) = 20\,\text{V}$. Por otra parte, teniendo en cuenta las condiciones iniciales en la bobina y el condensador, tenemos:



$$i_2(0^+) = i_2(0^-) = 0\,\text{A}$$
$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0\,\text{V}$$

Estos resultados implican que, en ese instante, la bobina se comporta como un circuito abierto y el condensador como un cortocircuito.

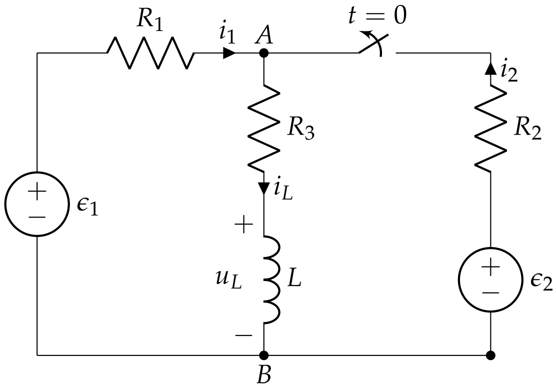
En estas condiciones calculamos el resto de variables en $t = 0^+$.

$$i_1(0^+) = i_3(0^+) = \frac{e(0^+)}{R_1 + R_3} = 4\,\text{A}$$
$$u_1(0^+) = R_1 \cdot i_1(0^+) = 12\,\text{V}$$
$$u_2(0^+) = R_2 \cdot i_2(0^+) = 0\,\text{V}$$
$$u_3(0^+) = R_3 \cdot i_3(0^+) = 8\,\text{V}$$
$$u_L(0^+) = u_3(0^+) = 8\,\text{V}$$

2. Transitorio de primer orden

Problema 1.

El interruptor de la figura ha estado cerrado por un tiempo muy prolongado y en $t = 0$ se abre.



Datos:

$$
\begin{aligned}
R_1 &= 5\,\Omega \\
R_2 &= 5\,\Omega \\
R_3 &= 2\,\Omega \\
L &= 3{,}5\,\mathrm{mH} \\
\epsilon_1 &= 24\,\mathrm{V} \\
\epsilon_2 &= 12\,\mathrm{V}
\end{aligned}
$$

Con esta información se debe calcular:

1. Valores de $i_1(0^+)$, $i_2(0^+)$, $i_L(0+)$, $u_L(0^+)$ y $u_{AB}(0+)$.
2. Expresión de $i_L(t)$ para $t > 0$.
3. Expresiones de $u_L(t)$ y $u_{AB}(t)$ para $t > 0$.

Solución

En el circuito en $t < 0$ la bobina se comporta como un cortocircuito. Resolviendo por mallas el circuito resultante obtenemos los valores para $t = 0^-$:

$$
\begin{aligned}
i_L(0^-) &= 4\,\mathrm{A} \\
i_1(0^-) &= 3{,}2\,\mathrm{A} \\
i_2(0^-) &= 0{,}8\,\mathrm{A}
\end{aligned}
$$

En la bobina podemos plantear la condición de continuidad $i_L(0^-) = i_L(0^+)$, que nos permite obtener los valores para $t = 0^+$, una vez abierto el interruptor:

$$
\begin{aligned}
i_L(0^+) &= 4\,\mathrm{A} \\
i_1(0^+) &= i_L(0^+) \\
i_2(0^+) &= 0\,\mathrm{A} \\
u_L(0^+) &= \epsilon_1 - i_1(0^+) \cdot R_1 - i_L(0^+) \cdot R_3 = -4\,\mathrm{V} \\
u_{AB}(0^+) &= \epsilon_1 - i_1(0^+) \cdot R_1 = 4\,\mathrm{V}
\end{aligned}
$$

Analizamos ahora el circuito para $t > 0$, en el que el interruptor está abierto. La resistencia vista por la bobina es $R_{th} = 7\,\Omega$. Por tanto:

$$\tau = \frac{L}{R_{th}} = 500\,\mu\mathrm{s}$$

Obtenemos la respuesta forzada analizando el circuito en régimen permanente, en el que la bobina se comportará como un cortocircuito:

$$i_L(\infty) = \frac{\epsilon_1}{R_1 + R_3} = 3{,}43\,\mathrm{A}$$

Obtenemos la respuesta natural apagando la fuente ϵ_1:

$$i_{Ln}(t) = A \cdot e^{-2000 \cdot t}$$

Para obtener la constante A recurrimos a la condición inicial $i_L(0^+) = 4\,\mathrm{A}$:

$$A = i_L(0^+) - i_L(\infty) = 0{,}57\,\mathrm{A}$$

Por tanto:

$$i_L(t) = 3{,}43 + 0{,}57 \cdot e^{-2000 \cdot t}\mathrm{A}$$

Con este resultado podemos obtener las tensiones en el circuito:

$$u_L(t) = L \cdot \frac{di_L}{dt} = -4 \cdot e^{-2000 \cdot t}\mathrm{V}$$

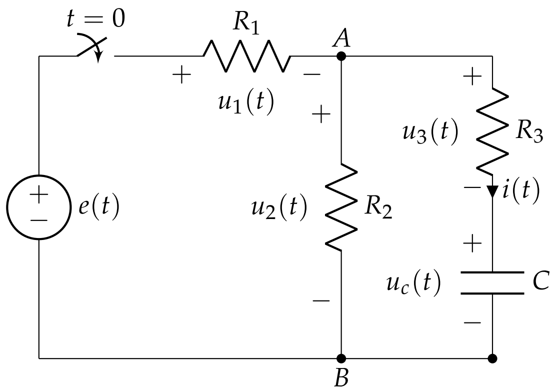
$$u_{AB}(t) = u_L(t) + R_3 \cdot i_L(t) = 6{,}86 - 2{,}86 \cdot e^{-2000 \cdot t}\mathrm{V}$$

Comprobamos que estas expresiones concuerdan con los resultados obtenidos para $u_L(0^+)$ y $u_{AB}(0^+)$.

Problema 2.

El interruptor del circuito de la figura lleva abierto un tiempo indefinido. En el instante $t = 0$ se cierra este interruptor. Hay que obtener:

1. Valores de las tensiones $u_1(0^+)$, $u_2(0^+)$, $u_3(0^+)$ y $u_c(0^+)$.
2. Expresión temporal de la tensión $u_c(t)$ para $t > 0$.
3. Expresiones temporales de $u_2(t)$ y $u_3(t)$ para $t > 0$.

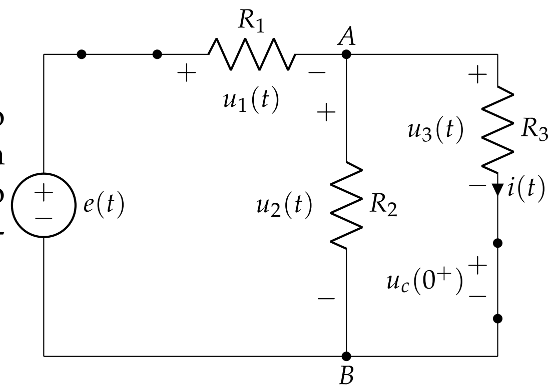


Datos:
$e(t) = 10\text{V}$
$R_1 = R_2 = 2\Omega$
$R_3 = 4\Omega$
$C = 1\text{F}$

Solución

1. En $t < 0$, dado que el circuito lleva funcionando un tiempo indefinido, el condensador se comporta como un circuito abierto. Además, el interruptor está abierto y, por tanto, la fuente está aislada del circuito. En estas condiciones $u_c(0^-) = 0\,\text{V}$. Debido a las condiciones de continuidad, $u_c(0^+) = u_c(0^-) = 0\,\text{V}$.

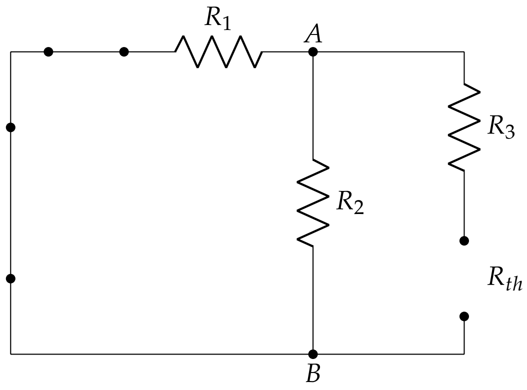
   Con este resultado podemos determinar el resto de tensiones del circuito en $t = 0^+$, teniendo en cuenta que para $t > 0$ el interruptor está cerrado y el condensador es equivalente a un cortocircuito ($u_c(0^+) = 0\,\text{V}$).



