

Elementos activos

Teoría de Circuitos II

Autor: Luis Badesa Bernardo

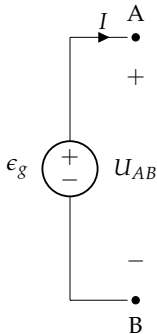
(basado en las diapositivas de Óscar Perpiñán Lamigueiro)

Elementos activos (generadores) \rightarrow motivan la circulación de corriente

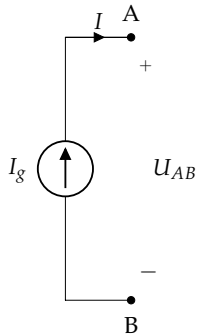
Tipos:

- ▶ De tensión o de corriente
- ▶ Ideales o reales
- ▶ Dependientes o independientes

Generador ideal

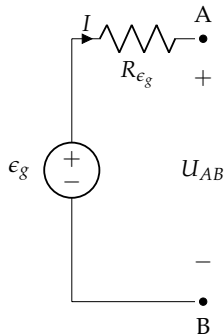


Un **generador de tensión ideal**
impone la tensión a la salida
(la corriente depende del circuito)



Un **generador de corriente ideal**
impone la corriente a la salida
(la tensión depende del circuito)

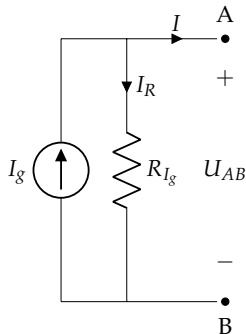
Generador real CC



Real:

con pérdidas, modeladas mediante una resistencia **en serie**

$$U_{AB} = \epsilon_g - R_{\epsilon_g} \cdot I$$

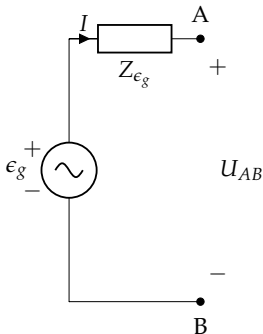


Real:

con pérdidas, modeladas mediante una resistencia **en paralelo**

$$I = I_g - \frac{U_{AB}}{R_{I_g}}$$

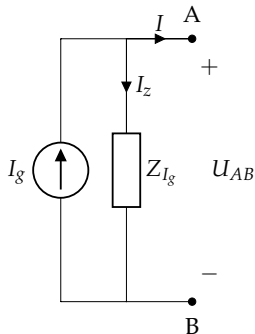
Generador real CA



Real:

con pérdidas, modeladas mediante una impedancia **en serie**

$$\bar{U}_{AB} = \bar{\epsilon}_g - \bar{Z}_{\epsilon_g} \cdot \bar{I}$$

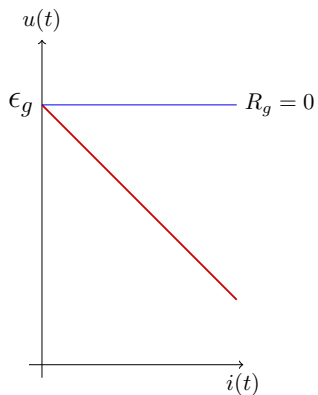


Real:

