Introducción al régimen transitorio

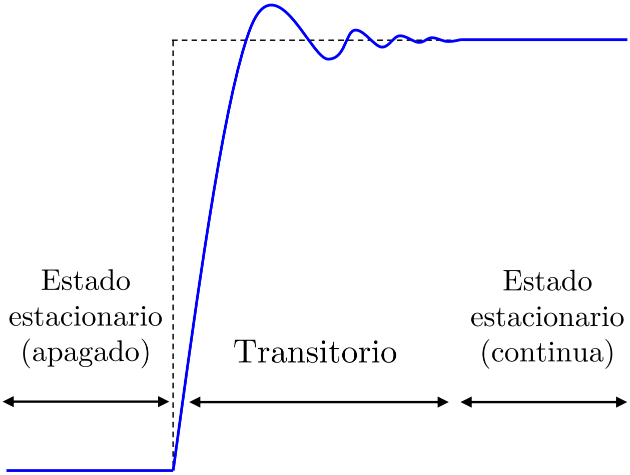
Teoría de Circuitos

Autor: Luis Badesa Bernardo

(basado en las diapositivas de Óscar Perpiñán Lamigueiro)

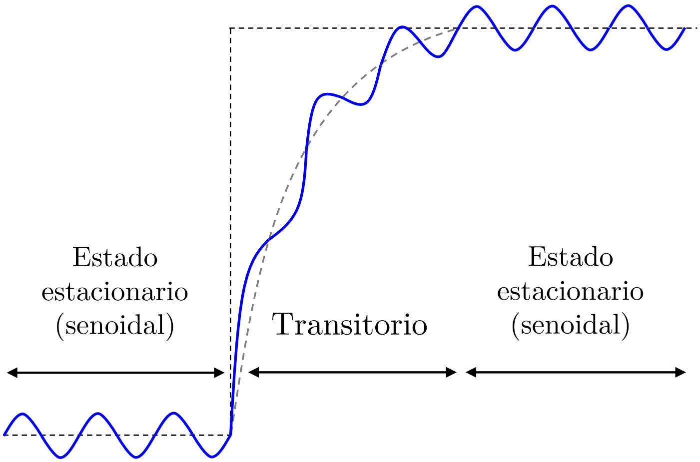
¿Qué es el régimen transitorio?

- Ejemplo: **encendido** de circuito de **continua** (con transitorio *subamortiguado*)



¿Qué es el régimen transitorio?

- Ejemplo: **término de continua** en circuito de **alterna** (con transitorio *sobreamortiguado*)



Régimen transitorio *vs.* estado estacionario

Estado estacionario o "régimen permanente"

- Circuito **estabilizado**
- Las **tensiones** y **corrientes** de un circuito son **constantes** (CC) o **periódicas** (CA)
- Modelado matemático: **ecuaciones algebraicas**

Régimen transitorio

- **Cambio** en las **condiciones** de funcionamiento de un **circuito**: encendido o apagado de fuentes, o cambio en las cargas $\rightarrow$ **interruptores**
- Variación de $u(t)$ e $i(t)$ hasta alcanzar nuevos valores
- Modelado matemático: **ecuaciones diferenciales**

Acumulación de energía

Estado estacionario

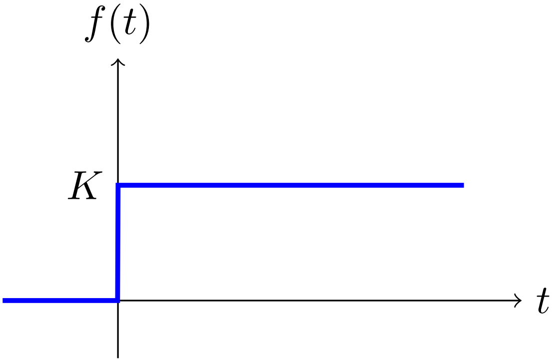
- **Energía acumulada** en **bobinas** y **condensadores**

Régimen transitorio

- **Redistribución** y **disipación** de energía acumulada
- La redistribución de energía **no** es **inmediata**

  Duración corta (típicamente µs) pero superior a 0 s, dependiendo de **relación entre acumulación** (en bobinas y condensadores) y **disipación** (en resistencias)

Consigna habitual: función escalón



$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ K & t \geq 0 \end{cases}$$

Ecuaciones diferenciales

Al aplicar **Kirchhoff** a un circuito lineal obtenemos **ecuaciones diferenciales**

$$u_L(t) = L\,\frac{d\,i_L(t)}{dt} \quad \leftrightarrow \quad i_L(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} u_L(\tau)\,d\tau$$

$$i_C(t) = C\,\frac{d\,u_C(t)}{dt} \quad \leftrightarrow \quad u_C(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C(\tau)\,d\tau$$

