

Introducción al Régimen Transitorio

Teoría de Circuitos

Oscar Perpiñán Lamigueiro

Mayo 2020

- 1 Conceptos Fundamentales
- 2 Circuitos de Primer Orden
- 3 Circuitos de Segundo Orden

- 1 Conceptos Fundamentales
 - ¿Qué es el régimen transitorio?
 - Condiciones iniciales
- 2 Circuitos de Primer Orden
- 3 Circuitos de Segundo Orden

Permanente y Transitorio

Régimen permanente o estacionario

Las tensiones y corrientes de un circuito son constantes (continua) o periódicas (alterna) (circuito estabilizado)

Régimen transitorio

- Para alcanzar el régimen permanente (o para alternar entre dos regímenes permanentes) el circuito atraviesa el régimen transitorio.
- Posibles cambios: activación o apagado de fuentes, cambio en las cargas, cambio en el circuito (línea).
- En general, el estado transitorio es indeseado en sistemas eléctricos, pero provocado en sistemas electrónicos.

Acumulación de Energía

Régimen Permanente

Energía acumulada en bobinas y condensadores

Régimen Estacionario

- **Redistribución** y **disipación** de energía acumulada.
- La redistribución de energía **no** se puede realizar de forma **inmediata**
- **Duración corta** (μs) pero superior a 0, dependiendo de **relación entre acumulación y disipación** (resistencia).

- 1 Conceptos Fundamentales
 - ¿Qué es el régimen transitorio?
 - Condiciones iniciales
- 2 Circuitos de Primer Orden
- 3 Circuitos de Segundo Orden

Respuesta completa de una red lineal

La respuesta completa de una red lineal a un cambio tiene dos componentes:

- Respuesta **natural** o propia (sin fuentes, determinada únicamente por la configuración del circuito)
- Respuesta **forzada** o particular (determinada por las fuentes existentes, $t = \infty$).

$$f(t) = f_n(t) + f_{\infty}(t)$$

Condiciones iniciales

- Las **condiciones iniciales** son el estado del circuito en el instante temporal en el que se produce el cambio.
- Determinan las constantes de integración de la respuesta natural.
- El instante del cambio se representa habitualmente con $t = 0$:
 - ▶ $t = 0^-$: la topología del circuito es la anterior al cambio.
 - ▶ $t = 0^+$: la topología del circuito es la posterior al cambio.

Resistencia

$$u(t) = Ri(t)$$

No acumula energía: sigue los cambios de forma instantánea.

Inductancia

$$u(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \leftrightarrow i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u(t) dt$$

La corriente en una bobina no puede variar de forma abrupta (implica tensión infinita).

$$i_L(0^-) = i_L(0^+)$$

Capacidad













$$i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} \leftrightarrow u(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(t) dt$$

La tensión en un condensador no puede variar de forma abrupta (implica corriente infinita).

$$u_C(0^-) = u_C(0^+)$$

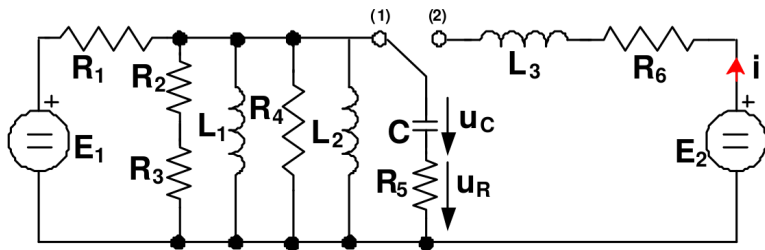
Circuitos Equivalentes en $t = 0^+$

- Sustituir fuentes de tensión $u_g(t)$ por $u_g(0^+)$.
- Sustituir fuentes de corriente $i_g(t)$ por $i_g(0^+)$.
- Sustituir bobinas por fuentes de corriente $i_L(0^+)$.
- Sustituir condensadores por fuentes de tensión $u_C(0^+)$.
- Calcular tensiones y corrientes en circuito.

