

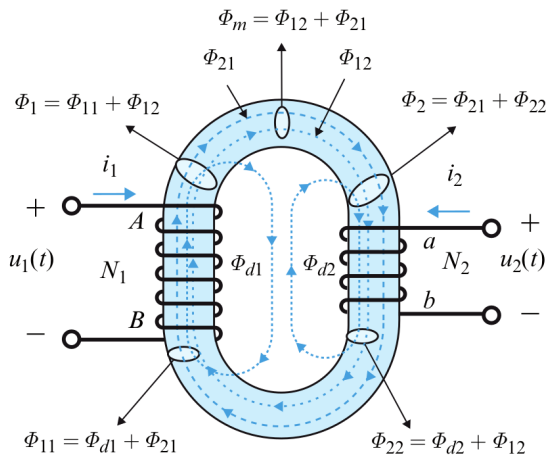
# Transformadores

## Teoría de Circuitos II

Oscar Perpiñán Lamigueiro

Mayo 2019

# Recordatorio



$$L_1 = N_1 \frac{\phi_{11}}{i_1}$$

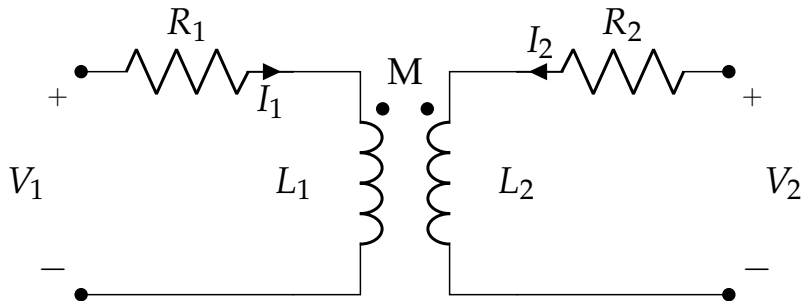
$$L_2 = N_2 \frac{\phi_{22}}{i_2}$$

$$M = N_1 \frac{\phi_{12}}{i_2} = N_2 \frac{\phi_{21}}{i_1}$$

$$M = k\sqrt{L_1 \cdot L_2}$$

- 1 Transformador Real
- 2 Transformador Perfecto
- 3 Transformador Ideal
- 4 Transferencia de Circuitos
- 5 Transformador Perfecto vs. Transformador Ideal
- 6 Transformador de Varios Devanados
- 7 Autotransformador

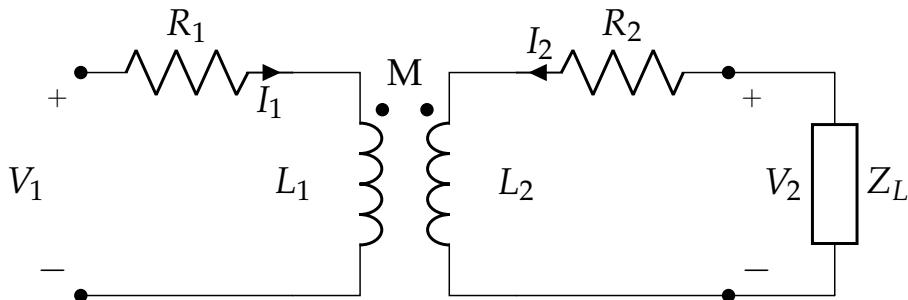
# Ecuaciones del Transformador Real



$$\bar{U}_1 = (R_1 + j\omega L_1) \cdot \bar{I}_1 + j\omega M \cdot \bar{I}_2$$

$$\bar{U}_2 = j\omega M \cdot \bar{I}_1 + (R_2 + j\omega L_2) \cdot \bar{I}_2$$

## Ejemplo: impedancia de entrada desde primario



Ecuaciones del transformador

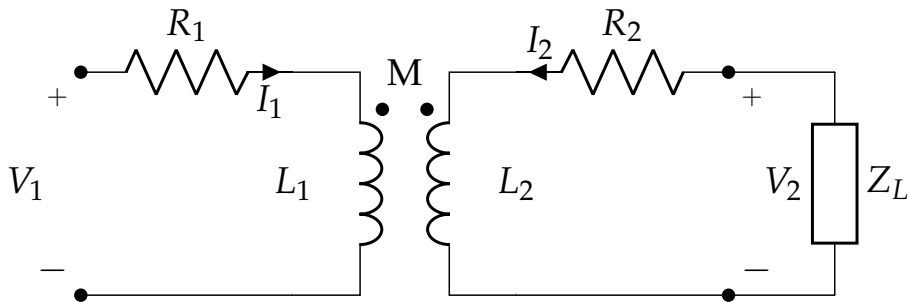
$$\bar{U}_1 = (R_1 + j\omega L_1) \cdot \bar{I}_1 + j\omega M \cdot \bar{I}_2$$

$$\bar{U}_2 = j\omega M \cdot \bar{I}_1 + (R_2 + j\omega L_2) \cdot \bar{I}_2$$

Ecuación de la carga

$$\bar{U}_2 = -\bar{I}_2 \cdot \bar{Z}_L$$

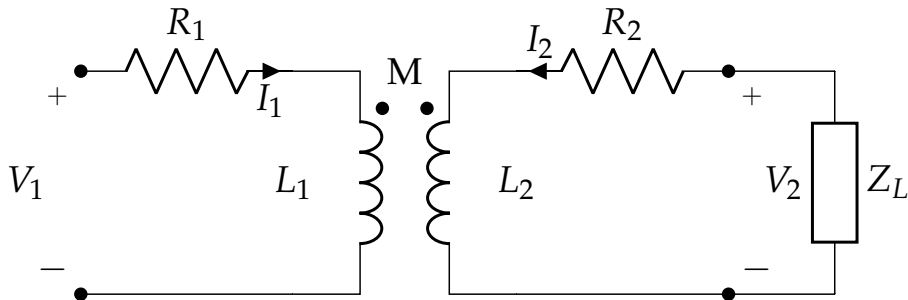
## Ejemplo: impedancia de entrada desde primario



Combinando la ecuación del secundario con la ecuación de la carga:

$$\bar{I}_2 = -\frac{j\omega M}{\bar{Z}_L + (R_2 + j\omega L_2)} \cdot \bar{I}_1$$

## Ejemplo: impedancia de entrada desde primario



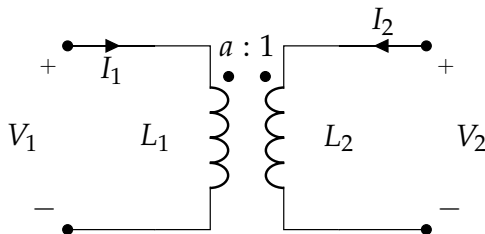
Combinando con la ecuación del primario:

$$\bar{Z}_{in} = \frac{\bar{V}_1}{\bar{I}_1} = (R_1 + j\omega L_1) + \frac{\omega^2 M^2}{\bar{Z}_L + (R_2 + j\omega L_2)}$$

- 1 Transformador Real
- 2 Transformador Perfecto**
- 3 Transformador Ideal
- 4 Transferencia de Circuitos
- 5 Transformador Perfecto vs. Transformador Ideal
- 6 Transformador de Varios Devanados
- 7 Autotransformador



# Definición



Las pérdidas resistivas son despreciables.

