Análisis Clásico de Circuitos de Primer Orden

Teoría de Circuitos III

Oscar Perpiñán Lamigueiro

Circuitos de Primer Orden

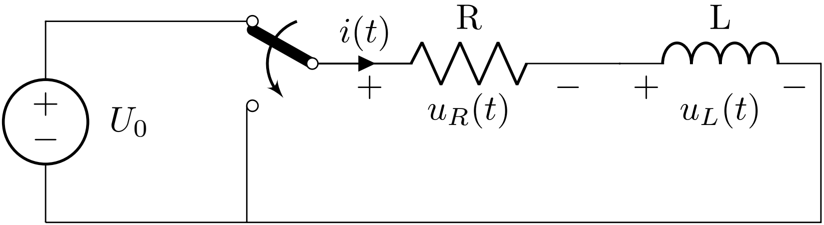
- Circuitos que tienen un **único elemento de acumulación** (o *varios elementos que pueden ser simplificados a un elemento equivalente*) y parte resistiva.
- **Ecuación diferencial de primer orden**: la respuesta natural es siempre una **exponencial decreciente**.
- Circuitos típicos:
  - RL serie
  - RC paralelo

Respuesta natural y forzada

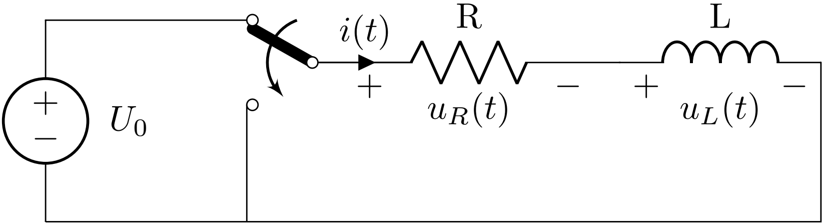
- El método de resolución analiza el circuito en dos etapas:
  - Sin fuentes: **respuesta natural** (la energía acumulada en $t < 0$ se disipa en la resistencia).
  - Con fuentes: **respuesta forzada** (determinada por la forma de onda de las fuentes).

Circuito básico

- En $t < 0$ la fuente alimenta el circuito RL (la bobina almacena energía).
- En $t = 0$ la fuente se desconecta (la bobina se descarga en la resistencia)



Respuesta natural



Ecuaciones

$$u_R(t) + u_L(t) = 0$$

$$Ri + L\frac{di}{dt} = 0$$

Respuesta natural

Solución Genérica

$$i(t) = Ae^{st}$$

Ecuación Característica

$$s + \frac{R}{L} = 0 \Rightarrow s = -\frac{R}{L}$$

Condiciones Iniciales

- Analizando circuito para $t < 0$ obtenemos $i(0^-) = I_0$
- Por otra parte, para $t > 0$:

$$i(t) = Ae^{-R/Lt}$$
$$i(0^+) = Ae^0 = A$$

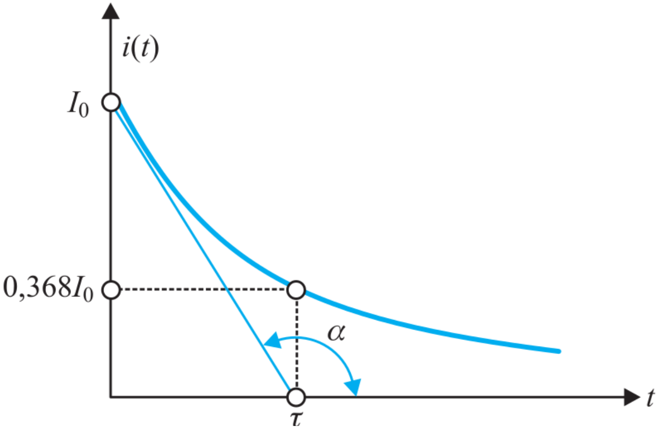
- Y dada la condición de continuidad, $i(0^+) = i(0^-)$:

$$A = I_0$$
$$i(t) = I_0 e^{-R/Lt}$$

Constante de tiempo

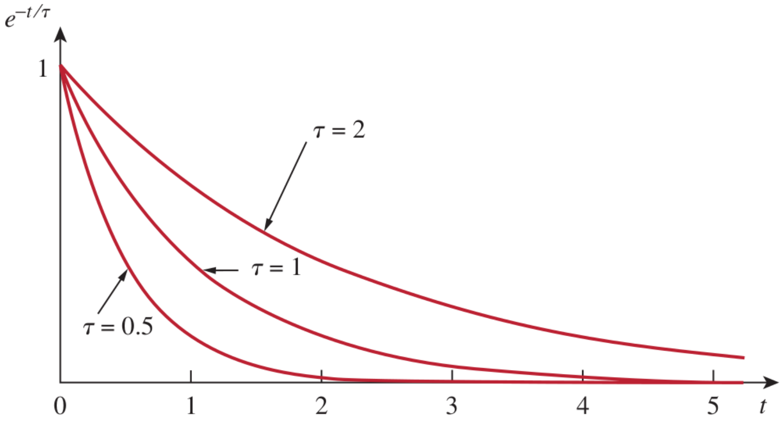
- $\tau = \frac{L}{R}$ es la constante de tiempo (unidades [s]).
- Ratio entre almacenamiento (L) y disipación (R).

$$i(t) = I_0 e^{-t/\tau}$$



Constante de tiempo

- Valores altos de τ implican decrecimiento lento.
- La respuesta natural «desaparece» tras $\simeq 5\tau$.



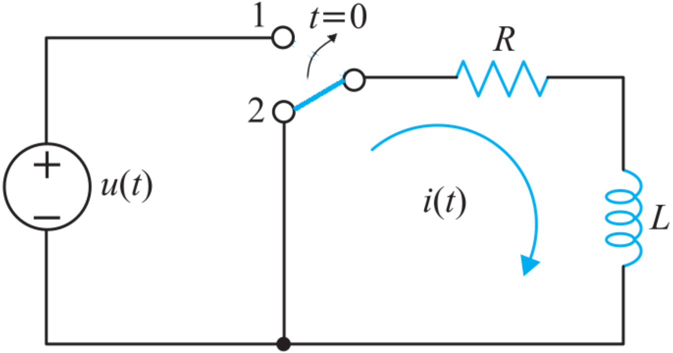
Balance Energético

La energía acumulada en la bobina en $t < 0$ se disipa en la resistencia en $t > 0$

$$W_R = \int_0^\infty R i^2(t) \mathrm{d}t = \frac{1}{2} L I_0^2 = W_L$$

Respuesta forzada

Cambia el funcionamiento del interruptor: en $t > 0$ la fuente alimenta el circuito RL.



Respuesta forzada

Ecuaciones

$$u_R(t) + u_L(t) = u(t)$$
$$Ri + L\frac{di}{dt} = U_0$$

Solución

Para la solución particular se propone función análoga a la excitación (analizando circuito para $t > 0$)

$$i(t) = i_n(t) + i_\infty(t)$$
$$i_n(t) = Ae^{st}$$
$$i_\infty(t) = U_0/R$$

Condiciones iniciales

Planteamiento General

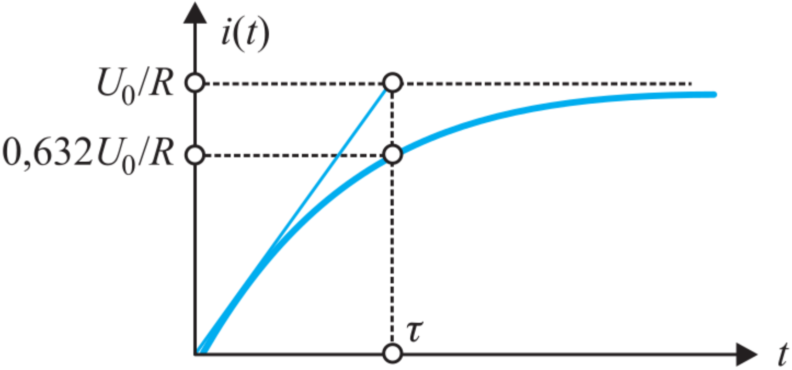
$$
\begin{aligned}
i(0^+) &= i_n(0^+) + i_\infty(0^+) \\
i(0^+) &= A + i_\infty(0^+) \\
A &= i(0^+) - i_\infty(0^+)
\end{aligned}
$$

Respuesta completa (ejemplo)

