

# Introducción al Régimen Transitorio

## Teoría de Circuitos

Oscar Perpiñán Lamigueiro

① Conceptos Fundamentales

② Circuitos de Primer Orden

③ Circuitos de Segundo Orden

## ① Conceptos Fundamentales

¿Qué es el régimen transitorio?

Condiciones iniciales

## ② Circuitos de Primer Orden

## ③ Circuitos de Segundo Orden

# Permanente y Transitorio

## Régimen permanente o estacionario

Las tensiones y corrientes de un circuito son constantes (continua) o periódicas (alterna) (circuito estabilizado)

## Régimen transitorio

- ▶ Para alcanzar el régimen permanente (o para alternar entre dos regímenes permanentes) el circuito atraviesa el régimen transitorio.
- ▶ Posibles cambios: activación o apagado de fuentes, cambio en las cargas, cambio en el circuito (línea).
- ▶ En general, el estado transitorio es indeseado en sistemas eléctricos, pero provocado en sistemas electrónicos.

# Acumulación de Energía

## Régimen Permanente

**Energía acumulada** en **bobinas** y **condensadores**

## Régimen Transitorio

- ▶ **Redistribución** y **disipación** de energía acumulada.
- ▶ La redistribución de energía **no** se puede realizar de forma **inmediata**
- ▶ **Duración corta** ( $\mu\text{s}$ ) pero superior a 0, dependiendo de **relación entre acumulación y disipación** (resistencia).

## ① Conceptos Fundamentales

¿Qué es el régimen transitorio?

Condiciones iniciales

## ② Circuitos de Primer Orden

## ③ Circuitos de Segundo Orden

# Respuesta completa de una red lineal

La respuesta completa de una red lineal a un cambio tiene dos componentes:

- ▶ Respuesta **natural** o propia (sin fuentes, determinada únicamente por la configuración del circuito)
- ▶ Respuesta **forzada** o particular (determinada por las fuentes existentes,  $t = \infty$ ).

$$f(t) = f_n(t) + f_{\infty}(t)$$

# Condiciones iniciales

- ▶ Las **condiciones iniciales** son el estado del circuito en el instante temporal en el que se produce el cambio.
- ▶ Determinan las constantes de integración de la respuesta natural.
- ▶ El instante del cambio se representa habitualmente con  $t = 0$ :
  - ▶  $t = 0^-$ : la topología del circuito es la anterior al cambio.
  - ▶  $t = 0^+$ : la topología del circuito es la posterior al cambio.



# Resistencia

$$u(t) = Ri(t)$$

No acumula energía: sigue los cambios de forma instantánea.

# Inductancia

$$u(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \leftrightarrow i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u(t') dt'$$

La corriente en una bobina no puede variar de forma abrupta (implica tensión infinita).

$$\boxed{i_L(0^-) = i_L(0^+)}$$

# Capacidad

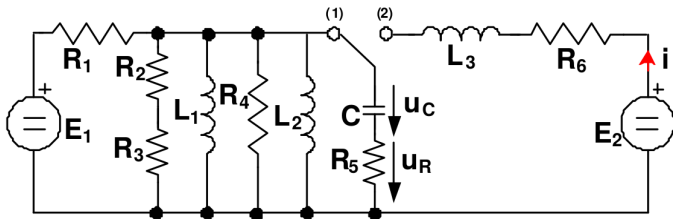
$$i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} \leftrightarrow u(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(t') dt'$$

La tensión en un condensador no puede variar de forma abrupta (implica corriente infinita).

$$\boxed{u_C(0^-) = u_C(0^+)}$$

## Ejemplo

El interruptor lleva en la posición (1) desde un tiempo infinito y pasa a la posición (2) en  $t = 0$ :



① Conceptos Fundamentales

② Circuitos de Primer Orden

③ Circuitos de Segundo Orden

# Definición

- ▶ Circuitos que tienen un **único elemento de acumulación** (o *varios elementos que pueden ser simplificados a un elemento equivalente*) y parte resistiva.
- ▶ **Ecuación diferencial de primer orden**: la respuesta natural es siempre una **exponencial decreciente**.
- ▶ Circuitos típicos:
  - ▶ RL serie
  - ▶ RC paralelo

# Respuesta natural y forzada

- ▶ El método de resolución analiza el circuito en dos etapas:
  - ▶ Sin fuentes: **respuesta natural** (la energía acumulada en  $t < 0$  se disipa en la resistencia).
  - ▶ Con fuentes: **respuesta forzada** (determinada por la forma de onda de las fuentes).