$$R_1 = R_2 = 0$$

El acoplamiento es perfecto.

$$k = 1 \rightarrow \begin{cases} \phi_{12} &= \phi_{22} \\ \phi_{21} &= \phi_{11} \end{cases}$$

# Relación de Transformación

Retomamos las ecuaciones de  $M_{12} = M_{21} = M$ :

$$N_1 \frac{\phi_{12}}{i_2} = N_2 \frac{\phi_{21}}{i_1}$$

Con la condición  $k = 1$  escribimos:

$$N_1 \frac{\phi_{22}}{i_2} = N_2 \frac{\phi_{11}}{i_1}$$

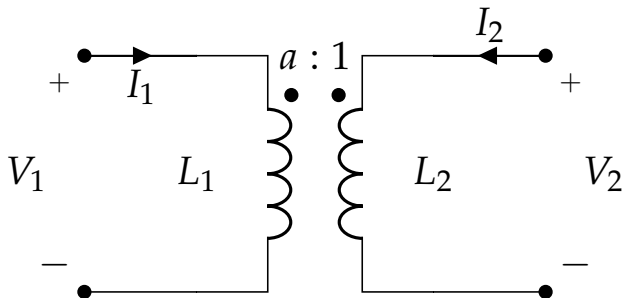
Y con las definiciones de  $L_1$  y  $L_2$ :

$$N_1 \frac{L_2}{N_2} = N_2 \frac{L_1}{N_1}$$

Obtenemos la relación de transformación:

$$\boxed{\frac{L_1}{L_2} = \left( \frac{N_1}{N_2} \right)^2 = a^2}$$

# Ecuaciones del Transformador Perfecto



$$\bar{U}_1 = j\omega L_1 \cdot \bar{I}_1 + j\omega M \cdot \bar{I}_2$$

$$\bar{U}_2 = j\omega M \cdot \bar{I}_1 + j\omega L_2 \cdot \bar{I}_2$$

# Relación de Tensiones

Dividiendo las ecuaciones:

$$\frac{\bar{U}_1}{\bar{U}_2} = \frac{j\omega L_1 \cdot \bar{I}_1 + j\omega M \cdot \bar{I}_2}{j\omega M \cdot \bar{I}_1 + j\omega L_2 \cdot \bar{I}_2}$$

Empleando la relación de transformación:

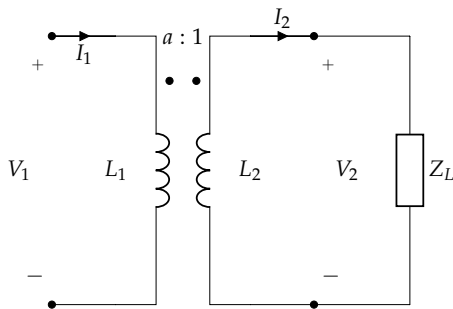
$$\frac{L_1}{L_2} = a^2 \rightarrow \begin{cases} L_1 &= a^2 \cdot L_2 \\ M &= a \cdot L_2 \end{cases}$$

Obtenemos:

$$\frac{\bar{U}_1}{\bar{U}_2} = \frac{a^2 L_2 \cdot \bar{I}_1 + a L_2 \cdot \bar{I}_2}{a L_2 \cdot \bar{I}_1 + L_2 \cdot \bar{I}_2}$$

$$\boxed{\frac{\bar{U}_1}{\bar{U}_2} = a = \frac{N_1}{N_2}}$$

## Ejemplo: Impedancia de Entrada



Ecuaciones del transformador:

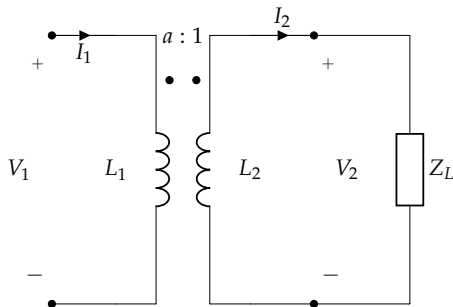
$$\bar{U}_1 = j\omega L_1 \cdot \bar{I}_1 - j\omega M \cdot \bar{I}_2$$

$$\bar{U}_2 = j\omega M \cdot \bar{I}_1 - j\omega L_2 \cdot \bar{I}_2$$

Ecuación de la impedancia:

$$\bar{U}_2 = \bar{Z}_L \cdot \bar{I}_2$$

## Ejemplo: Impedancia de Entrada



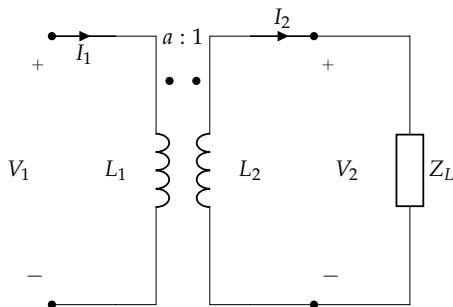
Despejamos  $I_2$ :

$$\bar{I}_2 = \frac{j\omega M}{j\omega L_2 + \bar{Z}_L} \cdot \bar{I}_1$$

Y sustituimos:

$$\bar{Z}_{in} = \frac{\bar{U}_1}{\bar{I}_1} = j\omega L_1 + \frac{j\omega M}{j\omega L_2 + \bar{Z}_L}$$

## Ejemplo: Impedancia de Entrada

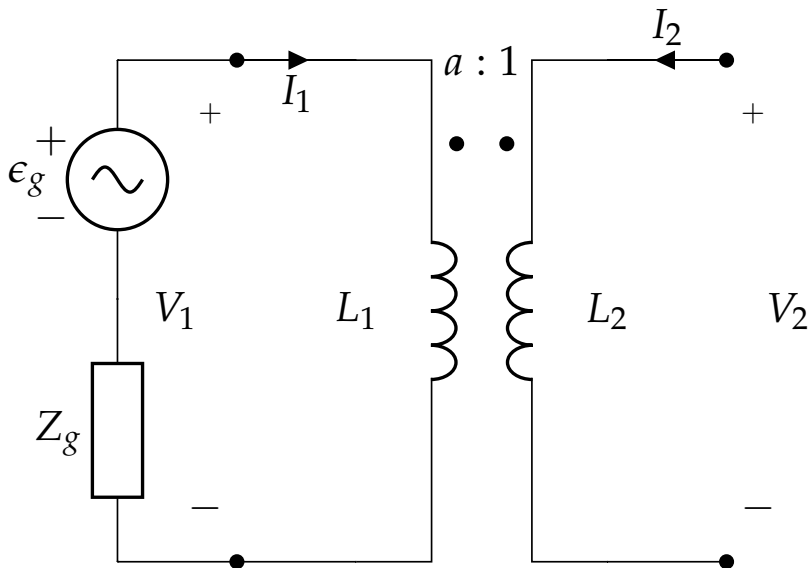


Teniendo en cuenta la relación entre  $L_1$ ,  $L_2$  y  $M$ :

$$\bar{Z}_{in} = \frac{j\omega L_1 \cdot (a^2 \bar{Z}_L)}{j\omega L_1 + (a^2 \cdot \bar{Z}_L)}$$

$$\bar{Z}_{in} = a^2 \cdot \frac{j\omega L_2 \cdot \bar{Z}_L}{j\omega L_2 + \bar{Z}_L}$$

