

# Introducción al régimen transitorio

Teoría de Circuitos

Autor: Luis Badesa Bernardo

(basado en las diapositivas de Óscar Perpiñán Lamigueiro)

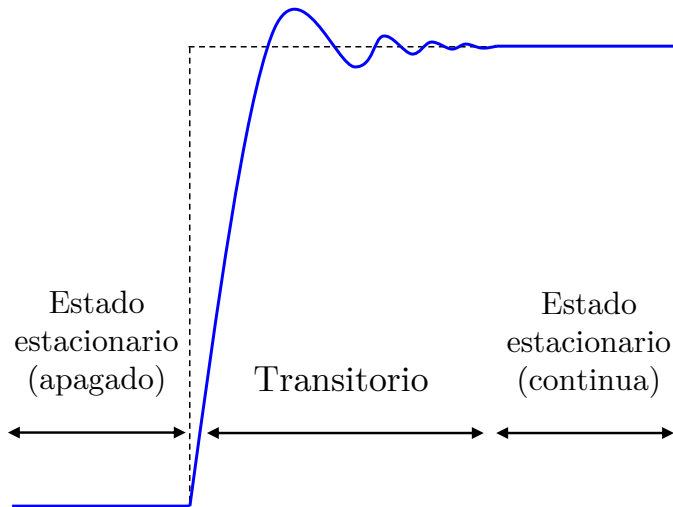
## ① Introducción

## ② Circuitos de primer orden

## ③ Circuitos de segundo orden

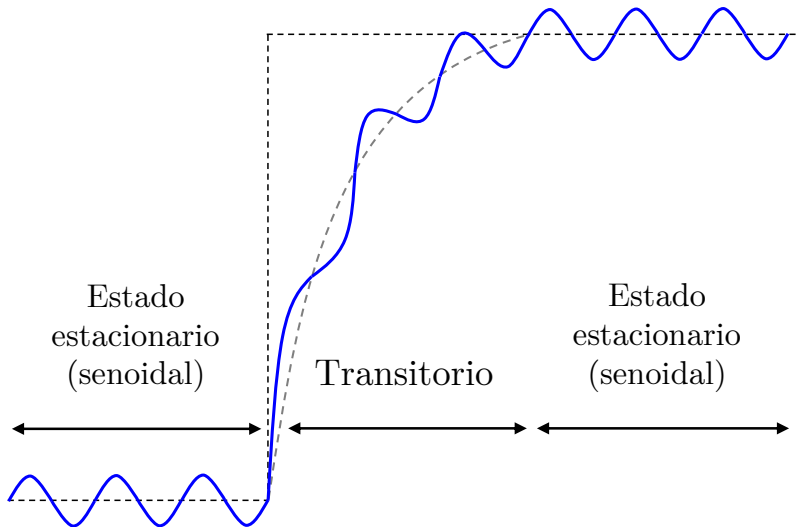
# ¿Qué es el régimen transitorio?

- Ejemplo: **encendido** de circuito de **continua** (con transitorio *subamortiguado*)



## ¿Qué es el régimen transitorio?

- Ejemplo: **aumento de voltaje** en circuito de **alterna** (con transitorio *sobreamortiguado*)



# Régimen transitorio *vs.* estado estacionario

## Estado estacionario o “régimen permanente”

- ▶ Circuito **estabilizado**
- ▶ Las **tensiones** y **corrientes** de un circuito son **constantes** (CC) o **periódicas** (CA)
- ▶ Modelado matemático: **ecuaciones algebraicas**

## Régimen transitorio

- ▶ **Cambio** en las **condiciones** de funcionamiento de un **circuito**:  
encendido o apagado de fuentes, o cambio en las cargas → **interruptores**
- ▶ Variación de  $u(t)$  e  $i(t)$  hasta alcanzar nuevos valores
- ▶ Modelado matemático: **ecuaciones diferenciales**

# Acumulación de energía

## Estado estacionario

- ▶ **Energía acumulada** en **bobinas** y **condensadores**

## Régimen transitorio

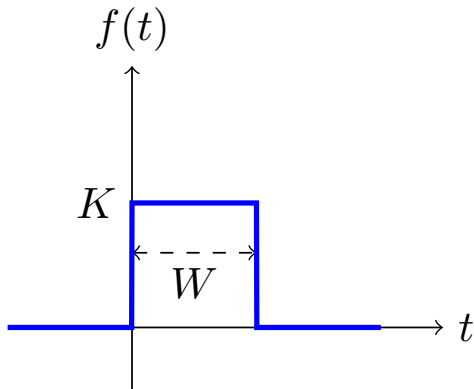
- ▶ **Redistribución** y **disipación** de energía acumulada
- ▶ La redistribución de energía **no** es **inmediata**  
**Duración corta** (típicamente  $\mu\text{s}$ ) pero superior a 0 s, dependiendo de **relación entre acumulación** (en bobinas y condensadores) y **disipación** (en resistencias)

## Consigna habitual: función escalón



$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ K & t \geq 0 \end{cases}$$

Consigna habitual: pulso rectangular



$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ K & 0 \leq t \leq W \\ 0 & t > W \end{cases}$$



# Ecuaciones diferenciales

Al aplicar **Kirchhoff** a un circuito lineal obtenemos ecuaciones diferenciales

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L(\tau) d\tau$$

$$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad u_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(\tau) d\tau$$

