

Teoremas fundamentales

Teoría de Circuitos II

Autor: Luis Badesa Bernardo

(basado en las diapositivas de Óscar Perpiñán Lamigueiro)

- ① Teoremas de linealidad
- ② Teoremas de reciprocidad y sustitución
- ③ Teorema de compensación
- ④ Teorema de Millman
- ⑤ Teorema de Rosen
- ⑥ Teoremas de Thévenin y Norton
- ⑦ Teorema de Everitt

Circuitos lineales

Un circuito eléctrico es **lineal** si los elementos pasivos y activos que incluye son lineales:

- ▶ **Elemento pasivo**: la relación entre tensión y corriente es lineal (R, L, C)
- ▶ **Fuente dependiente**: su salida tiene una relación lineal con la magnitud del circuito de la que depende

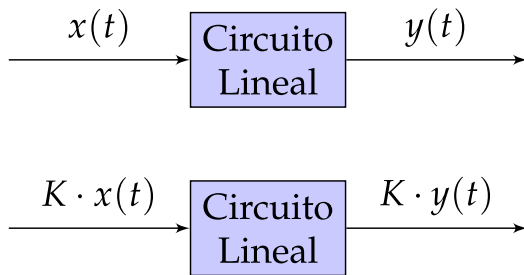
Propiedades de los circuitos lineales

- ▶ **Proporcionalidad** u homogeneidad
- ▶ **Superposición** o aditividad

Proporcionalidad

$y(t)$ es la respuesta de un **circuito lineal** a una excitación $x(t)$

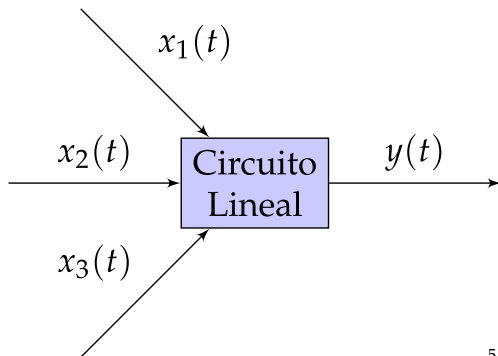
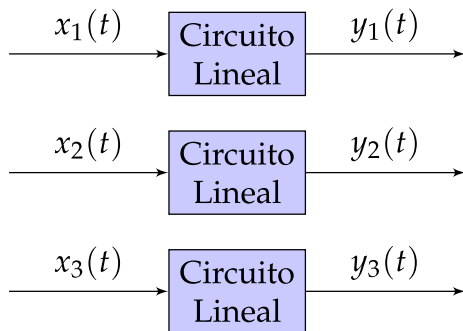
Si la excitación es multiplicada por una **constante**, $K \cdot x(t)$, la respuesta del circuito será modificada por la misma constante, $K \cdot y(t)$



Superposición

La respuesta de un **circuito lineal** a varias fuentes de excitación actuando simultáneamente es igual a la **suma de las respuestas** que se tendrían cuando actuase cada una de ellas por separado

$$y(t) = \sum_i y_i(t)$$



Análisis de un circuito mediante superposición

Procedimiento

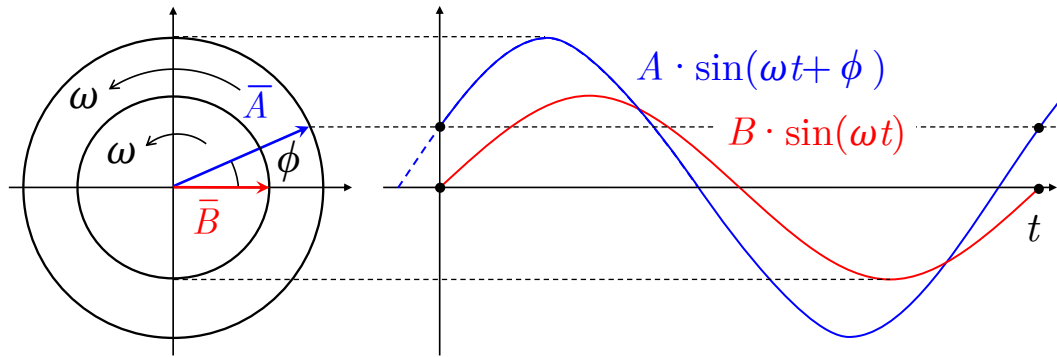
- 1 Se **eliminan** todas las **fuentes independientes** del circuito menos una
 - ▶ Las fuentes de **tensión** se sustituyen por un **cortocircuito** ($U = 0$)
 - ▶ Las fuentes de **corriente** se sustituyen por un **circuito abierto** ($I = 0$)
 - ▶ Las fuentes **dependientes no se modifican**
- 2 Se analiza el circuito, obteniendo la **respuesta individual** a la fuente que permanece activa
- 3 Se repite este procedimiento para **cada una de las fuentes independientes** del circuito
- 4 La respuesta total del circuito es la **suma de las respuestas individuales**

Análisis de un circuito mediante superposición

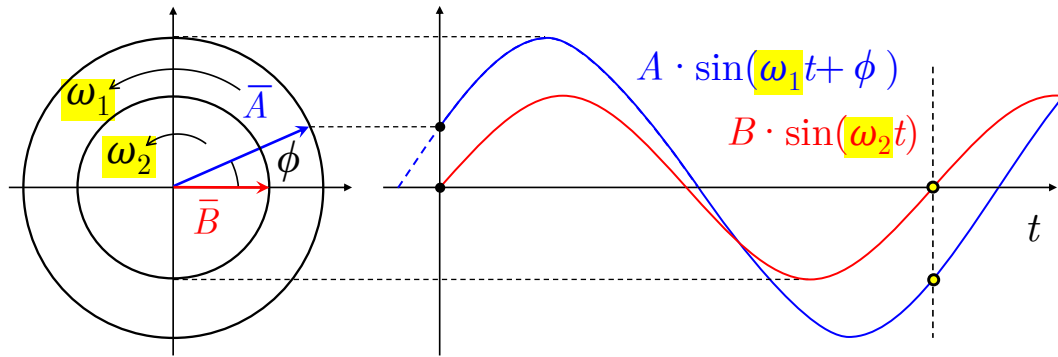
Observaciones

- ▶ Siempre hay que **aplicar este método** cuando en un circuito conviven fuentes de distinta frecuencia (o fuentes de corriente continua y corriente alterna)
- ▶ En el caso de fuentes de **corriente alterna senoidal**:
 - ▶ **Para cada frecuencia**, las bobinas y condensadores presentarán **diferente reactancia**, por lo que habrá que calcularlas
 - ▶ La respuesta total debe expresarse en el dominio del tiempo (**NO** se pueden **sumar fasores** que corresponden a **frecuencias diferentes**)
- ▶ En el primer paso del procedimiento, se pueden **agrupar las fuentes que funcionan a la misma frecuencia** y calcular la respuesta del circuito en esa frecuencia

Recordatorio: el cálculo fasorial es válido para señales de igual ω



...pero **NO** para señales de distinta frecuencia ($\omega_1 \neq \omega_2$)



Principio de superposición y potencia

El principio de superposición aplica a tensiones y corrientes, pero **NO a potencias** (ya que potencia es el resultado de una **operación no lineal**, el producto de corriente y tensión)

Supongamos $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$:

$$\begin{aligned} p(t) &= R \cdot i^2(t) = \\ &= R \cdot [i_1(t) + i_2(t)]^2 = \\ &= R \cdot [i_1^2(t) + i_2^2(t) + 2 \cdot i_1(t) \cdot i_2(t)] \\ &= p_1(t) + p_2(t) + 2 R \cdot i_1(t) \cdot i_2(t) \end{aligned}$$

$$p(t) \neq p_1(t) + p_2(t)$$

Principio de superposición y potencia

- ▶ Cuando las señales son **ortogonales en un periodo*** se pueden sumar las potencias medias de cada circuito:

$$P = \sum_i P_i$$

- ▶ **Ejemplos** de señales ortogonales:
senoidales con diferente frecuencia, una **senoidal** con una **continua**...