con pérdidas, modeladas mediante una impedancia **en paralelo**

$$\bar{I} = \bar{I}_g - \frac{\bar{U}_{AB}}{\bar{Z}_{I_g}}$$

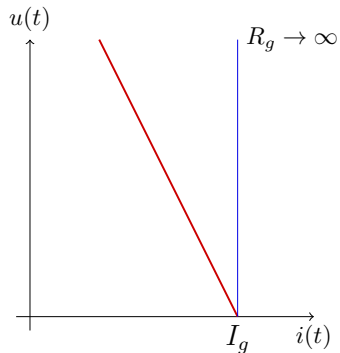
Fuente de **tensión**



$$u(t) = \epsilon_g - R_{\epsilon_g} \cdot i(t)$$

$$i(t) = \frac{\epsilon_g - u(t)}{R_{\epsilon_g}}$$

Fuente de **corriente**

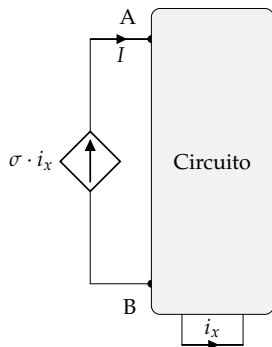
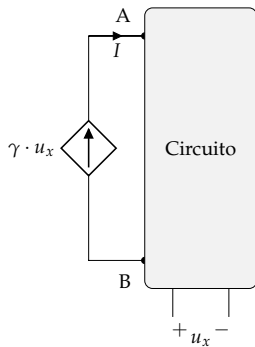
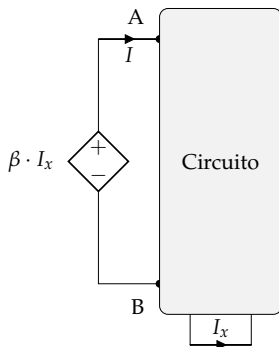
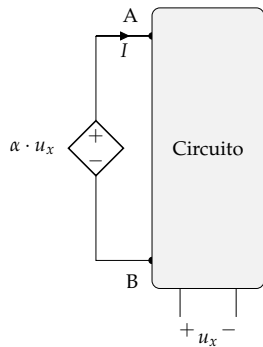


$$i(t) = I_g - \frac{u(t)}{R_{I_g}}$$

$$u(t) = R_{I_g} \cdot [I_g - i(t)]$$

Generadores dependientes

No tienen valores de ϵ_g o I_g fijos, sino que estos **dependen** de la **tensión** o **corriente** en **otros puntos** de la red:

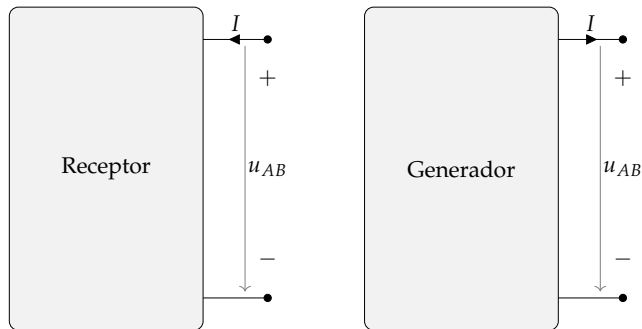


① Potencia

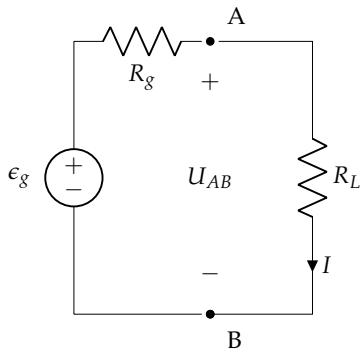
② Transformación y asociación

Receptores y generadores

- ▶ Un **circuito receptor absorbe potencia** y la corriente *entra* por el terminal de mayor potencial
- ▶ Un **circuito generador entrega potencia** y la corriente *sale* por el terminal de mayor potencial

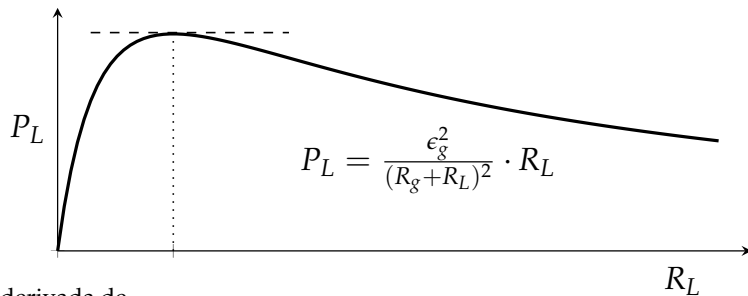


Potencia y rendimiento de una fuente CC



$$\left. \begin{aligned} I &= \frac{\epsilon_g}{R_g + R_L} \\ P_g &= \epsilon_g \cdot I \\ P_L &= I^2 \cdot R_L \end{aligned} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{aligned} P_g &= \frac{\epsilon_g^2}{R_g + R_L} \\ P_L &= \frac{\epsilon_g^2 \cdot R_L}{(R_g + R_L)^2} \\ \eta &= \frac{P_L}{P_g} = \frac{R_L}{R_g + R_L} \end{aligned} \right.$$

Potencia máxima entregada por la fuente:



derivada de
un cociente

$$\frac{dP_L}{dR_L} \stackrel{\downarrow}{=} \epsilon_g^2 \cdot \left[\frac{(R_L + R_g)^2 - 2 \cdot (R_L + R_g) \cdot R_L}{(R_L + R_g)^4} \right] = \frac{\epsilon_g^2 \cdot (R_g - R_L)}{(R_L + R_g)^3}$$

Aplicando la **condición de máximo**:

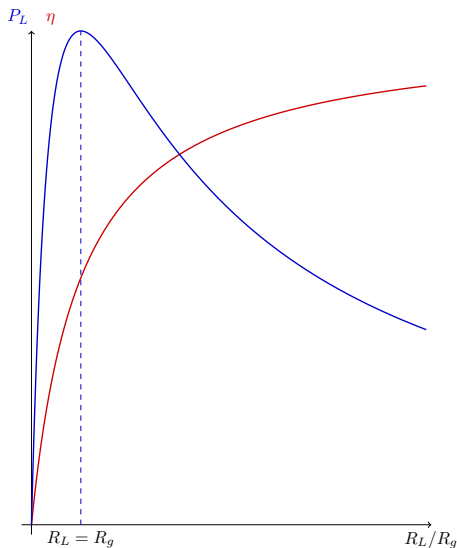
$$\frac{dP_L}{dR_L} = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{R_L = R_{th}}$$

Potencia y rendimiento de una fuente CC

- Suponiendo R_g constante, la potencia entregada por la fuente es máxima cuando $R_L = R_g$

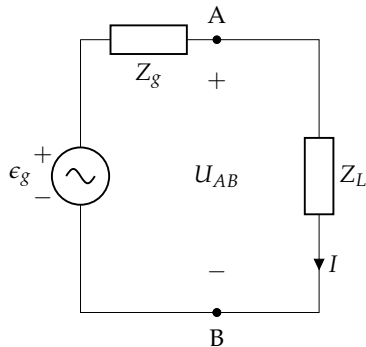
$$P_L = \frac{\epsilon_g^2}{4 R_g}$$

- El rendimiento es una función creciente ($\eta \rightarrow 1$ para $R_L \gg R_g$)



Potencia de una fuente CA

Calculamos la potencia activa en la impedancia de carga Z_L :



$$\bar{Z}_g = R_g + jX_g$$

$$\bar{Z}_L = R_L + jX_L$$

$$\bar{I} = \frac{\bar{\epsilon}_g}{\bar{Z}_g + \bar{Z}_L}$$

$$P_L = I^2 \cdot R_L$$

$$P_L = \frac{\epsilon_g^2}{|\bar{Z}_g + \bar{Z}_L|^2} \cdot R_L$$

Máxima potencia de una fuente CA

Suponiendo \bar{Z}_g constante, las condiciones de máximo son:

$$\frac{\partial P_L}{\partial X_L} = 0, \quad \frac{\partial P_L}{\partial R_L} = 0$$

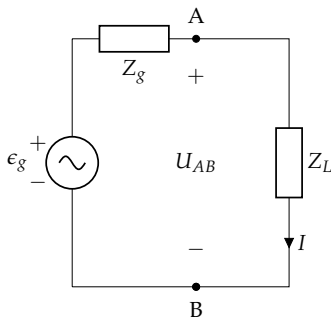
Los resultados son:

$$\frac{\partial P_L}{\partial X_L} = 0 \Rightarrow \boxed{X_L = -X_g}$$

$$\frac{\partial P_L}{\partial R_L} = 0 \Rightarrow \boxed{R_L = R_g}$$

(deducción en Teoría de Circuitos I)

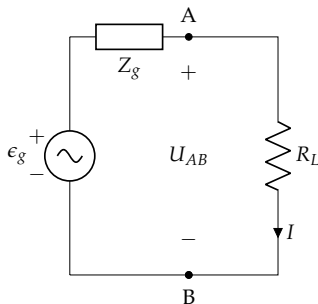
En estas condiciones, la **máxima potencia** disponible en la carga es:



$$\left. \begin{aligned} \bar{Z}_L &= \bar{Z}_g^* \\ P_L &= \frac{\epsilon_g^2}{|\bar{Z}_g + \bar{Z}_L|^2} \cdot R_L \end{aligned} \right\} \rightarrow \boxed{P_L = \frac{\epsilon_g^2}{4R_g}}$$

Si la **impedancia de carga** es **resistiva pura**, únicamente se puede cumplir la segunda

condición del máximo, $\frac{\partial P_L}{\partial R_L} = 0$



Resolviendo $\frac{\partial P_L}{\partial R_L} = 0$, se obtendría:

$$R_L = |\bar{Z}_g| = \sqrt{R_g^2 + X_g^2} \quad (\text{luego } R_L > R_g)$$

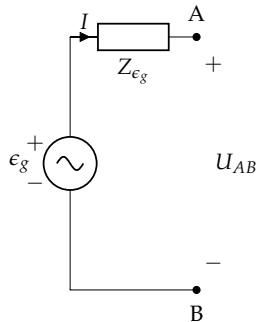
$$P_L = \frac{\epsilon_g^2}{2(R_L + R_g)} \quad (\text{se omite la deducción})$$