Por ejemplo, la ecuación de un circuito RLC serie será de la forma:

$$L\,\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + R\,\frac{d\,i(t)}{dt} + \frac{1}{C}\,i(t) = \frac{d\,E(t)}{dt}$$

(EDO lineal de segundo orden, obtenida aplicando 2LK al circuito)

Respuesta de un circuito lineal a una perturbación o consigna

La **solución** de la ecuación diferencial del circuito para $t \geq 0$ (*i.e.*, la **respuesta del circuito** a la perturbación) tiene **dos componentes**[*]:

$$\boxed{f(t) = f_n(t) + f_\infty(t)}$$

(donde $f(t)$ puede referirse a tensión o corriente)

- Respuesta **natural** o propia, $f_n(t)$
- Respuesta **forzada** o particular, $f_\infty(t)$

[*] Esta es la solución general a una Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO) lineal de orden arbitrario. Para más detalles, consultar, *e.g.*, libro Zill

Respuesta *natural*, $f_n(t)$

- Respuesta **sin fuentes de alimentación** $\rightarrow$ solución de la **ec. homogénea**

  Volviendo al ejemplo del circuito RLC, la ec. homogénea sería:

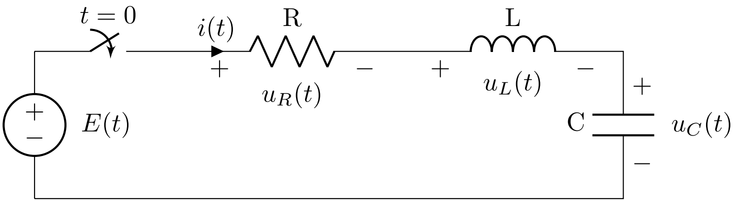
$$L\,\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + R\,\frac{d\,i(t)}{dt} + \frac{1}{C}\,i(t) = \cancelto{0}{\frac{d\,E(t)}{dt}}$$

- $f_n(t)$ representa la redistribución de **energía almacenada previamente** o **que será almacenada** por los elementos de acumulación

Respuesta *forzada*, $f_\infty(t)$

- Es una **solución particular** a la ecuación diferencial **no homogénea** $\rightarrow$

  determinada por las fuentes existentes en $t > 0$, $\boldsymbol{E(t)}$ en el ejemplo RLC



- Modela el estado del circuito **tras un tiempo** suficientemente **largo** después de la perturbación (régimen permanente), ya que la respuesta natural se extingue

$$\lim_{t\to\infty} f_n(t) = 0 \qquad \text{(demostración más adelante)}$$

Condiciones iniciales

- El **instante del cambio** se representa habitualmente con $\boldsymbol{t = 0}$
  - $t = 0^-$ $\rightarrow$ tiempo inmediatamente **anterior** al cambio
  - $t = 0^+$ $\rightarrow$ tiempo inmediatamente **posterior** al cambio

- Las **condiciones iniciales** son el estado del circuito en $t = 0$
  - Se calculan con las **energías almacenadas** en bobinas y condensadores en $t = 0^-$
  - Se aplican a la **topología** del circuito en $t = 0^+$

- Las cond. iniciales determinan las **ctes. de integración** de la respuesta **natural**, $f_n(t)$

Condiciones iniciales, resistencia

No acumula energía $\rightarrow$ sigue los cambios de forma instantánea

$$u(t) = R \cdot i(t)$$

(no aparece ninguna derivada en su ec. de definición)

Condiciones iniciales, bobina

La **corriente** por una **bobina no puede** variar de **forma brusca**, debido a que:

Tensiones infinitas y corrientes infinitas son <u>físicamente imposibles</u>

Partamos de la ec. de definición de la bobina:

$$u_L(t) = L\,\frac{d\,i_L(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad \boxed{i_L(0^-) = i_L(0^+)}$$

Si la corriente cambiara de forma brusca (función escalón), **su derivada sería infinita**, luego la tensión en bornes sería infinita

Esta es la ***condición de continuidad*** de la bobina

Condiciones iniciales, condensador

De forma equivalente, la **tensión** en un **condensador no puede** variar de **forma brusca**

Partamos de su ec. de definición:

$$i_C(t) = C\,\frac{d\,u_C(t)}{dt}$$

Si la tensión cambiara de forma brusca, **su derivada sería infinita**, luego la corriente de carga o descarga sería infinita. Entonces:

$$\boxed{u_C(0^-) = u_C(0^+)}$$

Esta es la ***condición de continuidad*** del condensador

Circuitos de primer orden: definición

- Circuitos compuestos por:
  - Un **único elemento de acumulación** (o varios elementos que pueden ser simplificados a un elemento equivalente, *e.g.*, bobinas en serie)
  - Y **resistencias**

