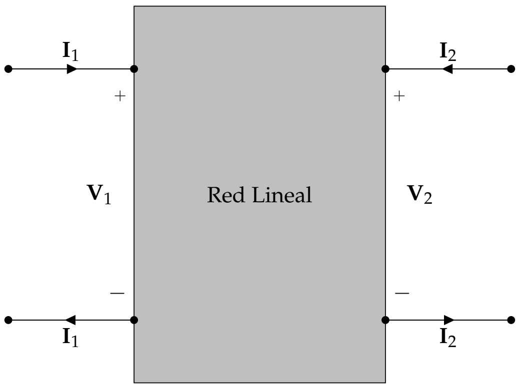
Caracterización de cuadripolos
Laboratorio de Teoría de Circuitos III

Oscar Perpiñán y Luis Badesa

1. Definición de cuadripolo

Un cuadripolo es un conjunto de elementos eléctricos interconectados con cuatro bornes de acceso, agrupados en dos puertos, uno de entrada y otro de salida. Un cuadripolo se emplea para modelar equipos de transmisión, filtros, o líneas de transporte de energía eléctrica, usando un rectángulo como representación para indicar que la estructura interna no es relevante. El comportamiento del cuadripolo se determina a través de las relaciones entre las tensiones y corrientes en los puertos.



Las relaciones pueden expresarse de forma diversa, dando lugar a diferentes familias de parámetros. En este documento distinguiremos cuatro familias:

- Parámetros impedancia: las tensiones se expresan en función de las corrientes.
- Parámetros admitancia: las corrientes se expresan en función de las tensiones.
- Parámetros híbridos: la tensión de entrada y la corriente de salida se expresan en función de la tensión de salida y la corriente de entrada.
- Parámetros híbridos inversos: la corriente de entrada y la tensión de salida se expresan en función de la tensión de entrada y la corriente de salida.

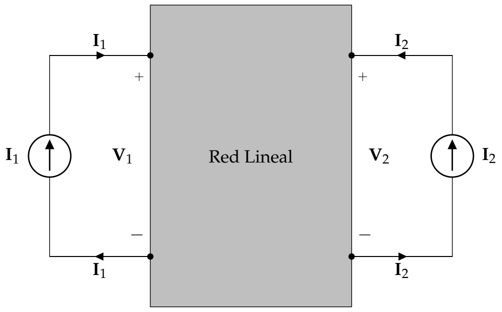
En estas relaciones es importante prestar atención al sentido de las corrientes que se muestra en la figura.

Las ecuaciones que se recogen a continuación emplean una nomenclatura genérica válida tanto para Laplace como para fasores, empleando el resaltado en negrita para tensiones, corrientes e impedancias. Los parámetros del cuadripolo se muestran en minúsculas, y las impedancias del circuito en mayúsculas.

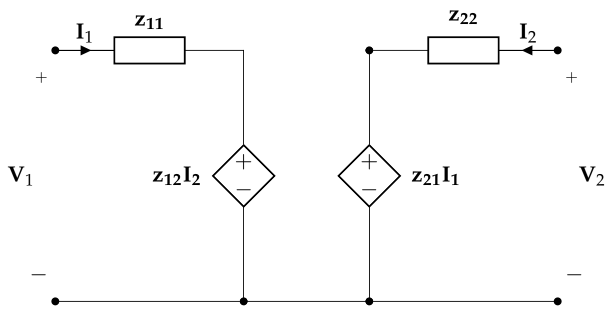
2. Caracterización de Cuadripolos

2.1. Parámetros de Impedancia

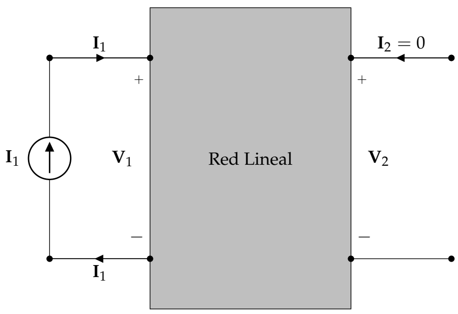
Definición y circuito equivalente



$$U_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2$$
$$U_2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2$$
$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

