Circuitos de Corriente Alterna

Teoría de Circuitos

Ana Fernández-Guillamón

Formas de onda periódicas

$$y(t) = y(t+T) = y(t+n\cdot T)$$

- **Período (T)**: intervalo de tiempo a partir del cual se repite la forma de onda [s]
- **Frecuencia (f)**: número de veces que se repite la onda por unidad de tiempo [Hz]:

$$f = \frac{1}{T}$$

- **Valor instantáneo ($y(t)$)**: valor que toma la forma de onda en un instante de tiempo
- **Valores de pico (Y_{max}, Y_{min})**: valores máximo y mínimo que toma la forma de onda:

$$Y_{max} = \max(f(t)); \qquad Y_{min} = \min(f(t))$$

- **Valor pico a pico (Y_{PP})**: diferencia (en valor absoluto) entre los valores de pico considerados con signo:

$$Y_{PP} = |Y_{max} - Y_{min}|$$

Forma de onda periódicas

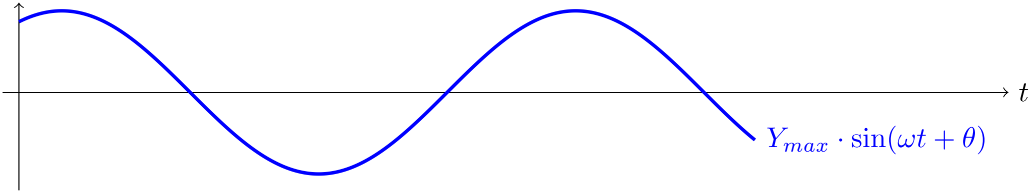
- **Valor medio (Y_m)**: media aritmética de los valores instantáneos que toma la función en un periodo (semi-periodo o cuarto de periodo):

$$\boxed{Y_m = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} y(t)\,dt}$$

- **Valor eficaz (Y_{ef})**: raíz cuadrada de la media de los cuadrados de los valores que toma la función en un periodo

$$\boxed{Y_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T}\cdot\int_a^{a+T} y^2(t)\,dt}}$$

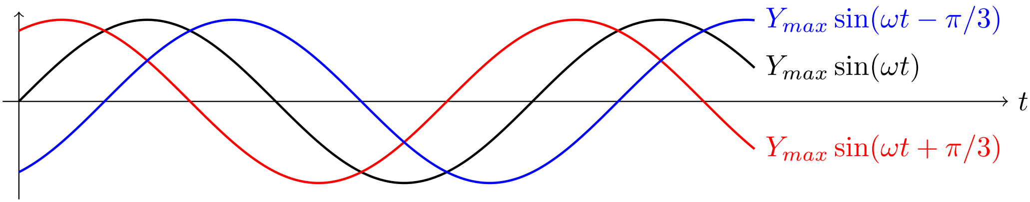
Función sinusoidal



- Y_{max} valor máximo de la onda
- $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$: pulsación [rad/s]
- $f = \frac{\omega}{2 \cdot \pi}$: frecuencia [Hz]
- $T = \frac{1}{T}$: periodo de la onda [s]
- θ: fase [rad] (o [°])

Función sinusoidal

Fase



- Fase:
  - Es el argumento de la onda para $t = 0$
  - Tomando una onda como referencia, si la fase es 0º, se dice que está **en fase** con la de referencia
  - Si la fase es positiva, se dice que la onda **se adelanta** a la referencia
  - Si la fase es negativa, se dice que la onda **se retrasa** a la referencia

Función sinusoidal

Valor medio y valor eficaz

Valor medio

$$Y_m = \frac{1}{T} \int_0^T y(t)\, dt = 0$$

$$Y_m = \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} Y_{max} \cdot \sin(\omega \cdot t)\, dt = \boxed{\frac{2 \cdot Y_{max}}{\pi} \approx 0.637 \cdot Y_{max}}$$

Valor eficaz

$$Y = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T y^2(t)\, dt}$$

$$Y = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T \left(Y_{max} \cdot \sin(\omega \cdot t)\right)^2 dt} = \boxed{\frac{Y_{max}}{\sqrt{2}}}$$

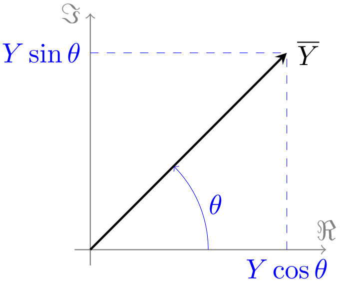
Cálculo fasorial

Representación fasorial

- Un fasor es un **vector giratorio** que gira en sentido contrario a las agujas del reloj a velocidad ω: vídeo
- El **módulo** del fasor es el **valor eficaz**; el **argumento** es la **fase**
- Descartamos pulsación: No se puede emplear cuando hay frecuencias diferentes en un mismo circuito

$$\text{Forma polar: } \overline{Y} = Y_{ef}\underline{/\theta}$$

$$\text{Forma binómica: } \overline{Y} = Y_{ef} \cdot (\cos(\theta) + \mathrm{j} \cdot \sin(\theta))$$



Consideraciones

- Permiten operar con funciones sinusoidales como si fueran vectores/números complejos
- Todos deben tener la misma ω
- Todos deben tener función sin (o cos)

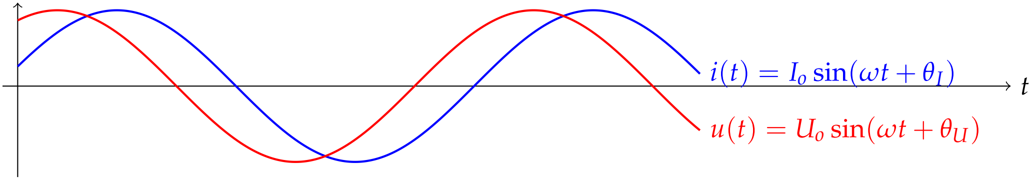
Cálculo fasorial

$$\overline{Y_1} = \overbrace{Y_{ef1}\ \cos(\theta_1)}^{a_1} + \mathrm{j}\ \overbrace{Y_{ef1}\ \sin(\theta_1)}^{b_1} = Y_{ef1}\underline{/\theta_1}$$
$$\overline{Y_2} = \underbrace{Y_{ef2}\ \cos(\theta_2)}_{a_2} + \mathrm{j}\ \underbrace{Y_{ef2}\ \sin(\theta_2)}_{b_2} = Y_{ef2}\underline{/\theta_2}$$

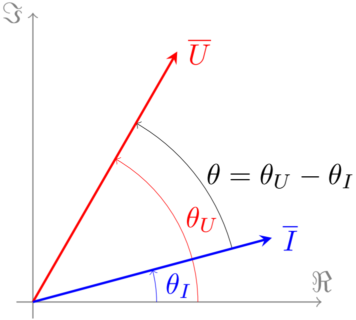
- Forma binómica:
  - Suma: $\overline{Y_1} + \overline{Y_2} = (a_1 + a_2) + \mathrm{j}\,(b_1 + b_2)$
  - Resta: $\overline{Y_1} - \overline{Y_2} = (a_1 - a_2) + \mathrm{j}\,(b_1 - b_2)$
- Forma polar:
  - Multiplicar: $\overline{Y_1} \cdot \overline{Y_2} = (Y_{ef1} \cdot Y_{ef2})\underline{/\theta_1 + \theta_2}$
  - Dividir: $\dfrac{\overline{Y_1}}{\overline{Y_2}} = \dfrac{Y_{ef1}}{Y_{ef2}}\underline{/\theta_1 - \theta_2}$

Representación fasorial: diagramas fasoriales

Tensión y corriente en notación fasorial



$$\overline{U} = U\underline{/\theta_U}$$
$$\overline{I} = I\underline{/\theta_I}$$



Importancia

- Estudio y análisis de CA con vectores
- Relaciones claras e intuitivas

1. Formas de onda periódicas
2. Respuesta de los elementos pasivos a una excitación senoidal
3. Respuesta de los circuitos serie a una excitación senoidal
4. Respuesta de los circuitos paralelo a una excitación senoidal
5. Potencia en corriente alterna
6. Teoremas

