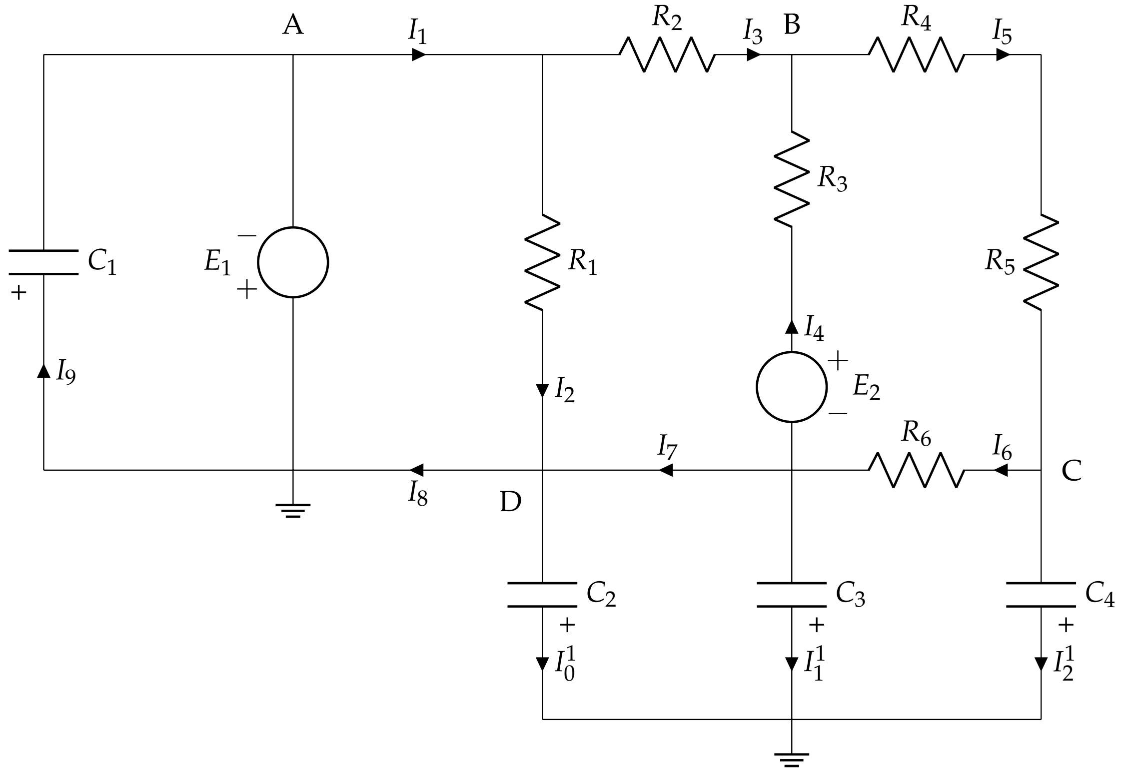
Ejercicio 10 de la colección de problemas

Enunciado:

En el circuito de la figura, determinar:

1. Las ecuaciones para el cálculo de las intensidades
2. Todas las intensidades indicadas
3. Potenciales en todos los nudos
4. Carga y energía almacenada en los condensadores



Datos:

$R_1 = 2\,\Omega$
$R_2 = 4\,\Omega$
$R_3 = 2\,\Omega$
$R_4 = 1\,\Omega$
$R_5 = 2\,\Omega$
$R_6 = 1\,\Omega$
$C_i = i\,\mu\text{F}$
$E_1 = 8\,\text{V}$
$E_2 = 8\,\text{V}$

Solución:

Al tratarse de alimentación en CC, se sustituyen los condensadores por circuitos abiertos, quedando el circuito de la figura (ver página siguiente).

Aplicando el método de mallas, con las corrientes indicadas, se plantea el sistema de ecuaciones en forma matricial:

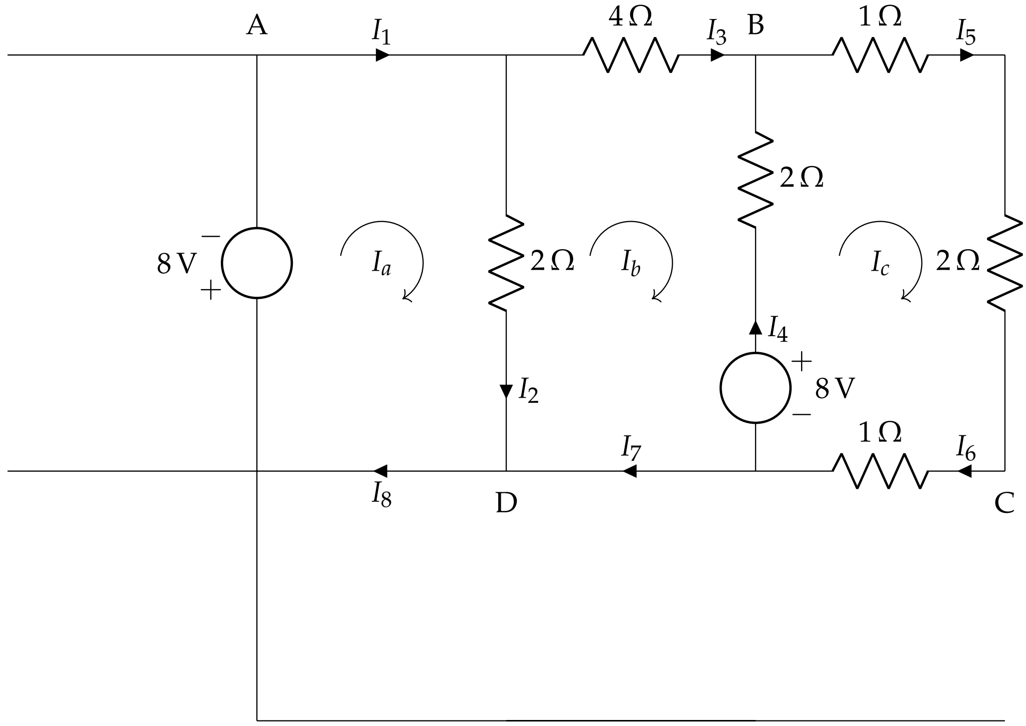
$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 8 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ -8 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones completas para calcular las intensidades son:

$$2\,I_a - 2\,I_b = -8$$
$$-2\,I_a + 8\,I_b - 2\,I_c = -8$$
$$-2\,I_b + 6\,I_c = 8$$