- Modelados mediante una **ec. diferencial de 1$^{\text{er}}$ orden**:

$$\boxed{a_1 \cdot f'(t) + a_0 \cdot f(t) = g(t)}$$

ejemplo de RL serie: $L \cdot i'(t) + R \cdot i(t) = E(t)$

Circuitos de primer orden: resolución

- Modelados mediante una **ec. diferencial de 1^er orden**:

$$\boxed{a_1 \cdot f'(t) + a_0 \cdot f(t) = g(t)}$$

- $\boxed{\text{Resolución}}$

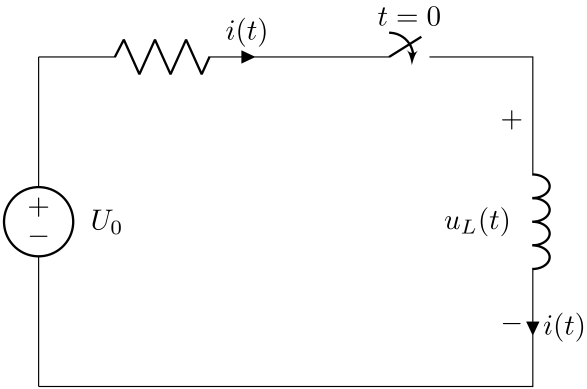
1. Cálculo de las **condiciones iniciales**, analizando el circuito en $t = 0^-$
2. **Respuesta natural**: análisis de la **ec. homogénea** ($g(t) = 0$, sin fuentes) en $t > 0$

$$f_n(t) = K \cdot \mathrm{e}^{-\frac{a_0}{a_1} t} \qquad \text{(demostración a continuación)}$$

3. **Respuesta forzada**, $f_\infty(t)$: análisis del circuito con fuentes en $t > 0$

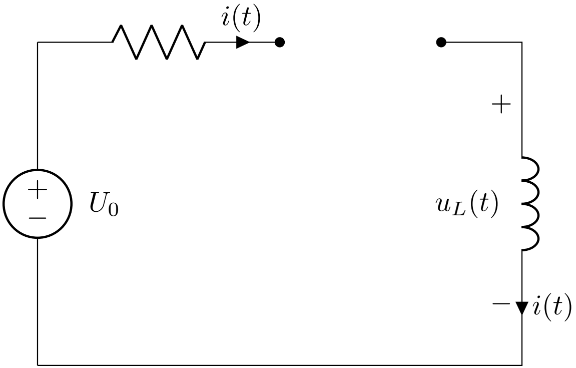
Circuito RL serie básico

- En $t < 0$ la fuente está desconectada
- En $t = 0$ la fuente se conecta
- En $t > 0$ la fuente alimenta el circuito RL (la bobina almacena energía)



Condiciones iniciales

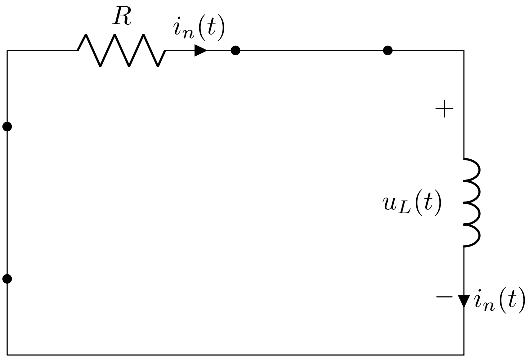
Analizando el circuito para $t < 0 \ldots$



$\ldots$ obtenemos $\boxed{i(0^-) = 0}$

Respuesta natural, $i_n(t)$

Siguiendo los pasos de la diapositiva 19, analizamos el circuito para $t > 0$ **apagando la fuente** (ec. homogénea):



2LK $\rightarrow$ $u_R(t) + u_L(t) = 0$

Sustituyendo las **ecs. de definición** de R y L:

$$R \cdot i_n(t) + L \frac{d\, i_n(t)}{dt} = 0$$

Cuya **solución general** es:

$$\boxed{i_n(t) = K \cdot e^{s\,t}}$$

(deducción en la siguiente diapositiva)

Respuesta natural, $i_n(t)$

La ec. homogénea a resolver es:

$$L\,\frac{d\,i_n(t)}{dt} + R\cdot i_n(t) \;=\; 0$$

Para resolverla, debe hallarse una función cuya **derivada sea igual a la propia función**, multiplicada por una constante $\quad\rightarrow\quad$ la **función exponencial** cumple esta propiedad

Sustituyendo entonces $i_n(t) = K\cdot e^{s\,t}$ (donde ***K*** y ***s*** son **constantes** a determinar):

$$L\,\frac{d\left(K\cdot e^{s\,t}\right)}{dt} + R\cdot K\cdot e^{s\,t} \;=\; 0 \quad\rightarrow\quad s\cdot K\cdot e^{s\,t} + \frac{R}{L}\cdot K\cdot e^{s\,t} \;=\; 0$$

