

# Respuesta en Frecuencia: Resonancia

## Teoría de Circuitos III

Oscar Perpiñán Lamigueiro

① Definiciones

② Circuito RLC paralelo

③ Circuito RLC serie

④ Otros circuitos

⑤ Factor de Calidad de Componentes

# Definición

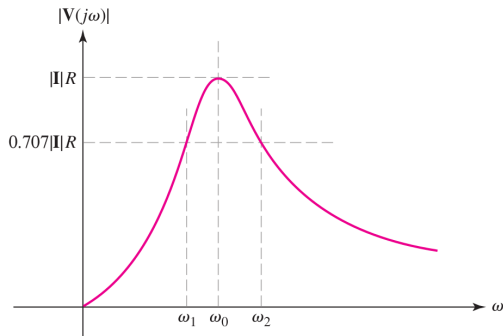
- ▶ Cuando un circuito eléctrico está en resonancia:
  - ▶ La **parte imaginaria** de su impedancia/admitancia es **nula**.
  - ▶ La **tensión y corriente** están en **fase**.
  - ▶ La **potencia reactiva** neta es **nula**.
- ▶ La resonancia se produce en una **frecuencia determinada**,  $f_0$ .
- ▶ Sólo puede ocurrir en circuitos con **al menos un inductor y un capacitor**.

# Ancho de Banda y Factor de Calidad

- Frecuencias de potencia mitad:  $\omega_1, \omega_2$

$$|\mathbf{Z}(\omega)|_{\omega=\omega_{1,2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |\mathbf{Z}(\omega_0)|$$

$$|\mathbf{Y}(\omega)|_{\omega=\omega_{1,2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |\mathbf{Y}(\omega_0)|$$



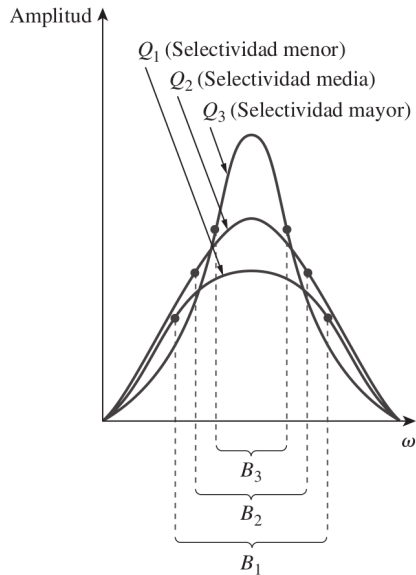
- Ancho de Banda (*de potencia mitad*):

$$B = \omega_2 - \omega_1$$

- Factor de Calidad (*en resonancia*):

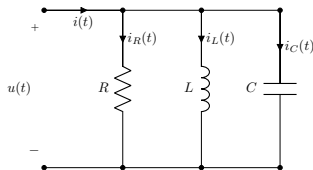
$$Q_0 = \frac{\omega_0}{B}$$

# Ancho de Banda y Factor de Calidad



- ① Definiciones
- ② Circuito RLC paralelo
- ③ Circuito RLC serie
- ④ Otros circuitos
- ⑤ Factor de Calidad de Componentes

# Admitancia



- Admitancia:

$$\mathbf{Y}(\omega) = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

- Módulo en resonancia  $\omega_0$ :

$$|\mathbf{Y}(\omega_0)| = \frac{1}{R} \rightarrow \omega_0 C - \frac{1}{\omega_0 L} = 0$$

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

# Puntos de Potencia Mitad

- Definición de Puntos de potencia mitad ( $\omega_1, \omega_2$ )

$$|\mathbf{Y}(\omega_1)| = \frac{1}{\sqrt{2}R} \xrightarrow{\omega_1 < \omega_0} \omega_1 C - \frac{1}{\omega_1 L} = -\frac{1}{R}$$

$$|\mathbf{Y}(\omega_2)| = \frac{1}{\sqrt{2}R} \xrightarrow{\omega_2 > \omega_0} \omega_2 C - \frac{1}{\omega_2 L} = +\frac{1}{R}$$