*Dos señales son ortogonales si cumplen la siguiente propiedad:

$$\langle f_1, f_2 \rangle_T = \int_T f_1(t) \cdot f_2(t) dt = 0$$

Principio de superposición y potencia

- Cuando las señales son **ortogonales en un periodo**, se pueden sumar las potencias medias de cada circuito:

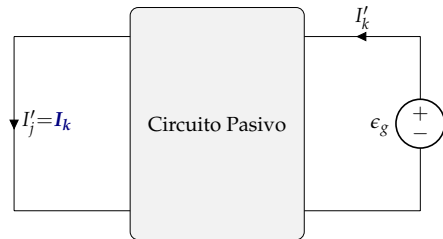
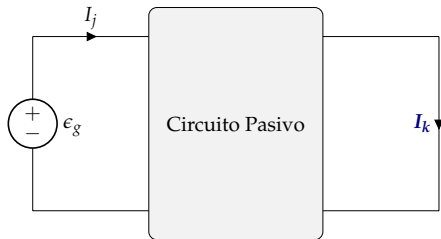
$$\begin{aligned} P_m &= \frac{1}{T} \int_T p(t) dt = \\ &= R \cdot \frac{1}{T} \left[\int_T i_1^2(t) dt + \int_T i_2^2(t) dt + \underbrace{\int_T 2 \cdot i_1(t) \cdot i_2(t) dt}_{\text{señales ortogonales}} \right] \overset{0}{=} \\ &= R \cdot \underbrace{(I_1^2 + I_2^2)}_{\substack{\text{valores} \\ \text{eficaces}}} = \boxed{P_1 + P_2} \end{aligned}$$

- ① Teoremas de linealidad
- ② Teoremas de reciprocidad y sustitución
- ③ Teorema de compensación
- ④ Teorema de Millman
- ⑤ Teorema de Rosen
- ⑥ Teoremas de Thévenin y Norton
- ⑦ Teorema de Everitt

Teorema de reciprocidad: mallas

Aplica a **circuitos pasivos sin fuentes dependientes**, y tiene un doble enunciado (uno para el método de las **mallas** y otro para el de los **nudos**)

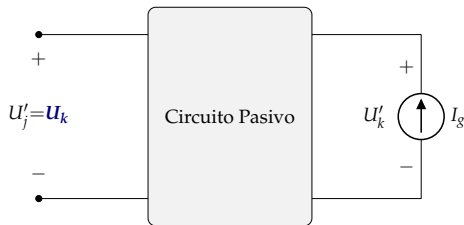
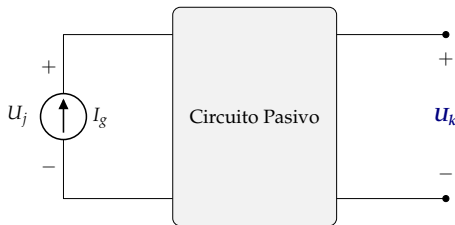
La **corriente en una malla k** cuando se tiene una **fuente en la malla j** es la misma que habría en la malla j si la fuente estuviese situada en la malla k (debido a que la **matriz de impedancias** es **simétrica**)



Teorema de reciprocidad: nudos

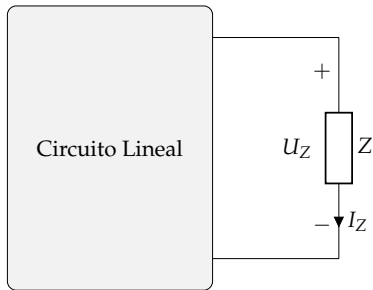
Aplica a **circuitos pasivos sin fuentes dependientes**, y tiene un doble enunciado (uno para el método de las **mallas** y otro para el de los **nudos**)

La **tensión U_k entre dos nudos** cuando se tiene una **fuerza entre otros dos nudos** es la misma que habría en la posición original de la fuente si esta se intercambia (debido a que la **matriz de admitancias** es **simétrica**)

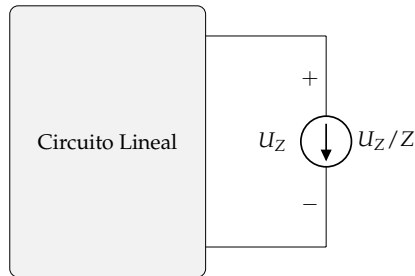
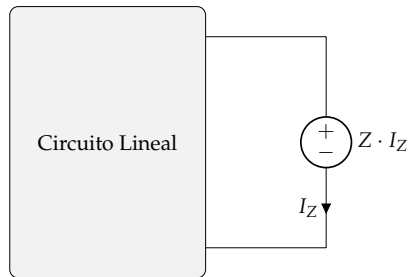


Regla de sustitución

Cualquier rama de un circuito **se puede sustituir** por una **fente de tensión** del valor de la tensión en esa rama, sin afectar al resto del circuito



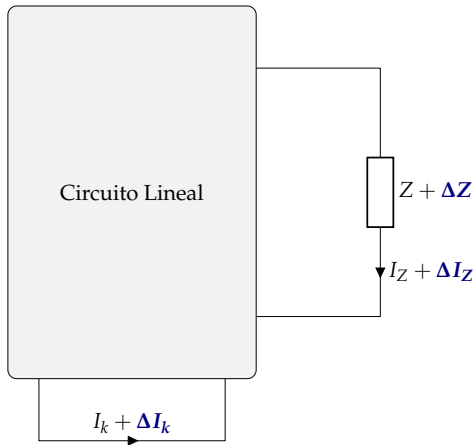
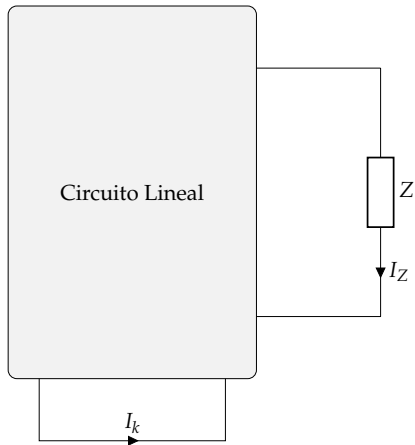
O bien por una **fente de intensidad** de valor la intensidad en dicha rama



