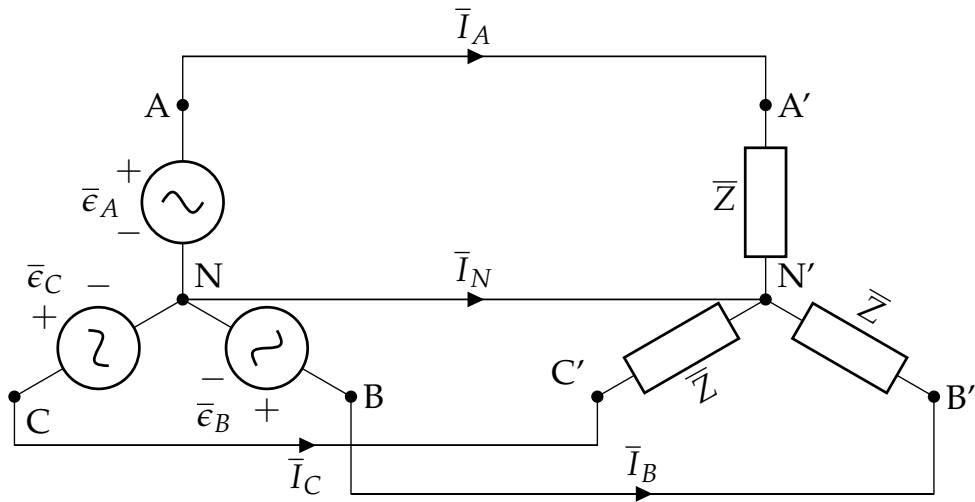


Sistemas trifásicos

Teoría de Circuitos

Autor: Luis Badesa Bernardo

(basado en las diapositivas de Óscar Perpiñán Lamigueiro)



Motivación de los sistemas trifásicos

- ▶ En un sistema trifásico la **potencia instantánea es constante**, evitando vibraciones y esfuerzos en las máquinas
 - ▶ **Recordatorio:** en un sistema monofásico, la potencia instantánea es pulsante
- ▶ La **masa de conductor necesaria** en un sistema trifásico **es un 25 % inferior** que en un sistema monofásico para transportar la misma potencia

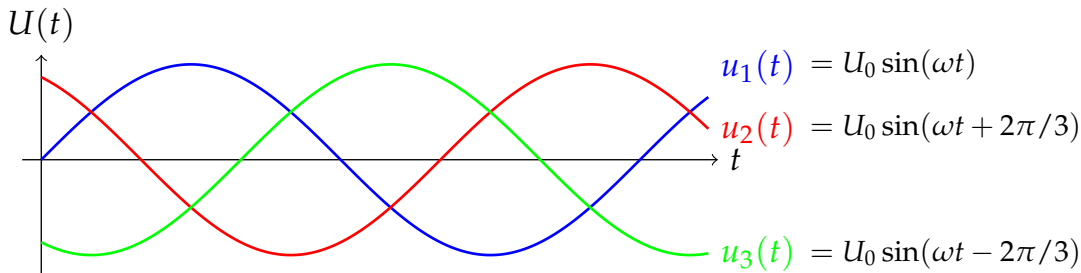
Por estas razones, se usan sistemas trifásicos en **generación, transporte y distribución de energía eléctrica**

(los sistemas monofásicos se utilizan en cargas domésticas y de baja potencia)

Ondas trifásicas

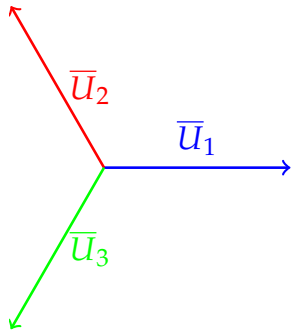
Para conseguir potencia constante, las ondas trifásicas deben cumplir:

- ▶ Mismo **desfase entre ellas** → el desfase debe ser de **120°**
- ▶ Igual **amplitud**



Fasores de un sistema trifásico

Usamos las mismas herramientas matemáticas que en el Tema 2 → **cálculo fasorial**