① Conceptos Fundamentales

② Circuitos de Primer Orden

Circuito RL serie

Circuito RC paralelo

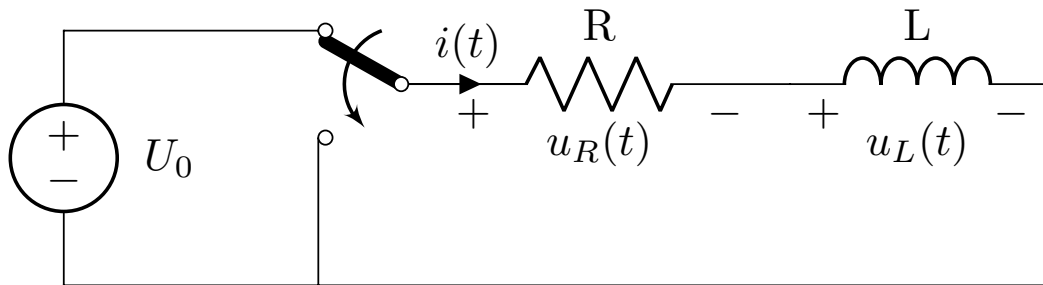
Análisis Sistemático

③ Circuitos de Segundo Orden

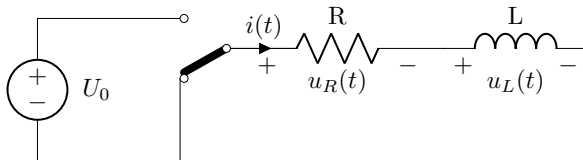


## Circuito básico

- ▶ En  $t < 0$  la fuente alimenta el circuito RL (la bobina almacena energía).
- ▶ En  $t = 0$  la fuente se desconecta.
- ▶ En  $t > 0$  la bobina se descarga en la resistencia.



# Respuesta natural



Ecuaciones

$$u_R(t) + u_L(t) = 0$$

$$Ri + L \frac{di}{dt} = 0$$

Solución Genérica

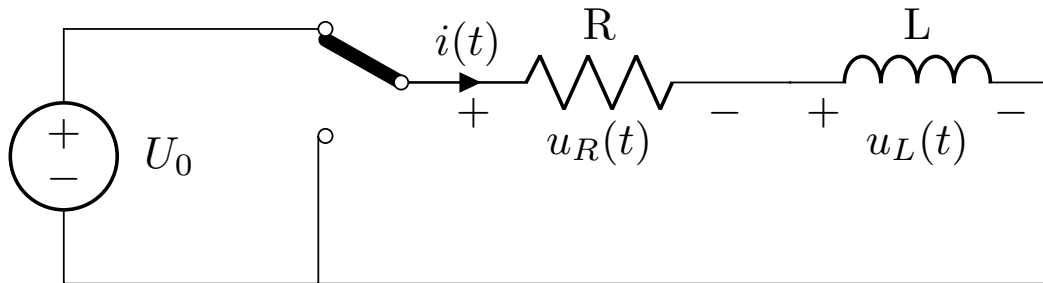
$$i(t) = Ae^{st}$$

Ecuación Característica

$$s + \frac{R}{L} = 0 \Rightarrow s = -\frac{R}{L}$$

## Condiciones Iniciales

Analizando circuito para  $t < 0 \dots$



$\dots$  obtenemos  $i(0^-) = I_0 = \frac{U_0}{R}$

## Condiciones Iniciales

Por otra parte, para  $t > 0$ :

$$i(t) = Ae^{-R/Lt}$$
$$i(0^+) = Ae^0 = A$$

Y dada la condición de continuidad,  $i(0^+) = i(0^-)$ :

$$A = I_0$$

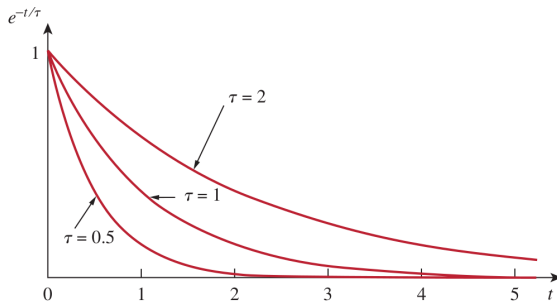
Por tanto, la respuesta natural es:

$$i(t) = I_0 e^{-R/Lt}$$

# Constante de tiempo

$$i(t) = I_0 e^{-t/\tau}$$

- ▶  $\tau = \frac{L}{R}$  es la constante de tiempo (unidades [s]).
- ▶ Ratio entre almacenamiento ( $L$ ) y disipación ( $R$ ).
- ▶ Valores altos de  $\tau$  implican decrecimiento lento.
- ▶ La respuesta natural «desaparece» tras  $\simeq 5\tau$ .



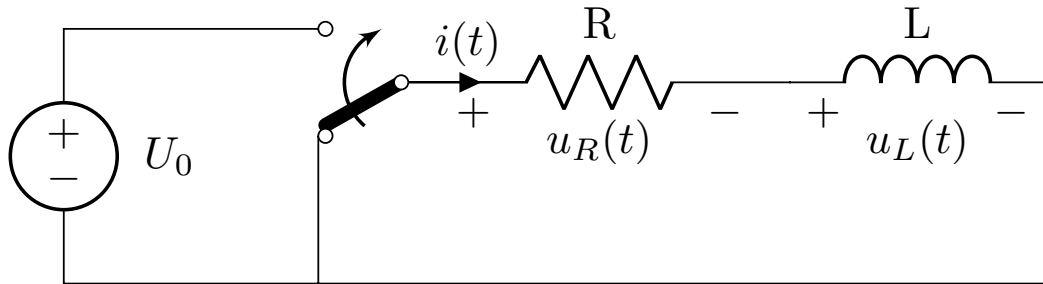
## Balance Energético

La energía acumulada en la bobina en  $t < 0$  se disipa en la resistencia en  $t > 0$

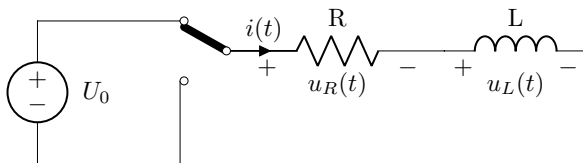
$$\begin{aligned} W_R &= \int_0^{\infty} Ri^2(t)dt = \\ &= \int_0^{\infty} R(I_0 e^{-t/\tau})^2 dt = \\ &= \frac{1}{2} LI_0^2 = W_L \end{aligned}$$

## Respuesta forzada

Cambiamos el funcionamiento del interruptor: en  $t > 0$  la fuente alimenta el circuito RL.



