Corriente alterna sinusoidal

Teoría de Circuitos

Oscar Perpiñán Lamigueiro

Forma de Onda

- La salida de los generadores (de tensión o de corriente) son funciones que pueden variar con el tiempo.
- La dependencia funcional $u = u(t)$ o $i = i(t)$ se denomina forma de onda.

Clasificación

Signo de la magnitud

- Unidireccionales
  - Signo constante
  - El valor puede ser constante (corriente continua) o variable.
- Bidireccionales
  - Signo variable con el tiempo.

Repetición del valor de la magnitud

- Periódicas
  El valor de la magnitud se repite de forma regular.
- No periódicas
  El valor de la magnitud varía de forma arbitraria con el tiempo.

Valores que definen una onda periódica

Período y frecuencia

- Período (T): tiempo que tarda en repetirse la función.
- Frecuencia (f): número de repeticiones por unidad de tiempo.
- $f = \frac{1}{T}$

Valor medio

$$U_m = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\,dt \qquad I_m = \frac{1}{T}\int_0^T i(t)\,dt$$

Valor eficaz

$$U = \sqrt{\frac{1}{T}\cdot\int_0^T u^2(t)\,dt} \qquad I = \sqrt{\frac{1}{T}\cdot\int_0^T i^2(t)\,dt}$$

Valores que definen una onda periódica

- Valores de pico

$$Y_{max} = \max(y(t)) \qquad Y_{min} = \min(y(t))$$

- Amplitud o valor pico a pico

$$|Y_{max} - Y_{min}|$$

- Factor de amplitud

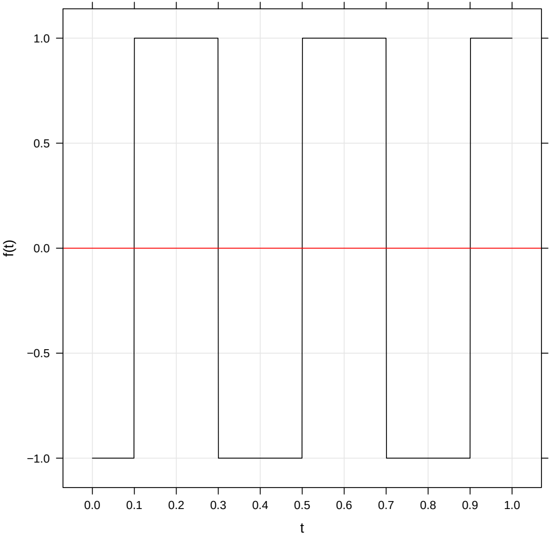
$$FA = \frac{Y_{max}}{Y}$$

- Factor de forma

$$FF = \frac{Y}{Y_m}$$

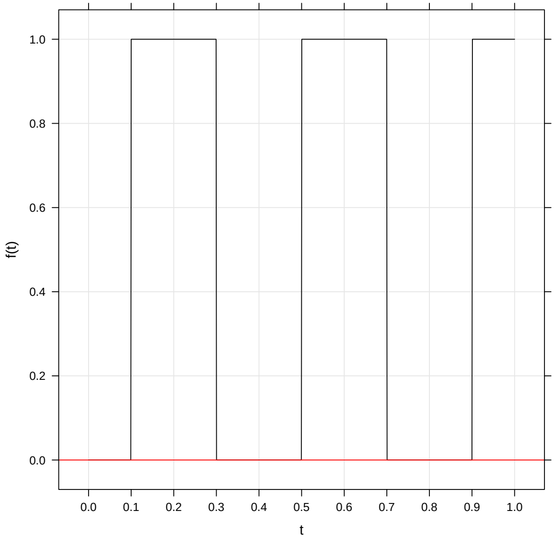
Formas de Onda Periódicas

Tren de Pulsos Bidireccional



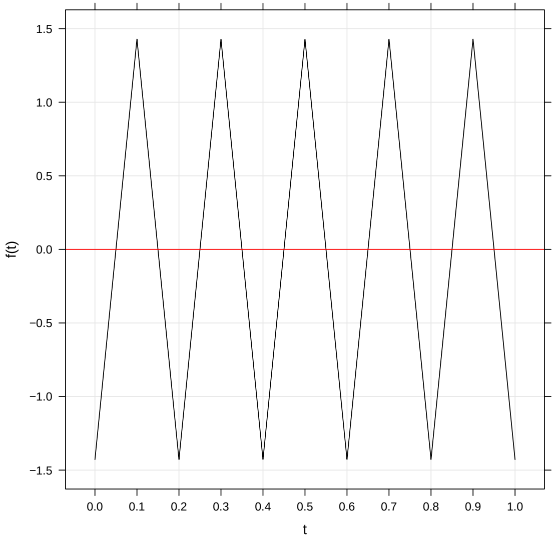
Formas de Onda Periódicas

Tren de Pulsos Unidireccional



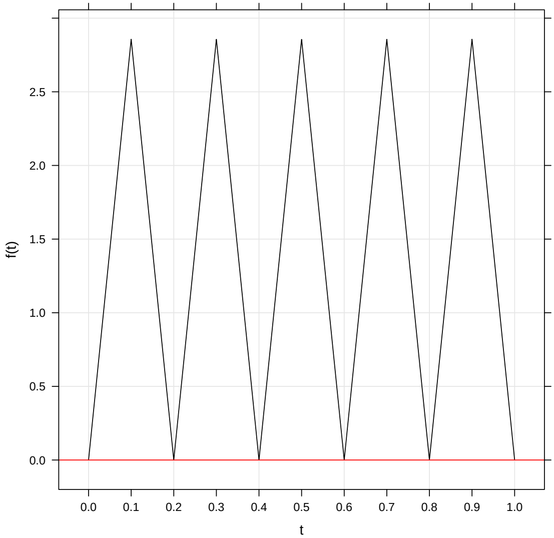
Formas de Onda Periódicas

Onda Triangular Bidireccional



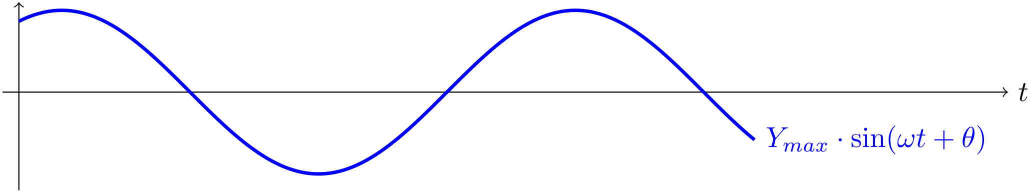
Formas de Onda Periódicas

Onda Triangular Unidireccional

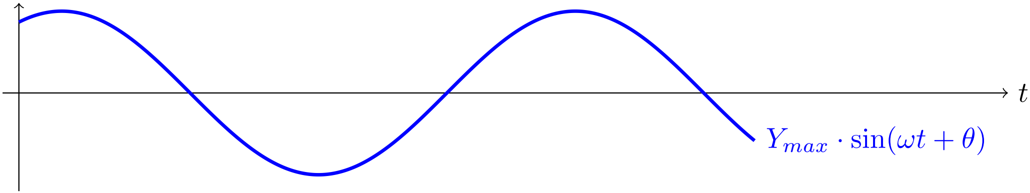


Formas de Onda Periódicas

Onda sinusoidal



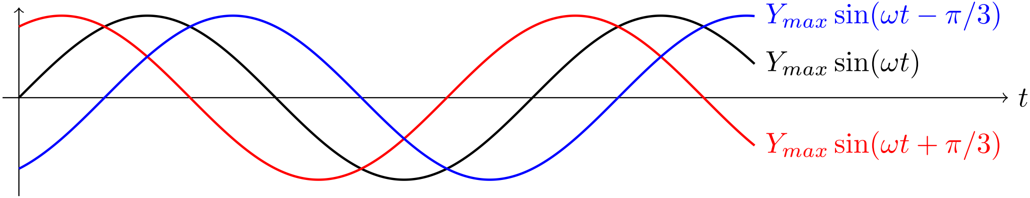
Definición



$$y(t) = Y_o \cdot \sin(\omega \cdot t + \theta)$$

- Y_o valor máximo de la onda.
- T: periodo de la onda (segundos)
- $\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T}$: pulsación (radianes/segundo)
- $f = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} = \frac{1}{T}$: frecuencia (Hz)
- θ: fase (radianes o grados)