Cuya solución es:

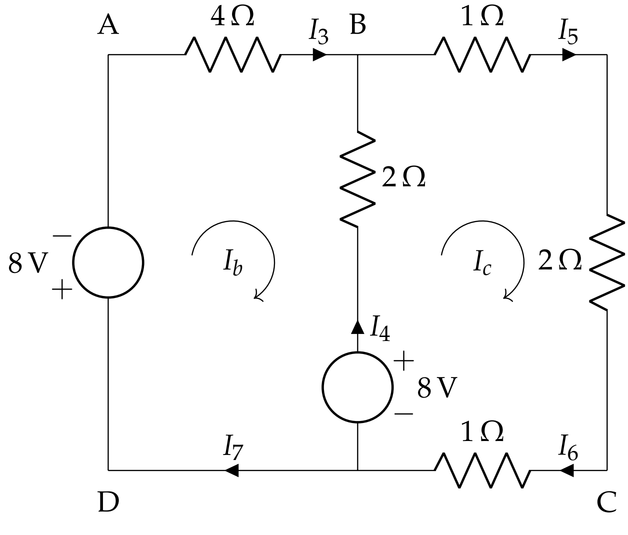
$$I_a = -6{,}5\,\mathrm{A}$$
$$I_b = -2{,}5\,\mathrm{A}$$
$$I_c = 0{,}5\,\mathrm{A}$$



Estableciendo las relaciones entre las corrientes de malla y las de rama del circuito:

$$I_1 = I_8 = I_a = \boxed{-6{,}5\,\mathrm{A}}$$
$$I_2 = I_a - I_b = -6{,}5 - (-2{,}5) = \boxed{-4\,\mathrm{A}}$$
$$I_3 = I_7 = I_b = \boxed{-2{,}5\,\mathrm{A}}$$
$$I_4 = I_c - I_b = 0{,}5 - (-2{,}5) = \boxed{3\,\mathrm{A}}$$
$$I_5 = I_6 = I_c = \boxed{0{,}5\,\mathrm{A}}$$

Una forma alternativa de resolver el circuito consiste en reparar en que E_1 es generador dominante, por lo que puede determinarse directamente el valor de $I_2 = -E_1/R_1 = -4$A. Esto permite usar únicamente 2 mallas, lo que reduce el sistema de ecuaciones a 2×2:



$$\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Cuya solución es la misma que la obtenida anteriormente.

Conociendo las corrientes y teniendo el nudo de tierra como referencia, se calculan los potenciales:

$$
\begin{aligned}
U_A &= -U_{8\mathrm{V}} = \boxed{-8\,\mathrm{V}} \\
U_B &= -U_{R2\Omega} + U_{8\mathrm{V}} = -2 \cdot 3 + 8 = \boxed{2\,\mathrm{V}} \\
U_C &= U_{R1\Omega} = 1 \cdot 0{,}5 = \boxed{0{,}5\,\mathrm{V}} \\
U_D &= \boxed{0\,\mathrm{V}}
\end{aligned}
$$

Con los potenciales, se determina la carga de los condensadores:

$$
\begin{aligned}
Q_{1\mathrm{\mu F}} &= C_{1\mathrm{\mu F}}\,(-U_A) = 1 \cdot 10^{-6} \cdot (-(-8)) = \boxed{8\,\mathrm{\mu C}} \\
Q_{2\mathrm{\mu F}} &= C_{2\mathrm{\mu F}} \cdot 0\,\mathrm{V} = \boxed{0\,\mathrm{\mu C}} \\
Q_{3\mathrm{\mu F}} &= C_{3\mathrm{\mu F}} \cdot 0\,\mathrm{V} = \boxed{0\,\mathrm{\mu C}} \\
Q_{4\mathrm{\mu F}} &= C_{4\mathrm{\mu F}}\,(-U_C) = 4 \cdot 10^{-6} \cdot (-0{,}5) = \boxed{-2\,\mathrm{\mu C}}
\end{aligned}
$$

Aquellos condensadores en los que la carga es negativa, significa que tienen polaridad contraria a la considerada. La energía almacenada en cada uno de ellos es:

$$
\begin{aligned}
E_{1\mathrm{\mu F}} &= \frac{1}{2}\,C_{1\mathrm{\mu F}} \cdot (-U_A)^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 10^{-6} \cdot (-(-8))^2 = \boxed{32\,\mathrm{\mu J}} \\
E_{2\mathrm{\mu F}} &= \boxed{0\,\mathrm{\mu J}} \\
E_{3\mathrm{\mu F}} &= \boxed{0\,\mathrm{\mu J}} \\
E_{4\mathrm{\mu F}} &= \frac{1}{2}\,C_{4\mathrm{\mu F}} \cdot (-U_C)^2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 10^{-6} \cdot (-0{,}5)^2 = \boxed{0{,}5\,\mathrm{\mu J}}
\end{aligned}
$$