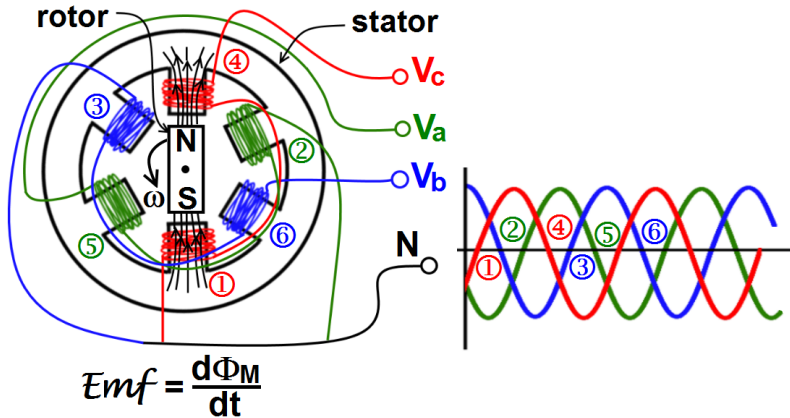


$$\bar{U}_1 = U \underline{0}$$

$$\bar{U}_2 = U \underline{2\pi/3}$$

$$\bar{U}_3 = U \underline{-2\pi/3}$$

Generador trifásico



(clica en la imagen)

¿Por qué 3 fases?

¿Por qué no 2, 5 o 17?

- ▶ 2 fases

- ▶ Requiere **mayor masa de conductor** que un sistema trifásico

- ▶ Más de 3 fases

- ▶ El rendimiento de un motor o generador aumenta ligeramente con el n° de fases

Pero la leve mejoría para más de 3 fases **no justifica la mayor complejidad** del sistema (por ejemplo, las protecciones eléctricas serían bastante más complejas)

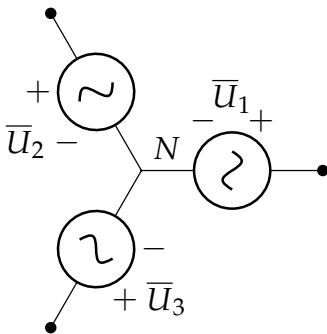
① Generadores

② Receptores

③ Potencia en sistemas trifásicos

Conexión

- Punto común de la conexión estrella \rightarrow **neutro**, N
- Potencial de N se toma como **referencia**



$$u_1(t) = U_0 \sin(\omega t)$$

$$u_2(t) = U_0 \sin(\omega t + 2\pi/3)$$

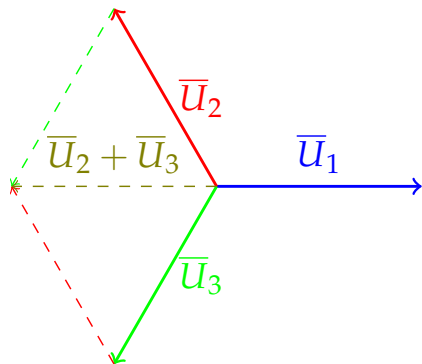
$$u_3(t) = U_0 \sin(\omega t - 2\pi/3)$$

$$\bar{U}_1 = U/\underline{0}$$

$$\bar{U}_2 = U/\underline{2\pi/3}$$

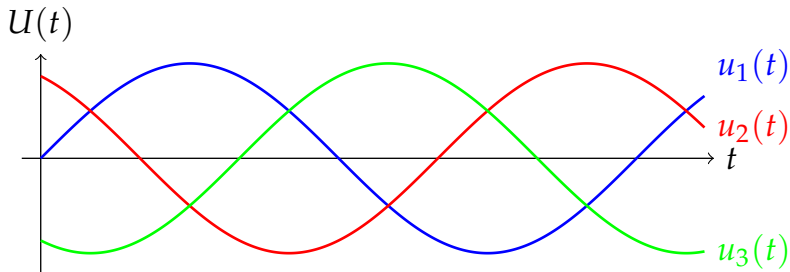
$$\bar{U}_3 = U/\underline{-2\pi/3}$$

Las tensiones suman 0



$$\bar{U}_1 + \bar{U}_2 + \bar{U}_3 = 0$$

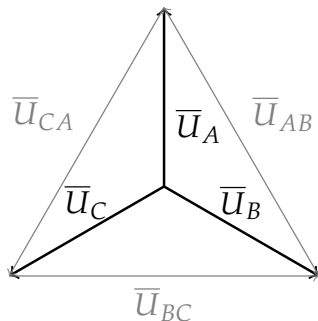
Las tensiones suman 0



$$u_1(t) + u_2(t) + u_3(t) = 0$$

(esto no quiere decir que una carga vaya a estar sometida constantemente a 0 V, porque **ninguna carga** va a estar **sometida a las 3 tensiones** de fase a la vez)