## Ejemplo: Equivalente de Thévenin desde secundario





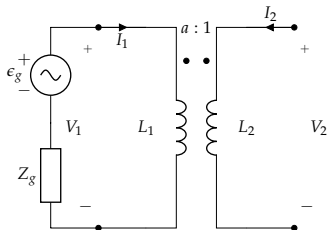
# Tensión de Thévenin

Ecuaciones del transformador:

$$\bar{I}_2 = 0 \rightarrow \begin{cases} \bar{U}_1 = j\omega L_1 \cdot \bar{I}_1 \\ \bar{U}_2 = j\omega M \cdot \bar{I}_1 \end{cases}$$

Ecuación del generador:

$$\bar{U}_1 = \bar{\epsilon}_g - \bar{I}_1 \cdot \bar{Z}_g$$



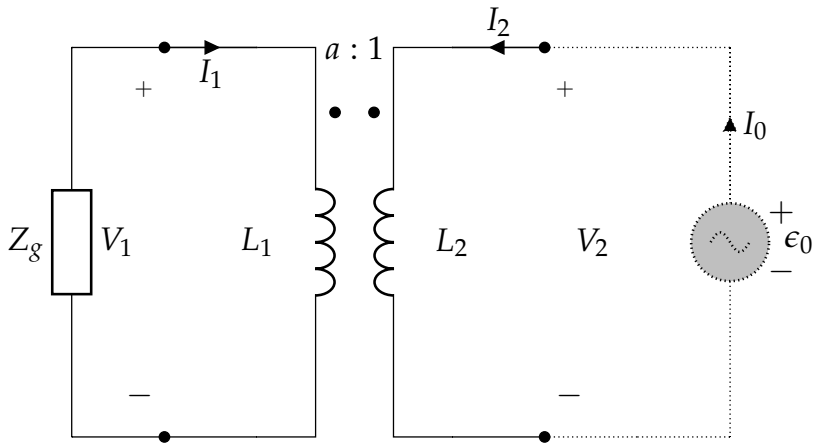
Tensión en abierto:

$$\bar{\epsilon}_{th} = \frac{j\omega M}{j\omega L_1 + \bar{Z}_g} \cdot \bar{\epsilon}_g$$

Teniendo en cuenta que  $M = L_1/a$ :

$$\bar{\epsilon}_{th} = \frac{1}{a} \cdot \left( \frac{j\omega L_1}{j\omega L_1 + \bar{Z}_g} \right) \cdot \bar{\epsilon}_g$$

# Impedancia de Thévenin



# Impedancia de Thévenin

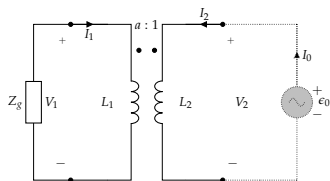
Ecuaciones del transformador:

$$\bar{U}_1 = j\omega L_1 \cdot \bar{I}_1 + j\omega M \cdot \bar{I}_0$$

$$\bar{\epsilon}_0 = j\omega M \cdot \bar{I}_1 + j\omega L_2 \cdot \bar{I}_0$$

Ecuación de la impedancia:

$$\bar{U}_1 = -\bar{Z}_g \cdot \bar{I}_1$$



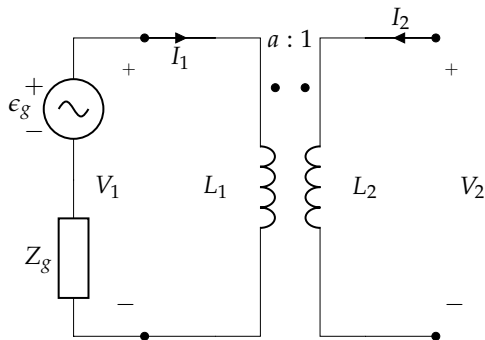
Impedancia de Thévenin:

$$\bar{Z}_{th} = \frac{\bar{\epsilon}_0}{\bar{I}_0} = j\omega L_2 + \frac{\omega^2 M^2}{j\omega L_1 + \bar{Z}_g}$$

Con  $L_2 = L_1/a^2$  y  $M = L_1/a$ :

$$\bar{Z}_{th} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{j\omega L_1 \cdot \bar{Z}_g}{j\omega L_1 + \bar{Z}_g}$$

# Resumen: Equivalente de Thévenin

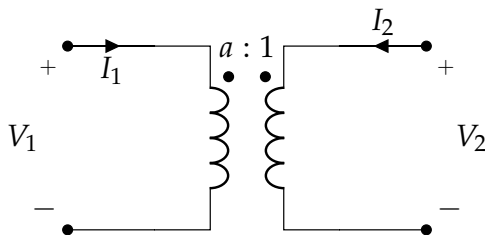


$$\bar{Z}_{th} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{j\omega L_1 \cdot \bar{Z}_g}{j\omega L_1 + \bar{Z}_g}$$

$$\bar{\epsilon}_{th} = \frac{1}{a} \cdot \left( \frac{j\omega L_1}{j\omega L_1 + \bar{Z}_g} \right) \cdot \bar{\epsilon}_g$$

- 1 Transformador Real
- 2 Transformador Perfecto
- 3 Transformador Ideal**
- 4 Transferencia de Circuitos
- 5 Transformador Perfecto vs. Transformador Ideal
- 6 Transformador de Varios Devanados
- 7 Autotransformador

# Definición



Las pérdidas resistivas son despreciables.

$$R_1 = R_2 = 0$$

El acoplamiento es perfecto.

$$k = 1$$

Las bobinas tienen un número muy elevado de espiras.

$$N_1 \rightarrow \infty$$

$$N_2 \rightarrow \infty$$

# El flujo en cada bobina es nulo

Para que las tensiones inducidas sean finitas...

$$\overline{U}_1 = N_1 \overline{\phi}_1$$

$$\overline{U}_2 = N_2 \overline{\phi}_2$$

...los flujos (fasoriales) que los atraviesan deben ser nulos.

$$\overline{\phi}_1 \rightarrow 0$$

$$\overline{\phi}_2 \rightarrow 0$$

Siendo:

$$\overline{\phi}_1 = \overline{\phi}_{11} + \overline{\phi}_{12}$$

$$\overline{\phi}_2 = \overline{\phi}_{22} + \overline{\phi}_{21}$$

# El flujo mutuo es nulo

Teniendo en cuenta que el acoplamiento es perfecto,  $k = 1$ :

$$\left. \begin{array}{l} \phi_{12} = \phi_{22} \\ \phi_{21} = \phi_{11} \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 = \bar{\phi}_{21} + \bar{\phi}_{12} \\ 0 = \bar{\phi}_{12} + \bar{\phi}_{21} \end{array} \right.$$

O también:

$$\boxed{\bar{\phi}_{11} + \bar{\phi}_{22} = 0}$$



# Relación de Transformación

Hemos obtenido:

$$\bar{\phi}_{11} + \bar{\phi}_{22} = 0$$

Con las definiciones de  $L_1, L_2$ :

$$L_1 = N_1 \frac{\phi_{11}}{I_1}; \quad L_2 = N_2 \frac{\phi_{22}}{I_2}$$

Podemos escribir:

$$\frac{L_1 \bar{I}_1}{N_1} + \frac{L_2 \bar{I}_2}{N_2} = 0$$

Y con la relación entre ambas obtenemos

$$L_1 = L_2 \cdot \left( \frac{N_1}{N_2} \right)^2 \rightarrow \frac{N_1 L_2 \bar{I}_1}{N_2^2} + \frac{L_2 \bar{I}_2}{N_2} = 0 \rightarrow \boxed{\frac{\bar{I}_1}{\bar{I}_2} = \mp \frac{1}{a} = \mp \frac{N_2}{N_1}}$$

