Ejercicio 15 de la colección de problemas

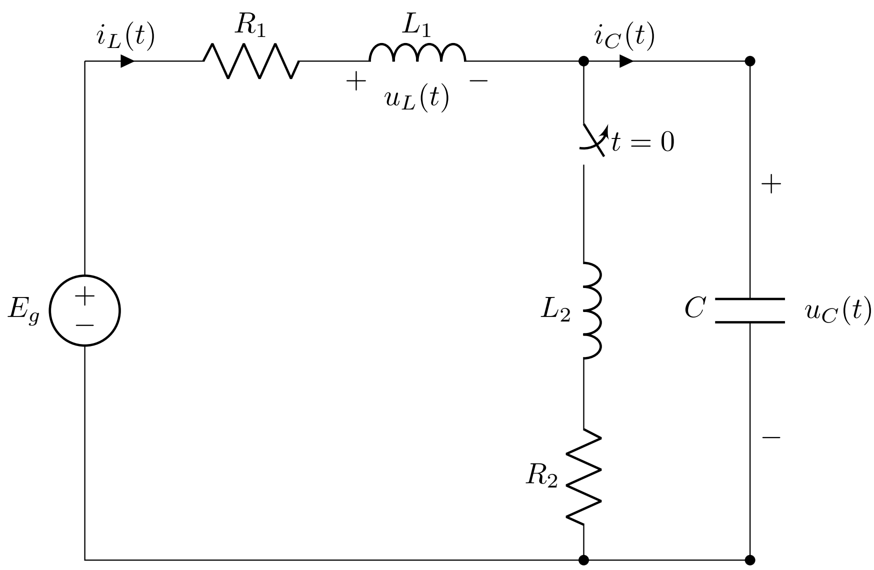
Enunciado:

En el circuito de la figura, el interruptor ha estado cerrado durante un tiempo elevado, y en $t = 0$ se abre. En estas condiciones, se debe determinar:

1. Tipo de transitorio presente en el circuito
2. Condiciones iniciales de las siguientes variables del circuito: $u_C(0^+), i_L(0^+), i_C(0^+), u_L(0^+)$
3. Valores en régimen permanente de las siguientes variables: $u_C(\infty)$, $i_L(\infty)$, $i_C(\infty)$, $u_L(\infty)$
4. Expresión de la corriente $i_L(t)$ para $t > 0$
5. Expresión de la tensión $u_C(t)$ para $t > 0$

Datos:

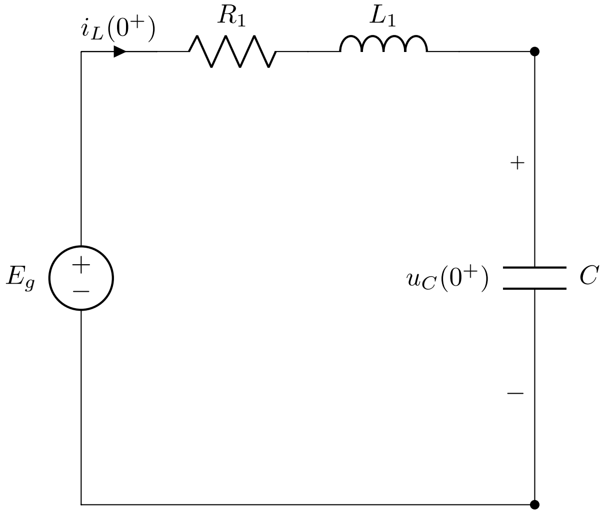
$$E_g = 500\,\text{V}$$
$$R_1 = 375\,\Omega$$
$$R_2 = 125\,\Omega$$
$$L_1 = 40\,\text{mH}$$
$$L_2 = 40\,\text{mH}$$
$$C = 1\,\mu\text{F}$$



Solución:

1. Tipo de transitorio

   La siguiente figura representa el circuito para $t > 0$:



Planteamos la ec. diferencial del circuito, con la fuente apagada:

$$u_L(t) + u_R(t) + u_C(t) = 0$$

$$L_1 \frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + R_1 \frac{d\, i_L(t)}{dt} + \frac{1}{C}\, i_L(t) = 0$$

Luego la ec. característica es:

$$s^2 + \frac{R_1}{L_1} \cdot s + \frac{1}{L_1 \cdot C} = 0$$

$$s^2 + 9375 \cdot s + 25 \cdot 10^6 = 0$$

Escribiendo la forma estándar de la ec. característica, determinamos el valor de los parámetros ξ y ω_n:

$$s^2 + 2\,\xi\,\omega_n \cdot s + \omega_n^2 = 0$$

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} = 5000\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}, \qquad \xi = \frac{1}{2\,\omega_n} \cdot \frac{R_1}{L_1} = 0{,}9375$$