Tensiones de fase y de línea



- Tensiones de **fase**: $U_A, U_B, U_C \equiv U_f$
(o tensiones **simples**, entre fase y neutro)
- Tensiones de **línea**: $U_{AB}, U_{BC}, U_{CA} \equiv U_L$
(o tensiones **compuestas**, entre dos conductores de línea)

$$\bar{U}_{AB} = \bar{U}_A - \bar{U}_B$$

$$\bar{U}_{BC} = \bar{U}_B - \bar{U}_C$$

$$\bar{U}_{CA} = \bar{U}_C - \bar{U}_A$$

$$\bar{U}_{AB} + \bar{U}_{BC} + \bar{U}_{CA} = 0$$

Relación entre tensiones de fase y de línea

$$\bar{U}_A = U_f / \theta_f$$

$$\bar{U}_B = U_f / \theta_f - 120^\circ$$

$$\bar{U}_{AB} = \bar{U}_A - \bar{U}_B =$$

$$-\bar{A} = A / \theta + 180^\circ$$

$$= U_f / \theta_f - U_f / \theta_f - 120^\circ =$$

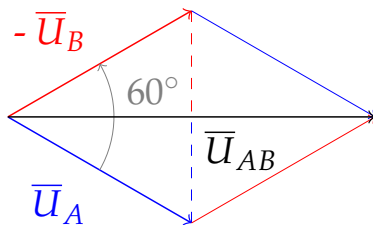
ver gráfico

$$= U_f / \theta_f + U_f / \theta_f + 60^\circ =$$

$$\cos(30^\circ) = \sqrt{3}/2$$

$$= 2 \cdot U_f \cdot \cos(30^\circ) / \theta_f + 30^\circ =$$

$$= \sqrt{3} U_f / \theta_f + 30^\circ$$



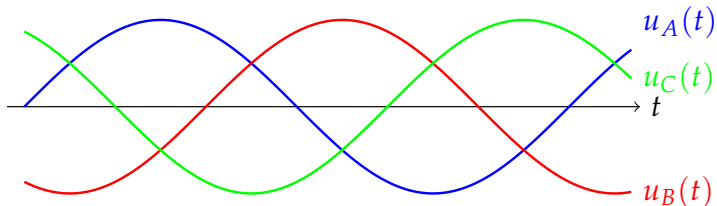
$$U_L = \sqrt{3} \cdot U_f$$

$$\theta_L = \theta_f + 30^\circ$$

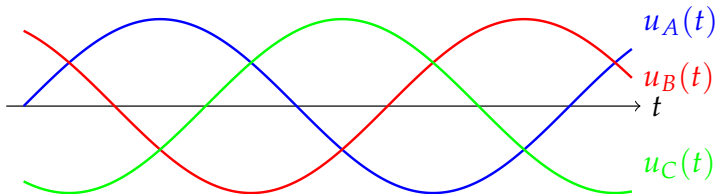
Secuencia de fases

Orden en que ocurren los máximos de cada fase

- Secuencia de Fases Directa (**SFD**): ABC

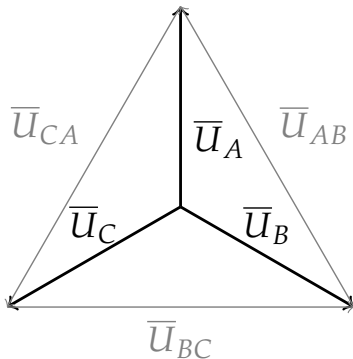


- Secuencia de Fases Inversa (**SFI**): ACB



Secuencia de Fases Directa (SFD)

Por **convención**, se usa siempre esta **referencia** de fases (memorizad este triángulo):



$$\bar{U}_A = U_f \angle \underline{90^\circ}$$

$$\bar{U}_B = U_f \angle \underline{-30^\circ}$$

$$\bar{U}_C = U_f \angle \underline{-150^\circ}$$

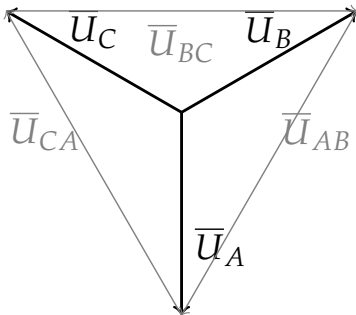
$$\bar{U}_{AB} = U_L \angle \underline{120^\circ}$$

$$\bar{U}_{BC} = U_L \angle \underline{0^\circ}$$

$$\bar{U}_{CA} = U_L \angle \underline{-120^\circ}$$

Secuencia de Fases Inversa (SFI)

