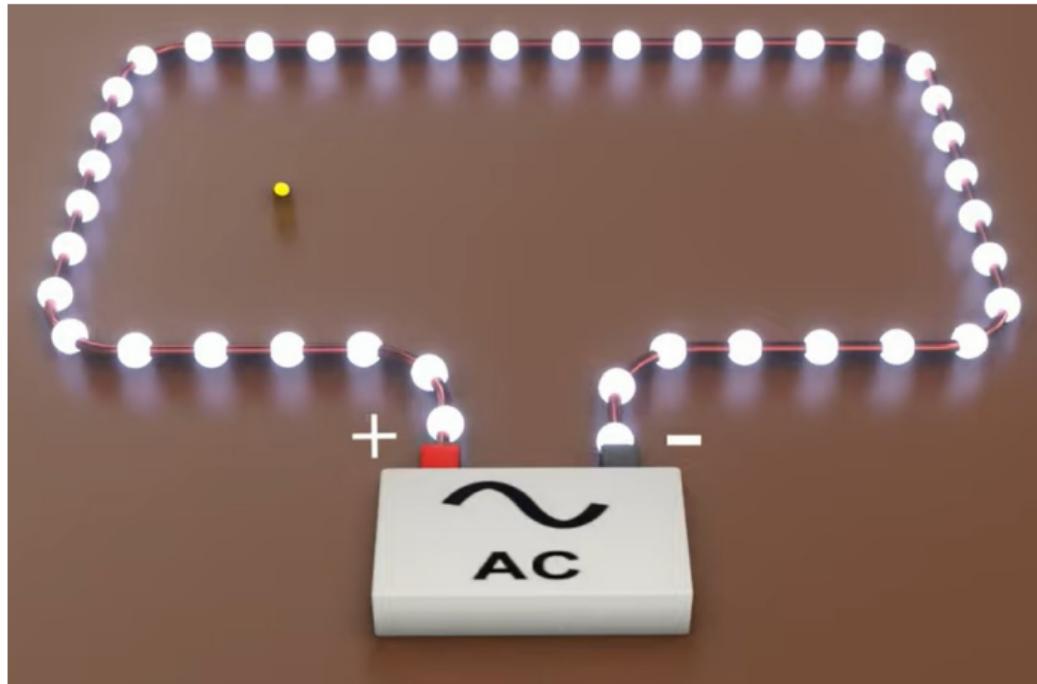


# Corriente alterna senoidal

Teoría de Circuitos

Autor: Luis Badesa Bernardo

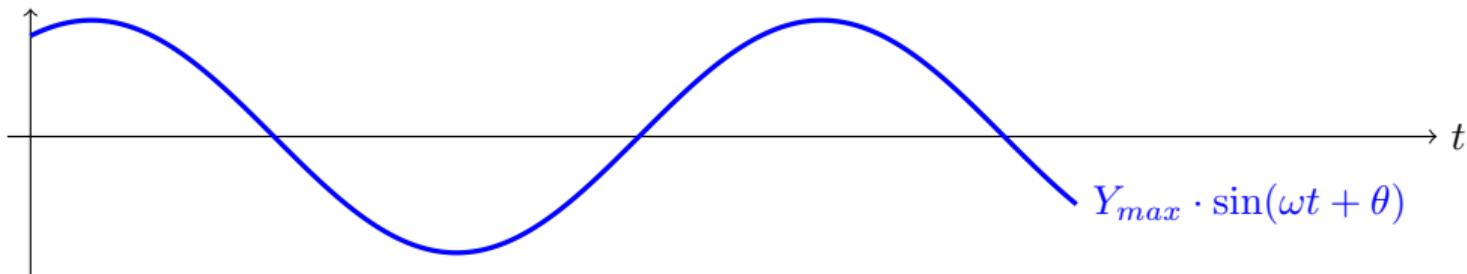
(clica en la imagen)



- ① Formas de onda**
- ② Onda senoidal**
- ③ Cálculo fasorial**
- ④ Respuesta de elementos pasivos a excitación senoidal**
- ⑤ Potencia en corriente alterna**

# Forma de onda

- ▶ La salida de los generadores (de tensión o de corriente) es una función que puede variar con el tiempo
- ▶ La dependencia funcional  $u = u(t)$  o  $i = i(t)$  se denomina forma de onda
- ▶ En este Tema 2 vamos a centrarnos en **formas de onda periódicas** (su valor se repite a intervalos regulares) y, en concreto, en **señales senoidales**



# Formas de onda periódicas

$$y(t) = y(t + T) = y(t + n \cdot T)$$

donde  $n \in \mathbb{Z}$  (número entero)

- ▶ **Periodo ( $T$ )**: intervalo de tiempo a partir del cual se repite la forma de onda [s]
- ▶ **Frecuencia ( $f$ )**: número de repeticiones de la onda por unidad de tiempo [Hz]

$$f = \frac{1}{T}$$

- ▶ **Valor instantáneo ( $y(t)$ )**: valor que toma la forma de onda en un instante  $t$
- ▶ **Valores de pico ( $Y_{max}, Y_{min}$ )**: valores máximo y mínimo que toma la forma de onda

$$Y_{max} = \max[f(t)] \quad Y_{min} = \min[f(t)]$$

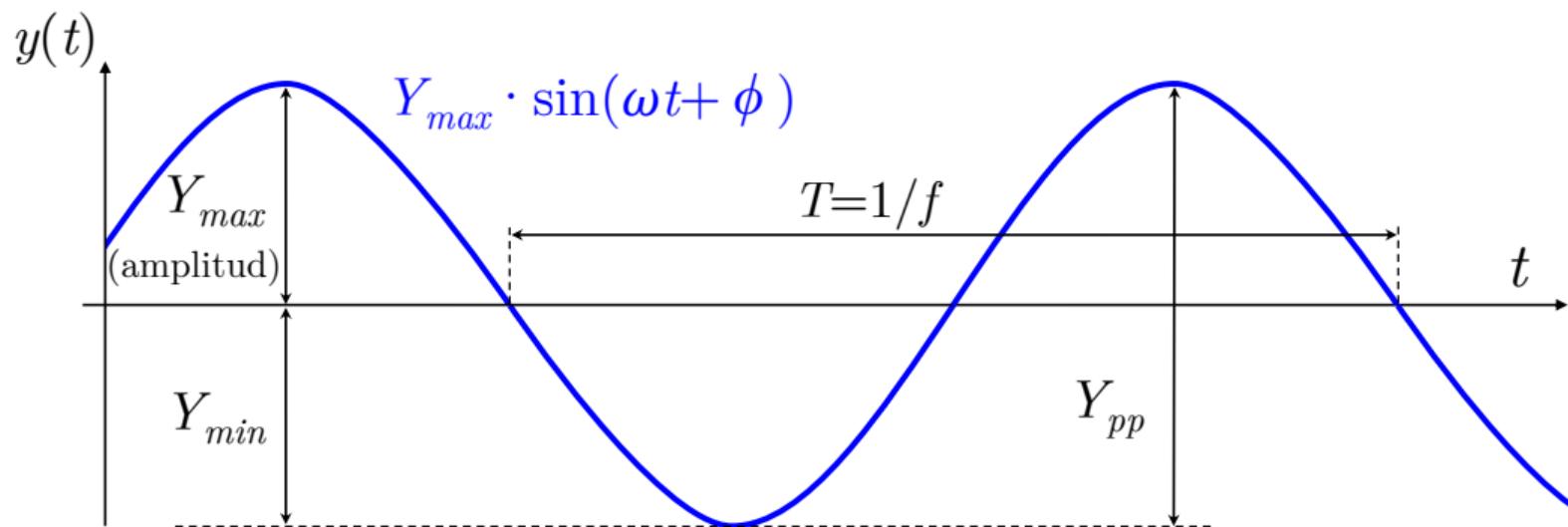
Para ondas centradas ( $Y_{max} = -Y_{min}$ ), el valor de pico también se denomina **amplitud**

- ▶ **Valor pico a pico ( $Y_{PP}$ )**: diferencia (en valor absoluto) entre los valores de pico considerados con signo

$$Y_{PP} = |Y_{max} - Y_{min}|$$

# Formas de onda periódicas

- ▶ Caso particular: **función senoidal** (señal centrada)



## Formas de onda periódicas: valores característicos

- **Valor medio ( $Y_m$ )**: media aritmética de los valores instantáneos que toma la función en un periodo (o semiperiodo, o cuarto de periodo)

$$Y_m = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} y(t) dt$$

- **Valor eficaz ( $Y_{ef}$ )**: raíz cuadrada de la media de los cuadrados de los valores que toma la función en un periodo

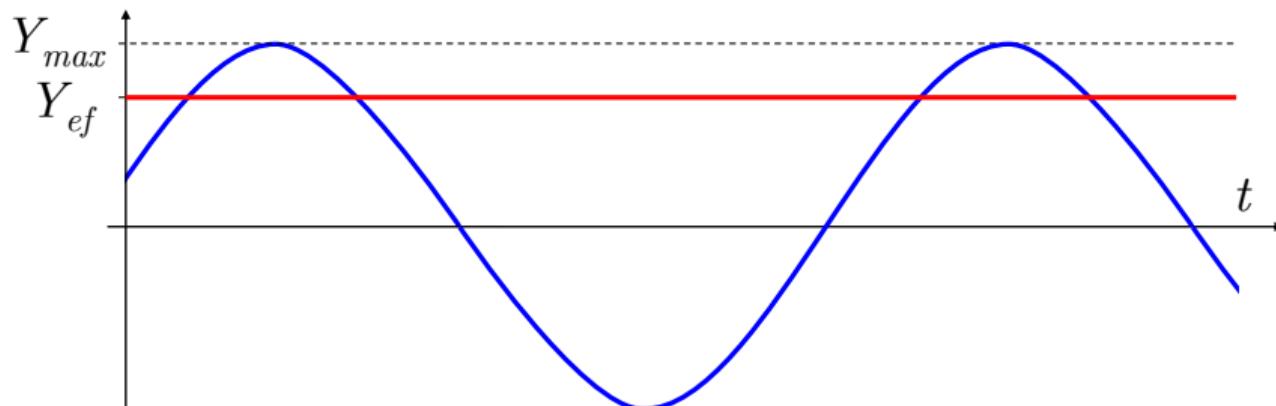
$$Y_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_a^{a+T} y^2(t) dt}$$

También denominado “valor RMS”, del inglés *root mean square*

El valor eficaz es de especial interés en teoría de circuitos para **cálculos relacionados con la potencia**, como veremos más adelante

## Formas de onda periódicas: valor eficaz

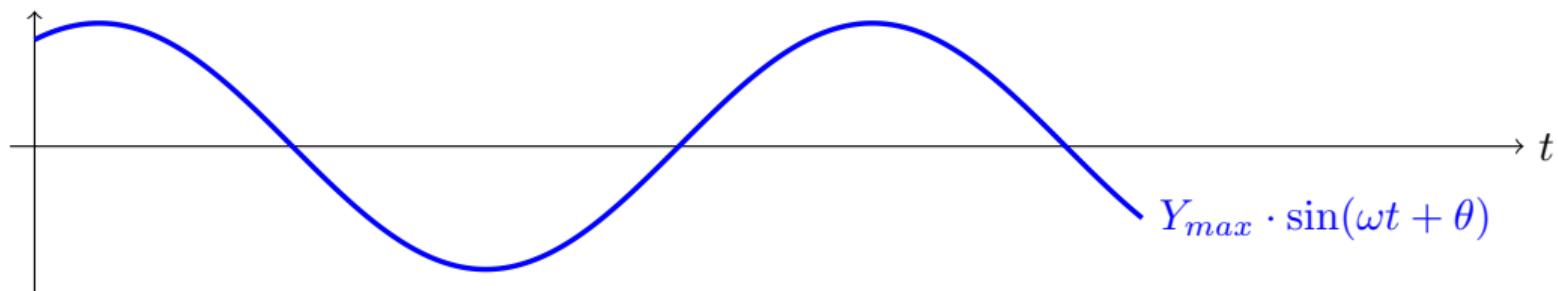
- ▶ Caso particular: valor eficaz de una **onda senoidal**



- ▶ ¿Por qué usamos el valor eficaz en corriente alterna? Porque establece un **paralelismo con la corriente continua**, que nos permitirá simplificar cálculos:  
El valor eficaz es igual al valor de una corriente continua constante que, al circular por una determinada resistencia, **produciría la misma dissipación de potencia** que la corriente alterna que estamos considerando

- 1** Formas de onda
- 2** Onda senoidal
- 3** Cálculo fasorial
- 4** Respuesta de elementos pasivos a excitación senoidal
- 5** Potencia en corriente alterna

## Onda senoidal, definición



$$y(t) = Y_o \cdot \sin(\omega \cdot t + \theta)$$

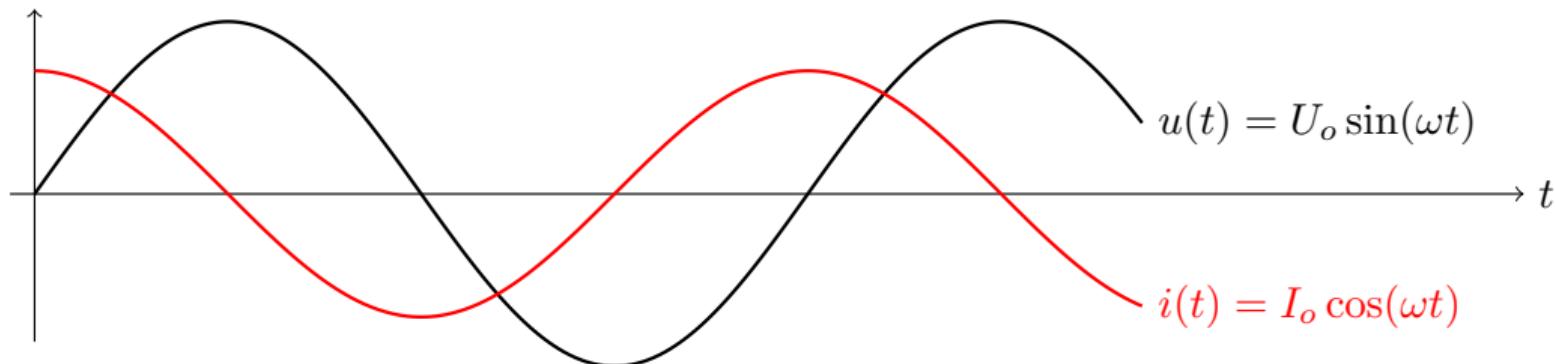
- ▶  $Y_{max}$  o  $Y_o$  : valor máximo de la onda
- ▶  $T$  : periodo de la onda (segundos)
- ▶  $\theta$  : fase (radianes o grados). También suelen usarse las letras griegas  $\phi$  y  $\varphi$
- ▶  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  : pulsación (rad/s)
- ▶  $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T}$  : frecuencia (Hz)

## Fase



- ▶ Es el argumento de la función senoidal para  $t = 0$
- ▶ Tomando una onda como referencia, si la **fase de otra onda es de  $0^\circ$** , está **en fase** con la de referencia
- ▶ Si la **fase es positiva**, la onda **adelanta** a la referencia
- ▶ Si la **fase es negativa**, la onda **retrasa** a la referencia

## Señales en cuadratura



- ▶ Cuando el **desfase entre dos señales es de  $90^\circ$**  ( $\theta_I - \theta_U = \pi/2$ ), se dice que están en **cuadratura**
- ▶ El paso por cero de una señal coincide con el paso por el máximo/mínimo de la otra señal

# Valor medio y valor eficaz de una onda senoidal

## Valor medio

En un periodo:

$$Y_m = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T Y_o \cdot \sin(\omega \cdot t + \theta) dt = \boxed{0}$$

En un semiperíodo positivo ( $\theta = 0^\circ$ ):

$$Y_m = \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} Y_{max} \cdot \sin(\omega \cdot t) dt = \frac{2 \cdot Y_{max}}{\pi} \approx 0,637 \cdot Y_{max}$$