   En este circuito R_2 y R_3 están en paralelo entre sí, siendo $R_{23} = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}$. Esta resistencia paralelo está en serie con R_1, formando un divisor de tensión. Por tanto:

$$u_2(0^+) = u_3(0^+) = e(t) \cdot \frac{R_{23}}{R_1 + R_{23}} = 4\,\text{V}$$
$$u_1(0^+) = e(t) - u_2(0^+) = 6\,\text{V}.$$

2. Analizamos ahora el circuito para $t > 0$, en el que el interruptor está abierto.



La resistencia vista por el condensador es

$$R_{th} = R_3 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = 5\,\Omega$$

Por tanto:

$$\tau = \frac{C}{G_{th}} = 5\,\mathrm{s}$$

Obtenemos la respuesta forzada analizando el circuito en régimen permanente, en el que el condensador se comportará como un circuito abierto:

$$u_C(\infty) = e(t) \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 5\,\mathrm{V}$$

Obtenemos la respuesta natural apagando la fuente $e(t)$:

$$u_{Cn}(t) = A \cdot e^{-0{,}2t}$$

Para obtener la constante A recurrimos a la condición inicial $u_C(0^+) = 0\,\mathrm{V}$:

$$A = u_C(0^+) - u_C(\infty) = -5\,\mathrm{V}$$

Por tanto:

$$u_C(t) = 5 - 5 \cdot e^{-0{,}2t}\mathrm{V}$$

3. Con este resultado podemos obtener la corriente que circula por el condensador:

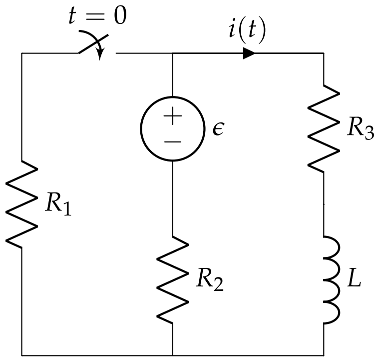
$$i_C(t) = C \cdot \frac{du_C}{dt} = e^{-0{,}2t}\mathrm{A}$$

y las tensiones en las resistencias:

$$u_{R3}(t) = R_3 \cdot i_C(t) = 4 \cdot e^{-0{,}2t}\mathrm{V}$$
$$u_{R2}(t) = u_{R3}(t) + u_C(t) = 5 - e^{-0{,}2t}\mathrm{V}$$

Problema 3.

Calcular la corriente $i(t)$ para $t > 0$.

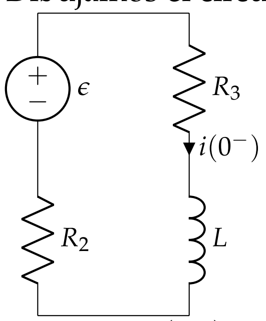


Datos:

$$\begin{aligned} \epsilon &= 24\,\text{V} \\ R_1 &= 8\,\Omega \\ R_2 &= 4\,\Omega \\ R_3 &= 4\,\Omega \\ L &= 15\,\text{H} \end{aligned}$$

Solución

Calculamos las condiciones iniciales ($t = 0^-$)
Dibujamos el circuito para $t < 0$ y obtenemos:

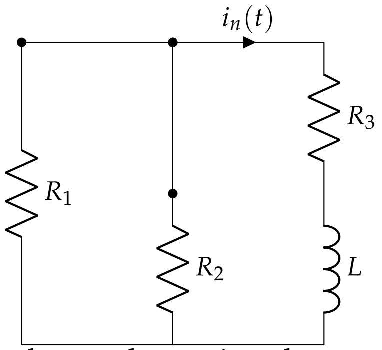


$$i(t) = \frac{\epsilon}{R_2 + R_3}$$

Por tanto, $i(0^-) = 3\,\text{A}$. Al tratarse de una bobina, $i(0^+) = i(0^-) = 3\,\text{A}$.

A continuación dibujamos el circuito para $t > 0$ para obtener la respuesta natural y la respuesta forzada.

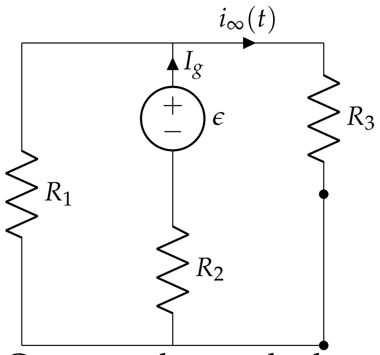
Para obtener la respuesta natural apagamos las fuentes. En este circuito obtenemos:



$$\begin{aligned} R_{th} &= R_3 + R_1 || R_2 = 20/3\Omega \\ \tau &= L/R_{th} = 9/4\text{s} \\ i_n(t) &= A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = A \cdot e^{-4t/9} \end{aligned}$$

Queda por determinar la constante de integración.