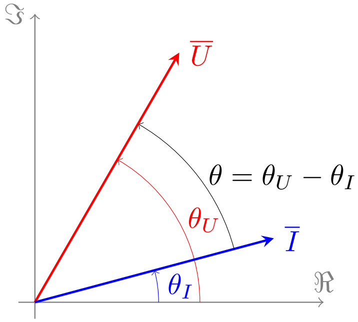
Impedancia operacional

Relación entre fasores de tensión y corriente

$$\overline{U} = \overline{Z} \cdot \overline{I}$$

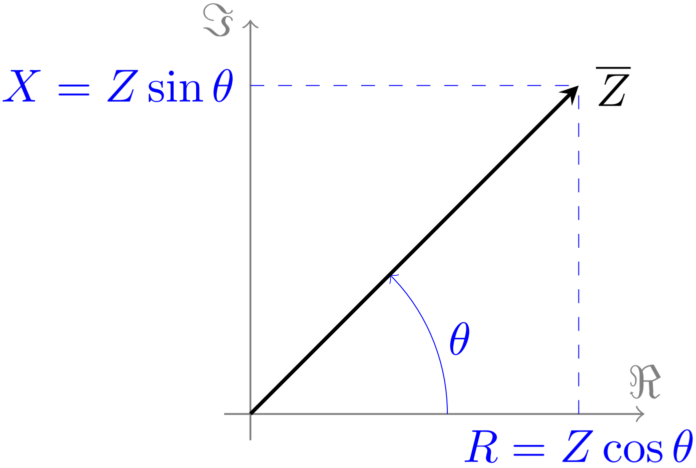
$$\overline{Z} = \frac{\overline{U}}{\overline{I}}$$

$$\boxed{\overline{Z} = \frac{U}{I}\underline{/\theta_U - \theta_I} \Rightarrow \begin{cases} Z = \frac{U}{I} \\ \theta = \theta_U - \theta_I \end{cases}}$$



Impedancia operacional

$$\overline{Z} = Z \cdot \cos(\theta) + \mathrm{j}\, Z \cdot \sin(\theta) = R + \mathrm{j}X$$

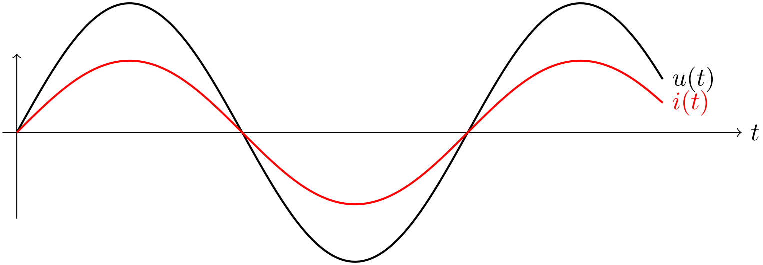


Circuito resistivo

Un circuito resistivo no desfasa (**tensión y corriente en fase**)

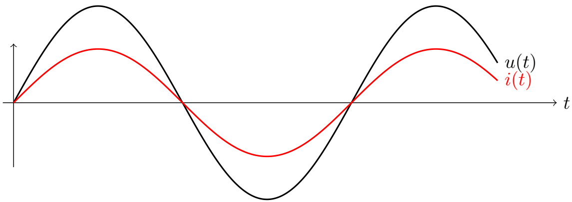
$$i(t) = I\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \theta_I)$$

$$u(t) = R \cdot i(t) = R \cdot I\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \theta_I) = U\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \theta_I)$$



Circuito resistivo

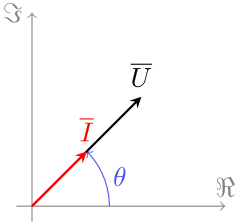
Un circuito resistivo no desfasa (**tensión y corriente en fase**).

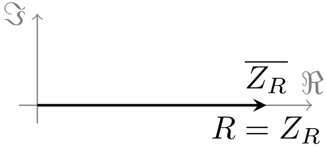


$$Z = \frac{U}{I} = R$$

$$\theta = \theta_U - \theta_I = 0$$

$$\boxed{\overline{Z}_R = R\underline{/0}}$$



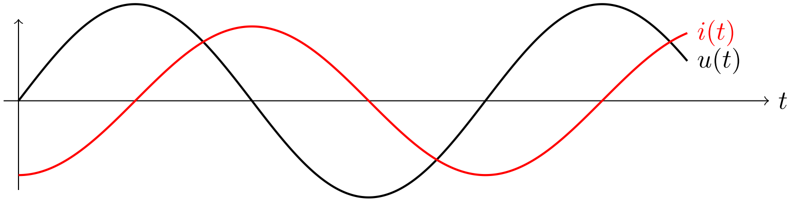


Circuito inductivo puro

Un circuito inductivo puro genera **señales en cuadratura** y **retrasa la corriente**

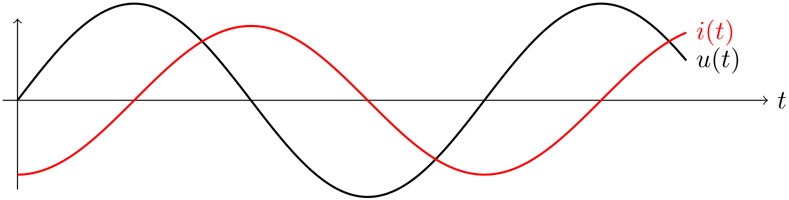
$$i(t) = I\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \theta_I)$$

$$u(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} = \omega L I\sqrt{2} \cdot \underbrace{\cos(\omega t + \theta_I)}_{\sin(\omega t + \theta_I + \pi/2)} = U\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \theta_I + \pi/2)$$



Circuito inductivo puro

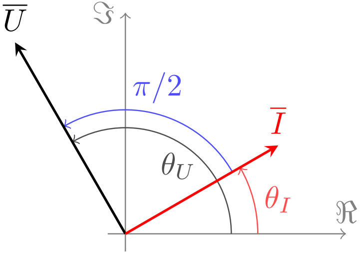
Un circuito inductivo puro genera **señales en cuadratura** y **retrasa la corriente**

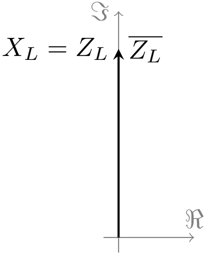


$$Z = \frac{U}{I} = \omega L$$

$$\theta = \theta_U - \theta_I = \pi/2$$

$$\boxed{\overline{Z}_L = \mathrm{j}\omega L = \omega L\underline{/90^\circ}}$$





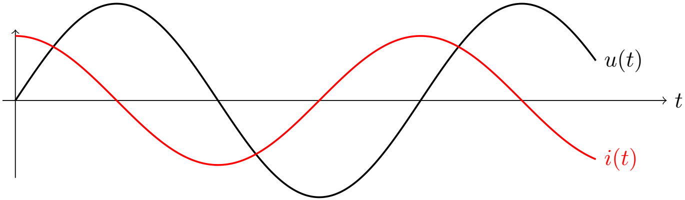
Circuito capacitivo puro

Circuito capacitivo puro

Un circuito capacitivo puro genera **señales en cuadratura** y **adelanta la corriente**

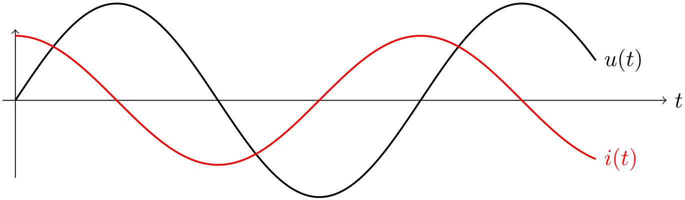
$$i(t) = I\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \theta_I)$$

$$u(t) = \frac{1}{C} \cdot \int_{-\infty}^{t} i(t) \cdot dt = \frac{I}{\omega C}\sqrt{2} \cdot \underbrace{(-\cos(\omega t + \theta_I))}_{\sin(\omega t + \theta_I - \pi/2)} = U\sqrt{2} \cdot \sin\left(\omega t + \theta_I - \pi/2\right)$$



