Teoremas Generales

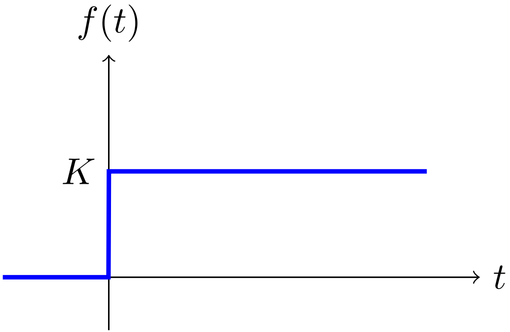
Teoría de Circuitos

Oscar Perpiñán Lamigueiro

Forma de Onda

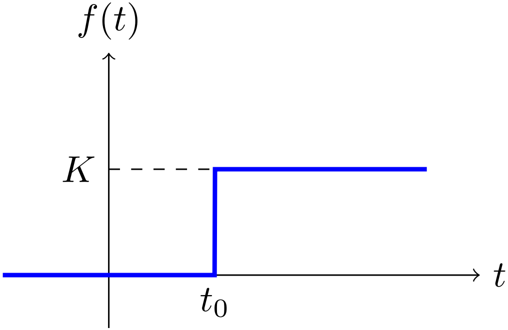
- La salida de los generadores (de tensión o de corriente) son funciones que pueden variar con el tiempo.
- La dependencia funcional $u = u(t)$ o $i = i(t)$ se denomina forma de onda.

Escalón



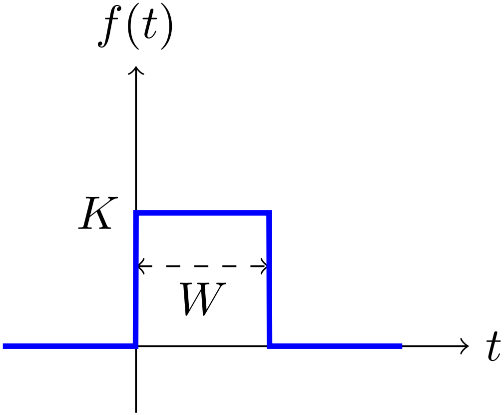
$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ K & t \geq 0 \end{cases}$$

Escalón desplazado



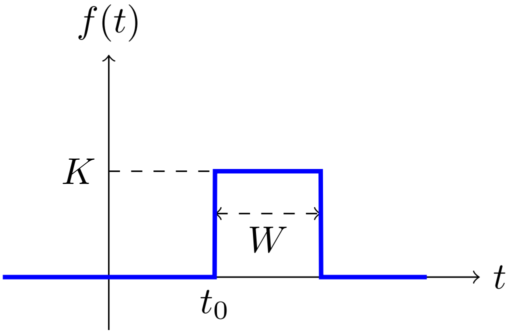
$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ K & t \geq t_0 \end{cases}$$

Pulso



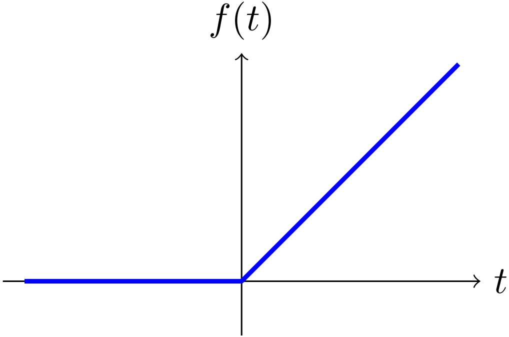
$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ K & 0 \leq t \leq W \end{cases}$$

Pulso desplazado



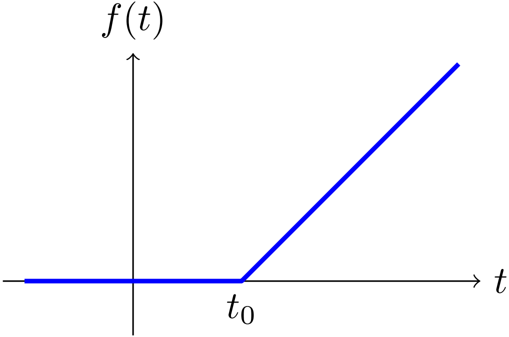
$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ K & t_0 \leq t \leq t_0 + W \end{cases}$$

