Teoremas fundamentales

Teoría de Circuitos II

Autor: Luis Badesa Bernardo

(basado en las diapositivas de Óscar Perpiñán Lamigueiro)

Circuitos lineales

Un circuito eléctrico es **lineal** si los elementos pasivos y activos que incluye son lineales:

- **Elemento pasivo**: la relación entre tensión y corriente es lineal (R, L, C)
- **Fuente dependiente**: su salida tiene una relación lineal con la magnitud del circuito de la que depende

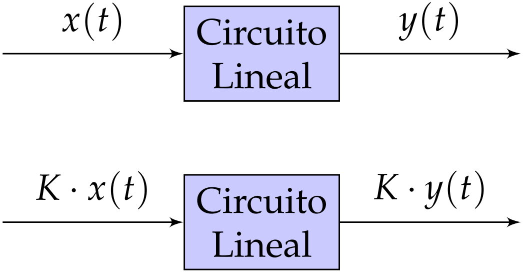
Propiedades de los circuitos lineales

- **Proporcionalidad** u homogeneidad
- **Superposición** o aditividad

Proporcionalidad

$y(t)$ es la respuesta de un **circuito lineal** a una excitación $x(t)$

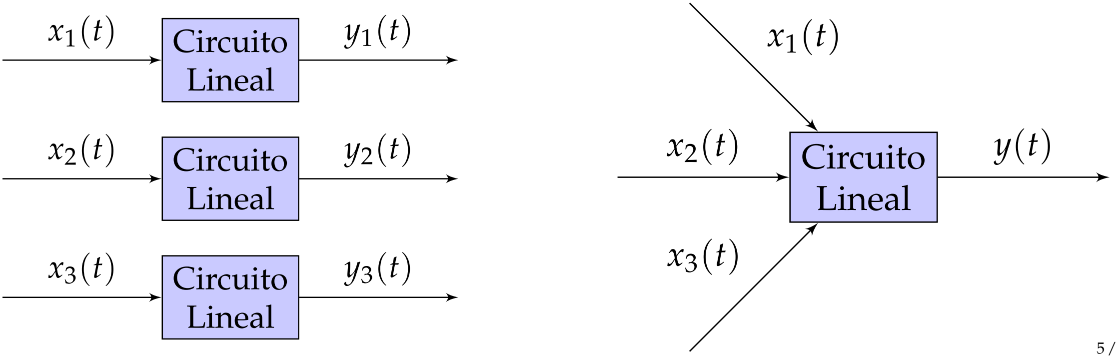
Si la excitación es multiplicada por una **constante**, $K \cdot x(t)$, la respuesta del circuito será modificada por la misma constante, $K \cdot y(t)$



Superposición

La respuesta de un **circuito lineal** a varias fuentes de excitación actuando simultáneamente es igual a la **suma de las respuestas** que se tendrían cuando actuase cada una de ellas por separado

$$y(t) = \sum_i y_i(t)$$



Análisis de un circuito mediante superposición

Procedimiento

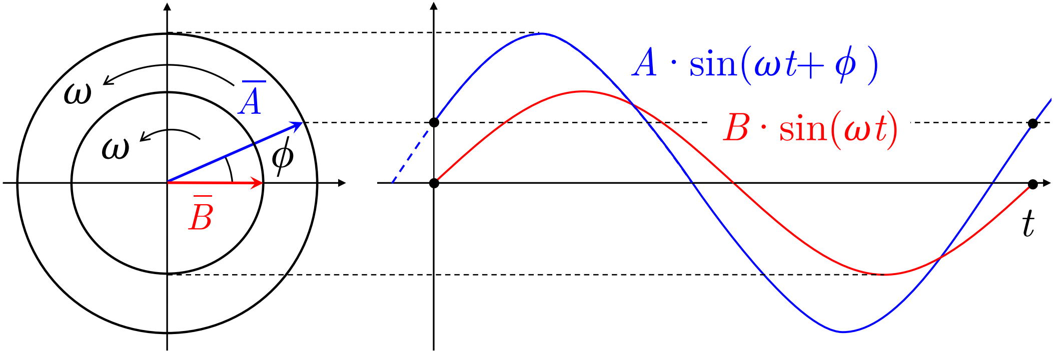
1. Se **eliminan** todas las **fuentes independientes** del circuito menos una
   - Las fuentes de **tensión** se sustituyen por un **cortocircuito** ($U = 0$)
   - Las fuentes de **corriente** se sustituyen por un **circuito abierto** ($I = 0$)
   - Las fuentes **dependientes no se modifican**
2. Se analiza el circuito, obteniendo la **respuesta individual** a la fuente que permanece activa
3. Se repite este procedimiento para **cada una de las fuentes independientes** del circuito
4. La respuesta total del circuito es la **suma de las respuestas individuales**

Análisis de un circuito mediante superposición

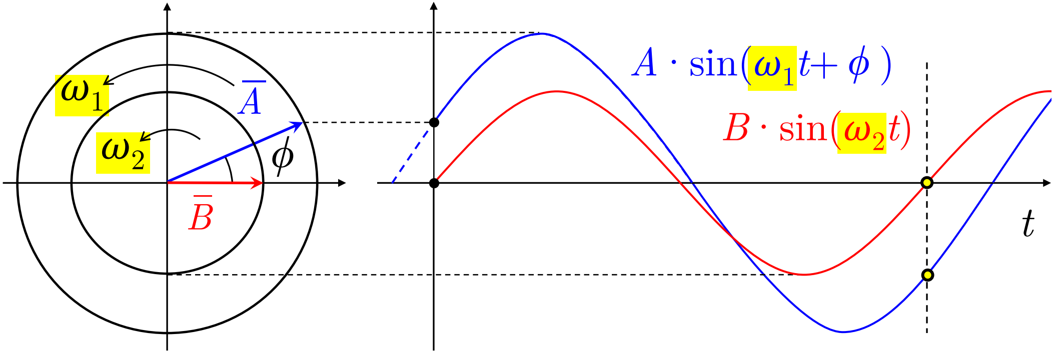
Observaciones

- **Siempre** hay que **aplicar este método** cuando en un circuito conviven **fuentes de distinta frecuencia** (o fuentes de corriente continua y corriente alterna)
- En el caso de fuentes de **corriente alterna senoidal**:
  - **Para cada frecuencia**, las bobinas y condensadores presentarán **diferente reactancia**, por lo que habrá que calcularlas
  - La respuesta total debe expresarse en el **dominio del tiempo** (**NO** se pueden **sumar fasores** que corresponden a **frecuencias diferentes**)
- En el primer paso del procedimiento, se pueden **agrupar las fuentes que funcionan a la misma frecuencia** y calcular la respuesta del circuito en esa frecuencia

Recordatorio: el cálculo fasorial es válido para señales de igual ω



...pero NO para señales de distinta frecuencia ($\omega_1 \neq \omega_2$)



Principio de superposición y potencia

El principio de superposición aplica a tensiones y corrientes, pero **NO a potencias**

(ya que potencia es el resultado de una **operación no lineal**, el producto de corriente y tensión)

Supongamos $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$:

$$
\begin{aligned}
p(t) &= R \cdot i^2(t) = \\
&= R \cdot [i_1(t) + i_2(t)]^2 = \\
&= R \cdot [i_1^2(t) + i_2^2(t) + 2 \cdot i_1(t) \cdot i_2(t)] \\
&= p_1(t) + p_2(t) + 2\,R \cdot i_1(t) \cdot i_2(t)
\end{aligned}
$$

$$\boxed{p(t) \neq p_1(t) + p_2(t)}$$

Principio de superposición y potencia

- Cuando las señales son **ortogonales en un periodo*** se pueden sumar las **potencias medias** de cada circuito:

$$P = \sum_i P_i$$

- **Ejemplos** de señales ortogonales:

  senoidales con diferente frecuencia, una **senoidal** con una **continua**...