Circuito capacitivo puro

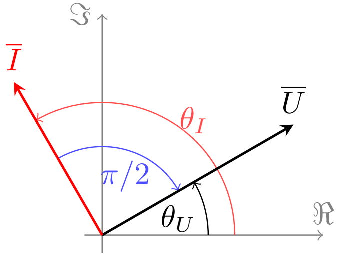
Un circuito capacitivo puro genera **señales en cuadratura** y **adelanta la corriente**

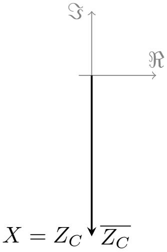


$$Z = \frac{U}{I} = \frac{1}{\omega C}$$

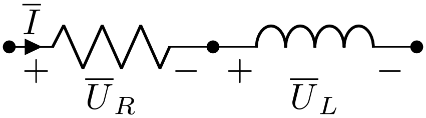
$$\theta = \theta_U - \theta_I = -\pi/2$$

$$\boxed{\overline{Z}_C = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} = \frac{1}{\omega C}\angle{-90^\circ}}$$





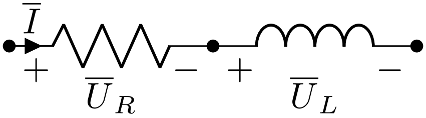
Circuito RL



$$\overline{I} = I\underline{/\theta_I}$$
$$\overline{U_R} = R\overline{I} = R \cdot I\underline{/\theta_I}$$
$$\overline{U_L} = \overline{X_L} \cdot \overline{I} = \omega\, L\, I\underline{/\theta_I + 90^\circ}$$

$$\overline{U} = \overline{U}_R + \overline{U}_L = \underbrace{(R + \mathrm{j}\,\omega L)}_{\overline{Z_{eq}}}\, \overline{I}$$

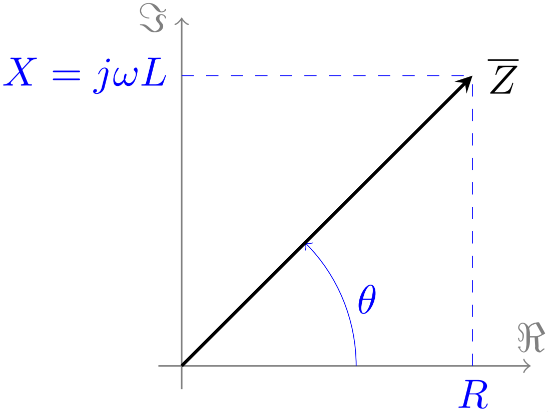
Circuito RL



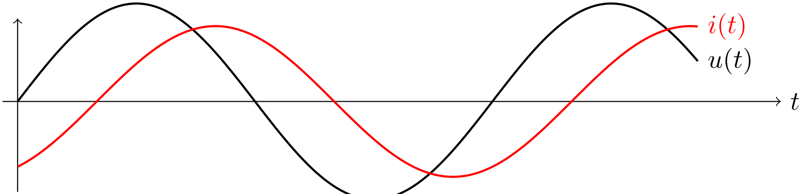
$$\overline{Z} = R + \mathrm{j}\omega L \Rightarrow \boxed{\theta > 0}$$

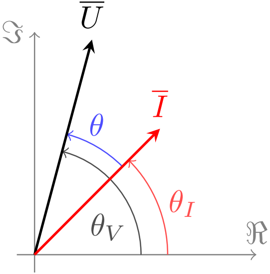
$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$

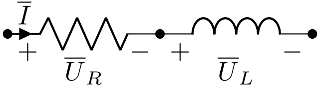
$$\theta = \arctan \frac{\omega L}{R}$$



Circuito RL

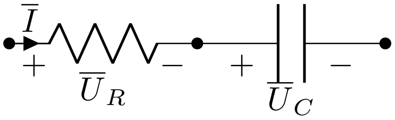






$$\overline{U} = \overline{U_R} + \overline{U_L} = (R + \mathrm{j}\,\omega L) \cdot \overline{I} \Rightarrow \begin{cases} U = \sqrt{U_R^2 + U_L^2} = I\sqrt{R^2 + (\omega L)^2} = I \cdot Z_{eq} \\ \theta = \arctan\left(\dfrac{U_L}{U_R}\right) = \arctan\left(\dfrac{\omega L}{R}\right) \end{cases}$$

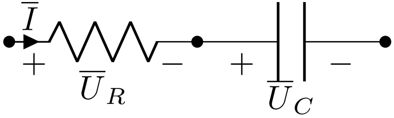
Circuito RC



$$\overline{I} = I\underline{/\theta_I}$$
$$\overline{U_R} = R\overline{I} = R \cdot I\underline{/\theta_I}$$
$$\overline{U_C} = \overline{X_C} \cdot \overline{I} = \frac{I}{\omega\, C}\, I\underline{/\theta_I - 90^\circ}$$

$$\overline{U} = \overline{U}_R + \overline{U}_C = \underbrace{\left(R - \mathrm{j}\,\frac{1}{\omega C}\right)}_{\overline{Z_{eq}}}\ \overline{I}$$

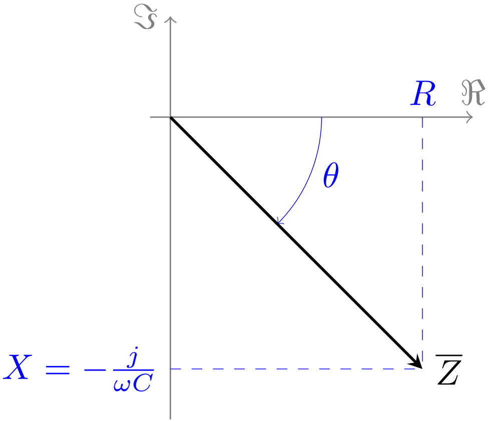
Circuito RC



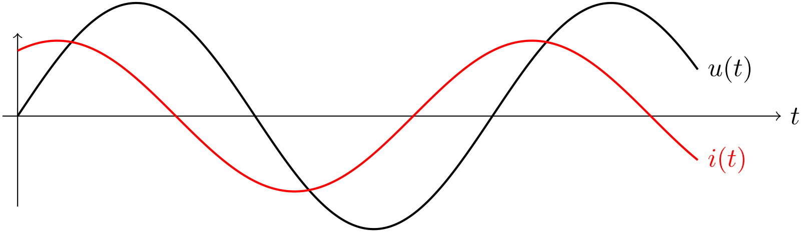
$$\overline{Z} = R - \mathrm{j}\frac{1}{\omega C} \Rightarrow \boxed{\theta < 0}$$

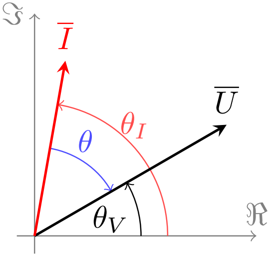
$$Z = \sqrt{R^2 - \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

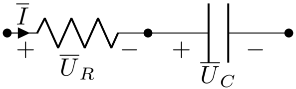
$$\theta = -\arctan\frac{1}{R\,\omega\,C}$$



Circuito RC

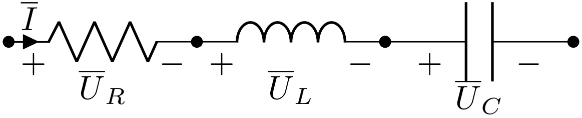






$$\overline{U} = \overline{U_R} + \overline{U_C} = \left(R - \mathrm{j}\,\frac{1}{\omega\, C}\right) \cdot \overline{I} \Rightarrow \begin{cases} U = \sqrt{U_R^2 + U_C^2} = I\sqrt{R^2 + \left(\dfrac{1}{\omega\, C}\right)^2} = I \cdot Z \\ \theta = -\arctan\left(\dfrac{U_C}{U_R}\right) = -\arctan\left(\dfrac{1}{R\,\omega\, C}\right) \end{cases}$$