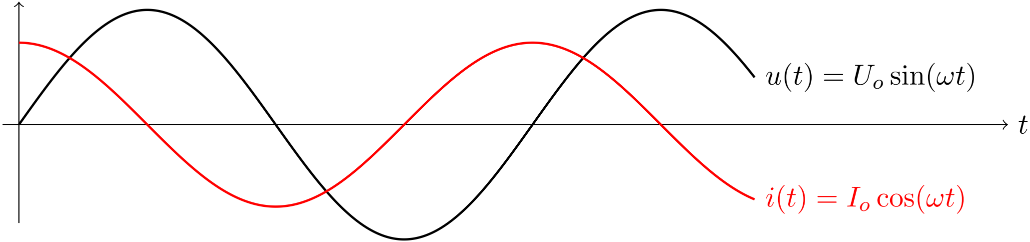
Fase



$$y(t) = Y_o \cdot \sin(\omega \cdot t + \theta)$$

- θ: fase (radianes o grados)
  - Es el argumento de la onda para t=0
  - Tomando una onda como referencia, si la fase es 0º, se dice que están en fase con la onda de referencia.
  - Si la fase es positiva, se dice que la onda adelanta respecto a la referencia.

Señales en Cuadratura



- Cuando el desfase entre dos señales es de 90º ($\theta_I - \theta_U = \pi/2$), se dice que están en cuadratura.
- El paso por cero de una señal coincide con el paso por el máximo/mínimo de la otra señal.

Valor medio y valor eficaz

Valor medio

$$Y_m = \frac{1}{T}\int_0^T y(t)\,dt$$

$$Y_m = \frac{1}{T}\int_0^T Y_o \cdot \sin(\omega \cdot t + \theta)\,dt = 0$$

Valor eficaz

$$Y = \sqrt{\frac{1}{T}\cdot\int_0^T y^2(t)\,dt}$$

$$Y = \sqrt{\frac{1}{T}\cdot\int_0^T \left(Y_o \cdot \sin(\omega \cdot t + \theta)\right)^2 dt} = \boxed{\frac{Y_o}{\sqrt{2}}}$$

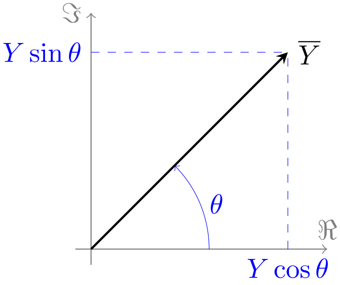
Representación fasorial

- Un fasor es un **número complejo** que representa una señal sinusoidal para simplificar cálculos.
- El **módulo** del fasor es el **valor eficaz**. El **argumento** es la **fase**.
- Descartamos pulsación: No se puede emplear cuando hay frecuencias diferentes en un mismo circuito.

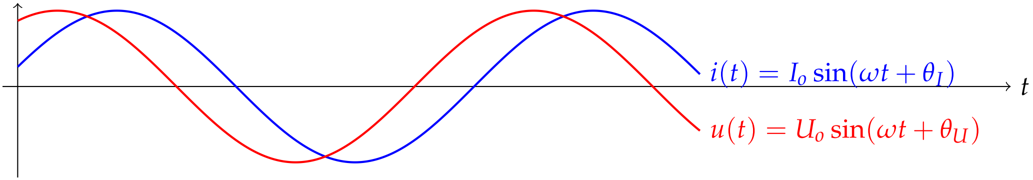
$$\overline{Y} = Y \cdot e^{j\theta}$$

$$\overline{Y} = Y\underline{/\theta}$$

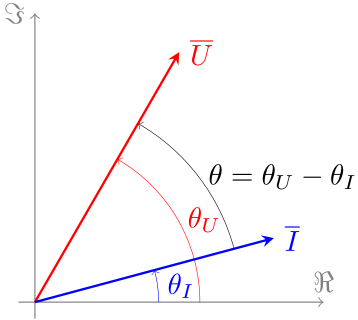
$$\overline{Y} = Y \cdot (\cos(\theta) + \mathrm{j} \cdot \sin(\theta))$$



Tensión y corriente en notación fasorial



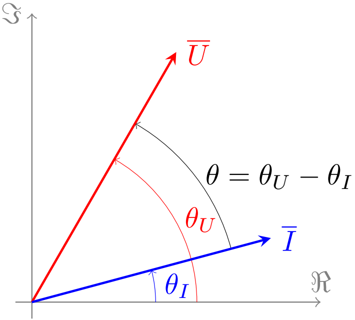
$$\overline{U} = U\underline{/\theta_U}$$
$$\bar{I} = I\underline{/\theta_I}$$



Impedancia: relación entre fasores de tensión y corriente

$$\overline{U} = \overline{Z} \cdot \overline{I}$$

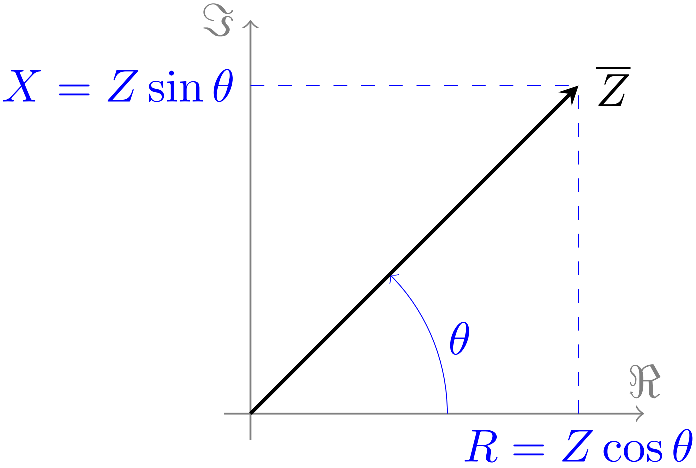
$$\overline{Z} = \frac{\overline{U}}{\overline{I}}$$



$$\boxed{\overline{Z} = \frac{U}{I}\underline{/\theta_U - \theta_I} \Rightarrow \begin{cases} Z = \frac{U}{I} \\ \theta = \theta_U - \theta_I \end{cases}}$$

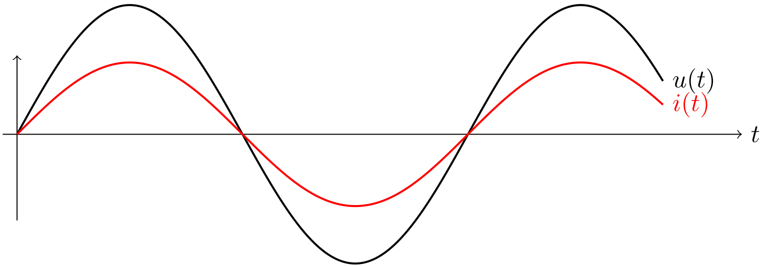
Impedancia Genérica

$$\overline{Z} = R + jX$$



Circuito Resistivo

Un circuito resistivo no desfasa (**tensión y corriente en fase**).

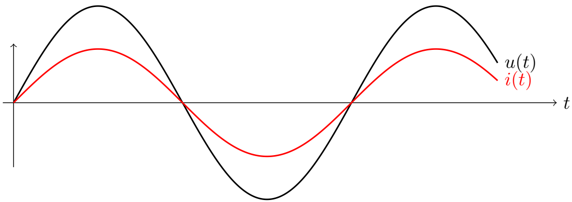


$$i(t) = I_o \cdot \sin(\omega t + \theta_I)$$

$$\begin{aligned} u(t) &= R \cdot i(t) = \\ &= RI_o \cdot \sin(\omega t + \theta_I + 0) = \\ &= U_o \cdot \sin(\omega t + \theta_I + 0) \end{aligned}$$

Circuito Resistivo

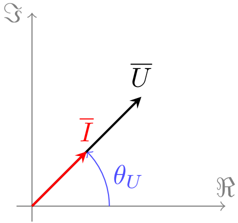
Un circuito resistivo no desfasa (**tensión y corriente en fase**).