ELEMENTO	Circuito equivalente inicial ($t=0^+$)		Circuito equivalente final (solo con c.c.) $t = \infty$
	CARGADO	DESCARGADO	
			
	$i_L(0^+) = i_L(0^-)$ 	$i_L(0^+) = 0$ 	Cortocircuito 
	$u_C(0^+) = u_C(0^-)$ 	$u_C(0^+) = 0$ 	Circuito abierto 

Ejemplo

El interruptor lleva en la posición (1) desde un tiempo infinito y pasa a la posición (2) en $t = 0$:



- 1 Conceptos Fundamentales
- 2 Circuitos de Primer Orden
- 3 Circuitos de Segundo Orden

Definición

- Circuitos que tienen un **único elemento de acumulación** (o *varios elementos que pueden ser simplificados a un elemento equivalente*) y parte resistiva.
- **Ecuación diferencial de primer orden**: la respuesta natural es siempre una **exponencial decreciente**.
- Circuitos típicos:
 - ▶ RL serie
 - ▶ RC paralelo

Respuesta natural y forzada

- El método de resolución analiza el circuito en dos etapas:
 - ▶ Sin fuentes: **respuesta natural** (la energía acumulada en $t < 0$ se disipa en la resistencia).
 - ▶ Con fuentes: **respuesta forzada** (determinada por la forma de onda de las fuentes).

1 Conceptos Fundamentales

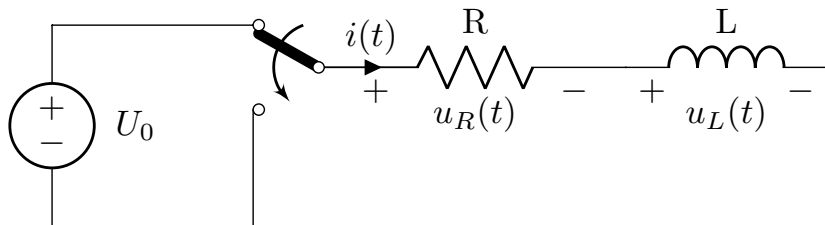
2 Circuitos de Primer Orden

- Circuito RL serie
- Circuito RC paralelo
- Análisis Sistemático

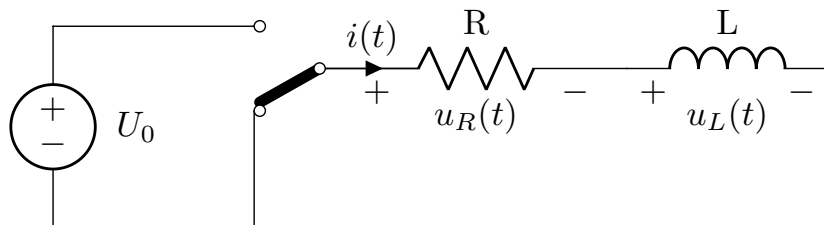
3 Circuitos de Segundo Orden

Circuito básico

- En $t < 0$ la fuente alimenta el circuito RL (la bobina almacena energía).
- En $t = 0$ la fuente se desconecta.
- En $t > 0$ la bobina se descarga en la resistencia.



Respuesta natural



Ecuaciones

$$u_R(t) + u_L(t) = 0$$

$$Ri + L \frac{di}{dt} = 0$$

Solución Genérica

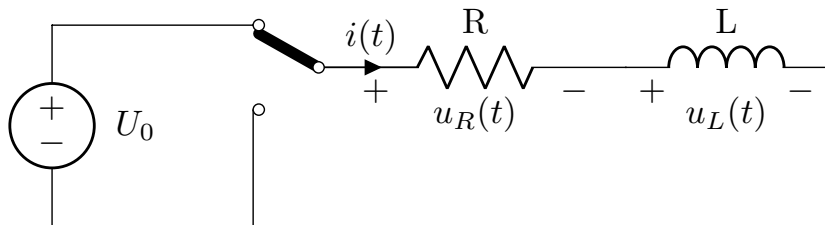
$$i(t) = Ae^{st}$$

Ecuación Característica

$$s + \frac{R}{L} = 0 \Rightarrow s = -\frac{R}{L}$$

Condiciones Iniciales

Analizando circuito para $t < 0 \dots$



\dots obtenemos $i(0^-) = I_0 = \frac{U_0}{R}$

Condiciones Iniciales

Por otra parte, para $t > 0$:

$$i(t) = Ae^{-R/Lt}$$
$$i(0^+) = Ae^0 = A$$

Y dada la condición de continuidad, $i(0^+) = i(0^-)$:

$$A = I_0$$

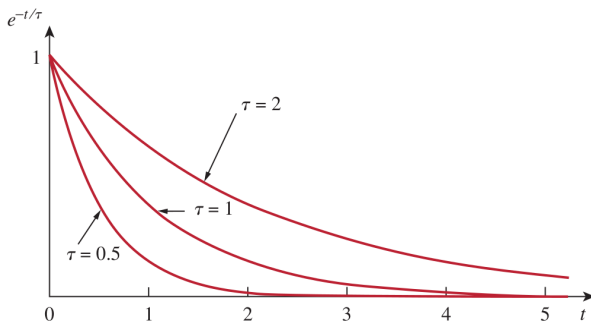
Por tanto, la respuesta natural es:

$$i(t) = I_0 e^{-R/Lt}$$

Constante de tiempo

$$i(t) = I_0 e^{-t/\tau}$$

- $\tau = \frac{L}{R}$ es la constante de tiempo (unidades [s]).
- Ratio entre almacenamiento (L) y disipación (R).
- Valores altos de τ implican decrecimiento lento.
- La respuesta natural «desaparece» tras $\simeq 5\tau$.