*Dos señales son ortogonales si cumplen la siguiente propiedad:

$$< f_1, f_2 >_T \; = \int_T f_1(t) \cdot f_2(t) \, dt = 0$$

Principio de superposición y potencia

- Cuando las señales son **ortogonales en un periodo**, se pueden sumar las **potencias medias** de cada circuito:

$$
\begin{aligned}
P_m &= \frac{1}{T}\int_T p(t)\,dt = \\
&= R\cdot\frac{1}{T}\left[\int_T i_1^2(t)\,dt + \int_T i_2^2(t)\,dt + \underbrace{\cancelto{0}{\int_T 2\cdot i_1(t)\cdot i_2(t)\,dt}}_{\text{señales ortogonales}}\right] = \\
&= R\cdot\big(\underbrace{I_1^2+I_2^2}_{\substack{\text{valores}\\ \textbf{eficaces}}}\big) = \boxed{P_1+P_2}
\end{aligned}
$$

Principio de superposición y potencia

Teniendo en cuenta la propiedad de ortogonalidad, si en un circuito actúan **fuentes de continua** y varias fuentes de **alterna** de **distinta frecuencia**:

- Potencia disipada en una **resistencia**:

$$P_R = R \cdot \left(I_{cc}^2 + \overbrace{I_{\omega_1}^2 + I_{\omega_2}^2 + \ldots + I_{\omega_n}^2}^{\text{componentes de alterna}}\right)$$

- Potencia entregada por **fuente** de **tensión** de frecuencia ω_1:

$$P = \Re\{\overline{E} \cdot \overline{I}_{\omega_1}^*\}$$

- Potencia entregada por **fuente** de **corriente** de frecuencia ω_2:

$$P = \Re\{\overline{U}_{I_g,\omega_2} \cdot \overline{I}_g^*\}$$

Potencia entregada:
Solo actúa la componente de la intensidad/tensión que tiene **la misma frecuencia** que el generador de tensión/corriente

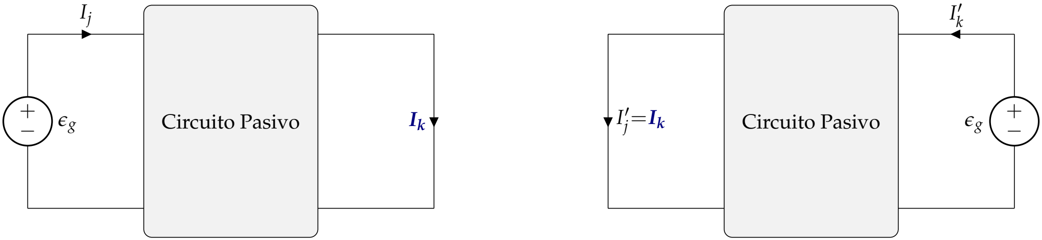
1. Teoremas de linealidad
2. Teoremas de reciprocidad y sustitución
3. Teorema de compensación
4. Teorema de Millman
5. Teorema de Rosen
6. Teoremas de Thévenin y Norton
7. Teorema de Everitt

Teorema de reciprocidad: mallas

Aplica a **circuitos pasivos sin fuentes dependientes**, y tiene un doble enunciado (uno para el método de las **mallas** y otro para el de los **nudos**)

La **corriente en una malla** k cuando se tiene una **fuente en la malla** j es la misma que habría en la malla j si la fuente estuviese situada en la malla k

(debido a que la **matriz de impedancias** es **simétrica**)

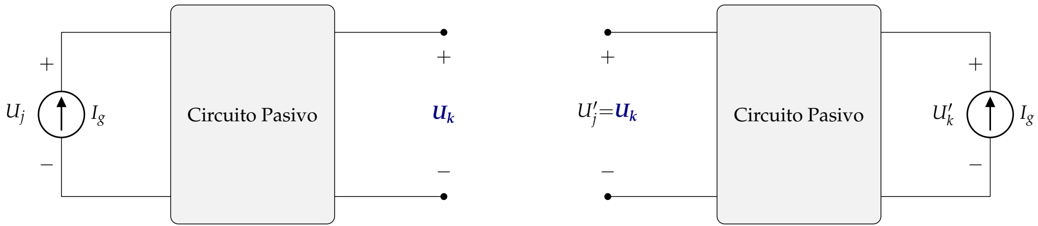


Teorema de reciprocidad: nudos

Aplica a **circuitos pasivos sin fuentes dependientes**, y tiene un doble enunciado (uno para el método de las **mallas** y otro para el de los **nudos**)

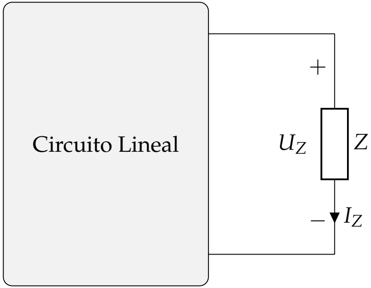
La **tensión U_k entre dos nudos** cuando se tiene una **fuente entre otros dos nudos** es la misma que habría en la posición original de la fuente si esta se intercambia

(debido a que la **matriz de admitancias** es **simétrica**)

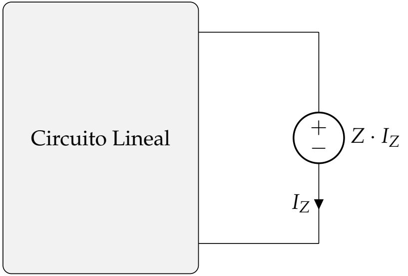


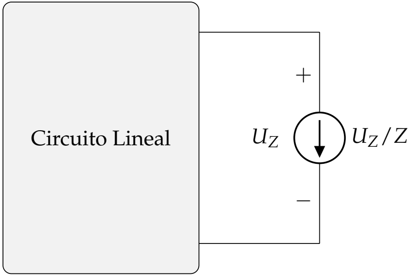
Regla de sustitución

Cualquier rama de un circuito **se puede sustituir** por una **fuente de tensión** del valor de la tensión en esa rama, sin afectar al resto del circuito



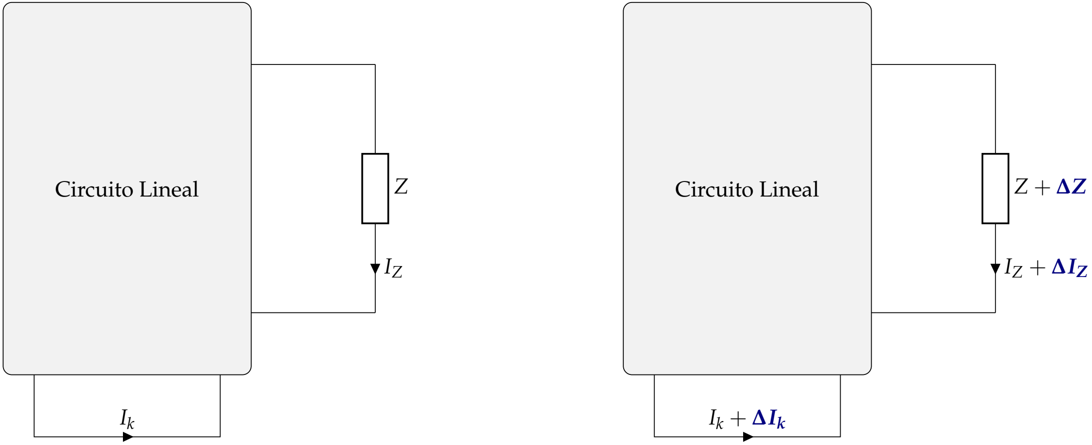
O bien por una **fuente de intensidad** de valor la intensidad en dicha rama