- Ecuaciones

$$\omega_1^2 \omega_0^2 + \frac{\omega_1 L}{R} - 1 = 0$$

$$\omega_2^2 \omega_0^2 - \frac{\omega_2 L}{R} - 1 = 0$$



# Ancho de Banda y Factor de Calidad

## ► Resultado

$$\omega_1 = -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 + \frac{1}{LC}}$$

$$\omega_2 = +\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 + \frac{1}{LC}}$$

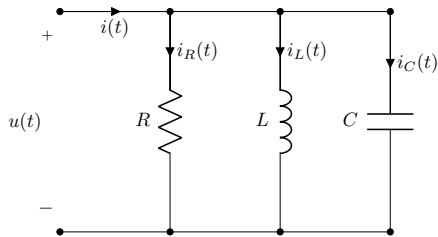
## ► Ancho de Banda

$$B = \omega_2 - \omega_1 = \frac{1}{RC}$$

## ► Factor de Calidad

$$Q_0 = \frac{\omega_0}{B} = \omega_0 RC = \frac{R}{\omega_0 L}$$

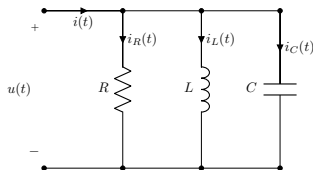
## Balance de corrientes en resonancia



$$u(t) = U_0 \sin(\omega_0 t)$$

$$\left. \begin{aligned} i_R(t) &= \frac{U_0}{R} \sin(\omega_0 t) \\ i_L(t) &= -\frac{U_0}{\omega_0 L} \cos(\omega_0 t) \\ i_C(t) &= \omega_0 C U_0 \cos(\omega_0 t) \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \boxed{i(t) = i_R(t)}$$

## Balance de corrientes en resonancia



- Valores máximos (**atención en circuitos con  $Q$  alto**)

$$I_{R0} = \max\{i_R(t)\} = \frac{U_0}{R}$$

$$I_{L0} = \max\{i_L(t)\} = \frac{U_0}{\omega_0 L} \xrightarrow{Q_0 = \frac{R}{\omega_0 L}} \boxed{\frac{I_{L0}}{I_{R0}} = Q_0}$$

$$I_{C0} = \max\{i_C(t)\} = \omega_0 C U_0 \xrightarrow{Q_0 = \omega_0 C R} \boxed{\frac{I_{C0}}{I_{R0}} = Q_0}$$

## Balance de Energías

$$u(t) = U_0 \sin(\omega t)$$

- Energías total almacenada en  $\omega \neq \omega_0$ :

$$w_L(t) = \frac{1}{2} L i_L^2(t) = \frac{U_0^2}{2\omega^2 L} \cos^2(\omega t)$$

$$w_C(t) = \frac{1}{2} C u^2(t) = \frac{U_0^2 C}{2} \sin^2(\omega t)$$

---

$$w_C(t) + w_L(t) = \frac{U_0^2}{2} \left( C \sin^2(\omega t) + \frac{U_0^2}{2\omega^2 L} \cos^2(\omega t) \right)$$

- La energía almacenada en resonancia es **constante**:

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \rightarrow \boxed{w_C(t) + w_L(t) = \frac{1}{2} C U_0^2}$$

## Nueva definición del Factor de Calidad

- ▶ Energía almacenada en resonancia:

$$w_{total} = \frac{1}{2}CU_0^2 = CU^2$$

- ▶ Energía disipada en un período

$$P_R = \frac{U^2}{R} \rightarrow w_R = T_0 \cdot \frac{U^2}{R}$$

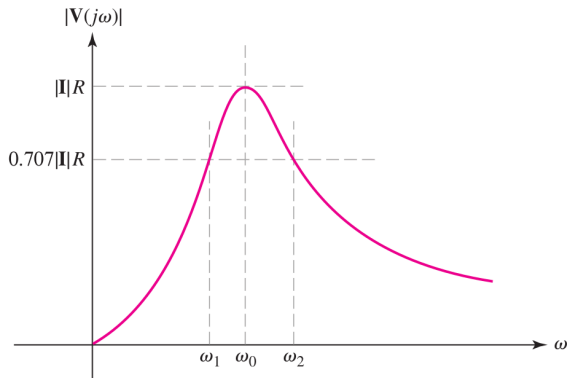
- ▶ Ratio entre almacenamiento y disipación

$$\frac{w_{total}}{w_R} = f_0 CR \xrightarrow{Q_0 = \omega_0 CR} \boxed{Q_0 = 2\pi \frac{w_{total}}{w_R}}$$

- ▶ Un circuito resonante almacena  $Q_0/2\pi$  veces la energía suministrada.