Para obtener la respuesta forzada volvemos a activar las fuentes. En este circuito obtenemos:



$$I_g = \frac{\epsilon}{R_2 + R_1||R_3}$$
$$i_\infty(t) = I_g \cdot \frac{G_3}{G_3 + G_1} = 2{,}4\,\mathrm{A}$$

Con estos dos resultados podemos obtener la respuesta completa:

$$i(t) = i_n(t) + i_\infty(t)$$
$$i(t) = A \cdot e^{-4t/9} + 2{,}4$$

Para determinar la constante de integración recurrimos a las condiciones iniciales:

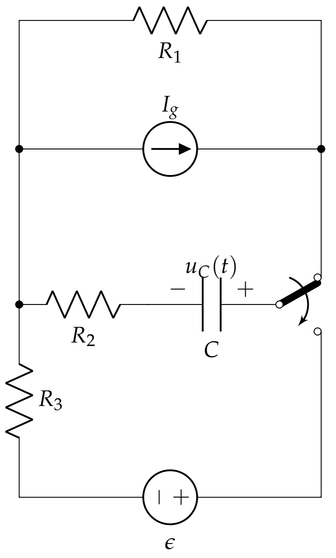
$$i(0^+) = A + 2{,}4$$
$$i(0^+) = 3$$
$$A = 0{,}6$$

Por tanto,

$$i(t) = 0{,}6 \cdot e^{-4t/9} + 2{,}4$$

Problema 4.

Calcular la tensión en bornes del condensador para $t > 0$.

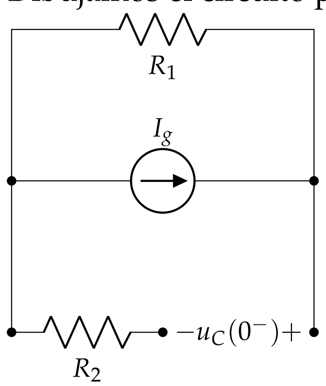


Datos:

$$\epsilon = 20\,\text{V}$$
$$I_g = 4\,\text{A}$$
$$R_1 = 6\,\Omega$$
$$R_2 = 4\,\Omega$$
$$R_3 = 12\,\Omega$$
$$C = 1/16\,\text{F}$$

Solución

Calculamos las condiciones iniciales ($t = 0^-$)
Dibujamos el circuito para $t < 0$ y obtenemos:

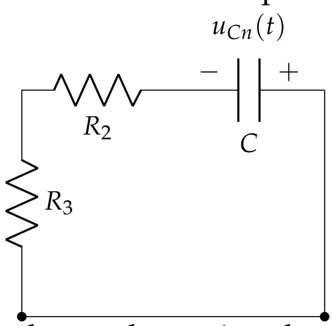


$$u_C(t) = I_g \cdot R_1$$

Por tanto, $u_c(0^-) = 24\,\text{V}$. Al tratarse de un condensador, $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 24\,\text{V}$.

A continuación dibujamos el circuito para $t > 0$ para obtener la respuesta natural y la respuesta forzada.

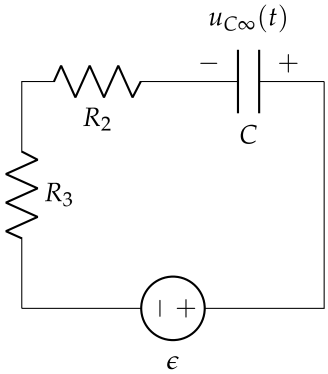
Para obtener la respuesta natural apagamos las fuentes. En este circuito obtenemos:



$$R_{th} = R_2 + R_3 = 16\,\Omega$$
$$\tau = C/G_{th} = 1\,\text{s}$$
$$u_{Cn}(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = A \cdot e^{-t}$$

Queda por determinar la constante de integración.

