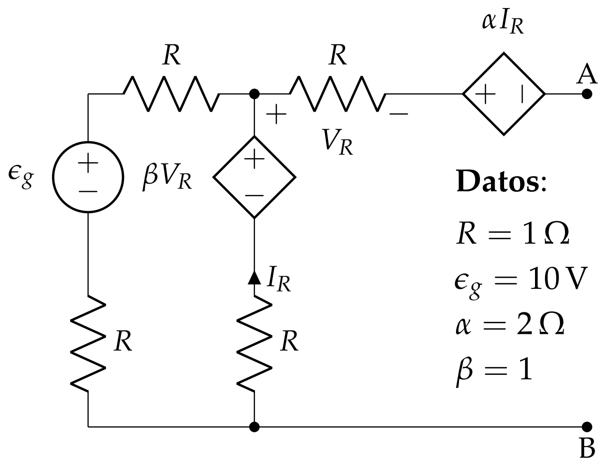
Ejercicio 20 de la colección de problemas

Enunciado:

En el circuito de la figura, determinar:

1. La corriente del generador equivalente de Norton respecto de A y B, I_N
2. La resistencia del generador equivalente de Norton respecto de A y B, R_N
3. La resistencia de carga que se debe conectar entre A y B para conseguir la máxima potencia disponible, y el valor de esta potencia



Datos:

$R = 1\,\Omega$

$\epsilon_g = 10\,\text{V}$

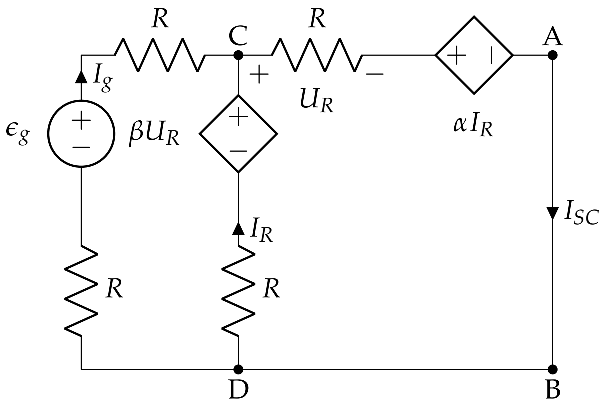
$\alpha = 2\,\Omega$

$\beta = 1$

Solución:

Para calcular el equivalente de Norton, cortocircuitamos la salida del circuito.

Para calcular I_{sc}, podríamos aplicar el método de las mallas, pero la presencia de fuentes dependientes hace que su aplicación no sea directa. Es más sencillo aplicar 1LK y 2LK para obtener las siguientes ecuaciones:



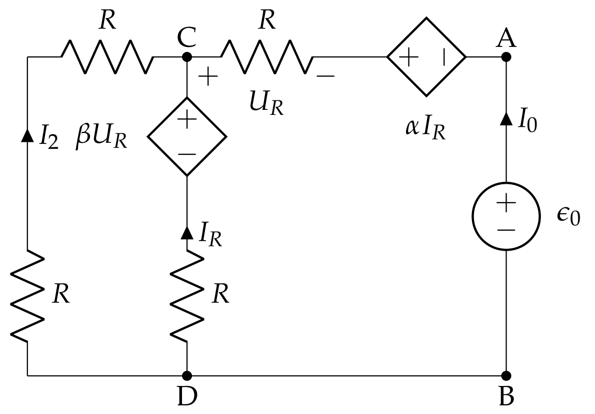
$$I_g + I_R = I_{sc} \tag{1}$$
$$U_{CD} = \epsilon_g - 2 \cdot R \cdot I_g \tag{2}$$
$$U_{CD} = \beta \cdot U_R - I_R \cdot R \tag{3}$$
$$U_{CD} = U_R + \alpha \cdot I_R \tag{4}$$
$$U_R = R \cdot I_{sc} \tag{5}$$

(5 ecs. y 5 incógnitas: $I_g, I_R, I_{sc}, U_{CD}, U_R$)

Sustituyendo (5) en (3) y (4), y combinando estas dos, tenemos que $I_R = 0$, luego de (1) obtenemos $I_g = I_{sc}$. Sustituyendo este resultado y $U_{CD} = R \cdot I_{sc}$ (de la ec. 4) en (2), tenemos $R \cdot I_{sc} = \epsilon_g - 2R \cdot I_{sc}$, que finalmente resulta en:

$$I_{sc} = \boxed{\frac{10}{3}\,\text{A} = I_N}$$

Para obtener la resistencia equivalente Norton, apagamos la fuente independiente (la cortocircuitamos) y conectamos un generador de prueba en AB:



$$I_2 + I_R + I_0 = 0 \quad (6)$$
$$U_{CD} = U_R + \alpha \cdot I_R + \epsilon_0 \quad (7)$$
$$U_{CD} = \beta \cdot U_R - I_R \cdot R \quad (8)$$
$$U_{CD} = -2R \cdot I_2 \quad (9)$$
$$U_R = -I_0 \cdot R \quad (10)$$