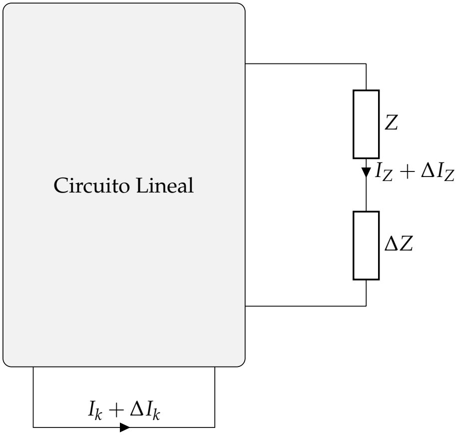


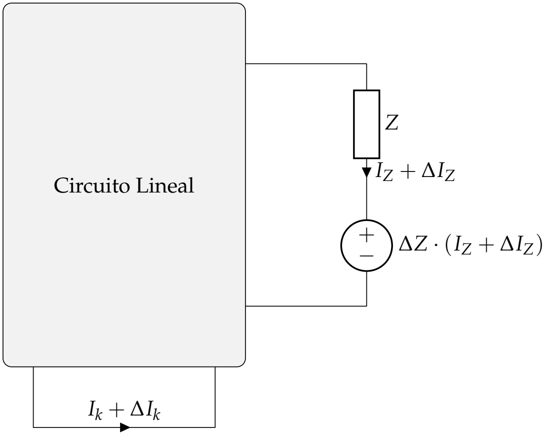
Planteamiento

¿Cuál es la variación en la respuesta I_k debida a una variación en la impedancia Z?



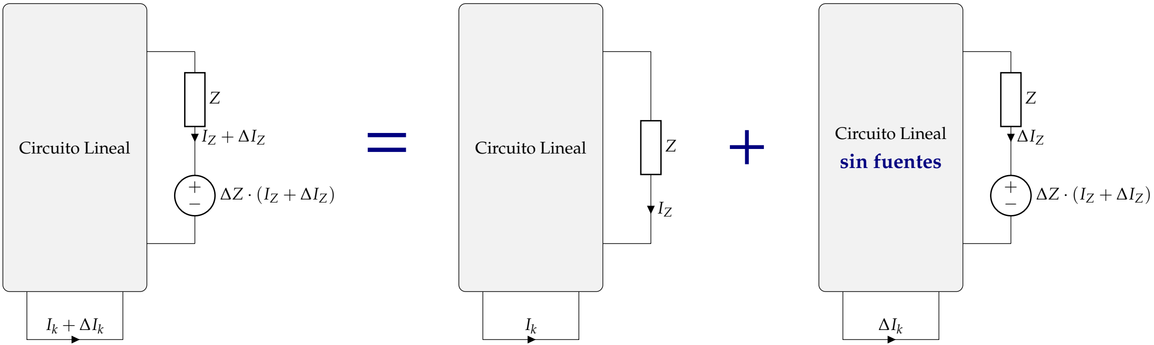
Aplicamos la regla de **sustitución**:



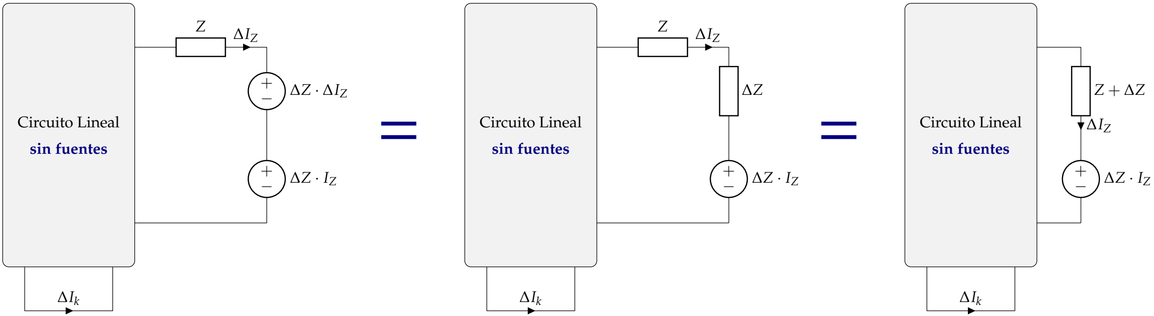


A continuación, **Tª de superposición**

Consideramos el **circuito original** y aquel en el que sólo actúa la **nueva fuente**:



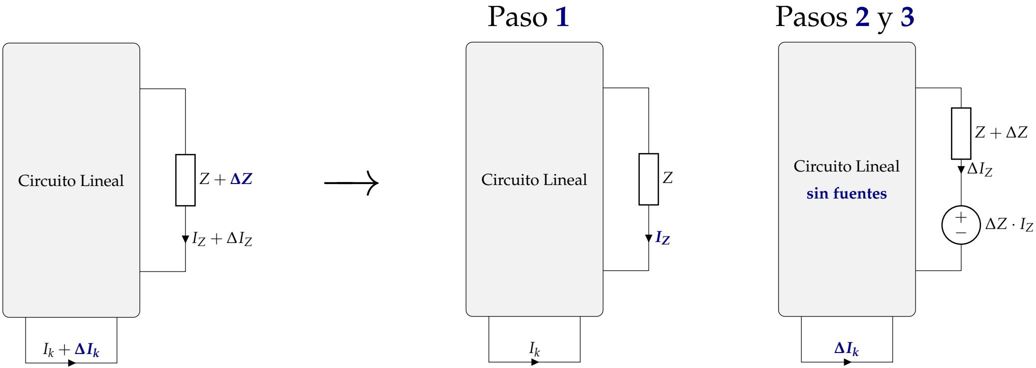
“Rompemos” la fuente en dos y volvemos a aplicar la regla de **sustitución**:



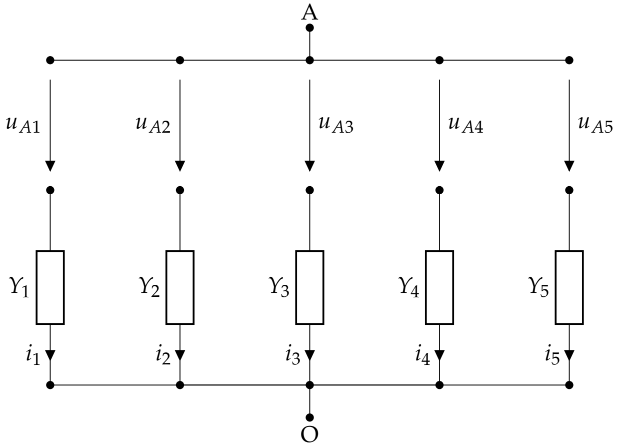
Solución

Para calcular el cambio en la respuesta, ΔI_k, debido a una variación en la impedancia, ΔZ:

1. Se calcula la corriente $\boldsymbol{I_z}$ en el circuito original
2. Se apagan las fuentes independientes y se sustituye la impedancia Z por una impedancia de valor $Z + \Delta Z$ en serie con una fuente de tensión de valor $\Delta Z \cdot I_z$
3. En el circuito resultante se calcula la respuesta, $\boldsymbol{\Delta I_k}$



El Teorema de Millman permite resolver la **tensión entre dos puntos A y O**, siendo O un punto común de un conjunto de impedancias, y siendo conocidas las tensiones entre el punto A y las impedancias



Deducción

Por **2LK**, la tensión u_{AO} es:

$$u_{AO} = u_{Aj} + i_j / Y_j \qquad \text{donde } j \text{ es cualquiera de las ramas}$$

Despejando i_j:

$$i_j = Y_j \cdot (u_{AO} - u_{Aj})$$

En el nudo O se puede plantear **1LK**:

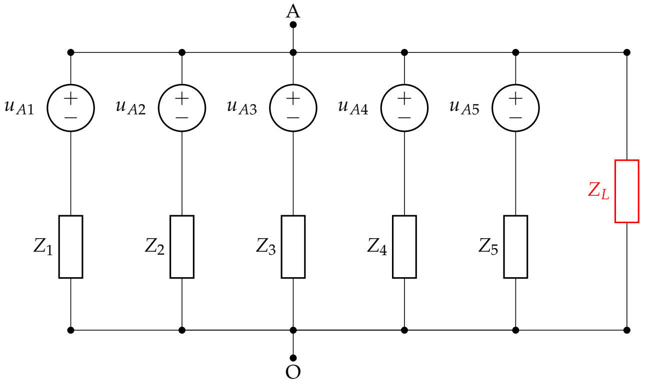
$$\sum_{j=1}^{n} i_j = 0 \qquad \text{donde } n \text{ es el nº de impedancias}$$

Por tanto:

$$\sum_{j=1}^{n} Y_j \cdot (u_{AO} - u_{Aj}) = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{u_{AO} = \frac{\sum_{j=1}^{n} Y_j \cdot u_{Aj}}{\sum_{j=1}^{n} Y_j}}$$

Aplicación

Este teorema permite resolver rápidamente circuitos como el siguiente:



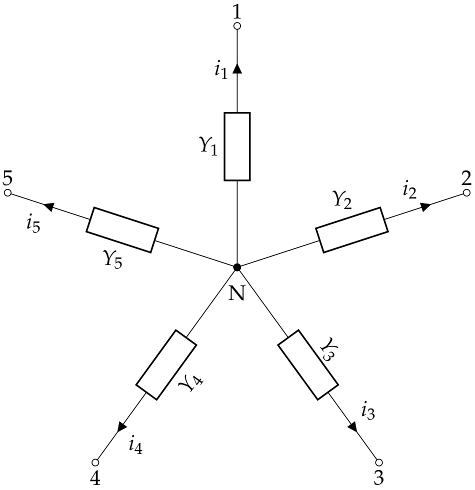
$$u_{AO} = \frac{0/Z_L + \sum_{j=1}^{n} u_{Aj}/Z_j}{1/Z_L + \sum_{j=1}^{n} 1/Z_j}$$

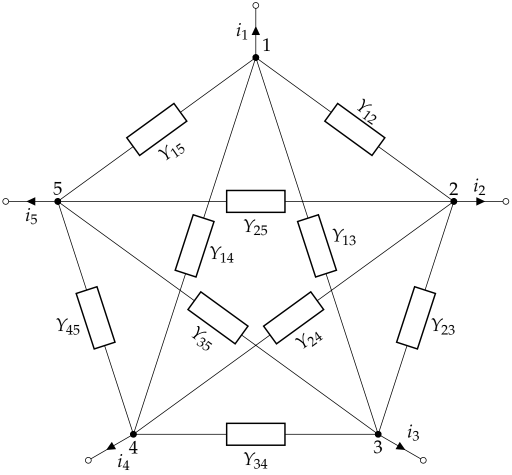
¿Cuándo es útil el Tª de Millman?

Una aplicación muy útil del Tª de Millman es para el cálculo de la **tensión de desplazamiento del neutro** en **sistemas trifásicos desequilibrados**, que usaremos en el Tema 6

1. Teoremas de linealidad
2. Teoremas de reciprocidad y sustitución
3. Teorema de compensación
4. Teorema de Millman
5. Teorema de Rosen
6. Teoremas de Thévenin y Norton
7. Teorema de Everitt

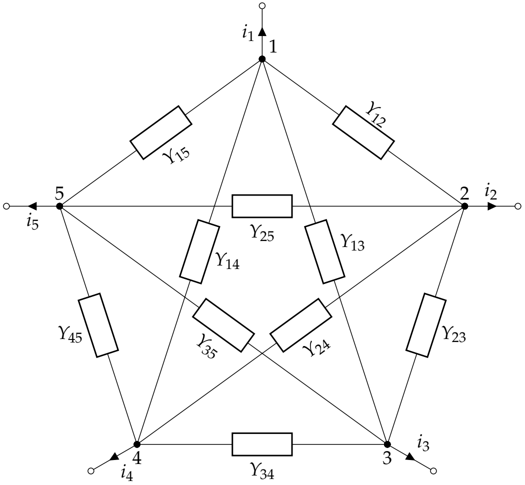
El **Tª de Rosen** permite pasar de una configuración de **impedancias en estrella** con n terminales **a una configuración en polígono**





Una estrella se puede transformar en un polígono (pero no al revés si $n > 3$)

Deducción



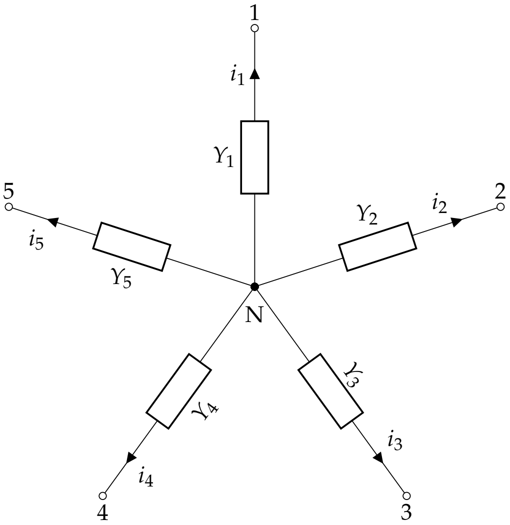
La **corriente total** que sale **por cada terminal** (i_1, i_2, ...) **debe ser igual** en la estrella y el polígono

La corriente que sale por cada terminal del polígono es:

$$i_j = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} i_{kj} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} u_{kj} \cdot Y_{kj} = \sum_{k=1}^{n} u_{kj} \cdot Y_{kj}$$

(en el último paso se ha tenido en cuenta que $u_{kk} = 0$)

Deducción



La **corriente total** que sale **por cada terminal** (i_1, i_2, ...) **debe ser igual** en la estrella y el polígono

La corriente en cada rama de la estrella es:

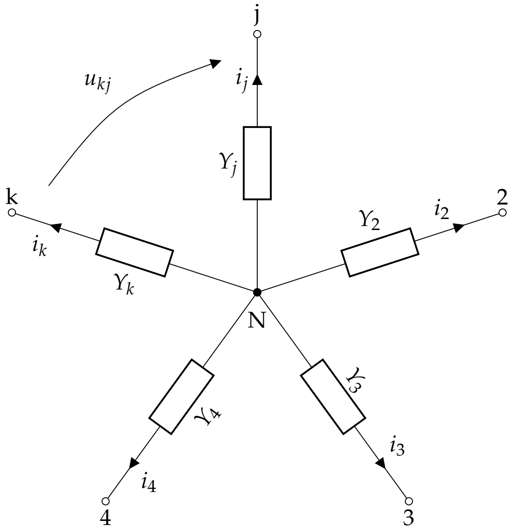
$$i_j = u_{Nj} \cdot Y_j$$

Igualando con el resultado de la diapositiva anterior:

$$\sum_{k=1}^{n} u_{kj} \cdot Y_{kj} \;=\; u_{Nj} \cdot Y_j$$

El objetivo es llegar a despejar Y_{kj} ...