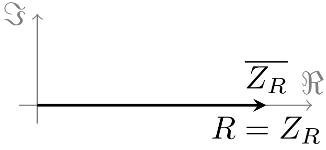


$$Z = \frac{U}{I} = R$$

$$\theta = \theta_U - \theta_I = 0$$

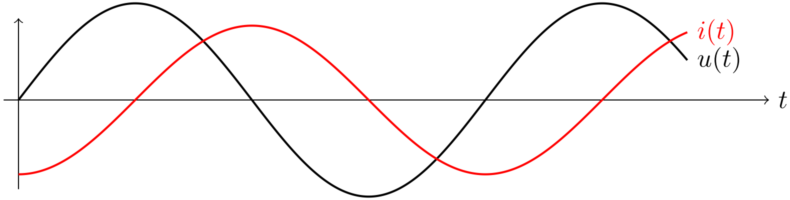
$$\boxed{\overline{Z}_R = R\underline{/0}}$$





Circuito Inductivo puro

Un circuito inductivo puro genera **señales en cuadratura** y **retrasa la corriente**.

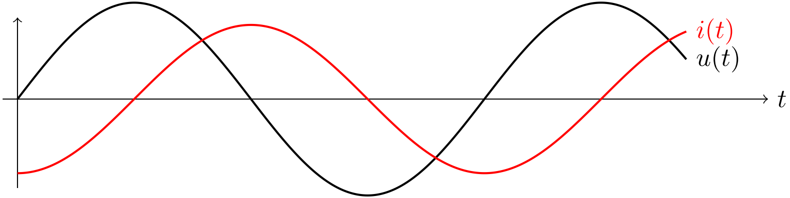


$$i(t) = I_o \cdot \sin(\omega t + \theta_I)$$

$$\begin{aligned} u(t) &= L \cdot \frac{di(t)}{dt} = \\ &= \omega L I_o \cdot \sin(\omega t + \theta_I + \pi/2) = \\ &= U_o \cdot \sin(\omega t + \theta_I + \pi/2) \end{aligned}$$

Circuito Inductivo puro

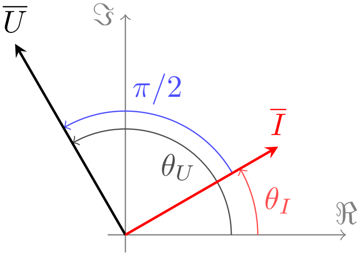
Un circuito inductivo puro genera **señales en cuadratura** y **retrasa la corriente**.

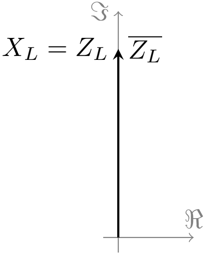


$$Z = \frac{U}{I} = \omega L$$

$$\theta = \theta_U - \theta_I = \pi/2$$

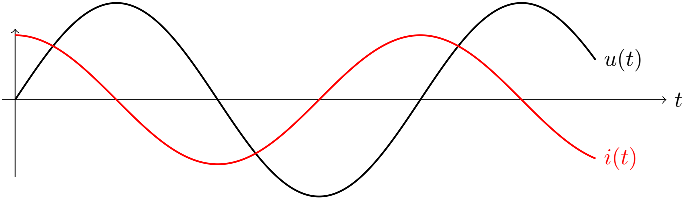
$$\boxed{\overline{Z}_L = j\omega L = \omega L\underline{/90^\circ}}$$





Circuito Capacitivo puro

Un circuito capacitivo puro genera **señales en cuadratura** y **adelanta la corriente**.



$$i(t) = I_o \cdot \sin(\omega t + \theta_I)$$

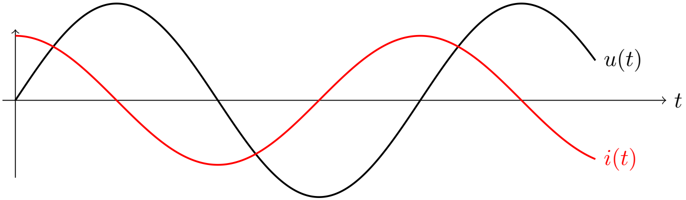
$$u(t) = 1/C \cdot \int_{-\infty}^{t} i(\tau) d\tau =$$

$$= \frac{1}{\omega C} I_o \cdot \sin(\omega t + \theta_I - \pi/2) =$$

$$= U_o \cdot \sin(\omega t + \theta_I - \pi/2)$$

Circuito Capacitivo puro

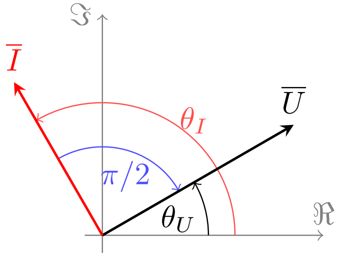
Un circuito capacitivo puro genera **señales en cuadratura** y **adelanta la corriente**.

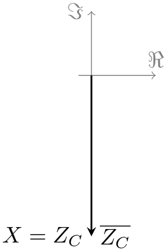


$$Z = \frac{U}{I} = \frac{1}{\omega C}$$

$$\theta = \theta_U - \theta_I = -\pi/2$$

$$\boxed{\overline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{\omega C}\underline{/-90^\circ}}$$

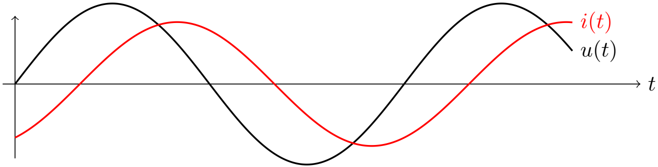


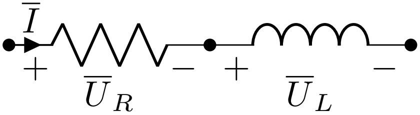


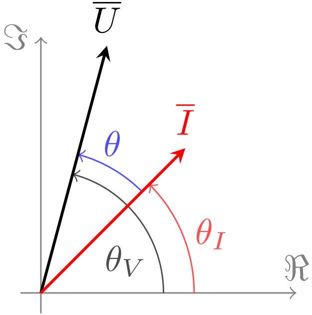
Resumen

Elemento	Impedancia	Módulo	Ángulo
Resistencia	R	R	0
Bobina	$j\omega L$	ωL	90°
Condensador	$1/(j\omega C)$	$1/(\omega C)$	-90°

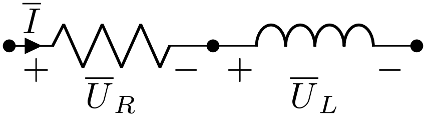
Circuito RL (inductivo con pérdidas)







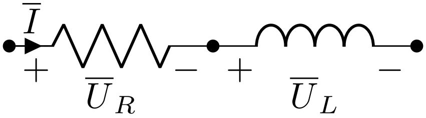
Circuito RL (inductivo con pérdidas)



$$\overline{U}_R = R\overline{I}$$
$$\overline{U}_L = j\omega L\overline{I}$$

$$\begin{aligned}\overline{U} &= \overline{U}_R + \overline{U}_L = \\ &= (R + j\omega L)\overline{I}\end{aligned}$$