Por ejemplo, la ecuación de un circuito **RLC serie** será de la forma:

$$L \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + R \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} i(t) = \frac{dE(t)}{dt}$$

(EDO lineal de segundo orden, obtenida aplicando 2LK al circuito)

# Respuesta de un circuito lineal a una perturbación o consigna

La **solución** de la ecuación diferencial del circuito para  $t \geq 0$  (i.e., la **respuesta del circuito** a la perturbación) tiene **dos componentes**<sup>\*</sup>:

$$f(t) = f_n(t) + f_\infty(t)$$

(donde  $f(t)$  puede referirse a tensión o corriente)

- ▶ Respuesta **natural** o propia,  $f_n(t)$
- ▶ Respuesta **forzada** o particular,  $f_\infty(t)$

---

<sup>\*</sup>Esta es la solución general a una Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO) lineal de orden arbitrario. Para más detalles, consultar, e.g., libro [Zill](#)

## Respuesta *natural*, $f_n(t)$

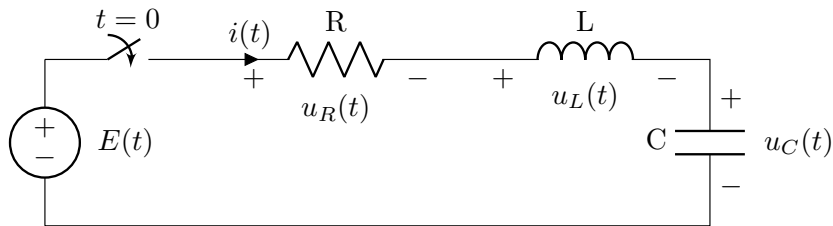
- ▶ Respuesta **natural** o propia,  $f_n(t)$
- ▶ Respuesta **sin fuentes de alimentación** → solución de la **ec. homogénea**  
Volviendo al ejemplo del **circuito RLC**, la ec. homogénea sería:

$$L \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + R \frac{d i(t)}{dt} + \frac{1}{C} i(t) = \cancel{\frac{d E(t)}{dt}} \xrightarrow{0}$$

- ▶  $f_n(t)$  queda determinada por la **energía almacenada previamente** (antes de conectar las fuentes) y por la **topología del circuito** (conexiones entre elementos)
- ▶ Contiene constantes de integración → necesario conocer el **estado del circuito** en el instante que da origen al transitorio (*i.e.*, las condiciones iniciales)

## Respuesta *forzada*, $f_{\infty}(t)$

- Respuesta **forzada** o particular,  $f_{\infty}(t)$
- Es una **solución particular** a la ecuación diferencial **no homogénea**  $\rightarrow$  determinada por las fuentes existentes en  $t > 0$ ,  $E(t)$  en el ejemplo RLC



- Modela el estado del circuito **tras un tiempo** suficientemente **largo** después de la perturbación (régimen permanente), ya que la respuesta natural se extingue

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f_n(t) = 0 \quad (\text{demostración más adelante})$$

# Condiciones iniciales

- ▶ El **instante del cambio** se representa habitualmente con  $t = 0$ 
  - ▶  $t = 0^- \rightarrow$  tiempo inmediatamente **anterior** al cambio
  - ▶  $t = 0^+ \rightarrow$  tiempo inmediatamente **posterior** al cambio
- ▶ Las **condiciones iniciales** son el estado del circuito en  $t = 0$ 
  - ▶ Se calculan con las **energías almacenadas** en bobinas y condensadores en  $t = 0^-$
  - ▶ Se aplican a la **topología** del circuito en  $t = 0^+$
- ▶ Las cond. iniciales determinan las **ctes. de integración** de la respuesta **natural**,  $f_n(t)$

## Condiciones iniciales, resistencia

**No acumula energía** → sigue los cambios de forma instantánea

$$u(t) = R \cdot i(t)$$

(no aparece ninguna derivada en su ec. de definición)

## Condiciones iniciales, bobina

Para aplicar la **condición inicial** de la bobina (*i.e.*, **energía almacenada** en  $t = 0^-$ ) a la topología del circuito en  $t = 0^+$ , basta con considerar la **condición de continuidad**:

No son posibles tensiones infinitas ni corrientes infinitas

Según la ec. de definición de la bobina, la **corriente no puede variar de forma brusca** (implicaría tensión infinita):

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad \boxed{i_L(0^-) = i_L(0^+)}$$

Si la corriente cambiara de forma brusca (**función escalón**), su derivada sería infinita  $\rightarrow$   
 $\rightarrow$  la tensión en bornes sería infinita (**físicamente imposible**)

## Condiciones iniciales, condensador

Para aplicar la **condición inicial** del condensador (*i.e.*, **energía almacenada** en  $t = 0^-$ ) a la topología del circuito en  $t = 0^+$ , basta con considerar la **condición de continuidad**:

No son posibles tensiones infinitas ni corrientes infinitas

Según la ec. de definición del condensador, la **tensión no puede variar de forma brusca** (implicaría corriente infinita):

$$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad \boxed{u_C(0^-) = u_C(0^+)}$$

Si la tensión cambiara de forma brusca (**función escalón**), su derivada sería infinita  $\rightarrow$   
 $\rightarrow$  la corriente de carga o descarga sería infinita (**físicamente imposible**)