# Un transformador ideal no consume potencia

$$\bar{S}_1 = \bar{V}_1 \cdot \bar{I}_1^*$$

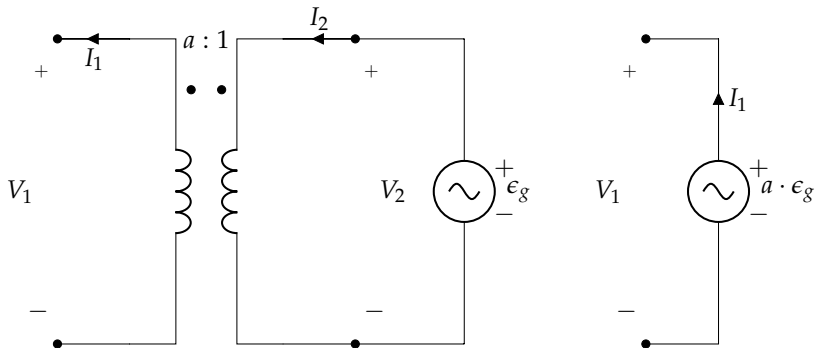
$$\bar{S}_2 = \bar{V}_2 \cdot \bar{I}_2^*$$

$$\bar{V}_2 \cdot \bar{I}_2^* = \frac{1}{a} \cdot \bar{V}_1 \cdot a \cdot \bar{I}_1^* = \bar{S}_1$$

$$\boxed{\bar{S}_1 = \bar{S}_2} \quad \boxed{P_1 = P_2} \quad \boxed{Q_1 = Q_2}$$

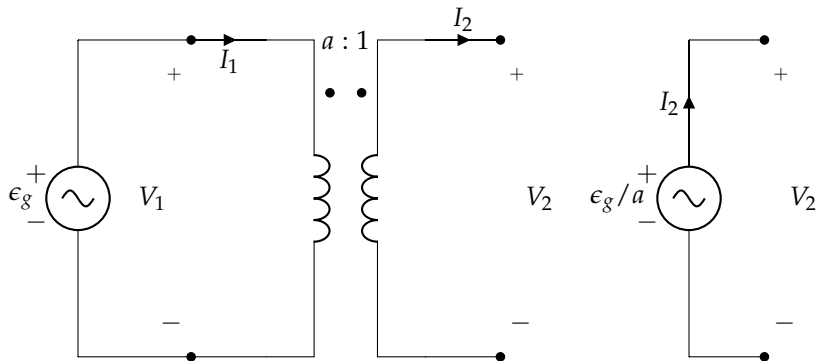
- 1 Transformador Real
- 2 Transformador Perfecto
- 3 Transformador Ideal
- 4 Transferencia de Circuitos**
- 5 Transformador Perfecto vs. Transformador Ideal
- 6 Transformador de Varios Devanados
- 7 Autotransformador

# Fuente de Tensión de Secundario a Primario



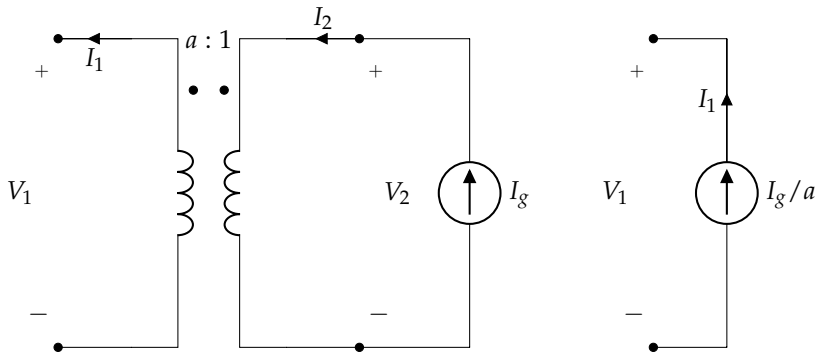
$$\bar{V}_1 = a \cdot \bar{V}_2 \rightarrow \boxed{\bar{\epsilon}_{g1} = a \cdot \bar{\epsilon}_g}$$

# Fuente de Tensión de Primario a Secundario



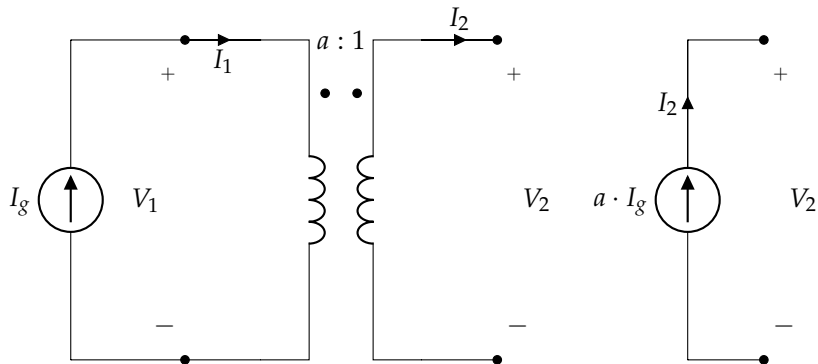
$$\bar{V}_2 = \bar{V}_1/a \rightarrow \boxed{\bar{\epsilon}_{g2} = \bar{\epsilon}_g/a}$$

# Fuente de Corriente de Secundario a Primario



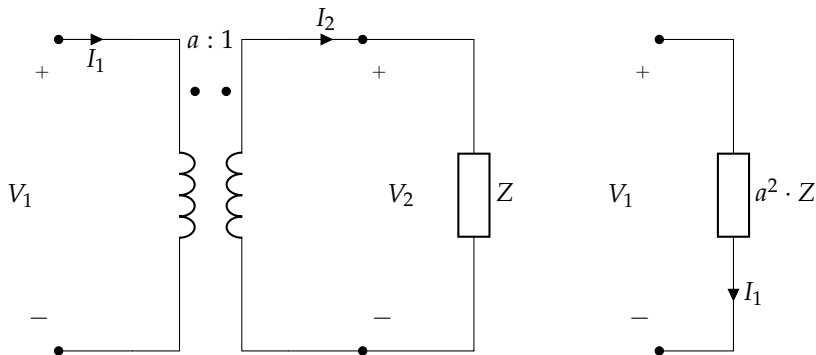
$$\bar{I}_1 = \bar{I}_2 / a \rightarrow \boxed{\bar{I}_{g1} = \bar{I}_g / a}$$

# Fuente de Corriente de Primario a Secundario



$$\bar{I}_2 = a \cdot \bar{I}_1 \rightarrow \boxed{\bar{I}_{g2} = a \cdot \bar{I}_g}$$

