#### Introducción al régimen transitorio

Teoría de Circuitos

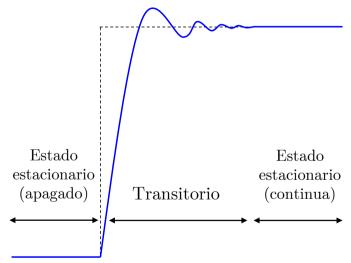
Autor: Luis Badesa Bernardo

(basado en las diapositivas de Óscar Perpiñán Lamigueiro)

- 1 Introducción
- 2 Circuitos de primer orden
- 3 Circuitos de segundo orden

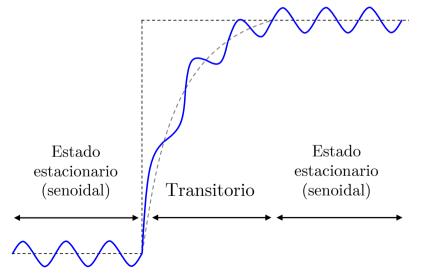
## ¿Qué es el régimen transitorio?

► Ejemplo: **encendido** de circuito de **continua** (con transitorio *subamortiguado*)



### ¿Qué es el régimen transitorio?

▶ Ejemplo: aumento de voltaje en circuito de alterna (con transitorio sobreamortiguado)



## Régimen transitorio vs. estado estacionario

#### Estado estacionario o "régimen permanente"

- ► Circuito estabilizado
- Las tensiones y corrientes de un circuito son constantes (CC) o periódicas (CA)
- ► Modelado matemático: ecuaciones algebraicas

#### Régimen transitorio

- Cambio en las condiciones de funcionamiento de un circuito: encendido o apagado de fuentes, o cambio en las cargas → interruptores
- Variación de u(t) e i(t) hasta alcanzar nuevos valores
- ► Modelado matemático: ecuaciones diferenciales

### Acumulación de energía

#### Estado estacionario

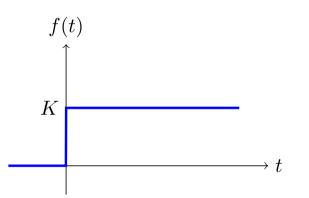
► Energía acumulada en bobinas y condensadores

#### Régimen transitorio

- ▶ Redistribución y disipación de energía acumulada
- La redistribución de energía <u>no es inmediata</u>

  Duración corta (típicamente µs) pero superior a 0 s, dependiendo de relación entre acumulación (en bobinas y condensadores) y disipación (en resistencias)

# Consigna habitual: función escalón



$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ K & t \ge 0 \end{cases}$$

#### **Ecuaciones diferenciales**

Al aplicar Kirchhoff a un circuito lineal obtenemos ecuaciones diferenciales

$$u_L(t) = L \frac{d i_L(t)}{dt} \quad \leftrightarrow \quad i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L(\tau) d\tau$$

$$i_{C}(t) = C \frac{d u_{C}(t)}{dt} \quad \leftrightarrow \quad u_{C}(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t} i_{C}(\tau) d\tau$$

Por ejemplo, la ecuación de un circuito RLC serie será de la forma:

$$L\frac{d^2i(t)}{dt^2} + R\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}i(t) = \frac{dE(t)}{dt}$$

(EDO lineal de segundo orden, obtenida aplicando 2LK al circuito)

# Respuesta de un circuito lineal a una perturbación o consigna

La **solución** de la ecuación diferencial del circuito para  $t \ge 0$  (*i.e.*, la **respuesta del circuito** a la perturbación) tiene **dos componentes**\*:

$$f(t) = f_n(t) + f_{\infty}(t)$$

(donde f(t) puede referirse a tensión o corriente)

- ▶ Respuesta **natural** o propia,  $f_n(t)$
- ▶ Respuesta **forzada** o particular,  $f_{\infty}(t)$

<sup>\*</sup>Esta es la solución general a una Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO) lineal de orden arbitrario. Para más detalles, consultar, *e.g.*, libro Zill