① Introducción

② Circuitos de primer orden

③ Circuitos de segundo orden

# Circuitos de primer orden: definición

- ▶ Circuitos compuestos por:
  - ▶ Un **único elemento de acumulación** (o varios elementos que pueden ser simplificados a un elemento equivalente, *e.g.*, bobinas en serie)
  - ▶ Y **resistencias**
- ▶ Modelados mediante una **ec. diferencial de 1<sup>er</sup> orden**:

$$a_1 \cdot f'(t) + a_0 \cdot f(t) = g(t)$$

ejemplo de **RL serie**:  $L \cdot i'(t) + R \cdot i(t) = E(t)$

# Circuitos de primer orden: resolución

- Modelados mediante una **ec. diferencial de 1<sup>er</sup> orden**:

$$a_1 \cdot f'(t) + a_0 \cdot f(t) = g(t)$$

ejemplo de **RL serie**:  $L \cdot i'(t) + R \cdot i(t) = E(t)$

- Resolución

- ① Cálculo de las **condiciones iniciales**, analizando el circuito en  $t = 0^-$
- ② **Respuesta natural**: análisis de la **ec. homogénea** ( $g(t) = 0$ , sin fuentes) en  $t > 0$

$$f_n(t) = K \cdot e^{-\frac{a_0}{a_1} t} \quad (\text{demostración a continuación})$$

- ③ **Respuesta forzada**,  $f_\infty(t)$ : análisis del circuito con fuentes en  $t > 0$

## ① Introducción

## ② Circuitos de primer orden

Circuito RL serie

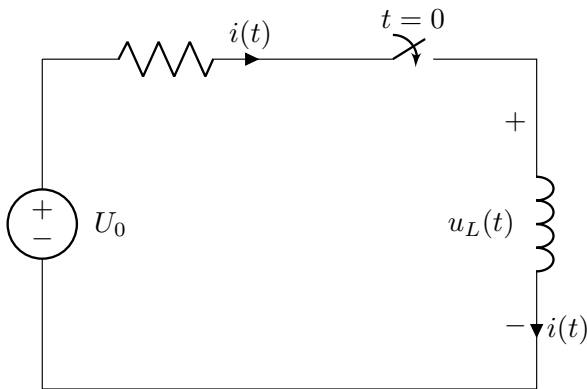
Circuito RC paralelo

Procedimiento general

## ③ Circuitos de segundo orden

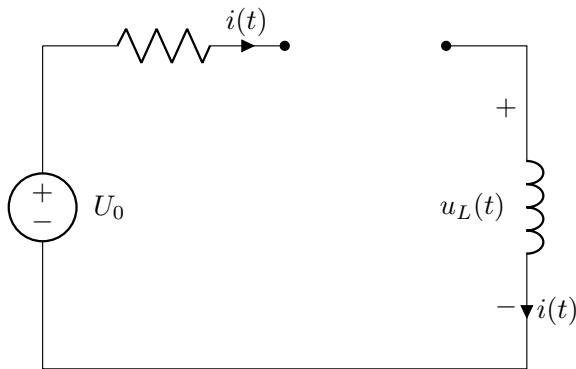
## Circuito RL serie básico

- ▶ En  $t < 0$  la fuente está desconectada
- ▶ En  $t = 0$  la fuente se conecta
- ▶ En  $t > 0$  la fuente alimenta el circuito RL (la bobina almacena energía)



## Condiciones iniciales

Analizando el circuito para  $t < 0 \dots$

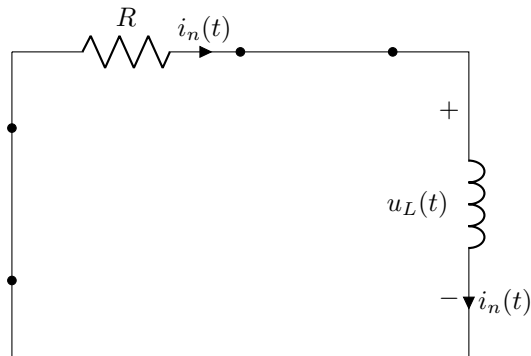


...obtenemos

$$i(0^-) = 0$$

## Respuesta natural, $f_n(t)$

Siguiendo los pasos de la diapositiva 19, analizamos el circuito para  $t > 0$  **apagando la fuente** (ec. homogénea):



$$\mathbf{2LK} \rightarrow u_R(t) + u_L(t) = 0$$

Sustituyendo las **ecs. de definición** de  $R$  y  $L$ :

$$R \cdot i_n(t) + L \frac{di_n(t)}{dt} = 0$$

Cuya **solución general** es:

$$i_n(t) = K \cdot e^{st}$$

(deducción en la siguiente diapositiva)

## Respuesta natural, $f_n(t)$

La ec. homogénea a resolver es:

$$L \frac{di_n(t)}{dt} + R \cdot i_n(t) = 0$$

Para resolverla, debe hallarse una función cuya **derivada sea igual a la propia función**, multiplicada por una constante  $\rightarrow$  la **función exponencial** cumple esta propiedad

**Sustituyendo** entonces  $i_n(t) = K \cdot e^{st}$  (donde **K** y **s** son **constantes** a determinar):

$$L \frac{d(K \cdot e^{st})}{dt} + R \cdot K \cdot e^{st} = 0 \quad \rightarrow \quad s \cdot K \cdot e^{st} + \frac{R}{L} \cdot K \cdot e^{st} = 0$$