Para seguir con la deducción, necesitamos una **expresión para u_{Nj}** en función de u_{kj}



Usamos el Tª de Millman tomando como puntos ***AO*** los puntos ***jN***:

$$u_{jN} = \frac{\cancelto{0}{u_{jj}} \cdot Y_j + \sum_{k=1}^{n-1} (-u_{kj}) \cdot Y_k}{Y_j + \sum_{k=1}^{n-1} Y_k}$$

$$u_{Nj} = -u_{jN} = \frac{\sum_{k=1}^{n} u_{kj} \cdot Y_k}{\sum_{k=1}^{n} Y_k}$$

Sustituyendo la expresión anterior en la que habíamos obtenido en la diapositiva 32:

$$\sum_{k=1}^{n} u_{kj} \cdot Y_{kj} \;=\; Y_j \, \frac{\sum_{k=1}^{n} u_{kj} \cdot Y_k}{\sum_{k=1}^{n} Y_k}$$

Denominando $Y_{\curlywedge} = \sum_{k=1}^{n} Y_k$ y agrupando dentro del sumatorio:

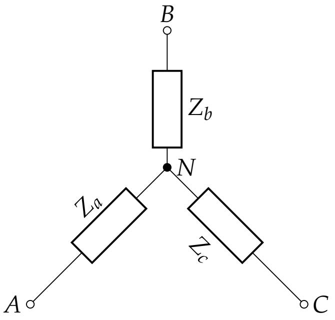
$$\sum_{k=1}^{n} u_{kj} \cdot Y_{kj} \;=\; \sum_{k=1}^{n} u_{kj} \, \frac{Y_k \cdot Y_j}{Y_{\curlywedge}}$$

Finalmente, eliminando los sumatorios y simplificando:

$$\boxed{Y_{kj} = \frac{Y_k \cdot Y_j}{Y_{\curlywedge}}}$$

Aplicación

- Ejemplo para $\boldsymbol{n = 3}$ (estrella $\to$ triángulo, visto en TC I)

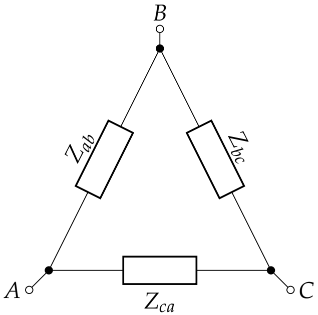


$$\boxed{Y_{kj} = \frac{Y_k \cdot Y_j}{\sum_{k=1}^{n} Y_k}}$$

$$Y_{ab} = \frac{Y_a \cdot Y_b}{Y_a + Y_b + Y_c}$$

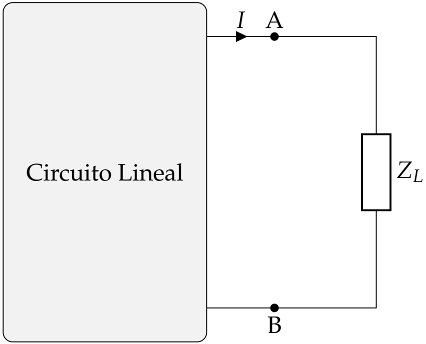
$$Y_{bc} = \frac{Y_b \cdot Y_c}{Y_a + Y_b + Y_c}$$

$$Y_{ca} = \frac{Y_c \cdot Y_a}{Y_a + Y_b + Y_c}$$



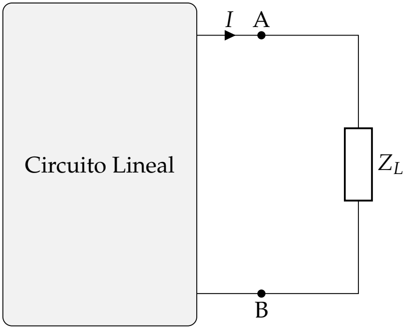
Teoremas de Thévenin y Norton

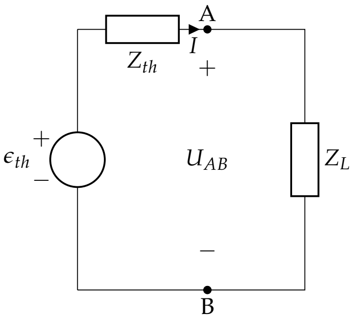
- Permiten transformar un circuito complejo en un equivalente **más simple**
- Útiles cuando solo nos interesa la **respuesta global de un circuito**, y no las intensidades o tensiones parciales



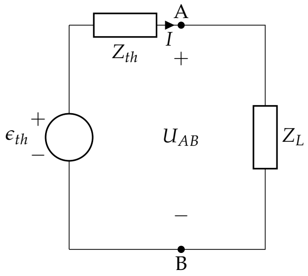
Teorema de Thévenin

Cualquier **red lineal** compuesta por elementos activos y pasivos **puede sustituirse**, desde el punto de vista de sus terminales externos A-B, por una **fuente de tensión** (generador de Thévenin, ϵ_{th}) en **serie** con una **impedancia** (impedancia de Thévenin, Z_{th})





Cálculo del equivalente de Thévenin



- Circuito abierto ($Z_L \to \infty, \quad U_{AB} = U_{oc}$)

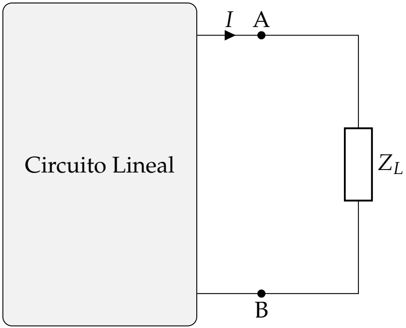
$$\boxed{\epsilon_{th} = U_{oc}} \qquad (\text{SC} \equiv \textit{short circuit}, \quad \text{OC} \equiv \textit{open circuit})$$

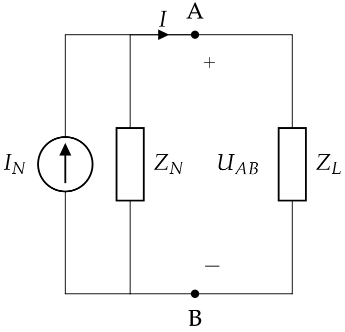
- Cortocircuito ($Z_L = 0, \quad I = I_{sc}$)

$$\boxed{Z_{th} = \frac{\epsilon_{th}}{I_{sc}} = \frac{U_{oc}}{I_{sc}}}$$

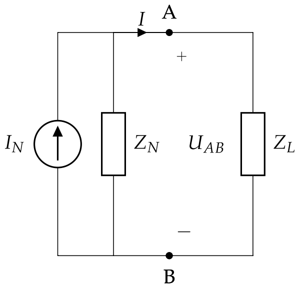
Teorema de Norton

Cualquier **red lineal** compuesta por elementos activos y pasivos **puede sustituirse**, desde el punto de vista de sus terminales externos A-B, por una **fuente de corriente** (generador de Norton, I_N) en **paralelo** con una **impedancia** (impedancia de Norton, Z_N)