# Respuesta *natural*, $f_n(t)$

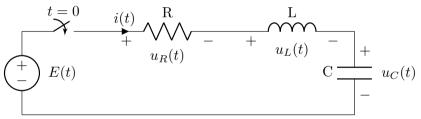
- ightharpoonup Respuesta **natural** o propia,  $f_n(t)$ 
  - ▶ Respuesta sin fuentes de alimentación → solución de la ec. homogénea
     Volviendo al ejemplo del circuito RLC, la ec. homogénea sería:

$$L\frac{d^{2}i(t)}{dt^{2}} + R\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}i(t) = \frac{dE(t)}{dt}$$

- ▶  $f_n(t)$  queda determinada por la **energía almacenada previamente** (antes de conectar las fuentes) y por la **topología del circuito** (conexiones entre elementos)
- Contiene constantes de integración → necesario conocer el estado del circuito en el instante que da origen al transitorio (i.e., las condiciones iniciales)

# Respuesta *forzada*, $f_{\infty}(t)$

- ► Respuesta **forzada** o particular,  $f_{\infty}(t)$ 
  - Es una solución particular a la ecuación diferencial no homogénea  $\rightarrow$  determinada por las fuentes existentes en t > 0, E(t) en el ejemplo RLC



▶ Modela el estado del circuito **tras un tiempo** suficientemente **largo** después de la perturbación (régimen permanente), ya que la respuesta natural se extingue

$$\lim_{t \to \infty} f_n(t) = 0$$
 (demostración más adelante)

IntroducciónCondiciones iniciales

2 Circuitos de primer orden

3 Circuitos de segundo orden

#### Condiciones iniciales

- ightharpoonup El **instante del cambio** se representa habitualmente con t=0
  - $ightharpoonup t=0^- 
    ightharpoonup ext{tiempo inmediatamente anterior}$  al cambio
  - $ightharpoonup t=0^+ 
    ightharpoonup ext{tiempo inmediatamente posterior}$  al cambio
- Las **condiciones iniciales** son el estado del circuito en t = 0
  - ightharpoonup Se calculan con las **energías almacenadas** en bobinas y condensadores en  $t=0^-$
  - ► Se aplican a la **topología** del circuito en  $t = 0^+$
- ightharpoonup Las cond. iniciales determinan las ctes. de integración de la respuesta natural,  $f_n(t)$

### Condiciones iniciales, resistencia

No acumula energía  $\rightarrow$  sigue los cambios de forma instantánea

$$u(t) = R \cdot i(t)$$

(no aparece ninguna derivada en su ec. de definición)

### Condiciones iniciales, bobina

La corriente por una bobina no puede variar de forma brusca, debido a que:

Tensiones infinitas y corrientes infinitas son físicamente imposibles

Partamos de la ec. de definición de la bobina:

$$u_L(t) = L \frac{d i_L(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad \boxed{i_L(0^-) = i_L(0^+)}$$

Si la corriente cambiara de forma brusca (función escalón), su derivada sería infinita, luego la tensión en bornes sería infinita

Esta es la *condición de continuidad* de la bobina

#### Condiciones iniciales, condensador

De forma equivalente, la tensión en un condensador no puede variar de forma brusca

Partamos de su ec. de definición:

$$i_{C}(t) = C \frac{d u_{C}(t)}{dt}$$

Si la tensión cambiara de forma brusca, **su derivada sería infinita**, luego la corriente de carga o descarga sería infinita. Entonces:

$$u_C(0^-) = u_C(0^+)$$

Esta es la condición de continuidad del condensador

- 1 Introducción
- 2 Circuitos de primer orden
- 3 Circuitos de segundo orden

## Circuitos de primer orden: definición

- Circuitos compuestos por:
  - ▶ Un único elemento de acumulación (o varios elementos que pueden ser simplificados a un elemento equivalente, *e.g.*, bobinas en serie)
  - ► Y resistencias
- ► Modelados mediante una ec. diferencial de 1<sup>er</sup> orden:

$$a_1 \cdot f'(t) + a_0 \cdot f(t) = g(t)$$

ejemplo de RL serie: 
$$L \cdot i'(t) + R \cdot i(t) = E(t)$$

## Circuitos de primer orden: resolución

► Modelados mediante una ec. diferencial de 1<sup>er</sup> orden:

$$a_1 \cdot f'(t) + a_0 \cdot f(t) = g(t)$$

- Resolución
  - **1** Cálculo de las **condiciones iniciales**, analizando el circuito en  $t = 0^-$
  - **2** Respuesta natural: análisis de la ec. homogénea (g(t) = 0, sin fuentes) en t > 0