## Valor eficaz

$$Y = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T y^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T [Y_{max} \cdot \sin(\omega \cdot t + \theta)]^2 dt} = \boxed{\frac{Y_{max}}{\sqrt{2}}}$$

Interudio: *Alternating Current ⚡ Direct Current*



- ① Formas de onda**
- ② Onda senoidal**
- ③ Cálculo fasorial**
- ④ Respuesta de elementos pasivos a excitación senoidal**
- ⑤ Potencia en corriente alterna**

# Recordatorio de 1LK

- ▶ La **1LK** es el principio de **conservación de la carga** aplicado a los circuitos eléctricos:

La suma de las corrientes que llegan a un nudo es igual a la suma de las que salen

$$\sum_{j=1}^n i_j(t) = 0$$

La conservación de la carga **aplica a cada instante**, luego 1LK también **aplica en corriente alterna**

Por lo tanto, vamos a sumar corrientes senoidales a menudo en este tema, para lo cual será muy útil el **cálculo fasorial**

# Recordatorio de 2LK

- La **2LK** es el principio de **conservación de la energía** aplicado a los circuitos:

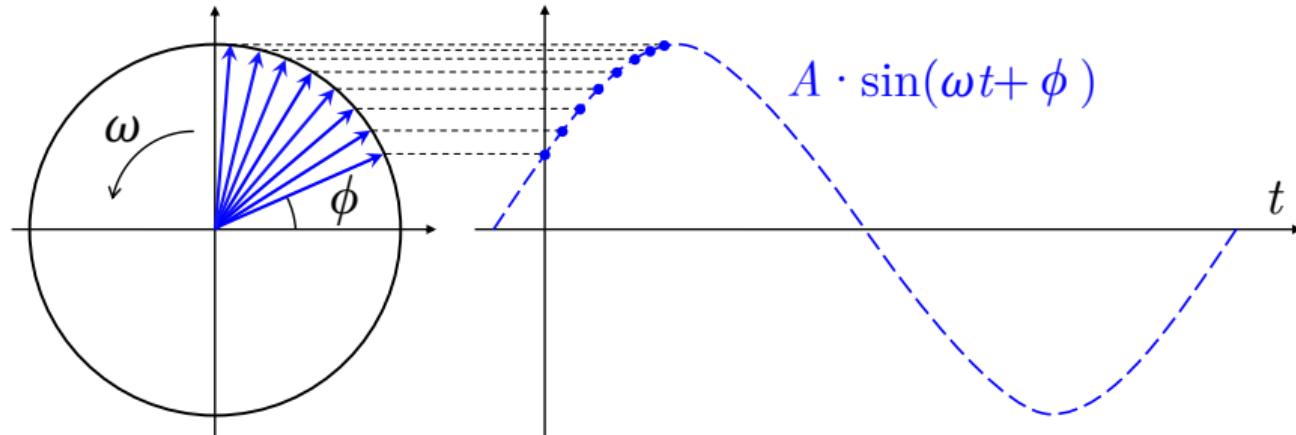
La suma (con signo) de las tensiones a lo largo de un camino cerrado es cero

$$\sum_{j=1}^m u_j(t) = 0$$

La conservación de la energía **aplica a cada instante** → 2LK también **aplica en corriente alterna**

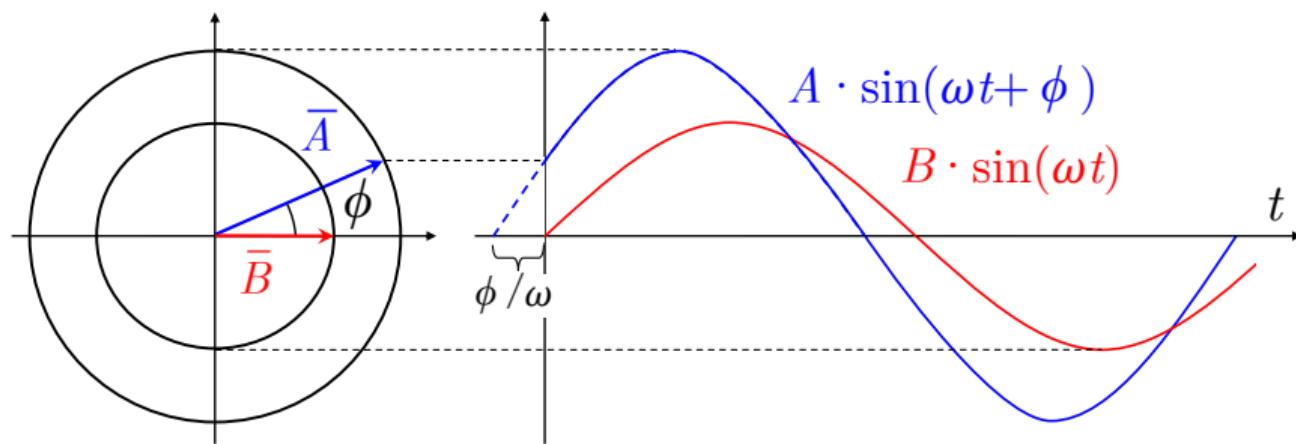
Vamos a sumar tensiones senoidales a menudo en este tema → será muy útil el **cálculo fasorial**

# Representación fasorial



- Un **fasor** es un artefacto matemático **útil para simplificar cálculos** con señales senoidales
- El término “fasor” viene del inglés *phasor*, forma corta de *phase vector* (vector de fase)
- Al **rotar en sentido antihorario** con velocidad angular  $\omega$ , la proyección del fasor sobre el eje vertical es igual al valor de la señal senoidal en cada instante .

# Representación fasorial

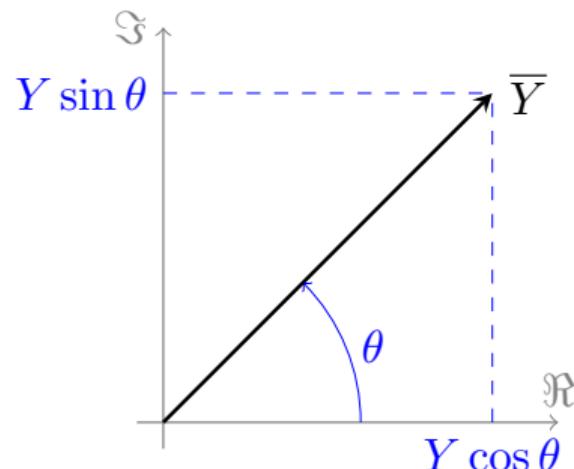


- ▶ Una señal senoidal **se representa mediante un único fasor**
- ▶ Para definir el fasor correspondiente a cada señal, tomamos como origen de fases una de las señales presentes en el circuito (e.g., la tensión en bornes de una fuente)

# Representación fasorial

- Un fasor se representa matemáticamente mediante un **número complejo** (**repaso** de complejos y trigonometría):

$$\overline{Y} = \underbrace{Y_{ef} \angle \theta}_{\text{forma polar}} = \underbrace{Y_{ef} \cdot [\cos(\theta) + j \cdot \sin(\theta)]}_{\text{forma binómica}} \stackrel{\text{fórmula de Euler}}{\downarrow} \underbrace{Y_{ef} \cdot e^{j\theta}}_{\text{forma exponencial}}$$



Usamos  **$j$  para la constante imaginaria**, en lugar de  $i$ , ya que en el análisis de circuitos  $i$  se usa para intensidad

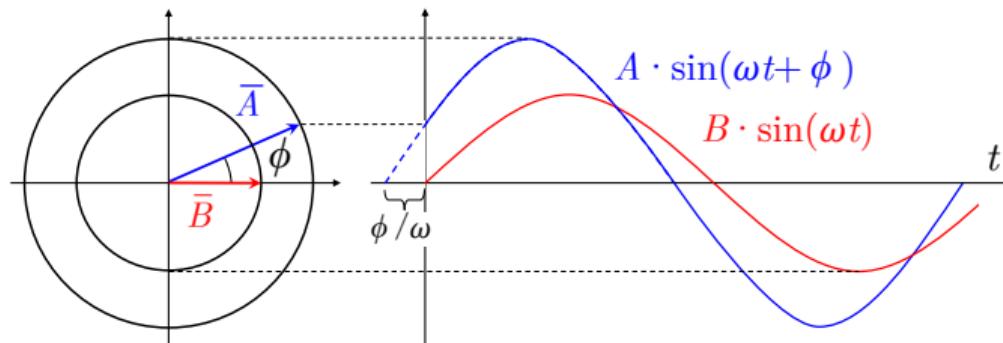
- El **argumento** del fasor es la **fase** de la onda. El **módulo** es el **valor eficaz** de la onda, **NO su amplitud**

# Representación fasorial

- El **argumento** del fasor es la **fase** de la onda. El **módulo** es el valor eficaz de la onda, **NO su amplitud**

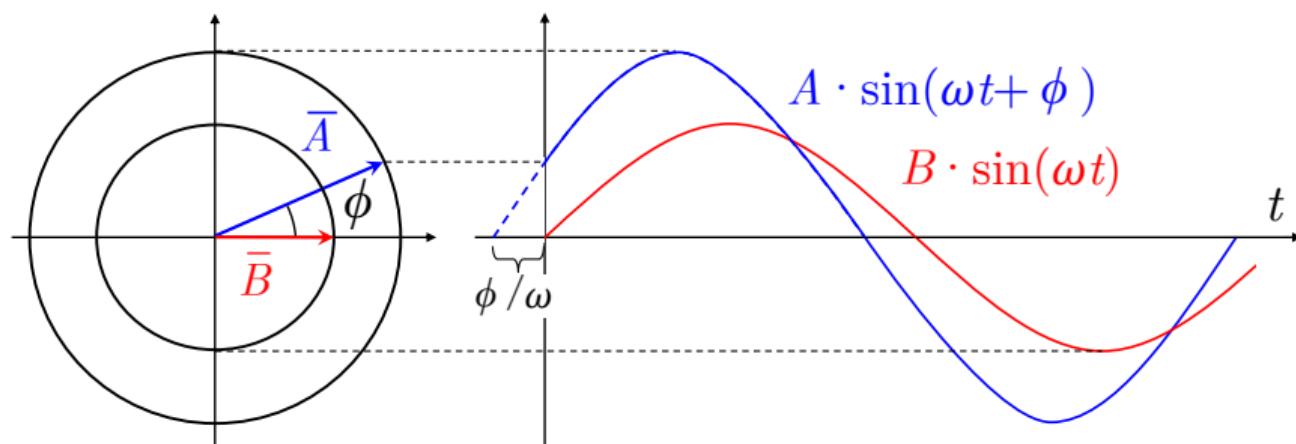
Se toma el valor eficaz por **conveniencia a la hora de calcular la potencia producida/consumida** en circuitos de corriente alterna, directamente operando con fasores

**Nota:** en varios gráficos de estas diapositivas, el módulo de los fasores corresponde a la amplitud de la onda, y no a su valor eficaz  
Esto se debe simplemente a claridad en la representación gráfica

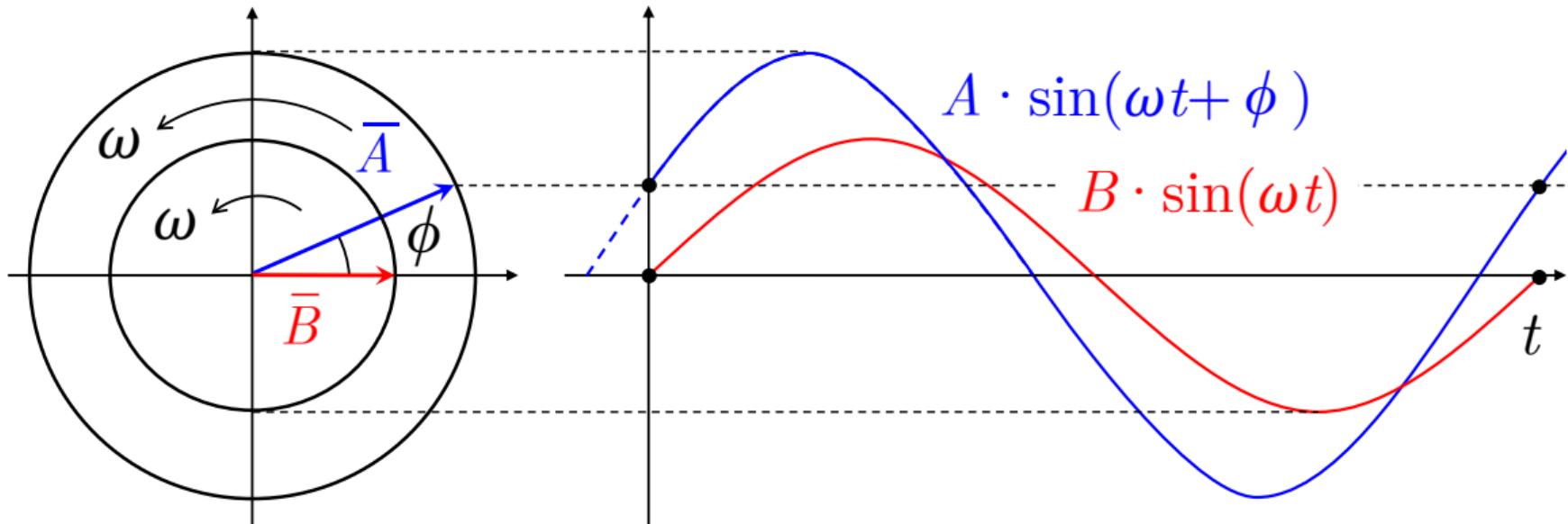


# Representación fasorial

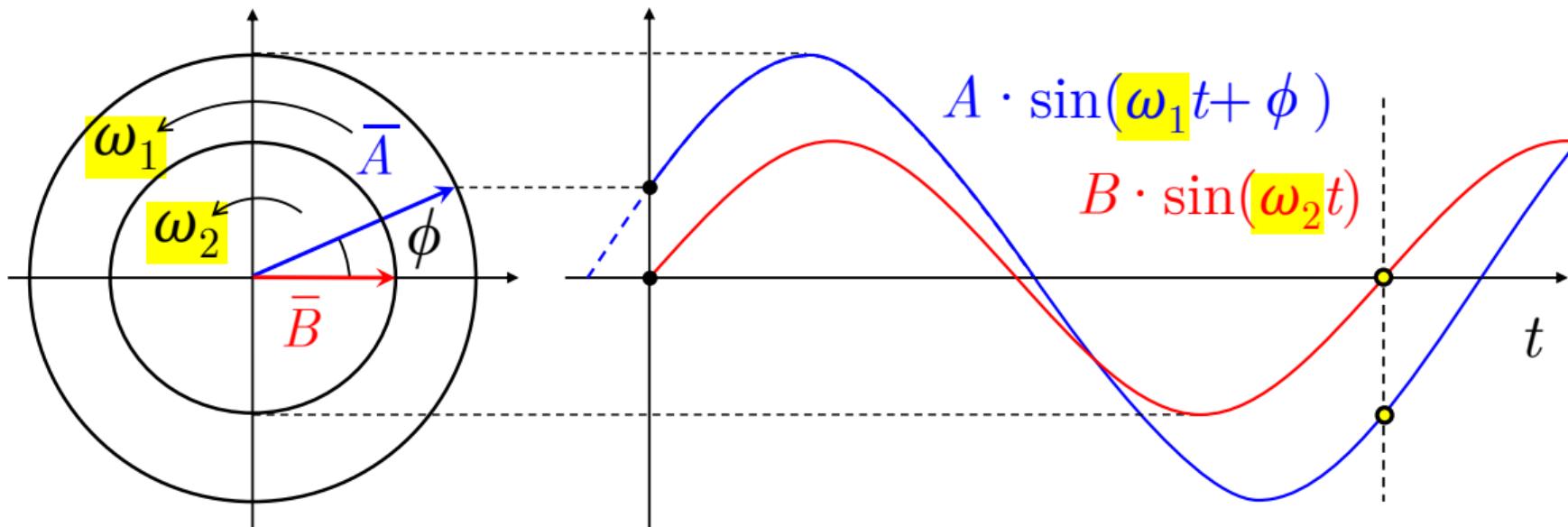
- ▶ Los fasores **representan las relaciones entre los valores eficaces y las fases** de las distintas señales presentes en el circuito, siempre asumiendo una frecuencia determinada
- ▶ Por lo tanto, las operaciones con fasores **solo son válidas entre señales de la misma frecuencia**