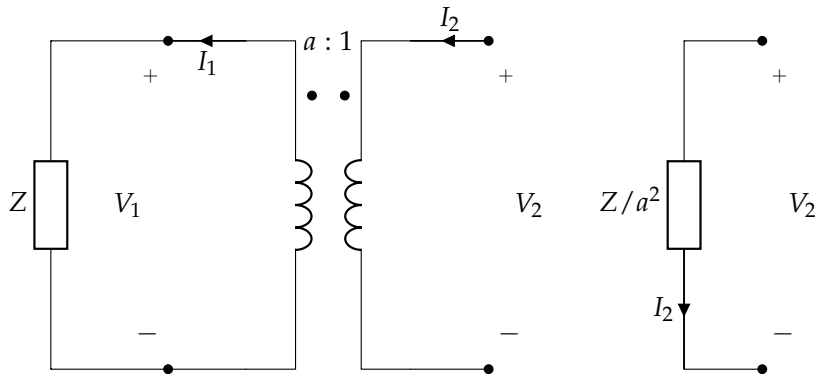
# Impedancia de Secundario a Primario



$$\left. \begin{array}{l} \bar{V}_1 = a \cdot \bar{V}_2 \\ \bar{I}_1 = \bar{I}_2 / a \end{array} \right\} \rightarrow \boxed{\bar{Z}_1 = \frac{\bar{V}_1}{\bar{I}_1} = a^2 \cdot \bar{Z}}$$



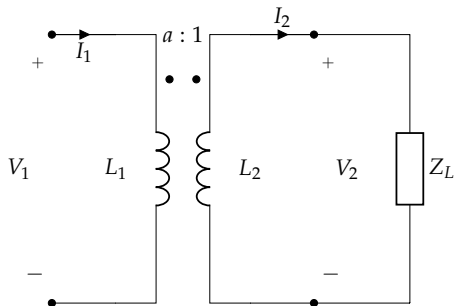
# Impedancia de Primario a Secundario



$$\left. \begin{aligned} \bar{V}_2 &= \bar{V}_1 / a \\ \bar{I}_2 &= a \cdot \bar{I}_1 \end{aligned} \right\} \rightarrow \boxed{\bar{Z}_2 = \frac{\bar{V}_2}{\bar{I}_2} = \bar{Z} / a^2}$$

- 1 Transformador Real
- 2 Transformador Perfecto
- 3 Transformador Ideal
- 4 Transferencia de Circuitos
- 5 Transformador Perfecto vs. Transformador Ideal**
- 6 Transformador de Varios Devanados
- 7 Autotransformador

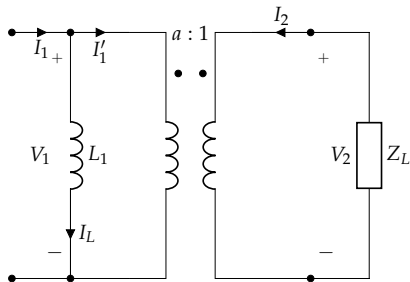
# Recordatorio: impedancia de entrada de un T. Perfecto



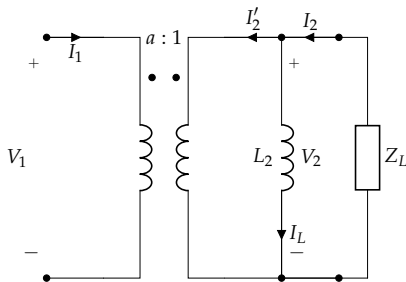
$$\bar{Z}_{in} = \frac{j\omega L_1 \cdot (a^2 \bar{Z}_L)}{j\omega L_1 + (a^2 \cdot \bar{Z}_L)}$$

$$\bar{Z}_{in} = a^2 \cdot \frac{j\omega L_2 \cdot \bar{Z}_L}{j\omega L_2 + \bar{Z}_L}$$

# Circuito equivalente con transformador ideal

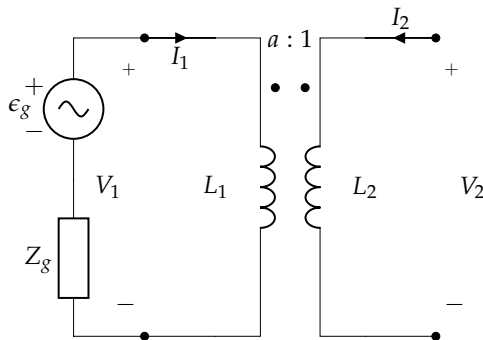


$$\bar{Z}_{in} = \frac{j\omega L_1 \cdot (a^2 \bar{Z}_L)}{j\omega L_1 + (a^2 \cdot \bar{Z}_L)}$$



$$\bar{Z}_{in} = a^2 \cdot \frac{j\omega L_2 \cdot \bar{Z}_L}{j\omega L_2 + \bar{Z}_L}$$

# Recordatorio: Equivalente de Thévenin



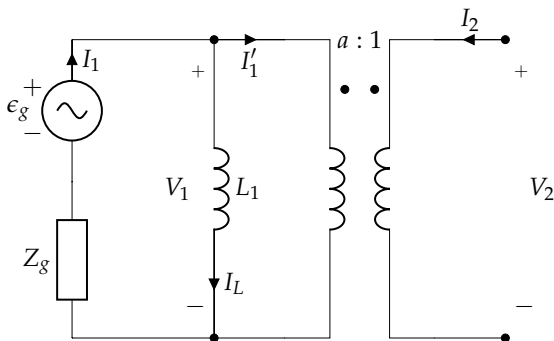
$$\bar{Z}_{th} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{j\omega L_1 \cdot \bar{Z}_g}{j\omega L_1 + \bar{Z}_g}$$

$$\bar{\epsilon}_{th} = \frac{1}{a} \cdot \left( \frac{j\omega L_1}{j\omega L_1 + \bar{Z}_g} \right) \cdot \bar{\epsilon}_g$$

# Equivalente en primario con transformador ideal

$$\bar{Z}_{th} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{j\omega L_1 \cdot \bar{Z}_g}{j\omega L_1 + \bar{Z}_g}$$

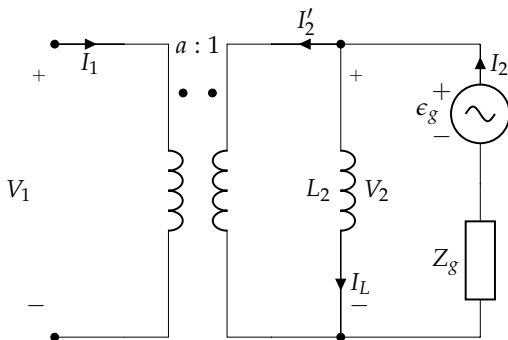
$$\bar{\epsilon}_{th} = \frac{1}{a} \cdot \left( \frac{j\omega L_1}{j\omega L_1 + \bar{Z}_g} \right) \cdot \bar{\epsilon}_g$$



# Equivalente en secundario con transformador ideal

$$\bar{Z}_{th} = a^2 \cdot \frac{j\omega L_2 \cdot \bar{Z}_g}{j\omega L_2 + \bar{Z}_g}$$