Por **convención**, se usa siempre esta **referencia** de fases (memorizad este triángulo):



$$\bar{U}_A = U_f \angle -90^\circ$$

$$\bar{U}_B = U_f \angle 30^\circ$$

$$\bar{U}_C = U_f \angle 150^\circ$$

$$\bar{U}_{AB} = U_L \angle -120^\circ$$

$$\bar{U}_{BC} = U_L \angle 0^\circ$$

$$\bar{U}_{CA} = U_L \angle 120^\circ$$

① Generadores

② Receptores

③ Potencia en sistemas trifásicos

Tipos de receptor

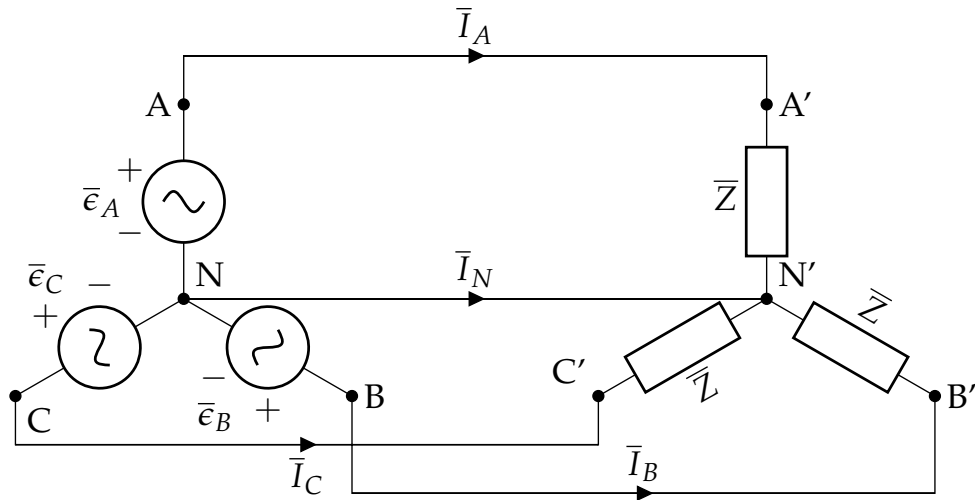
Según su **conexión**

- ▶ **Estrella** (punto común)
- ▶ **Triángulo**

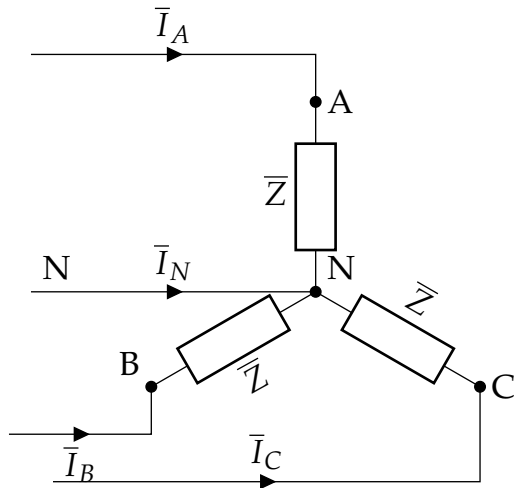
Según sus **impedancias**

- ▶ **Equilibrado** (las tres impedancias son idénticas en módulo y fase)
- ▶ **Desequilibrado**

Receptor en estrella equilibrado, con neutro



Receptor en estrella equilibrado, con neutro



$$\bar{I}_A = \frac{\bar{U}_A}{\bar{Z}} = \frac{U_f}{Z} \angle \pm 90^\circ - \theta$$

$$\bar{I}_B = \frac{\bar{U}_B}{\bar{Z}} = \frac{U_f}{Z} \angle \mp 30^\circ - \theta$$

$$\bar{I}_C = \frac{\bar{U}_C}{\bar{Z}} = \frac{U_f}{Z} \angle \mp 150^\circ - \theta$$