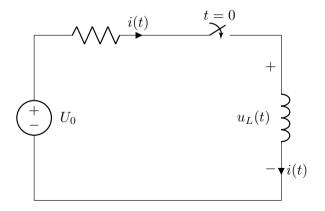
$$f_n(t) = K \cdot e^{-\frac{a_0}{a_1}t}$$
 (demostración a continuación)

**3** Respuesta forzada,  $f_{\infty}(t)$ : análisis del circuito <u>con fuentes</u> en t > 0

- Introducción
- 2 Circuitos de primer orden
  - Circuito RL serie
  - Circuito RC paralelo
  - Procedimiento general
- 3 Circuitos de segundo orden

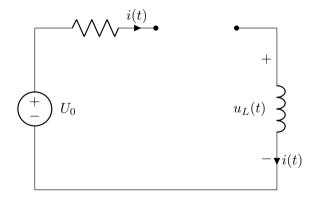
#### Circuito RL serie básico

- ightharpoonup En t < 0 la fuente está desconectada
- ightharpoonup En t=0 la fuente se conecta
- ightharpoonup En t > 0 la fuente alimenta el circuito RL (la bobina almacena energía)



#### Condiciones iniciales

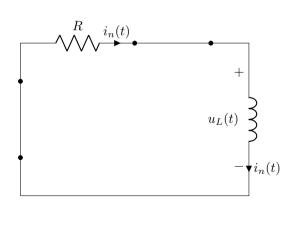
Analizando el circuito para  $t < 0 \dots$ 



... obtenemos  $i(0^-) = 0$ 

## Respuesta natural, $i_n(t)$

Siguiendo los pasos de la diapositiva 19, analizamos el circuito para t > 0 apagando la fuente (ec. homogénea):



**2LK** 
$$\rightarrow$$
  $u_R(t) + u_L(t) = 0$ 

Sustituyendo las **ecs. de definición** de *R* y *L*:

$$R \cdot i_n(t) + L \frac{d i_n(t)}{dt} = 0$$

Cuya solución general es:

$$i_n(t) = K \cdot e^{st}$$

(deducción en la siguiente diapositiva)

### Respuesta natural, $i_n(t)$

La ec. homogénea a resolver es:

$$L\frac{di_n(t)}{dt} + R \cdot i_n(t) = 0$$

Para resolverla, debe hallarse una función cuya derivada sea igual a la propia función, multiplicada por una constante  $\rightarrow$  la función exponencial cumple esta propiedad

**Sustituyendo** entonces  $i_n(t) = K \cdot e^{st}$  (donde K y s son **constantes** a determinar):

$$L \frac{d(K \cdot e^{st})}{dt} + R \cdot K \cdot e^{st} = 0 \quad \rightarrow \quad s \cdot K \cdot e^{st} + \frac{R}{I} \cdot K \cdot e^{st} = 0$$

Diviendo a ambos lados por  $K \cdot e^{st}$  se obtiene la **ec. característica**:

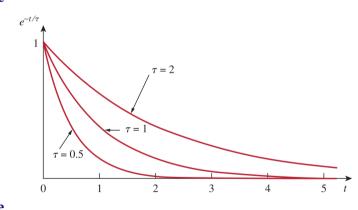
$$s + \frac{R}{L} = 0$$
  $\rightarrow$   $s = -\frac{R}{L}$  sustituyendo en  $i_n(t) = K \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$   $i_n(t) = K \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$ 

# Constante de tiempo

Definimos  $\tau = \frac{L}{R}$  como la **constante de tiempo** del circuito (unidades [s])

$$i_n(t) = K \cdot e^{-t/\tau}$$

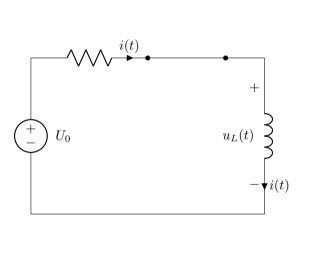
- ► Ratio entre almacenamiento (*L*) y disipación (*R*)
- Valores altos de τ implican decrecimiento lento
- La respuesta natural se extingue tras  $\simeq 5\tau$