## Respuesta forzada



Las ecuaciones son ahora:

$$u_R(t) + u_L(t) = u(t) \rightarrow Ri + L\frac{di}{dt} = U_0$$

Para la solución particular,  $i_\infty$ , se propone una función análoga a la excitación (analizando circuito para  $t > 0$ )

$$i(t) = i_n(t) + i_\infty(t)$$

$$i_n(t) = Ae^{st}$$

$$i_\infty(t) = U_0/R$$



## Condiciones iniciales

Particularizamos las ecuaciones en  $t = 0^+$ :

$$i(0^+) = i_n(0^+) + i_\infty(0^+)$$

$$i(0^+) = A + i_\infty(0^+)$$

$$A = i(0^+) - i_\infty(0^+)$$

## Respuesta completa (ejemplo)

$$i(t) = i_n(t) + i_\infty(t)$$

$$i_n(t) = Ae^{st}$$

$$i_\infty(t) = U_0/R$$

$$A = i(0^+) - i_\infty(0^+)$$

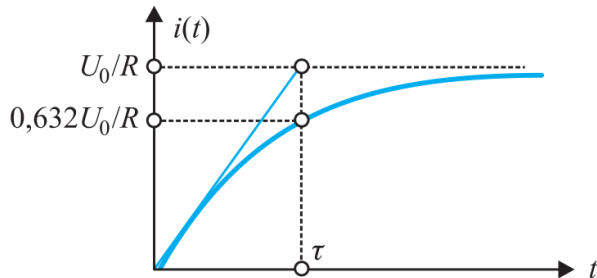
Suponiendo que la bobina está inicialmente descargada,  $i(0^-) = 0$ , y teniendo en cuenta la condición de continuidad,  $i(0^+) = i(0^-) = 0$ , obtenemos  $A = 0 - U_0/R$ .

La solución completa es:

$$i(t) = \frac{U_0}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

## Respuesta completa

$$i(t) = \frac{U_0}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

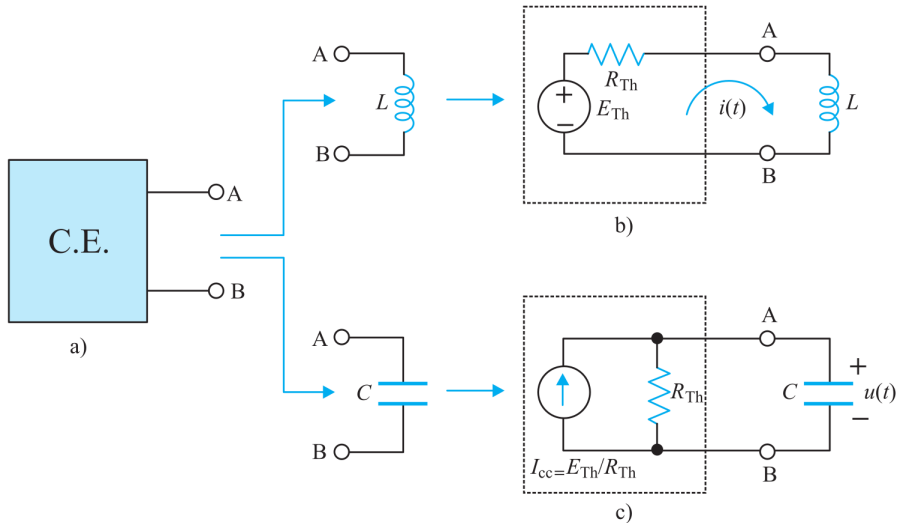


## Expresión general de la respuesta completa

$$i(t) = [i(0^+) - i_\infty(0^+)] e^{-t/\tau} + i_\infty(t)$$

- ▶  $i(0^+)$ : corriente en la bobina, condiciones iniciales,  $i(0^-) = i(0^+)$ .
- ▶  $i_\infty(t)$ : corriente en la bobina en régimen permanente para  $t > 0$ .
- ▶  $i_\infty(0^+)$ : corriente en la bobina en régimen permanente particularizada en  $t = 0$ .

# Equivalente de Thévenin



① Conceptos Fundamentales

② Circuitos de Primer Orden

Circuito RL serie

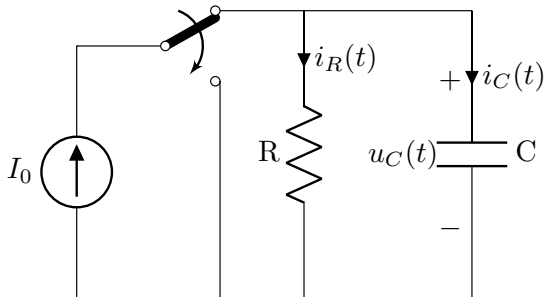
Circuito RC paralelo

Análisis Sistemático

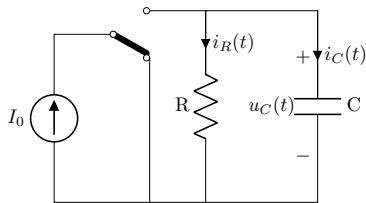
③ Circuitos de Segundo Orden

## Circuito básico

- ▶ En  $t < 0$  la fuente alimenta el circuito RC (el condensador se carga).
- ▶ En  $t = 0$  se desconecta la fuente (el condensador comienza a descargarse en la resistencia).