(signo de arriba
para **SFD**,
signo de abajo
para **SFI**)

$$I_A = I_B = I_C = \frac{U_f}{Z}$$

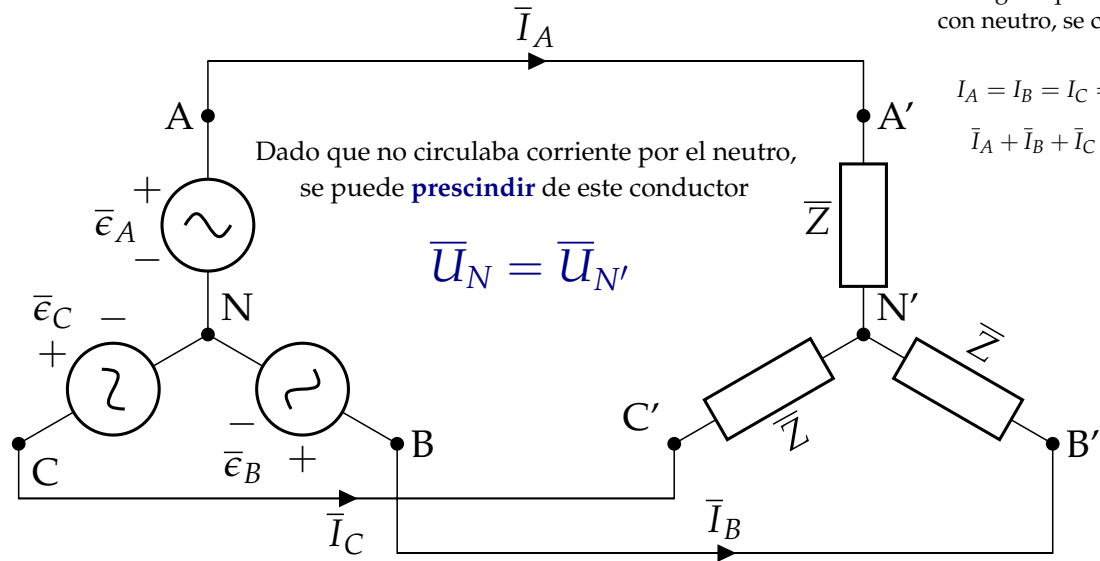
(en \curvearrowright , corriente de línea igual a la de fase)

Aplicando **1LK** en el punto común del receptor:

$$\bar{I}_A + \bar{I}_B + \bar{I}_C + \bar{I}_N = 0$$

$$\bar{I}_A + \bar{I}_B + \bar{I}_C = 0 \rightarrow \boxed{\bar{I}_N = 0}$$

Receptor en estrella equilibrado, sin neutro



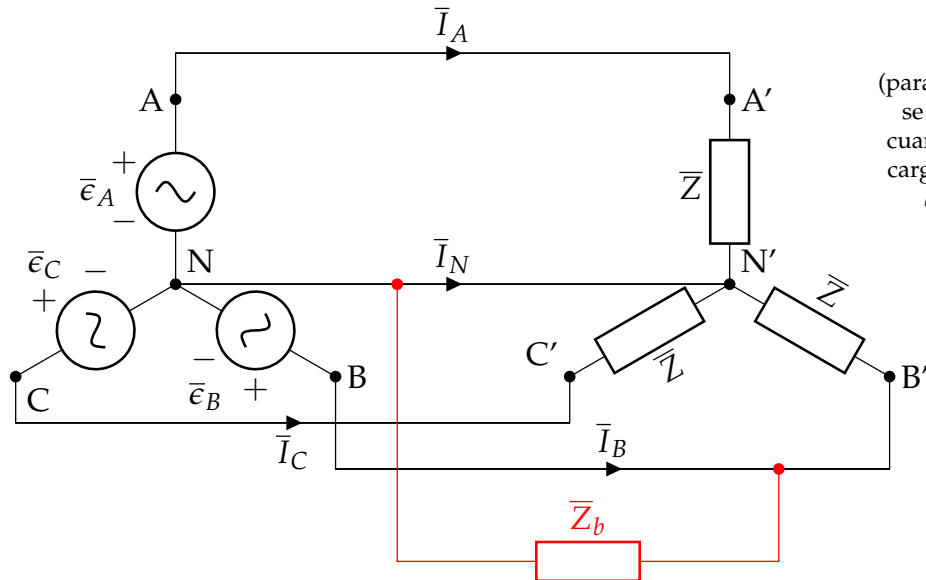
Ejercicio

Un sistema a cuatro hilos y SFI alimenta tres impedancias $\bar{Z} = 10/\underline{60^\circ} \Omega$, conectadas en estrella a una tensión de $200\sqrt{3} \text{ V}$