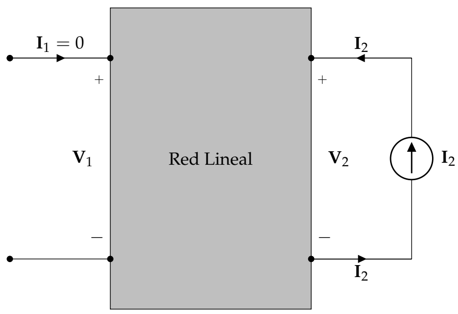


Medida



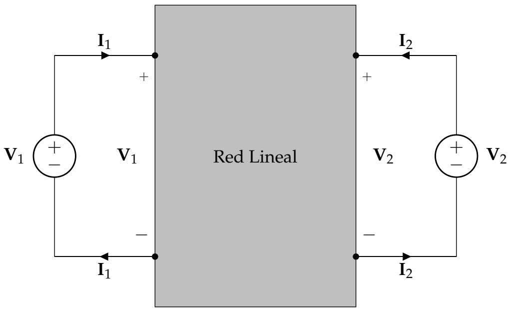
$$z_{11} = \left.\frac{U_1}{I_1}\right|_{I_2=0}$$
$$z_{21} = \left.\frac{U_2}{I_1}\right|_{I_2=0}$$
$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$$z_{12} = \left.\frac{U_1}{I_2}\right|_{I_1=0}$$
$$z_{22} = \left.\frac{U_2}{I_2}\right|_{I_1=0}$$
$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$



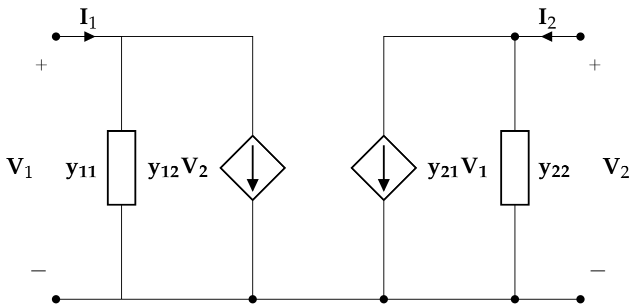
2.2. Parámetros de Admitancia

Definición y circuito equivalente

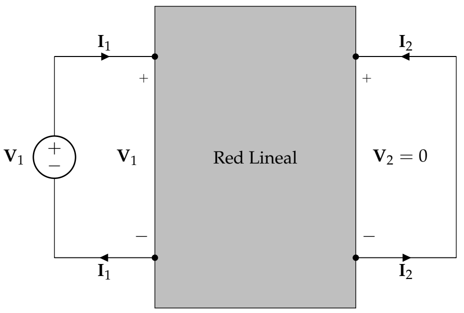


$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{y}_{11}\mathbf{U}_1 + \mathbf{y}_{12}\mathbf{U}_2$$
$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{y}_{21}\mathbf{U}_1 + \mathbf{y}_{22}\mathbf{U}_2$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{11} & \mathbf{y}_{12} \\ \mathbf{y}_{21} & \mathbf{y}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \end{bmatrix}$$



Medida

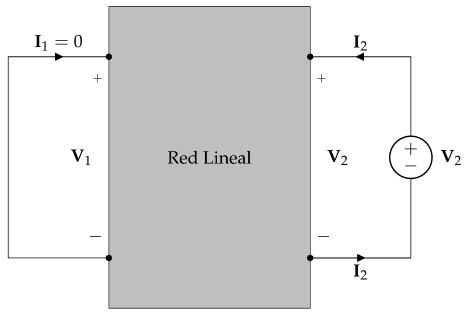


$$\mathbf{y}_{11} = \left.\frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{U}_1}\right|_{\mathbf{U}_2=0}$$
$$\mathbf{y}_{21} = \left.\frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{U}_1}\right|_{\mathbf{U}_2=0}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{11} & \mathbf{y}_{12} \\ \mathbf{y}_{21} & \mathbf{y}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \end{bmatrix}$$

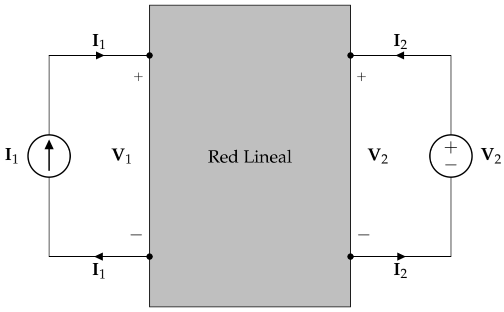
$$\mathbf{y}_{12} = \left.\frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{U}_2}\right|_{\mathbf{U}_1=0}$$
$$\mathbf{y}_{22} = \left.\frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{U}_2}\right|_{\mathbf{U}_1=0}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{11} & \mathbf{y}_{12} \\ \mathbf{y}_{21} & \mathbf{y}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \end{bmatrix}$$