Dividiendo a ambos lados por  $K \cdot e^{st}$  se obtiene la **ec. característica**:

$$s + \frac{R}{L} = 0 \quad \rightarrow \quad s = -\frac{R}{L} \quad \xrightarrow[\substack{\text{sustituyendo en} \\ i_n(t) = K \cdot e^{st}}]{} \quad \boxed{i_n(t) = K \cdot e^{-\frac{R}{L}t}}$$

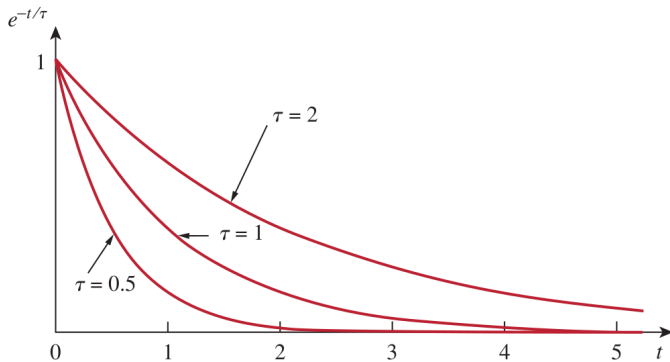


Respuesta natural,  $f_n(t) \rightarrow$  constante de tiempo

Definimos  $\tau = \frac{L}{R}$  como la **constante de tiempo** del circuito (unidades [s])

$$i_n(t) = K \cdot e^{-t/\tau}$$

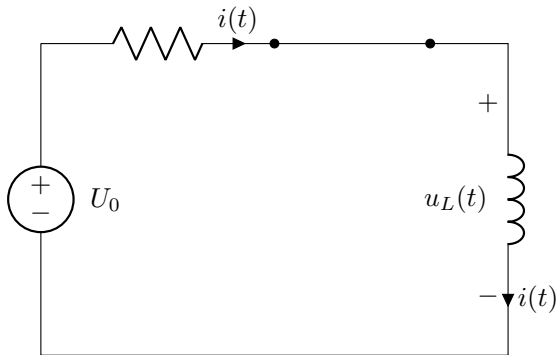
- ▶ Ratio entre **almacenamiento** ( $L$ ) y **disipación** ( $R$ )
- ▶ Valores altos de  $\tau$  implican decrecimiento lento
- ▶ La respuesta natural **se extingue** tras  $\simeq 5\tau$



La **energía almacenada** en la bobina en  $t = 0^-$  se **disipa en las resistencias** en  $t > 0$

## Respuesta forzada, $f_{\infty}(t)$

Volvemos a **activar la fuente**, analizando para  $t > 0$ :



$$\mathbf{2LK} \rightarrow u_R(t) + u_L(t) = u(t)$$

$$R i(t) + L \frac{di(t)}{dt} = U_0 \quad \nearrow 0 \text{ (CC)}$$

Al ser un circuito de **Corriente Continua**, la **bobina** se sustituye por un **cortocircuito**

La **solución** es entonces:

$$i_{\infty}(t) = \frac{U_0}{R}$$

Respuesta completa,  $f(t) = f_n(t) + f_\infty(t)$

$$i(t) = i_n(t) + i_\infty(t) \rightarrow \begin{cases} i_n(t) = K \cdot e^{-t/\tau} \\ i_\infty(t) = U_0/R \end{cases}$$

Para **determinar** el valor de la **constante de integración**  $K$ , **particularizamos en  $t = 0^+$** :

$$i(0^+) = i_n(0^+) + i_\infty(0^+) = K + \frac{U_0}{R} \rightarrow K = i(0^+) - i_\infty(0^+)$$

Teniendo en cuenta la **condición de continuidad**,  $i(0^+) = i(0^-) = 0$ , obtenemos:

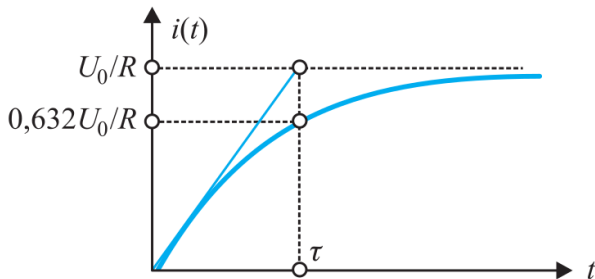
$$K = 0 - \frac{U_0}{R}$$

La **solución completa** (para esta topología concreta) es :

$$i(t) = \frac{U_0}{R} \left( 1 - e^{-t/\tau} \right)$$

Respuesta completa,  $f(t) = f_n(t) + f_\infty(t)$ , para esta topología

$$i(t) = \frac{U_0}{R} \left( 1 - e^{-t/\tau} \right)$$



## Expresión general de la respuesta completa

La **respuesta completa** de un **circuito RL general** (*i.e.*, para cualquier topología)

$$i(t) = \overbrace{\underbrace{[i(0^+) - i_\infty(0^+)]}_{=K}}^{i_n(t)} \cdot e^{-t/\tau} + i_\infty(t)$$

- ▶  $i(0^+)$  → corriente en la bobina en  $t = 0^+$ , definida por cond. iniciales,  $i(0^-) = i(0^+)$
- ▶  $i_\infty(t)$  → corriente en la bobina en régimen permanente (para  $t > 0$ )
- ▶  $i_\infty(0^+)$  → corriente en la bobina, en régimen permanente, en  $t = 0^+$