Diviendo a ambos lados por $K\cdot e^{s\,t}$ se obtiene la **ec. característica**:

$$s + \frac{R}{L} = 0 \quad\rightarrow\quad s = -\frac{R}{L} \quad \xrightarrow[i_n(t)=K\cdot e^{s\,t}]{\text{sustituyendo en}} \quad \boxed{i_n(t) \;=\; K\cdot e^{-\frac{R}{L}\,t}}$$

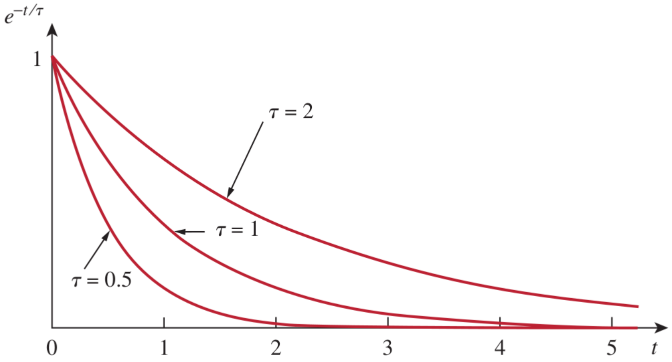
Para más detalles, consultar págs. 400 - 404 del Fraile Mora, edición 2012

Constante de tiempo

Definimos $\tau = \dfrac{L}{R}$ como la **constante de tiempo** del circuito (unidades [s])

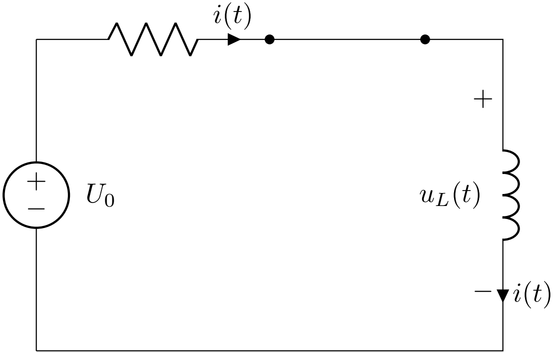
$$\boxed{i_n(t) = K \cdot e^{-t/\tau}}$$

- Ratio entre **almacenamiento** (L) y **disipación** (R)
- Valores altos de τ implican decrecimiento lento
- La respuesta natural **se extingue** tras $\simeq 5\tau$



Respuesta forzada, $i_\infty(t)$

Volvemos a **activar la fuente**, analizando para $t \gg 0$:



$$\textbf{2LK} \quad \rightarrow \quad u_R(t) + u_L(t) = u_g(t)$$

$$R\,i(t) + L\,\underbrace{\cancel{\frac{d\,i(t)}{dt}}}_{0\,(\mathrm{CC})} = U_0$$

Al ser un circuito de **Corriente Continua**, la **bobina** se sustituye por un **cortocircuito**

La **solución** es entonces:

$$\boxed{i_\infty(t) = \frac{U_0}{R}}$$

Respuesta completa, $i(t) = i_n(t) + i_\infty(t)$

$$i(t) = i_n(t) + i_\infty(t) \rightarrow \begin{cases} i_n(t) = K \cdot e^{-t/\tau} \\ i_\infty(t) = U_0/R \end{cases}$$

Para **determinar** el valor de la **constante de integración** K, particularizamos en $t = 0^+$:

$$i(0^+) = i_n(0^+) + i_\infty(0^+) = K + \frac{U_0}{R} \quad \rightarrow \quad K = i(0^+) - i_\infty(0^+)$$

Teniendo en cuenta la **condición de continuidad**, $i(0^+) = i(0^-) = 0$, obtenemos:

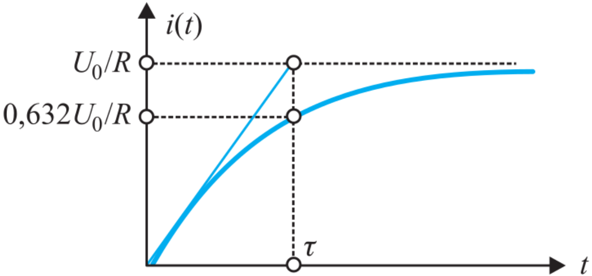
$$K = 0 - \frac{U_0}{R}$$

La **solución completa** es:

$$\boxed{i(t) = \frac{U_0}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$

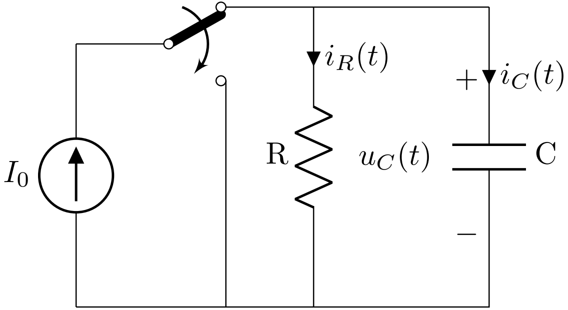
Respuesta completa

$$\boxed{i(t) = \frac{U_0}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$



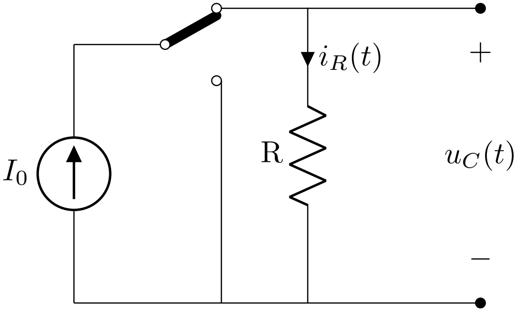
Circuito RC paralelo básico

- En $t < 0$ la fuente alimenta el circuito RC (el condensador está cargado)
- En $t = 0$ se desconecta la fuente
- En $t > 0$ el condensador comienza a descargarse en la resistencia



Condiciones iniciales

Analizando el circuito para $t < 0 \ldots$



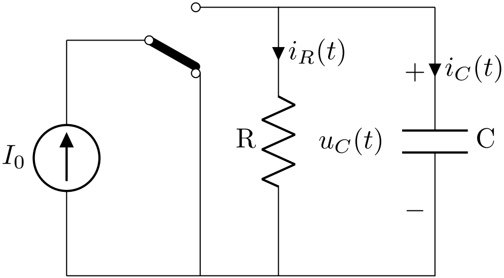
$\ldots$ obtenemos $\boxed{u_C(0^-) = R \cdot I_0}$

Respuesta natural, $u_n(t)$

Siguiendo los pasos de la diapositiva 19, analizamos el circuito para $t > 0$ **apagando la fuente** (ec. homogénea)

1LK $\rightarrow \quad i_R(t) + i_C(t) = 0$

$$\frac{u_n(t)}{R} + C\,\frac{d\,u_n(t)}{dt} = 0$$



(en este caso, la fuente ya está apagada en $t > 0$)

Cuya **solución general** es:

$$\boxed{u_n(t) = K \cdot e^{s\,t}}$$

(deducción equivalente a la diapositiva 24)

Luego la **respuesta natural**, $u_n(t)$ del circuito es:

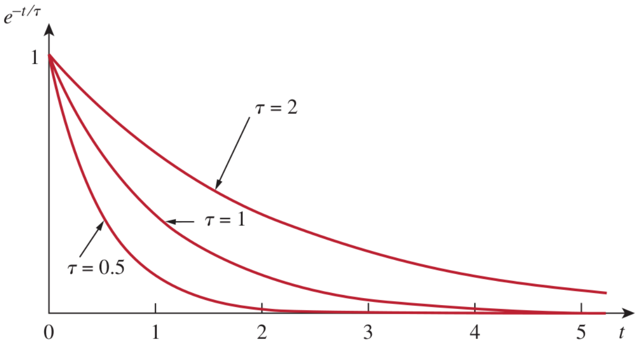
$$\boxed{u_n(t) = K \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}}$$

Constante de tiempo

Definimos $\tau = R \cdot C$ como la **constante de tiempo** del circuito (unidades [s])

$$\boxed{u_n(t) \; = \; K \cdot e^{-t/\tau}}$$

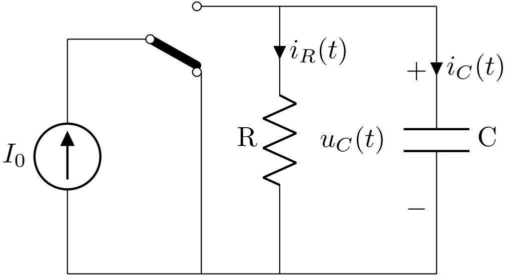
- Valores altos de τ implican decrecimiento lento
- La respuesta natural **se extingue** tras $\simeq 5\tau$



La **energía almacenada** en el C en $t = 0^-$ se **disipa en las resistencias** en $t > 0$

Respuesta forzada, $u_\infty(t)$

Analizando para $t > 0$ con la **fuente encendida**:



Dado que en $t > 0$ **no hay fuentes** presentes en el circuito RC, toda la **energía almacenada** en el condensador **se disipa** en la resistencia

Luego la **respuesta forzada**, $u_\infty(t)$, es:

$$\boxed{u_\infty(t) = 0}$$

Respuesta completa, $u(t) = u_n(t) + u_\infty(t)$

$$u(t) = u_n(t) + u_\infty(t) \;\rightarrow\; \begin{cases} u_n(t) = K \cdot e^{-t/\tau} \\ u_\infty(t) = 0 \end{cases}$$