Cálculo del equivalente de Norton



- Cortocircuito ($Z_L = 0, \quad I = I_{sc}$)

$$\boxed{I_N = I_{sc}} \qquad (\text{SC} \equiv \textit{short circuit}, \quad \text{OC} \equiv \textit{open circuit})$$

- Circuito abierto ($Z_L \to \infty, \quad U_{AB} = U_{oc}$)

$$\boxed{Z_N = \frac{U_{oc}}{I_N} = \frac{U_{oc}}{I_{sc}}}$$

Cálculo de impedancia Thévenin/Norton

- Siempre podemos calcular la impedancia Thévenin/Norton **calculando tanto** U_{oc} **como** I_{sc}, pero en ocasiones **no es sencillo** calcular ambas magnitudes

- Existe un método alternativo:
  - Si el circuito **NO** contiene **fuentes dependientes**:

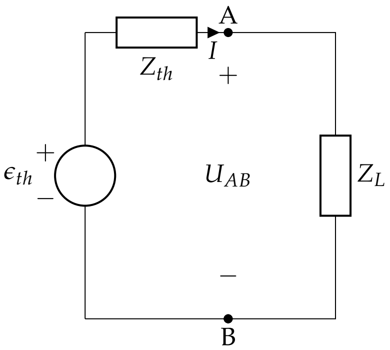
    Se puede calcular **apagando** todos los **generadores** y obteniendo la impedancia equivalente
  - Si el circuito contiene **fuentes dependientes**:

    Una **fuente dependiente no se puede apagar**, porque no tiene una excitación autónoma (depende de lo que está ocurriendo en otra parte del circuito)

    Es **necesario** conectar un **generador de prueba** a la salida del circuito y obtener la relación entre tensión y corriente de este generador

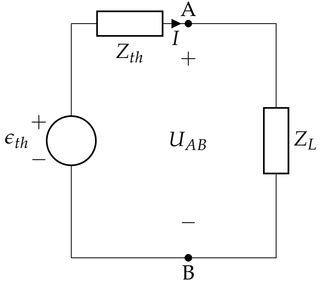
Máxima transferencia de potencia

¿Qué impedancia $\overline{Z}_L$ hay que conectar en los terminales A-B para que el circuito entregue la **máxima potencia posible**?



Se aplica el **equivalente de Thévenin** (siguiente diapositiva)

Calculamos la **potencia activa en la impedancia** de carga $\overline{Z}_L$:



$$\overline{Z}_{th} = R_{th} + jX_{th}$$

$$\overline{Z}_L = R_L + jX_L$$

$$\bar{I} = \frac{\bar{\epsilon}_{th}}{\overline{Z}_{th} + \overline{Z}_L} \rightarrow |\bar{I}| = \frac{\epsilon_{th}}{|\overline{Z}_{th} + \overline{Z}_L|}$$

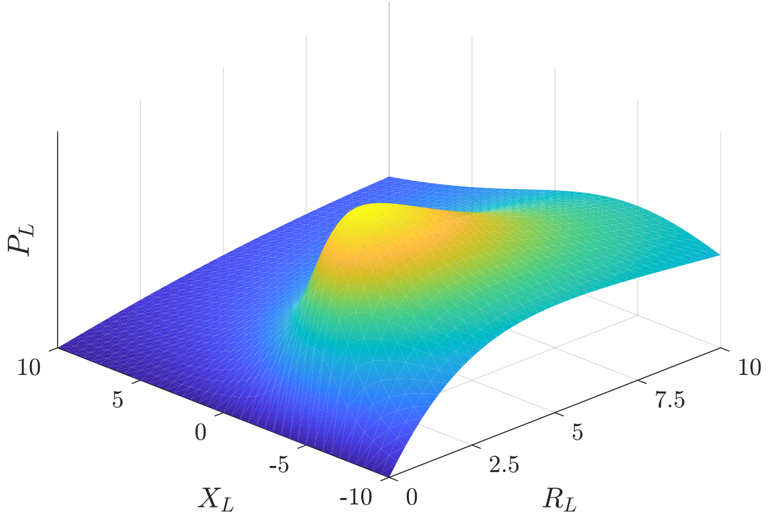
$$P_L = I^2 \cdot R_L$$

$$\boxed{P_L = \frac{\epsilon_{th}^2}{|\overline{Z}_{th} + \overline{Z}_L|^2} \cdot R_L}$$

Las **condiciones** de **máximo** son:

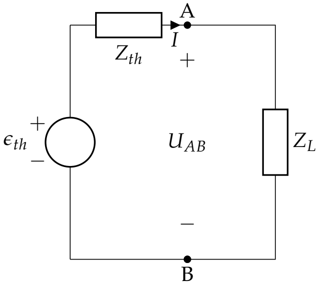
$$\boxed{\frac{\partial P_L}{\partial X_L} = 0\,, \qquad \frac{\partial P_L}{\partial R_L} = 0}$$

Ejemplo para $R_{th} = 1{,}25\,\Omega$ y $X_{th} = 5\,\Omega$:



Impedancia de carga (o impedancias “adaptadas”)

Dado un circuito lineal:



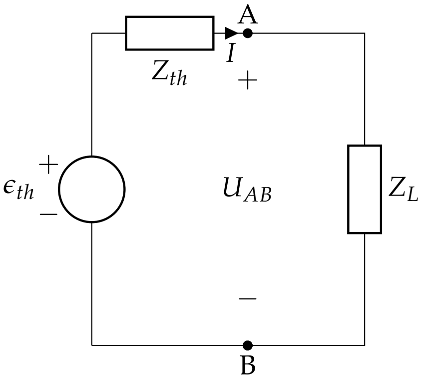
La **impedancia de carga** que hay que conectar entre sus terminales A-B para obtener la máxima potencia disponible es:

$$\boxed{\overline{Z}_L = \overline{Z}_{th}^* = R_{th} - \mathrm{j}\, X_{th}}$$

(deducción en TC I)

Máxima potencia disponible

La **máxima potencia** que puede entregarse a la carga es:



$$\left.\begin{aligned} \overline{Z}_L &= \overline{Z}_{th}^* \\ P_L &= \frac{\epsilon_{th}^2}{|\overline{Z}_{th} + \overline{Z}_L|^2} \cdot R_L \end{aligned}\right\} \rightarrow \boxed{P_L = \frac{\epsilon_{th}^2}{4 \cdot R_{th}}}$$

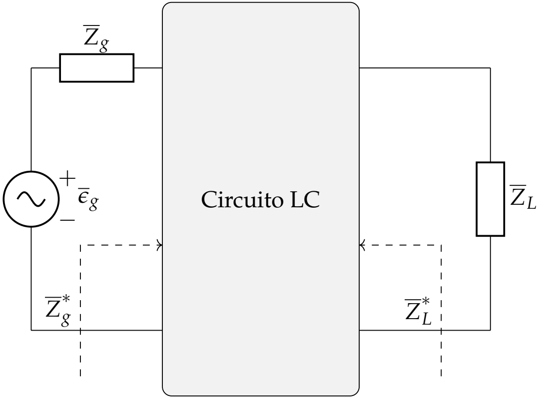
Importante

Esta expresión es **válida únicamente** para calcular la **máxima transferencia** de potencia

(no aplica para calcular la potencia disipada por una impedancia genérica $\overline{Z}_L$, únicamente aplica para $\overline{Z}_L = \overline{Z}_{th}^*$)