Suponiendo que la bobina está inicialmente descargada,
$i(0^-) = 0 \Rightarrow i(0^+) = 0$

$$A = 0 - U_0/R$$

$$i(t) = \frac{U_0}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$



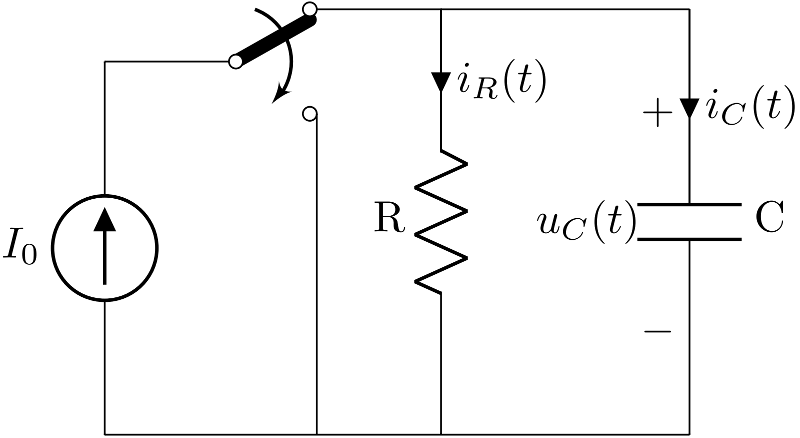
Respuesta completa

- $i(0^+)$: corriente en la bobina, condiciones iniciales ($i(0^-) = i(0^+)$).
- $i_\infty(t)$: corriente en la bobina en régimen permanente para $t > 0$.
- $i_\infty(0^+)$: corriente en la bobina en régimen permanente particularizada en $t = 0$.

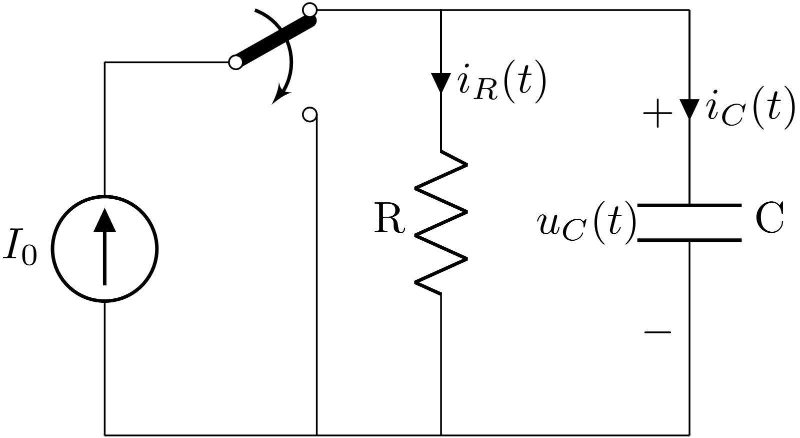
$$i(t) = \left(i(0^+) - i_\infty(0^+)\right) e^{-t/\tau} + i_\infty(t)$$

Circuito básico

- En $t < 0$ la fuente alimenta el circuito RC (el condensador se carga).
- En $t = 0$ se desconecta la fuente (el condensador comienza a descargarse en la resistencia).



Respuesta natural



Ecuaciones

$$i_R(t) + i_C(t) = 0$$

$$Gu + C\frac{du}{dt} = 0$$

Respuesta natural

Solución Genérica

$$u(t) = Ae^{st}$$

Ecuación Característica

$$s + \frac{G}{C} = 0 \Rightarrow s = -\frac{G}{C}$$

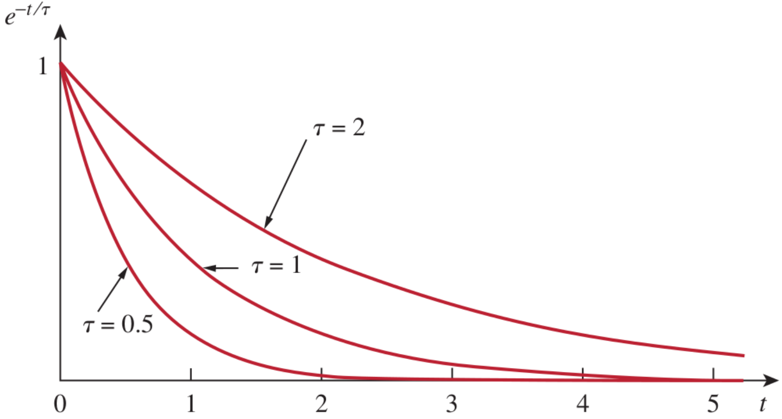
Condiciones Iniciales

$$u(t) = U_0 e^{-G/Ct}$$

Constante de tiempo

- $\tau = \frac{C}{G}$ es la constante de tiempo (unidades [s]).
- Ratio entre almacenamiento (C) y disipación (G).