Rampa



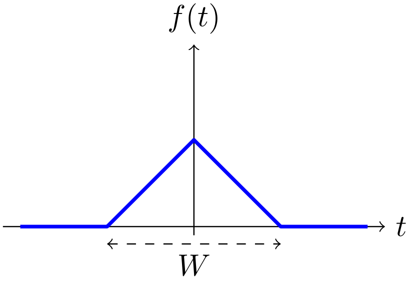
$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ m \cdot t & t \geq 0 \end{cases}$$

Rampa desplazada



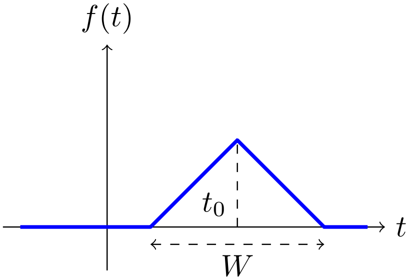
$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ m \cdot (t - t_0) & t \geq t_0 \end{cases}$$

Triangular



$$
f(t) = \begin{cases} 0 & t < -W/2 \\ m \cdot (t + W/2) & -W/2 \leq t \leq 0 \\ -m \cdot (t - W/2) & 0 \leq t \leq W/2 \\ 0 & t > W/2 \end{cases}
$$

Triangular desplazada



$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < t_0 - W/2 \\ m \cdot [t - (t_0 - W/2)] & t_0 - W/2 \leq t \leq t_0 \\ -m \cdot [t - (t_0 + W/2)] & t_0 \leq t \leq t_0 + W/2 \\ 0 & t > t_0 + W/2 \end{cases}$$

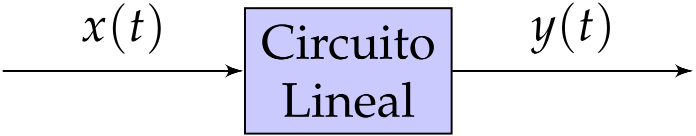
Circuitos Lineales

- Un circuito eléctrico es lineal si los elementos pasivos y activos que incluye son lineales.
- Un **elemento pasivo** es lineal si la relación entre la tensión entre sus terminales y la corriente que lo recorre es lineal: **resistencias, condensadores y bobinas**.
- Una **fuente dependiente** es lineal si su salida (tensión o corriente) tiene una relación lineal con la magnitud del circuito de la que depende.
- Un circuito lineal tiene dos propiedades:
  - Homogeneidad o **proporcionalidad**.
  - Aditividad o **superposición**.

Homogeneidad o Proporcionalidad

Sea $y(t)$ la respuesta de un **circuito lineal** a una excitación $x(t)$.

Si la excitación es multiplicada por una **constante**, $K \cdot x(t)$, la respuesta del circuito será modificada por la misma constante, $K \cdot y(t)$.



Análisis de un circuito mediante proporcionalidad

¿Qué excitación debo aplicar a un circuito para obtener una determinada respuesta?

- Aplicamos una excitación de valor unidad.
- Resolvemos el circuito, obteniendo la respuesta del circuito a la excitación unidad.
- Hallamos la constante de proporcionalidad entre la respuesta obtenida y la respuesta deseada.
- La excitación que se debe aplicar es esta constante de proporcionalidad.

Análisis de un circuito mediante proporcionalidad

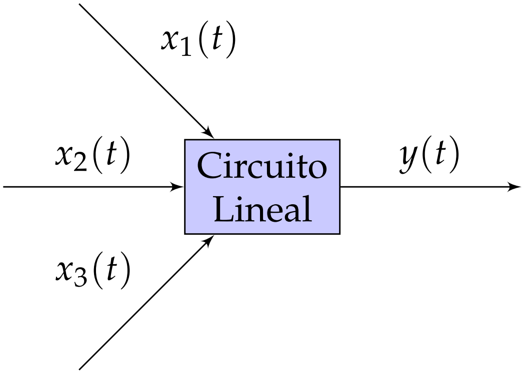
¿Qué respuesta proporciona un circuito ante una determinada excitación?