# Respuesta natural



Ecuaciones

$$i_R(t) + i_C(t) = 0$$

$$Gu + C \frac{du}{dt} = 0$$

Solución Genérica

$$u(t) = Ae^{st}$$

Respuesta natural

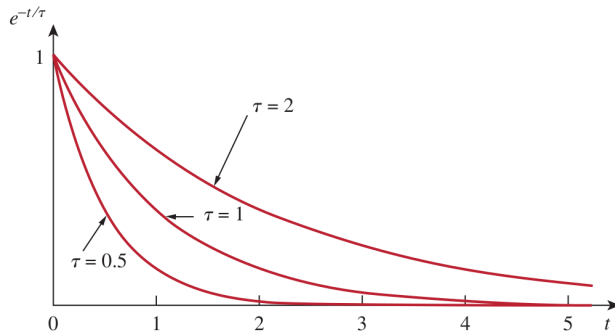
$$u(t) = U_0 e^{-G/Ct}$$



## Constante de tiempo

- ▶  $\tau = \frac{C}{G}$  es la constante de tiempo (unidades [s]).
- ▶ Ratio entre almacenamiento (C) y disipación (G).

$$u(t) = U_0 e^{-t/\tau}$$



## Balance Energético

La energía acumulada en el condensador en  $t < 0$  se disipa en la resistencia (conductancia) en  $t > 0$

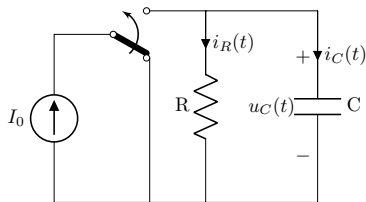
$$W_G = \int_0^{\infty} Gu^2(t)dt = \frac{1}{2}CU_0^2 = W_C$$

## Expresión general de la respuesta completa

$$u(t) = [u(0^+) - u_\infty(0^+)] e^{-t/\tau} + u_\infty(t)$$

- ▶  $u(0^+)$ : tensión en el condensador, condiciones iniciales,  $u(0^-) = u(0^+)$ .
- ▶  $u_\infty(t)$ : tensión en el condensador en régimen permanente para  $t > 0$ .
- ▶  $u_\infty(0^+)$ : tensión en el condensador en régimen permanente particularizada en  $t = 0$ .

## Ejemplo con respuesta forzada



$$u(t) = [u(0^+) - u_\infty(0^+)] e^{-t/\tau} + u_\infty(t)$$

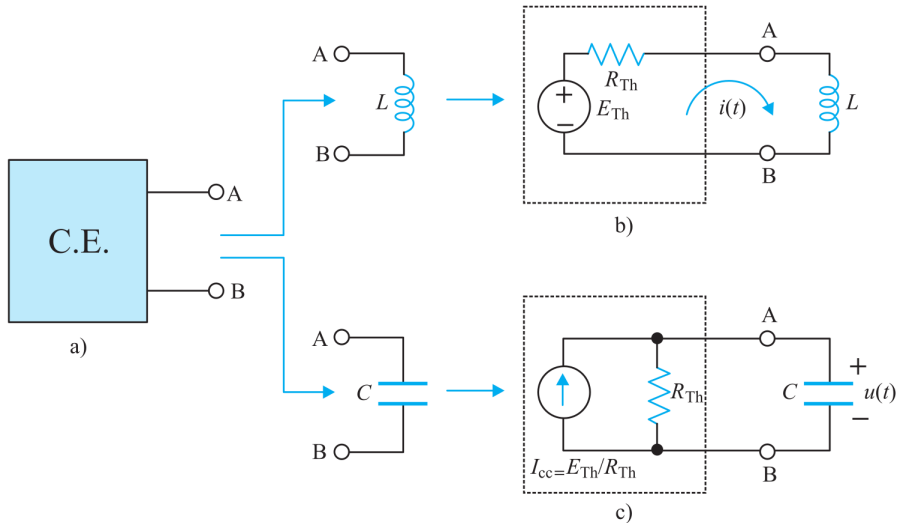
Suponiendo que el condensador está inicialmente descargado:

$$u(0^+) = u(0^-) = 0$$

$$u_\infty(0^+) = I_0 / G$$

$$u(t) = \frac{I_0}{G} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

# Equivalente de Norton



① Conceptos Fundamentales

② Circuitos de Primer Orden

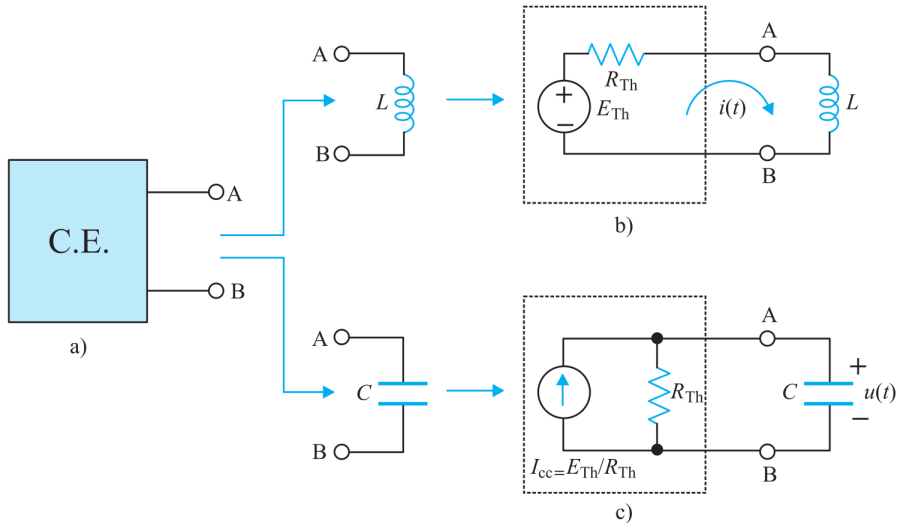
Circuito RL serie

Circuito RC paralelo

Análisis Sistemático

③ Circuitos de Segundo Orden

# Equivalente de Thévenin/Norton



# Procedimiento General

- ▶ Dibujar el circuito para  $t < 0$ .
  - ▶ Determinar variables en régimen permanente,  $u_c(t)$ ,  $i_L(t)$ .
  - ▶ Particularizar para  $t = 0$ , obteniendo  $u_c(0^-)$  o  $i_L(0^-)$ .
  - ▶ Continuidad:  $u_c(0^+) = u_c(0^-)$ ,  $i_L(0^+) = i_L(0^-)$ .
- ▶ Dibujar el circuito para  $t > 0$ .
  - ▶ Calcular el equivalente de Thevenin (Norton) visto por el elemento de acumulación.
  - ▶ La constante de tiempo de la respuesta natural es  $\tau = \frac{L}{R_{th}}$  o  $\tau = \frac{C}{G_{th}}$ .
  - ▶ Calcular las variables  $i_L(t)$  o  $u_c(t)$  en régimen permanente, obteniendo  $i_\infty(t)$  o  $u_\infty(t)$ .
- ▶ Obtener respuesta completa:

$$i_L(t) = (i_L(0^+) - i_\infty(0^+)) e^{-t/\tau} + i_\infty(t)$$
$$u_C(t) = (u_C(0^+) - u_\infty(0^+)) e^{-t/\tau} + u_\infty(t)$$



- ① Conceptos Fundamentales
- ② Circuitos de Primer Orden
- ③ Circuitos de Segundo Orden

# Introducción

- ▶ Circuitos que tienen **dos elementos de acumulación** que intercambian energía, y parte resistiva que disipa energía.
- ▶ **Ecuación diferencial de segundo orden**: la respuesta natural incluye exponenciales decrecientes y quizás señal sinusoidal.
- ▶ Circuitos típicos:
  - ▶ RLC serie
  - ▶ RLC paralelo

# Respuesta natural y forzada

- ▶ El método de resolución analiza el circuito en dos etapas:
  - ▶ Sin fuentes: **respuesta natural** (la energía acumulada en  $t < 0$  se redistribuye).
  - ▶ Con fuentes: **respuesta forzada** (determinada por la forma de onda de las fuentes).

① Conceptos Fundamentales

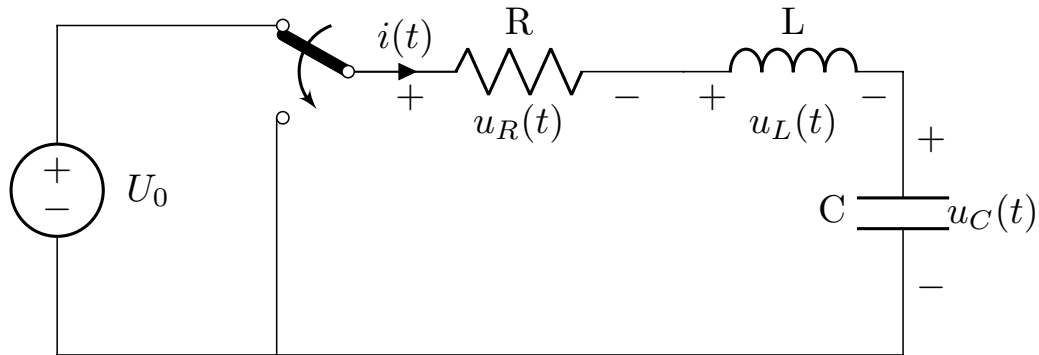
② Circuitos de Primer Orden

③ Circuitos de Segundo Orden

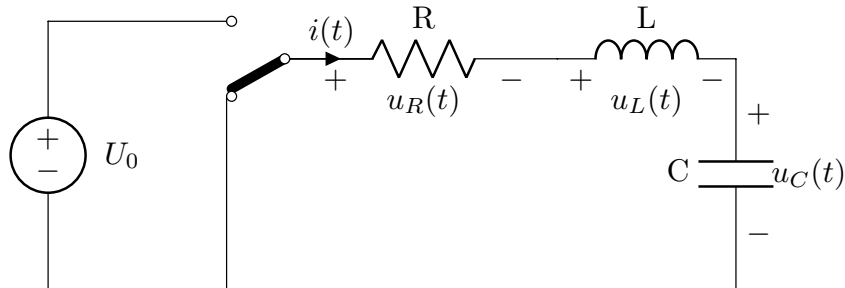
Circuito RLC serie

Circuito RLC paralelo

## Circuito básico



## Respuesta natural ( $t > 0$ )



$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(t') dt' = 0$$

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0}$$

# Solución

## Ecuación diferencial

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0$$

$$i_n(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

## Ecuación característica

$$s^2 + \frac{R}{L} s + \frac{1}{LC} = 0$$

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

# Parámetros

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0$$

$$s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0$$

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$$i_n(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