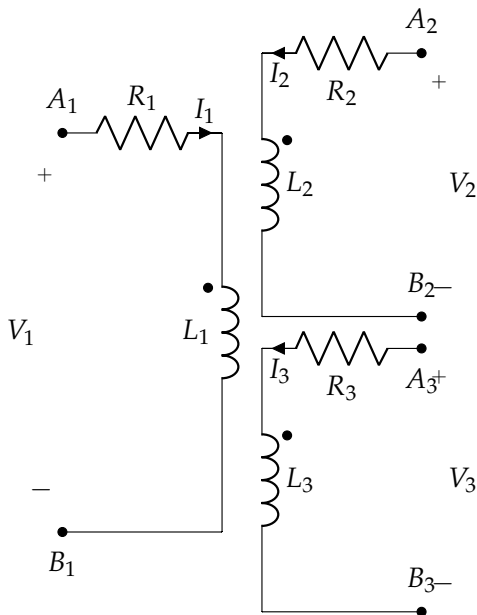
$$\bar{\epsilon}_{th} = a \cdot \left( \frac{j\omega L_2}{j\omega L_2 + \bar{Z}_g} \right) \cdot \bar{\epsilon}_g$$



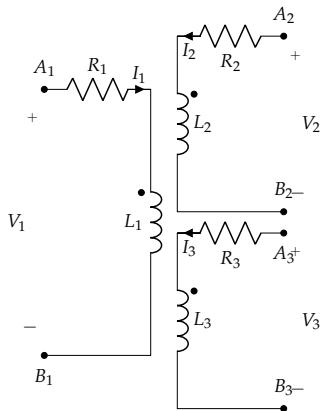
- 1 Transformador Real
- 2 Transformador Perfecto
- 3 Transformador Ideal
- 4 Transferencia de Circuitos
- 5 Transformador Perfecto vs. Transformador Ideal
- 6 Transformador de Varios Devanados**
- 7 Autotransformador



# Transformador Real de Varios Devanados



# Ecuaciones del Transformador Real

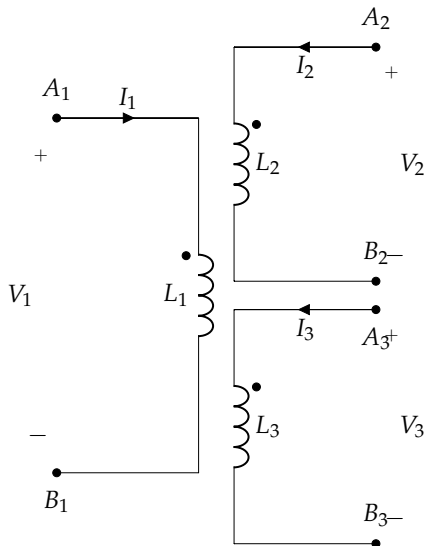


$$\bar{U}_1 = (R_1 + j\omega L_1) \cdot \bar{I}_1 + j\omega M_{12} \cdot \bar{I}_2 + j\omega M_{13} \cdot \bar{I}_3$$

$$\bar{U}_2 = j\omega M_{12} \cdot \bar{I}_1 + (R_2 + j\omega L_2) \cdot \bar{I}_2 + j\omega M_{23} \cdot \bar{I}_3$$

$$\bar{U}_3 = j\omega M_{13} \cdot \bar{I}_1 + j\omega M_{12} \cdot \bar{I}_2 + (R_3 + j\omega L_3) \cdot \bar{I}_3$$

# Transformador Perfecto



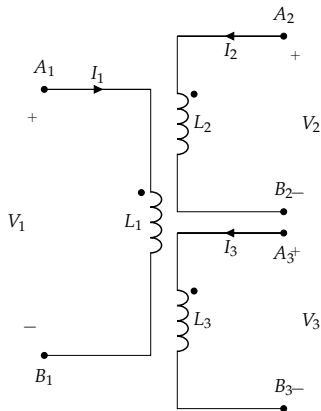
Las pérdidas resistivas son despreciables.

$$R_1 = R_2 = R_3 = 0$$

El acoplamiento es perfecto.

$$k_{12} = k_{13} = k_{23} = 1$$

# Ecuaciones del Transformador Perfecto

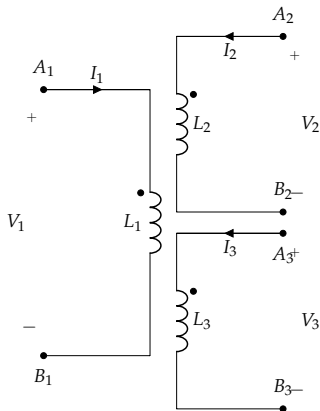


$$\bar{U}_1 = j\omega L_1 \cdot \bar{I}_1 + j\omega M_{12} \cdot \bar{I}_2 + j\omega M_{13} \cdot \bar{I}_3$$

$$\bar{U}_2 = j\omega M_{12} \cdot \bar{I}_1 + j\omega L_2 \cdot \bar{I}_2 + j\omega M_{23} \cdot \bar{I}_3$$

$$\bar{U}_3 = j\omega M_{13} \cdot \bar{I}_1 + j\omega M_{12} \cdot \bar{I}_2 + j\omega L_3 \cdot \bar{I}_3$$

# Relaciones de Transformación



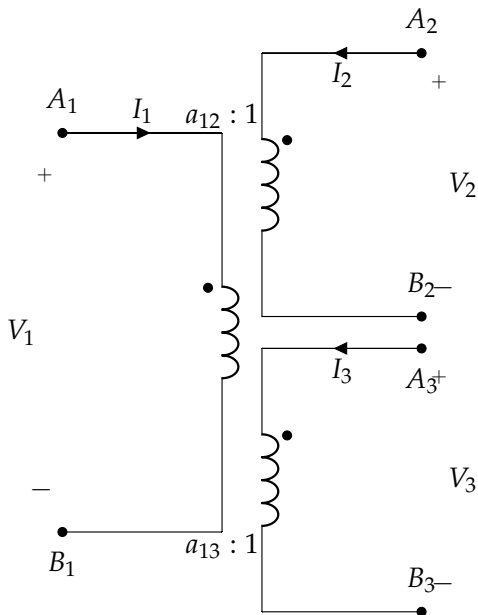
$$\frac{L_1}{L_2} = \left( \frac{N_1}{N_2} \right)^2 = a_{12}^2$$

$$\frac{L_1}{L_3} = \left( \frac{N_1}{N_3} \right)^2 = a_{13}^2$$

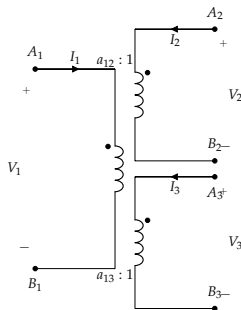
$$\frac{\overline{U}_1}{\overline{U}_2} = a_{12}$$

$$\frac{\overline{U}_1}{\overline{U}_3} = a_{13}$$

# Transformador Ideal



# Relación de Transformación del Transformador Ideal



Debido a las condiciones de idealidad:

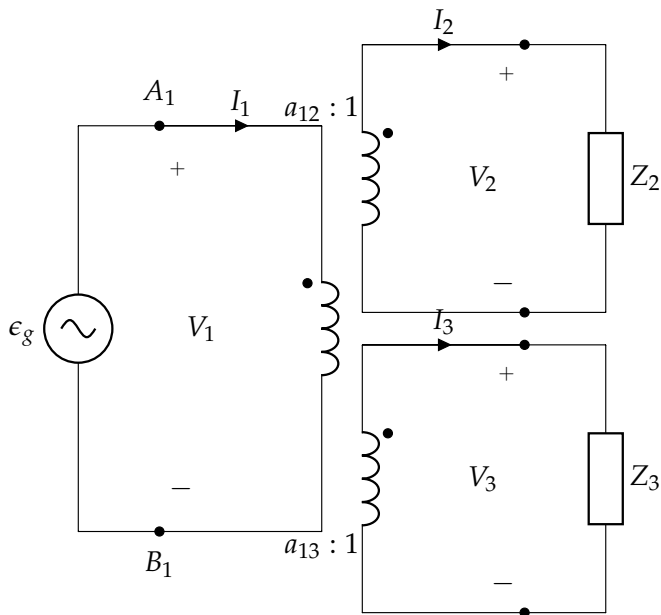
$$\bar{\phi}_{11} \pm \bar{\phi}_{22} \pm \bar{\phi}_{33} = 0$$

$$N_1 \bar{I}_1 \pm N_2 \bar{I}_2 \pm N_3 \bar{I}_3 = 0$$

En términos de corriente:

$$\bar{I}_1 = \mp 1/a_{12} \cdot \bar{I}_2 \mp 1/a_{13} \cdot \bar{I}_3$$

# Impedancia de Entrada





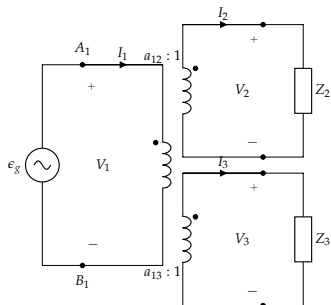
# Impedancia de Entrada

Ecuaciones del transformador:

$$\bar{U}_1 = \bar{U}_2 \cdot a_{12}$$

$$\bar{U}_1 = \bar{U}_3 \cdot a_{13}$$

$$\bar{I}_1 = 1/a_{12} \cdot \bar{I}_2 + 1/a_{13} \cdot \bar{I}_3$$



Ecuaciones Terminales

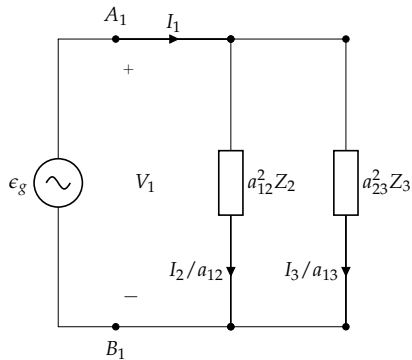
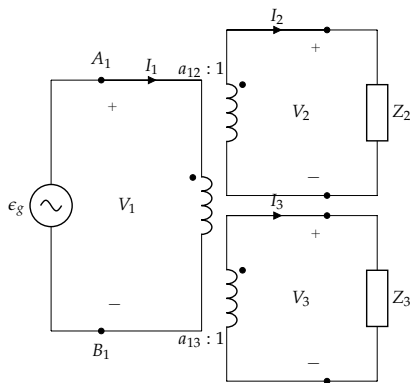
$$\bar{U}_2 = \bar{Z}_2 \cdot \bar{I}_2$$

$$\bar{U}_3 = \bar{Z}_3 \cdot \bar{I}_3$$

Resultado:

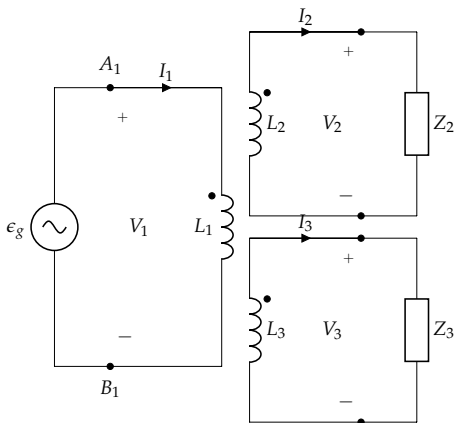
$$\frac{\bar{I}_1}{\bar{U}_1} = \bar{Y}_{in} = \frac{1}{a_{12}^2 \bar{Z}_2} + \frac{1}{a_{13}^2 \bar{Z}_3}$$

# Circuito Equivalente

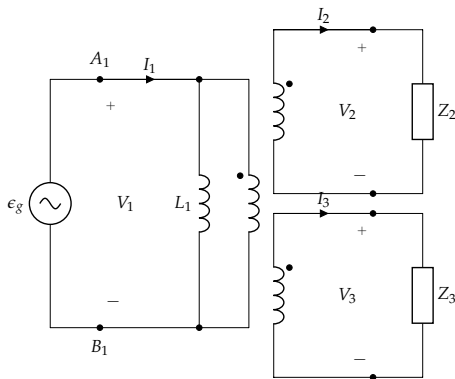


# Circuito Equivalente de un Transformador Perfecto

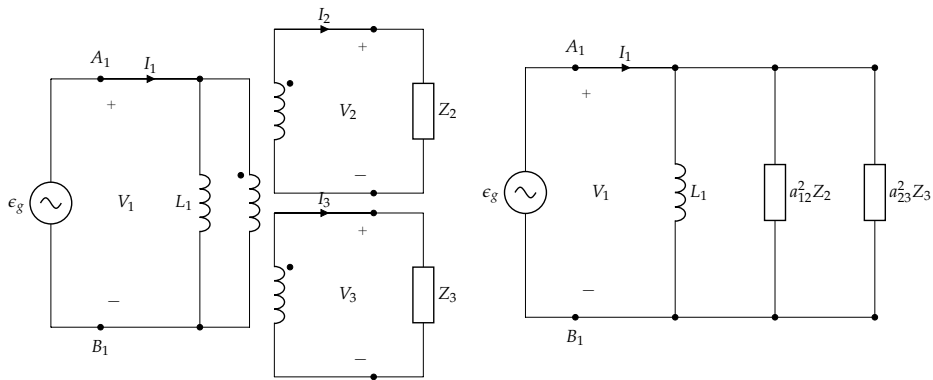
## Transformador Perfecto



## Equivalente Ideal

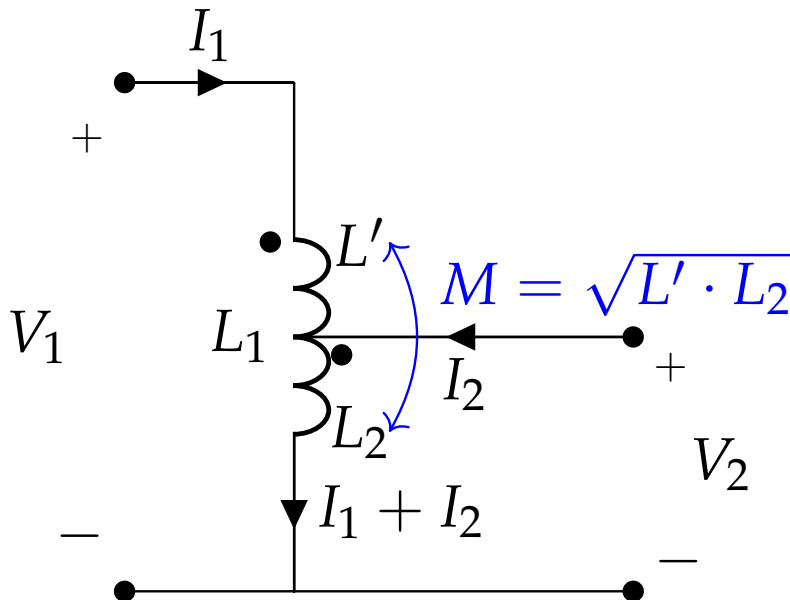


# Circuito Equivalente de un Transformador Perfecto

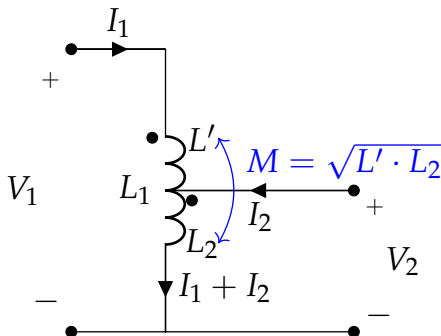


- 1 Transformador Real
- 2 Transformador Perfecto
- 3 Transformador Ideal
- 4 Transferencia de Circuitos
- 5 Transformador Perfecto vs. Transformador Ideal
- 6 Transformador de Varios Devanados
- 7 Autotransformador