Para obtener la respuesta forzada volvemos a activar las fuentes. En este circuito obtenemos:



$$u_{c\infty}(t) = \epsilon = 20\,\mathrm{V}$$

Con estos dos resultados podemos obtener la respuesta completa:

$$u_C(t) = u_{Cn}(t) + u_{c\infty}(t)$$
$$u_C(t) = A \cdot e^{-t} + 20$$

Para determinar la constante de integración recurrimos a las condiciones iniciales:

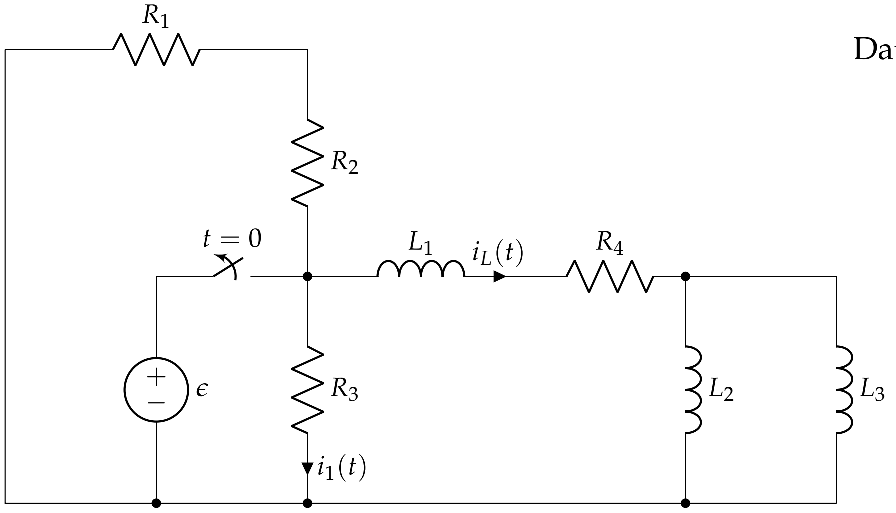
$$u_C(0^+) = A + 20$$
$$u_C(0^+) = 24$$
$$A = 4\,\mathrm{V}$$

Por tanto,

$$u_C(t) = 4 \cdot e^{-t} + 20$$

Problema 5.

Determina las corrientes $i_L(t)$ e $i_1(t)$ para $t > 0$.

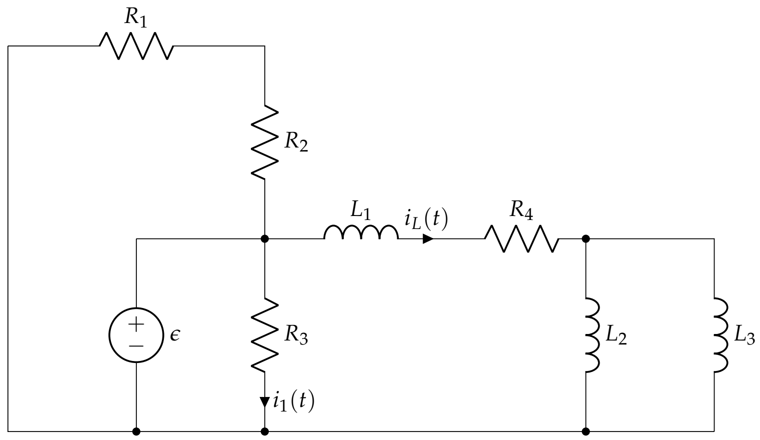


Datos:

$$\begin{aligned} \epsilon &= 18\,\mathrm{V} \\ R_1 &= 120\,\Omega \\ R_2 &= 60\,\Omega \\ R_3 &= 90\,\Omega \\ R_4 &= 50\,\Omega \\ L_1 &= 1\,\mathrm{mH} \\ L_2 &= 2\,\mathrm{mH} \\ L_3 &= 3\,\mathrm{mH} \end{aligned}$$

Solución

Calculamos las condiciones iniciales ($t = 0^-$)
Dibujamos el circuito para $t < 0$:



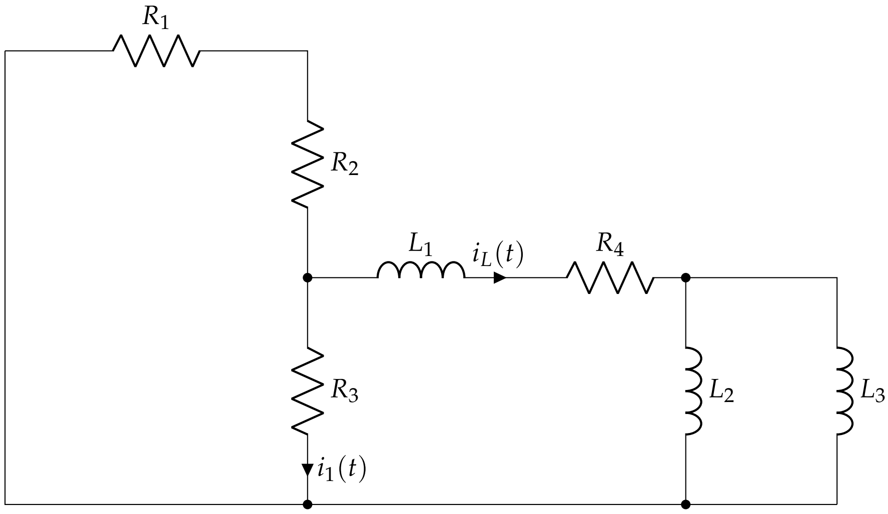
Obtenemos:

$$i_L(t) = \frac{\epsilon}{R_4} = 360\,\mathrm{mA}$$

Al tratarse de una bobina, $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 360\,\mathrm{mA}$.

En este circuito podemos calcular $i_1(0^-) = \frac{\epsilon}{R_3} = 200\,\mathrm{mA}$. Este valor nos servirá de referencia cuando calculemos $i_1(t)$.

A continuación dibujamos el circuito para $t > 0$ para obtener la respuesta natural y la respuesta forzada. En el circuito resultante no hay fuentes, por lo que únicamente tendremos respuesta natural.



$$
\begin{aligned}
L_{eq} &= L_1 + L_2||L_3 = 2{,}2\,\mathrm{mH} \\
R_{th} &= (R_1 + R_2)||R_3 + R_4 = 110\,\Omega \\
\tau &= L_{eq}/R_{th} = 20\,\mu\mathrm{s} \\
i_{Ln}(t) &= A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = A \cdot e^{-5\cdot 10^{-4}\cdot t}
\end{aligned}
$$

Queda por determinar la constante de integración. Dado que la respuesta forzada es 0 podemos calcular directamente esta constante con la respuesta natural y las condiciones iniciales:

$$
\begin{aligned}
i_L(t) &= i_{Ln}(t) = A \cdot e^{-5\cdot 10^{-4}\cdot t} \\
i_L(0^+) &= A = 0{,}36
\end{aligned}
$$

Por tanto,

$$i_L(t) = 0{,}36 \cdot e^{-5\cdot 10^{-4}\cdot t}\mathrm{A}$$

Para calcular la corriente $i_1(t)$ usamos un divisor de corriente a partir de $i_L(t)$:

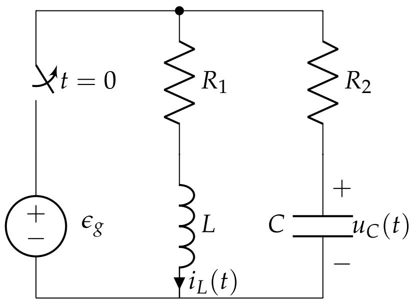
$$i_1(t) = -i_L(t) \cdot \frac{1/R_3}{1/R_3 + 1/(R_1 + R_2)} = -0{,}24 \cdot e^{-5\cdot 10^{-4}\cdot t}\mathrm{A}$$

En el primer apartado habíamos obtenido $i_1(0^-) = 200\,\mathrm{mA}$. Con esta ecuación obtenemos $i_1(0^+) = -240\,\mathrm{mA}$. Los valores no coinciden porque en una resistencia no hay condición de continuidad.

3. Transitorio de segundo orden

Problema 1.

El circuito de la figura ha alcanzado el régimen permanente con el interruptor cerrado. El interruptor se abre en $t = 0$. Calcula las expresiones de la tensión en bornes del condensador y de la corriente por la bobina para $t > 0$.

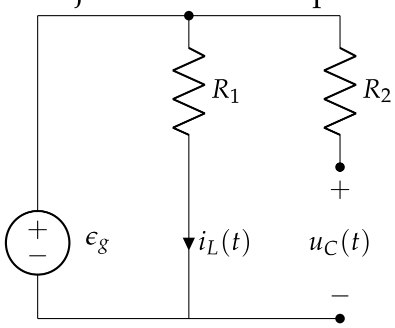


Datos:

$$\begin{aligned} \epsilon_g &= 10\,\mathrm{V} \\ R_1 &= 10\,\Omega \\ R_2 &= 5\,\Omega \\ L &= 2{,}5\,\mathrm{H} \\ C &= 0{,}2\,\mathrm{F} \end{aligned}$$