$$\alpha = \frac{R}{2L}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

$$\zeta = \frac{\alpha}{\omega_0}$$

- ▶  $\alpha$ : coeficiente de amortiguamiento exponencial
- ▶  $\omega_0$ : pulsación natural no amortiguada
- ▶  $\omega_d$ : pulsación natural amortiguada
- ▶  $\zeta$ : factor de amortiguamiento



# Posibles soluciones

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$$\alpha > \omega_0, \zeta > 1$$

- ▶  $s_{1,2}$ : dos soluciones reales (negativas) distintas
- ▶ Circuito **sobreamortiguado**.

$$\alpha = \omega_0, \zeta = 1$$

- ▶  $s_{1,2}$ : solución real doble.
- ▶ Circuito con **amortiguamiento crítico**.

$$\alpha < \omega_0, \zeta < 1$$

- ▶  $s_{1,2}$ : dos soluciones complejas conjugadas
- ▶ Circuito **subamortiguado**.

# Tipos de Respuesta

- ▶ Tipo de respuesta determinado por relación entre  $R$  y  $L, C$  (disipación y almacenamiento).
- ▶ Resistencia crítica ( $\alpha = \omega_0, \xi = 1$ ):

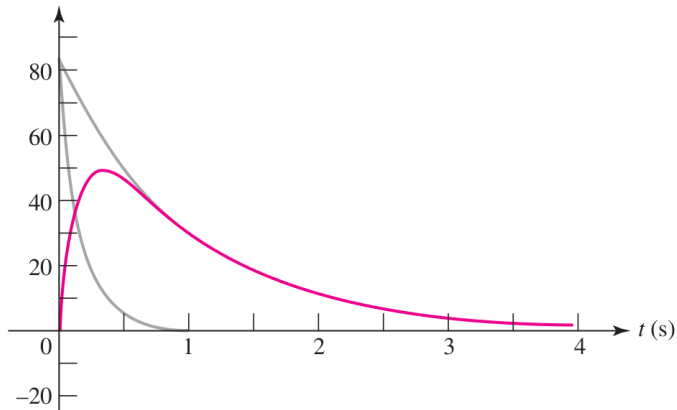
$$R_{cr} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

## Tipos

- ▶  $R > R_{cr}, \alpha > \omega_0, \xi > 1$ : **sobreamortiguado**
- ▶  $R = R_{cr}, \alpha = \omega_0, \xi = 1$ : **amortiguamiento crítico**
- ▶  $R < R_{cr}, \alpha < \omega_0, \xi < 1$ : **subamortiguado**

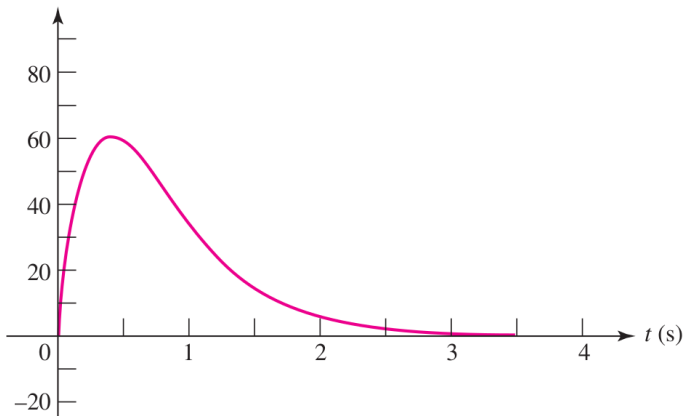
## Circuito Sobreamortiguado ( $\alpha > \omega_0$ )

$$i_n(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$



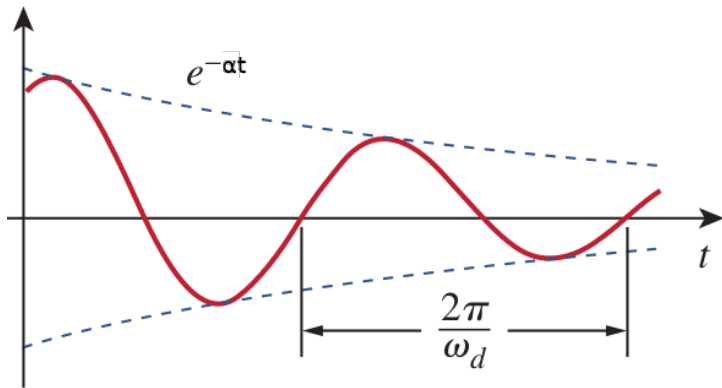
## Amortiguamiento Crítico ( $\alpha = \omega_0$ )