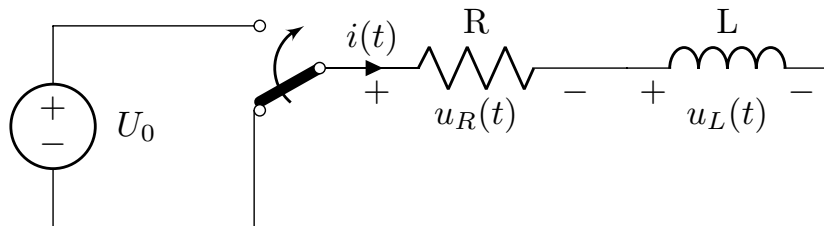
Balance Energético

La energía acumulada en la bobina en $t < 0$ se disipa en la resistencia en $t > 0$

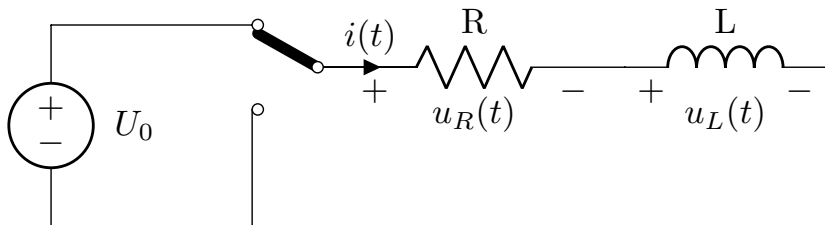
$$\begin{aligned} W_R &= \int_0^{\infty} Ri^2(t)dt = \\ &= \int_0^{\infty} R(I_0 e^{-t/\tau})^2 dt = \\ &= \frac{1}{2} LI_0^2 = W_L \end{aligned}$$

Respuesta forzada

Cambiamos el funcionamiento del interruptor: en $t > 0$ la fuente alimenta el circuito RL.



Respuesta forzada



Las ecuaciones son ahora:

$$u_R(t) + u_L(t) = u(t) \rightarrow Ri + L \frac{di}{dt} = U_0$$

Para la solución particular, i_∞ , se propone una función análoga a la excitación (analizando circuito para $t > 0$)

$$i(t) = i_n(t) + i_\infty(t)$$

$$i_n(t) = Ae^{st}$$

$$i_\infty(t) = U_0/R$$

Condiciones iniciales

Particularizamos las ecuaciones en $t = 0^+$:

$$i(0^+) = i_n(0^+) + i_\infty(0^+)$$

$$i(0^+) = A + i_\infty(0^+)$$

$$A = i(0^+) - i_\infty(0^+)$$

Respuesta completa (ejemplo)

$$i(t) = i_n(t) + i_\infty(t)$$

$$i_n(t) = Ae^{st}$$

$$i_\infty(t) = U_0/R$$

$$A = i(0^+) - i_\infty(0^+)$$

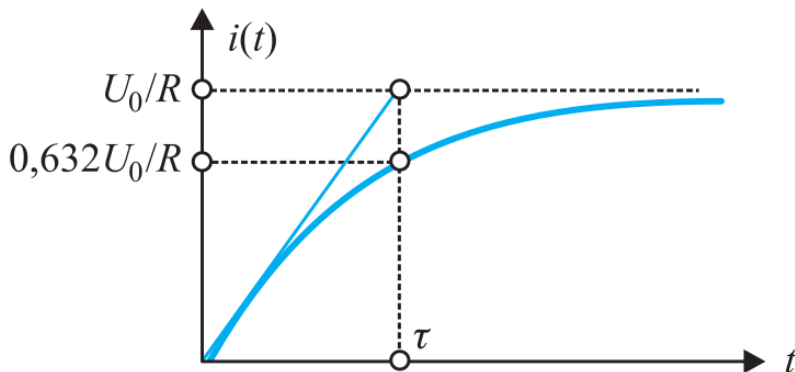
Suponiendo que la bobina está inicialmente descargada, $i(0^-) = 0$, y teniendo en cuenta la condición de continuidad, $i(0^+) = i(0^-) = 0$, obtenemos $A = 0 - U_0/R$.