Importante: el cálculo fasorial es válido para señales de igual  $\omega$



...pero NO para señales de distinta frecuencia ( $\omega_1 \neq \omega_2$ )



## Cálculo fasorial: propiedades de la función senoidal

Las razones por las que podemos usar cálculo fasorial para **simplificar operaciones entre señales senoidales** son dos propiedades importantes de la función senoidal:



$$A_1 \cdot \sin(\omega t + \theta_1) + A_2 \cdot \sin(\omega t + \theta_2) = A_3 \cdot \sin(\omega t + \theta_3)$$

Para sumar señales senoidales, podemos simplemente **sumar sus fasores correspondientes** (recuerda que 1LK y 2LK implican sumas)



$$\frac{d^n \sin(\omega t + \theta_1)}{dt^n} = C_2 \sin(\omega t + \theta_2), \quad \int \dots \int \sin(\omega t + \theta_1) dt \dots dt = C_3 \sin(\omega t + \theta_3) + k$$

Las **tensiones y corrientes en bobinas y condensadores** (cuyas ecuaciones de definición contienen derivadas e integrales de estas magnitudes), **pueden expresarse mediante fasores**

## Operaciones con fasores

Suma gráfica de dos fasores  $\bar{Y}_1$  e  $\bar{Y}_2$ , y sus correspondientes señales temporales:  
**(clica en la imagen)**

## Operaciones con fasores

- Un fasor **captura la información clave de una onda senoidal** para los propósitos del análisis de circuitos: su valor eficaz y su fase
- Nos permite **operar con ondas senoidales como si fueran vectores/números complejos**

$$\begin{aligned}\bar{Y}_1 &= \underbrace{Y_{ef_1} \cos(\theta_1)}^{a_1} + j \underbrace{Y_{ef_1} \sin(\theta_1)}^{b_1} = Y_{ef_1} / \underline{\theta_1} \\ \bar{Y}_2 &= \underbrace{Y_{ef_2} \cos(\theta_2)}_{a_2} + j \underbrace{Y_{ef_2} \sin(\theta_2)}_{b_2} = Y_{ef_2} / \underline{\theta_2}\end{aligned}$$

Forma binómica:

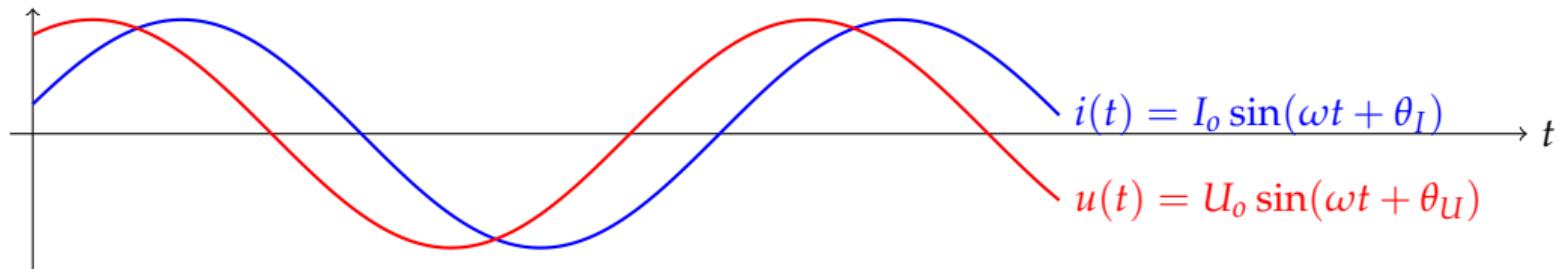
- Suma:  $\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$
- Resta:  $\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2 = (a_1 - a_2) + j(b_1 - b_2)$

Forma polar:

- Multiplicación:  $\bar{Y}_1 \cdot \bar{Y}_2 = (Y_{ef_1} \cdot Y_{ef_2}) / \underline{\theta_1 + \theta_2}$
- División:  $\frac{\bar{Y}_1}{\bar{Y}_2} = \frac{Y_{ef_1}}{Y_{ef_2}} / \underline{\theta_1 - \theta_2}$

- ① Formas de onda
- ② Onda senoidal
- ③ Cálculo fasorial
- ④ Respuesta de elementos pasivos a excitación senoidal
- ⑤ Potencia en corriente alterna

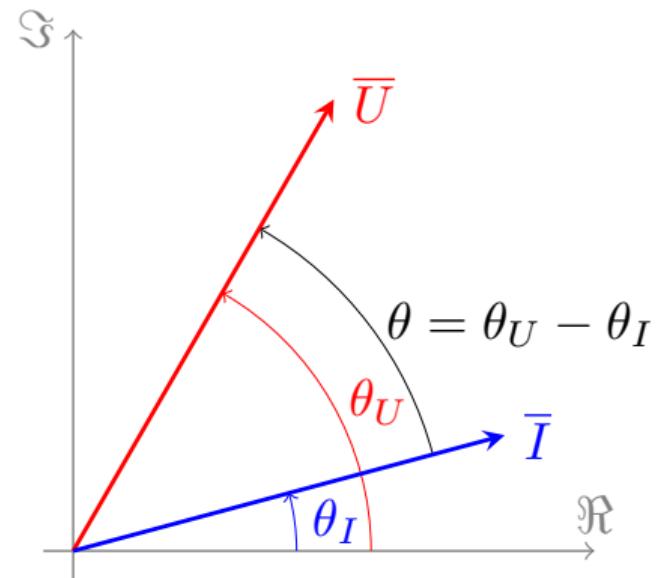
# Impedancia: relación entre fasores de tensión y corriente



$$\bar{U} = \bar{Z} \cdot \bar{I} \quad (\text{equiv. a ley de Ohm})$$

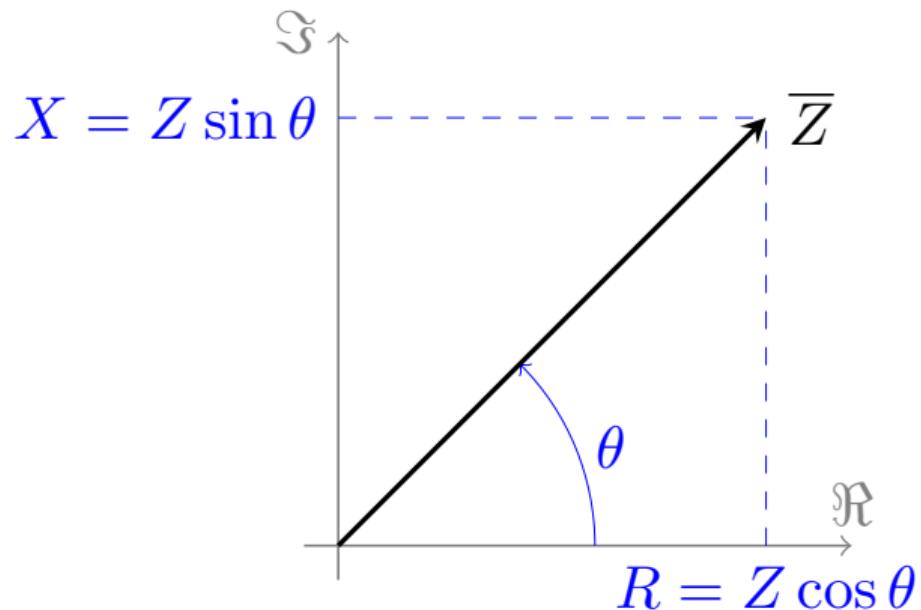
$$\bar{Z} = \frac{\bar{U}}{\bar{I}}$$

$$\boxed{\bar{Z} = \frac{U}{I} / \underline{\theta_U - \theta_I} \Rightarrow \begin{cases} Z = \frac{U}{I} \\ \theta = \theta_U - \theta_I \end{cases}}$$



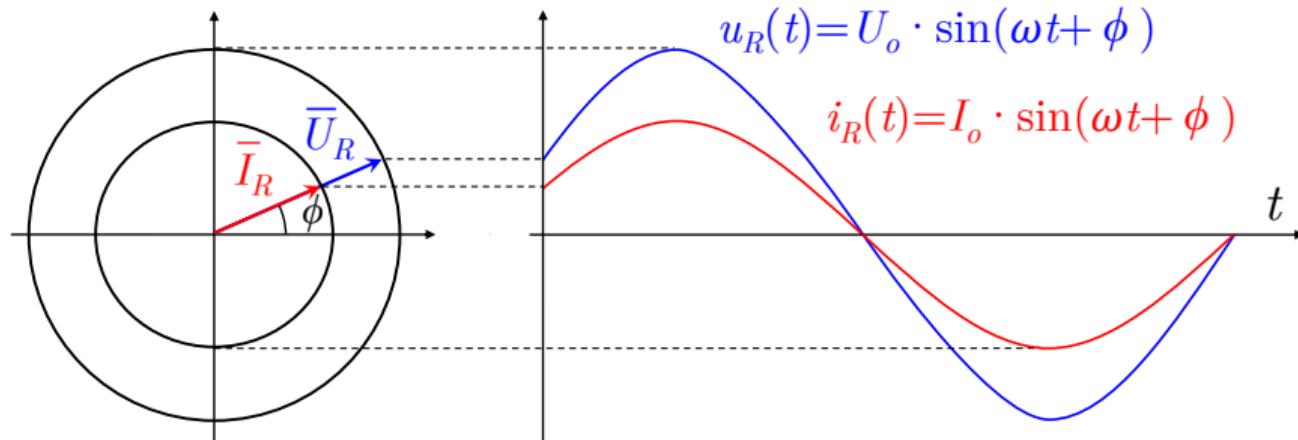
# Impedancia genérica

$$\bar{Z} = Z \cdot \cos(\theta) + j Z \cdot \sin(\theta) = \underbrace{R}_{\text{resistencia}} + j \underbrace{X}_{\text{reactancia}}$$



# Circuito resistivo

Un circuito resistivo no introduce desfase entre señales (**tensión y corriente en fase**)



ley de Ohm

$$i(t) = I\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \theta_I)$$

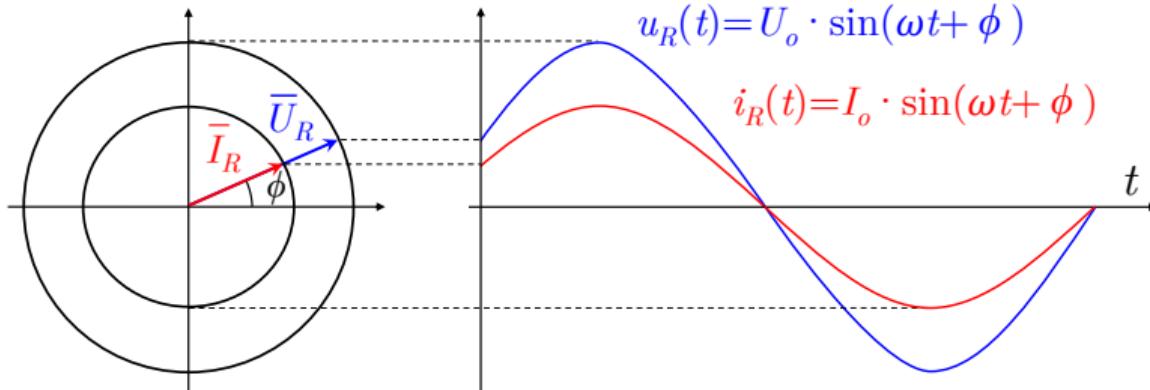
$$\downarrow \\ u(t) = R \cdot i(t) = R \cdot I\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \theta_I) = U\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \theta_I)$$

---

(a partir de ahora, la notación  $U$  e  $I$  se refiere directamente a **valores eficaces**)

# Circuito resistivo

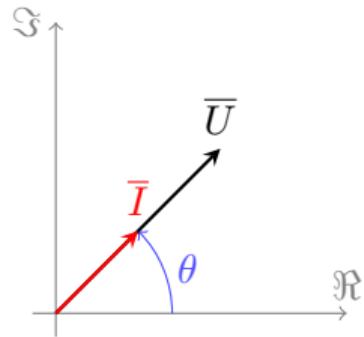
Un circuito resistivo no introduce desfase entre señales (**tensión y corriente en fase**)



$$Z = \frac{U}{I} = R$$

$$\theta = \theta_U - \theta_I = 0^\circ$$

$$\boxed{\bar{Z}_R = R/0^\circ}$$



## Carga y descarga de una bobina

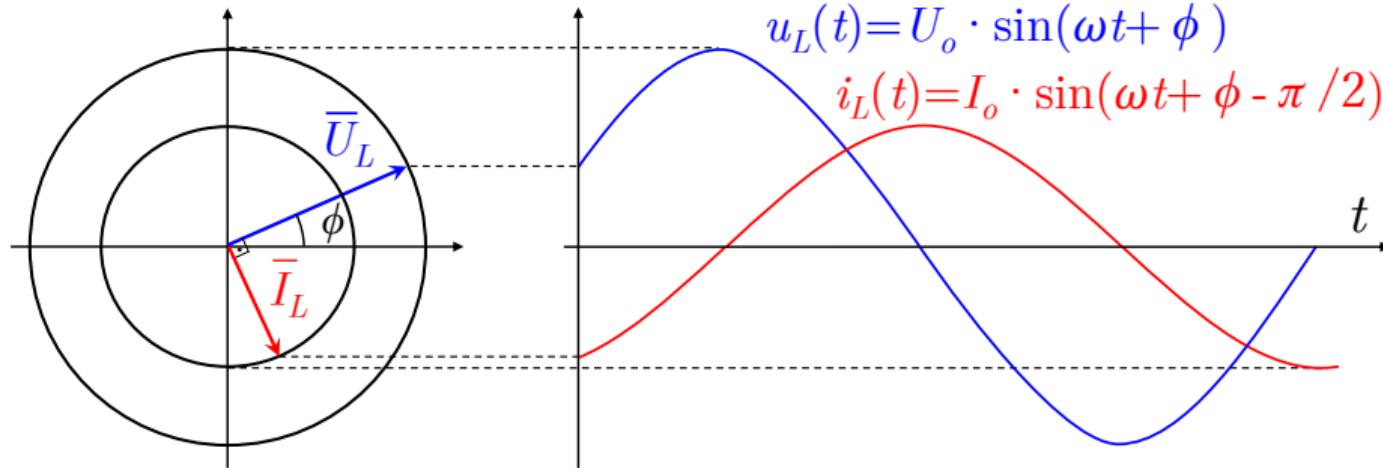
- La bobina **almacena energía magnética** cuando circula por ella una corriente

$$E_L = \frac{1}{2} \cdot L \cdot i_L^2(t)$$

Cuando el módulo de la corriente que circula por la bobina disminuye, **devuelve su energía almacenada** al circuito **(clica en la imagen)**

# Circuito inductivo puro

Un circuito inductivo puro genera **señales en cuadratura** y retrasa la corriente.