- Suponemos una respuesta de valor unidad.
- Resolvemos el circuito a la inversa, obteniendo la excitación que provoca la respuesta unidad.
- Hallamos la constante de proporcionalidad entre la excitación obtenida y la excitación deseada.
- La respuesta que entrega el circuito es esta constante de proporcionalidad (puede ser un número complejo).

Aditividad o Superposición

La respuesta de un **circuito lineal** a varias fuentes de excitación actuando simultáneamente es igual a la suma de las respuestas que se tendrían cuando actuase cada una de ellas por separado

$$y(t) = \sum_i y_i(t)$$



Análisis de un circuito mediante superposición

Procedimiento

1. Se apagan todas las fuentes **independientes** del circuito menos una.
   - Las fuentes de tensión se sustituyen por un cortocircuito ($U = 0$).
   - Las fuentes de corriente se sustituyen por un circuito abierto ($I = 0$).
   - Las fuentes **dependientes no** se modifican.
2. Se analiza el circuito, obteniendo la respuesta individual a la fuente que permanece activa.
3. Se repite este procedimiento para cada una de las fuentes **independientes** del circuito.
4. La respuesta total del circuito es la suma de las respuestas individuales.

Observaciones

- **Siempre** hay que aplicar este método cuando en un circuito conviven fuentes de **diferente frecuencia** (o fuentes de corriente continua y corriente alterna).
- En el caso de fuentes de corriente alterna **sinusoidal**, la respuesta debe expresarse en el **dominio del tiempo**. **No** se pueden **sumar** los **fasores** que corresponden a **frecuencias diferentes**.
- En el primer paso del procedimiento, se pueden agrupar las fuentes que funcionan a la misma frecuencia y calcular la respuesta del circuito en esa frecuencia.

Potencia

El principio de superposición aplica a tensiones y corrientes, pero **no** a potencias.
Supongamos $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$:

$$
\begin{aligned}
p(t) &= R \cdot i^2(t) = \\
&= R \cdot (i_1(t) + i_2(t))^2 = \\
&= R \cdot (i_1^2(t) + i_2^2(t) + 2 \cdot i_1(t) \cdot i_2(t)) \\
p(t) &\neq p_1(t) + p_2(t)
\end{aligned}
$$

Potencia

- Cuando las señales son **ortogonales en un período*** se pueden sumar las potencias **medias** de cada circuito.

$$P = \sum_i P_i$$

- Ejemplos de señales ortogonales: sinusoidales con diferente frecuencia, una sinusoide con una continua, ...

---

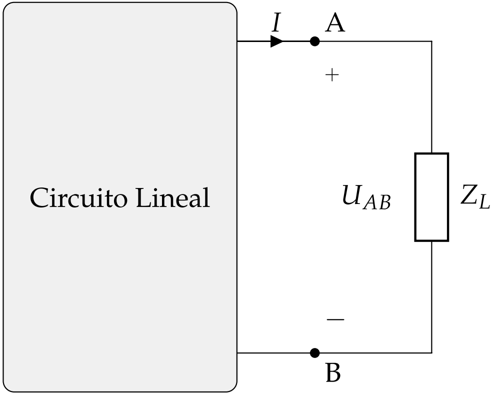
*Dos señales son ortogonales si cumplen la siguiente ecuación:

$$< f_1, f_2 >_T = \int_T f_1(t) \cdot f_2(t) dt = 0$$

1. Formas de Onda
2. Teoremas de Linealidad
3. Teoremas de Thévenin/Norton
4. Teorema de máxima transferencia de potencia

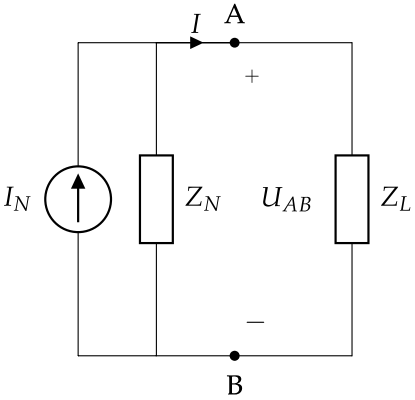
Thévenin

Cualquier **red lineal** compuesta por elementos activos y pasivos puede sustituirse, desde el punto de vista de sus terminales externos AB, por una **fuente de tensión** (generador de Thévenin, ϵ_{th}) en **serie** con una impedancia (impedancia de Thévenin, Z_{th}).