# Autotransformador Perfecto



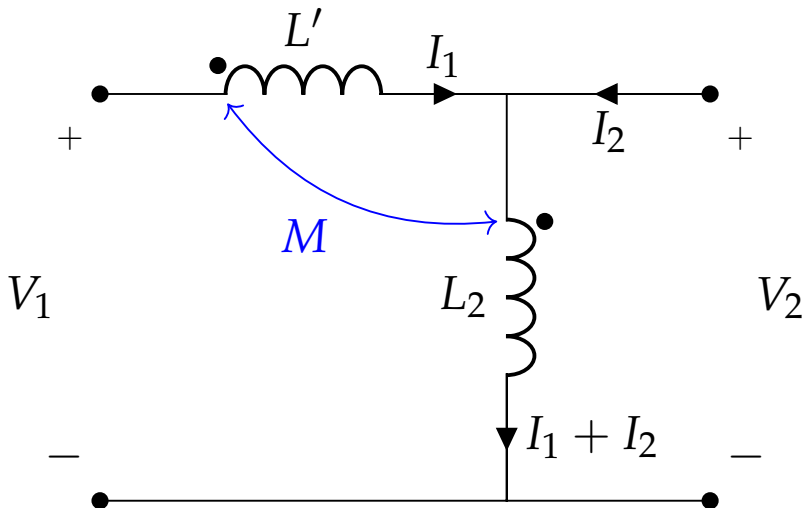
# Ecuaciones del Autotransformador Perfecto



$$\bar{U}_1 = j\omega L_1 \cdot \bar{I}_1 + j\omega(M + L_2) \cdot \bar{I}_2$$

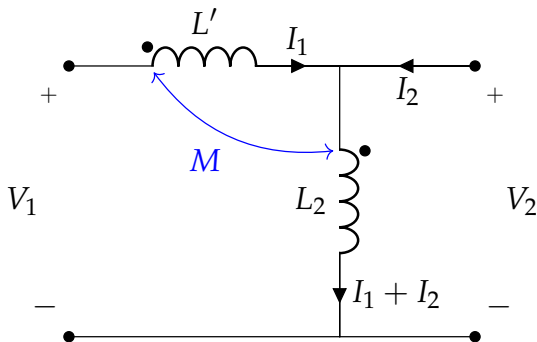
$$\bar{U}_2 = j\omega(M + L_2) \cdot \bar{I}_1 + j\omega L_2 \cdot \bar{I}_2$$

# Circuito Alternativo del Autotransformador Perfecto





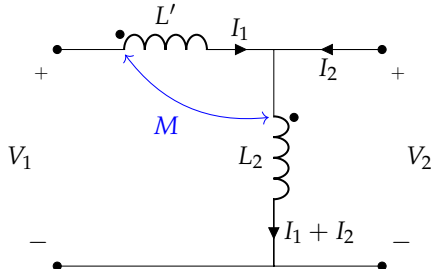
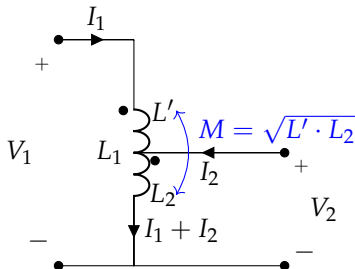
# Ecuaciones del Circuito Alternativo



$$\bar{U}_1 = j\omega(L' + L_2 + 2M) \cdot \bar{I}_1 + j\omega(L_2 + M) \cdot \bar{I}_2$$

$$\bar{U}_2 = j\omega(L_2 + M) \cdot \bar{I}_1 + j\omega L_2 \cdot \bar{I}_2$$

# Ecuaciones Comparadas



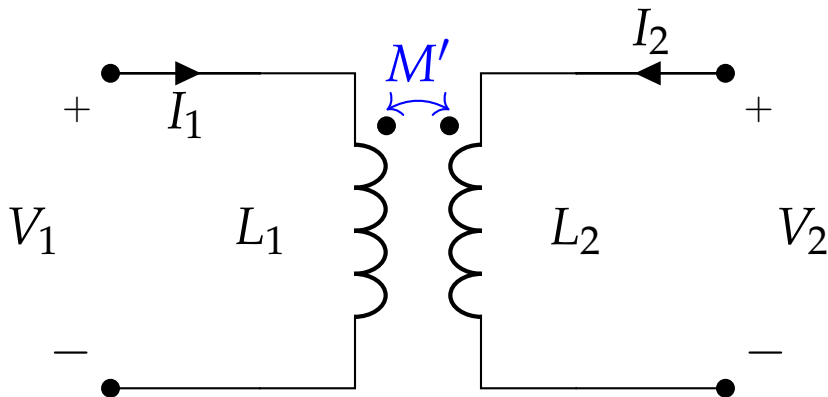
$$\bar{U}_1 = j\omega L_1 \cdot \bar{I}_1 + j\omega(M + L_2) \cdot \bar{I}_2 = j\omega(L' + L_2 + 2M) \cdot \bar{I}_1 + j\omega(M + L_2) \cdot \bar{I}_2$$

$$\bar{U}_2 = j\omega(L_2 + M) \cdot \bar{I}_1 + j\omega L_2 \cdot \bar{I}_2 = j\omega(L_2 + M) \cdot \bar{I}_1 + j\omega L_2 \cdot \bar{I}_2$$

$$L_1 = L' + L_2 + 2M$$

$$M' = M + L_2$$

# Transformador Perfecto Equivalente

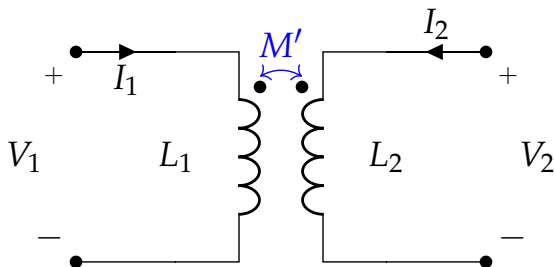


$$L_1 = L' + L_2 + 2M$$

$$M = \sqrt{L' \cdot L_2}$$

$$M' = M + L_2$$

# Transformador Perfecto Equivalente



Comprobamos:

$$\begin{aligned} M' &= \sqrt{L_1 \cdot L_2} = \\ &= \sqrt{(L' + L_2 + 2M)L_2} = \\ &= \sqrt{L'L_2 + L_2^2 + 2ML_2} = \\ &= \sqrt{M^2 + L_2^2 + 2ML_2} = \\ &= M + L_2 \end{aligned}$$

# Autotransformador Ideal