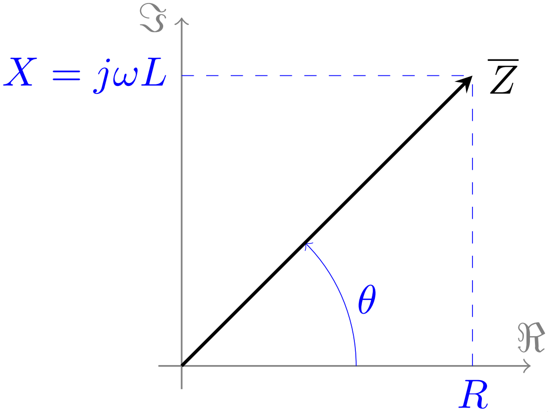
Circuito RL (inductivo con pérdidas)



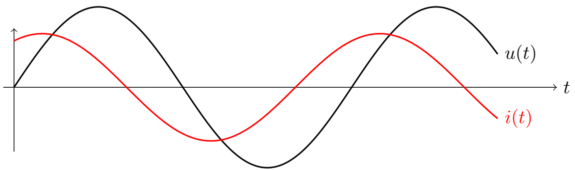
$$\overline{Z} = R + j\omega L \Rightarrow \boxed{\theta > 0}$$

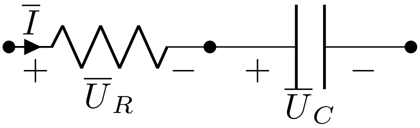
$$|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$

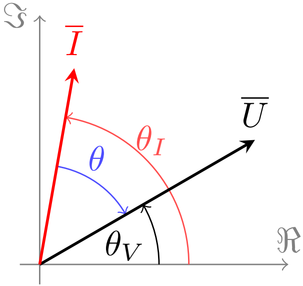
$$\theta = \mathrm{atan}\frac{\omega L}{R}$$



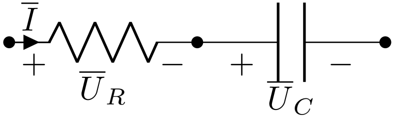
Circuito RC (capacitivo con pérdidas)







Circuito RC (capacitivo con pérdidas)

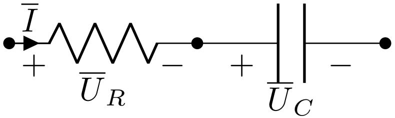


$$\overline{U}_R = R\overline{I}$$

$$\overline{U}_C = -j\frac{1}{\omega C}\overline{I}$$

$$\begin{aligned}\overline{U} &= \overline{U}_R + \overline{U}_C = \\ &= (R - j\frac{1}{\omega C})\overline{I}\end{aligned}$$

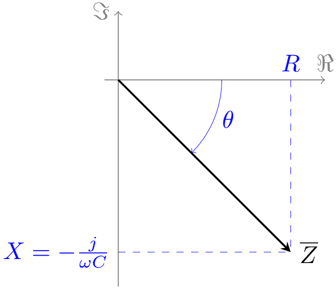
Circuito RC (capacitivo con pérdidas)



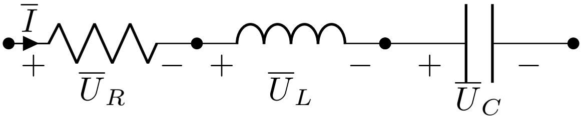
$$\overline{Z} = R - \frac{j}{\omega C} \Rightarrow \boxed{\theta < 0}$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}$$

$$\theta = -\text{atan}\frac{1}{\omega RC}$$



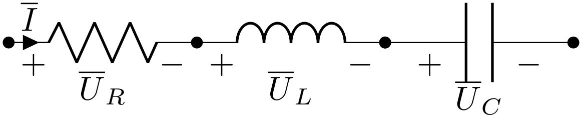
Circuito RLC serie



$$\overline{U}_R = R\overline{I}$$
$$\overline{U}_L = j\omega L\overline{I}$$
$$\overline{U}_C = -j\frac{1}{\omega C}\overline{I}$$

$$\begin{aligned}\overline{U} &= \overline{U}_R + \overline{U}_L + \overline{U}_C = \\ &= \left(R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})\right)\overline{I}\end{aligned}$$

Circuito RLC serie



$$\overline{Z} = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})$$

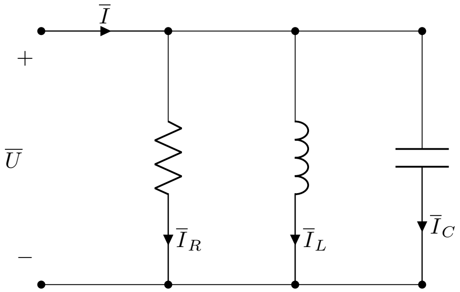
$$|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$$

$$\theta = \text{atan}\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

- $\theta > 0 \Rightarrow \omega L > \frac{1}{\omega C}$: inductivo
- $\theta < 0 \Rightarrow \omega L < \frac{1}{\omega C}$: capacitivo
- $\theta = 0 \Rightarrow \omega L = \frac{1}{\omega C}$: resistivo (resonancia)

$$\boxed{u(t) = Z \cdot I_o \sin(\omega t + \theta_I + \theta)}$$

Circuito RLC paralelo



$$\overline{I}_R = 1/R \cdot \overline{U}$$

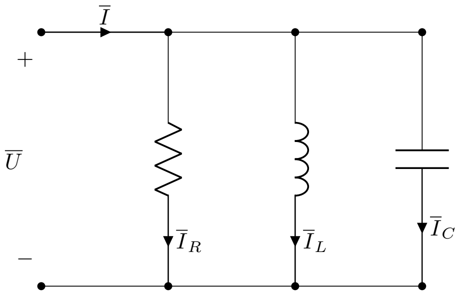
$$\overline{I}_L = -j\frac{1}{\omega L} \cdot \overline{U}$$

$$\overline{I}_C = j\omega C \cdot \overline{U}$$

$$\overline{I} = \overline{I}_R + \overline{I}_L + \overline{I}_C =$$

$$= \left(\frac{1}{R} + j(\omega C - \frac{1}{\omega L})\right) \overline{U}$$

Circuito RLC paralelo

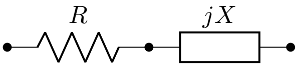


$$\overline{Y} = \frac{\overline{I}}{\overline{U}} = 1/R + j(\omega C - \frac{1}{\omega L})$$

$$|Y| = \sqrt{1/R^2 + (\omega C - \frac{1}{\omega L})^2}$$

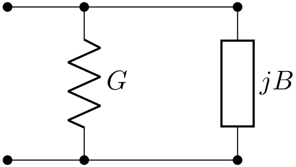
$$\theta_Y = \text{atan}\left(R \cdot (\omega C - \frac{1}{\omega L})\right)$$

Impedancia y Admitancia



$$\overline{U} = \overline{Z} \cdot \overline{I}$$

$$\overline{Z} = R + jX$$

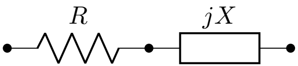


$$\overline{I} = \overline{Y} \cdot \overline{U}$$

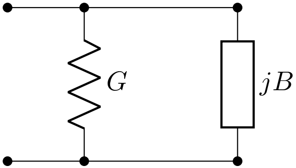
$$\overline{Y} = G + jB$$

$$\boxed{\overline{Y} = \frac{1}{\overline{Z}} \rightarrow \left\{ \begin{aligned} |Y| &= \tfrac{1}{|Z|} \\ \theta_Y &= -\theta_Z = -\theta \end{aligned} \right.}$$

Impedancia y Admitancia



$$\overline{Z} = \frac{1}{G + jB} \rightarrow \begin{cases} R = \frac{G}{G^2+B^2} \\ X = -j\frac{B}{G^2+B^2} \end{cases}$$



$$\overline{Y} = \frac{1}{R + jX} \rightarrow \begin{cases} G = \frac{R}{R^2+X^2} \\ B = -j\frac{X}{R^2+X^2} \end{cases}$$

Expresión general

Sea la tensión referencia de fases. Si $\theta > 0$ (inductivo) la corriente está retrasada respecto de la tensión (*circuito en retraso*).