① Potencia

② Transformación y asociación

Equivalencia de fuentes

Sólo es posible establecer **equivalencia** entre **fuentes reales**



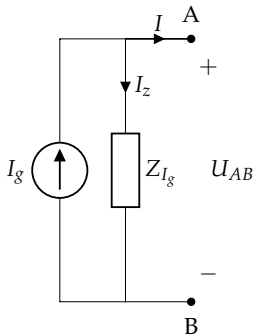
$$\bar{U}_{AB} = \bar{\epsilon}_g - \bar{Z}_{\epsilon_g} \cdot \bar{I}$$

$$\bar{Z}_g = \bar{Z}_{\epsilon_g} = \bar{Z}_{I_g}$$

$$\bar{\epsilon}_g = \bar{Z}_g \cdot \bar{I}_g$$

$$\bar{I}_g = \frac{\bar{\epsilon}_g}{\bar{Z}_g}$$

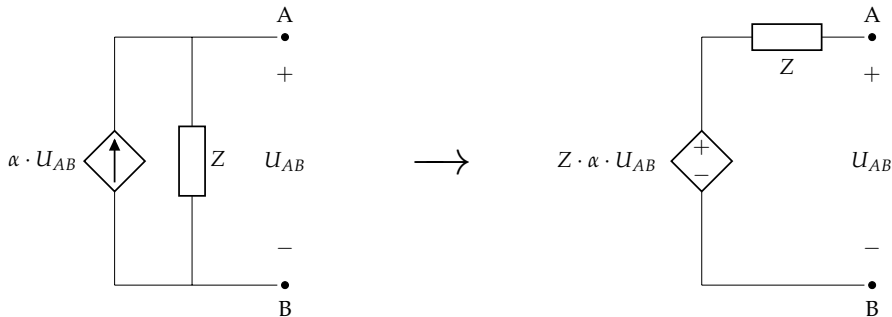
(demostración en
Teoría de Circuitos I)



$$\bar{I} = \bar{I}_g - \frac{\bar{U}_{AB}}{\bar{Z}_{I_g}}$$

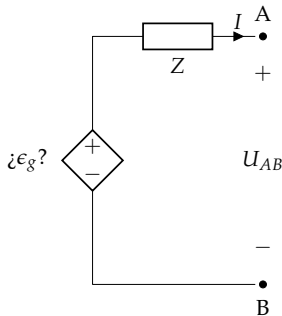
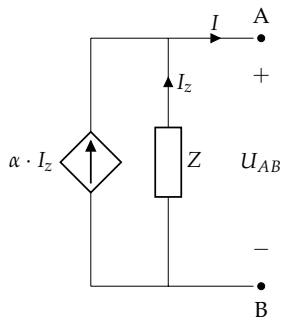
Transformación de fuentes dependientes

Si la **variable** de la que depende la fuente **no “desaparece”** en la transformación, la **conversión es directa**:



Si la **variable “desaparece”** en la transformación, hay que tener **mucho cuidado**: hay que hacer un **cambio de variable** por otra que se mantenga (siguiente diapositiva)

Transformación de fuentes dependientes: cambio de variable



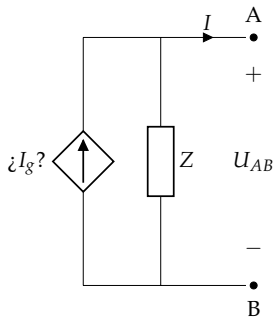
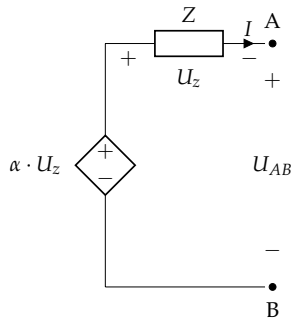
Cualquiera de estos dos cambios de variable es válido:

$$I_z = \frac{-U_{AB}}{Z}, \quad I_z = \frac{I}{1 + \alpha}$$

Dando lugar a estas expresiones igualmente válidas:

$$\epsilon_g = -\alpha \cdot U_{AB}, \quad \epsilon_g = \frac{\alpha \cdot Z}{1 + \alpha} I$$