## ① Introducción

## ② Circuitos de primer orden

Circuito RL serie

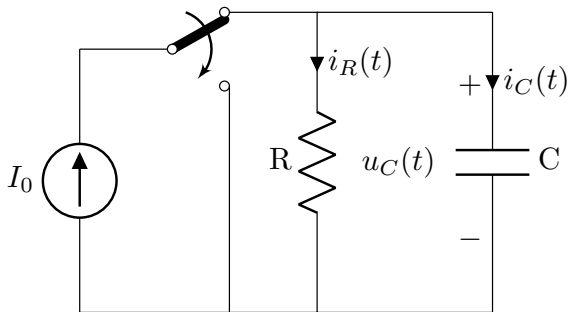
Circuito RC paralelo

Procedimiento general

## ③ Circuitos de segundo orden

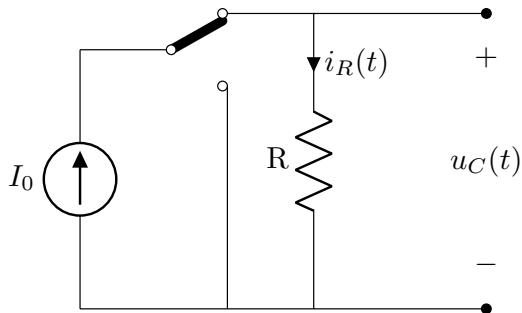
## Circuito RC paralelo básico

- ▶ En  $t < 0$  la fuente alimenta el circuito RC (el condensador se carga)
- ▶ En  $t = 0$  se desconecta la fuente
- ▶ En  $t > 0$  el condensador comienza a descargarse en la resistencia



## Condiciones iniciales

Analizando el circuito para  $t < 0 \dots$



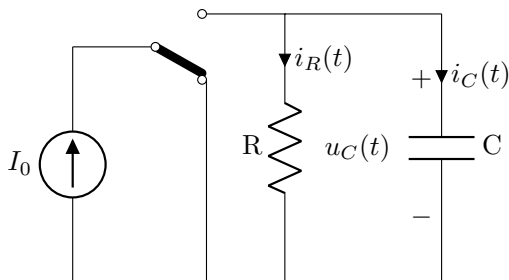
$\dots$ obtenemos

$$u_C(0^-) = R \cdot I_0$$



## Respuesta natural, $f_n(t)$

Siguiendo los pasos de la diapositiva 19, analizamos el circuito para  $t > 0$  **apagando la fuente** (ec. homogénea)



(en este caso, la fuente ya está apagada en  $t > 0$ )

$$\mathbf{1LK} \rightarrow i_R(t) + i_C(t) = 0$$

$$\frac{u_n(t)}{R} + C \frac{du_n(t)}{dt} = 0$$

Cuya **solución general** es:

$$u_n(t) = K \cdot e^{st}$$

(deducción equivalente a la diapositiva 24)

Luego la **respuesta natural**,  $u_n(t)$  del circuito es:

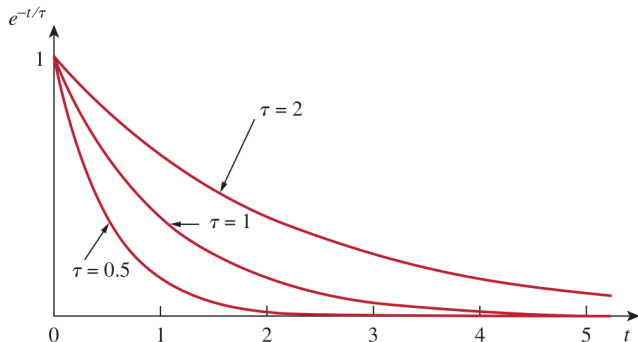
$$u_n(t) = K \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}$$

Respuesta natural,  $f_n(t) \rightarrow$  constante de tiempo

Definimos  $\tau = R \cdot C$  como la **constante de tiempo** del circuito (unidades [s])

$$u_n(t) = K \cdot e^{-t/\tau}$$

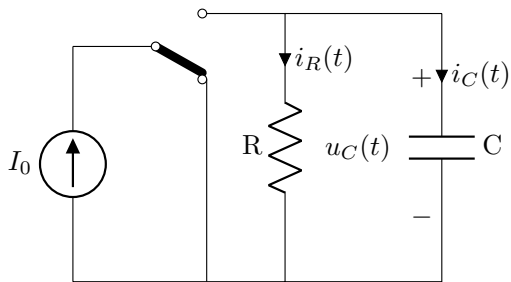
- ▶ Valores altos de  $\tau$  implican decrecimiento lento
- ▶ La respuesta natural **se extingue** tras  $\simeq 5\tau$



La **energía almacenada** en el C en  $t = 0^-$  se **disipa en las resistencias** en  $t > 0$

## Respuesta forzada, $f_{\infty}(t)$

Analizando para  $t > 0$  con la **fente encendida**:



Dado que en  $t > 0$  **no hay fuentes** presentes en el circuito RC, toda la **energía almacenada** en el condensador **se disipa** en la resistencia

Luego la **respuesta forzada**,  $u_{\infty}(t)$ , es:

$$u_{\infty}(t) = 0$$

Respuesta completa,  $f(t) = f_n(t) + f_\infty(t)$

$$u(t) = u_n(t) + u_\infty(t) \rightarrow \begin{cases} u_n(t) = K \cdot e^{-t/\tau} \\ u_\infty(t) = 0 \end{cases}$$