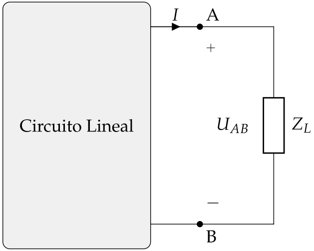


Norton

Cualquier **red lineal** compuesta por elementos activos y pasivos puede sustituirse, desde el punto de vista de sus terminales externos AB, por una **fuente de corriente** (generador de Norton, I_N) en **paralelo** con una impedancia (impedancia de Norton, Z_N).



Cálculo del equivalente de Thévenin



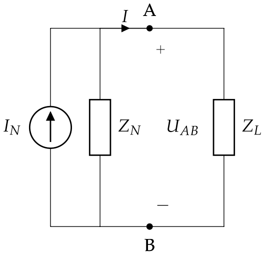
- Circuito Abierto ($Z_L \to \infty, \quad U_{AB} = U_{oc}$)

$$\boxed{\epsilon_{th} = U_{oc}}$$

- Cortocircuito ($Z_L = 0, \quad I = I_{sc}$)

$$\boxed{Z_{th} = \frac{\epsilon_{th}}{I_{sc}} = \frac{U_{oc}}{I_{sc}}}$$

Cálculo del equivalente de Norton



- Cortocircuito ($Z_L = 0, \quad I = I_{sc}$)

$$\boxed{I_N = I_{sc}}$$

- Circuito Abierto ($Z_L \to \infty, \quad U_{AB} = U_{oc}$)

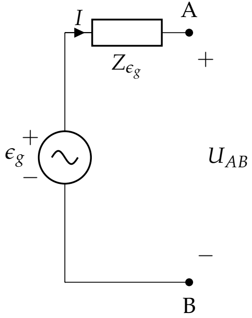
$$\boxed{Z_N = \frac{U_{oc}}{I_N} = \frac{U_{oc}}{I_{sc}}}$$

Observaciones

- Cálculo de la impedancia:
  - Si el circuito **no** contiene fuentes dependientes, se puede realizar **apagando** todos los **generadores** y obteniendo la impedancia equivalente.
  - Si el circuito contiene fuentes dependientes, es necesario conectar un **generador de prueba** a la salida del circuito y obtener la relación entre la tensión y corriente de este generador.
- Gracias a la equivalencia de fuentes, una vez obtenido uno de los equivalentes se puede obtener el otro mediante una transformación.

Recordatorio: equivalencia de fuentes

Sólo es posible establecer equivalencia entre **fuentes reales**.

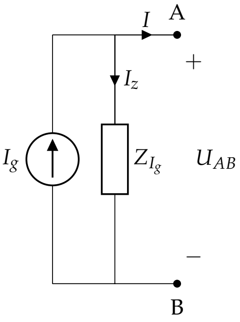


$$\overline{U}_{AB} = \overline{\epsilon}_g - \overline{Z}_{\epsilon_g} \cdot \overline{I}$$

$$\overline{Z}_g = \overline{Z}_{\epsilon_g} = \overline{Z}_{I_g}$$

$$\overline{\epsilon}_g = \overline{Z}_g \cdot \overline{I}_g$$

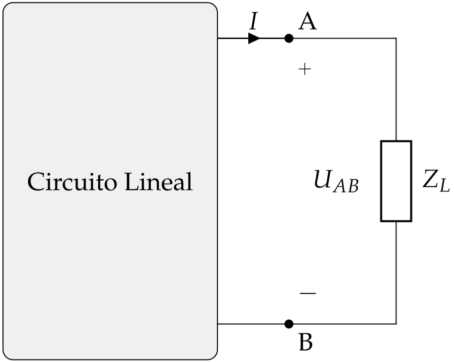
$$\overline{I}_g = \frac{\overline{\epsilon}_g}{\overline{Z}_g}$$



$$\overline{I} = \overline{I}_g - \frac{\overline{U}_{AB}}{\overline{Z}_{I_g}}$$

Planteamiento

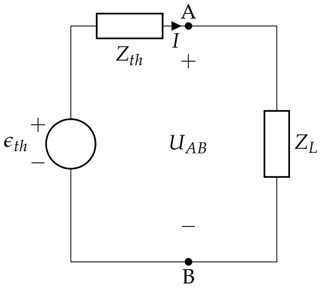
Sea el circuito lineal de la figura. ¿Qué impedancia Z_L hay que conectar en los terminales AB para que el circuito entregue la máxima potencia disponible?