$$
\begin{aligned}
u(t) &= U_o \cos \omega t \\
i(t) &= I_o \cos(\omega t - \theta) \\
p(t) &= u(t) \cdot i(t)
\end{aligned}
$$

Expresión general

$$\begin{aligned}
p(t) &= U_o I_o \cdot \cos(\omega t) \cdot \cos(\omega t - \theta) = \\
&= \frac{1}{2} \cdot U_o I_o \cdot (\cos(2\omega t - \theta) + \cos(\theta)) \\
&= UI \cdot (\cos(2\omega t - \theta) + \cos(\theta)) = \\
&= UI \cdot (\cos(2\omega t)\cos(\theta) + \sin(2\omega t)\sin(\theta) + \cos(\theta))
\end{aligned}$$

$$\boxed{p(t) = UI\cos(\theta) + UI\cos(\theta)\cos(2\omega t) + UI\sin(\theta)\sin(2\omega t)}$$

Expresión general

$$p(t) = UI\cos(\theta) + UI\cos(\theta)\cos(2\omega t) + UI\sin(\theta)\sin(2\omega t)$$

$$P = UI\cos\theta \quad Q = UI\sin\theta$$

$$\boxed{p(t) = P\cdot(1+\cos(2\omega t)) + Q\cdot\sin(2\omega t)}$$

Circuito Resistivo

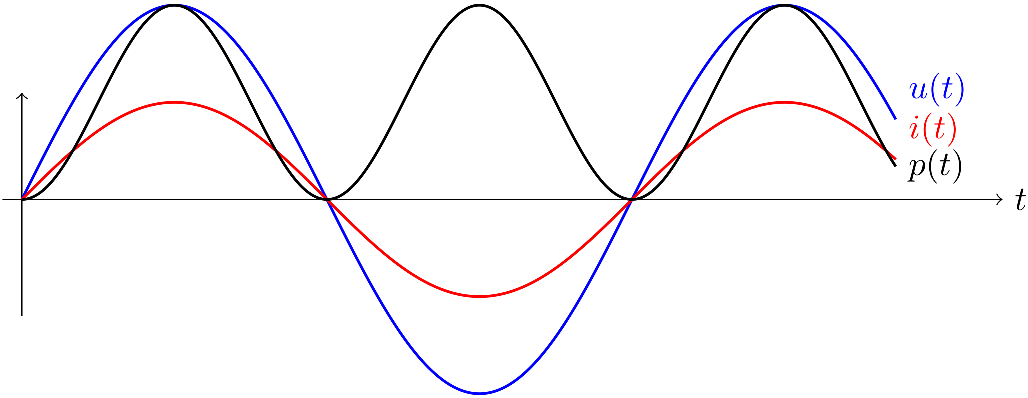
$$P = UI\cos\theta \quad Q = UI\sin\theta$$

$$p(t) = P\cdot(1+\cos(2\omega t)) + Q\cdot\sin(2\omega t)$$

$$\theta = 0 \rightarrow \begin{cases} P = UI = U^2/R = I^2R \\ Q = 0 \end{cases}$$

$$p(t) = P\cdot(1+\cos(2\omega t))$$

Circuito Resistivo



- Fluctúa al doble de frecuencia.
- Es siempre positiva.

Circuito Inductivo puro

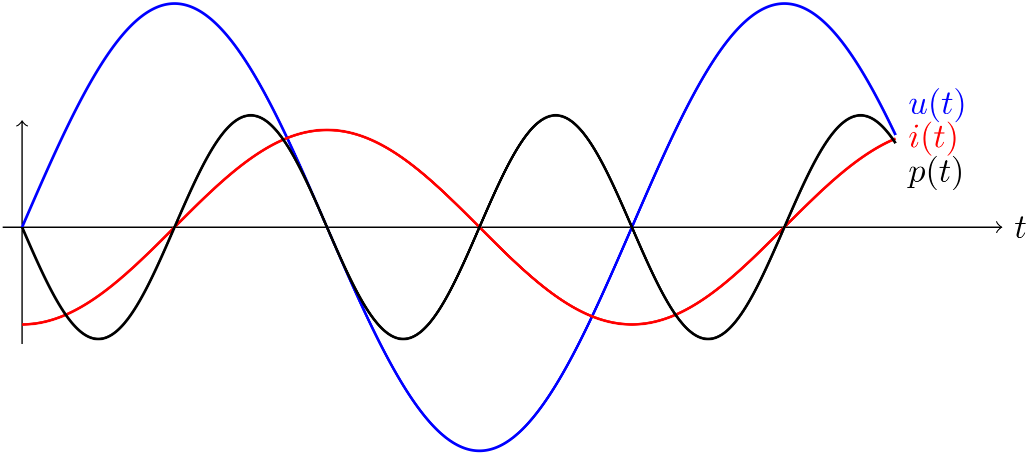
$$P = UI\cos\theta \quad Q = UI\sin\theta$$

$$p(t) = P \cdot (1 + \cos(2\omega t)) + Q \cdot \sin(2\omega t)$$

$$\theta = \pi/2 \rightarrow \begin{cases} P = 0 \\ Q = UI = \frac{U^2}{\omega L} = I^2 \omega L \end{cases}$$

$$p(t) = Q \cdot \sin(2\omega t)$$

Circuito Inductivo puro



- Fluctúa al doble de frecuencia.
- Pasa por los ceros de tensión y corriente.
- Su valor medio es nulo.

Circuito Capacitivo puro

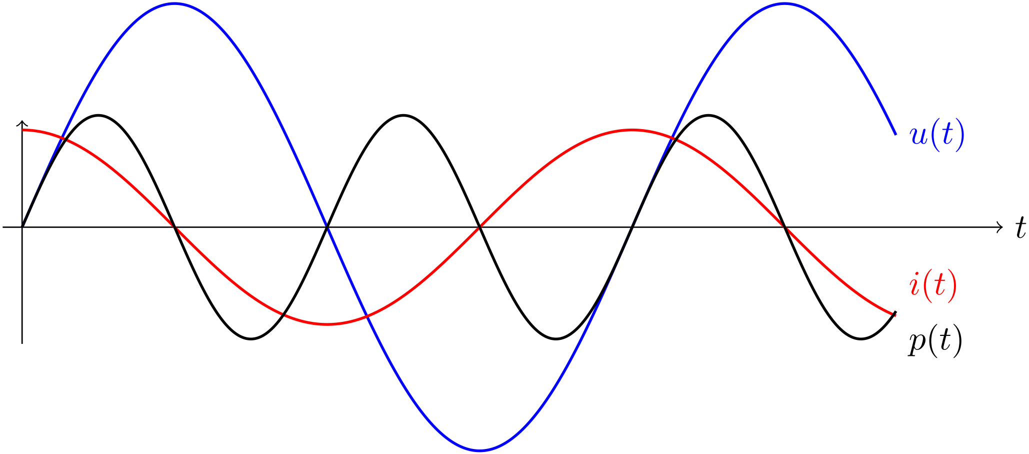
$$P = UI\cos\theta \quad Q = UI\sin\theta$$

$$p(t) = P\cdot(1+\cos(2\omega t)) + Q\cdot\sin(2\omega t)$$

$$\theta = -\pi/2 \rightarrow \begin{cases} P = 0 \\ Q = -UI = -U^2\omega C = -\frac{I^2}{\omega C} \end{cases}$$

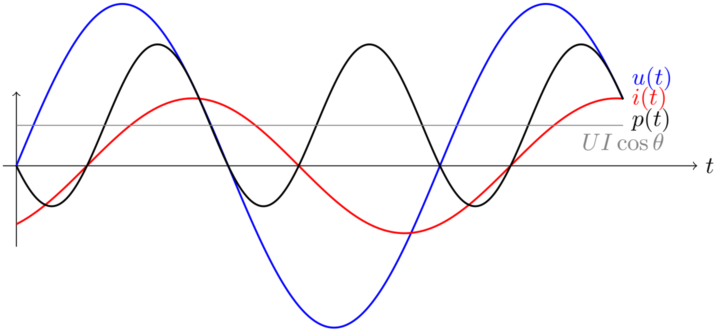
$$p(t) = Q\cdot\sin(2\omega t)$$

Circuito Capacitivo puro



- Fluctúa al doble de frecuencia.
- Pasa por los ceros de tensión y corriente.
- Su valor medio es nulo.