Para **determinar** el valor de la **constante de integración**  $K$ , **particularizamos en  $t = 0^+$** :

$$u(0^+) = u_n(0^+) + u_\infty(0^+) = K + 0 \rightarrow K = u(0^+)$$

Teniendo en cuenta la **condición de continuidad**,  $u(0^+) = u(0^-) = R \cdot I_0 = U_0$ :

$$K = U_0$$

La **solución completa** (para esta topología concreta) es :

$$u(t) = U_0 \cdot e^{-t/\tau}$$

## Balance energético

Podemos comprobar que **toda la energía** acumulada en el condensador en  $t < 0$  realmente **se disipa** en la resistencia en  $t > 0$ :

$$\begin{aligned}\boxed{W_R} &= \int_0^\infty u_R(t) \cdot i_R(t) \, dt = \int_0^\infty \frac{u_R^2(t)}{R} \, dt = \int_0^\infty \frac{1}{R} (U_0 \cdot e^{-t/\tau})^2 \, dt = \\ &= \frac{U_0^2}{R} \int_0^\infty e^{-\frac{2}{R \cdot C} t} \, dt = \frac{U_0^2}{R} \cdot \frac{-R \cdot C}{2} \left[ e^{-\frac{2}{R \cdot C} t} \right]_0^\infty = \frac{-1}{2} C \cdot U_0^2 \cdot [0 - 1] \\ &= \frac{1}{2} C \cdot U_0^2 = \boxed{W_C}\end{aligned}$$

## Expresión general de la respuesta completa

La **respuesta completa** de un **circuito RC general** (*i.e.*, para cualquier topología)

$$u(t) = \underbrace{\left[ \overbrace{u(0^+) - u_\infty(0^+)}^{u_n(t)} \right] \cdot e^{-t/\tau}}_{=K} + u_\infty(t)$$

- ▶  $u(0^+) \rightarrow$  tensión en el C en  $t = 0^+$ , definida por las cond. iniciales,  $u(0^-) = u(0^+)$
- ▶  $u_\infty(t) \rightarrow$  tensión en el C en régimen permanente (para  $t > 0$ )
- ▶  $u_\infty(0^+) \rightarrow$  tensión en el C, en régimen permanente, en  $t = 0^+$

## ① Introducción

## ② Circuitos de primer orden

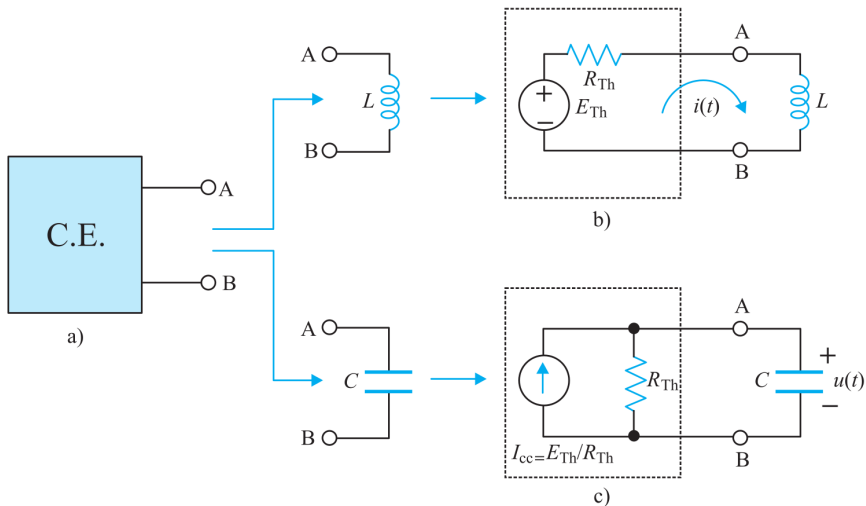
Circuito RL serie

Circuito RC paralelo

Procedimiento general

## ③ Circuitos de segundo orden

## Procedimiento general → equivalente de Thévenin/Norton



$R_{th}$  es la **resistencia vista desde los bornes** del condensador o de la bobina, cuando se anulan todas las fuentes independientes



# Procedimiento general

## ① Dibujar el circuito para $t < 0$

- ▶ Obtener el valor de  $i_L(0^-)$  o  $u_C(0^-)$
- ▶ Aplicar el **principio de continuidad** para determinar  $i_L(0^+)$  o  $u_C(0^+)$

## ② Dibujar el circuito para $t > 0$

- ▶ Calcular el equivalente de **Thévenin/Norton** visto por  $L$  o  $C$
- ▶ Determinar la **constante de tiempo** del circuito:  $\tau = \frac{L}{R_{th}}$  o  $\tau = R_{th} \cdot C$
- ▶ Calcular la respuesta en **régimen permanente**,  $i_\infty(t)$  o  $u_\infty(t)$

