

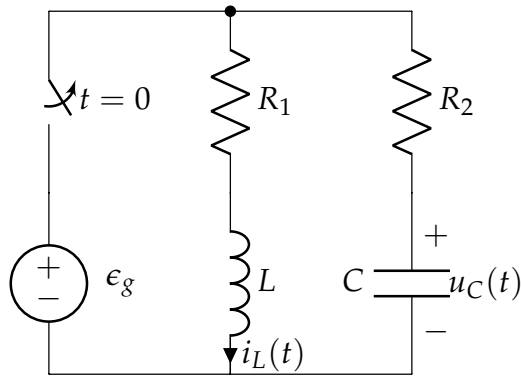
Ejercicio 13 de la colección de problemas

Enunciado:

El circuito de la figura ha alcanzado el régimen permanente con el interruptor cerrado

El interruptor se abre en $t = 0$

Calcula las expresiones de la tensión en bornes del condensador y de la corriente por la bobina para $t > 0$



Datos:

$$\epsilon_g = 10 \text{ V}$$

$$R_1 = 10 \Omega$$

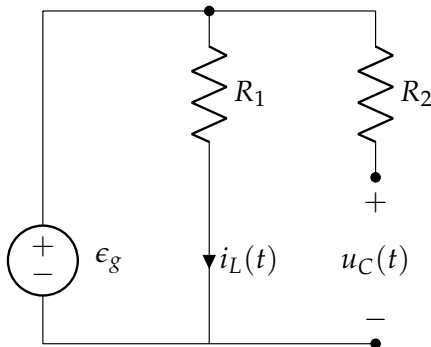
$$R_2 = 5 \Omega$$

$$L = 2,5 \text{ H}$$

$$C = 0,2 \text{ F}$$

Solución:

Calculamos las condiciones iniciales ($t = 0^-$). Dibujamos el circuito para $t < 0$ y obtenemos:



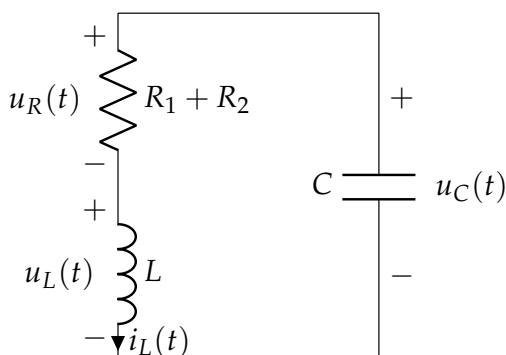
$$u_C(t) = 10 \text{ V}$$

$$i_L(t) = \frac{\epsilon_g}{R_1} = 1 \text{ A}$$

Por tanto, $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 10 \text{ V}$ y $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 1 \text{ A}$

A continuación dibujamos el circuito para $t > 0$, para obtener la respuesta natural y la respuesta forzada.

En el circuito resultante no hay fuentes, por lo que no habrá respuesta forzada.



Planteamos la ec. diferencial del circuito usando 2LK:

$$u_L(t) + u_R(t) - u_C(t) = 0$$

$$L \frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + (R_1 + R_2) \frac{d i_L(t)}{dt} - \frac{1}{C} [-i_L(t)] = 0$$

Luego la ec. característica es:

$$s^2 + \frac{R_1 + R_2}{L} \cdot s + \frac{1}{L \cdot C} = 0$$

$$s^2 + 6 \cdot s + 2 = 0$$

Cuyas soluciones son:

$$s_1 = -0,354 \text{ s}^{-1}, \quad s_2 = -5,645 \text{ s}^{-1}$$

Escribiendo la forma estándar de la ec. característica, determinamos el valor de los parámetros ξ y ω_n :

$$s^2 + 2\xi\omega_n \cdot s + \omega_n^2 = 0$$

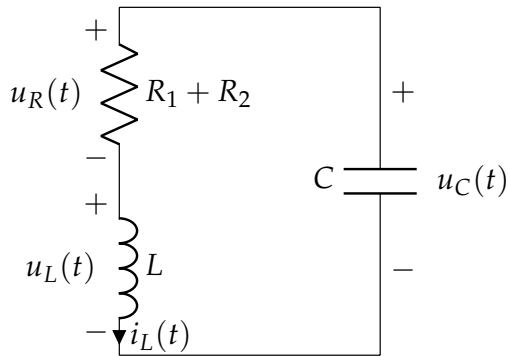
$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} = \sqrt{2} \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \quad \xi = \frac{1}{2\omega_n} \cdot \frac{R_1 + R_2}{L} = \frac{3}{2}\sqrt{2} = 2,12$$

Dado que $\xi > 1$, se trata de un transitorio sobreamortiguado, resultado coherente con el tipo de soluciones que se han obtenido para s_1 y s_2 (soluciones reales distintas, que corresponde a un circuito sobreamortiguado).

La respuesta natural del circuito es por tanto:

$$i_L(t) = K_1 \cdot e^{-0,354 \cdot t} + K_2 \cdot e^{-5,645 \cdot t}$$

Para determinar las constantes de integración K_1 y K_2 recurrimos a las condiciones iniciales:



$$u_R(t) + u_L(t) = u_C(t)$$

$$u_L(0^+) = u_C(0^+) - u_R(0^+)$$

$$u_R(0^+) = (R_1 + R_2) \cdot i_L(0^+) = 15 \text{ V}$$

$$u_L(0^+) = 10 - 15 = -5 \text{ V}$$

Por tanto:

$$i_L(0^+) = 1 \text{ A}, \quad \left. \frac{di_L(t)}{dt} \right|_{t=0^+} = \frac{1}{L} \cdot u_L(0^+) = -2 \frac{\text{A}}{\text{s}}$$

Particularizamos la ec. de $i_L(t)$ para $t = 0$, obteniendo las ecs. necesarias para obtener K_1 y K_2 :

$$i_L(0^+) = K_1 + K_2 = 1$$

$$\left. \frac{di_L(t)}{dt} \right|_{t=0^+} = K_1 \cdot s_1 + K_2 \cdot s_2 = -2$$

Resolviendo el sistema de 2 ecs. con 2 incógnitas:

$$K_1 = 0,689 \text{ A}, \quad K_2 = 0,311 \text{ A}$$

Finalmente:

$$i_L(t) = \boxed{0,689 \cdot e^{-0,354 \cdot t} + 0,311 \cdot e^{-5,645 \cdot t} \text{ A}}$$

Para obtener la tensión en el condensador, recurrimos a la 2LK:

$$\begin{aligned} u_C(t) &= u_R(t) + u_L(t) = \\ &= (R_1 + R_2) \cdot i_L(t) + L \frac{di_L(t)}{dt} = \boxed{9,728 \cdot e^{-0,354 \cdot t} + 0,275 \cdot e^{-5,645 \cdot t} \text{ V}} \end{aligned}$$