$$i_n(t) = (A_1 + A_2 t)e^{st}$$

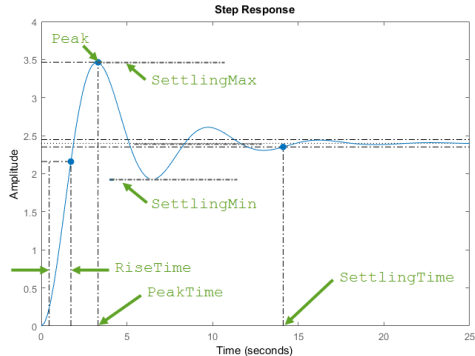


## Circuito Subamortiguado ( $\alpha < \omega$ )

$$i_n(t) = (B_1 \cos(\omega_d t) + B_2 \sin(\omega_d t))e^{-\alpha t}$$

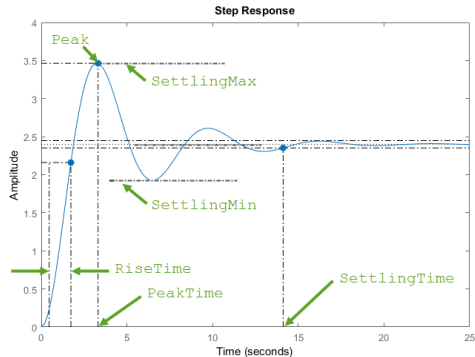


# Valores Importantes



- ▶ **Tiempo de Subida:** tiempo para subir de 10% al 90% del valor en régimen permanente.
- ▶ **Tiempo de Establecimiento:** tiempo para que la diferencia entre la respuesta y el régimen permanente permanezca dentro de una banda del 1%.

# Valores Importantes



- **Valor máximo y Tiempo del Valor Máximo.**
- **Sobretensión:** porcentaje del valor máximo respecto del régimen permanente.

# Condiciones Iniciales

## Dos constantes a determinar

Son necesarias dos tipos de condiciones iniciales:

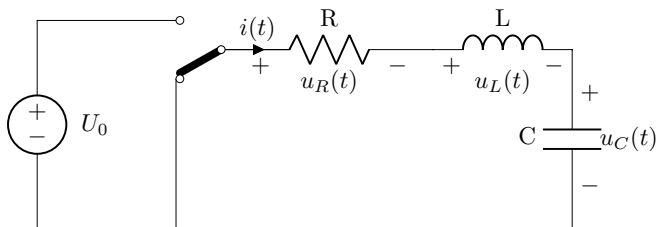
$$i_L(0^+) = i_L(0^-)$$
$$u_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} \longrightarrow \left. \frac{di_L(t)}{dt} \right|_{t=0^+} = \frac{1}{L} u_L(0^+)$$

## Derivadas en el origen

Para obtener valores de las derivadas en el origen hay que resolver el circuito en  $t = 0^+$  empleando las condiciones de continuidad.



## Derivadas en $t = 0^+$



$$\left. \frac{di_L(t)}{dt} \right|_{t=0^+} = \frac{1}{L} u_L(0^+)$$

$$u_L(0^+) = -u_R(0^+) - u_C(0^+)$$

$$u_R(0^+) = Ri_L(0^+)$$

$$\boxed{\left. \frac{di_L(t)}{dt} \right|_{t=0^+} = -\frac{1}{L} (Ri_L(0^+) + u_C(0^+))}$$

## Respuesta Completa

Las condiciones iniciales deben evaluarse teniendo en cuenta la respuesta forzada (si existe).

$$i_L(0^+) = i_n(0^+) + i_\infty(0^+) \\ \left. \frac{di_L}{dt} \right|_{t=0^+} = \left. \frac{di_n}{dt} \right|_{t=0^+} + \left. \frac{di_\infty}{dt} \right|_{t=0^+}$$

## Ejemplo de Respuesta Completa

Circuito RLC serie sobreamortiguado con generador de tensión DC funcionando en  $t > 0$ .

### Respuesta Completa

$$i_L(t) = I_\infty + A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

### Condiciones Iniciales

$$\begin{aligned} i_L(0^+) &= I_\infty + A_1 + A_2 \\ \left. \frac{di_L(t)}{dt} \right|_{t=0^+} &= 0 + A_1 s_1 + A_2 s_2 \end{aligned}$$