ley de  
Faraday

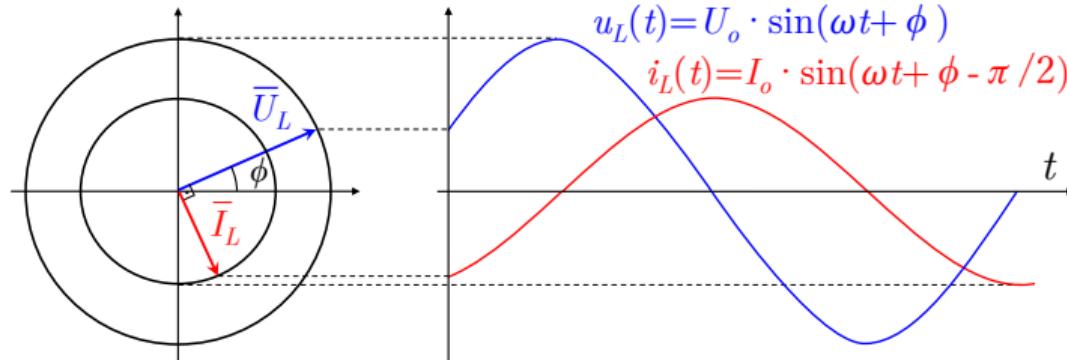
$$i(t) = I\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \theta_I)$$

$$u(t) \stackrel{\downarrow}{=} L \cdot \frac{di(t)}{dt} = \omega L \cdot I\sqrt{2} \cdot \cos(\omega t + \theta_I) = U\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \theta_I + \pi/2)$$

La bobina se carga cuando  
 $\frac{d|i_L|}{dt} > 0$ , y descarga cuando  $\frac{d|i_L|}{dt} < 0$

# Circuito inductivo puro

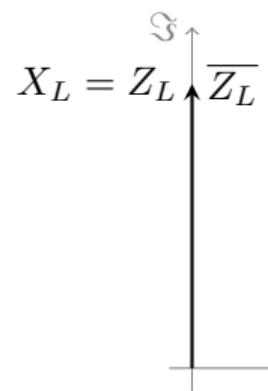
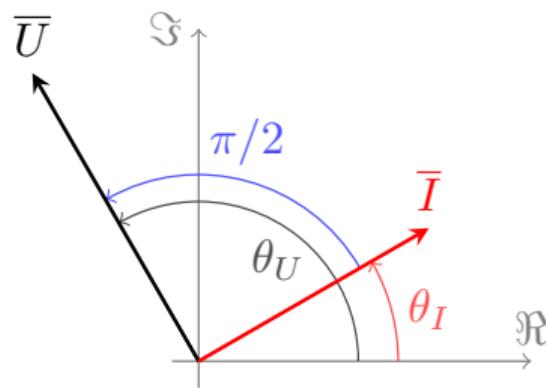
Un circuito inductivo puro genera **señales en cuadratura** y retrasa la corriente



$$Z = \frac{U}{I} = \omega L$$

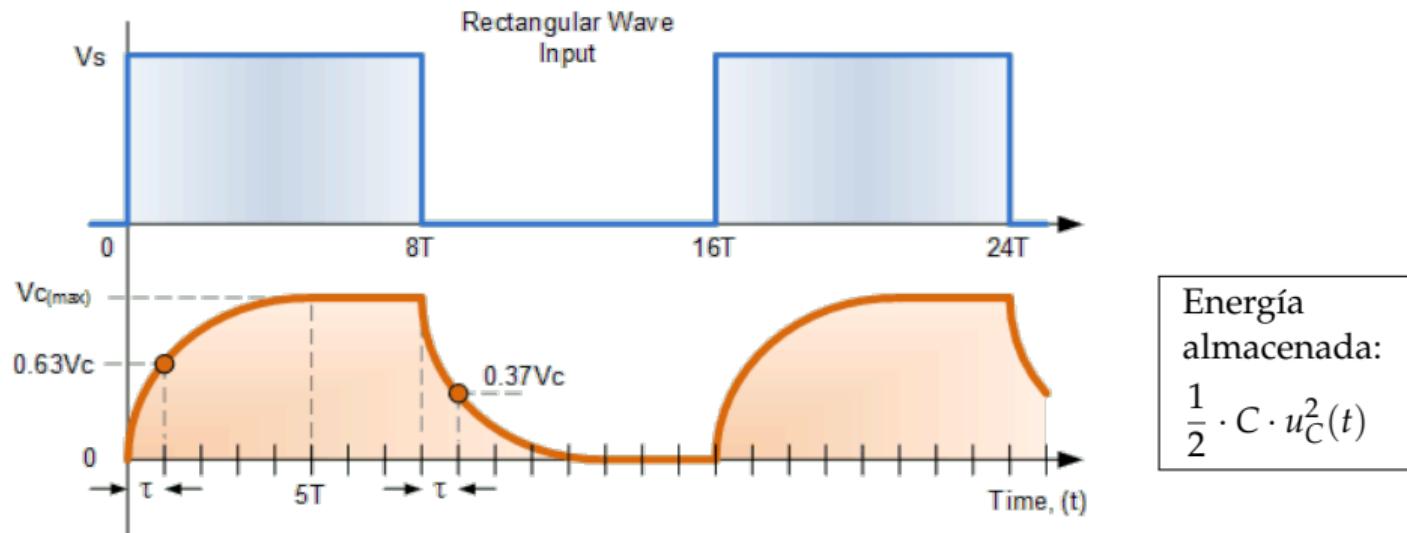
$$\theta = \theta_U - \theta_I = \frac{\pi}{2}$$

$$\bar{Z}_L = j\omega L = \omega L / 90^\circ$$



# Carga y descarga de un condensador

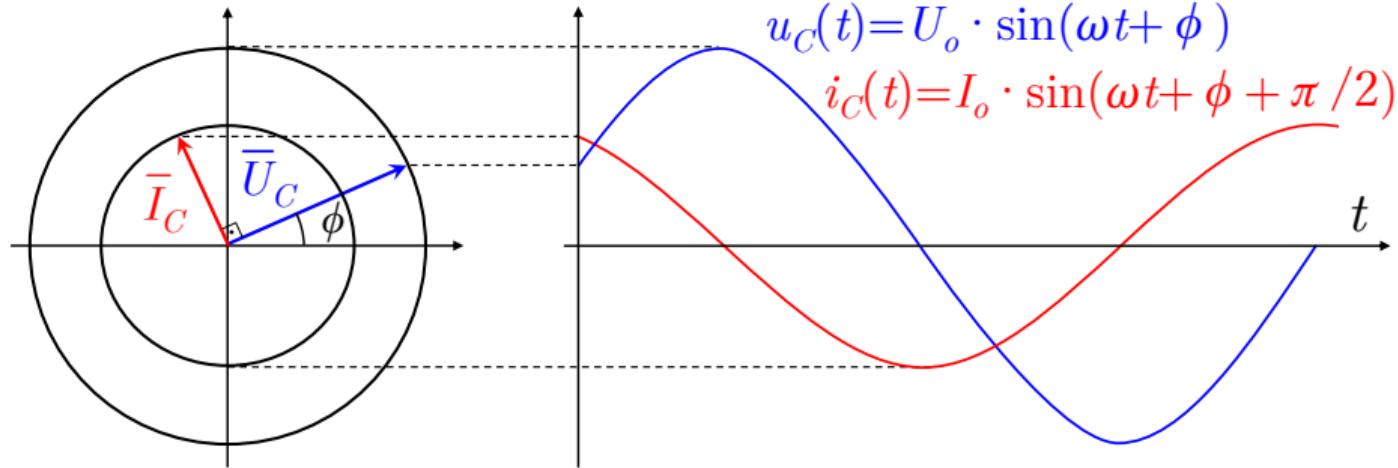
- ▶ Si se excita un condensador con pulsos rectangulares de tensión, se **almacena energía eléctrica, que luego se devuelve al circuito** en los semiciclos sin excitación



- ▶ Con **excitación alterna senoidal**, el condensador también se carga y descarga
  - ▶ Sin embargo, la tensión en el condensador nunca llega a estabilizarse, porque la excitación senoidal cambia todo el rato (siguiente diapositiva)

# Circuito capacitivo puro

Un circuito capacitivo puro genera **señales en cuadratura** y adelanta la corriente.



definición  
de condensador

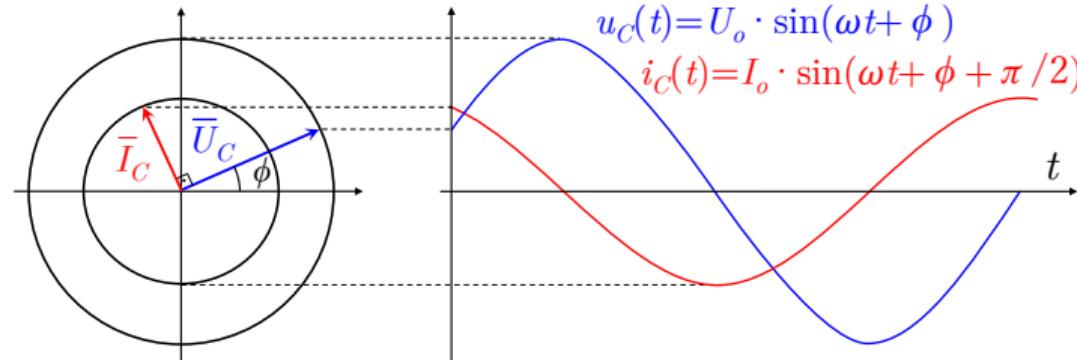
$$i(t) = I \sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \theta_I)$$

El condensador se carga cuando  $\frac{d|u_C|}{dt} > 0$ , y descarga cuando  $\frac{d|u_C|}{dt} < 0$

$$u(t) \stackrel{\downarrow}{=} \frac{1}{C} \cdot \int_{-\infty}^t i(\tau) \cdot d\tau = \frac{I}{\omega C} \sqrt{2} \cdot [-\cos(\omega t + \theta_I)] = U \sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \theta_I - \pi/2)$$

# Circuito capacitivo puro

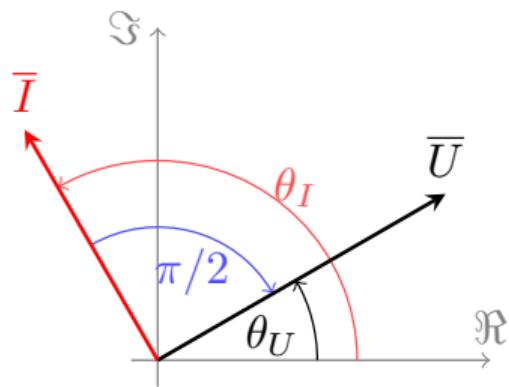
Un circuito capacitivo puro genera **señales en cuadratura** y adelanta la corriente



$$Z = \frac{U}{I} = \frac{1}{\omega C}$$

$$\theta = \theta_U - \theta_I = -\frac{\pi}{2}$$

$$\bar{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{\omega C} \angle -90^\circ$$



$$X = Z_C \angle -90^\circ$$

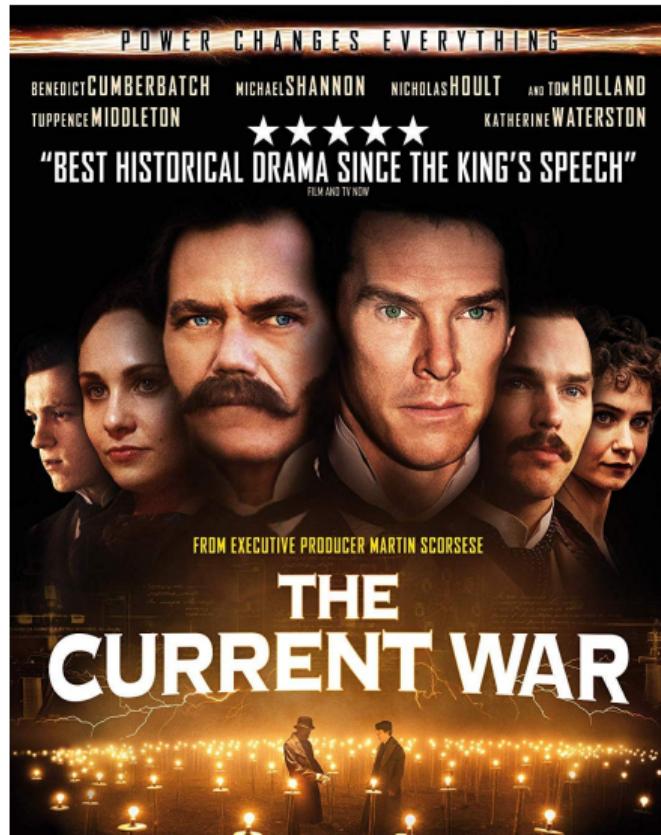
# Resumen

| Elemento     | Impedancia      | Módulo         | Ángulo      |
|--------------|-----------------|----------------|-------------|
| Resistencia  | $R$             | $R$            | $0^\circ$   |
| Bobina ideal | $j\omega L$     | $\omega L$     | $90^\circ$  |
| Condensador  | $1/(j\omega C)$ | $1/(\omega C)$ | $-90^\circ$ |

- ▶ La impedancia de una **bobina ideal**  $X_L = \omega L$  se denomina “reactancia inductiva”
- ▶ La impedancia de un **condensador**  $X_C = \frac{1}{\omega C}$  se denomina “reactancia capacitiva”

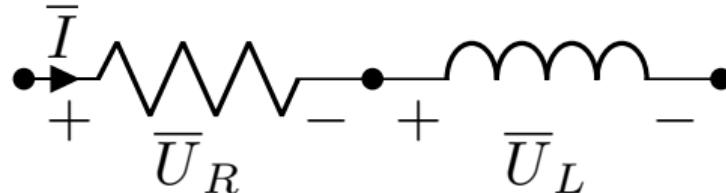
# Interludio: película relacionada con la asignatura

La guerra de las corrientes, 2017



# Circuito RL (inductivo con pérdidas)

**Recordatorio:** por elementos asociados en **serie**, circula la **misma corriente**



$$\bar{I} = I / \underline{\theta_I}$$

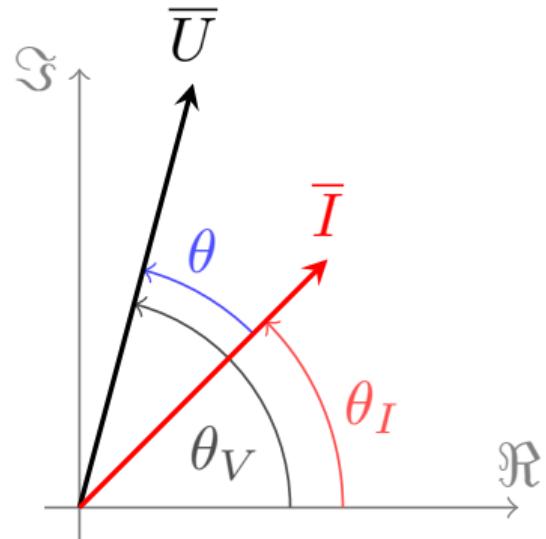
$$\bar{U}_R = R \cdot \bar{I} = R \cdot I / \underline{\theta_I}$$

$$\bar{U}_L = \bar{X}_L \cdot \bar{I} = \omega L I / \underline{\theta_I} + 90^\circ$$

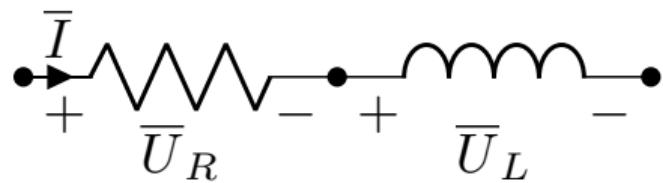
2LK

$$\bar{U} \downarrow = \bar{U}_R + \bar{U}_L = (\underbrace{(R + j\omega L)}_{\bar{Z}_{eq}}) \bar{I} \quad \leftarrow$$