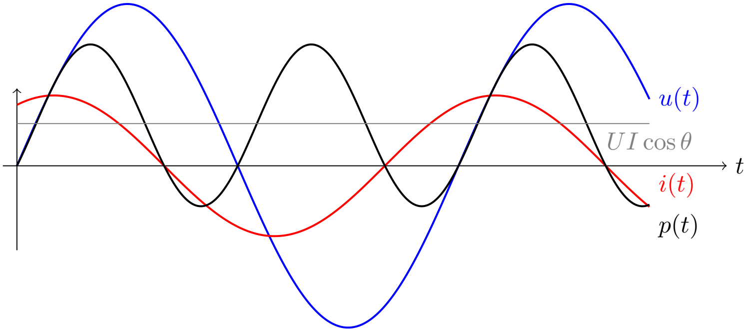
Circuito Inductivo con pérdidas



$$p(t) = P \cdot (1 + \cos(2\omega t)) + Q \cdot \sin(2\omega t)$$

Valor medio positivo, $P = UI\cos\theta$

Circuito Capacitivo con pérdidas



$$p(t) = P \cdot (1 + \cos(2\omega t)) + Q \cdot \sin(2\omega t)$$

Valor medio positivo, $P = UI\cos\theta$

Triángulo de Potencias

- Potencia Activa [W]

$$\boxed{P = U \cdot I \cdot \cos(\theta) = R \cdot I^2}$$

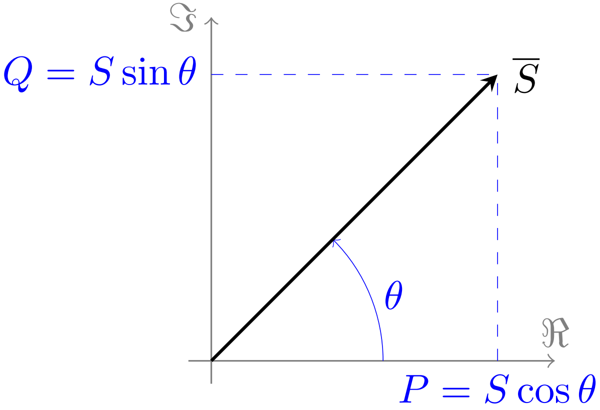
- Potencia Reactiva [VA_r]

$$\boxed{Q = U \cdot I \cdot \sin(\theta) = X \cdot I^2}$$

- Potencia Aparente [VA]

$$\boxed{\overline{S} = P + jQ = \overline{U} \cdot \overline{I}^*}$$

$$\begin{aligned}
\overline{U} &= U\underline{/0} \\
\overline{I} &= I\underline{/-\theta} \\
\overline{UI}^* &= U\underline{/0} \cdot I\underline{/\theta} = UI\underline{/\theta} \\
&= UI(\cos\theta + j\sin\theta) = \\
&= P + jQ
\end{aligned}$$



$$|S| = U \cdot I$$

$$\theta_S = \theta_Z = \theta$$

Potencia de elementos: Resistencia

$$\theta = 0 \Rightarrow \begin{cases} P_R = RI^2 \\ Q_R = 0 \\ S_R = P_R \end{cases}$$

- Consume potencia activa
- No consume potencia reactiva

Potencia de elementos: Inductancia

$$\theta = \pi/2 \Rightarrow \begin{cases} P_L = 0 \\ Q_L = \omega L I^2 \\ \overline{S}_L = \omega L I^2 \underline{/\pi/2} \end{cases}$$

- No consume potencia activa
- Consume potencia reactiva ($Q > 0$)

Potencia de elementos: Condensador

$$\theta = -\pi/2 \Rightarrow \begin{cases} P_L = 0 \\ Q_C = -\omega C U^2 \\ \overline{S}_C = \omega C U^2 \underline{/-\pi/2} \end{cases}$$

- No consume potencia activa
- Genera potencia reactiva ($Q < 0$)

Teorema de Boucherot

- En un circuito con múltiples elementos, la potencia aparente total es la suma de las potencias aparentes individuales.

$$\overline{S} = \sum_{i=1}^{n} \overline{S}_i$$

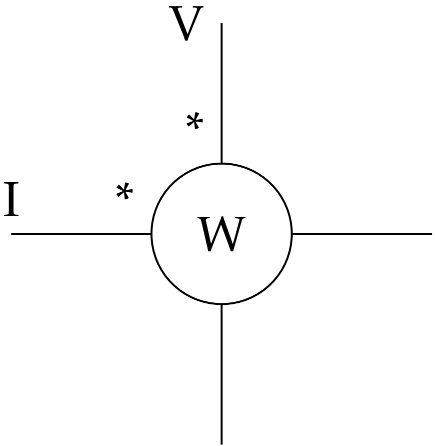
$$P + jQ = \sum_{i=1}^{n} (P_i + jQ_i)$$

- La potencia activa (reactiva) total es la suma de las potencias activas (reactivas) individuales.

$$P = \sum_{i=1}^{n} P_i$$

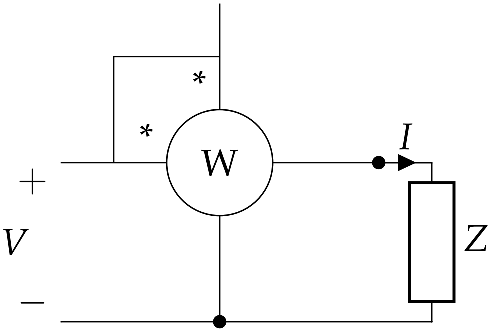
$$Q = \sum_{i=1}^{n} Q_i$$

Medida de potencia



Vatímetro: equipo de medida de 4 terminales (1 par para tensión, 1 par para corriente)

Medida de potencia



Habitualmente se emplea con 3 terminales cortocircuitando terminales con *.

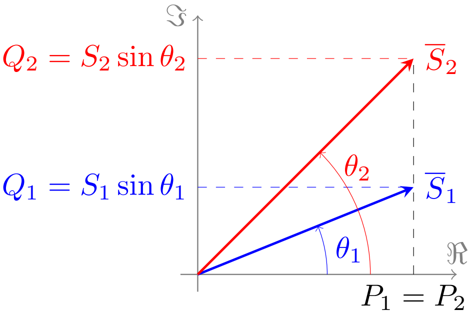
$$\boxed{W = |V||I|\cos(\theta_V - \theta_I) = P_Z}$$

Factor de potencia

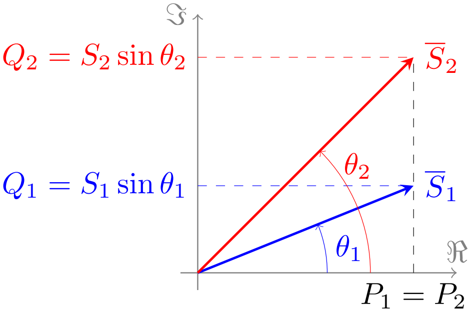
El factor de potencia, $\cos(\theta)$, representa la aportación de potencia activa dentro de la potencia aparente.

$$P = S\cos\theta$$

Sean dos sistemas con **misma tensión y potencia activa**, y factores de potencia $\cos\theta_2 < \cos\theta_1$ ($Q_2 > Q_1$)



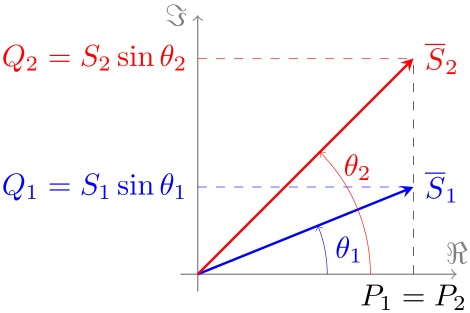
Potencia Aparente



El sistema 2 requiere **mayor potencia aparente** (generador mayor) para alimentar la misma potencia activa.

$$\left(\frac{P}{\cos\theta_1} = S_1\right) < \left(S_2 = \frac{P}{\cos\theta_2}\right)$$

Sección de Conductores



El sistema 2 requiere **mayor sección** de cable para transportar la misma potencia activa.