T^a de Everitt

Si a la **entrada** de un **circuito no disipativo** (sin resistencias, **circuito LC**) existe **adaptación de impedancias**, a la **salida** de este circuito **también** hay adaptación



Dado que $\boldsymbol{\overline{Z}_L \neq \overline{Z}_g^*}$, el circuito LC es una **red adaptadora**

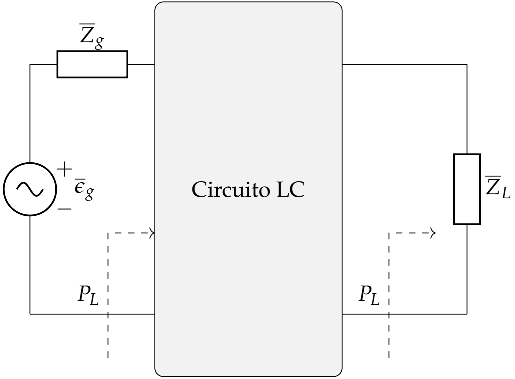
Se da entonces máxima transferencia de potencia:

- A la **derecha** de $\overline{Z}_g$ se ve $\boldsymbol{\overline{Z}_g^*}$
- A la **izquierda** de $\overline{Z}_L$ se ve $\boldsymbol{\overline{Z}_L^*}$

Demostración

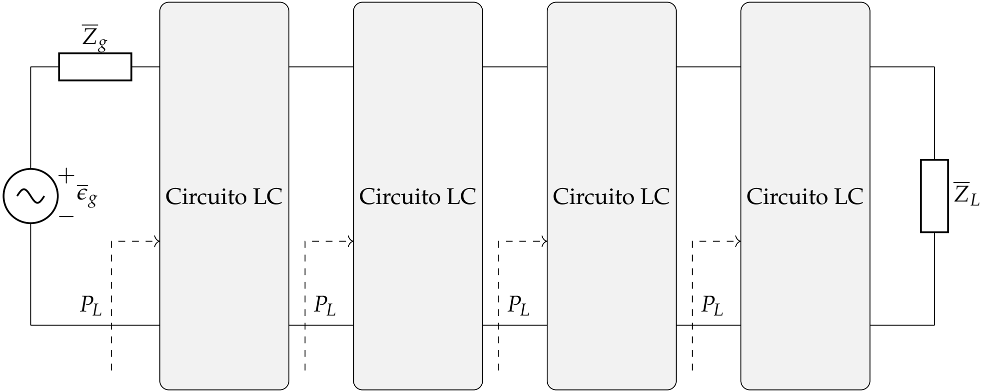
Dado que el **circuito LC no consume potencia activa**, la potencia a la entrada es la potencia consumida por la carga

Por tanto, **si la potencia entregada por el generador es máxima** (adaptación en la entrada), **también lo será la potencia en la carga** (adaptación a la salida)



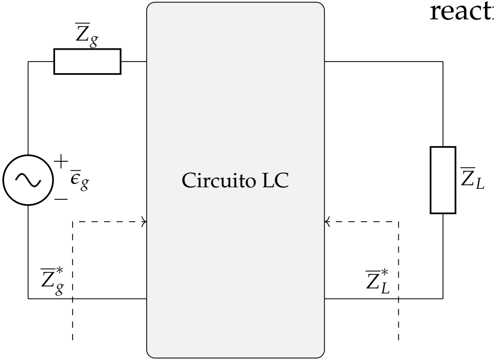
Redes en cascada

Si en una cascada de circuitos LC existe adaptación de impedancias en un punto de la cadena, existirá **adaptación en cualquier punto** de la misma

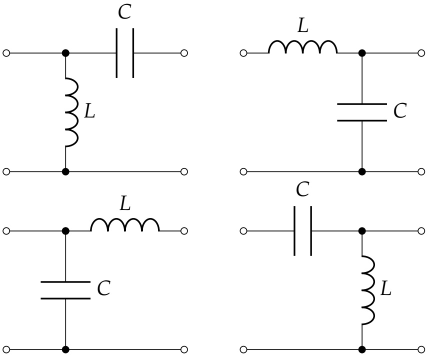


Aplicación: diseño de redes adaptadoras

El objetivo es conectar un circuito activo (representado por su equivalente de Thévenin) a una carga, de forma que **se consiga** la **máxima transferencia de potencia**



Emplearemos **redes en 'L'** compuestas por dos elementos reactivos:



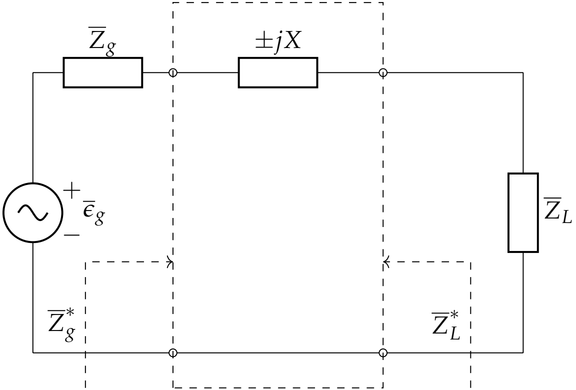
Esta adaptación es selectiva: **si varía la frecuencia, no habrá adaptación**

Diseño de redes adaptadoras

3 casos posibles:

- $R_g = R_L$
- $R_g > R_L$
- $R_g < R_L$

Caso $\boldsymbol{R_g = R_L}$:



Se conecta una **reactancia en serie**, de forma que la impedancia a la derecha del generador sea igual a $\overline{Z}_g^*$

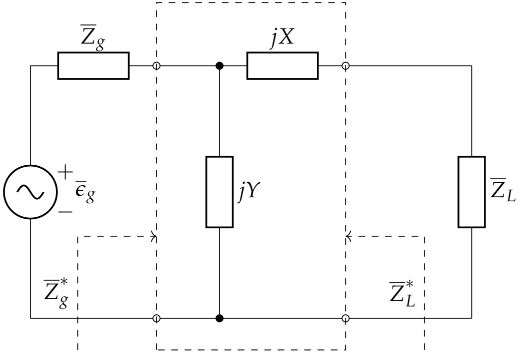
(el cálculo es trivial)

Diseño de redes adaptadoras: casos $R_g > R_L$ y $R_g < R_L$

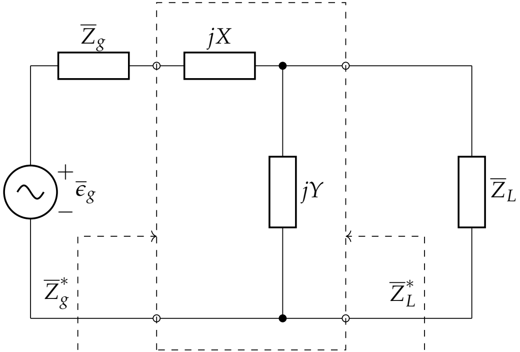
La red debe diseñarse con el **elemento paralelo** en el **extremo de la impedancia** que tenga **parte real mayor**

(ya que al conectar impedancias en paralelo, la impedancia resultante es menor)

Caso $\boldsymbol{R_g > R_L}$



Caso $\boldsymbol{R_g < R_L}$



Diseño de redes adaptadoras: $R_g > R_L$

Condición:

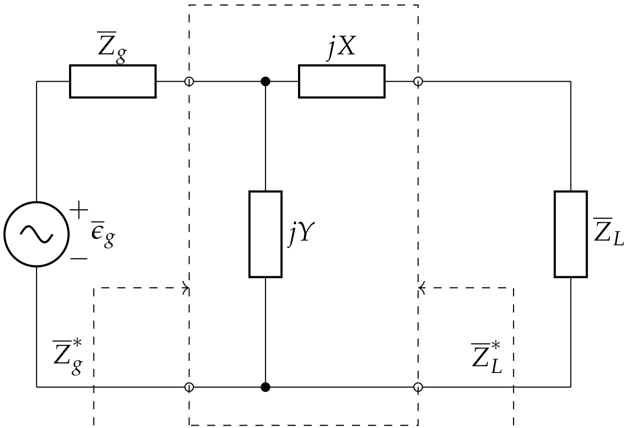
$$\overline{Z}_L^* = jX + (jY \parallel \overline{Z}_g)$$

Ecuaciones:

$$R_L = \Re\left(\frac{jY \cdot \overline{Z}_g}{jY + \overline{Z}_g}\right)$$

$$X_L = -X - \Im\left(\frac{jY \cdot \overline{Z}_g}{jY + \overline{Z}_g}\right)$$

Debe resolverse el **sistema de ecs.** para hallar los valores de X e Y



Diseño de redes adaptadoras: $R_L > R_g$

Condición:

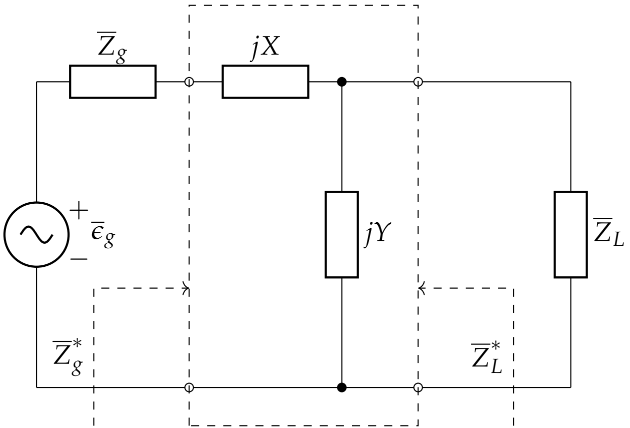
$$\overline{Z}_g^* = jX + (jY \parallel \overline{Z}_L)$$

Ecuaciones:

$$R_g = \Re\left(\frac{jY \cdot \overline{Z}_L}{jY + \overline{Z}_L}\right)$$

$$X_g = -X - \Im\left(\frac{jY \cdot \overline{Z}_L}{jY + \overline{Z}_L}\right)$$

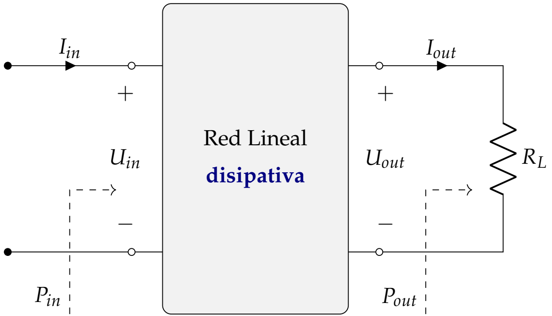
Debe resolverse el **sistema de ecs.** para hallar los valores de X e Y



El **decibelio** (dB) se emplea para la **ratio** de dos magnitudes con una **diferencia** de varios **órdenes de magnitud**: usar **escala logarítmica** proporciona un número más manejable

Decibelio: potencias

$$\text{Ganancia de potencia} \quad \rightarrow \quad G_{dB} = 10 \log G = 10 \log \frac{P_{out}}{P_{in}}$$

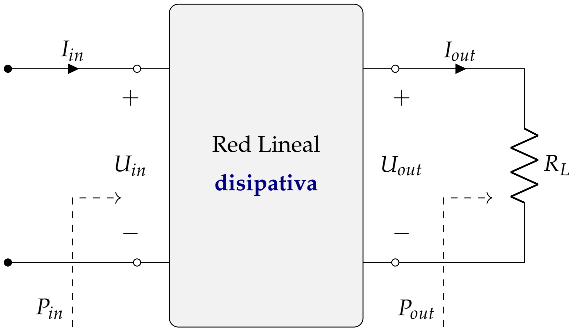


- Si $P_{out} > P_{in}$, el cociente es > 1, el **logaritmo** resultará **positivo**
- Si $P_{out} < P_{in}$, el cociente es < 1, el **logaritmo** resultará **negativo**

Suponiendo $\boldsymbol{R_{in} = R_{out}}$, se emplea para medir la ganancia de tensión/corriente:

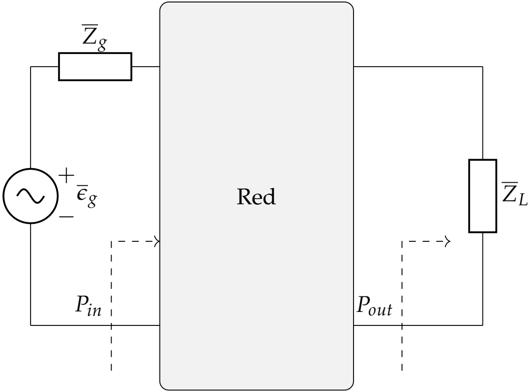
Decibelio: tensiones

$$G_{dB} = 10 \log \frac{P_{out}}{P_{in}} = 10 \log \frac{U_{out}^2/R_{out}}{U_{in}^2/R_{in}} = 20 \log \frac{U_{out}}{U_{in}}$$



Pérdidas de transmisión

Las **pérdidas de transmisión**, $\boldsymbol{\alpha_T}$, asociadas a una red miden la relación entre la potencia de entrada, P_{in}, y la potencia de salida, P_{out}



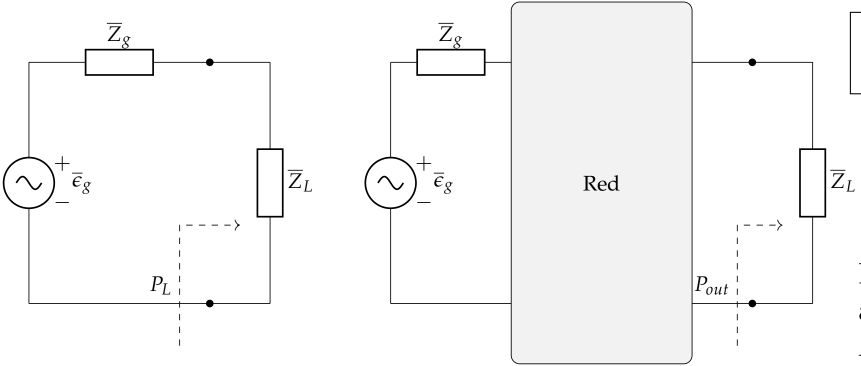
$$\boxed{\alpha_T \;=\; 10 \log \frac{P_{in}}{P_{out}} \;\; \text{dB}}$$

Si la red es no disipativa (LC):

$P_{in} = P_{out} \quad \rightarrow \quad \alpha_T = 0\,\text{dB}$

Pérdidas de inserción

Las **pérdidas de inserción**, $\boldsymbol{\alpha_I}$, asociadas a una red miden la relación entre la potencia entregada a la carga sin la red, P_L, y la potencia entregada a la carga con la red insertada



$$\boxed{\alpha_I = 10 \log \frac{P_L}{P_{out}} \ \ \text{dB}}$$

En el caso de una red adaptadora:
$P_{out} > P_L \quad \rightarrow \quad \alpha_I < 0$