Resolvemos esta pregunta mediante el generador equivalente de Thévenin.

Ecuaciones

Calculamos la potencia activa en la impedancia de carga Z_L:



$$\overline{Z}_{th} = R_{th} + jX_{th}$$
$$\overline{Z}_L = R_L + jX_L$$

$$\bar{I} = \frac{\bar{\epsilon}_{th}}{\overline{Z}_{th} + \overline{Z}_L}$$
$$P_L = I^2 \cdot R_L$$
$$\boxed{P_L = \frac{\epsilon_{th}^2}{|\overline{Z}_{th} + \overline{Z}_L|^2} \cdot R_L}$$

Las condiciones de máximo son:

$$\boxed{\frac{\partial P_L}{\partial X_L} = 0 \qquad \frac{\partial P_L}{\partial R_L} = 0}$$

Reactancia

A partir de la expresión de potencia en la carga…

$$P_L = \frac{\epsilon_{th}^2}{|\overline{Z}_{th} + \overline{Z}_L|^2} \cdot R_L$$

calculamos la derivada parcial respecto de la reactancia:

$$\frac{\partial P_L}{\partial X_L} = \epsilon_{th}^2 \cdot R_L \cdot \left[\frac{-1}{\left((R_L + R_{th})^2 + (X_L + X_{th})^2\right)^2} \cdot 2 \cdot (X_L + X_{th}) \right]$$

Aplicamos la condición de máximo y obtenemos un resultado parcial:

$$\frac{\partial P_L}{\partial X_L} = 0 \Rightarrow \boxed{X_L = -X_{th}}$$

Resistencia

Simplificamos la expresión de la potencia teniendo en cuenta el resultado anterior ($X_L = -X_{th}$):

$$P_L = \frac{\epsilon_{th}^2}{(R_{th} + R_L)^2} \cdot R_L$$

Calculamos la derivada parcial respecto de la resistencia:

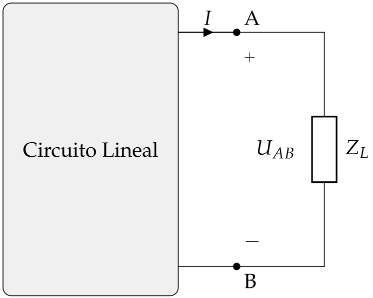
$$\begin{aligned}\frac{\partial P_L}{\partial R_L} &= \epsilon_{th}^2 \cdot \left[\frac{1}{(R_L + R_{th})^2} - 2 \cdot \frac{R_L}{(R_L + R_{th})^3}\right] \\ &= \frac{\epsilon_{th}^2 \cdot (R_{th} - R_L)}{(R_L + R_{th})^3}\end{aligned}$$

Nuevamente, aplicamos la condición de máximo y obtenemos la resistencia:

$$\frac{\partial P_L}{\partial R_L} = 0 \Rightarrow \boxed{R_L = R_{th}}$$

Impedancia de Carga

Dado un circuito lineal (del que podemos calcular su equivalente de Thévenin) . . .

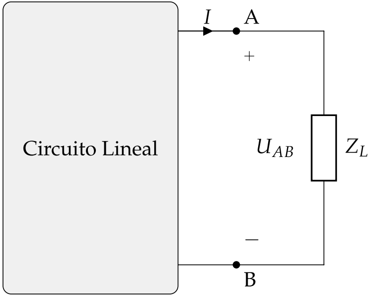


. . . la impedancia de carga que hay que conectar entre sus terminales AB para obtener la máxima potencia disponible es:

$$\boxed{\overline{Z}_L = \overline{Z}_{th}^*}$$

Máxima potencia disponible}

La máxima potencia disponible en la carga es:



$$\left.\begin{array}{r}\overline{Z}_L = \overline{Z}_{th}^{*} \\ P_L = \frac{\epsilon_{th}^2}{|\overline{Z}_{th}+\overline{Z}_L|^2}\cdot R_L\end{array}\right\} \rightarrow \boxed{P_L = \frac{\epsilon_{th}^2}{4R_{th}}}$$