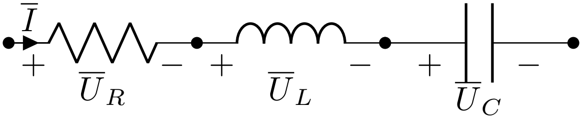
Circuito RLC



$$\overline{I} = I\underline{/\theta_I}$$
$$\overline{U_R} = R\overline{I} = R \cdot I\underline{/\theta_I}$$
$$\overline{U_L} = \overline{X_L} \cdot \overline{I} = \omega\, L\, I\underline{/\theta_I + 90^\circ}$$
$$\overline{U_C} = \overline{X_C} \cdot \overline{I} = \frac{I}{\omega\, C}\, I\underline{/\theta_I - 90^\circ}$$

$$\overline{U} = \overline{U}_R + \overline{U}_L + \overline{U}_C = \underbrace{\left(R + \mathrm{j}\,\omega\, L - \mathrm{j}\,\frac{1}{\omega C}\right)}_{\overline{Z_{eq}}}\,\overline{I}$$

Circuito RLC



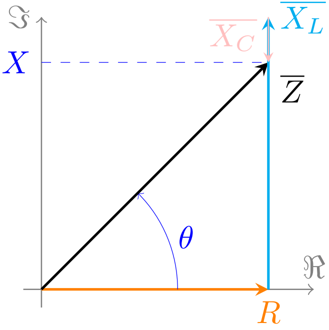
$$\overline{Z} = R + \mathrm{j}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \Rightarrow \boxed{\theta ?}$$

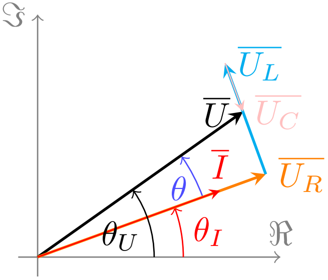
$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)$$

- $\theta > 0 \Rightarrow \omega L > \frac{1}{\omega C}$: inductivo
- $\theta < 0 \Rightarrow \omega L < \frac{1}{\omega C}$: capacitivo
- $\theta = 0 \Rightarrow \omega L = \frac{1}{\omega C}$: resistivo (resonancia)

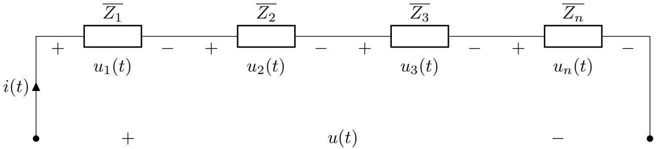
Circuito RLC

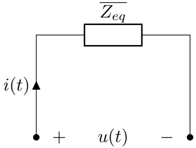




$$\overline{U} = \overline{U_R} + \overline{U_L} + \overline{U_C} = \left(R + \mathrm{j}\,\omega\,L - \mathrm{j}\,\frac{1}{\omega\,C}\right) \cdot \overline{I} \Rightarrow \begin{cases} U = I\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2} = I \cdot Z \\ \theta = \arctan\left(\dfrac{\omega\,L - \frac{1}{\omega\,C}}{R}\right) \end{cases}$$

Circuito serie general





$$\overline{U} = \overline{U_1} + \overline{U_2} + \overline{U_3} + ... + \overline{U_n} = \bar{I} \cdot (\overline{Z_1} + \overline{Z_2} + \overline{Z_3} + ... + \overline{Z_n}) = \bar{I} \cdot \overline{Z_{eq}}$$

$$\overline{Z_{eq}} = \overline{Z_1} + \overline{Z_2} + \overline{Z_3} + ... + \overline{Z_n} \Rightarrow \boxed{\overline{Z_{eq}} = \sum_{i=1}^{n} \overline{Z_i}}$$

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^{n} R_i\,; \qquad X_{eq} = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

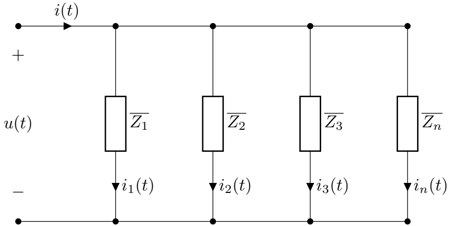
$$\theta = \arctan\left(\frac{X_{eq}}{R_{eq}}\right)$$

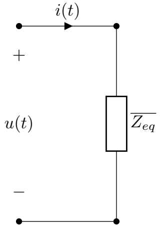
Circuito serie general

Ejemplo

Un circuito en serie formado por $R = 10\Omega$, $L = 20\,\text{mH}$ y $C = 100\,\mu\text{F}$ se conecta a una tensión $u(t) = 200 \cdot \sin(1000t + \frac{\pi}{4})$ V. Calcular $\bar{I}$, $u_R(t)$, $u_L(t)$ y $u_C(t)$ y dibujar el diagrama fasorial

Circuito paralelo general

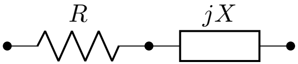




$$\overline{I} = \overline{I_1} + \overline{I_2} + \overline{I_3} + \ldots + \overline{I_n} = \overline{U} \cdot \left(\frac{1}{\overline{\overline{Z_1}}} + \frac{1}{\overline{\overline{Z_2}}} + \frac{1}{\overline{\overline{Z_3}}} + \ldots + \frac{1}{\overline{\overline{Z_n}}} \right) = \frac{\overline{U}}{\overline{\overline{Z_{eq}}}}$$

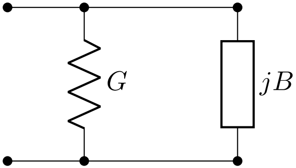
$$\frac{1}{\overline{\overline{Z_{eq}}}} = \frac{1}{\overline{\overline{Z_1}}} + \frac{1}{\overline{\overline{Z_2}}} + \frac{1}{\overline{\overline{Z_3}}} + \ldots + \frac{1}{\overline{\overline{Z_n}}} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{\overline{\overline{Z_{eq}}}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \overline{Z_i}}}$$

Impedancia y admitancia



$$\overline{U} = \overline{Z} \cdot \bar{I}$$

$$\overline{Z} = R + \mathrm{j}X$$

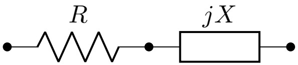


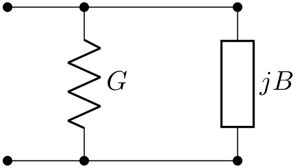
$$\bar{I} = \overline{Y} \cdot \overline{U}$$

$$\overline{Y} = G + \mathrm{j}B$$

$$\boxed{\overline{Y} = \frac{1}{\overline{Z}} \rightarrow \begin{cases} |Y| = \frac{1}{|Z|} \\ \theta_Y = -\theta_Z = -\theta \end{cases}}$$

Impedancia y admitancia





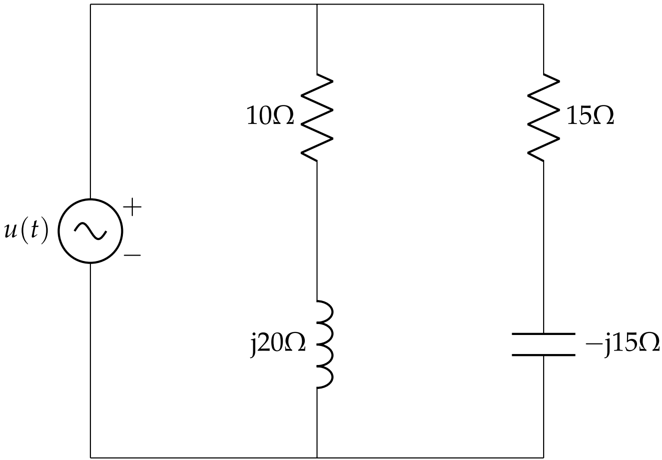
$$\overline{Z} = \frac{1}{G + \mathrm{j}B} \rightarrow \begin{cases} R = \dfrac{G}{G^2 + B^2} \\[2ex] X = -\mathrm{j}\dfrac{B}{G^2 + B^2} \end{cases}$$

$$\overline{Y} = \frac{1}{R + \mathrm{j}X} \rightarrow \begin{cases} G = \dfrac{R}{R^2 + X^2} \\[2ex] B = -\mathrm{j}\dfrac{X}{R^2 + X^2} \end{cases}$$

Impedancia y admitancia

Ejemplo

Calcular la impedancia y admitancia compleja equivalente del circuito de la figura.