## La curva de resonancia **no** es simétrica

La frecuencia de resonancia no está en el centro del ancho de banda



## La curva de resonancia **no** es simétrica

- ▶ Retomamos expresión de puntos de potencia mitad:

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \mp \frac{1}{2RC}$$

- ▶ Los expresamos en función de  $Q$  y  $\omega_0$ :

$$\omega_{1,2} = \omega_0 \left( \sqrt{\left(\frac{1}{2Q_0}\right)^2 + 1} \mp \frac{1}{2Q_0} \right)$$

- ▶ La frecuencia de resonancia es la media geométrica (*no está en el centro del ancho de banda*).

$$\boxed{\omega_1 \cdot \omega_2 = \omega_0^2}$$

## Aproximación para circuitos con alto $Q_0$

- ▶ Cuando  $Q \geq 10$  podemos escribir:

$$\omega_1 \simeq \omega_0 \left( 1 - \frac{1}{2Q_0} \right) = \omega_0 - \frac{B}{2}$$
$$\omega_2 \simeq \omega_0 \left( 1 + \frac{1}{2Q_0} \right) = \omega_0 + \frac{B}{2}$$

- ▶ En circuitos de **alto factor de calidad**, la frecuencia de resonancia está **aproximadamente** en el **centro** del ancho de banda.

$$\omega_0 \simeq \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$$



## Admitancia en función de $\omega_0$ y $Q_0$

- Recordamos expresión de la admitancia:

$$\mathbf{Y}(\omega) = \frac{1}{R} + j(\omega C - \frac{1}{\omega L})$$

- Expresamos los componentes en función de  $Q$  y  $\omega_0$ :

$$Q_0 = \omega_0 CR \rightarrow C = \frac{Q_0}{\omega_0 R}$$
$$Q_0 = \frac{R}{\omega_0 L} \rightarrow \frac{1}{L} = \frac{\omega_0 Q_0}{R}$$

- Admitancia expresada en función de  $Q_0$  y  $\omega_0$ :

$$\boxed{\mathbf{Y}(\omega) = \frac{1}{R} \left[ 1 + jQ_0 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right]} \rightarrow \mathbf{Y}(\omega_0) = \frac{1}{R} = Y_0$$

# Desintonización Relativa

- Definimos la desintonización relativa

$$\epsilon = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \rightarrow \omega = \omega_0(1 + \epsilon)$$

- Expresamos la admitancia en función de  $\epsilon$ :

$$\mathbf{Y}(\omega) = Y_0 \left[ 1 + jQ_0 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right]$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}(\omega) &= Y_0 \left[ 1 + jQ_0 \left( (1 + \epsilon) - \frac{1}{1 + \epsilon} \right) \right] = \\ &= Y_0 \left[ 1 + jQ_0 \epsilon \left( \frac{2 + \epsilon}{1 + \epsilon} \right) \right] \end{aligned}$$

## Aproximación para cercanías de la resonancia

- Expresión exacta en función de  $\epsilon$ :

$$\mathbf{Y}(\omega) = Y_0 \left[ 1 + jQ_0\epsilon \left( \frac{2 + \epsilon}{1 + \epsilon} \right) \right]$$

- Aproximación para frecuencias cercanas a la resonancia ( $\epsilon \rightarrow 0$ ):

$$\mathbf{Y}(\omega) \simeq Y_0(1 + j2Q_0\epsilon)$$

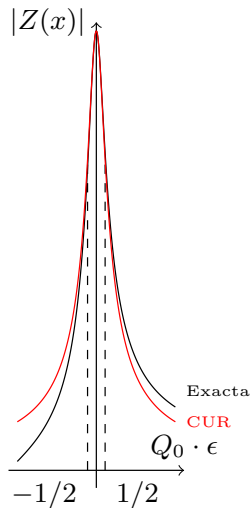
$$|\mathbf{Y}(\omega)| \simeq Y_0 \sqrt{1 + 4Q_0^2\epsilon^2}$$