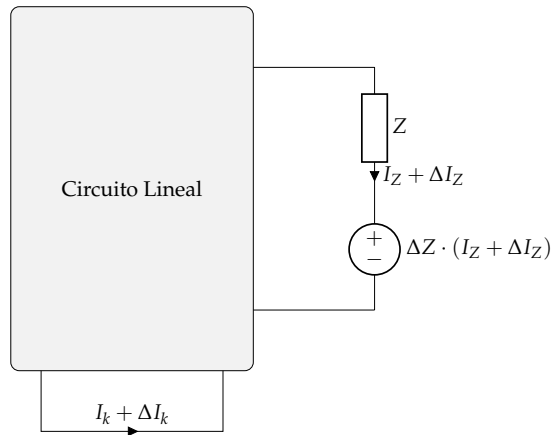
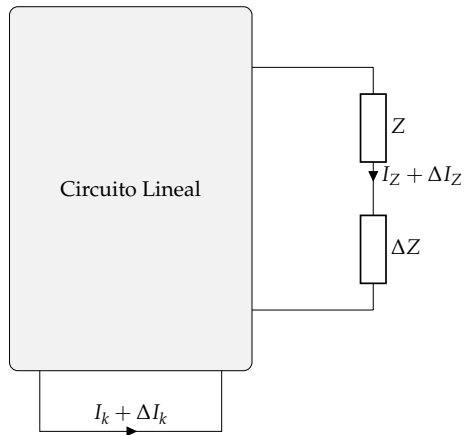
- ① Teoremas de linealidad
- ② Teoremas de reciprocidad y sustitución
- ③ Teorema de compensación
- ④ Teorema de Millman
- ⑤ Teorema de Rosen
- ⑥ Teoremas de Thévenin y Norton
- ⑦ Teorema de Everitt

Planteamiento

¿Cuál es la variación en la respuesta I_k debida a una variación en la impedancia Z ?

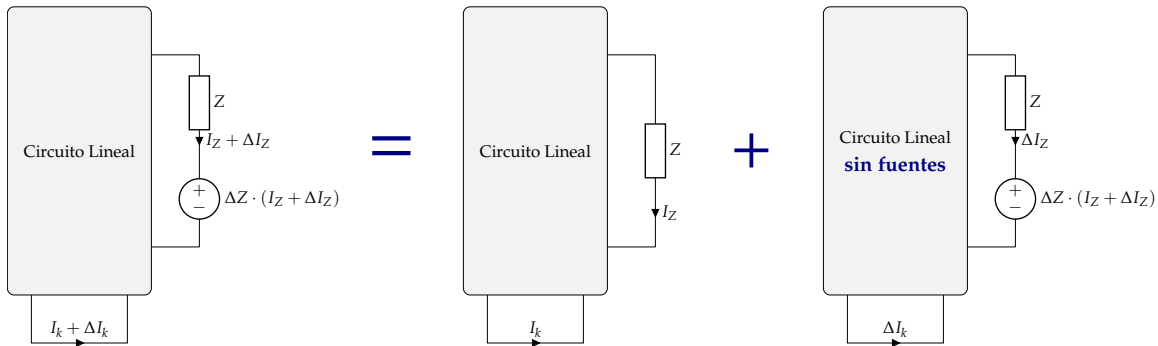


Aplicamos la regla de **sustitución**:

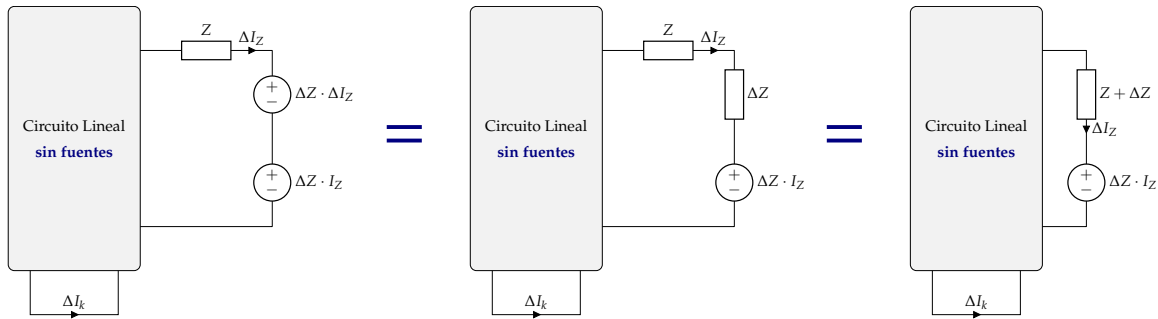


A continuación, **T^a de superposición**

Consideramos el **circuito original** y aquel en el que sólo actúa la **nueva fuente**:



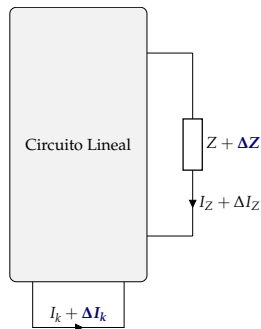
“Rompe” la fuente en dos y volvemos a aplicar la regla de **sustitución**:



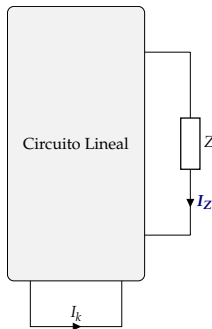
Solución

Para calcular el cambio en la respuesta, ΔI_k , debido a una variación en la impedancia, ΔZ :

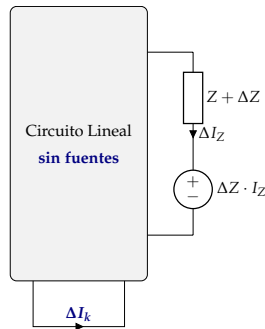
- 1 Se calcula la corriente I_Z en el circuito original
- 2 Se apagan las fuentes independientes y se sustituye la impedancia Z por una impedancia de valor $Z + \Delta Z$ en serie con una fuente de tensión de valor $\Delta Z \cdot I_Z$
- 3 En el circuito resultante se calcula la respuesta, ΔI_k



Paso 1

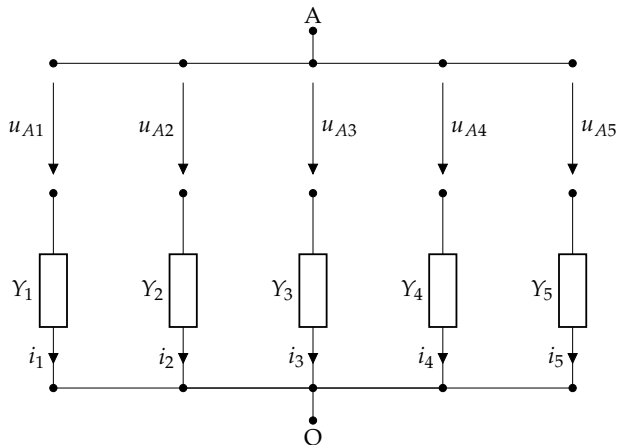


Pasos 2 y 3



- ① Teoremas de linealidad
- ② Teoremas de reciprocidad y sustitución
- ③ Teorema de compensación
- ④ **Teorema de Millman**
- ⑤ Teorema de Rosen
- ⑥ Teoremas de Thévenin y Norton
- ⑦ Teorema de Everitt

El Teorema de Millman permite resolver la **tensión entre dos puntos A y O**, siendo O un punto común de un conjunto de impedancias, y siendo conocidas las tensiones entre el punto A y las impedancias



Deducción

Por **2LK**, la tensión u_{AO} es:

$$u_{AO} = u_{Aj} + i_j / Y_j \quad \text{donde } j \text{ es cualquiera de las ramas}$$

Despejando i_j :

$$i_j = Y_j \cdot (u_{AO} - u_{Aj})$$

En el nudo O se puede plantear **1LK**:

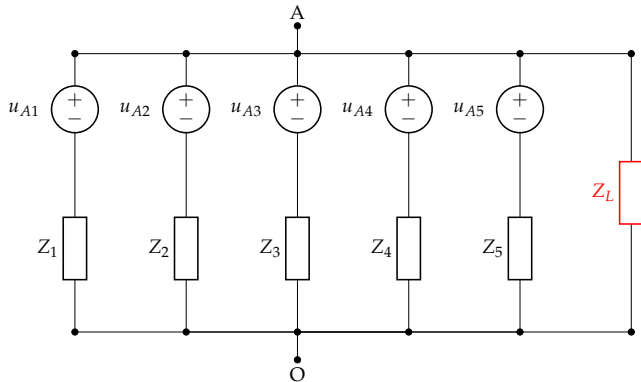
$$\sum_{j=1}^n i_j = 0 \quad \text{donde } n \text{ es el n}^\circ \text{ de impedancias}$$

Por tanto:

$$\sum_{j=1}^n Y_j \cdot (u_{AO} - u_{Aj}) = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{u_{AO} = \frac{\sum_{j=1}^n Y_j \cdot u_{Aj}}{\sum_{j=1}^n Y_j}}$$

Aplicación

Este teorema permite resolver rápidamente circuitos como el siguiente:



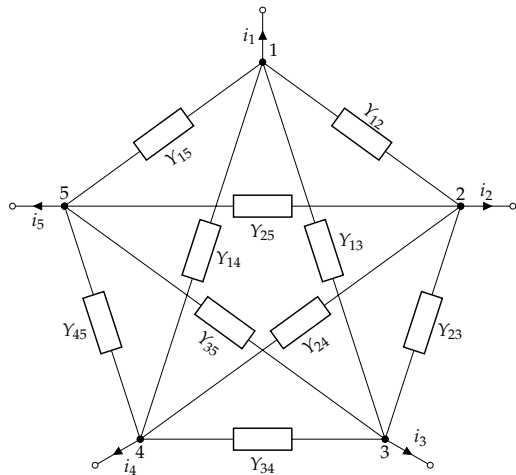
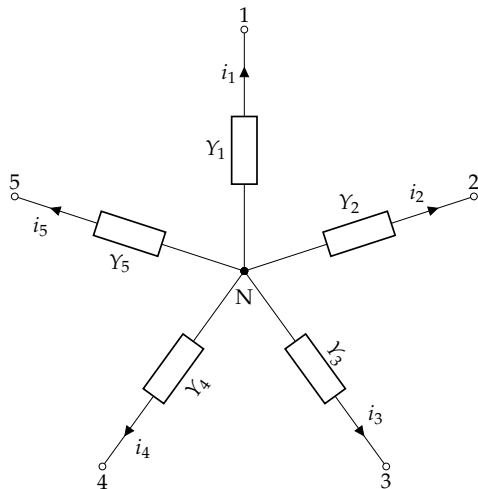
$$u_{AO} = \frac{0/Z_L + \sum_{j=1}^n u_{Aj}/Z_j}{1/Z_L + \sum_{j=1}^n 1/Z_j}$$

¿Cuándo es útil el T^a de Millman?

Una aplicación muy útil del T^a de Millman es para el cálculo de la **tensión de desplazamiento del neutro** en **sistemas trifásicos desequilibrados**, que usaremos en el Tema 6

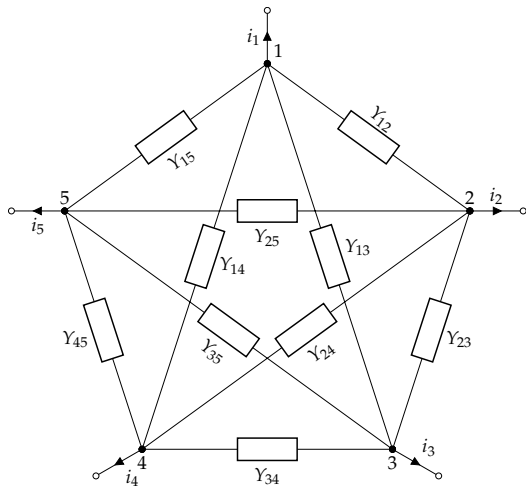
- ① Teoremas de linealidad
- ② Teoremas de reciprocidad y sustitución
- ③ Teorema de compensación
- ④ Teorema de Millman
- ⑤ Teorema de Rosen
- ⑥ Teoremas de Thévenin y Norton
- ⑦ Teorema de Everitt

El **T^a de Rosen** permite pasar de una configuración de **impedancias en estrella** con n terminales **a una configuración en polígono**



Una estrella se puede transformar en un polígono (pero no al revés si $n > 3$)

Deducción



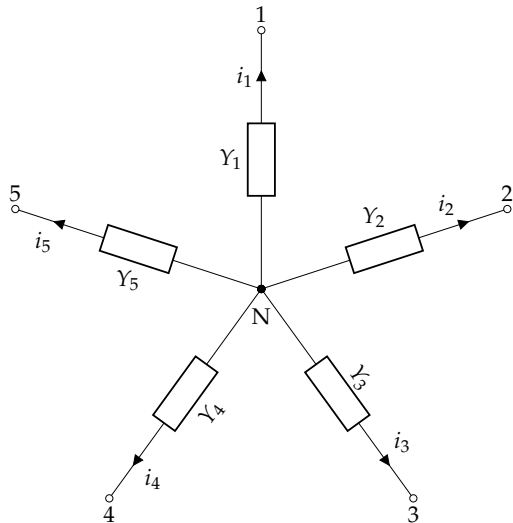
La **corriente total** que sale **por cada terminal** (i_1, i_2, \dots) **debe ser igual** en la estrella y el polígono

La corriente que sale por cada terminal del polígono es:

$$i_j = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n i_{kj} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n u_{kj} \cdot Y_{kj} = \sum_{k=1}^n u_{kj} \cdot Y_{kj}$$

(en el último paso se ha tenido en cuenta que $u_{kk} = 0$)

Deducción



La **corriente total** que sale **por cada terminal** (i_1, i_2, \dots) **debe ser igual** en la estrella y el polígono

La corriente en cada rama de la estrella es:

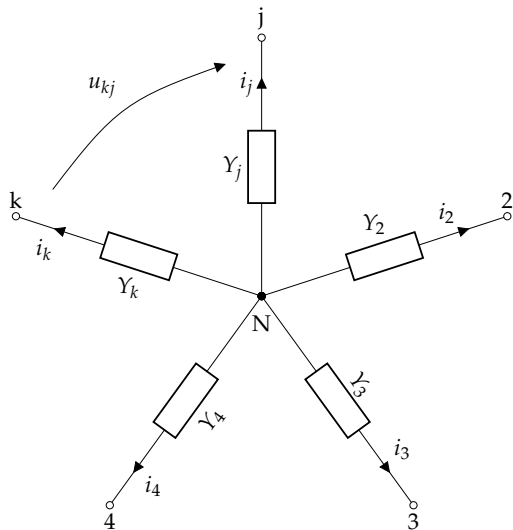
$$i_j = u_{Nj} \cdot Y_j$$

Igualando con el resultado de la diapositiva anterior:

$$\sum_{k=1}^n u_{kj} \cdot Y_{kj} = u_{Nj} \cdot Y_j$$

El objetivo es llegar a despejar $Y_{kj} \dots$

Para seguir con la deducción, necesitamos una **expresión para u_{Nj}** en función de u_{kj}