Transformación de fuentes dependientes: cambio de variable



Cualquiera de estos dos cambios de variable es válido:

$$U_z = \frac{U_{AB}}{\alpha - 1}, \quad U_z = Z \cdot I$$

Dando lugar a estas expresiones igualmente válidas:

$$I_g = \frac{\alpha \cdot U_z}{Z} = \frac{\alpha \cdot U_{AB}}{Z(\alpha - 1)}, \quad I_g = \alpha \cdot I$$

① Potencia

② Transformación y asociación

Serie y paralelo

Fuentes dominantes

Movilidad

Conexión en serie de generadores

Generadores de tensión

Pueden conectarse en serie **sin restricción** (tanto generadores ideales como reales)

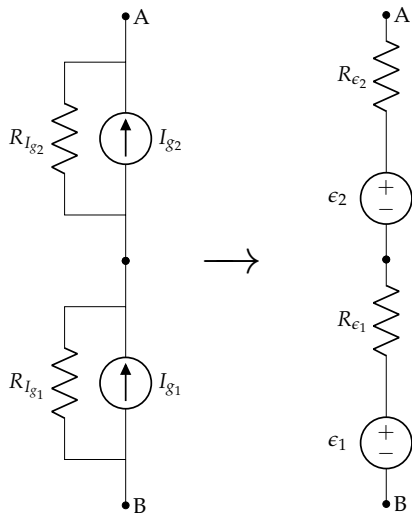
$$\text{CC} \rightarrow \begin{cases} \epsilon_T = \sum_{\forall i} \epsilon_i \\ R_{gT} = \sum_{\forall i} R_{gi} \end{cases} \quad \text{CA} \rightarrow \begin{cases} \bar{\epsilon}_T = \sum_{\forall i} \bar{\epsilon}_i \\ \bar{Z}_{gT} = \sum_{\forall i} \bar{Z}_{gi} \end{cases}$$

Generadores de corriente

- ▶ **Ideal**: todas las fuentes **deben ser idénticas** (valor y sentido)
- ▶ **Real**: sin restricción
 - ▶ Transformación a fuentes de tensión para obtener la **fente equivalente**

Ejemplo: fuentes de corriente reales en serie

Se **transforman** primero cada una de las fuentes de corriente en fuentes de tensión:



Donde:

$$\epsilon_1 = I_{g1} \cdot R_{I_{g1}}$$

$$\epsilon_2 = I_{g2} \cdot R_{I_{g2}}$$

$$R_{\epsilon_1} = R_{I_{g1}}$$

$$R_{\epsilon_2} = R_{I_{g2}}$$

(continúa en la siguiente diapositiva)

Ejemplo: fuentes de corriente reales en serie (continuación)

Las fuentes de tensión en serie se asocian en una fuente equivalente, y esta se transforma de vuelta en una fuente de corriente:

Donde:

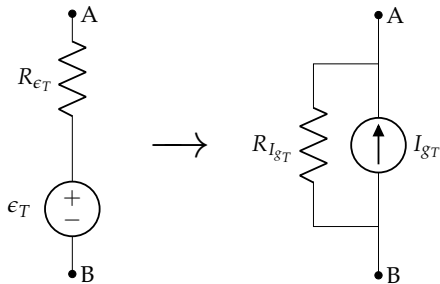
$$\epsilon_T = \epsilon_1 + \epsilon_2 = I_{g1} \cdot R_{I_{g1}} + I_{g2} \cdot R_{I_{g2}}$$

$$R_{\epsilon_T} = R_{\epsilon_1} + R_{\epsilon_2} = R_{I_{g1}} + R_{I_{g2}}$$

Y finalmente:

$$I_{gT} = \frac{\epsilon_T}{R_{I_{gT}}} = \frac{I_{g1} \cdot R_{I_{g1}} + I_{g2} \cdot R_{I_{g2}}}{R_{I_{g1}} + R_{I_{g2}}}$$

$$R_{I_{gT}} = R_{\epsilon_T} = R_{I_{g1}} + R_{I_{g2}}$$



Conexión en paralelo de generadores

Generadores de tensión

- ▶ **Ideal**: todas las fuentes **deben ser idénticas** (valor y polaridad)
- ▶ **Real**: sin restricción
 - ▶ Transformación a fuentes de corriente para obtener la **fente equivalente**