(5 ecs. y 5 incógnitas: $I_2, I_R, I_0, U_{CD}, U_R$)

Sustituyendo (10) en (8) y (6) en (9), tenemos:

$$-\beta \cdot I_0 \cdot R - I_R \cdot R = -2R \cdot (-I_R - I_0) \quad \rightarrow \quad -I_0 - I_R = 2 \cdot (I_R + I_0) \quad \rightarrow \quad I_R = -I_0$$

donde se ha usado $R = 1\,\Omega$ y $\beta = 1$.

Ahora, combinando (7) y (8):

$$-I_0 \cdot R + \alpha \cdot I_R + \epsilon_0 = -\beta \cdot I_0 \cdot R - I_R \cdot R \quad \rightarrow \quad -I_0 + 2I_R + \epsilon_0 = -I_0 - I_R \quad \rightarrow \quad \frac{\epsilon_0}{I_0} = 3\,\Omega$$

donde se ha usado $R = 1\,\Omega$, $\beta = 1$ y $\alpha = 2\,\Omega$, además del resultado ya obtenido de $I_R = -I_0$.

Luego:

$$R_N = \frac{\epsilon_0}{I_0} = \boxed{3\,\Omega}$$

Por tanto, hay que conectar una $\boxed{R_L = 3\,\Omega}$ para obtener la máxima potencia disponible, siendo esta máxima potencia de:

$$P_L = \frac{\epsilon_{th}^2}{4 \cdot R_L} = \frac{(I_N \cdot R_N)^2}{4 \cdot R_L} = \boxed{\frac{25}{3}\mathrm{W}}$$

Una opción alternativa para resolver el problema es aplicar el método de las mallas dos veces. Definiendo corrientes de malla en sentido horario en el primer ciruito dibujado para el método de resolución anterior, tenemos:

$$\begin{bmatrix} 3R & -R \\ -R & 2R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_g - \beta \cdot U_R \\ \beta \cdot U_R - \alpha \cdot I_R \end{bmatrix}$$

Dado que aparecen incógnitas en el lado derecho del sistema de ecuaciones, expresamos los términos de los generadores dependientes en función de las corrientes de malla:

$$U_R = I_b \cdot R$$
$$I_R = I_b - I_a$$

Reorganizando el sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 3R & -R + \beta \cdot R \\ -R - \alpha & 2R + \alpha - \beta \cdot R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_g \\ 0 \end{bmatrix}$$

(observación: todos los elementos de la matriz de coeficientes tienen unidades de resistencia)

Resolviendo, se obtiene la misma solución que con el método de resolución anterior:

$$I_a = \frac{10}{3}\,\text{A}$$

$$I_b = \frac{10}{3}\,\text{A} = I_{sc}$$

Para obtener la resistencia Norton, podemos aplicar mallas en el segundo circuito dibujado para el método de resolución anterior. Definiendo corrientes de malla en sentido horario:

$$\begin{bmatrix} 3R & -R \\ -R & 2R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_a' \\ I_b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta \cdot U_R \\ \beta \cdot U_R - \alpha \cdot I_R - \epsilon_0 \end{bmatrix}$$

Reorganizando términos, de la misma forma que hemos hecho en el sistema anterior:

$$\begin{bmatrix} 3R & -R + \beta \cdot R \\ -R - \alpha & 2R + \alpha - \beta \cdot R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_a' \\ I_b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\epsilon_0 \end{bmatrix}$$

Para poder resolver el sistema de ecs., es necesario asignar un valor a ϵ_0. En la práctica, esto equivale a elegir un valor de fuente de tensión que se conectaría en terminales A-B del circuito, tras lo cual mediríamos la corriente I_0 que esta aportaría.

Por ejemplo, elegimos $\epsilon_0 = 1\,\text{V}$ y resolvemos:

$$I_a' = 0$$

$$I_b' = -\frac{1}{3}\,\text{A} = -I_0$$

Luego $R_N = \dfrac{\epsilon_0}{I_0} = \boxed{3\,\Omega}$, mismo resultado que con el método de resolución anterior.