La **energía almacenada** en la bobina en  $t = 0^-$  se **disipa en las resistencias** en t > 0

# Respuesta forzada, $i_{\infty}(t)$

Volvemos a **activar la fuente**, analizando para  $t \gg 0$ :



**2LK** 
$$\rightarrow$$
  $u_R(t) + u_L(t) = u_g(t)$ 
0 (CC)

$$R i(t) + L \frac{d i(t)}{dt} = U_0$$

Al ser un circuito de **Corriente Continua**, la **bobina** se sustituye por un **cortocircuito** 

La **solución** es entonces:

$$i_{\infty}(t) = \frac{U_0}{R}$$

# Respuesta completa, $i(t) = i_n(t) + i_{\infty}(t)$

$$i(t) = i_n(t) + i_{\infty}(t) \rightarrow \begin{cases} i_n(t) = K \cdot e^{-t/\tau} \\ i_{\infty}(t) = U_0/R \end{cases}$$

Para **determinar** el valor de la **constante de integración** K, particularizamos en  $t = 0^+$ :

$$i(0^+) = i_n(0^+) + i_\infty(0^+) = K + \frac{U_0}{R} \rightarrow K = i(0^+) - i_\infty(0^+)$$

Teniendo en cuenta la **condición de continuidad**,  $i(0^+) = i(0^-) = 0$ , obtenemos:

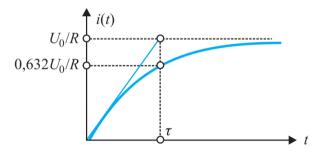
$$K = 0 - \frac{U_0}{R}$$

La solución completa es:

$$i(t) = \frac{U_0}{R} \left( 1 - e^{-t/\tau} \right)$$

## Respuesta completa

$$i(t) = \frac{U_0}{R} \left( 1 - e^{-t/\tau} \right)$$



- Introducción
- 2 Circuitos de primer orden

Circuito RL serie

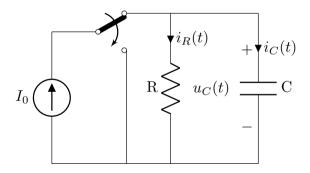
Circuito RC paralelo

Procedimiento general

3 Circuitos de segundo orden

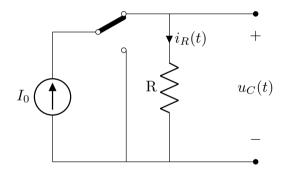
### Circuito RC paralelo básico

- ightharpoonup En t < 0 la fuente alimenta el circuito RC (el condensador está cargado)
- ightharpoonup En t=0 se desconecta la fuente
- ightharpoonup En t > 0 el condensador comienza a descargarse en la resistencia



#### Condiciones iniciales

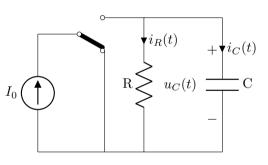
Analizando el circuito para  $t < 0 \dots$ 



... obtenemos 
$$u_C(0^-) = R \cdot I_0$$

# Respuesta natural, $u_n(t)$

Siguiendo los pasos de la diapositiva 19, analizamos el circuito para t > 0 apagando la fuente (ec. homogénea)



(en este caso, la fuente ya está apagada en t > 0)

**1LK** 
$$\rightarrow$$
  $i_R(t) + i_C(t) = 0$  
$$\frac{u_n(t)}{R} + C \frac{d u_n(t)}{dt} = 0$$

Cuya solución general es:

$$u_n(t) = K \cdot e^{st}$$

(deducción equivalente a la diapositiva 24)

Luego la **respuesta natural**,  $u_n(t)$  del circuito es:

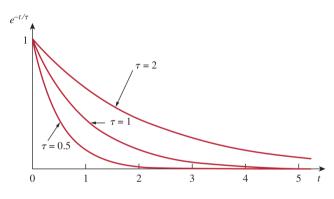
$$u_n(t) = K \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}$$