Generadores de corriente

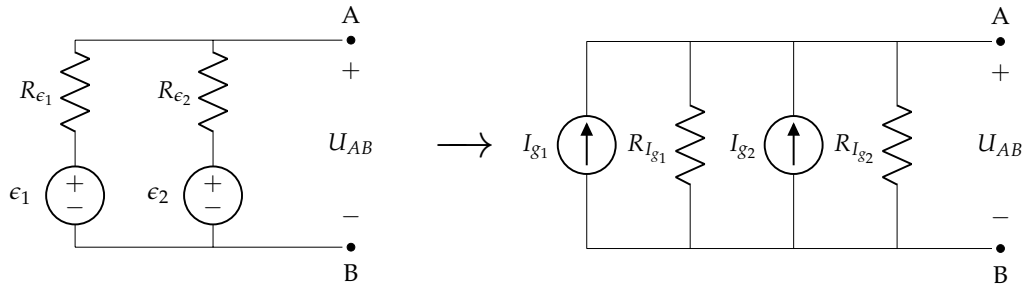
Pueden conectarse en paralelo **sin restricción** (tanto generadores ideales como reales)

$$\text{CC} \rightarrow \begin{cases} I_{gT} = \sum_{\forall i} I_{gi} \\ G_{gT} = \sum_{\forall i} G_{gi} \end{cases}$$

$$\text{CA} \rightarrow \begin{cases} \bar{I}_{gT} = \sum_{\forall i} \bar{I}_{gi} \\ \bar{Y}_{gT} = \sum_{\forall i} \bar{Y}_{gi} \end{cases}$$

Ejemplo: fuentes de tensión reales en paralelo

Se transforman primero cada una de las fuentes de tensión en fuentes de corriente:



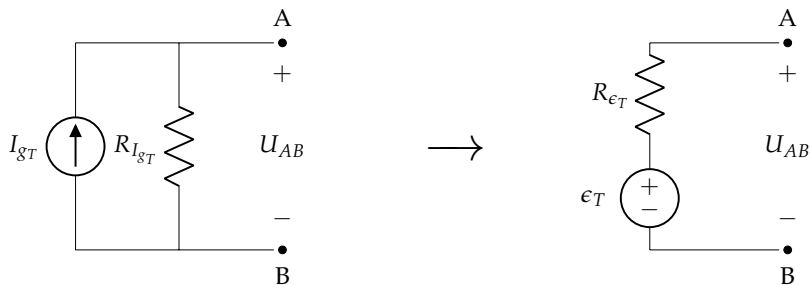
Donde:

$$I_{g1} = \frac{\epsilon_1}{R_{\epsilon_1}} \quad I_{g2} = \frac{\epsilon_2}{R_{\epsilon_2}} \quad R_{I_{g1}} = R_{\epsilon_1} \quad R_{I_{g2}} = R_{\epsilon_2}$$

(continúa en la siguiente diapositiva)

Ejemplo: fuentes de tensión reales en paralelo (continuación)

Las fuentes de corriente en paralelo se asocian en una fuente equivalente, y esta se transforma de vuelta en una fuente de tensión:



$$I_{gT} = I_{g1} + I_{g2} = \frac{\epsilon_1}{R_{\epsilon_1}} + \frac{\epsilon_2}{R_{\epsilon_2}}$$

$$R_{I_{gT}} = R_{I_{g1}} \parallel R_{I_{g2}} = R_{\epsilon_1} \parallel R_{\epsilon_2}$$

$$\epsilon_T = R_{\epsilon_T} \cdot I_{gT} = \frac{\epsilon_1 \cdot R_{\epsilon_2} + \epsilon_2 \cdot R_{\epsilon_1}}{R_{\epsilon_1} + R_{\epsilon_2}}$$

$$R_{\epsilon_T} = R_{I_{gT}} = R_{\epsilon_1} \parallel R_{\epsilon_2}$$

① Potencia

② Transformación y asociación

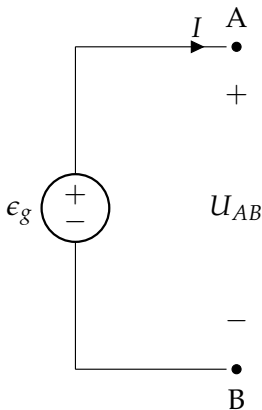
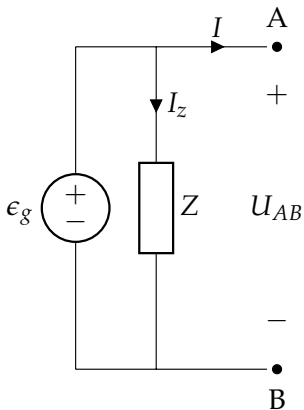
Serie y paralelo