Potencia en corriente alterna

Potencia instantánea

Sea la tensión referencia de fases. Si $\theta > 0$ (inductivo) la corriente está retrasada respecto de la tensión (*circuito en retraso*).

$$\begin{aligned} u(t) &= U\sqrt{2}\cos(\omega t) \\ i(t) &= I\sqrt{2}\cos(\omega t - \theta) \\ p(t) &= u(t)\cdot i(t) \end{aligned}$$

$$p(t) = \left(U\sqrt{2}\cdot\cos(\omega t)\right)\cdot\left(I\sqrt{2}\cdot\cos(\omega t-\theta)\right) = 2\cdot U\cdot I\cdot\cos(\omega t)\cdot\cos(\omega t-\theta)$$

$$p(t) = 2\cdot U\cdot I\cdot\overbrace{\cos(\omega t)}^{\cos(\alpha)}\cdot\overbrace{\cos(\omega t-\theta)}^{\cos(\beta)} \Rightarrow \boxed{p(t) = U\cdot I\cdot\cos(\theta) + U\cdot I\cdot\cos(2\omega t-\theta)}$$

Potencia en corriente alterna

Potencia instantánea

$p(t)$ cambia con el tiempo. El valor medio en un periodo:

$$P_m = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T U\,I\,\cos(\theta)\,dt + \cancelto{0}{\frac{1}{T}\int_0^T U\,I\,\cos(2\omega t - \theta)\,dt} = U\,I\,\cos(\theta)$$

que coincide con el **término fijo** de $p(t)$ y se conoce como **potencia activa**. El término $U\,I\,\cos(2\omega t - \theta)$ es el responsable de que $p(t)$ fluctúe en torno a P, conociéndose como **potencia fluctuante**. Teniendo en cuenta la relación para el coseno de una resta:

$$p(t) = \underbrace{U\,I\,\cos(\theta)\,[1 + \cos(2\omega t)]}_{p_1(t)} + \underbrace{U\,I\sin(\theta)\,\sin(2\omega t)}_{p_2(t)} = P\,[1 + \cos(2\omega t)] + Q\,\sin(2\omega t)$$

Potencia en corriente alterna

Expresión general

- P, positiva, es la potencia media que consumen los elementos resistivos, y se denomina **potencia activa** [W]:

$$\boxed{P = U\,I\,\cos(\theta)}$$

- Q, positiva o negativa, es la máxima potencia que almacena/devuelve el circuito (no implica transformación en trabajo útil), y se denomina **potencia reactiva** [VAr]:

$$\boxed{Q = U\,I\,\sin(\theta)}$$

Circuito resistivo

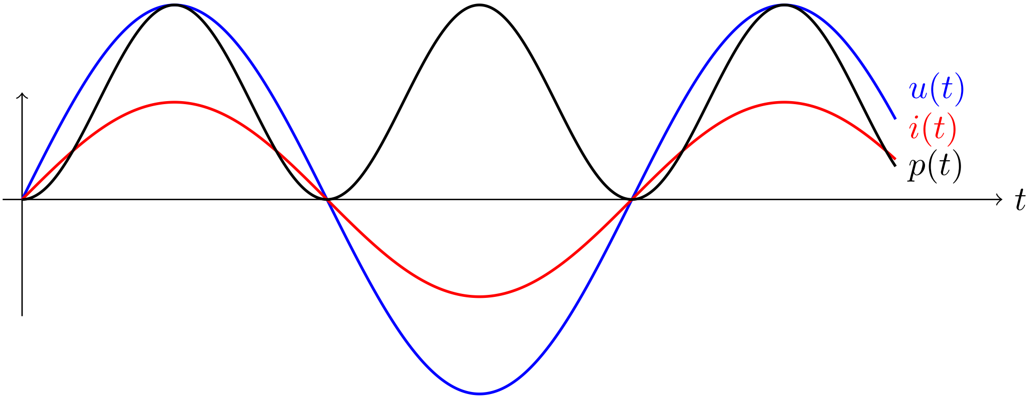
$$P = UI\cos(\theta) \qquad Q = UI\sin(\theta)$$

$$p(t) = P\,\left[1 + \cos(2\omega t)\right] + Q\,\sin(2\omega t)$$

$$\overline{Z_R} = R\underline{/0^\circ} \rightarrow \theta = 0 \rightarrow \begin{cases} P = UI = \dfrac{U^2}{R} = I^2R \\ Q = 0 \end{cases}$$

$$p(t) = P \cdot (1 + \cos(2\omega t))$$

Circuito resistivo



- Fluctúa al doble de frecuencia
- Es siempre positiva

Circuito inductivo puro

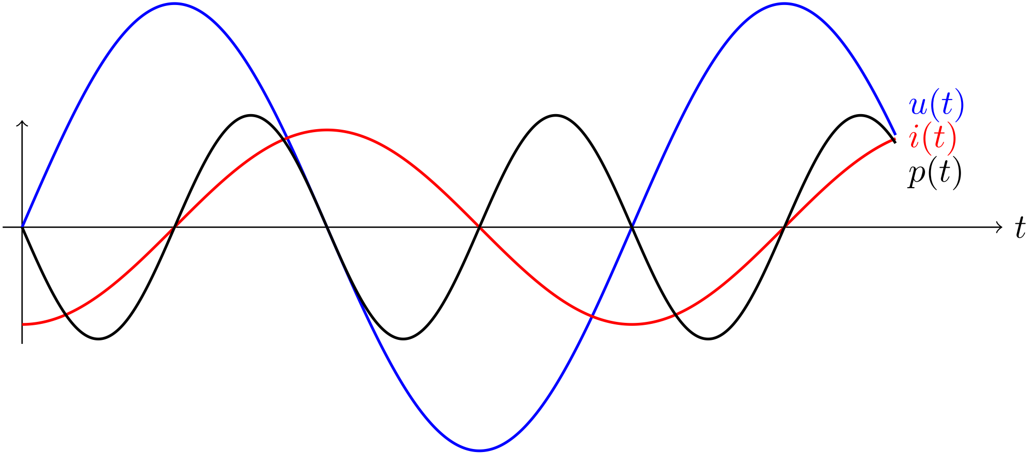
$$P = UI\cos(\theta) \qquad Q = UI\sin(\theta)$$

$$p(t) = P\left[1+\cos(2\omega t)\right] + Q\cdot\sin(2\omega t)$$

$$\overline{Z_L} = \omega L\underline{/90^\circ} \rightarrow \theta = 90 \rightarrow \begin{cases} P = 0 \\ Q = UI = \dfrac{U^2}{\omega L} = I^2\omega L \end{cases}$$

$$p(t) = Q\cdot\sin(2\omega t)$$

Circuito inductivo puro



- Fluctúa al doble de frecuencia
- Pasa por los ceros de tensión y corriente
- Su valor medio es nulo