$$u(t) = U_0 e^{-t/\tau}$$



Balance Energético

La energía acumulada en el condensador en $t < 0$ se disipa en la resistencia (conductancia) en $t > 0$

$$W_G = \int_0^{\infty} G u^2(t) \mathrm{d}t = \frac{1}{2} C U_0^2 = W_C$$

Respuesta completa

- $u(0^+)$: tensión en el condensador, condiciones iniciales $(u(0^-) = u(0^+))$.
- $u_\infty(t)$: tensión en el condensador en régimen permanente para $t > 0$.
- $u_\infty(0^+)$: tensión en el condensador en régimen permanente particularizada en $t = 0$.

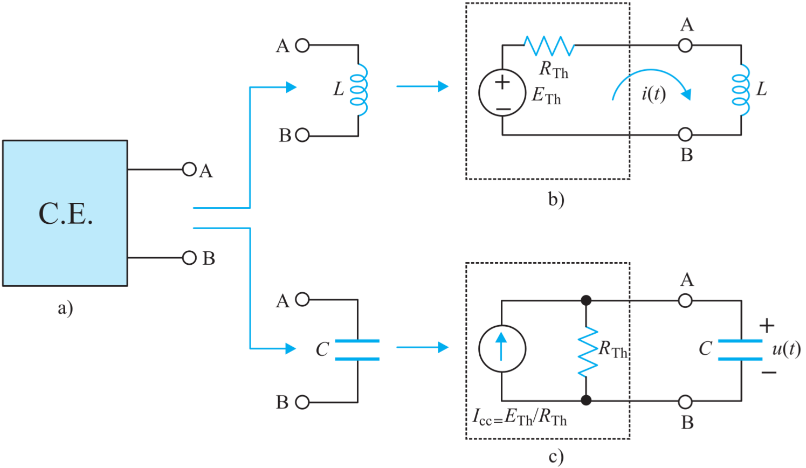
$$u(t) = \left(u(0^+) - u_\infty(0^+)\right) e^{-t/\tau} + u_\infty(t)$$

Ejemplo

Suponiendo que el condensador está inicialmente descargado, $u(0^-) = 0 \Rightarrow u(0^+) = 0$

$$A = 0 - I_0/G$$
$$u(t) = \frac{I_0}{G}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Equivalente de Thévenin (Norton)



Procedimiento General

- Dibujar el circuito para $t < 0$.
  - Determinar variables en régimen permanente, $u_c(t)$, $i_L(t)$.
  - Particularizar para $t = 0$, obteniendo $u_c(0^-)$ o $i_L(0^-)$.
  - Continuidad: $u_c(0^+) = u_c(0^-)$, $i_L(0^+) = i_L(0^-)$.
- Dibujar el circuito para $t > 0$.
  - Calcular el equivalente de Thevenin (Norton) visto por el elemento de acumulación.
  - La constante de tiempo de la respuesta natural es $\tau = \frac{L}{R_{th}}$ o $\tau = \frac{C}{G_{th}}$.
  - Calcular las variables $i_L(t)$ o $u_c(t)$ en régimen permanente, obteniendo $i_\infty(t)$ o $u_\infty(t)$.
  - Obtener respuesta completa:

$$i_L(t) = \left(i_L(0^+) - i_\infty(0^+)\right) e^{-t/\tau} + i_\infty(t)$$
$$u_C(t) = \left(u_C(0^+) - u_\infty(0^+)\right) e^{-t/\tau} + u_\infty(t)$$

Ejercicios

FM

Ejemplos de aplicación 4.2, 4.3, 4.4, y 4.7

HKD

Ejemplo 8.4, 8.6, 8.10

AS

Ejemplo 7.13