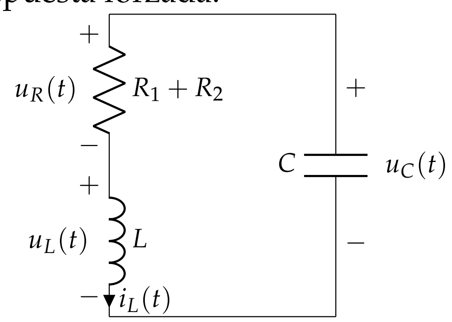
Solución

Calculamos las condiciones iniciales ($t = 0^-$)
Dibujamos el circuito para $t < 0$ y obtenemos:



$$\begin{aligned} u_C(t) &= 10\,\mathrm{V} \\ i_L(t) &= \frac{\epsilon_g}{R_1} = 1\,\mathrm{A} \end{aligned}$$

Por tanto, $u_c(0^+) = u_c(0^-) = 10\,\mathrm{V}$ y $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 1\,\mathrm{A}$.
A continuación dibujamos el circuito para $t > 0$ para obtener la respuesta natural y la respuesta forzada. En el circuito resultante no hay fuentes, por lo que no habrá respuesta forzada.

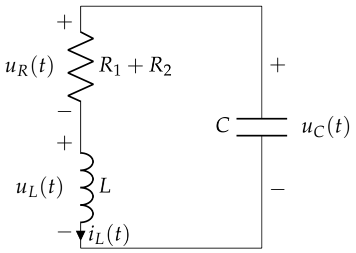


$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{R}{2L} = 3\,\mathrm{s}^{-1} \\ \omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}} = \sqrt{2}\mathrm{rad\,s}^{-1} \end{aligned}$$

Dado que $\alpha > \omega_0$ se trata de un transitorio sobreamortiguado:

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -0{,}354\,\mathrm{s}^{-1}$$
$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -5{,}645\,\mathrm{s}^{-1}$$
$$i_L(t) = A_1 \cdot e^{-0{,}354 \cdot t} + A_2 \cdot e^{-5{,}645 \cdot t}$$

Para determinar las constantes de integración recurrimos a las condiciones iniciales:



$$u_R(t) + u_L(t) = u_C(t)$$
$$u_L(0^+) = u_C(0^+) - u_R(0^+)$$
$$u_R(0^+) = R \cdot i_L(0^+) = 15\,\mathrm{V}$$
$$u_L(0^+) = 10 - 15 = -5\,\mathrm{V}$$

Por tanto,

$$i_L(0^+) = 1\,\mathrm{A}$$
$$\frac{di_L(t)}{dt}t = 0^+ = \frac{1}{L} \cdot u_L(0^+) = -2\,\mathrm{A\,s}^{-1}$$

Con estos resultados, particularizamos la ecuación de $i_L(t)$ para $t = 0$ y así planteamos las ecuaciones para obtener A_1 y A_2:

$$i_L(0^+) = A_1 + A_2 = 1$$
$$\frac{di_L(t)}{dt}t = 0^+ = A_1 \cdot s_1 + A_2 \cdot s_2 = -2$$

Por tanto,

$$A_1 = 0{,}689$$
$$A_2 = 0{,}311$$

Finalmente,

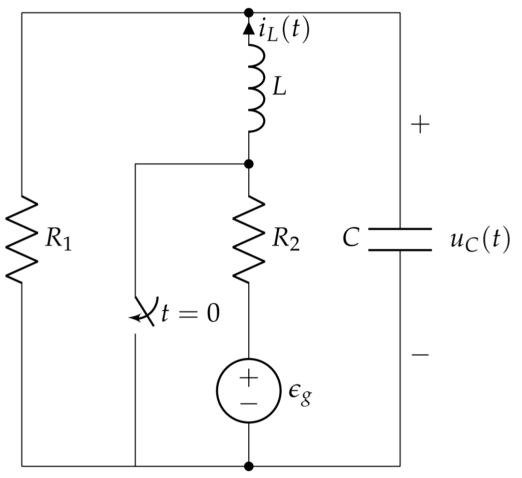
$$i_L(t) = 0{,}689 \cdot e^{-0{,}354 \cdot t} + 0{,}311 \cdot e^{-5{,}645 \cdot t}$$

Para obtener la tensión en el condensador recurrimos a la LKV:

$$\begin{aligned} u_C(t) &= u_R(t) + u_L(t) = \\ &= R \cdot i_L(t) + L\frac{di_L(t)}{dt} = \\ &= 9{,}7275 \cdot e^{-0{,}354 \cdot t} + 0{,}275 \cdot e^{-5{,}645 \cdot t} \end{aligned}$$

Problema 2.