Para **determinar** el valor de la **constante de integración** K, particularizamos en $t = 0^+$:

$$u(0^+) = u_n(0^+) + u_\infty(0^+) = K + 0 \quad \rightarrow \quad K = u(0^+)$$

Teniendo en cuenta la **condición de continuidad**, $u(0^+) = u(0^-) = R \cdot I_0 = U_0$:

$$K = U_0$$

La **solución completa** es:

$$\boxed{u(t) = U_0 \cdot e^{-t/\tau}}$$

Balance energético

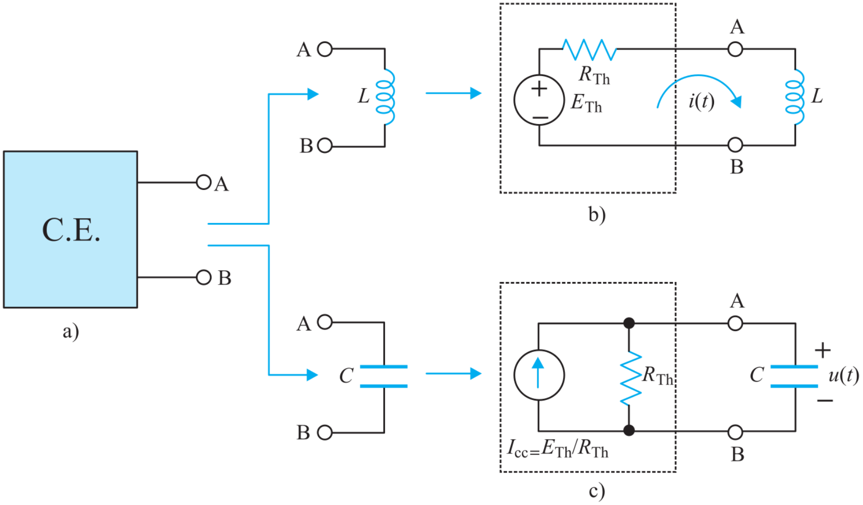
Podemos comprobar que **toda la energía** acumulada en el condensador en $t < 0$ realmente **se disipa** en la resistencia en $t > 0$:

$$\boxed{W_R} = \int_0^\infty u_R(t) \cdot i_R(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{u_R^2(t)}{R}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{1}{R}\left(U_0 \cdot e^{-t/\tau}\right)^2 \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{U_0^2}{R}\int_0^\infty e^{-\frac{2}{R\cdot C}t}\,\mathrm{d}t = \frac{U_0^2}{\cancel{R}} \cdot \frac{-\cancel{R}\cdot C}{2}\left[e^{-\frac{2}{R\cdot C}t}\right]_0^\infty = \frac{-1}{2}\,C \cdot U_0^2 \cdot [0 - 1]$$

$$= \frac{1}{2}\,C \cdot U_0^2 = \boxed{W_C}$$

Procedimiento general $\rightarrow$ equivalente de Thévenin/Norton



R_{th} es la **resistencia vista desde los bornes** del condensador o de la bobina, cuando se anulan todas las fuentes independientes

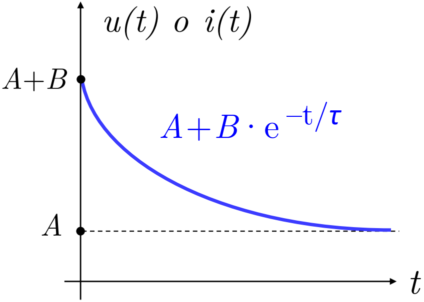
Procedimiento general

1. Dibujar el circuito para $\boldsymbol{t < 0}$
   - Obtener el valor de $i_L(0^-)$ o $u_C(0^-)$
   - Aplicar el **principio de continuidad** para determinar $i_L(0^+)$ o $u_C(0^+)$
2. Dibujar el circuito para $\boldsymbol{t > 0}$
   - Calcular el equivalente de **Thévenin/Norton** visto por L o C
   - Determinar la **constante de tiempo** del circuito: $\tau = \dfrac{L}{R_{th}}$ o $\tau = R_{th} \cdot C$
   - Calcular la respuesta en **régimen permanente**, $i_\infty(t)$ o $u_\infty(t)$
3. Obtener la **respuesta completa**:

$$
\begin{aligned}
i_L(t) &= i_n(t) + i_\infty(t) \\
u_C(t) &= u_n(t) + u_\infty(t)
\end{aligned}
$$