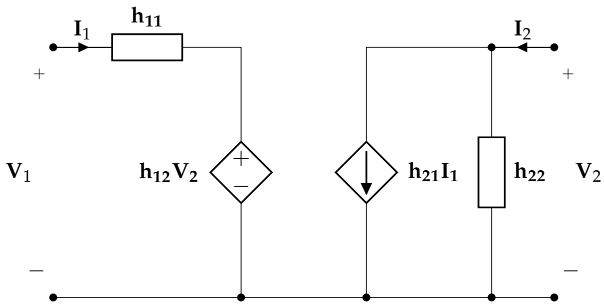
2.3. Parámetros Híbridos

Definición y circuito equivalente

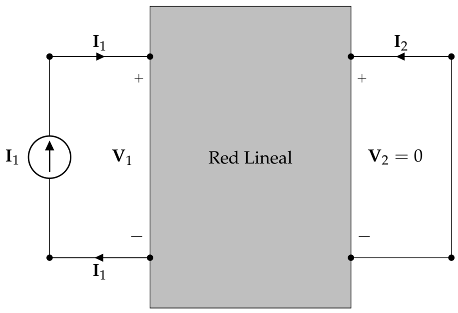


$$
\begin{aligned}
U_1 &= h_{11}I_1 + h_{12}U_2 \\
I_2 &= h_{21}I_1 + h_{22}U_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix}
$$



Medida

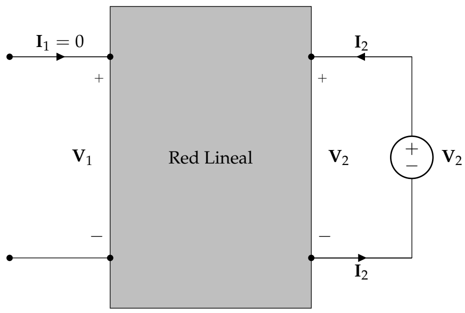


$$
\begin{aligned}
h_{11} &= \left.\frac{U_1}{I_1}\right|_{U_2=0} \\
h_{21} &= \left.\frac{I_2}{I_1}\right|_{U_2=0}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix}
$$

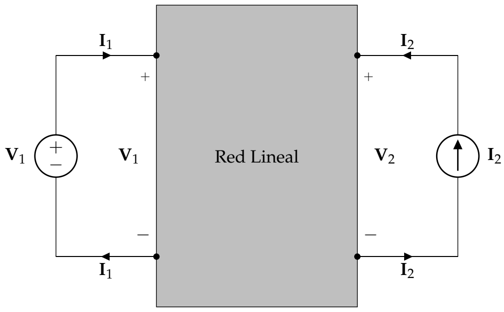
$$
\begin{aligned}
h_{12} &= \left.\frac{U_1}{U_2}\right|_{I_1=0} \\
h_{22} &= \left.\frac{I_2}{U_2}\right|_{I_1=0}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix}
$$



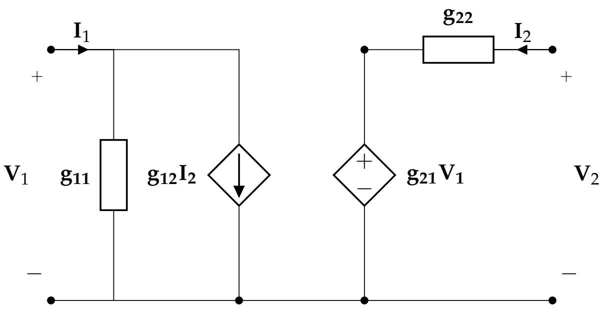
2.4. Parámetros Híbridos Inversos

Definición y circuito equivalente

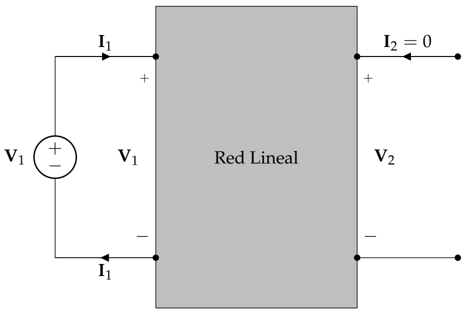


$$I_1 = g_{11} U_1 + g_{12} I_2$$
$$U_2 = g_{21} U_1 + g_{22} I_2$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$



Medida

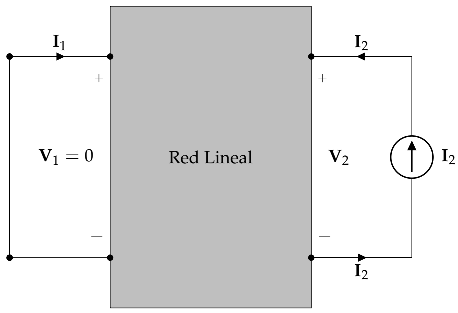


$$g_{11} = \left.\frac{I_1}{U_1}\right|_{I_2=0}$$
$$g_{21} = \left.\frac{U_2}{U_1}\right|_{I_2=0}$$

