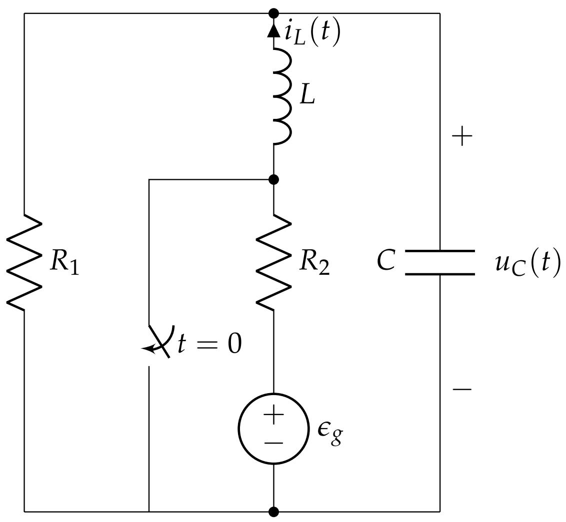
Ejercicio 14 de la colección de problemas

Enunciado:

En el circuito de la figura,
calcular la tensión $u_C(t)$ para $t > 0$

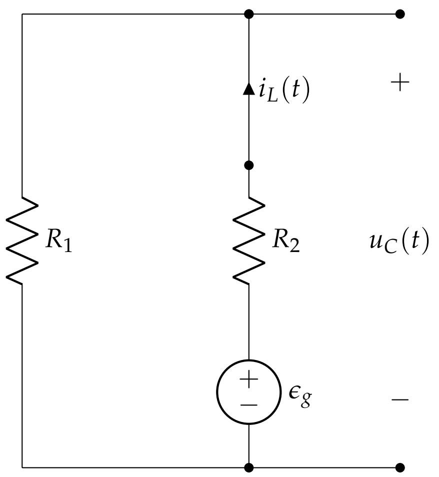


Datos:

$$\begin{aligned} \epsilon_g &= 4\,\mathrm{V} \\ R_1 &= 2\,\Omega \\ R_2 &= 2\,\Omega \\ L &= 1\,\mathrm{H} \\ C &= 0{,}25\,\mathrm{F} \end{aligned}$$

Solución:

Calculamos las condiciones iniciales ($t = 0^-$). Dibujamos el circuito para $t < 0$ y obtenemos:

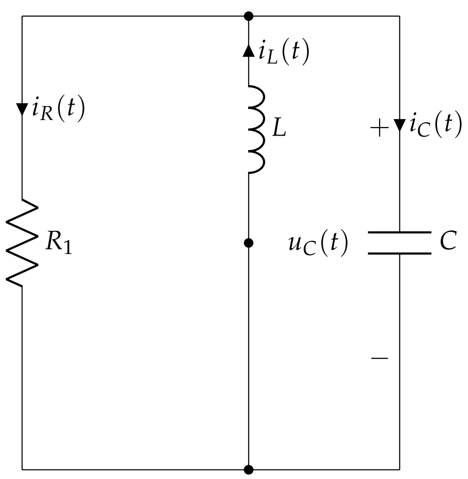


$$i_L(t) = \frac{\epsilon_g}{R_1 + R_2} = 1\,\mathrm{A}$$

$$u_C(t) = R_1 \cdot i_L(t) = 2\,\mathrm{V}$$

Por tanto, $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 2\,\mathrm{V}$ y $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 1\,\mathrm{A}$

A continuación dibujamos el circuito para $t > 0$, para obtener la respuesta natural y la respuesta forzada. En el circuito resultante <u>no hay fuentes</u>, por lo que <u>no habrá respuesta forzada</u>.