Usamos el **T^a de Millman** tomando como puntos **AO** los puntos **jN** :

$$u_{jN} = \frac{u_{jj}^0 \cdot Y_j + \sum_{k=1}^{n-1} (-u_{kj}) \cdot Y_k}{Y_j + \sum_{k=1}^{n-1} Y_k}$$

$$u_{Nj} = -u_{jN} = \frac{\sum_{k=1}^n u_{kj} \cdot Y_k}{\sum_{k=1}^n Y_k}$$

Sustituyendo la expresión anterior en la que habíamos obtenido en la diapositiva [31](#):

$$\sum_{k=1}^n u_{kj} \cdot Y_{kj} = Y_j \frac{\sum_{k=1}^n u_{kj} \cdot Y_k}{\sum_{k=1}^n Y_k}$$

Denominando $Y_{\lrcorner} = \sum_{k=1}^n Y_k$ y agrupando dentro del sumatorio:

$$\sum_{k=1}^n u_{kj} \cdot Y_{kj} = \sum_{k=1}^n u_{kj} \frac{Y_k \cdot Y_j}{Y_{\lrcorner}}$$

Finalmente, eliminando los sumatorios y simplificando:

$$Y_{kj} = \frac{Y_k \cdot Y_j}{Y_{\lrcorner}}$$

Aplicación

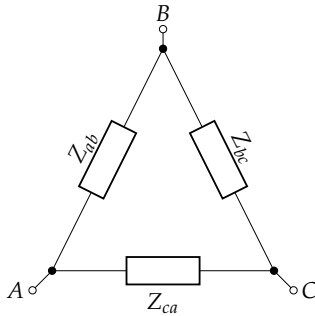
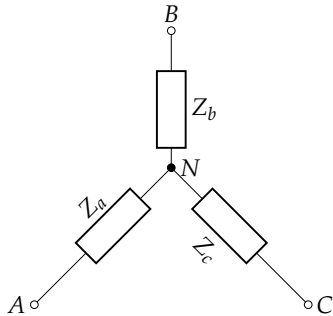
- Ejemplo para $n = 3$ (estrella \rightarrow triángulo, visto en TC I)

$$Y_{kj} = \frac{Y_k \cdot Y_j}{\sum_{k=1}^n Y_k}$$

$$Y_{ab} = \frac{Y_a \cdot Y_b}{Y_a + Y_b + Y_c}$$

$$Y_{bc} = \frac{Y_b \cdot Y_c}{Y_a + Y_b + Y_c}$$

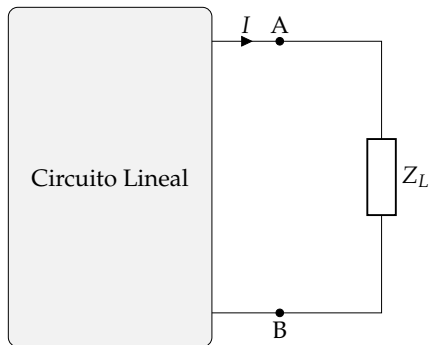
$$Y_{ca} = \frac{Y_c \cdot Y_a}{Y_a + Y_b + Y_c}$$



- ① Teoremas de linealidad
- ② Teoremas de reciprocidad y sustitución
- ③ Teorema de compensación
- ④ Teorema de Millman
- ⑤ Teorema de Rosen
- ⑥ Teoremas de Thévenin y Norton
- ⑦ Teorema de Everitt

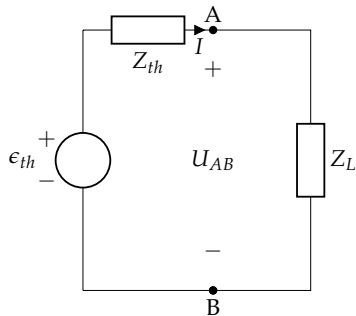
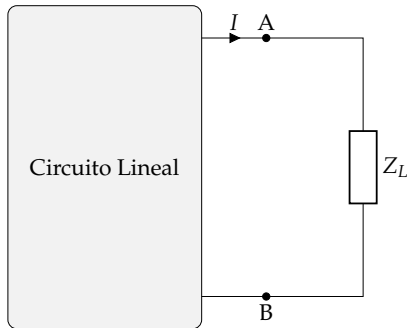
Teoremas de Thévenin y Norton

- ▶ Permiten transformar un circuito complejo en un equivalente **más simple**
- ▶ Útiles cuando solo nos interesa la **respuesta global de un circuito**, y no las intensidades o tensiones parciales

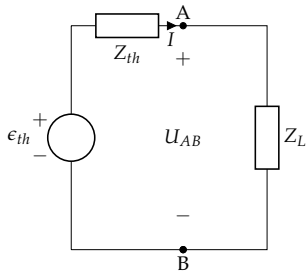


Teorema de Thévenin

Cualquier **red lineal** compuesta por elementos activos y pasivos **puede sustituirse**, desde el punto de vista de sus terminales externos A-B, por una **fuentes de tensión** (generador de Thévenin, ϵ_{th}) en **serie** con una **impedancia** (impedancia de Thévenin, Z_{th})



Cálculo del equivalente de Thévenin



- Circuito abierto ($Z_L \rightarrow \infty$, $U_{AB} = U_{oc}$)

$$\epsilon_{th} = U_{oc}$$

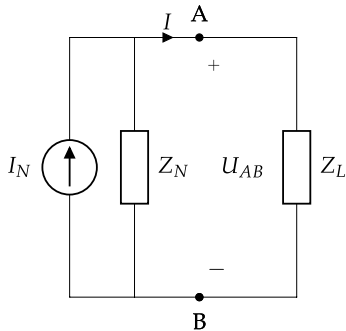
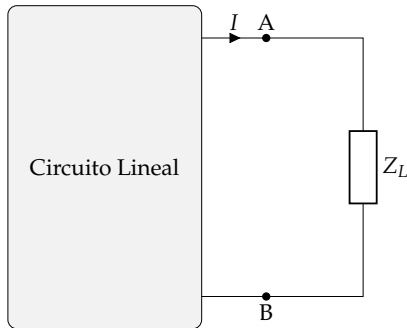
(SC \equiv short circuit, OC \equiv open circuit)

- Cortocircuito ($Z_L = 0$, $I = I_{sc}$)

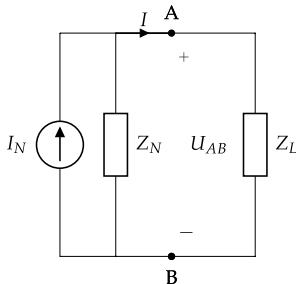
$$Z_{th} = \frac{\epsilon_{th}}{I_{sc}} = \frac{U_{oc}}{I_{sc}}$$

Teorema de Norton

Cualquier **red lineal** compuesta por elementos activos y pasivos **puede sustituirse**, desde el punto de vista de sus terminales externos A-B, por una **fuentes de corriente** (generador de Norton, I_N) en **paralelo** con una **impedancia** (impedancia de Norton, Z_N)



Cálculo del equivalente de Norton



- Cortocircuito ($Z_L = 0$, $I = I_{sc}$)

$$I_N = I_{sc}$$

(SC \equiv short circuit, OC \equiv open circuit)

- Circuito abierto ($Z_L \rightarrow \infty$, $U_{AB} = U_{oc}$)