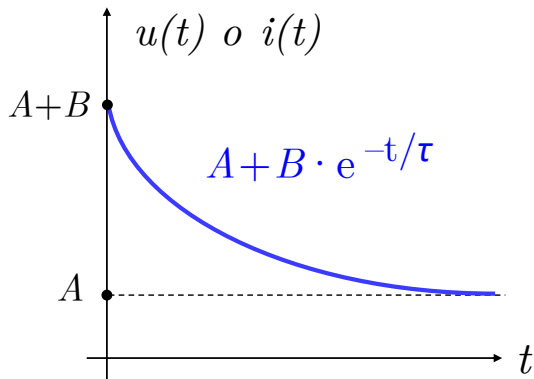
## ③ Obtener la **respuesta completa**:

$$i_L(t) = [i_L(0^+) - i_\infty(0^+)] \cdot e^{-t/\tau} + i_\infty(t)$$

$$u_C(t) = [u_C(0^+) - u_\infty(0^+)] \cdot e^{-t/\tau} + u_\infty(t)$$

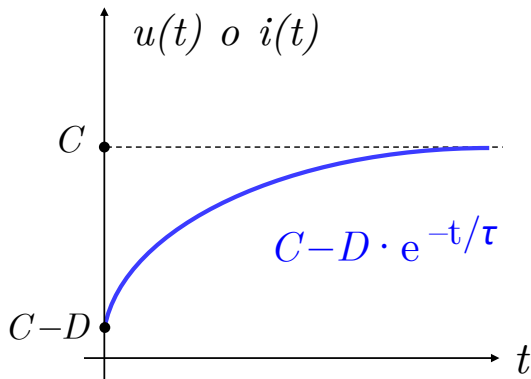
## Resumen: respuestas posibles de un 1<sup>er</sup> orden (corriente continua)

Elemento que se **descarga** (parcialmente)



**Caso particular:**  $A = 0$ , no hay fuentes en  $t > 0$  (el elemento se **descarga totalmente**)

Elemento (C o L) que **aumenta su carga**

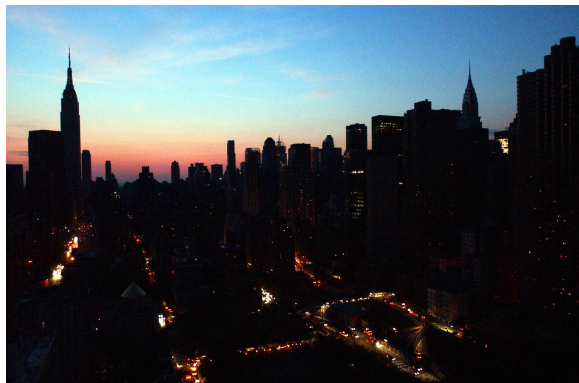


**Caso particular:**  $C = D$ , el elemento estaba inicialmente **descargado**

# Interludio: transitorios inestables, apagón EE. UU. 2003

- ▶ **55 millones** de personas sin luz
- ▶ **6.000 millones de \$** en pérdidas

- ▶ **Nueva York** perdió gran parte del suministro durante **13 horas**
- ▶ Ocurrió en agosto a las 16h: **podría haber sido mucho peor** (e.g. diciembre a las 16h, sin luz natural)



① Introducción

② Circuitos de primer orden

③ Circuitos de segundo orden

## Circuitos de segundo orden

- ▶ Circuitos que contienen **dos elementos de acumulación**, además de elementos de disipación (resistencias)
- ▶ Modelados mediante una **ec. diferencial de 2<sup>do</sup> orden**:

$$a_2 \cdot f''(t) + a_1 \cdot f'(t) + a_0 \cdot f(t) = g(t)$$

ejemplo de **RLC serie**: 
$$L \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + R \frac{d i(t)}{dt} + \frac{1}{C} i(t) = \frac{d E(t)}{dt}$$

- ▶ Resolución → obtención de **respuesta natural**  $f_n(t)$  y **respuesta forzada**  $f_\infty(t)$

$$f(t) = f_n(t) + f_\infty(t)$$

## Circuitos de segundo orden: respuesta natural, $f_n(t)$

$$a_2 \cdot f''(t) + a_1 \cdot f'(t) + a_0 \cdot f(t) = 0 \quad \rightarrow \quad f''(t) + \frac{a_1}{a_2} \cdot f'(t) + \frac{a_0}{a_2} \cdot f(t) = 0$$

- Redefinición de constantes:

$$\frac{a_1}{a_2} = 2 \zeta \omega_n \qquad \frac{a_0}{a_2} = \omega_n^2$$

$\omega_n$  pulsación natural

$\zeta$  coeficiente de **amortiguamiento**

- Resolviendo la **ec. característica**<sup>\*</sup>:

$$s^2 + 2 \zeta \omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} s_1 = -\omega_n \left( \zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \\ s_2 = -\omega_n \left( \zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \end{cases}$$

---

<sup>\*</sup>Obtenida mediante el mismo procedimiento que en la diapositiva 24, sustituyendo la solución de prueba  $f_n(t) = K \cdot e^{st}$ . Para más detalles, consultar págs. 423 - 424 del [Fraile Mora](#), edición 2012

## Circuitos de segundo orden: respuesta natural, $f_n(t)$

(continuación)

- Resolviendo la **ec. característica**:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} s_1 = -\omega_n \left( \zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \\ s_2 = -\omega_n \left( \zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \end{cases}$$

- Por lo tanto, la **solución de la ec. diferencial** es:

$$f_n(t) = K_1 \cdot e^{s_1 \cdot t} + K_2 \cdot e^{s_2 \cdot t}$$

donde  $K_1$  y  $K_2$  son ctes. que dependen de las **condiciones iniciales**

## Circuitos de segundo orden: respuesta natural, $f_n(t)$

Dependiendo de los **valores de las soluciones** de la ec. característica, hay **3 posibilidades de transitorio**:

$$s_1 = -\omega_n \left( \zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) \quad s_2 = -\omega_n \left( \zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1} \right)$$