Planteamos la ec. diferencial del circuito usando 1LK:

$$i_C(t) + i_R(t) = i_L(t)$$

$$C\,\frac{d^2u_C(t)}{dt^2} + \frac{1}{R_1} \cdot \frac{d\,u_C(t)}{dt} - \frac{1}{L}\,[-u_C(t)] = 0$$

Luego la ec. característica es:

$$s^2 + \frac{1}{R_1 \cdot C} \cdot s + \frac{1}{L \cdot C} = 0$$

$$s^2 + 2 \cdot s + 4 = 0$$

Cuyas soluciones son:

$$s_1 \;=\; -1 + \mathrm{j}\,1{,}73 \ \mathrm{s}^{-1}\,, \qquad s_2 \;=\; -1 - \mathrm{j}\,1{,}73 \ \mathrm{s}^{-1}$$

Escribiendo la forma estándar de la ec. característica, determinamos el valor de los parámetros ξ y ω_n:

$$s^2 \,+\, 2\,\xi\,\omega_n \cdot s \,+\, \omega_n^2 \;=\; 0$$

$$\omega_n \;=\; \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \;=\; 2\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\,, \qquad \xi \;=\; \frac{1}{2\,\omega_n} \cdot \frac{1}{R_1 \cdot C} \;=\; 0{,}5$$

Dado que $\xi \,<\, 1$, se trata de un transitorio subamortiguado, resultado coherente con el tipo de soluciones que se han obtenido para s_1 y s_2 (soluciones complejas conjugadas, que corresponde a un circuito subamortiguado).

La respuesta natural del circuito es por tanto:

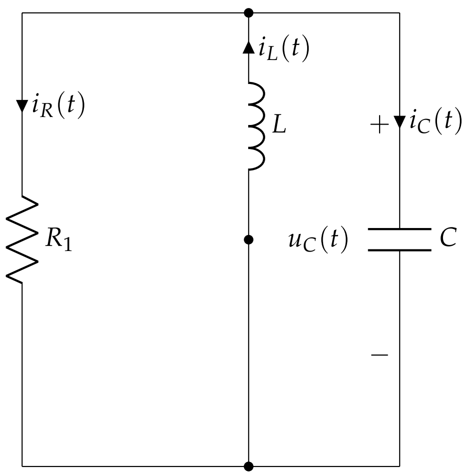
$$u_C(t) \;=\; e^{-\alpha \cdot t} \cdot [B_1 \cdot \sin(\omega t) \,+\, B_2 \cdot \cos(\omega t)]$$

Donde los parámetros de la senoidal atenuada se calculan como (recordad estas expresiones):

$$\boxed{\alpha \;=\; \omega_n \cdot \xi} = 1\ \mathrm{s}^{-1} \qquad\qquad \boxed{\omega \;=\; \omega_n\,\sqrt{1-\xi^2}} = \sqrt{3}\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$$

(se omite la deducción de estas expresiones, para más detalles, ver Fraile Mora edición 2012, págs. 427-428 y 431)

Para determinar las constantes de integración B_1 y B_2 recurrimos a las condiciones iniciales:



$$i_C(0^+) \,+\, i_R(0^+) \;=\; i_L(0^+)$$

$$i_R(0^+) \;=\; \frac{u_C(0^+)}{R_1} = 1\,\mathrm{A}$$

$$i_C(0^+) \;=\; 1 - 1 = 0\,\mathrm{A}$$

Por tanto:

$$u_C(0^+) = 2\,\mathrm{V}\,, \qquad \left.\frac{d\,u_C(t)}{dt}\right|_{t=0^+} = \frac{1}{C} \cdot i_C(0^+) = 0\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{s}}$$

Con estos resultados, particularizamos la ecuación de $u_C(t)$ para $t = 0$ y así planteamos las ecuaciones para obtener B_1 y B_2:

$$u_C(0^+) = \boxed{B_2 = 2\,\mathrm{V}}$$

$$\left.\frac{d\,u_C(t)}{dt}\right|_{t=0^+} = \Big[-\alpha \cdot e^{-\alpha \cdot t} \cdot [B_1\,\sin(\sqrt{3}\,t) + 2\,\cos(\sqrt{3}\,t)] \,+$$

$$+\,e^{-t} \cdot [B_1\sqrt{3}\,\cos(\sqrt{3}\,t) - 2\sqrt{3}\,\sin(\sqrt{3}\,t)]\Big]_{t=0^+} = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{B_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{V}}$$

Finalmente:

$$\boxed{u_C(t) \;=\; e^{-t} \cdot \left[\frac{2\sqrt{3}}{3}\,\sin(\sqrt{3}\,t) \,+\, 2\,\cos(\sqrt{3}\,t)\right]\ \mathrm{V}}$$