# Curva Universal de Resonancia

- La **Curva Universal de Resonancia** (CUR) se obtiene invirtiendo y normalizando por  $Y_0$  esta expresión:

$$Z(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4x^2}}$$

$$x = Q_0 \cdot \epsilon$$



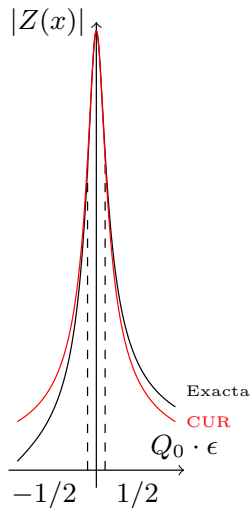
## Puntos de potencia mitad en la CUR

- ▶ La Curva Universal de Resonancia es simétrica: la frecuencia de resonancia está en el centro del ancho de banda.
- ▶ Retomamos la expresión aproximada de los puntos de potencia mitad:

$$\omega_{1,2} \simeq \omega_0 \left( 1 \mp \frac{1}{2Q_0} \right)$$

- ▶ Reescribimos usando la desintonización relativa:

$$\omega_{1,2} - \omega_0 \simeq \mp \frac{1}{2Q_0}$$



① Definiciones

② Circuito RLC paralelo

③ Circuito RLC serie

④ Otros circuitos

⑤ Factor de Calidad de Componentes

# Impedancia

- Impedancia

$$\mathbf{Z}(\omega) = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})$$

- Impedancia en función de  $\omega_0$  y  $Q_0$

$$\mathbf{Z}(\omega) = R \left[ 1 + jQ_0 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right]$$

- Impedancia en función de la desintonización relativa

$$\mathbf{Z}(\omega) = Z_0 \left[ 1 + jQ_0\epsilon \left( \frac{2 + \epsilon}{1 + \epsilon} \right) \right]$$

# Frecuencias

- Pulsación de Resonancia

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

- Puntos de Potencia Mitad

$$\omega_{1,2} = \mp \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}}$$

- Ancho de Banda

$$B = \omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L}$$

- Factor de Calidad

$$Q_0 = \frac{1}{\omega_0 CR} = \frac{\omega_0 L}{R}$$



# Tensiones y energías

## ► Tensiones en los elementos

$$U(\omega_0) = U_R(\omega_0)$$
$$U_L(\omega_0) = U_C(\omega_0) = Q_0 U$$

## ► Energías almacenadas

$$w_L(t) + w_c(t) = \frac{1}{2} L I_0^2$$
$$P_R = R I^2$$
$$w_{total} = \frac{Q_0}{2\pi} w_R$$

# Curva Universal de Resonancia

- ▶ Aproximación para cercanías de la resonancia

$$\mathbf{Z}(\omega) \simeq Z_0(1 + j2Q_0\epsilon)$$

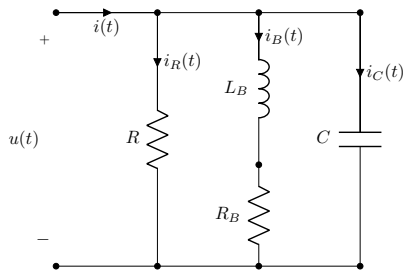
$$|\mathbf{Z}(\omega)| \simeq Z_0\sqrt{1 + 4Q_0^2\epsilon^2}$$

- ▶ Curva Universal de Resonancia

$$Y(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4x^2}}$$

- ① Definiciones
- ② Circuito RLC paralelo
- ③ Circuito RLC serie
- ④ Otros circuitos
- ⑤ Factor de Calidad de Componentes

## Circuito RLC con bobina real



La figura representa un circuito paralelo con una bobina real (con pérdidas). La impedancia de este circuito es:

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}(\omega) &= \frac{1}{R} + j\omega C + \frac{1}{R_B + j\omega L_B} = \\ &= \left( \frac{1}{R} + \frac{R_B}{R_B^2 + \omega^2 L_B^2} \right) + j \left( \omega C - \frac{\omega L_B}{R_B^2 + \omega^2 L_B^2} \right)\end{aligned}$$

# Impedancia

$$\mathbf{Y}(\omega) = \left( \frac{1}{R} + \frac{R_B}{R_B^2 + \omega^2 L_B^2} \right) + j \left( \omega C - \frac{\omega L_B}{R_B^2 + \omega^2 L_B^2} \right)$$

- Condición de Resonancia

$$\omega C - \frac{\omega L_B}{R_B^2 + \omega^2 L_B^2} = 0$$

- Pulsación de Resonancia

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{L_B C} - \left( \frac{R_B}{L_B} \right)^2}$$

## Comparación con RLC paralelo

- ▶ La frecuencia de resonancia es diferente a un RLC serie/paralelo:

$$\omega_0 \neq \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

- ▶ El valor máximo de la admitancia **no** se alcanza en la frecuencia de resonancia,  $\omega_{max} \neq \omega_0$ .
- ▶ Cuando la **bobina** tiene **bajas pérdidas (Q alto)**, el circuito puede simplificarse a un RLC paralelo.

- ① Definiciones
- ② Circuito RLC paralelo
- ③ Circuito RLC serie
- ④ Otros circuitos
- ⑤ Factor de Calidad de Componentes

# Factor de Calidad

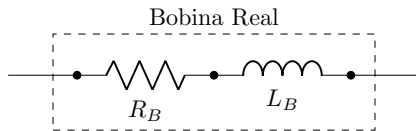
- Retomamos la definición del factor de calidad como ratio entre la **máxima energía almacenada** y la **energía disipada en un período**.

$$Q(\omega) = 2\pi \frac{\max\{w_x(t)\}}{T \cdot P_R}$$



# Bobina Real

- ▶ Una bobina real tiene pérdidas resistivas debidas al hilo conductor\*.
- ▶ Se modela como una conexión serie de una bobina ideal y una resistencia.

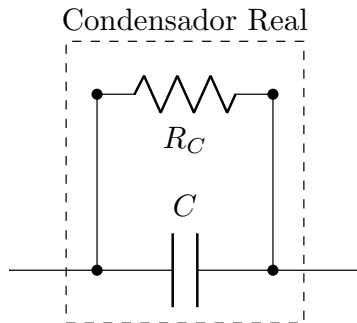


$$\left. \begin{array}{l} \max\{w_L(t)\} = \frac{1}{2}L_B I_o^2 = L_B I^2 \\ p_R(t) = R_B I^2 \end{array} \right\} \rightarrow \boxed{Q(\omega) = \frac{\omega L_B}{R_B}}$$

---

\*En algunos textos se emplea la tangente de pérdidas para caracterizar a la bobina real, siendo  $\tan \delta = 1/Q$ .

# Condensador Real

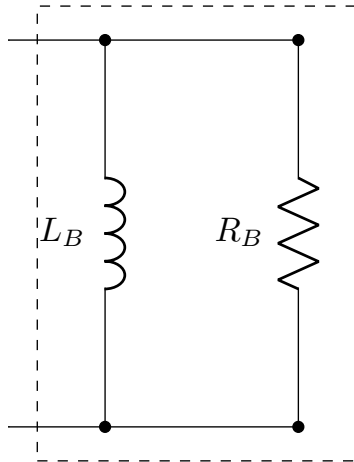


$$\left. \begin{aligned} \max\{w_C(t)\} &= \frac{1}{2}CU_o^2 = CU^2 \\ p_R(t) &= G_C U^2 \end{aligned} \right\} \rightarrow \boxed{Q(\omega) = \omega C R_C}$$