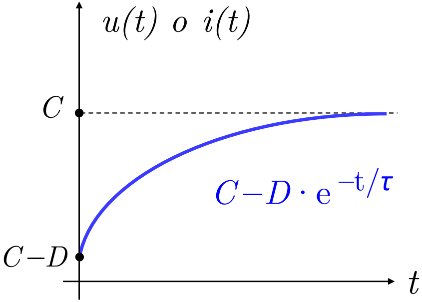
Resumen: respuestas posibles de un 1$^{\text{er}}$ orden (corriente continua)

Elemento que se **descarga** (parcialmente)



Caso particular: $A=0$, no hay fuentes en $t>0$ (el elemento se **descarga totalmente**)

Elemento que **aumenta su carga**



Caso particular: $C=D$, el elemento estaba **inicialmente descargado**

Interludio: transitorios inestables, apagón EE. UU. 2003

- **55 millones** de personas sin luz
- **6.000 millones de $** en pérdidas

- **Nueva York** perdió gran parte del suministro durante **13 horas**
- Ocurrió en agosto a las 16h: **podría haber sido mucho peor** (*e.g.* diciembre a las 16h, sin luz natural)

Circuitos de segundo orden

- Circuitos que contienen **dos elementos de acumulación**, además de elementos de disipación (resistencias)

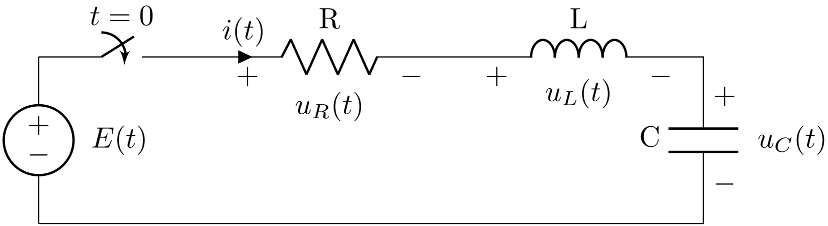
- Modelados mediante una **ec. diferencial de 2$^{\text{do}}$ orden**:

$$\boxed{a_2 \cdot f''(t) \; + \; a_1 \cdot f'(t) \; + \; a_0 \cdot f(t) \; = \; g(t)}$$

- $\boxed{\text{Resolución}}$ $\;\rightarrow\;$ obtención de **respuesta natural** $f_n(t)$ y **respuesta forzada** $f_\infty(t)$

$$\boxed{f(t) \; = \; f_n(t) \; + \; f_\infty(t)}$$

Ejemplo: circuito RLC serie



$$\textbf{2LK} \quad \rightarrow \quad \overbrace{L\,\frac{d\,i(t)}{dt}}^{u_L(t)} + \overbrace{R \cdot i(t)}^{u_R(t)} + \overbrace{\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\,d\tau}^{u_C(t)} = E(t)$$

Derivando a ambos lados de la ecuación:

$$L\,\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + R\,\frac{d\,i(t)}{dt} + \frac{1}{C}\,i(t) = \frac{d\,E(t)}{dt}$$

Circuitos de segundo orden: respuesta natural, $f_n(t)$

$$a_2 \cdot f''(t) + a_1 \cdot f'(t) + a_0 \cdot f(t) = 0 \quad \rightarrow \quad f''(t) + \frac{a_1}{a_2} \cdot f'(t) + \frac{a_0}{a_2} \cdot f(t) = 0$$

- Redefinición de constantes:

$$\frac{a_1}{a_2} = 2\,\xi\,\omega_n \qquad\qquad \frac{a_0}{a_2} = \omega_n^2$$

ω_n	pulsación natural
ξ	coeficiente de **amortiguamiento**

- Resolviendo la **ec. característica***:

$$s^2 + 2\,\xi\,\omega_n\,s + \omega_n^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} s_1 = -\omega_n\left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}\right) \\ s_2 = -\omega_n\left(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}\right) \end{cases}$$

*Obtenida mediante el mismo procedimiento que en la diapositiva 24, sustituyendo la solución de prueba $f_n(t) = K \cdot e^{s\,t}$. Para más detalles, consultar págs. 423 - 424 del Fraile Mora, edición 2012

Circuitos de segundo orden: respuesta natural, $f_n(t)$

(continuación)

- Resolviendo la **ec. característica**:

$$s^2 + 2\,\xi\,\omega_n\,s + \omega_n^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} s_1 = -\omega_n\left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}\right) \\ s_2 = -\omega_n\left(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}\right) \end{cases}$$

- Por lo tanto, la **solución de la ec. diferencial** es:

$$\boxed{f_n(t) = K_1 \cdot e^{s_1 \cdot t} + K_2 \cdot e^{s_2 \cdot t}}$$

donde K_1 y K_2 son ctes. que dependen de las **condiciones iniciales**

Circuitos de segundo orden: tipos

Dependiendo de los **valores de las soluciones** de la ec. característica, hay **3 posibilidades de transitorio**:

$$s_1 = -\omega_n \left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right) \qquad s_2 = -\omega_n \left(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1} \right)$$

