Teoría de Circuitos III
Prueba BT3

22 de noviembre de 2018

Los resultados se publicarán el día 2 de diciembre.

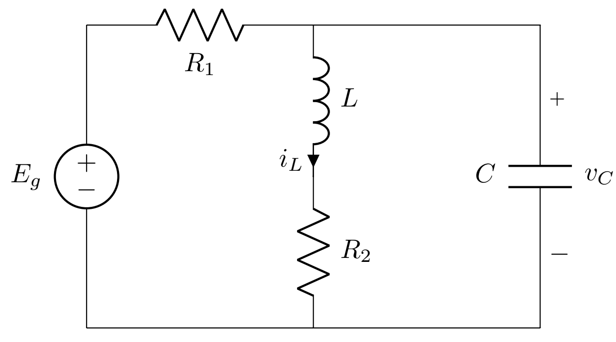
La revisión del examen se realizará el 3 de diciembre de 11:30 a 14:30.

La figura representa un circuito que comienza un régimen transitorio a partir de unas condiciones iniciales definidas por $v_c(0^-) = 1\,\mathrm{V}$ y $i_L(0^-) = 0\,\mathrm{A}$. En este ejercicio se analizará el régimen transitorio del circuito con variables de estado, empleando como tales $v_c(t)$ y $i_L(t)$.

1. (**0.5p**) Determina los valores en régimen permanente de las variables.
2. (**2p**) Dibuja el grafo del circuito, y elige un árbol propio. En este grafo deben quedar indicadas las variables con polaridad y sentido, según corresponda.
3. (**2.5p**) Determina las ecuaciones necesarias para cada variable de estado, obteniendo la ecuación de estado en forma matricial. Es necesario indicar claramente las expresiones de las variables adicionales que sean necesarias.
4. (**2.5p**) Determina las expresiones de las variables de estado en el dominio de Laplace.
5. (**0.5p**) Determina los polos del sistema y, sin resolver la ecuación de estado, estima de forma justificada el tipo de transitorio presente en el circuito.
6. (**2p**) Calcula las expresiones en el dominio del tiempo de las variables de estado. Indica de forma expresa el cumplimiento de las condiciones iniciales y los valores en el régimen permanente.

Datos:

$$E_g = 1\,\mathrm{V}$$
$$R_1 = 2/5\,\Omega$$
$$R_2 = 2/3\,\Omega$$
$$L = 4/3\,\mathrm{H}$$
$$C = 1\,\mathrm{F}$$



Solución

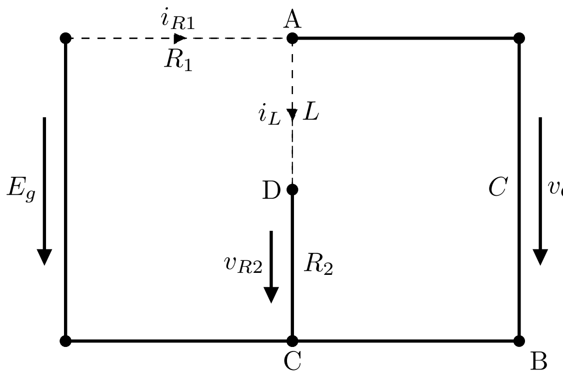
1. Régimen permanente

   Sustituyendo los equivalentes de bobina y condensador en régimen permanente obtenemos:

$$u_c(\infty) = E_g \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 5/8\,\mathrm{V} = 0{,}625\,\mathrm{V}$$
$$i_L(\infty) = \frac{E_g}{R_1 + R_2} = 15/16\,\mathrm{A} = 0{,}9375\,\mathrm{A}$$

2. Grafo

   La figura representa el grafo del circuito, en el que se ha resaltado el árbol propio, y se han indicado las flechas de las variables de estado y las variables auxiliares.



3. Ecuación de estado

   Para obtener la ecuación de la variable de estado $v_c(t)$ utilizamos la LKC en el grupo del corte básico A:

$$i_{R1} = i_L + C\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$$

   Para obtener la ecuación de la variable de estado $i_L(t)$ utilizamos la LKV en el lazo básico ABCDA:

$$u_c - u_{R2} - L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = 0$$

   Las variables auxiliares i_{R1} y u_{R2} quedan definidas con las siguientes ecuaciones:

$$i_{R1} = \frac{E_g - u_c}{R_1}$$
$$u_{R2} = i_L \cdot R_2$$

Reescribiendo estas ecuaciones en forma matricial obtenemos:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_c \\ \dot{I}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/R_1C & -1/C \\ 1/L & -R_2/L \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_c \\ I_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/R_1C \\ 0 \end{bmatrix} \cdot E_g$$

Sustituyendo valores tenemos:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_C \\ \dot{I}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2{,}5 & -1 \\ 0{,}75 & -0{,}5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_c \\ I_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2{,}5 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 1$$

4. Ecuación de estado con Laplace

   La expresión general es:

$$\mathbf{X}(\mathbf{s}) = (\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{x}(0^-) + (\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{BU}(\mathbf{s})$$

   que, sustituyendo lo obtenido en el apartado anterior, nos lleva a:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U_c}(\mathbf{s}) \\ \mathbf{I_L}(\mathbf{s}) \end{bmatrix} = (\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 2{,}5 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 1/\mathbf{s}$$

   siendo

$$(\mathbf{sI} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \mathbf{s} + 2{,}5 & 1 \\ -0{,}75 & \mathbf{s} + 0{,}5 \end{bmatrix}$$

   El determinante de esta matriz es:

$$\det(\mathbf{sI} - \mathbf{A}) = (\mathbf{s}+1)(\mathbf{s}+2)$$

   La matriz inversa es:

$$(\mathbf{sI} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{(\mathbf{s}+1)(\mathbf{s}+2)} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{s} + 0{,}5 & -1 \\ 0{,}75 & \mathbf{s} + 2{,}5 \end{bmatrix}$$

   Por tanto,

$$\mathbf{U_C}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{s}^2 + 3\mathbf{s} + 1{,}25}{\mathbf{s}(\mathbf{s}+1)(\mathbf{s}+2)}$$
$$\mathbf{I_L}(\mathbf{s}) = \frac{0{,}75\mathbf{s} + 1{,}875}{\mathbf{s}(\mathbf{s}+1)(\mathbf{s}+2)}$$

5. Los polos de este circuito están situados en $\mathbf{s} = -1$ y $\mathbf{s} = -2$. Al tratarse de dos polos reales y distintos, podemos afirmar que el transitorio presente en el circuito es sobreamortiguado (dos exponenciales decrecientes).

6. Resolución de la ecuación de estado

   Aplicando desarrollo en fracciones parciales para cada variable obtenemos:

$$
\begin{aligned}
u_C(t) &= 0{,}625 + 0{,}75e^{-t} - 0{,}375e^{-2t} \\
i_L(t) &= 0{,}9375 - 1{,}125e^{-t} + 0{,}1875e^{-2t}
\end{aligned}
$$

   Se puede comprobar que estas expresiones cumplen las condiciones iniciales y los valores en régimen permanente. Además, tal y como se indicó anteriormente, se trata de un transitorio sobreamortiguado, con la superposición de dos exponenciales decrecientes cuyos exponentes coinciden con los polos detectados.