En el circuito de la figura, calcula la tensión $u_c(t)$ para $t > 0$.

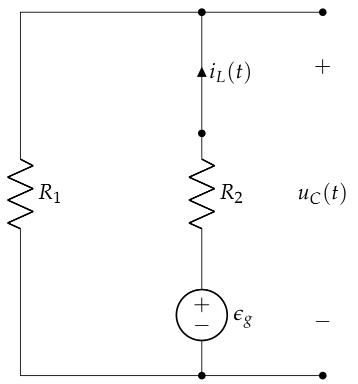


Datos:

$$
\begin{aligned}
\epsilon_g &= 4\,\mathrm{V}\\
R_1 &= 2\,\Omega\\
R_2 &= 2\,\Omega\\
L &= 2\,\mathrm{H}\\
C &= 0{,}25\,\mathrm{F}
\end{aligned}
$$

Solución

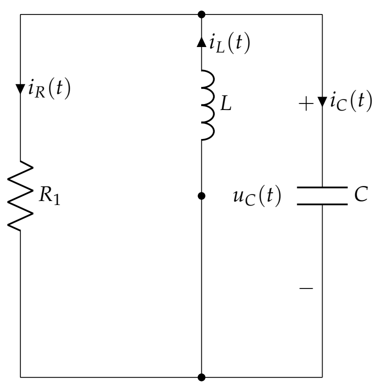
Calculamos las condiciones iniciales ($t = 0^-$). Dibujamos el circuito para $t < 0$ y obtenemos:



$$
\begin{aligned}
u_C(t) &= 2\,\mathrm{V}\\
i_L(t) &= \frac{\epsilon_g}{R_1 + R_2} = 1\,\mathrm{A}
\end{aligned}
$$

Por tanto, $u_c(0^+) = u_c(0^-) = 2\,\mathrm{V}$ y $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 1\,\mathrm{A}$.

A continuación dibujamos el circuito para $t > 0$ para obtener la respuesta natural y la respuesta forzada. En el circuito resultante no hay fuentes, por lo que no habrá respuesta forzada.

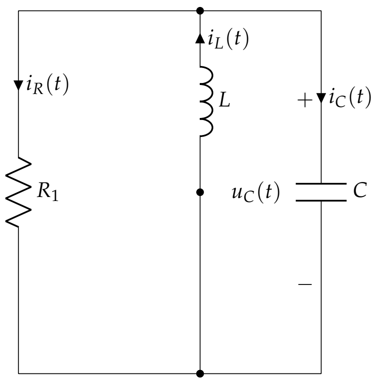


$$
\begin{aligned}
\alpha &= \frac{G}{2C} = 1\,\mathrm{s}^{-1}\\
\omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2\mathrm{rad\,s}^{-1}
\end{aligned}
$$

Dado que $\alpha < \omega_0$, se trata de un transitorio subamortiguado:

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \sqrt{3}\mathrm{rad\,s^{-1}}$$
$$u_C(t) = (B_1 \cdot \cos(\sqrt{3} \cdot t) + B_2 \cdot \sin(\sqrt{3} \cdot t)) \cdot e^{-t}$$

Para determinar las constantes de integración recurrimos a las condiciones iniciales:



$$i_C(0^+) = i_L(0^+) - i_R(0^+)$$
$$i_R(0^+) = G_1 \cdot u_C(0^+) = 1\,\mathrm{A}$$
$$i_C(0^+) = 1 - 1 = 0\,\mathrm{A}$$

Por tanto,

$$u_C(0^+) = 2\,\mathrm{V}$$
$$\frac{du_C(t)}{dt}t = 0^+ = \frac{1}{C} \cdot i_C(0^+) = 0\,\mathrm{V\,s^{-1}}$$

Con estos resultados, particularizamos la ecuación de $u_C(t)$ para $t = 0$ y así planteamos las ecuaciones para obtener B_1 y B_2:

$$u_C(0^+) = B_1 = 2$$
$$\frac{du_C(t)}{dt}t = 0^+ = -e^{-t} \cdot (2\cos(\sqrt{3}t) + B_2\sin(\sqrt{3}t)) +$$
$$+ e^{-t} \cdot (-2\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t) + \sqrt{3}B_2\cos(\sqrt{3}t)) =$$
$$= 0$$

Por tanto,

$$B_1 = 2$$
$$B_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Finalmente,

$$u_C(t) = (2 \cdot \cos(\sqrt{3} \cdot t) + \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \sin(\sqrt{3} \cdot t)) \cdot e^{-t}$$