Fuentes dominantes

Movilidad

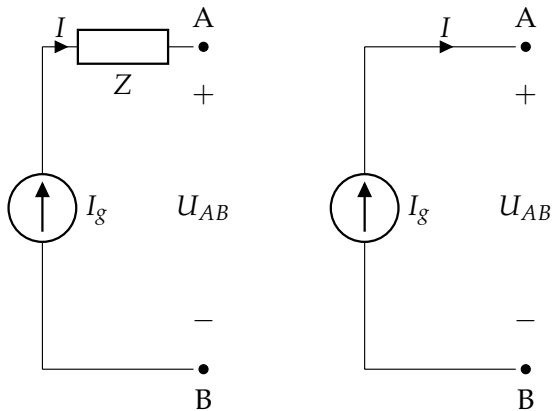
Fuentes dominantes

Una fuente de **tensión** ideal es **dominante** sobre las ramas conectadas en **paralelo** (se puede prescindir de **estas ramas** si solo nos interesa la salida en A-B)



Fuentes dominantes

Una fuente de **corriente** ideal es **dominante** sobre los elementos conectados en **serie** (se puede prescindir de **estos elementos** si solo nos interesa la salida en A-B)



① Potencia

② Transformación y asociación

Serie y paralelo

Fuentes dominantes

Movilidad

Modificación de la geometría de un circuito: movilidad de fuentes

Recordatorio de Teoría de Circuitos I:

- ▶ Método de las **mallas**: únicamente aplicable con **fuentes de tensión**
- ▶ Método de los **nudos**: únicamente aplicable con **fuentes de corriente**

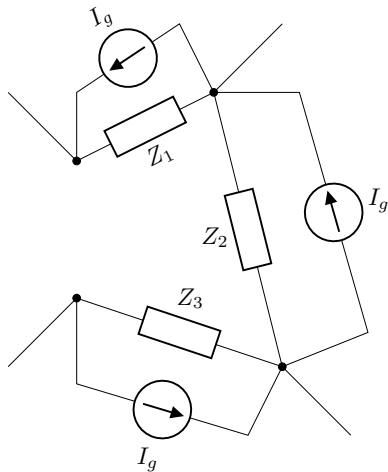
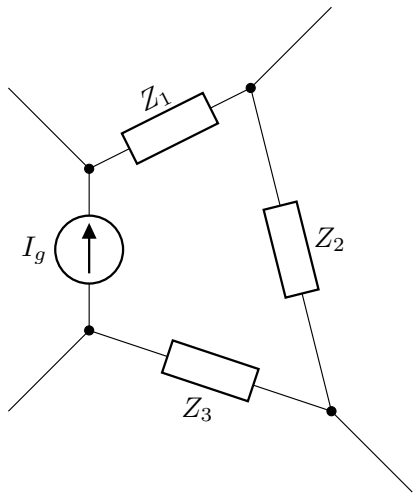
¿Qué hacer si hay **generadores ideales**, y **no es posible transformación**?

Una posibilidad →

movilidad de generadores

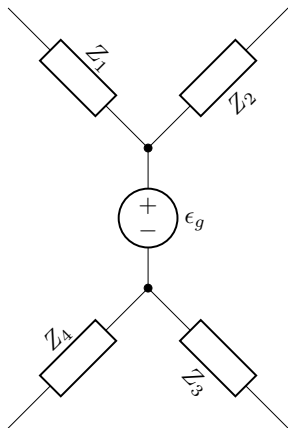
- ▶ La movilidad de fuentes nos permite **transformar** un **generador ideal** en un **conjunto** de **generadores reales**
- ▶ Será necesaria una **modificación de la geometría** del circuito

Movilidad de fuentes de corriente

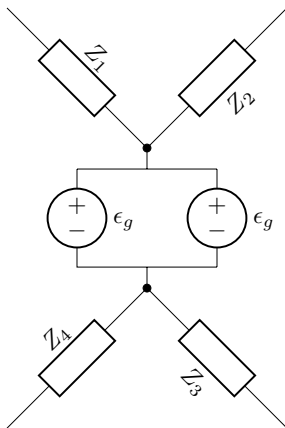


Puede comprobarse que el **balance de corrientes** en cada nudo **es el mismo** en ambos