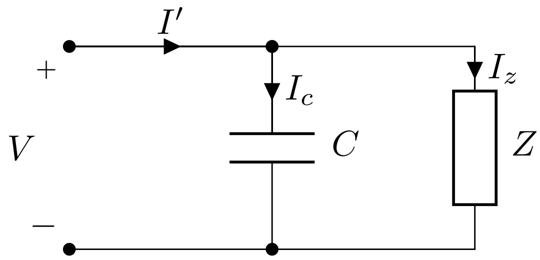
$$\left(\frac{P}{U\cos\theta_1} = I_1\right) < \left(I_2 = \frac{P}{U\cos\theta_2}\right)$$

Generación Local de Reactiva

- Comúnmente, el factor de potencia es **inductivo** (máquinas eléctricas industriales).
- La red debe suministrar potencia reactiva inductiva (influye en secciones de líneas y tamaños de generadores)
- Es necesario mejorar **localmente** el factor de potencia. Solución común: utilizar **bancos de condensadores** como suministradores de potencia reactiva.

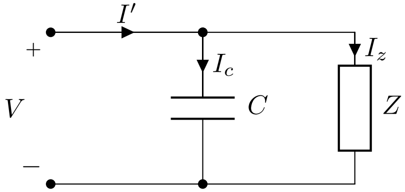
Compensación de Reactiva con Condensadores

Sea una carga de potencia activa P_z, potencia reactiva Q_z, factor de potencia $\cos\theta$. Se desea **mejorar el factor de potencia** a $\cos\theta' > \cos\theta$.



$$P' = P_z$$
$$Q' = Q_c + Q_z \quad (Q' < Q_z)$$
$$\overline{I}' = \overline{I}_c + \overline{I_z} \quad (I' < I_z)$$

Cálculo de la Capacidad

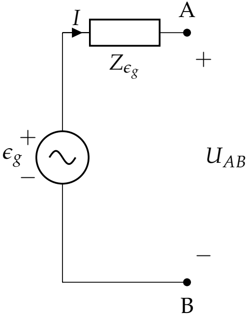


$$
\begin{aligned}
Q_z &= P_z \tan\theta \\
Q' &= P_z \tan\theta' \\
|Q_c| &= Q_z - Q' = P_z(\tan\theta - \tan\theta')
\end{aligned}
$$

$$|Q_c| = \omega C U^2 \rightarrow \boxed{C = \frac{P_z(\tan\theta - \tan\theta')}{\omega U^2}}$$

Equivalencia de fuentes

Sólo es posible establecer equivalencia entre **fuentes reales**.

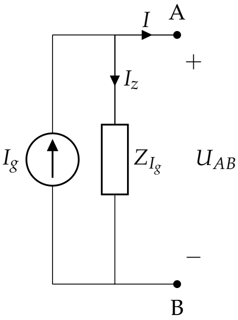


$$\overline{U}_{AB} = \overline{\epsilon}_g - \overline{Z}_{\epsilon_g} \cdot \overline{I}$$

$$\overline{Z}_g = \overline{Z}_{\epsilon_g} = \overline{Z}_{I_g}$$

$$\overline{\epsilon}_g = \overline{Z}_g \cdot \overline{I}_g$$

$$\overline{I}_g = \frac{\overline{\epsilon}_g}{\overline{Z}_g}$$

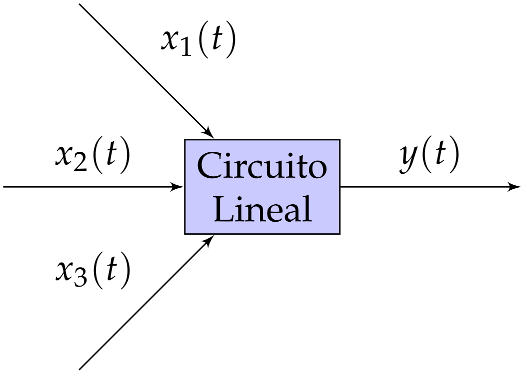


$$\overline{I} = \overline{I}_g - \frac{\overline{U}_{AB}}{\overline{Z}_{I_g}}$$

Teorema de superposición

La respuesta de un **circuito lineal** a varias fuentes de excitación actuando simultáneamente es igual a la suma de las respuestas que se tendrían cuando actuase cada una de ellas por separado

$$y(t) = \sum_i y_i(t)$$



Teorema de superposición

Análisis de un circuito mediante superposición

Procedimiento

1. Se apagan todas las fuentes **independientes** del circuito menos una.
   - Las fuentes de tensión se sustituyen por un cortocircuito ($U = 0$).
   - Las fuentes de corriente se sustituyen por un circuito abierto ($I = 0$).
   - Las fuentes **dependientes no** se modifican.
2. Se analiza el circuito, obteniendo la respuesta individual a la fuente que permanece activa.
3. Se repite este procedimiento para cada una de las fuentes **independientes** del circuito.
4. La respuesta total del circuito es la suma de las respuestas individuales.

Observaciones

- **Siempre** hay que aplicar este método cuando en un circuito conviven fuentes de **diferente frecuencia** (o fuentes de corriente continua y corriente alterna).
- En el caso de fuentes de corriente alterna **sinusoidal**, la respuesta debe expresarse en el **dominio del tiempo**. **No** se pueden **sumar** los **fasores** que corresponden a **frecuencias diferentes**.
- En el primer paso del procedimiento, se pueden agrupar las fuentes que funcionan a la misma frecuencia y calcular la respuesta del circuito en esa frecuencia.

Teorema de superposición

Potencia

El principio de superposición aplica a tensiones y corrientes, pero **no** a potencias.
Supongamos $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$:

$$\begin{aligned} p(t) &= R \cdot i^2(t) = \\ &= R \cdot (i_1(t) + i_2(t))^2 = \\ &= R \cdot (i_1^2(t) + i_2^2(t) + 2 \cdot i_1(t) \cdot i_2(t)) \\ p(t) &\neq p_1(t) + p_2(t) \end{aligned}$$

Teorema de superposición
Potencia

- Cuando las señales son **ortogonales en un período*** se pueden sumar las potencias **medias** de cada circuito.

$$P = \sum_i P_i$$

- Ejemplos de señales ortogonales: sinusoidales con diferente frecuencia, una sinusoide con una continua, ...

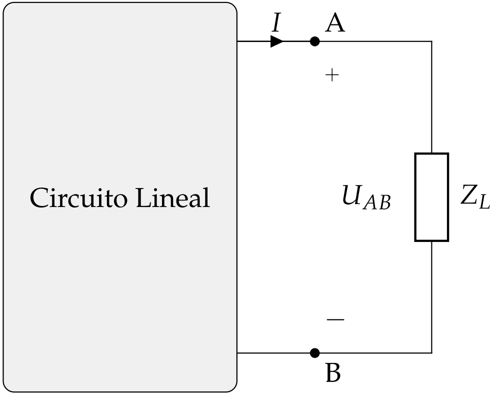
*Dos señales son ortogonales si cumplen la siguiente ecuación:

$$< f_1, f_2 >_T = \int_T f_1(t) \cdot f_2(t) dt = 0$$

Teoremas de Thévenin/Norton

Thévenin

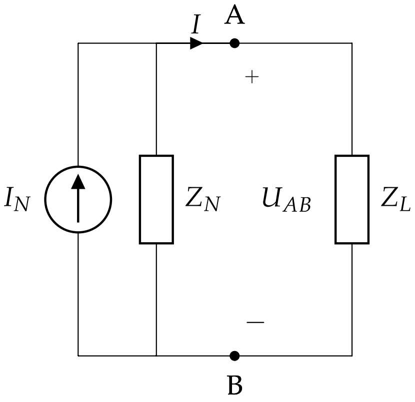
Cualquier **red lineal** compuesta por elementos activos y pasivos puede sustituirse, desde el punto de vista de sus terminales externos AB, por una **fuente de tensión** (generador de Thévenin, ϵ_{th}) en **serie** con una impedancia (impedancia de Thévenin, Z_{th}).