La solución completa es:

$$i(t) = \frac{U_0}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Respuesta completa

$$i(t) = \frac{U_0}{R} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$



Expresión general de la respuesta completa

$$i(t) = [i(0^+) - i_\infty(0^+)] e^{-t/\tau} + i_\infty(t)$$

- $i(0^+)$: corriente en la bobina, condiciones iniciales, $i(0^-) = i(0^+)$.
- $i_\infty(t)$: corriente en la bobina en régimen permanente para $t > 0$.
- $i_\infty(0^+)$: corriente en la bobina en régimen permanente particularizada en $t = 0$.

1 Conceptos Fundamentales

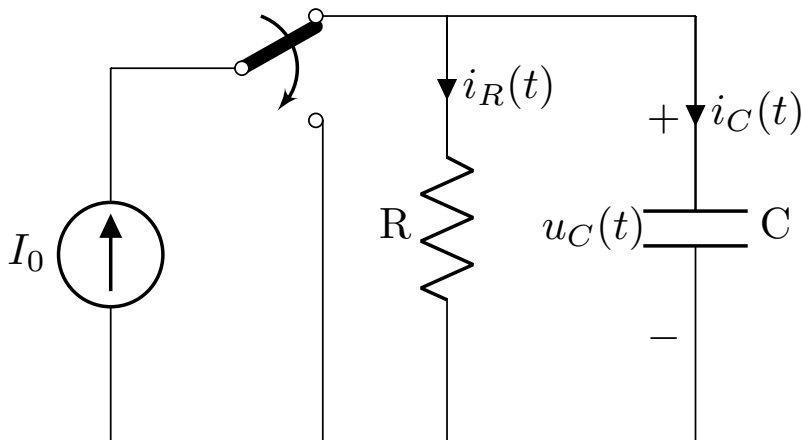
2 Circuitos de Primer Orden

- Circuito RL serie
- Circuito RC paralelo
- Análisis Sistemático

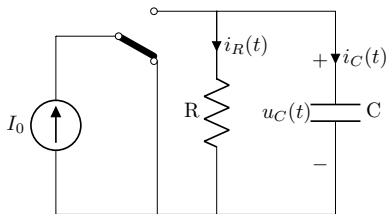
3 Circuitos de Segundo Orden

Circuito básico

- En $t < 0$ la fuente alimenta el circuito RC (el condensador se carga).
- En $t = 0$ se desconecta la fuente (el condensador comienza a descargarse en la resistencia).



Respuesta natural



Ecuaciones

$$i_R(t) + i_C(t) = 0$$

$$Gu + C \frac{du}{dt} = 0$$

Solución Genérica

$$u(t) = Ae^{st}$$

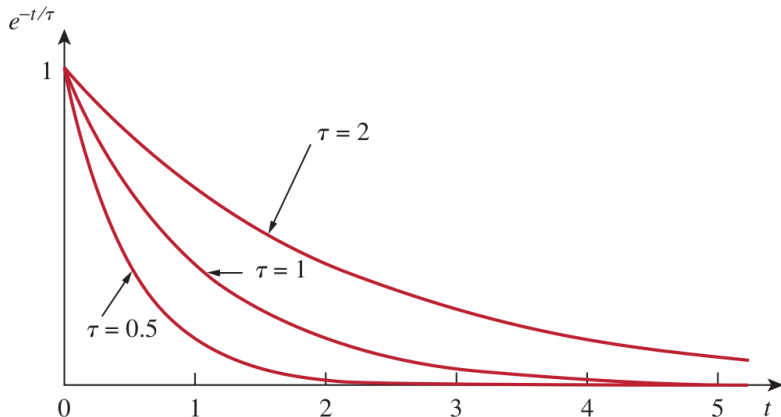
Respuesta natural

$$u(t) = U_0 e^{-G/Ct}$$

Constante de tiempo

- $\tau = \frac{C}{G}$ es la constante de tiempo (unidades [s]).
- Ratio entre almacenamiento (C) y disipación (G).

$$u(t) = U_0 e^{-t/\tau}$$



Balance Energético

La energía acumulada en el condensador en $t < 0$ se disipa en la resistencia (conductancia) en $t > 0$

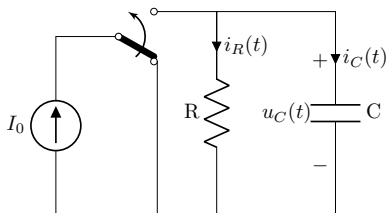
$$W_G = \int_0^{\infty} Gu^2(t)dt = \frac{1}{2}CU_0^2 = W_C$$

Expresión general de la respuesta completa

$$u(t) = [u(0^+) - u_\infty(0^+)] e^{-t/\tau} + u_\infty(t)$$

- $u(0^+)$: tensión en el condensador, condiciones iniciales, $u(0^-) = u(0^+)$.
- $u_\infty(t)$: tensión en el condensador en régimen permanente para $t > 0$.
- $u_\infty(0^+)$: tensión en el condensador en régimen permanente particularizada en $t = 0$.