## Ejercicio

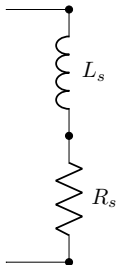
Demuestra que la expresión del factor de calidad de una bobina con pérdidas modelada como un circuito paralelo es:

$$Q = \frac{R_B}{\omega L_B}$$

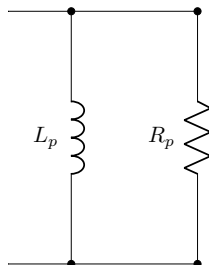


## Conversión serie-paralelo

$$\mathbf{Y}_s(\omega) = \frac{R_s - j\omega L_s}{R_s^2 + (\omega L_s)^2}$$



$$\mathbf{Y}_p(\omega) = \frac{1}{R_p} - j\frac{1}{\omega L_p}$$

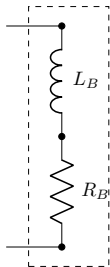


$$\left. \begin{aligned} R_p &= \frac{R_s^2 + (\omega L_s)^2}{R_s} \\ \omega L_p &= \frac{R_s^2 + (\omega L_s)^2}{\omega L_s} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\omega L_s}{R_s} = \frac{R_p}{\omega L_p} \Rightarrow \boxed{Q_p = Q_s}$$

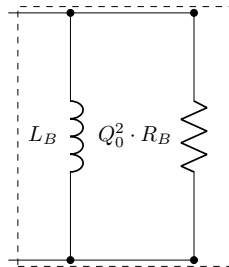
# Conversión serie-paralelo

$$\begin{aligned} R_p &= R_s + \frac{(\omega L_s)^2}{R_s} \xrightarrow{\omega L_s = Q_s \cdot R_s} \boxed{R_p = R_s(1 + Q_s^2)} \\ \omega L_p &= \omega L_s + \frac{R_s^2}{\omega L_s} \xrightarrow{R_s = \omega L_s / Q_s} \boxed{L_p = L_s(1 + 1/Q_s^2)} \end{aligned}$$

Para bobinas con alto factor de calidad ( $Q \geq 10$ )

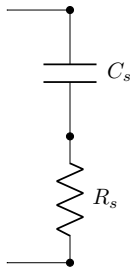


$$\begin{aligned} R_p &\simeq Q^2 \cdot R_s \\ L_p &\simeq L_s \end{aligned}$$

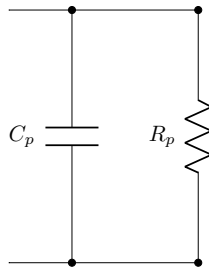


## Conversión Serie-Paralelo

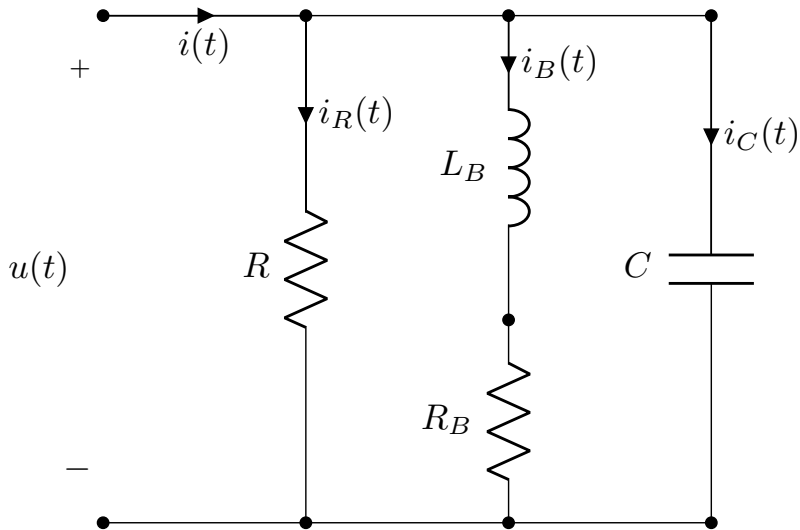
Empleando ecuaciones similares se puede demostrar la siguiente transformación para un condensador de alto factor de calidad:



$$\begin{aligned} R_p &\simeq Q^2 \cdot R_s \\ C_p &\simeq C_s \end{aligned}$$



## Aplicación: transformación de circuito RLC



## Ejercicios Recomendados

- ▶ AS: ejemplos 14.7 y 14.8
- ▶ HKD: página 641 (voltímetro), y práctica 16.8
- ▶ PO: problemas 23.5 y 23.7