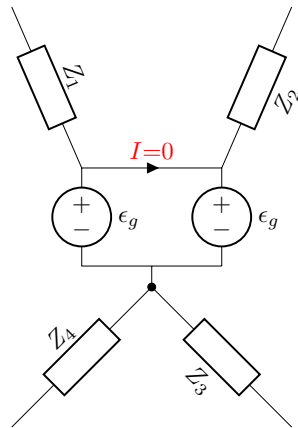
Movilidad de fuentes de tensión: paso a paso



Generador **ideal**
de **tensión**

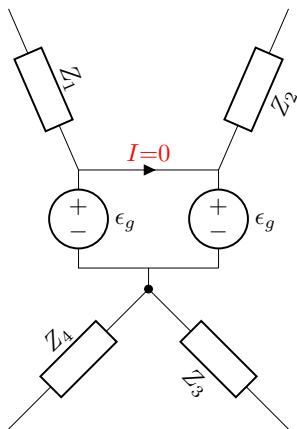


Desdoblamos en dos
generadores en paralelo

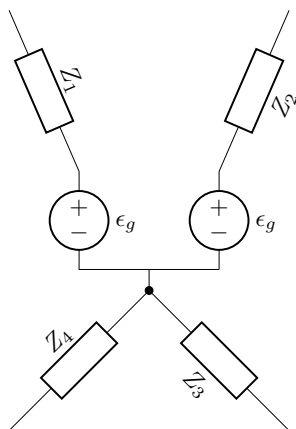


Los **extremos del cable**
están al **mismo potencial**,
luego no circula corriente

Movilidad de fuentes de tensión: paso a paso

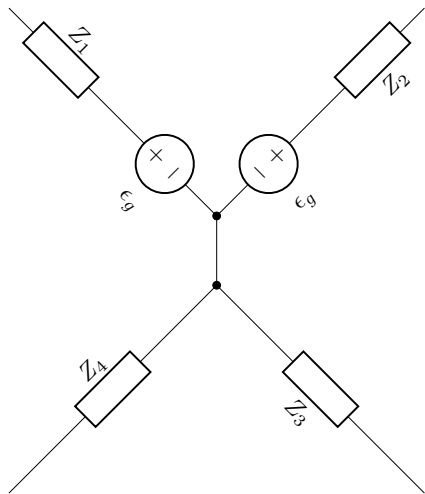
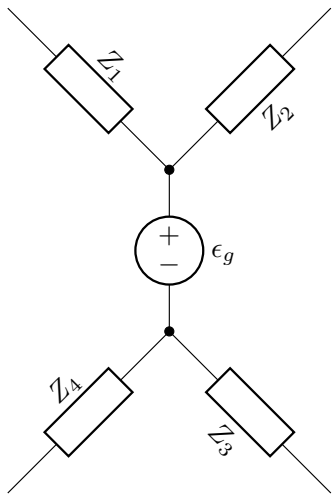


Los **extremos del cable** están al **mismo potencial**, luego no circula corriente



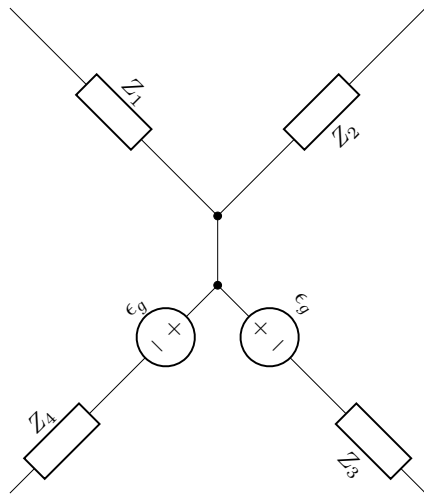
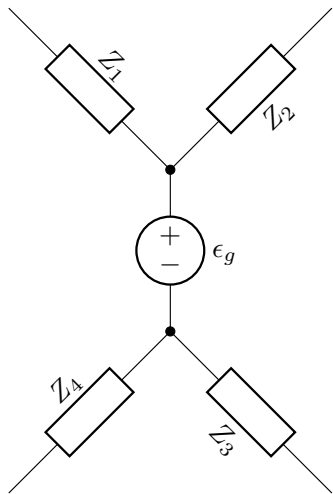
Podemos por lo tanto **prescindir** del cable

Movilidad de fuentes de tensión: proceso directo



Puede comprobarse que los **elementos pasivos** están sometidos a las **mismas tensiones**

Movilidad de fuentes de tensión: proceso directo



Puede comprobarse que los **elementos pasivos** están sometidos a las **mismas tensiones**