① Conceptos Fundamentales

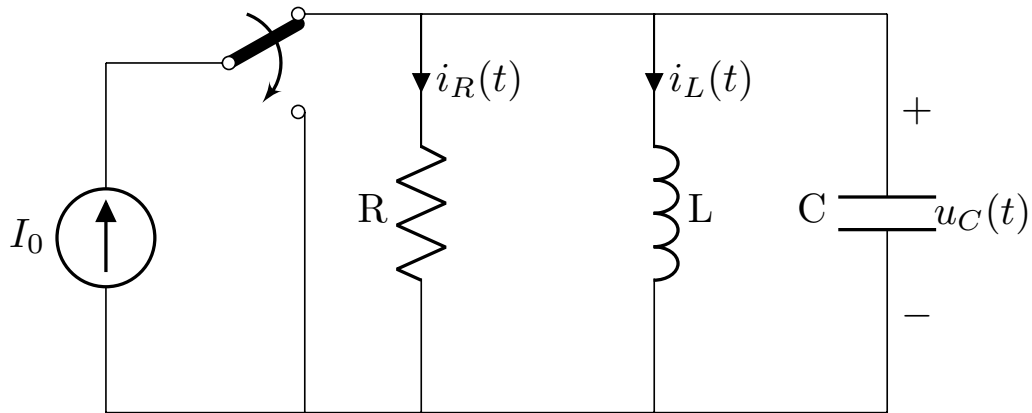
② Circuitos de Primer Orden

③ Circuitos de Segundo Orden

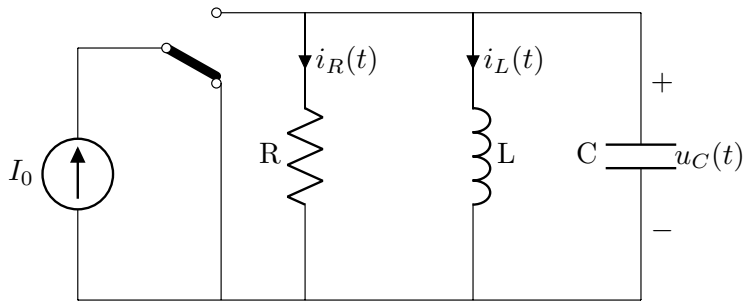
Circuito RLC serie

Circuito RLC paralelo

## Circuito básico



## Respuesta natural ( $t > 0$ )



$$Gu(t) + C \frac{du(t)}{dt} + \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u(t') dt' = 0$$

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{G}{C} \frac{du}{dt} + \frac{1}{LC} u = 0$$

# Solución

## Ecuación diferencial

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{G}{C} \frac{du}{dt} + \frac{1}{LC}u = 0$$

$$u_n(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

## Ecuación característica

$$s^2 + \frac{G}{C}s + \frac{1}{LC} = 0$$

$$s_{1,2} = -\frac{G}{2C} \pm \sqrt{\left(\frac{G}{2C}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

# Parámetros

## Ecuación característica

$$s^2 + \frac{G}{C}s + \frac{1}{LC} = 0$$

$$s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0$$

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$$u_n(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

$$\alpha = \frac{G}{2C}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

$$\xi = \frac{\alpha}{\omega_0}$$



# Tipos de Respuesta

- ▶ Tipo de respuesta determinado por relación entre  $G$  y  $L, C$  (disipación y almacenamiento).
- ▶ Conductancia crítica ( $\alpha = \omega_0, \zeta = 1$ ):

$$G_{cr} = 2\sqrt{\frac{C}{L}}$$

## Tipos

- ▶  $G > G_{cr}, \alpha > \omega_0, \zeta > 1$ : **sobreamortiguado**
- ▶  $G = G_{cr}, \alpha = \omega_0, \zeta = 1$ : **amortiguamiento crítico**
- ▶  $G < G_{cr}, \alpha < \omega_0, \zeta < 1$ : **subamortiguado**

# Tipos de Respuesta

- Circuito Sobreamortiguado ( $\alpha > \omega_0$ )

$$u_n(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

- Amortiguamiento Crítico ( $\alpha = \omega_0$ )

$$u_n(t) = (A_1 + A_2 t) e^{st}$$

- Circuito Subamortiguado ( $\alpha < \omega$ )

$$u_n(t) = (B_1 \cos(\omega_d t) + B_2 \sin(\omega_d t)) e^{-\alpha t}$$

# Condiciones Iniciales

## Dos constantes a determinar

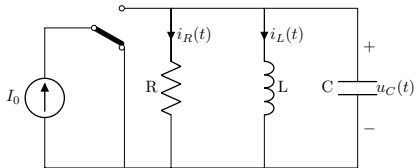
Son necesarias dos tipos de condiciones iniciales:

$$u_C(0^+) = u_C(0^-)$$
$$i_C(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} \longrightarrow \left. \frac{du_C(t)}{dt} \right|_{t=0^+} = \frac{1}{C} i_C(0^+)$$

## Derivadas en el origen

Para obtener valores de las derivadas en el origen hay que resolver el circuito en  $t = 0^+$  empleando las condiciones de continuidad.

## Derivadas en $t = 0^+$ : ejemplo RLC paralelo



$$\left. \frac{du_C(t)}{dt} \right|_{t=0^+} = \frac{1}{C} i_C(0^+)$$

$$i_C(0^+) = -i_R(0^+) - i_L(0^+)$$

$$i_R(0^+) = \frac{1}{R} u_C(0^+)$$

$$\boxed{\left. \frac{du_C(t)}{dt} \right|_{t=0^+} = -\frac{1}{C} \left( \frac{1}{R} u_C(0^+) + i_L(0^+) \right)}$$

## Respuesta Completa

Las condiciones iniciales deben evaluarse teniendo en cuenta la respuesta forzada (si existe).

$$u_C(0^+) = u_n(0^+) + u_\infty(0^+) \\ \left. \frac{du_C(t)}{dt} \right|_{t=0^+} = \left. \frac{du_n(t)}{dt} \right|_{t=0^+} + \left. \frac{du_\infty(t)}{dt} \right|_{t=0^+}$$

# Ejemplo de Respuesta Completa

Circuito RLC paralelo sobreamortiguado con generador de corriente DC funcionando en  $t > 0$ .

## Respuesta Completa

$$u_c(t) = U_\infty + A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

## Condiciones Iniciales

$$\begin{aligned} u_c(0^+) &= U_\infty + A_1 + A_2 \\ \left. \frac{du_c(t)}{dt} \right|_{t=0^+} &= 0 + A_1 s_1 + A_2 s_2 \end{aligned}$$