Ejemplo con respuesta forzada



$$u(t) = [u(0^+) - u_\infty(0^+)] e^{-t/\tau} + u_\infty(t)$$

Suponiendo que el condensador está inicialmente descargado:

$$\begin{aligned} u(0^+) &= u(0^-) = 0 \\ u_\infty(0^+) &= I_0 / G \\ u(t) &= \frac{I_0}{G} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \end{aligned}$$

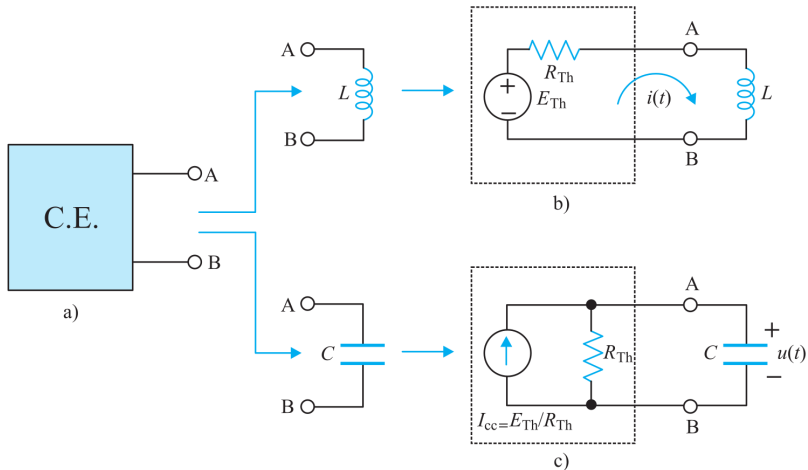
1 Conceptos Fundamentales

2 Circuitos de Primer Orden

- Circuito RL serie
- Circuito RC paralelo
- Análisis Sistemático

3 Circuitos de Segundo Orden

Equivalente de Thévenin (Norton)



Procedimiento General

- Dibujar el circuito para $t < 0$.
 - ▶ Determinar variables en régimen permanente, $u_c(t)$, $i_L(t)$.
 - ▶ Particularizar para $t = 0$, obteniendo $u_c(0^-)$ o $i_L(0^-)$.
 - ▶ Continuidad: $u_c(0^+) = u_c(0^-)$, $i_L(0^+) = i_L(0^-)$.
- Dibujar el circuito para $t > 0$.
 - ▶ Calcular el equivalente de Thevenin (Norton) visto por el elemento de acumulación.
 - ▶ La constante de tiempo de la respuesta natural es $\tau = \frac{L}{R_{th}}$ o $\tau = \frac{C}{G_{th}}$.
 - ▶ Calcular las variables $i_L(t)$ o $u_c(t)$ en régimen permanente, obteniendo $i_\infty(t)$ o $u_\infty(t)$.
- Obtener respuesta completa:

$$i_L(t) = (i_L(0^+) - i_\infty(0^+)) e^{-t/\tau} + i_\infty(t)$$

$$u_C(t) = (u_C(0^+) - u_\infty(0^+)) e^{-t/\tau} + u_\infty(t)$$

- 1 Conceptos Fundamentales
- 2 Circuitos de Primer Orden
- 3 Circuitos de Segundo Orden**

Introducción

- Circuitos que tienen **dos elementos de acumulación** que intercambian energía, y parte resistiva que disipa energía.
- **Ecuación diferencial de segundo orden**: la respuesta natural incluye exponenciales decrecientes y quizás señal sinusoidal.
- Circuitos típicos:
 - ▶ RLC serie
 - ▶ RLC paralelo

Respuesta natural y forzada

- El método de resolución analiza el circuito en dos etapas:
 - ▶ Sin fuentes: **respuesta natural** (la energía acumulada en $t < 0$ se redistribuye).
 - ▶ Con fuentes: **respuesta forzada** (determinada por la forma de onda de las fuentes).