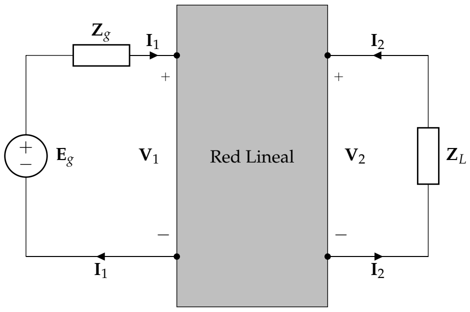
$$\begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$$g_{12} = \left.\frac{I_1}{I_2}\right|_{U_1=0}$$
$$g_{22} = \left.\frac{U_2}{I_2}\right|_{U_1=0}$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$



3. Impedancia de carga



$$\mathbf{U}_1 = \mathbf{E}_g - \mathbf{Z}_g \cdot \mathbf{I}_1$$
$$\mathbf{U}_2 = -\mathbf{Z}_L \cdot \mathbf{I}_2$$

Para obtener la máxima potencia en la salida del cuadripolo, la impedancia de carga $\mathbf{Z}_L$ deberá ser igual al conjugado de la impedancia de salida del cuadripolo, $\mathbf{Z}_L = \mathbf{Z}_o^*$, definida como:

$$\mathbf{Z}_o = \left. \frac{\mathbf{U}_2}{\mathbf{I}_2} \right|_{\mathbf{E}_g=0}$$

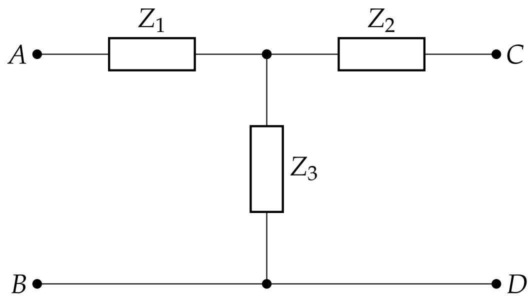
Esta impedancia puede calcularse con cualquiera de las familias de parámetros anteriores. Por ejemplo, con los parámetros impedancia tendremos las siguientes ecuaciones:

$$\mathbf{U}_1 = -\mathbf{Z}_g \cdot \mathbf{I}_1$$
$$\mathbf{U}_1 = \mathbf{z}_{11}\mathbf{I}_1 + \mathbf{z}_{12}\mathbf{I}_2$$
$$\mathbf{U}_2 = \mathbf{z}_{21}\mathbf{I}_1 + \mathbf{z}_{22}\mathbf{I}_2$$

Sustituyendo la primera ecuación en la segunda, y ésta a su vez en la tercera obtenemos:

$$\mathbf{Z}_o = \mathbf{z}_{22} - \frac{\mathbf{z}_{12} \cdot \mathbf{z}_{21}}{\mathbf{Z}_g + \mathbf{z}_{11}}$$

4. Ejemplo: red en T



Parámetros impedancia

$$
\begin{aligned}
\mathbf{z}_{11} &= \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_3 \\
\mathbf{z}_{12} &= \mathbf{Z}_3 \\
\mathbf{z}_{21} &= \mathbf{Z}_3 \\
\mathbf{z}_{22} &= \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3
\end{aligned}
$$

Parámetros admitancia

$$
\begin{aligned}
\mathbf{y}_{11} &= \frac{\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3} \\
\mathbf{y}_{12} &= \frac{-\mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3} \\
\mathbf{y}_{21} &= \frac{-\mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3} \\
\mathbf{y}_{22} &= \frac{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3}
\end{aligned}
$$

Parámetros híbridos

$$
\begin{aligned}
\mathbf{h}_{11} &= \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3} \\
\mathbf{h}_{12} &= \frac{\mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3} \\
\mathbf{h}_{21} &= \frac{-\mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3} \\
\mathbf{h}_{22} &= \frac{1}{\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3}
\end{aligned}
$$

Parámetros híbridos inversos

$$
\begin{aligned}
\mathbf{g}_{11} &= \frac{1}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_3} \\
\mathbf{g}_{12} &= \frac{-\mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_3} \\
\mathbf{g}_{21} &= \frac{\mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_3} \\
\mathbf{g}_{22} &= \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_3}
\end{aligned}
$$