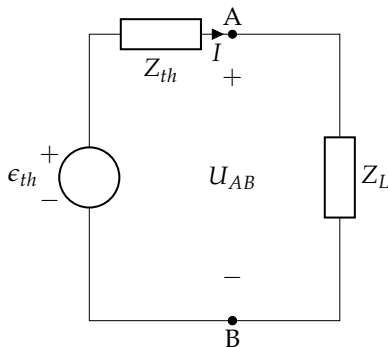
$$Z_N = \frac{U_{oc}}{I_N} = \frac{U_{oc}}{I_{sc}}$$

Cálculo de impedancia Thévenin/Norton

- ▶ Siempre podemos calcular la impedancia Thévenin/Norton **calculando tanto U_{oc} como I_{sc}** , pero en ocasiones **no es sencillo** calcular ambas magnitudes
- ▶ Existe un método alternativo:
 - ▶ Si el circuito **NO** contiene fuentes dependientes:
Se puede calcular **apagando** todos los **generadores** y obteniendo la impedancia equivalente
 - ▶ Si el circuito contiene fuentes dependientes:
Una **fuerza dependiente no se puede apagar**, porque no tiene una excitación autónoma (depende de lo que está ocurriendo en otra parte del circuito)
Es **necesario** conectar un **generador de prueba** a la salida del circuito y obtener la relación entre tensión y corriente de este generador

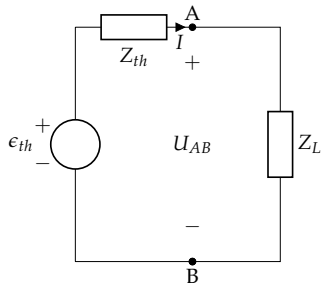
Máxima transferencia de potencia

¿Qué impedancia \bar{Z}_L hay que conectar en los terminales A-B para que el circuito entregue la **máxima potencia posible**?



Se aplica el **equivalente de Thévenin** (siguiente diapositiva)

Calculamos la **potencia activa en la impedancia** de carga \bar{Z}_L :



$$\bar{Z}_{th} = R_{th} + jX_{th}$$

$$\bar{Z}_L = R_L + jX_L$$

$$\bar{I} = \frac{\bar{\epsilon}_{th}}{\bar{Z}_{th} + \bar{Z}_L} \rightarrow |\bar{I}| = \frac{\epsilon_{th}}{|\bar{Z}_{th} + \bar{Z}_L|}$$

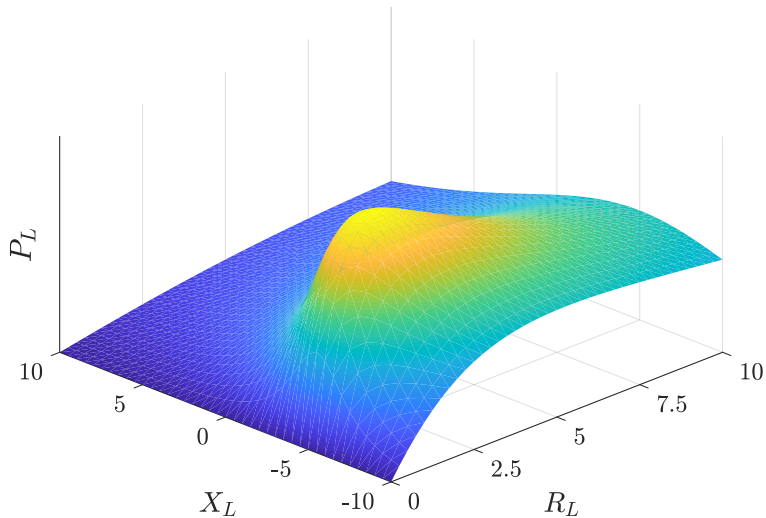
$$P_L = I^2 \cdot R_L$$

$$P_L = \frac{\epsilon_{th}^2}{|\bar{Z}_{th} + \bar{Z}_L|^2} \cdot R_L$$

Las **condiciones** de **máximo** son:

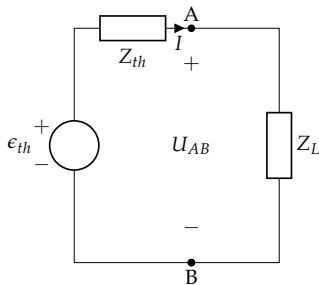
$$\frac{\partial P_L}{\partial X_L} = 0, \quad \frac{\partial P_L}{\partial R_L} = 0$$

Ejemplo para $R_{th} = 1,25 \Omega$ y $X_{th} = 5 \Omega$:



Impedancia de carga (o impedancias “adaptadas”)

Dado un circuito lineal:



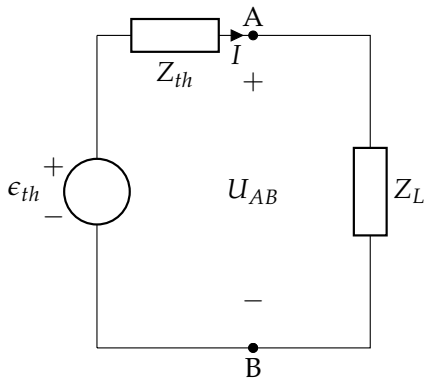
La **impedancia de carga** que hay que conectar entre sus terminales A-B para obtener la máxima potencia disponible es:

$$\bar{Z}_L = \bar{Z}_{th}^* = R_{th} - jX_{th}$$

(deducción en TC I)

Máxima potencia disponible

La **máxima potencia** que puede entregarse a la carga es:



$$\left. \begin{aligned} \bar{Z}_L &= \bar{Z}_{th}^* \\ P_L &= \frac{\epsilon_{th}^2}{|\bar{Z}_{th} + \bar{Z}_L|^2} \cdot R_L \end{aligned} \right\} \rightarrow \boxed{P_L = \frac{\epsilon_{th}^2}{4 \cdot R_{th}}}$$

Importante

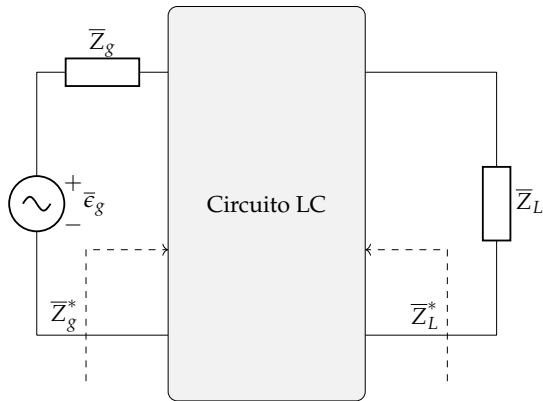
Esta expresión es **válida únicamente** para calcular la **máxima transferencia** de potencia

(no aplica para calcular la potencia disipada por una impedancia genérica \bar{Z}_L , únicamente aplica para $\bar{Z}_L = \bar{Z}_{th}^*$)

- ① Teoremas de linealidad
- ② Teoremas de reciprocidad y sustitución
- ③ Teorema de compensación
- ④ Teorema de Millman
- ⑤ Teorema de Rosen
- ⑥ Teoremas de Thévenin y Norton
- ⑦ Teorema de Everitt

Tª de Everitt

Si a la **entrada** de un **circuito no disipativo** (sin resistencias, **circuito LC**) existe **adaptación de impedancias**, a la **salida** de este circuito **también** hay adaptación