Dado que $\xi < 1$, se trata de un $\boxed{\text{transitorio subamortiguado}}$

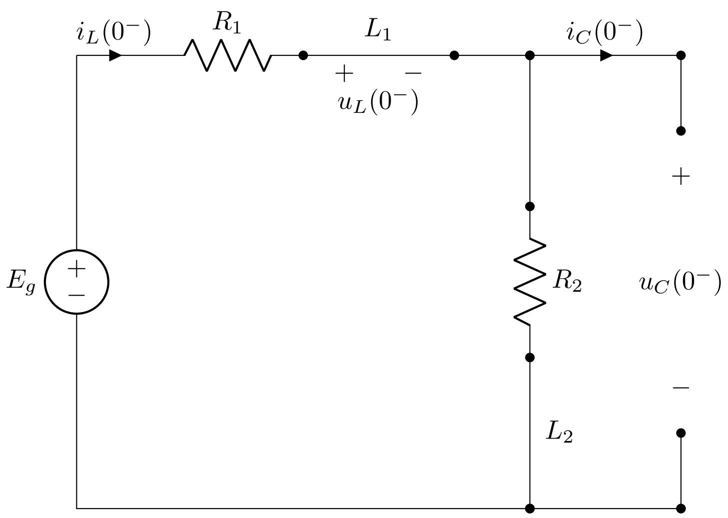
Para comprobar que el resultado es correcto, podemos calcular las soluciones de la ec. diferencial:

$$s_1 = -4687{,}5 + \mathrm{j}\,1734\ \mathrm{s}^{-1}, \qquad s_2 = -4687{,}5 - \mathrm{j}\,1734\ \mathrm{s}^{-1}$$

Obtenemos soluciones complejas conjugadas, que corresponden también a un transitorio subamortiguado.

2. Condiciones iniciales

La siguiente figura representa el circuito para $t < 0$:



Teniendo en cuenta las condiciones de continuidad:

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 1\,\text{A}$$
$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = 125\,\text{V}$$

Además, considerando el circuito en $t = 0^+$, por 2LK:

$$E_g = u_R(0^+) + u_L(0^+) + u_C(0^+) \quad \rightarrow \quad u_L(0^+) = E_g - R_1 \cdot i_L(0^+) - u_C(0^+) = 0\,\text{V}$$

Finalmente:

$$i_C(0^+) = i_L(0^+) = 1\,\text{A}$$

3. Valores en régimen permanente

El circuito en régimen permanente está abierto debido al condensador. Por tanto:

$$u_c(\infty) = 500\,\text{V}, \qquad u_L(\infty) = 0\,\text{V}, \qquad i_c(\infty) = 0\,\text{A}, \qquad i_L(\infty) = 0\,\text{A}$$

4. Expresión de $i_L(t)$

La expresión genérica de la corriente es:

$$i_L(t) = i_L(\infty) + e^{-\alpha \cdot t}\,[B_1 \cdot \text{sen}(\omega t) + B_2 \cdot \cos(\omega t)]$$

siendo $\omega = \omega_n \sqrt{1-\xi^2} = 1740\,\mathrm{rad/s}$ y $\alpha = \omega_n \cdot \xi = 4687{,}5\ \mathrm{s}^{-1}$

Para determinar las constantes de integración B_1 y B_2 recurrimos a las condiciones iniciales:

$$i_L(0^+) = 1\,\mathrm{A} = B_2\,, \qquad \left.\frac{d\,i_L(t)}{dt}\right|_{t=0^+} = \frac{1}{L}\,u_L(0^+) = 0 = -\alpha \cdot B_2 + B_1 \cdot \omega \ \rightarrow\ B_1 = 2{,}7\,\mathrm{A}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} i_L(t) &= e^{-4687{,}5\,t}\ [2{,}7 \cdot \mathrm{sen}(1740 \cdot t) + \cos(1740 \cdot t)] \\ &= 2{,}88 \cdot e^{-4687{,}5\,t} \cdot \mathrm{sen}(1740 \cdot t + 0{,}3547)\ \mathrm{A} \end{aligned}$$

5. Expresión de $u_C(t)$

A partir de la expresión anterior podemos calcular la correspondiente a la tensión en el condensador, teniendo en cuenta que:

$$u_C(t) = E_g - R_1 \cdot i_L(t) - L_1\,\frac{d\,i_L(t)}{dt}$$

$$\begin{aligned} u_C(t) &= 500 - e^{-4687{,}5\,t}\ [435{,}9 \cdot \mathrm{sen}(1740 \cdot t) + 375 \cdot \cos(1740 \cdot t)] \\ &= 500 - 575{,}01 \cdot e^{-4687{,}5\,t} \cdot \mathrm{sen}(1740 \cdot t + 0{,}7104)\ \mathrm{V} \end{aligned}$$