Circuito capacitivo puro

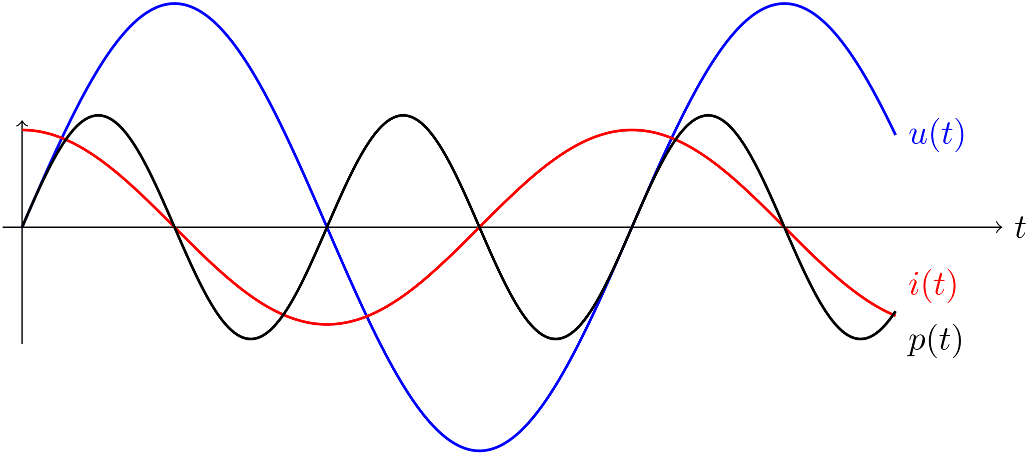
$$P = UI\cos\theta \qquad Q = UI\sin\theta$$

$$p(t) = P\left[1+\cos(2\omega t)\right] + Q\cdot\sin(2\omega t)$$

$$\overline{Z_C} = \frac{1}{\omega C}\angle{-90^\circ} \rightarrow \theta = -90 \rightarrow \begin{cases} P = 0 \\ Q = -UI = -U^2\omega C = -\dfrac{I^2}{\omega C} \end{cases}$$

$$p(t) = Q\cdot\sin(2\omega t)$$

Circuito capacitivo puro



- Fluctúa al doble de frecuencia
- Pasa por los ceros de tensión y corriente
- Su valor medio es nulo

Triángulo de potencias

- Potencia activa [W]

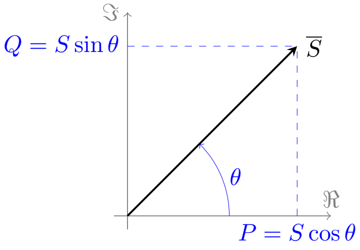
$$\boxed{P = U \cdot I \cdot \cos(\theta) = R \cdot I^2}$$

- Potencia reactiva [VAr]

$$\boxed{Q = U \cdot I \cdot \sin(\theta) = X \cdot I^2}$$

- Potencia aparente [VA]

$$\boxed{\overline{S} = P + \mathrm{j}Q = \overline{U} \cdot \overline{I}^*}$$



$$
\begin{aligned}
\overline{U} &= U\angle 0 \\
\overline{I} &= I\angle{-\theta} \\
\overline{U}\;\overline{I}^* &= U\angle 0 \cdot I\angle\theta = UI\angle\theta = \\
&= UI(\cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta) = P + \mathrm{j}Q
\end{aligned}
$$

$$S = U \cdot I$$

$$\theta_S = \theta_Z = \theta$$

$$f.d.p. \equiv \cos(\theta)$$

Resumen de potencia de los elementos pasivos

Resistencia

$$\theta = 0 \Rightarrow \begin{cases} P_R = RI^2 \\ Q_R = 0 \\ S_R = P_R \end{cases}$$

- Consume potencia activa
- No consume potencia reactiva

Resumen de potencia de los elementos pasivos

Bobina

$$\theta = 90 \Rightarrow \begin{cases} P_L &= 0 \\ Q_L &= \omega L I^2 \\ \overline{S}_L &= \omega L I^2 \underline{/90^\circ} \end{cases}$$

- No consume potencia activa
- Consume potencia reactiva ($Q > 0$)

Resumen de potencia de los elementos pasivos

Condensador

$$\theta = -90 \Rightarrow \begin{cases} P_L = 0 \\ Q_C = -\omega C U^2 \\ \overline{S}_C = \omega C U^2 \underline{/-90^\circ} \end{cases}$$

- No consume potencia activa
- Genera potencia reactiva ($Q < 0$)

Teorema de Boucherot

- Consecuencia del **principio de conservación de la energía**
- Supóngase $\overline{Z_1} = R_1 + \mathrm{j}\, X_1$, $\overline{Z_2} = R_2 + \mathrm{j}\, X_2$ y $\overline{Z_3} = R_3 - \mathrm{j}\, X_3$ en serie recorridas por $\bar{I} = I\underline{/0^\circ}$:

$$\overline{U} = \sum_{i=1}^{3} \overline{U_i} \Rightarrow \begin{cases} U\,\cos(\theta) = \sum_{i=1}^{3} U_i\,\cos(\theta_i) \\ U\,\sin(\theta) = \sum_{i=1}^{3} U_i\,\sin(\theta_i) \end{cases}$$

Multiplicando las dos expresiones por I:

$$U\,I\,\cos(\theta) = P_T = \sum_{i=1}^{3} U_i\,I\,\cos(\theta_i) = \sum_{i=1}^{3} P_i$$

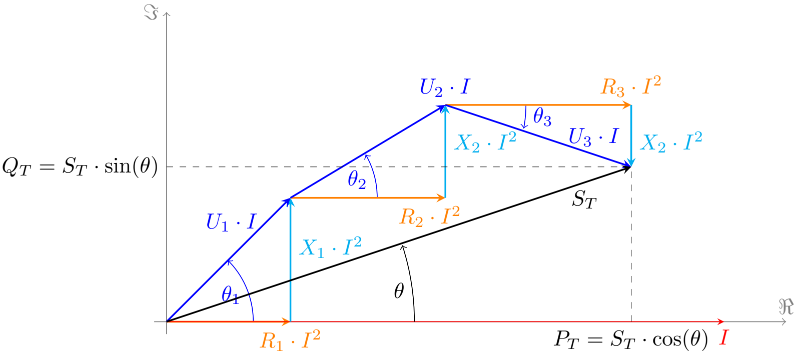
$$U\,I\,\sin(\theta) = Q_T = \sum_{i=1}^{3} U_i\,I\,\sin(\theta_i) = \sum_{i=1}^{3} Q_i$$

Teorema de Boucherot

La potencia aparente total es la suma de las potencias aparentes individuales (la potencia activa/reactiva total es la suma de las potencias activas/reactivas individuales):

$$\overline{S} = \sum_{i=1}^{n} \overline{S}_i$$

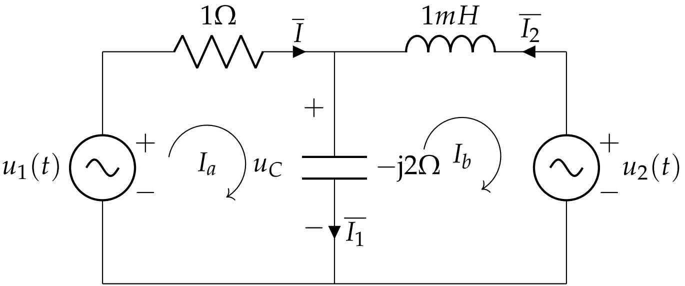
$$P_T + \mathrm{j}Q_T = \sum_{i=1}^{n} (P_i + \mathrm{j}Q_i)$$



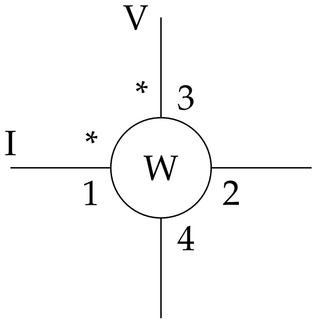
Teorema de Boucherot

Ejemplo

Sabiendo que las fuentes de tensión del circuito de la figura vienen definidas por las formas de onda $u_1(t) = 10\sqrt{2} \cdot \cos(1000 \cdot t)$ V y $u_2(t) = 5\sqrt{2} \cdot \sin(1000 \cdot t)$ V, calcular las potencias de cada elemento, así como el balance de potencias del circuito.