**Importante:** sumar módulos en lugar de fasores es un **error grave**

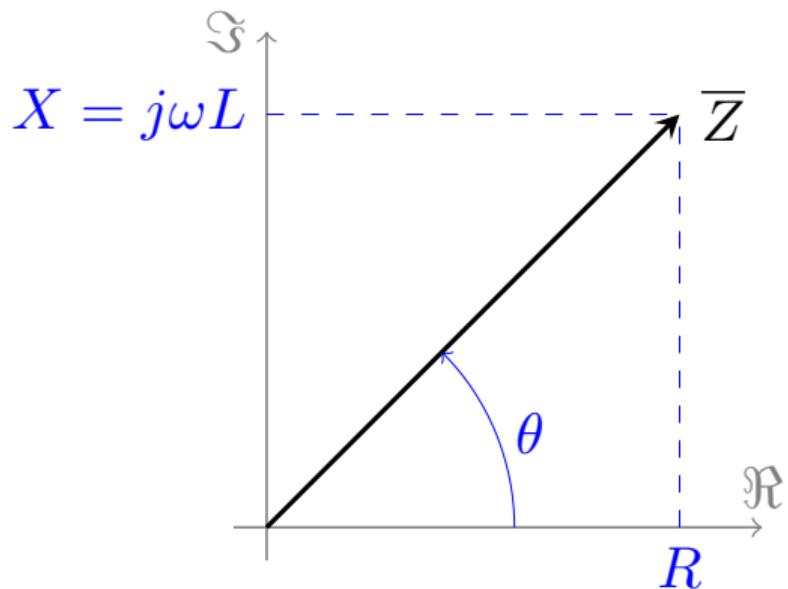


## Circuito RL (inductivo con pérdidas)



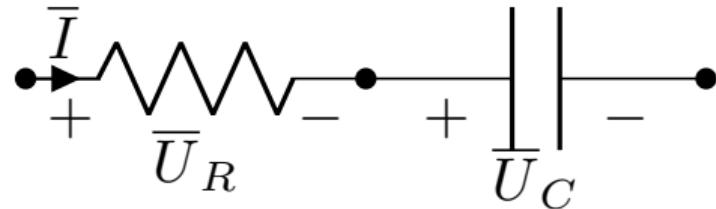
$$\bar{Z}_{eq} = R + j\omega L \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta > 0}$$

$$\bar{Z}_{eq} \begin{cases} |Z_{eq}| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \\ \theta = \text{atan}\left(\frac{\omega L}{R}\right) \end{cases}$$



# Circuito RC (capacitivo con pérdidas)

**Recordatorio:** por elementos asociados en **serie**, circula la **misma corriente**



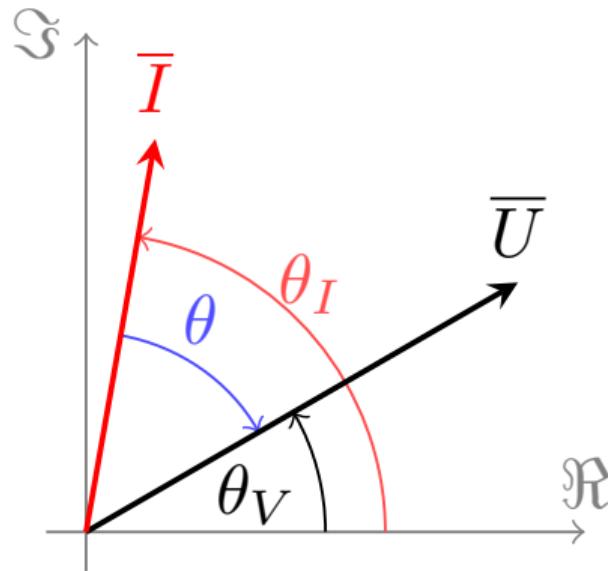
$$\bar{I} = \underline{I}/\theta_I$$

$$\bar{U}_R = R \cdot \bar{I} = R \cdot \underline{I}/\theta_I$$

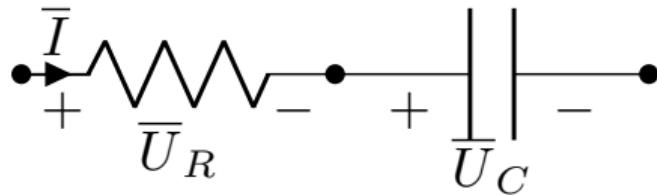
$$\bar{U}_C = \bar{X}_C \cdot \bar{I} = \frac{I}{\omega C} / \underline{\theta_I - 90^\circ}$$

2LK

$$\bar{U} \stackrel{\downarrow}{=} \bar{U}_R + \bar{U}_C = \left( R - j \frac{1}{\omega C} \right) \bar{I}$$

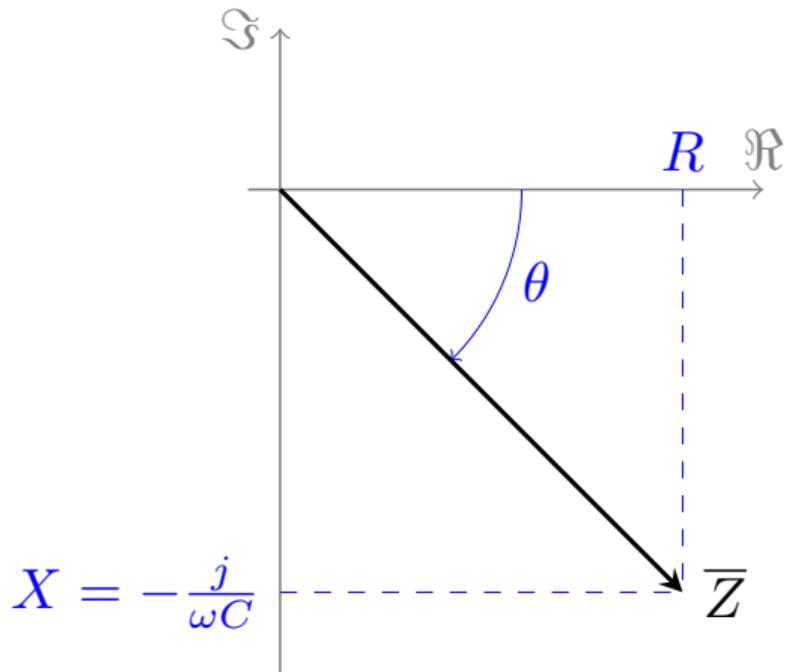


## Circuito RC (capacitivo con pérdidas)

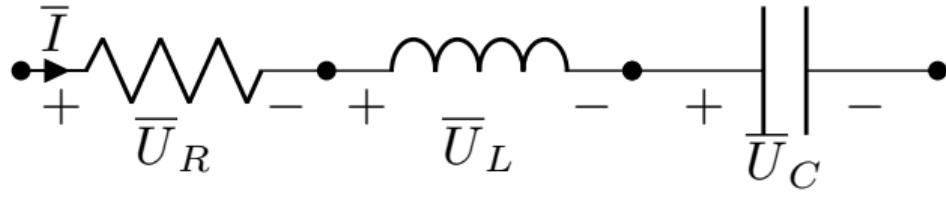


$$\bar{Z}_{eq} = R - j \frac{1}{\omega C} \Rightarrow \boxed{\theta < 0}$$

$$\bar{Z}_{eq} \begin{cases} |Z_{eq}| = \sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}} \\ \theta = \text{atan} \left( \frac{-\frac{1}{\omega C}}{R} \right) \end{cases}$$



# Circuito RLC serie



$$\bar{I} = I / \underline{\theta_I}$$

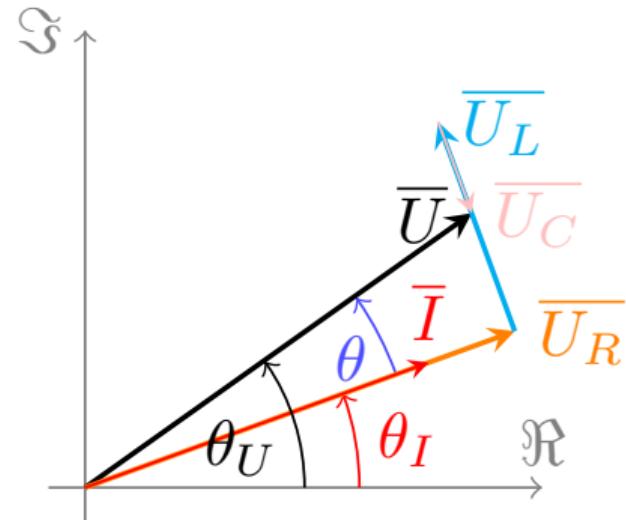
$$\bar{U}_R = R \cdot \bar{I} = R \cdot I / \underline{\theta_I}$$

$$\bar{U}_L = \bar{X}_L \cdot \bar{I} = \omega L I / \underline{\theta_I + 90^\circ}$$

$$\bar{U}_C = \bar{X}_C \cdot \bar{I} = \frac{I}{\omega C} / \underline{\theta_I - 90^\circ}$$

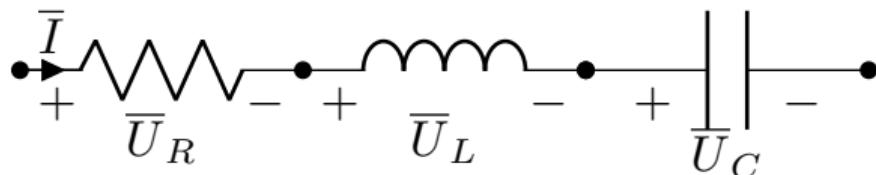
2LK

$$\bar{U} \stackrel{\downarrow}{=} \bar{U}_R + \bar{U}_L + \bar{U}_C = \underbrace{\left( R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C} \right)}_{\bar{Z}_{eq}} \bar{I}$$



(ejemplo, en el que  $X_L > X_C$ )

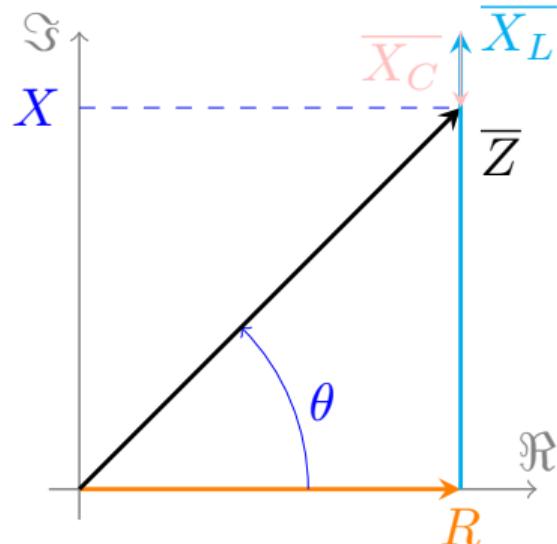
# Circuito RLC serie



$$\bar{Z}_{eq} = R + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \Rightarrow \boxed{i\theta ?}$$

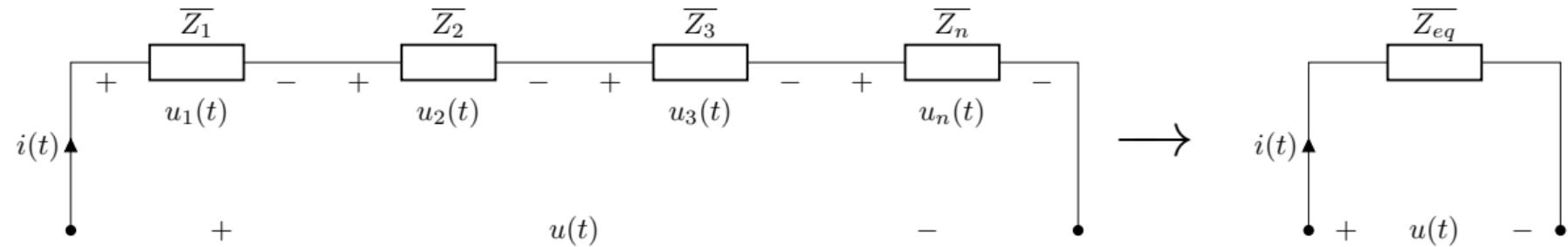
$$\bar{Z}_{eq} \begin{cases} |Z_{eq}| = \sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \\ \theta = \text{atan} \left( \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right) \end{cases}$$

(ejemplo, en el que  $X_L > X_C$ )



- ▶  $\theta > 0 \Rightarrow \omega L > \frac{1}{\omega C}$  : carácter inductivo
- ▶  $\theta < 0 \Rightarrow \omega L < \frac{1}{\omega C}$  : carácter capacitivo
- ▶  $\theta = 0 \Rightarrow \omega L = \frac{1}{\omega C}$  : carácter resistivo  
(resonancia)

# Circuito serie general



$$\overline{U} = \overline{U}_1 + \overline{U}_2 + \dots + \overline{U}_n = \bar{I} \cdot (\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \dots + \bar{Z}_n) = \bar{I} \cdot \bar{Z}_{eq}$$

$\uparrow$   
2LK

$$\bar{Z}_{eq} = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \dots + \bar{Z}_n \Rightarrow \boxed{\bar{Z}_{eq} = \sum_{i=1}^n \bar{Z}_i}$$

**Importante:** sumar módulos en lugar de fasores es un **error grave**

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^n R_i \qquad X_{eq} = \sum_{i=1}^n X_i$$

$$\theta = \arctan \left( \frac{X_{eq}}{R_{eq}} \right)$$

## Ejercicio

Un circuito serie formado por  $R = 10 \Omega$ ,  $L = 20 \text{ mH}$  y  $C = 100 \mu\text{F}$  es alimentado con una tensión  $u(t) = 200 \cdot \sin(1000t + \frac{\pi}{4}) \text{ V}$

Calcular  $\bar{I}$ ,  $u_R(t)$ ,  $u_L(t)$  y  $u_C(t)$ , y dibujar el diagrama fasorial de tensiones y corrientes

**Solución:**  $\bar{I} = 10/0^\circ \text{ A}$

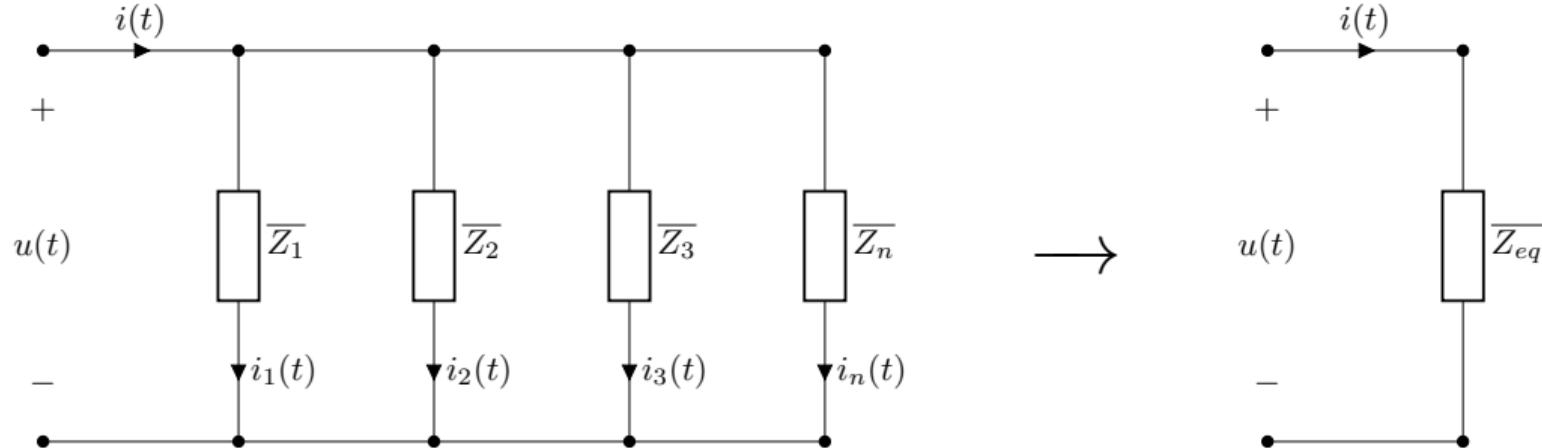
$$u_R(t) = 100\sqrt{2} \cdot \sin(1000t) \text{ V}$$

$$u_L(t) = 200\sqrt{2} \cdot \sin(1000t + \frac{\pi}{2}) \text{ V}$$

$$u_C(t) = 100\sqrt{2} \cdot \sin(1000t - \frac{\pi}{2}) \text{ V}$$

# Circuito paralelo general

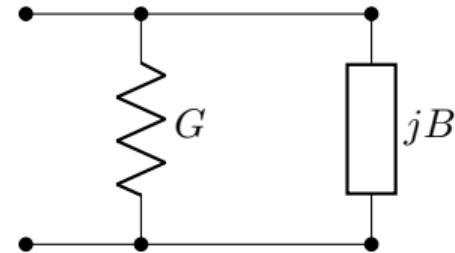
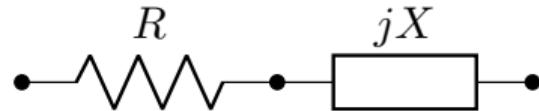
**Recordatorio:** los elementos asociados en **paralelo** están sometidos a la **misma tensión**



$$\bar{I} = \underbrace{\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \dots + \bar{I}_n}_{\uparrow} = \bar{U} \cdot \left( \frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_2} + \dots + \frac{1}{\bar{Z}_n} \right) = \frac{\bar{U}}{\bar{Z}_{eq}}$$

$$1\text{LK} \quad \frac{1}{\bar{Z}_{eq}} = \frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_2} + \dots + \frac{1}{\bar{Z}_n} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{\bar{Z}_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\bar{Z}_i}}$$