## Constante de tiempo

Definimos  $\tau = R \cdot C$  como la **constante de tiempo** del circuito (unidades [s])

$$u_n(t) = K \cdot e^{-t/\tau}$$

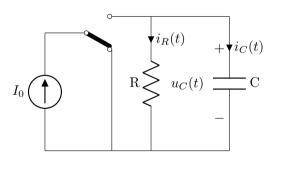
- Valores altos de τ implican decrecimiento lento
- La respuesta natural se extingue tras  $\simeq 5\tau$



La energía almacenada en el C en  $t=0^$ se disipa en las resistencias en t>0

## Respuesta forzada, $u_{\infty}(t)$

Analizando para t > 0 con la **fuente encendida**:



Dado que en t > 0 no hay fuentes presentes en el circuito RC, toda la energía almacenada en el condensador se disipa en la resistencia

Luego la **respuesta forzada**,  $u_{\infty}(t)$ , es:

$$u_{\infty}(t) = 0$$

# Respuesta completa, $u(t) = u_n(t) + u_\infty(t)$

$$u(t) = u_n(t) + u_{\infty}(t) \rightarrow \begin{cases} u_n(t) = K \cdot e^{-t/\tau} \\ u_{\infty}(t) = 0 \end{cases}$$

Para **determinar** el valor de la **constante de integración** K, particularizamos en  $t=0^+$ :

$$u(0^+) = u_n(0^+) + u_\infty(0^+) = K + 0 \rightarrow K = u(0^+)$$

Teniendo en cuenta la **condición de continuidad**,  $u(0^+) = u(0^-) = R \cdot I_0 = U_0$ :

$$K = U_0$$

La solución completa es:

$$u(t) = U_0 \cdot e^{-t/\tau}$$

## Balance energético

Podemos comprobar que **toda la energía** acumulada en el condensador en t < 0 realmente **se disipa** en la resistencia en t > 0:

$$\overline{W_R} = \int_0^\infty u_R(t) \cdot i_R(t) \, dt = \int_0^\infty \frac{u_R^2(t)}{R} \, dt = \int_0^\infty \frac{1}{R} (U_0 \cdot e^{-t/\tau})^2 \, dt = 
= \frac{U_0^2}{R} \int_0^\infty e^{-\frac{2}{R \cdot C}t} \, dt = \frac{U_0^2}{R} \cdot \frac{-R \cdot C}{2} \left[ e^{-\frac{2}{R \cdot C}t} \right]_0^\infty = \frac{-1}{2} C \cdot U_0^2 \cdot [0 - 1] 
= \frac{1}{2} C \cdot U_0^2 = \boxed{W_C}$$

- Introducción
- 2 Circuitos de primer orden

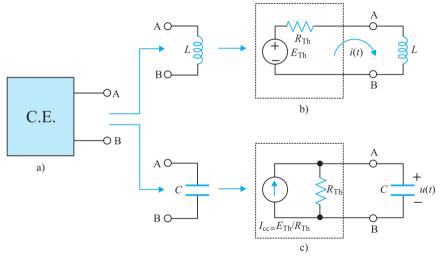
Circuito RL serie

Circuito RC paralelo

Procedimiento general

3 Circuitos de segundo orden

#### Procedimiento general → equivalente de Thévenin/Norton



 $R_{th}$  es la **resistencia vista desde los bornes** del condensador o de la bobina, cuando se anulan todas las fuentes independientes

38 / 52

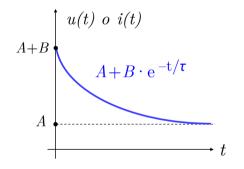
#### Procedimiento general

- 1 Dibujar el circuito para t < 0
  - ▶ Obtener el valor de  $i_L(0^-)$  o  $u_C(0^-)$
  - ▶ Aplicar el **principio de continuidad** para determinar  $i_L(0^+)$  o  $u_C(0^+)$
- 2 Dibujar el circuito para t > 0
  - Calcular el equivalente de **Thévenin/Norton** visto por *L* o *C*
  - ▶ Determinar la **constante de tiempo** del circuito:  $\tau = \frac{L}{R_{th}}$  o  $\tau = R_{th} \cdot C$
  - ► Calcular la respuesta en régimen permanente,  $i_{\infty}(t)$  o  $u_{\infty}(t)$
- **3** Obtener la respuesta completa:

$$i_L(t) = i_n(t) + i_\infty(t)$$
  
 $u_C(t) = u_n(t) + u_\infty(t)$ 

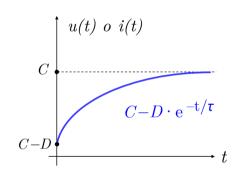
### Resumen: respuestas posibles de un 1er orden (corriente continua)

Elemento que se descarga (parcialmente)



**Caso particular**: A = 0, no hay fuentes en t > 0 (el elemento se **descarga totalmente**)

Elemento (C o L) que aumenta su carga



Caso particular: C = D, el elemento estaba inicialmente descargado

#### Interludio: transitorios inestables, apagón EE. UU. 2003

- ▶ 55 millones de personas sin luz
- ► 6.000 millones de \$ en pérdidas



- ► Nueva York perdió gran parte del suministro durante 13 horas
- Ocurrió en agosto a las 16h: podría haber sido mucho peor (e.g. diciembre a las 16h, sin luz natural)



- Introducción
- 2 Circuitos de primer orden
- 3 Circuitos de segundo orden

### Circuitos de segundo orden

- Circuitos que contienen dos elementos de acumulación, además de elementos de disipación (resistencias)
- ► Modelados mediante una ec. diferencial de 2<sup>do</sup> orden:

$$a_2 \cdot f''(t) + a_1 \cdot f'(t) + a_0 \cdot f(t) = g(t)$$

lacktriangle Resolución lacktriangle obtención de respuesta natural  $f_n(t)$  y respuesta forzada  $f_\infty(t)$ 

$$f(t) = f_n(t) + f_{\infty}(t)$$

#### Ejemplo: circuito RLC serie

Derivando a ambos lados de la ecuación:

$$L \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + R \frac{d i(t)}{dt} + \frac{1}{C} i(t) = \frac{d E(t)}{dt}$$

# Circuitos de segundo orden: respuesta natural, $f_n(t)$

$$a_2 \cdot f''(t) + a_1 \cdot f'(t) + a_0 \cdot f(t) = 0 \rightarrow f''(t) + \frac{a_1}{a_2} \cdot f'(t) + \frac{a_0}{a_2} \cdot f(t) = 0$$

Redefinición de constantes:

$$\frac{a_1}{a_2} = 2 \, \xi \, \omega_n \qquad \qquad \frac{a_0}{a_2} = \omega_n^2$$

 $\omega_n$  pulsación natural

 $\xi$  coeficiente de **amortiguamiento** 

► Resolviendo la **ec. característica**\*:

$$s^{2} + 2\xi \omega_{n} s + \omega_{n}^{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} s_{1} = -\omega_{n} \left( \xi + \sqrt{\xi^{2} - 1} \right) \\ s_{2} = -\omega_{n} \left( \xi - \sqrt{\xi^{2} - 1} \right) \end{cases}$$

<sup>\*</sup>Obtenida mediante el mismo procedimiento que en la diapositiva 24, sustituyendo la solución de prueba  $F_n(t) = K \cdot e^{st}$ . Para más detalles, consultar págs. 423 - 424 del Fraile Mora, edición 2012

## Circuitos de segundo orden: respuesta natural, $f_n(t)$

(continuación)

► Resolviendo la ec. característica:

$$s^{2} + 2 \xi \omega_{n} s + \omega_{n}^{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} s_{1} = -\omega_{n} \left( \xi + \sqrt{\xi^{2} - 1} \right) \\ s_{2} = -\omega_{n} \left( \xi - \sqrt{\xi^{2} - 1} \right) \end{cases}$$