Medida de potencia: vatímetro



Vatímetro: equipo de medida de 4 terminales (1 par para tensión, 1 par para corriente):

$$W = \overline{I_{1,2}} \circ \overline{U_{3,4}} = I_{1,2} \cdot U_{3,4} \cdot (\widehat{I_{1,2}, U_{3,4}})$$

Factor de potencia: importancia y mejora

El factor de potencia, $\cos(\theta)$, representa la aportación de potencia activa dentro de la potencia aparente:

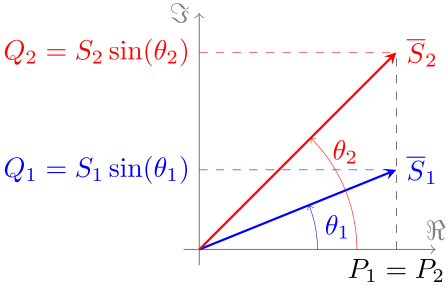
$$\cos(\theta) = \frac{P}{S}$$

Se dice que:

- $\cos(\theta)$ **en retraso** cuando el circuito tiene carácter inductivo (la intensidad va retrasada respecto a la tensión)
- $\cos(\theta)$ **en adelanto** cuando el circuito tiene carácter capacitivo (la intensidad va adelantada respecto a la tensión)

Factor de potencia: importancia y mejora

Sean dos sistemas con **misma tensión y potencia activa**, y factores de potencia $\cos\theta_2 < \cos\theta_1$ ($Q_2 > Q_1$)



- El sistema 2 requiere **mayor potencia aparente** (generador mayor) para alimentar la misma potencia activa:

$$\left(\frac{P}{\cos\theta_1} = S_1\right) < \left(S_2 = \frac{P}{\cos\theta_2}\right)$$

- El sistema 2 requiere **mayor sección** de cable para transportar la misma potencia activa:

$$\left(\frac{P}{U\cos\theta_1} = I_1\right) < \left(I_2 = \frac{P}{U\cos\theta_2}\right)$$

Factor de potencia: importancia y mejora

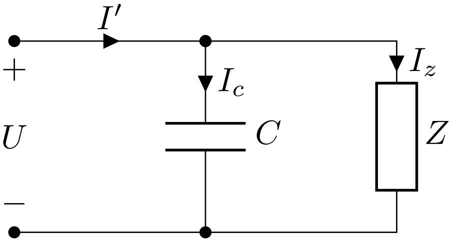
- Comúnmente, el factor de potencia es **inductivo** (máquinas eléctricas industriales)
- Es necesario mejorar **localmente** el factor de potencia: ¿qué elemento pasivo genera Q?

Factor de potencia: importancia y mejora

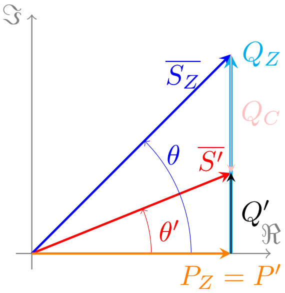
- Comúnmente, el factor de potencia es **inductivo** (máquinas eléctricas industriales)
- Es necesario mejorar **localmente** el factor de potencia: ¿qué elemento pasivo genera Q?
  - **Condensadores**

Sea una carga de potencia activa P_z, potencia reactiva Q_z, factor de potencia $\cos\theta$. Se desea **mejorar el factor de potencia** a $\cos\theta' > \cos\theta$, manteniendo la potencia P_z

Factor de potencia: importancia y mejora



$$P' = P_z$$
$$Q' = Q_c + Q_z \quad (Q' < Q_z)$$
$$\overline{I'} = \overline{I_c} + \overline{I_z} \quad (I' < I_z)$$



$$Q_z = P_z \tan\theta$$
$$Q' = P_z \tan\theta'$$
$$|Q_c| = Q_z - Q' = P_z(\tan(\theta) - \tan(\theta'))$$

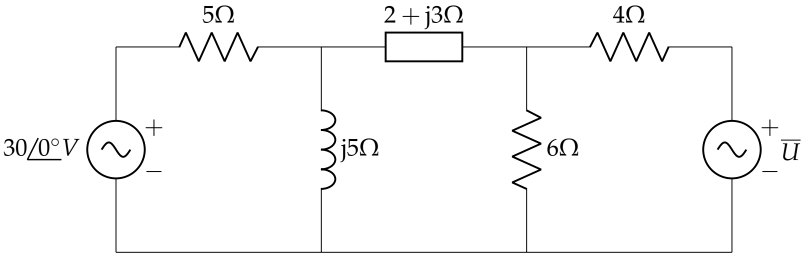
$$|Q_c| = \omega C U^2 \rightarrow \boxed{C = \frac{P_z(\tan(\theta) - \tan(\theta'))}{\omega U^2}}$$

Factor de potencia: importancia y mejora

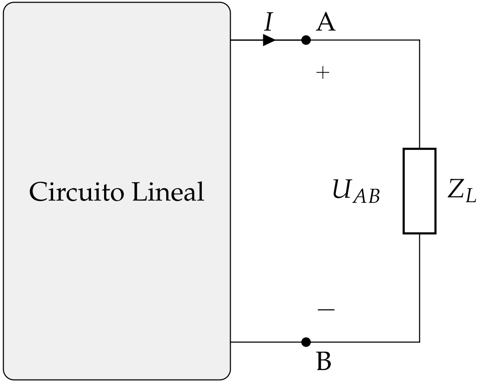
Ejemplo

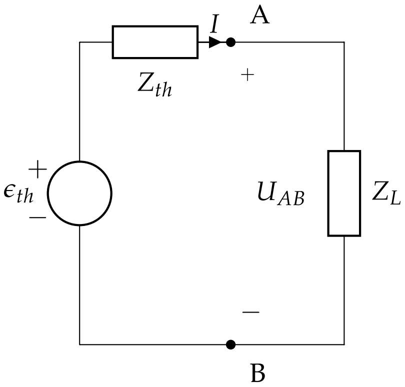
Una instalación de 230 V, 50 Hz consume una potencia activa de 5.2 kW con un factor de potencia 0.8 en retraso. Calcular la capacidad necesaria para obtener un factor de potencia de 0.95.

En el circuito de la figura, determinar la tensión $\overline{U}$ que hace que la corriente que circula por la impedancia $2 + j3\,\Omega$ sea nula.



Cualquier **red lineal** compuesta por elementos activos y pasivos puede sustituirse, desde el punto de vista de sus terminales externos AB, por una **fuente de tensión** (generador de Thévenin, $\overline{\epsilon_{th}}$) en **serie** con una impedancia (impedancia de Thévenin, $\overline{Z_{th}}$).

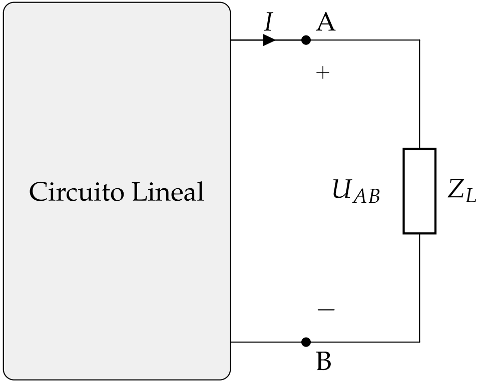


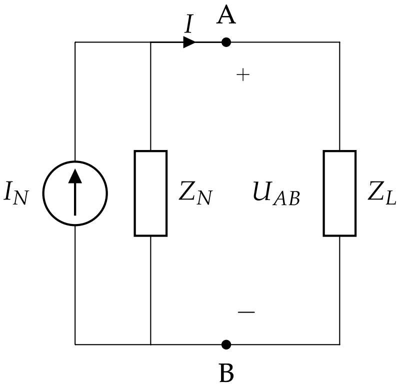


Teoremas de Thévenin y Norton

Norton

Cualquier **red lineal** compuesta por elementos activos y pasivos puede sustituirse, desde el punto de vista de sus terminales externos AB, por una **fuente de corriente** (generador de Norton, $\overline{I_N}$) en **paralelo** con una impedancia (impedancia de Norton, $\overline{Z_N}$).