- Soluciones **reales distintas** $\rightarrow$ circuito **sobreamortiguado** (transitorio "lento")
- Solución **real doble** $\rightarrow$ circuito **críticamente amortiguado**
- Soluciones **complejas conjugadas**[*] $\rightarrow$ circuito **subamortiguado** (con oscilaciones)

[*] Por el Tª de la raíz conjugada compleja: si un polinomio en una variables con coefs. reales tiene una raíz compleja, el conjugado también es raíz del polinomio

Circuitos de segundo orden: tipos

- Circuito **sobreamortiguado** (transitorio “lento”)

$$\boxed{\xi > 1}$$

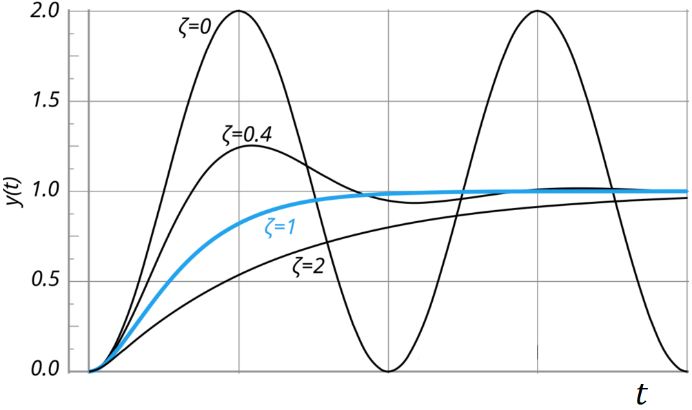
- Circuito **críticamente amortiguado**

$$\boxed{\xi = 1}$$

- Circuito **subamortiguado** (con oscilaciones)

$$\boxed{\xi < 1}$$

Circuitos de segundo orden: tipos



Circuitos de segundo orden *subamortiguados*

El caso **subamortiguado** ($\xi < 1$) da lugar a **oscilaciones atenuadas**. Demostración:

$$f_n(t) = K_1 \cdot e^{s_1 \cdot t} + K_2 \cdot e^{s_2 \cdot t} \quad s_1, s_2 \in \mathbb{C} \quad \rightarrow \quad f_n(t) = K_1 \cdot e^{(-a+\mathrm{j}\,b)\cdot t} + K_2 \cdot e^{(-a-\mathrm{j}\,b)\cdot t}$$

Nota: la **parte real es siempre negativa** en las soluciones complejas de un circuito de 2^{do} orden

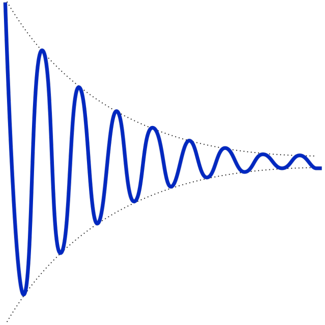
Lo contrario implicaría $\xi < 0$, y por tanto implicaría resistencia negativa, lo cual carece de sentido físico (se omite la demostración)

Usando la fórmula de Euler ($e^{\mathrm{j}\,\phi} = \cos\phi + \mathrm{j}\,\sin\phi$), puede llegarse a:

$$\begin{aligned} f_n(t) &= e^{-\alpha\cdot t} \cdot [B_1 \cdot \sin(\omega t) + B_2 \cdot \cos(\omega t)] \\ &= \boxed{B' \cdot e^{-\alpha\cdot t} \cdot \sin(\omega t + \theta)} \end{aligned}$$

(demostración)

(la forma de obtener las ctes. B', α, ω y θ se detalla en los ejs. 14 y 15)



Circuitos de segundo orden, resolución

1. Obtener la **respuesta natural** del circuito
   - Se escribe la **ec. diferencial del circuito** sin fuentes, usando 1LK o 2LK
   - Se resuelve la ec. característica, primero obteniendo el valor de las **ctes.** ω_n y ξ
   - El tipo de soluciones de la ec. característica determina el **tipo de transitorio** $\rightarrow$ debe comprobarse que el **transitorio** es coherente con el **valor de** ξ $(\xi > 1, \quad \xi = 1 \quad \text{o} \quad 0 < \xi < 1)$
2. Determinar el valor de las **ctes. de integración** de la respuesta natural usando las **condiciones iniciales**, y aplicando el **principio de continuidad** para L o C
   - Son **necesarias 2 condiciones iniciales**: una para la propia magnitud ($u(t)$ o $i(t)$) y otra para su primera derivada ($u'(t)$ o $i'(t)$)
   - Más detalles en **ejercicios resueltos**
3. Obtener la **respuesta forzada**, $f_\infty(t)$: análisis del circuito con fuentes en $t > 0$