Por lo tanto, la solución de la ec. diferencial es:

$$f_n(t) = K_1 \cdot e^{s_1 \cdot t} + K_2 \cdot e^{s_2 \cdot t}$$

donde  $K_1$  y  $K_2$  son ctes. que dependen de las **condiciones iniciales** 

## Circuitos de segundo orden: tipos

Dependiendo de los **valores de las soluciones** de la ec. característica, hay **3 posibilidades de transitorio**:

$$s_1 = -\omega_n \left( \xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right) \qquad s_2 = -\omega_n \left( \xi - \sqrt{\xi^2 - 1} \right)$$

- ► Soluciones **reales distintas** → circuito **sobreamortiguado** (transitorio "lento")
- ► Solución real doble → circuito críticamente amortiguado
- ightharpoonup Soluciones **complejas conjugadas**\* ightharpoonup circuito **subamortiguado** (con oscilaciones)

47 / 52

<sup>\*</sup>Por el Tª de la raíz conjugada compleja: si un polinomio en una variables con coefs. reales tiene una raíz compleja, el conjugado también es raíz del polinomio

# Circuitos de segundo orden: tipos

► Circuito sobreamortiguado (transitorio "lento")

$$\xi > 1$$

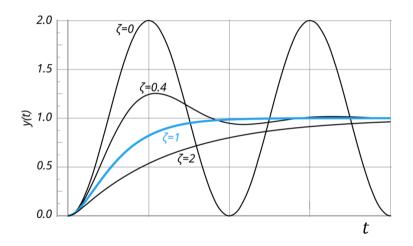
► Circuito críticamente amortiguado

$$\xi = 1$$

Circuito subamortiguado (con oscilaciones)

$$\xi < 1$$

# Circuitos de segundo orden: tipos



# Circuitos de segundo orden subamortiguados

El caso **subamortiguado** ( $\xi$  < 1) da lugar a **oscilaciones atenuadas**. Demostración:

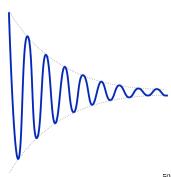
$$f_n(t) = K_1 \cdot e^{s_1 \cdot t} + K_2 \cdot e^{s_2 \cdot t}$$
  $s_1, s_2 \in \mathbb{C}$   $\rightarrow$   $f_n(t) = K_1 \cdot e^{(-a+jb) \cdot t} + K_2 \cdot e^{(-a-jb) \cdot t}$ 

**Nota**: la **parte real es siempre negativa** en las soluciones complejas de un circuito de  $2^{do}$  orden Lo contrario implicaría  $\xi < 0$ , y por tanto implicaría resistencia negativa, lo cual carece de sentido físico (se omite la demostración)

Usando la fórmula de Euler ( $e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$ ), puede llegarse a:

$$f_n(t) = e^{-\alpha \cdot t} \cdot [B_1 \cdot \sin(\omega t) + B_2 \cdot \cos(\omega t)]$$
$$= B' \cdot e^{-\alpha \cdot t} \cdot \sin(\omega t + \theta)$$

(la forma de obtener las ctes. B',  $\alpha$ ,  $\omega$  y  $\theta$  se detallará en un ejercicio)



### Circuitos de segundo orden, resolución

- **1** Obtener la **respuesta natural** del circuito
  - ► Se escribe la **ec. diferencial del circuito** <u>sin fuentes</u>, usando 1LK o 2LK
  - ightharpoonup Se resuelve la ec. característica, primero obteniendo el valor de las ctes.  $\omega_n$  y  $\xi$
  - ► El tipo de soluciones de la ec. característica determina el **tipo de transitorio** → debe comprobarse que el **transitorio** es coherente con el **valor de**  $\xi$  ( $\xi > 1$ ,  $\xi = 1$  o  $0 < \xi < 1$ )
- ② Determinar el valor de las ctes. de integración de la respuesta natural usando las condiciones iniciales, y aplicando el principio de continuidad para L o C
  - Son necesarias 2 condiciones iniciales: una para la propia magnitud (u(t) o i(t)) y otra para su primera derivada (u'(t) o i'(t))
  - ► Más detalles en ejercicios resueltos
- **3** Obtener la **respuesta forzada**,  $f_{\infty}(t)$ : análisis del circuito <u>con fuentes</u> en t > 0

Interludio: temas de investigación en sistemas eléctricos

# ¿Quién debería pagar por la estabilidad de la red eléctrica?

Spoiler: tú, no 😁