Teoremas de Thévenin/Norton

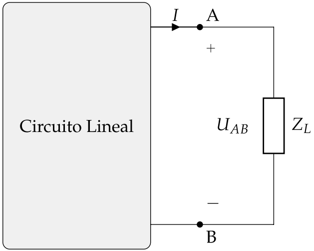
Norton

Cualquier **red lineal** compuesta por elementos activos y pasivos puede sustituirse, desde el punto de vista de sus terminales externos AB, por una **fuente de corriente** (generador de Norton, I_N) en **paralelo** con una impedancia (impedancia de Norton, Z_N).



Teoremas de Thévenin/Norton

Cálculo del equivalente de Thévenin



- Circuito Abierto ($Z_L \to \infty, \quad U_{AB} = U_{oc}$)

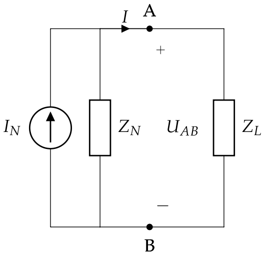
$$\boxed{\epsilon_{th} = U_{oc}}$$

- Cortocircuito ($Z_L = 0, \quad I = I_{sc}$)

$$\boxed{Z_{th} = \frac{\epsilon_{th}}{I_{sc}} = \frac{U_{oc}}{I_{sc}}}$$

Teoremas de Thévenin/Norton

Cálculo del equivalente de Norton



- Cortocircuito ($Z_L = 0, \quad I = I_{sc}$)

$$\boxed{I_N = I_{sc}}$$

- Circuito Abierto ($Z_L \to \infty, \quad U_{AB} = U_{oc}$)

$$\boxed{Z_N = \frac{U_{oc}}{I_N} = \frac{U_{oc}}{I_{sc}}}$$

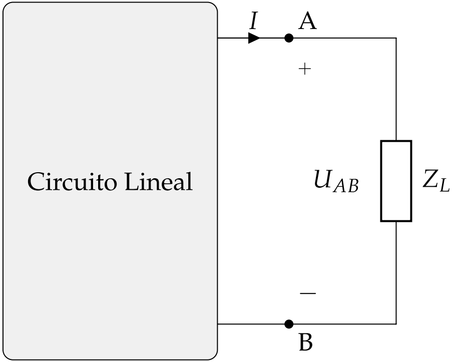
Observaciones

- Cálculo de la impedancia:
  - Si el circuito **no** contiene fuentes dependientes, se puede realizar **apagando** todos los **generadores** y obteniendo la impedancia equivalente.
  - Si el circuito contiene fuentes dependientes, es necesario conectar un **generador de prueba** a la salida del circuito y obtener la relación entre la tensión y corriente de este generador.
- Gracias a la equivalencia de fuentes, una vez obtenido uno de los equivalentes se puede obtener el otro mediante una transformación.

Máxima Transferencia de Potencia

Planteamiento

Sea el circuito lineal de la figura. ¿Qué impedancia Z_L hay que conectar en los terminales AB para que el circuito entregue la máxima potencia disponible?

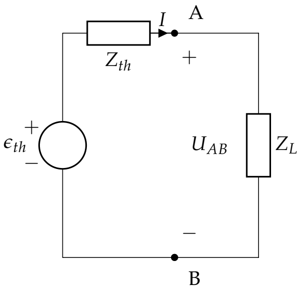


Resolvemos esta pregunta mediante el generador equivalente de Thévenin.

Máxima Transferencia de Potencia

Ecuaciones

Calculamos la potencia activa en la impedancia de carga Z_L:



$$\overline{Z}_{th} = R_{th} + jX_{th}$$
$$\overline{Z}_L = R_L + jX_L$$

$$\overline{I} = \frac{\overline{\epsilon}_{th}}{\overline{Z}_{th} + \overline{Z}_L}$$
$$P_L = I^2 \cdot R_L$$
$$\boxed{P_L = \frac{\epsilon_{th}^2}{|\overline{Z}_{th} + \overline{Z}_L|^2} \cdot R_L}$$

Las condiciones de máximo son:

$$\boxed{\frac{\partial P_L}{\partial X_L} = 0 \qquad \frac{\partial P_L}{\partial R_L} = 0}$$

Máxima Transferencia de Potencia

Reactancia

A partir de la expresión de potencia en la carga...

$$P_L = \frac{\epsilon_{th}^2}{|\overline{Z}_{th} + \overline{Z}_L|^2} \cdot R_L$$

calculamos la derivada parcial respecto de la reactancia:

$$\frac{\partial P_L}{\partial X_L} = \epsilon_{th}^2 \cdot R_L \cdot \left[\frac{-1}{\left((R_L + R_{th})^2 + (X_L + X_{th})^2\right)^2} \cdot 2 \cdot (X_L + X_{th}) \right]$$

Aplicamos la condición de máximo y obtenemos un resultado parcial:

$$\frac{\partial P_L}{\partial X_L} = 0 \Rightarrow \boxed{X_L = -X_{th}}$$

Máxima Transferencia de Potencia

Resistencia

Simplificamos la expresión de la potencia teniendo en cuenta el resultado anterior ($X_L = -X_{th}$):

$$P_L = \frac{\epsilon_{th}^2}{(R_{th} + R_L)^2} \cdot R_L$$

Calculamos la derivada parcial respecto de la resistencia:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_L}{\partial R_L} &= \epsilon_{th}^2 \cdot \left[\frac{1}{(R_L + R_{th})^2} - 2 \cdot \frac{R_L}{(R_L + R_{th})^3} \right] \\ &= \frac{\epsilon_{th}^2 \cdot (R_{th} - R_L)}{(R_L + R_{th})^3} \end{aligned}$$

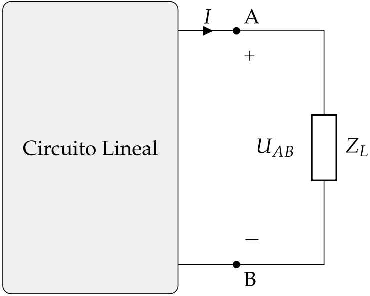
Nuevamente, aplicamos la condición de máximo y obtenemos la resistencia:

$$\frac{\partial P_L}{\partial R_L} = 0 \Rightarrow \boxed{R_L = R_{th}}$$

Máxima Transferencia de Potencia

Impedancia de carga

Dado un circuito lineal (del que podemos calcular su equivalente de Thévenin) …



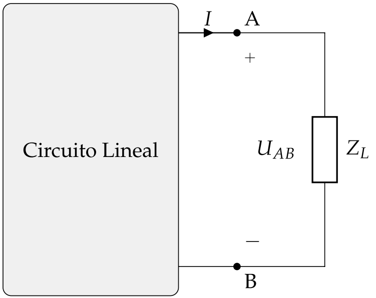
… la impedancia de carga que hay que conectar entre sus terminales AB para obtener la máxima potencia disponible es:

$$\boxed{\overline{Z}_L = \overline{Z}_{th}^*}$$

Máxima Transferencia de Potencia

Máxima potencia disponible

La máxima potencia disponible en la carga es:



$$\left.\begin{array}{c}\overline{Z}_L = \overline{Z}_{th}^{*} \\ P_L = \frac{\epsilon_{th}^2}{|\overline{Z}_{th}+\overline{Z}_L|^2} \cdot R_L\end{array}\right\} \rightarrow \boxed{P_L = \frac{\epsilon_{th}^2}{4R_{th}}}$$