- ▶ Soluciones **reales distintas**  $\rightarrow$  circuito sobreamortiguado (transitorio “lento”)
- ▶ Solución **real doble**  $\rightarrow$  circuito críticamente amortiguado
- ▶ Soluciones **complejas conjugadas**<sup>\*</sup>  $\rightarrow$  circuito subamortiguado (con oscilaciones)

---

<sup>\*</sup>Por el **T<sup>a</sup> de la raíz conjugada compleja**: si un polinomio en una variables con coefs. reales tiene una raíz compleja, el conjugado también es raíz del polinomio



## Circuitos de segundo orden: respuesta natural, $f_n(t)$

Dependiendo de los **valores de las soluciones** de la ec. característica, hay **3 posibilidades de transitorio**:

**Sobreamortiguado**  $\boxed{\zeta > 1}$ :

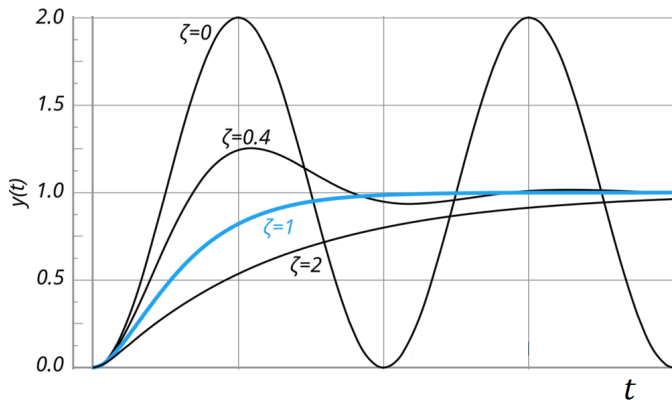
$$f_n(t) = K_1 \cdot e^{s_1 \cdot t} + K_2 \cdot e^{s_2 \cdot t} \quad s_1, s_2 \in \mathbb{R}$$

**Críticamente amortiguado**  $\boxed{\zeta = 1}$ :

$$f_n(t) = (K_1 + K_2 \cdot t) \cdot e^{s_1 \cdot t} \quad s_1 \in \mathbb{R}$$

**Subamortiguado**  $\boxed{\zeta < 1}$ :

$$f_n(t) = K_1 \cdot e^{s_1 \cdot t} + K_2 \cdot e^{s_2 \cdot t} \quad s_1, s_2 \in \mathbb{C}$$



## Circuitos de segundo orden *subamortiguados*

El caso **subamortiguado** ( $\zeta < 1$ ) da lugar a **oscilaciones atenuadas**. Demostración:

$$f_n(t) = K_1 \cdot e^{s_1 \cdot t} + K_2 \cdot e^{s_2 \cdot t} \quad s_1, s_2 \in \mathbb{C} \rightarrow f_n(t) = K_1 \cdot e^{(-a+jb) \cdot t} + K_2 \cdot e^{(-a-jb) \cdot t}$$

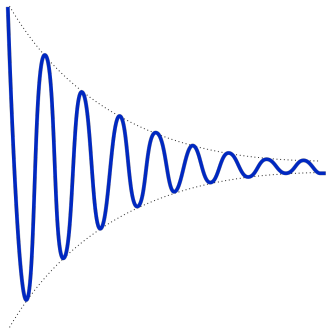
**Nota:** la **parte real es siempre negativa** en las soluciones complejas de un circuito de 2<sup>do</sup> orden

Lo contrario implicaría  $\zeta < 0$ , y por tanto implicaría resistencia negativa, lo cual carece de sentido físico (se omite la demostración)

Usando la **fórmula de Euler** ( $e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$ ), puede llegarse a:

$$\begin{aligned} f_n(t) &= e^{-\alpha \cdot t} \cdot [B_1 \cdot \sin(\omega t) + B_2 \cdot \cos(\omega t)] \\ &= \boxed{B' \cdot e^{-\alpha \cdot t} \cdot \sin(\omega t + \theta)} \end{aligned}$$

(la forma de obtener las ctes.  $B'$ ,  $\alpha$ ,  $\omega$  y  $\theta$  se detallará en un ejercicio)



## Circuitos de segundo orden, resolución

### ① Obtener la **respuesta natural** del circuito

- ▶ Se escribe la **ec. diferencial del circuito** sin fuentes, usando 1LK o 2LK
- ▶ Se resuelve la **ec. característica**, primero obteniendo el valor de las **ctes.**  $\omega_n$  y  $\xi$
- ▶ El **tipo de soluciones** de la ec. característica determina el **tipo de transitorio**  $\rightarrow$  debe comprobarse que el **transitorio** es **coherente** con el **valor de  $\xi$**  ( $\xi > 1$ ,  $\xi = 1$  o  $0 < \xi < 1$ )
- ▶ Se escribe la **ec. para ese transitorio**

### ② Determinar el valor de las **ctes. de integración** de la respuesta natural usando las **condiciones iniciales**, y aplicando el **principio de continuidad** para $L$ o $C$

- ▶ Son **necesarias 2 condiciones iniciales**: una para la propia magnitud ( $u(t)$  o  $i(t)$ ) y otra para su primera derivada ( $u'(t)$  o  $i'(t)$ )
- ▶ Más detalles en ejercicios resueltos

### ③ Obtener la **respuesta forzada**, $f_\infty(t)$ : análisis del circuito con fuentes en $t > 0$

## Interludio: temas de investigación en sistemas eléctricos

- Operación económica de sistemas eléctricos nacionales con baja inercia, [link](#)