# Impedancia y admitancia



$$\bar{U} = \bar{Z} \cdot \bar{I}$$

$$\bar{Z} = R + jX$$

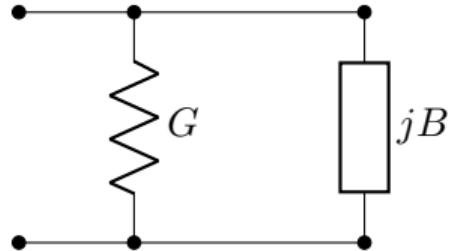
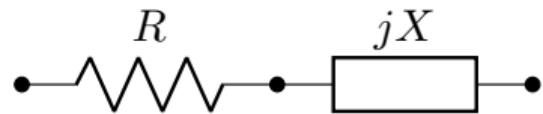
$$\bar{I} = \bar{Y} \cdot \bar{U}$$

$$\bar{Y} = G + jB$$

$$\boxed{\bar{Y} = \frac{1}{\bar{Z}} \rightarrow \begin{cases} |\bar{Y}| = \frac{1}{|\bar{Z}|} \\ \theta_Y = -\theta_Z \end{cases}}$$

**Admitancia:** facilidad que ofrece un circuito al paso de la corriente alterna

# Impedancia y admitancia

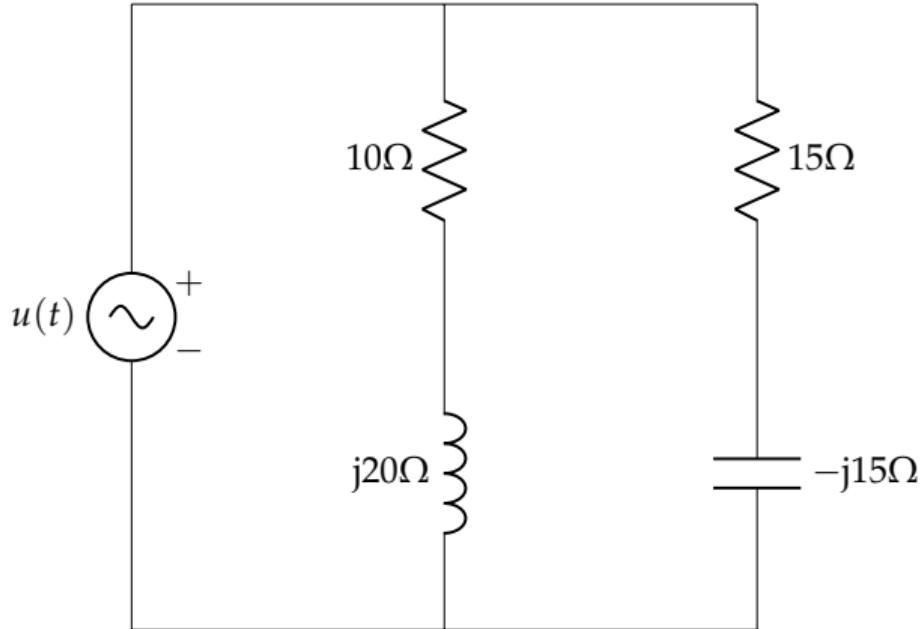


$$\bar{Z} = \frac{1}{G + jB} \rightarrow \begin{cases} R = \frac{G}{G^2 + B^2} \\ X = \frac{-B}{G^2 + B^2} \end{cases}$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{R + jX} \rightarrow \begin{cases} G = \frac{R}{R^2 + X^2} \\ B = \frac{-X}{R^2 + X^2} \end{cases}$$

## Ejercicio

Calcular la impedancia y admitancia compleja equivalente del circuito de la figura



**Solución:**  $\bar{Z} = 18,61 \angle 7,1250^\circ \Omega$ ,  $\bar{Y} = 0,054 \angle -7,1250^\circ \Omega^{-1}$

(se recomienda dar hasta 4 decimales en los ángulos)

- ① Formas de onda**
- ② Onda senoidal**
- ③ Cálculo fasorial**
- ④ Respuesta de elementos pasivos a excitación senoidal**
- ⑤ Potencia en corriente alterna**

## Potencia en CA, expresión general

Tomemos la tensión como referencia de fases

Sin pérdida de generalidad, asumamos que el ángulo de la impedancia equivalente de un circuito es  $\theta > 0$  (circuito **inductivo**): la corriente está retrasada respecto de la tensión

$$\begin{cases} u(t) = U_o \cos(\omega t) \\ i(t) = I_o \cos(\omega t - \theta) \quad (\text{circuito en retrazo}) \end{cases}$$

$$p(t) = u(t) \cdot i(t)$$

## Potencia en CA, expresión general

conveniente reformular  
producto de cosenos

$$\begin{aligned} p(t) &= \underbrace{U_o \cos(\omega t)}_{u(t)} \cdot \underbrace{I_o \cos(\omega t - \theta)}_{i(t)} = \underbrace{U_o \cdot I_o}_{\text{amplitud}} \cdot \cos(\omega t) \cdot \cos(\omega t - \theta) \stackrel{\downarrow}{=} \\ &= \frac{1}{2} \cdot U_o \cdot I_o \cdot [\cos(2\omega t - \theta) + \cos(\theta)] = \frac{U_o}{\sqrt{2}} \frac{I_o}{\sqrt{2}} \cdot [\cos(2\omega t - \theta) + \cos(\theta)] \\ &= \underbrace{U \cdot I}_{\substack{\text{valor} \\ \text{eficaz}}} \cdot [\cos(2\omega t - \theta) + \cos(\theta)] = \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \cos(\alpha - \beta) \\ &= U \cdot I \cdot [\cos(2\omega t) \cos(\theta) + \sin(2\omega t) \sin(\theta) + \cos(\theta)] \end{aligned}$$

$$p(t) = U \cdot I \cos(\theta) + U \cdot I \cos(\theta) \cos(2\omega t) + U \cdot I \sin(\theta) \sin(2\omega t)$$

## Potencia en CA: potencia activa y potencia reactiva

En la expresión anterior, definimos dos términos:

**potencia activa 'P' y potencia reactiva 'Q'**

$$p(t) = U \cdot I \cos(\theta) + U \cdot I \cos(\theta) \cos(2\omega t) + U \cdot I \sin(\theta) \sin(2\omega t)$$

$$P = U \cdot I \cos \theta \quad Q = U \cdot I \sin \theta$$

$$p(t) = P \cdot [1 + \cos(2\omega t)] + Q \cdot \sin(2\omega t)$$

Pero, ¿qué significa que la potencia sea *activa* o *reactiva*? → Siguiente diapositiva

## Potencia en CA: potencia disipada y potencia entretenida

Dado que  $p(t)$  varía en el tiempo, sus **efectos netos** en el circuito tras cada ciclo pueden calcularse con el **valor medio** en un periodo:

$$P_m = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \left[ P \int_0^T dt + P \int_0^T \cos(2\omega t) dt + Q \int_0^T \sin(2\omega t) dt \right] = \boxed{P}$$

- $P = UI \cos(\theta)$  es la **potencia neta que se disipa en la carga**, dado que el resto de la potencia  $p(t)$  es fluctuante  
(Unidades de  $P$ : W)
- $Q = UI \sin(\theta)$  es **potencia únicamente entretenida**, ya que es potencia almacenada y sucesivamente devuelta por las bobinas y condensadores (para los que  $\sin(\theta) \neq 0$ )  
(Unidades de  $Q$ : VAr)

## Potencia en CA, circuito resistivo

$$P = UI \underbrace{\cos \theta}_{=1} \quad Q = UI \sin \theta \rightarrow 0$$

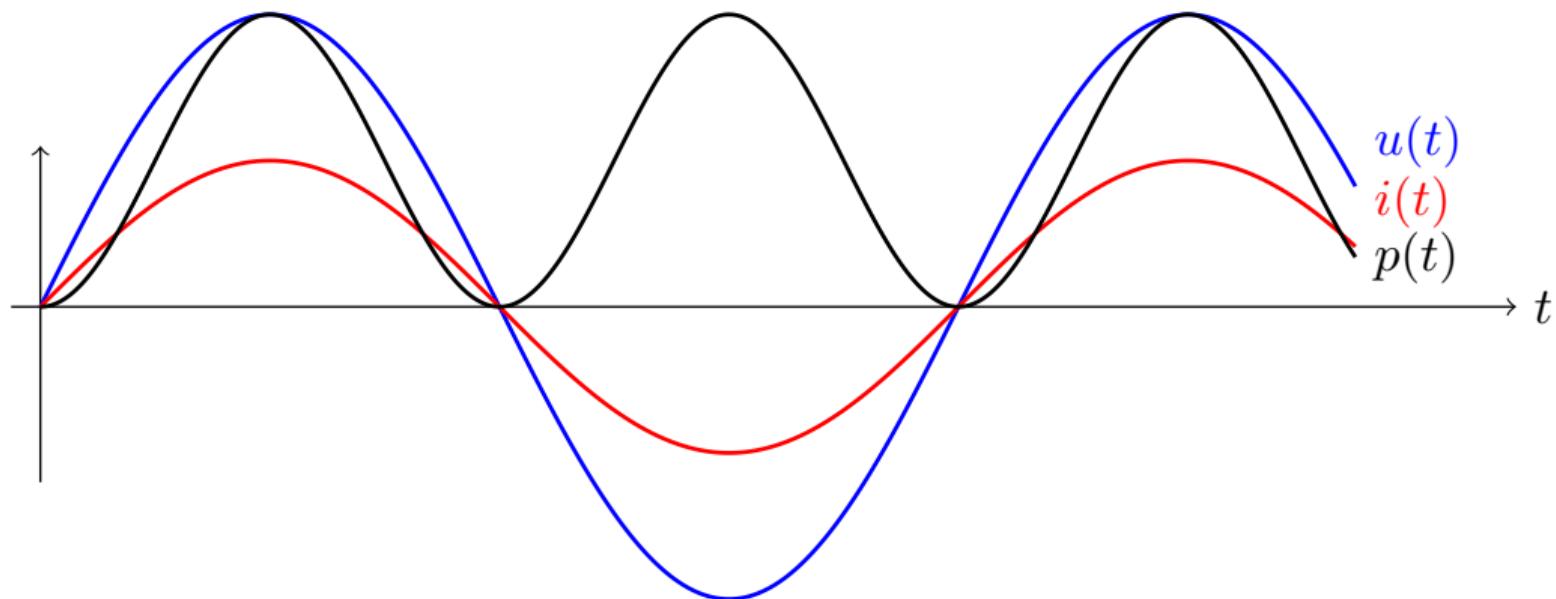
$$p(t) = P \cdot [1 + \cos(2\omega t)] + Q \cdot \sin(2\omega t)$$

---

$$\bar{Z}_R = R \underline{/0^\circ} \rightarrow \theta = 0 \rightarrow \begin{cases} P = UI = \frac{U^2}{R} = I^2 R \\ Q = 0 \end{cases}$$

$$p(t) = P \cdot [1 + \cos(2\omega t)]$$

## Potencia en CA, circuito resistivo



- ▶ Fluctúa al **doble de frecuencia** que la tensión y corriente
- ▶ Es siempre **positiva**
- ▶ Su **valor medio** es  $P = UI \cos \theta = UI$

## Potencia en CA, circuito inductivo puro

$$P = UI \cos \theta \xrightarrow{\theta=0} 0 \quad Q = UI \underbrace{\sin \theta}_{=1}$$

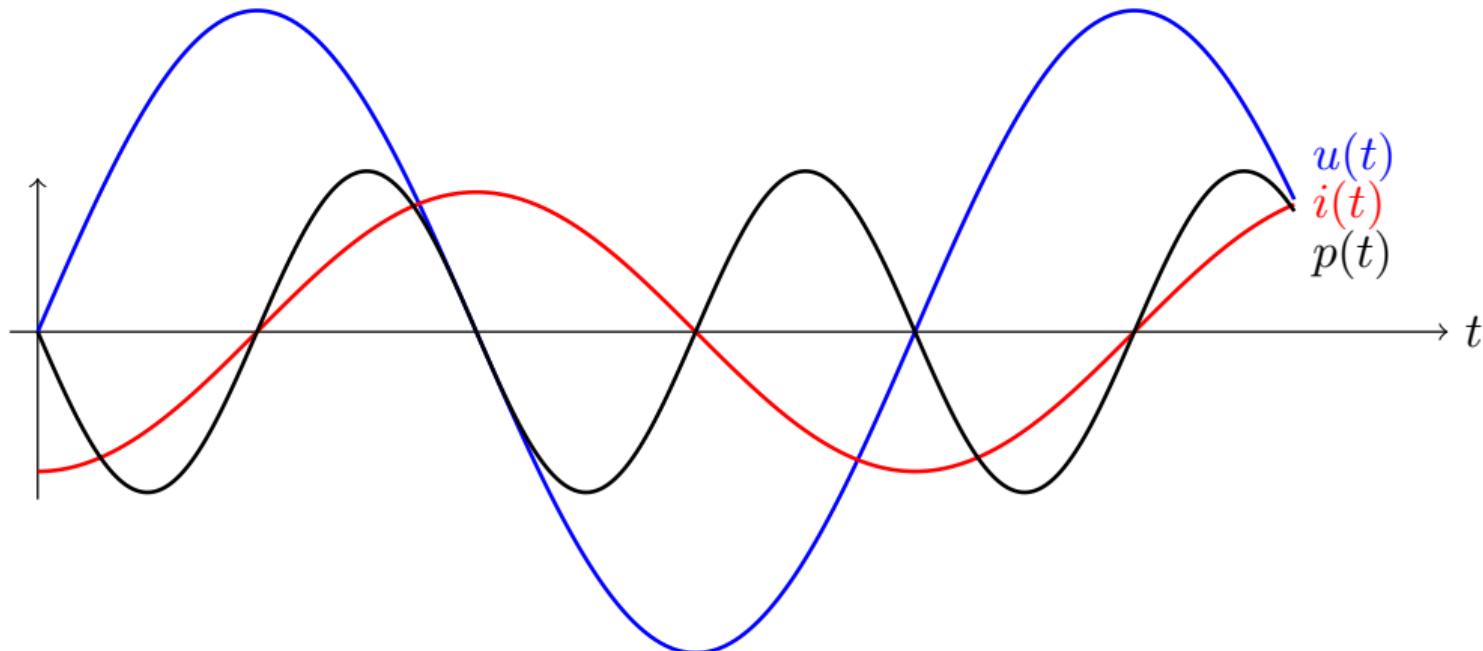
$$p(t) = P \cdot [1 + \cos(2\omega t)] + Q \cdot \sin(2\omega t)$$