Dado que $\bar{Z}_L \neq \bar{Z}_g^*$, el circuito LC es una **red adaptadora**

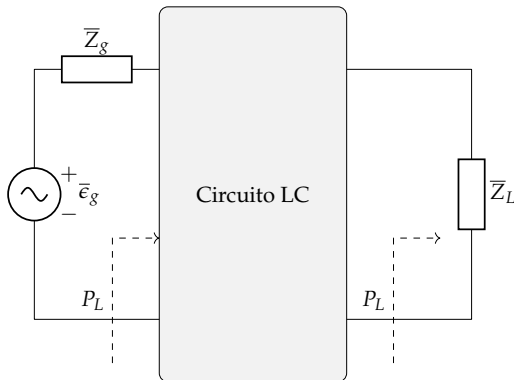
Se da entonces máxima transferencia de potencia:

- ▶ A la **derecha** de \bar{Z}_g se ve \bar{Z}_g^*
- ▶ A la **izquierda** de \bar{Z}_L se ve \bar{Z}_L^*

Demostración

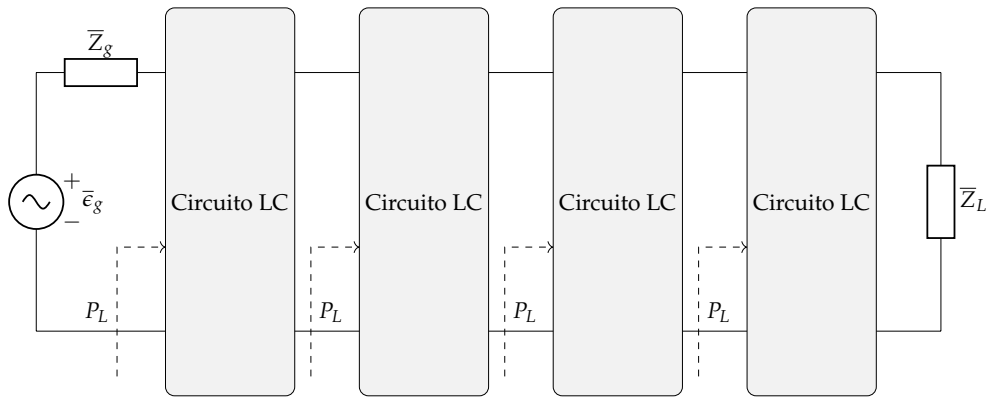
Dado que el **circuito LC no consume potencia activa**, la potencia a la entrada es la potencia consumida por la carga

Por tanto, **si la potencia entregada por el generador es máxima** (adaptación en la entrada), **también lo será la potencia en la carga** (adaptación a la salida)



Redes en cascada

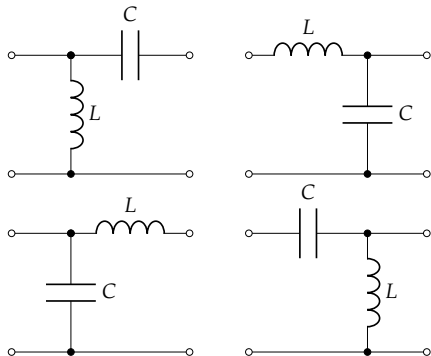
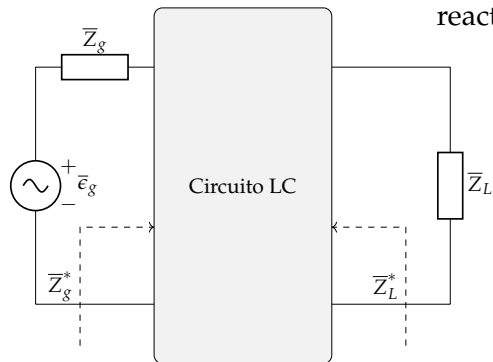
Si en una cascada de circuitos LC existe adaptación de impedancias en un punto de la cadena, existirá **adaptación en cualquier punto** de la misma



Aplicación: diseño de redes adaptadoras

El objetivo es conectar un circuito activo (representado por su equivalente de Thévenin) a una carga, de forma que **se consiga la máxima transferencia de potencia**

Emplearemos **redes en 'L'** compuestas por dos elementos reactivos:



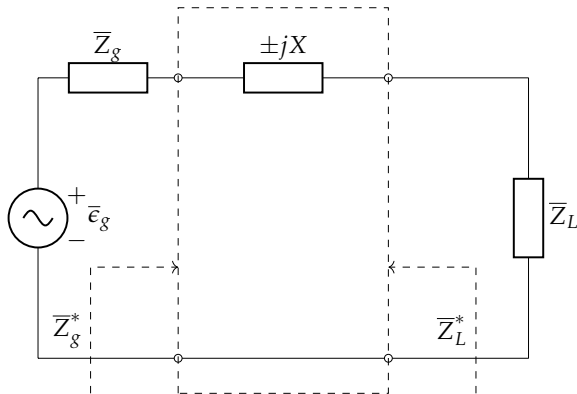
Esta adaptación es selectiva: **si varía la frecuencia, no habrá adaptación**

Diseño de redes adaptadoras

3 casos posibles:

- $R_g = R_L$
- $R_g > R_L$
- $R_g < R_L$

Caso $R_g = R_L$:



Se conecta una **reactancia en serie**, de forma que la impedancia a la derecha del generador sea igual a \bar{Z}_g^*

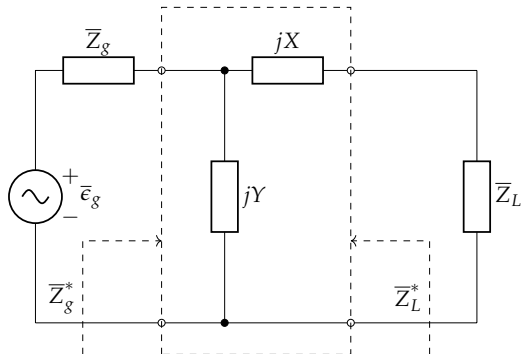
(el cálculo es trivial)

Diseño de redes adaptadoras: casos $R_g > R_L$ y $R_g < R_L$

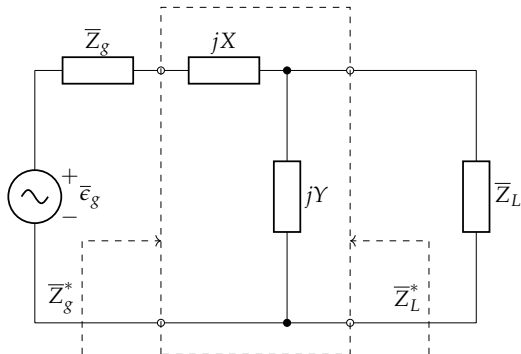
La red debe diseñarse con el **elemento paralelo** en el **extremo de la impedancia** que tenga **parte real mayor**

(ya que al conectar impedancias en paralelo, la impedancia resultante es menor)

Caso $R_g > R_L$



Caso $R_g < R_L$



Diseño de redes adaptadoras: $R_g > R_L$

Condición:

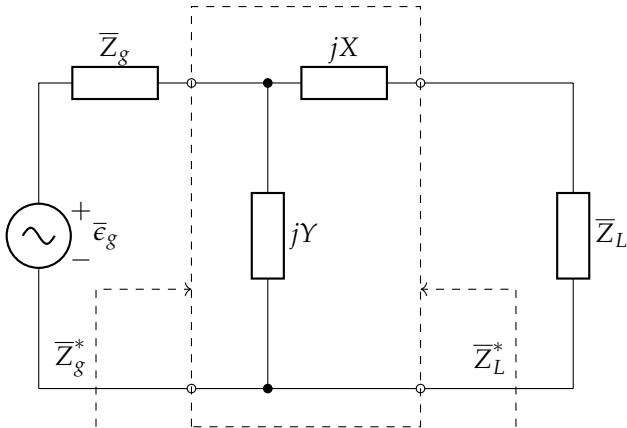
$$\bar{Z}_L^* = jX + (jY \parallel \bar{Z}_g)$$

Ecuaciones:

$$R_L = \Re \left(\frac{jY \cdot \bar{Z}_g}{jY + \bar{Z}_g} \right)$$

$$X_L = -X - \Im \left(\frac{jY \cdot \bar{Z}_g}{jY + \bar{Z}_g} \right)$$

Debe resolverse el
sistema de ecs. para
hallar los valores de X e Y



Diseño de redes adaptadoras: $R_L > R_g$

Condición:

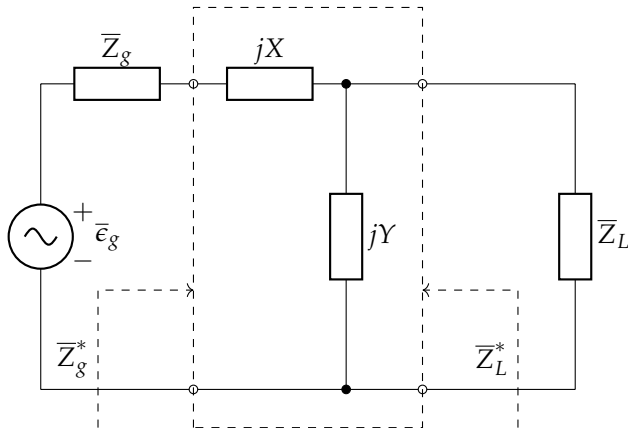
$$\bar{Z}_g^* = jX + (jY \parallel \bar{Z}_L)$$

Ecuaciones:

$$R_g = \Re \left(\frac{jY \cdot \bar{Z}_L}{jY + \bar{Z}_L} \right)$$

$$X_g = -X - \Im \left(\frac{jY \cdot \bar{Z}_L}{jY + \bar{Z}_L} \right)$$

Debe resolverse el **sistema de ecs.** para hallar los valores de X e Y

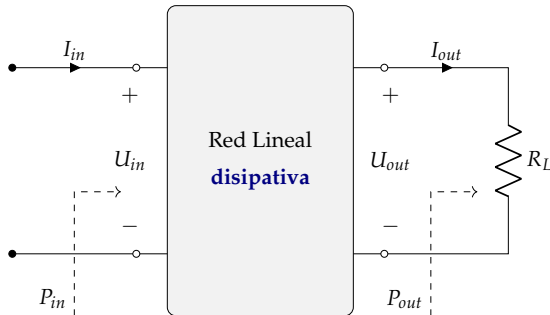


Circuitos disipativos: pérdidas de transmisión e inserción

El **decibelio** (dB) se emplea para la **ratio** de dos magnitudes con una **diferencia** de varios **órdenes de magnitud**: usar **escala logarítmica** proporciona un número más manejable

Decibelio: potencias

$$\text{Ganancia de potencia} \rightarrow G_{dB} = 10 \log G = 10 \log \frac{P_{out}}{P_{in}}$$

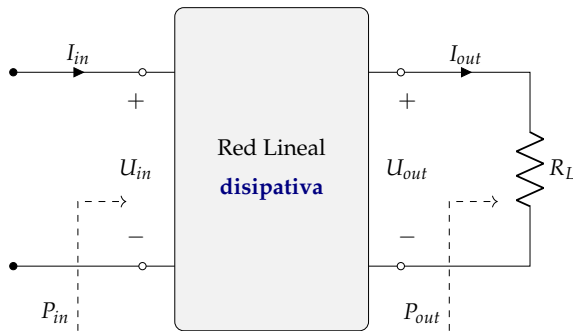


- ▶ Si $P_{out} > P_{in}$, el cociente es > 1 , el **logaritmo** resultará **positivo**
- ▶ Si $P_{out} < P_{in}$, el cociente es < 1 , el **logaritmo** resultará **negativo**

Suponiendo $R_{in} = R_{out}$, se emplea para medir la ganancia de tensión/corriente:

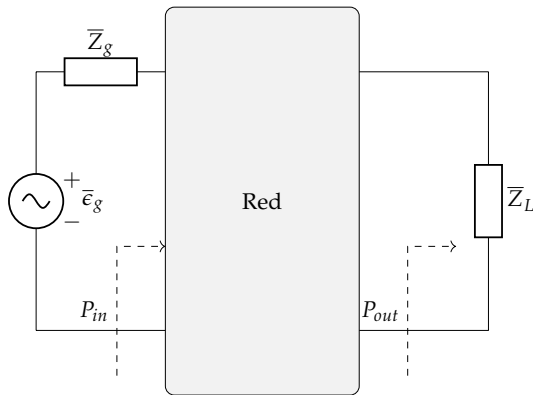
Decibelio: tensiones

$$G_{dB} = 10 \log \frac{P_{out}}{P_{in}} = 10 \log \frac{U_{out}^2 / R_{out}}{U_{in}^2 / R_{in}} = 20 \log \frac{U_{out}}{U_{in}}$$



Pérdidas de transmisión

Las **pérdidas de transmisión**, α_T , asociadas a una red miden la relación entre la potencia de entrada, P_{in} , y la potencia de salida, P_{out}

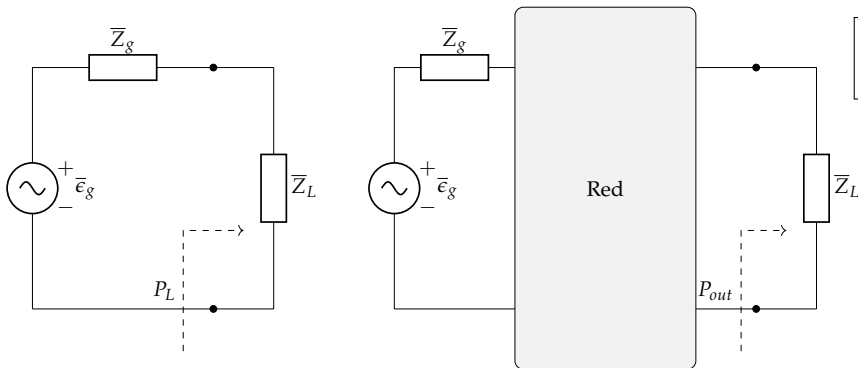


$$\alpha_T = 10 \log \frac{P_{in}}{P_{out}} \text{ dB}$$

Si la red es no disipativa (LC):
 $P_{in} = P_{out} \rightarrow \alpha_T = 0 \text{ dB}$

Pérdidas de inserción

Las **pérdidas de inserción**, α_I , asociadas a una red miden la relación entre la potencia entregada a la carga sin la red, P_L , y la potencia entregada a la carga con la red insertada



$$\alpha_I = 10 \log \frac{P_L}{P_{out}} \text{ dB}$$

En el caso de una red adaptadora:
 $P_{out} > P_L \rightarrow \alpha_I < 0$