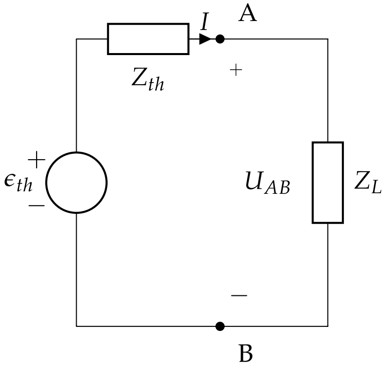




Teorema de la máxima transferencia de potencia

Planteamiento

¿Qué impedancia $\overline{Z_L}$ hay que conectar en los terminales AB para que el circuito entregue la **máxima potencia disponible**?

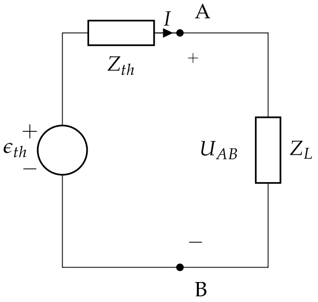


Se aplica el **equivalente de Thévenin**

Teorema de la máxima transferencia de potencia

Ecuaciones

Calculamos la potencia activa en la impedancia de carga Z_L:



$$\bar{I} = \frac{\overline{\epsilon_{th}}}{\overline{Z_{th}} + \overline{Z_L}} \rightarrow I = \frac{\epsilon_{th}}{\sqrt{(R_L + R_{th})^2 + (X_L + X_{th})^2}}$$

$$\boxed{P_L = I^2 \cdot R_L = \frac{\epsilon_{th}^2}{(R_L + R_{th})^2 + (X_L + X_{th})^2} \cdot R_L}$$

Las condiciones de máximo son:

$$\boxed{\frac{\partial P_L}{\partial X_L} = 0; \quad \frac{\partial P_L}{\partial R_L} = 0}$$

Teorema de la máxima transferencia de potencia

Impedancia de carga: resistencia y reactancia

- Reactancia:

$$\frac{\partial P_L}{\partial X_L} = \epsilon_{th}^2 \cdot R_L \cdot \left[\frac{-1}{\left((R_L + R_{th})^2 + (X_L + X_{th})^2\right)^2} \cdot 2 \cdot (X_L + X_{th}) \right] = 0 \Rightarrow \boxed{X_L = -X_{th}}$$

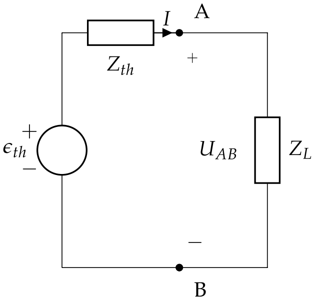
- Resistencia:

$$\frac{\partial P_L}{\partial R_L} = \epsilon_{th}^2 \cdot \left[\frac{1}{(R_L + R_{th})^2} - 2 \cdot \frac{R_L}{(R_L + R_{th})^3} \right] = \frac{\epsilon_{th}^2 \cdot (R_{th} - R_L)}{(R_L + R_{th})^3} = 0 \Rightarrow \boxed{R_L = R_{th}}$$

Teorema de la máxima transferencia de potencia

Impedancia de carga: resistencia y reactancia

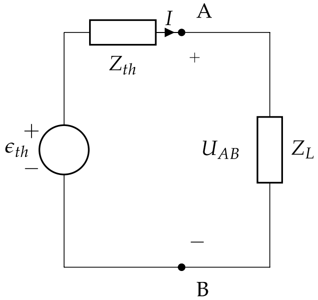
Dado un circuito lineal (del que se puede calcular su equivalente de Thévenin) …



… la impedancia de carga que hay que conectar entre sus terminales AB para obtener la máxima potencia disponible es:

$$\boxed{\overline{Z_L} = \overline{Z_{th}}^* = R_{th} - \mathrm{j}\, X_{th}}$$

La máxima potencia disponible en la carga es:



$$\left.\begin{array}{c} \overline{Z}_L = \overline{Z}_{th}^* \\ P_L = \frac{\epsilon_{th}^2}{(R_L+R_{th})^2+(X_L+X_{th})^2} \cdot R_L \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{P_L = \frac{\epsilon_{th}^2}{4R_{th}}}$$

Importante

Esta expresión es **válida únicamente** para calcular la máxima transferencia de potencia

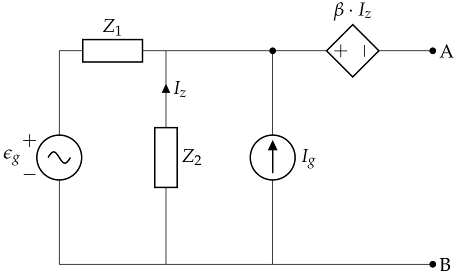
Teorema de la máxima transferencia de potencia

Ejemplo

En el circuito de la figura, calcular:

- El generador de Thévenin respecto de A y B
- La impedancia de Thévenin respecto de A y B
- La impedancia de carga que se debe conectar entre A y B para conseguir la máxima potencia disponible
- La potencia activa entregada entre A y B cuando se conecta dicha impedancia

Datos: $\overline{Z_1} = 3 + j4\Omega$; $\overline{Z_2} = 2 + j\Omega$; $\overline{\epsilon_g} = 10\underline{/30^\circ}\ V$; $\overline{I_g} = 2\underline{/15^\circ}\,A$; $\beta = 5\Omega$



Teorema de superposición

Procedimiento

1. Se apagan todas las fuentes **independientes** del circuito menos una
   - Las fuentes de tensión se sustituyen por un cortocircuito ($U = 0$)
   - Las fuentes de corriente se sustituyen por un circuito abierto ($I = 0$)
   - Las fuentes **dependientes no** se modifican
2. Se analiza el circuito, obteniendo la respuesta individual a la fuente que permanece activa
3. Se repite este procedimiento para cada una de las fuentes **independientes** del circuito
4. La respuesta total del circuito es la suma de las respuestas individuales

Teorema de superposición

Observaciones

- **Siempre** hay que aplicar este método cuando en un circuito conviven fuentes de **diferente frecuencia** (o fuentes de corriente continua y corriente alterna)
- En el caso de fuentes de corriente alterna **sinusoidal**, la respuesta debe expresarse en el **dominio del tiempo**. **No** se pueden **sumar** los **fasores** que corresponden a **frecuencias diferentes**
- En el primer paso del procedimiento, se pueden agrupar las fuentes que funcionan a la misma frecuencia y calcular la respuesta del circuito en esa frecuencia

Teorema de superposición

Potencia disipada y entregada

El principio de superposición aplica a tensiones y corrientes, pero **no** a potencias.
Supongamos $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$:

$$\begin{aligned} p(t) &= R \cdot i^2(t) = \\ &= R \cdot (i_1(t) + i_2(t))^2 = \\ &= R \cdot (i_1^2(t) + i_2^2(t) + 2 \cdot i_1(t) \cdot i_2(t)) \\ p(t) &\neq p_1(t) + p_2(t) \end{aligned}$$

Teorema de superposición

Potencia disipada y entregada

- Disipada en una resistencia:

$$P_R = R \cdot \left(I_{cc}^2 + I_1^2 + I_2^2 + ... + I_n^2 \right)$$

- Entregada por fuente de tensión de frecuencia ω_1:

$$P = E\, I_1 \cos(\theta_{i1})$$

- Entregada por fuente de corriente de frecuencia ω_1:

$$P = U_1\, I_g \cos(\theta_{u1})$$

Potencia entregada

Solo actúa la componente de la intensidad/tensión que tiene **la misma frecuencia** que el generador de tensión/corriente.

Teorema de superposición

Ejemplo

El circuito de la figura se encuentra en régimen permanente. Determinar analíticamente la expresión de $i(t)$, así como las potencias entregadas por los generadores y disipadas por las resistencias R_1 y R_2.

Datos: $e_1(t) = 50\sin(1000t)\,V$; $e_2(t) = 30\,V$; $R_1 = 6\,\Omega$; $R_2 = 6\Omega$; $L = 8mH$; $C = 10\mu F$