---

$$\bar{Z}_L = \underline{\omega L / 90^\circ} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow \begin{cases} P = 0 \\ Q = UI = \frac{U^2}{\omega L} = I^2 \omega L \end{cases}$$

$$p(t) = Q \cdot \sin(2\omega t)$$

## Potencia en CA, circuito inductivo puro



- ▶ Fluctúa al **doble de frecuencia** que la tensión y corriente
- ▶ Pasa por los ceros de tensión y corriente
- ▶ Su valor medio es **nulo**

## Potencia en CA, circuito capacitivo puro

$$P = UI \cos \theta \xrightarrow{\theta=0} 0 \quad Q = UI \underbrace{\sin \theta}_{=-1}$$

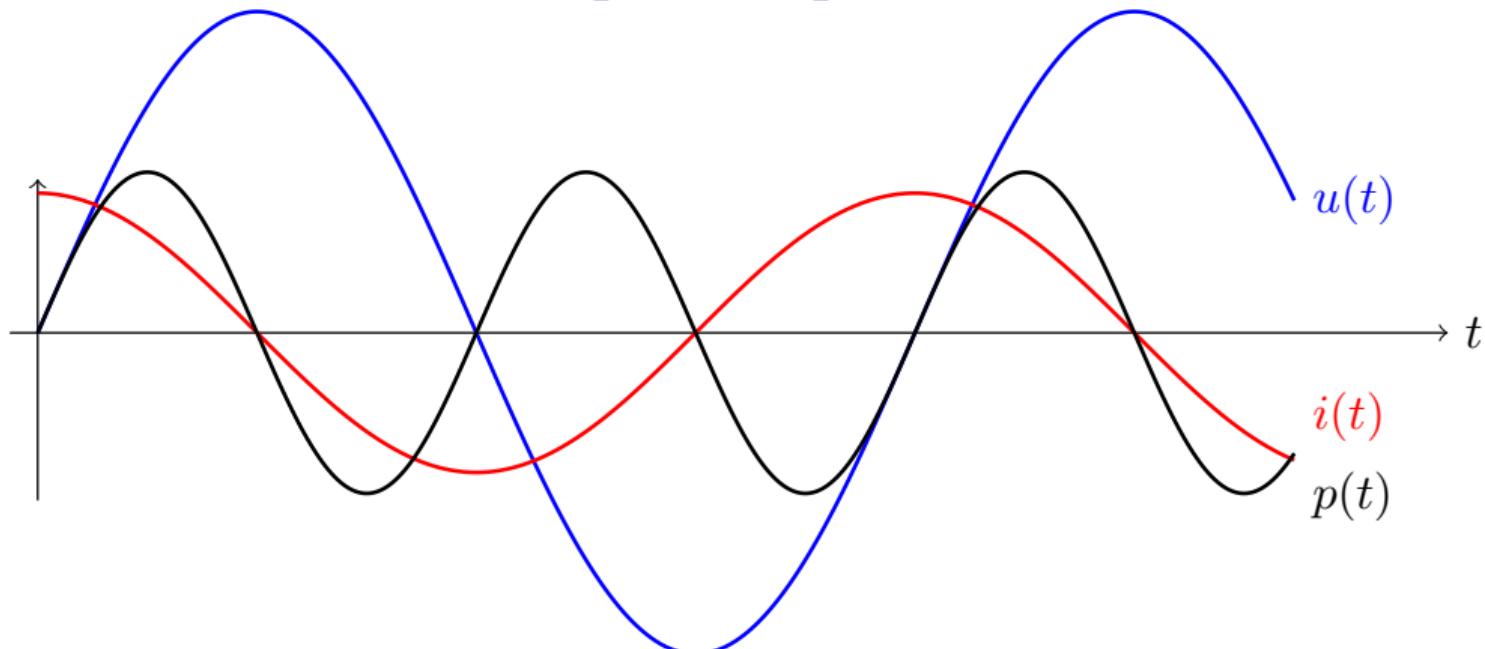
$$p(t) = P \cdot [1 + \cos(2\omega t)] + Q \cdot \sin(2\omega t)$$

---

$$\bar{Z}_C = \frac{1}{\omega C} \angle -90^\circ \rightarrow \theta = -\frac{\pi}{2} \rightarrow \begin{cases} P = 0 \\ Q = -UI = -U^2\omega C = -\frac{I^2}{\omega C} \end{cases}$$

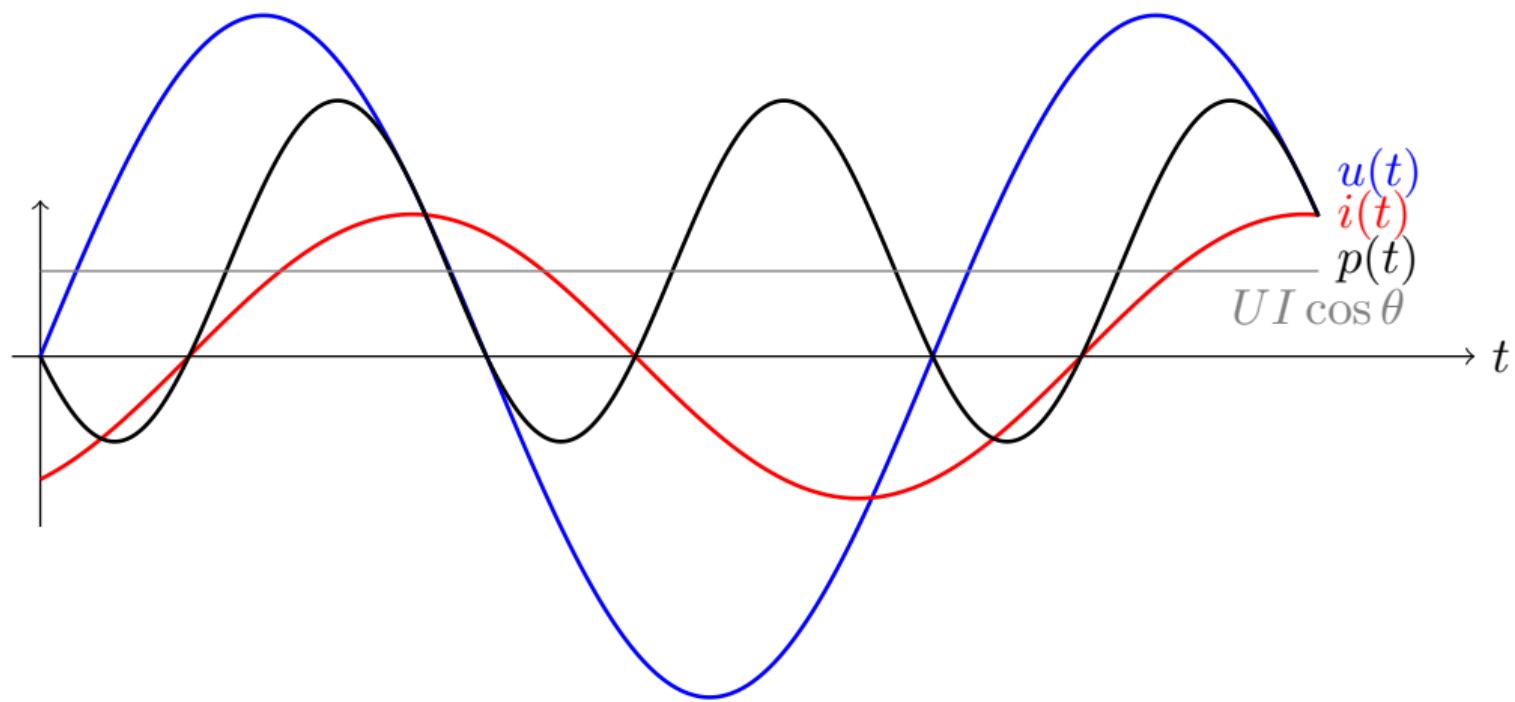
$$p(t) = Q \cdot \sin(2\omega t)$$

## Potencia en CA, circuito capacitivo puro

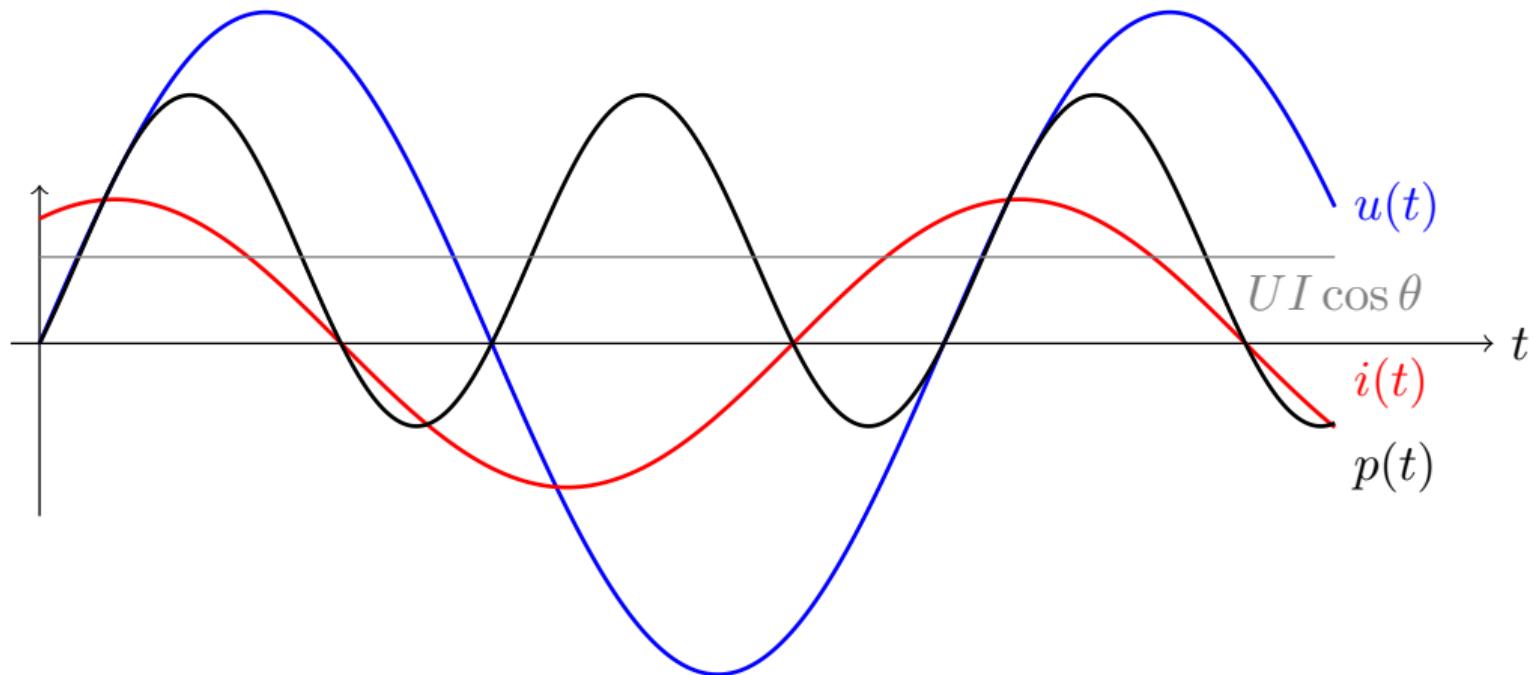


- ▶ Fluctúa al **doble de frecuencia** que la tensión y corriente
- ▶ Pasa por los ceros de tensión y corriente
- ▶ Su valor medio es **nulo**

## Potencia en CA, circuito inductivo con pérdidas (RL)



## Potencia en CA, circuito capacitivo con pérdidas (RC)

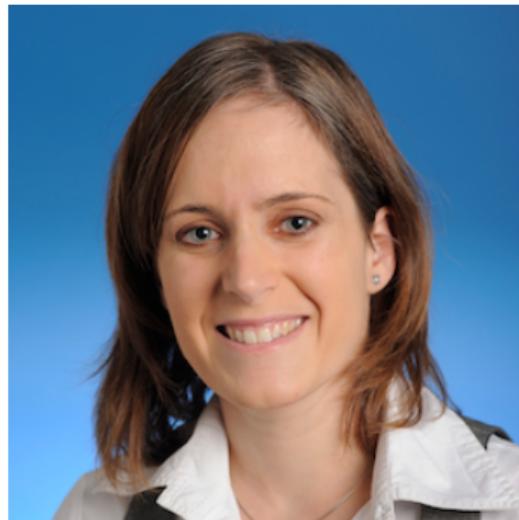


# Interludio: pasado y presente de los sistemas eléctricos

Ms. Edith Clarke,  
General Electric



Prof. Gabriela Hug,  
ETH Zurich



Dr Vera Silva,  
General Electric



# Triángulo de potencias

- ▶ Potencia **activa** [W]

$$P = U \cdot I \cdot \cos(\theta) = R \cdot I^2$$

- ▶ Potencia **reactiva** [VAr]

$$Q = U \cdot I \cdot \sin(\theta) = X \cdot I^2$$

- ▶ Potencia **aparente** [VA]

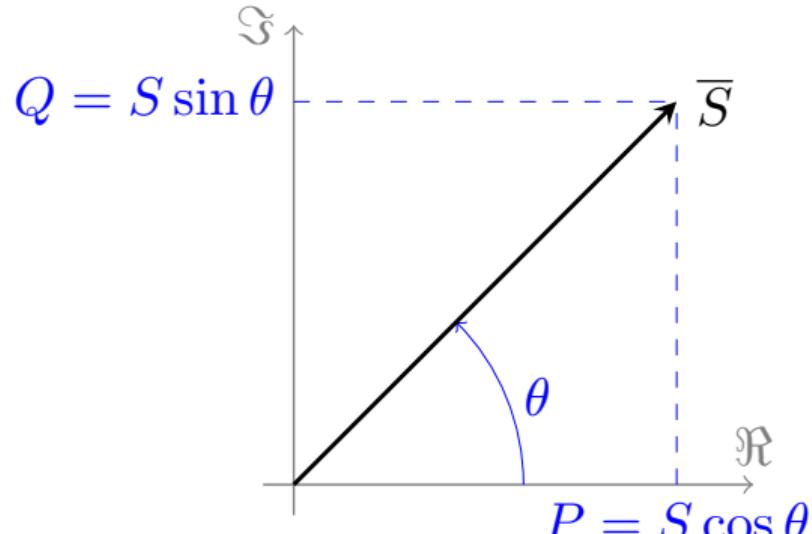
$$\bar{S} = P + jQ = \bar{U} \cdot \bar{I}^*$$

Demostración de la expresión para  $\bar{S}$ :

$$\bar{U} = U/\underline{0}$$

$$\bar{I} = I/\underline{-\theta} \quad (\text{circuito en retraso})$$

$$\begin{aligned}\bar{U} \cdot \bar{I}^* &= U/\underline{0} \cdot I/\underline{\theta} = UI/\underline{\theta} = \\ &= UI(\cos \theta + j \sin \theta) = P + jQ\end{aligned}$$



$$S = U \cdot I$$

$$\theta_S = \theta_Z = \theta$$

# Triángulo de potencias

- ▶ Potencia **activa** [W]

$$P = U \cdot I \cdot \cos(\theta) = R \cdot I^2$$

- ▶ Potencia **reactiva** [VAr]

$$Q = U \cdot I \cdot \sin(\theta) = X \cdot I^2$$

- ▶ Potencia **aparente** [VA]

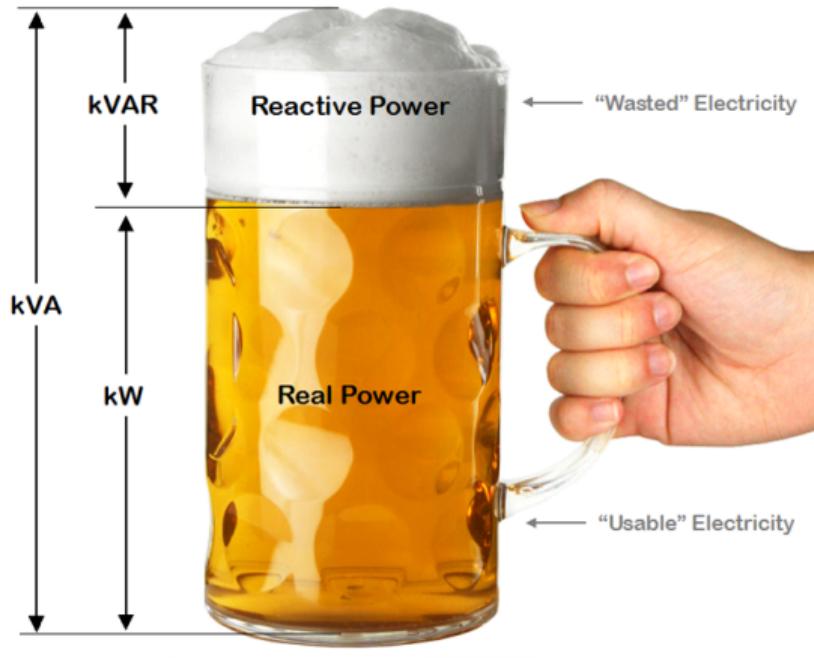
$$\bar{S} = P + jQ = \bar{U} \cdot \bar{I}^*$$

Demostración de la expresión para  $\bar{S}$ :

$$\bar{U} = U/\underline{0}$$

$$\bar{I} = I/\underline{-\theta} \quad (\text{circuito en retraso})$$

$$\begin{aligned}\bar{U} \cdot \bar{I}^* &= U/\underline{0} \cdot I/\underline{\theta} = UI/\underline{\theta} = \\ &= UI(\cos \theta + j \sin \theta) = P + jQ\end{aligned}$$



## Potencia en elementos: resistencia

$$\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} P_R = R I^2 \\ Q_R = 0 \\ S_R = P_R \end{cases}$$

- ▶ Consume potencia activa
- ▶ No “consume” potencia reactiva

## Potencia en elementos: inductancia

$$\theta = \pi/2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} P_L = 0 \\ Q_L = \omega L I^2 \\ \bar{S}_L = \omega L I^2 / \pi/2 \end{cases}$$

- ▶ No consume potencia activa
- ▶ “Consumo” potencia reactiva ( $Q > 0$ )
  - ▶ **Nota:** la potencia reactiva es potencia *entretenida*, no es potencia que se consuma  
Pero, dado el convenio de signos, decimos que **las bobinas “consumen”  $Q$**  y **los condensadores “generan”  $Q$**  (ya que almacenan y devuelven energía al circuito en semiciclos opuestos)

## Potencia en elementos: condensador

$$\theta = -\pi/2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} P_L = 0 \\ Q_C = -\omega C U^2 \\ \bar{S}_C = \omega C U^2 / -\pi/2 \end{cases}$$

- ▶ No consume potencia activa
- ▶ “Genera” potencia reactiva ( $Q < 0$ )
  - ▶ **Nota:** la potencia reactiva es potencia *entretenida*, no es potencia que se consuma  
Pero, dado el convenio de signos, decimos que **las bobinas “consumen”  $Q$**  y **los condensadores “generan”  $Q$**  (ya que almacenan y devuelven energía al circuito en semiciclos opuestos)

# Teorema de Boucherot

En un circuito con múltiples elementos, la potencia aparente total es la **suma de las potencias aparentes individuales**

(la potencia activa/reactiva total es la **suma de las potencias activas/reactivas individuales**)

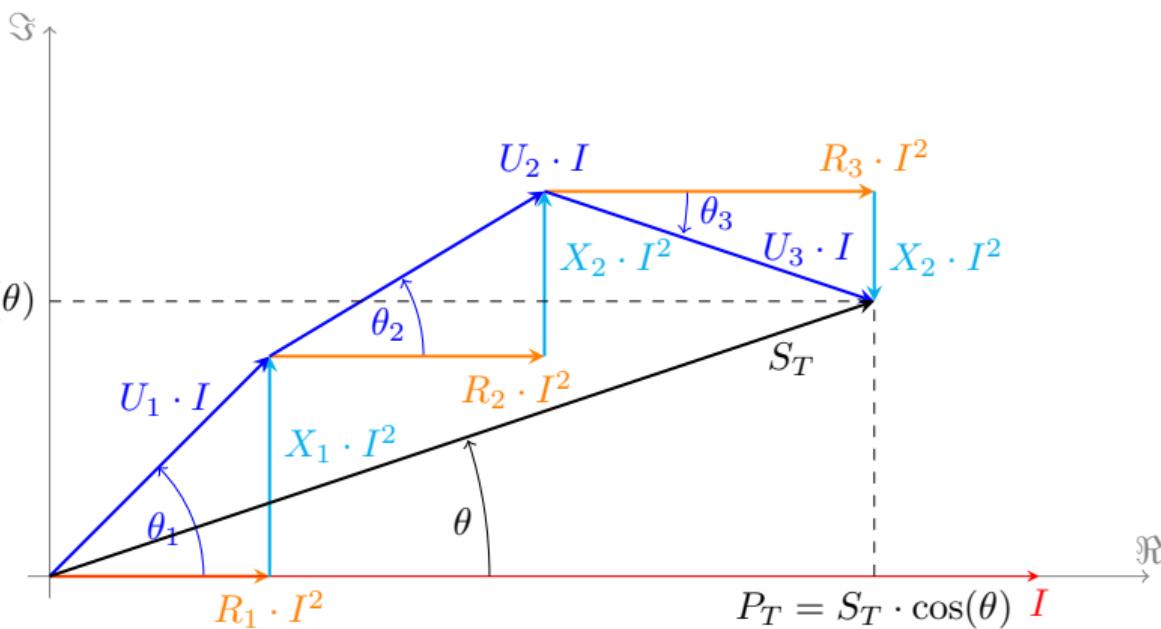
$$P_T + jQ_T = \sum_{i=1}^n (P_i + jQ_i)$$

$$\bar{S}_T = \sum_{i=1}^n \bar{S}_i$$

$$Q_T = S_T \cdot \sin(\theta)$$

$$P_T = \sum_{i=1}^n P_i$$

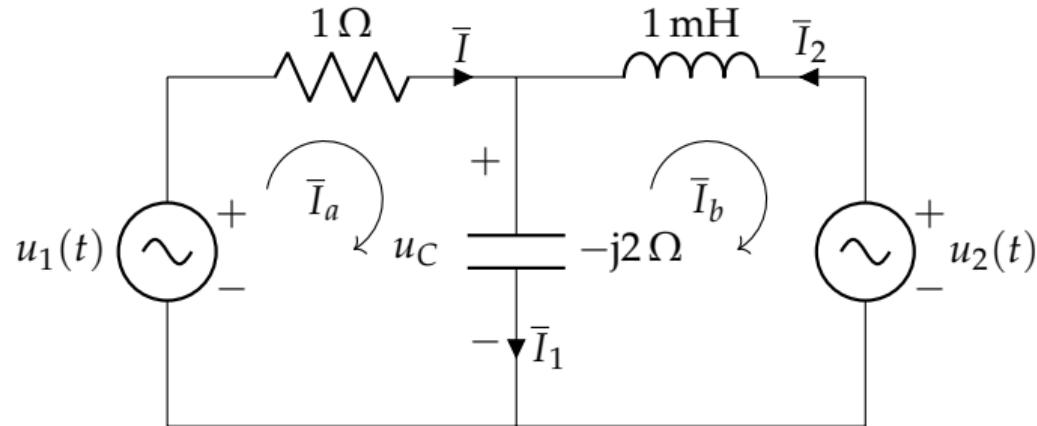
$$Q_T = \sum_{i=1}^n Q_i$$



$$P_T = S_T \cdot \cos(\theta) I$$

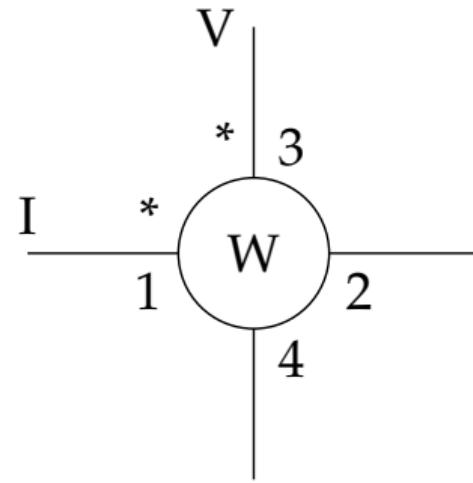
## Ejercicio

Sabiendo que las fuentes de tensión del circuito de la figura vienen definidas por las formas de onda  $u_1(t) = 10\sqrt{2} \cdot \cos(1000 \cdot t)$  V y  $u_2(t) = 5\sqrt{2} \cdot \sin(1000 \cdot t)$  V, se debe calcular las potencias de cada elemento, así como el balance de potencias del circuito



**Solución:** aquí

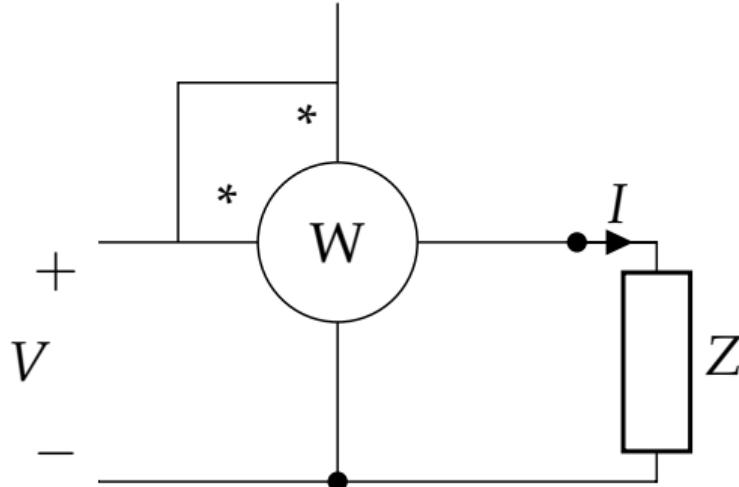
## Medida de potencia: vatímetro



Equipo de medida de **4 terminales** (un par para tensión, un par para corriente)

$$W = \underbrace{\bar{I}_{1,2} \bullet \bar{U}_{3,4}}_{\text{producto escalar}} = I_{1,2} \cdot U_{3,4} \cdot \cos(\widehat{\bar{I}_{1,2}}, \widehat{\bar{U}_{3,4}})$$

# Medida de potencia



Habitualmente se emplea con 3 terminales, **cortocircuitando** terminales con \*

$$W = |\bar{V}| \cdot |\bar{I}| \cdot \cos(\theta_V - \theta_I) = P_Z$$

- ① Formas de onda
- ② Onda senoidal
- ③ Cálculo fasorial
- ④ Respuesta de elementos pasivos a excitación senoidal
- ⑤ Potencia en corriente alterna  
Factor de potencia: importancia y mejora

## Factor de potencia

El factor de potencia (*f.d.p.*),  $\cos(\theta)$ , representa la aportación de potencia activa dentro de la potencia aparente:

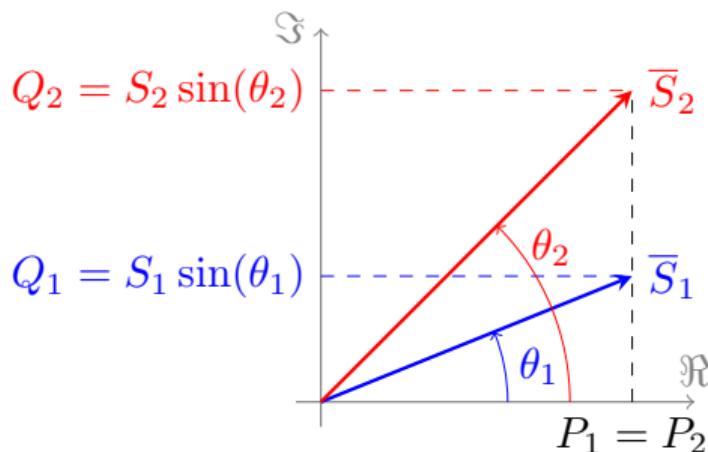
$$\cos(\theta) = \frac{P}{S}$$

Se dice que:

- ▶ *fdp en retraso* cuando el circuito tiene carácter inductivo (la intensidad va retrasada respecto a la tensión)
- ▶ *fdp en adelanto* cuando el circuito tiene carácter capacitivo (la intensidad va adelantada respecto a la tensión)

## Factor de potencia: importancia y mejora

Sean dos sistemas con **misma tensión y potencia activa**, y factores de potencia  $\cos \theta_2 < \cos \theta_1$  ( $Q_2 > Q_1$ )



- ▶ El sistema 2 requiere **mayor potencia aparente** (generador mayor) para alimentar la misma potencia activa:

$$\left( \frac{P}{\cos \theta_1} = S_1 \right) < \left( S_2 = \frac{P}{\cos \theta_2} \right)$$

- ▶ El sistema 2 requiere **mayor sección de cable** para transportar la misma potencia activa:

$$\left( \frac{P}{U \cos \theta_1} = I_1 \right) < \left( I_2 = \frac{P}{U \cos \theta_2} \right)$$

## “Generación” local de reactiva

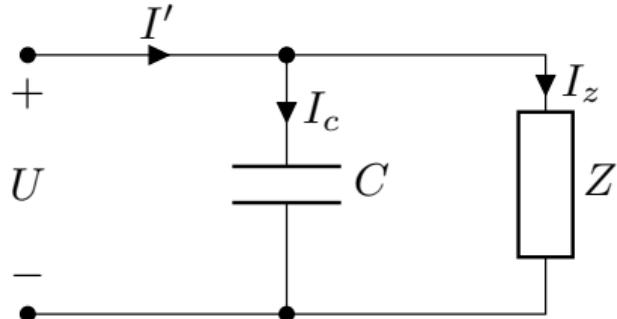
- ▶ Comúnmente, el factor de potencia es **inductivo** (máquinas eléctricas industriales)
- ▶ La red debe suministrar potencia reactiva inductiva (influye en secciones de líneas y tamaños de generadores → **mayor coste**)
- ▶ Es necesario mejorar **localmente** el factor de potencia

Solución común: utilizar **bancos de condensadores** como suministradores de  $Q$

# Cálculo de la capacidad para compensación de reactiva

Sea una carga de potencia activa  $P_z$ , potencia reactiva  $Q_z$ , factor de potencia  $\cos \theta$

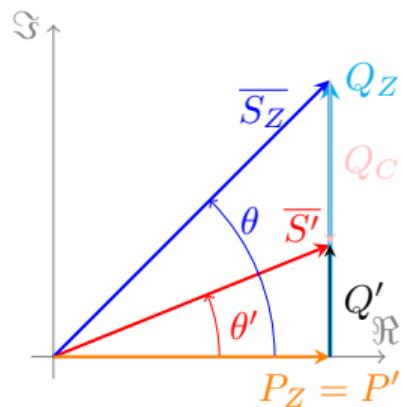
Se desea **mejorar el factor de potencia** a  $\cos \theta' > \cos \theta$ , manteniendo la potencia  $P_z$



$$P' = P_z$$

$$Q' = Q_c + Q_z \quad (Q' < Q_z)$$

$$\bar{I}' = \bar{I}_c + \bar{I}_z \quad (I' < I_z)$$



$$Q_z = P_z \tan \theta$$

$$Q' = P_z \tan \theta'$$

$$|Q_c| = Q_z - Q' = P_z(\tan \theta - \tan \theta')$$

$$|Q_c| = \underbrace{X_c \cdot I_c^2}_{= \frac{1}{\omega C}} = \omega C U^2 \rightarrow C = \boxed{\frac{P_z(\tan \theta - \tan \theta')}{\omega U^2}}$$