Determinar las corrientes de línea y el diagrama fasorial

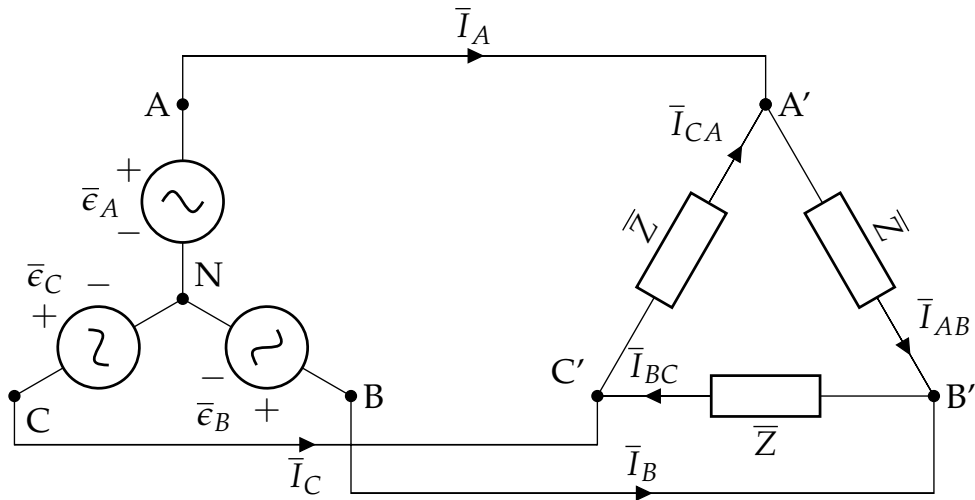
Solución: [aquí](#)

Receptor en estrella equilibrado, con carga monofásica

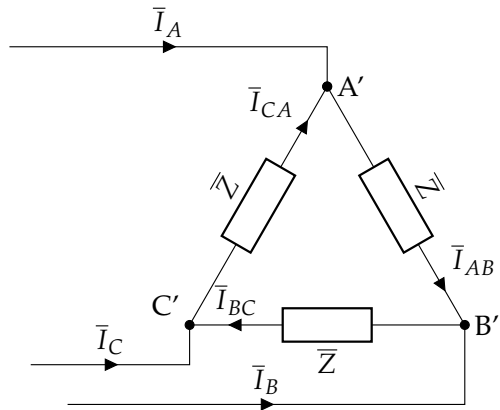


(para \bar{Z}_Δ equilibrado,
se incluye neutro
cuando convive con
cargas monofásicas,
e.g. edificios)

Receptor en triángulo equilibrado



Receptor en triángulo equilibrado



$$\bar{I}_{AB} = \frac{\bar{U}_{AB}}{\bar{Z}} = \frac{U_L}{Z} \angle \pm 120^\circ - \theta$$

$$\bar{I}_{BC} = \frac{\bar{U}_{BC}}{\bar{Z}} = \frac{U_L}{Z} \angle 0 - \theta$$

$$\bar{I}_{CA} = \frac{\bar{U}_{CA}}{\bar{Z}} = \frac{U_L}{Z} \angle \mp 120^\circ - \theta$$

(signo de arriba
para **SFD**,
signo de abajo
para **SFI**)

(en Δ , tensión de línea igual a la de fase)

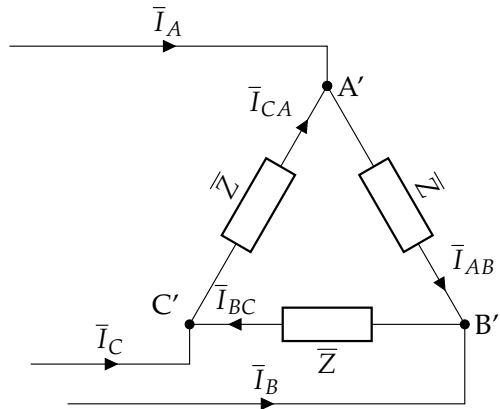
Por la misma razón que en la diapositiva 11:

$$\bar{I}_{AB} + \bar{I}_{BC} + \bar{I}_{CA} = 0$$

Corriente de **fase**:

$$I_f = I_{AB} = I_{BC} = I_{CA} = \frac{U_L}{Z}$$

Receptor en triángulo equilibrado



Para calcular las corrientes de línea, aplicamos **1LK** en cada nudo:

$$\bar{I}_A = \bar{I}_{AB} - \bar{I}_{CA} = \sqrt{3} \cdot \frac{U_L}{Z} \angle \pm 90^\circ - \theta$$

$$\bar{I}_B = \bar{I}_{BC} - \bar{I}_{AB} = \sqrt{3} \cdot \frac{U_L}{Z} \angle \mp 30^\circ - \theta$$

$$\bar{I}_C = \bar{I}_{CA} - \bar{I}_{BC} = \sqrt{3} \cdot \frac{U_L}{Z} \angle \mp 150^\circ - \theta$$

Corriente de **línea**:

$$I_L = I_A = I_B = I_C = \sqrt{3} \cdot \frac{U_L}{Z}$$

$$I_L = \sqrt{3} \cdot I_f$$

Ejercicio

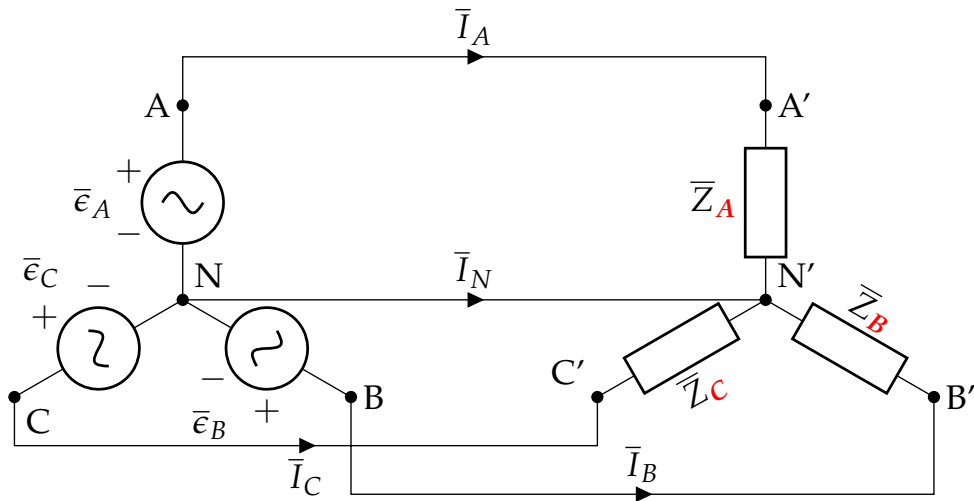
Un sistema trifásico de secuencia directa y tensión 200 V alimenta tres impedancias iguales $\bar{Z} = 10/\underline{30^\circ} \Omega$, conectadas en triángulo

Determinar las corrientes de fase y línea, y dibujar el diagrama fasorial

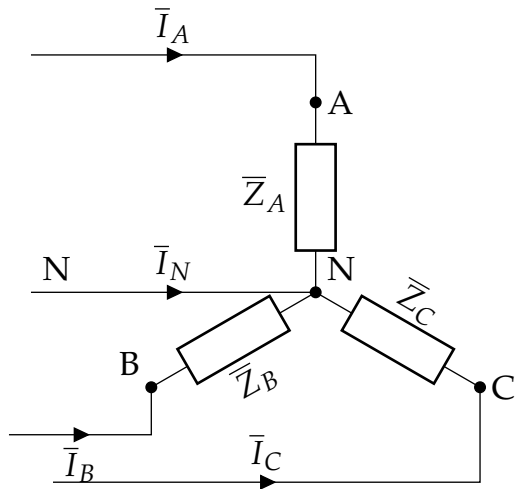
Solución: [aquí](#)

Receptor en estrella desequilibrado, con neutro

Si cada una de las impedancias es distinta, el receptor es **desequilibrado**



Receptor en estrella desequilibrado, con neutro



$$\bar{I}_A = \frac{\bar{U}_A}{\bar{Z}_A}$$

$$\bar{I}_B = \frac{\bar{U}_B}{\bar{Z}_B}$$

$$\bar{I}_C = \frac{\bar{U}_C}{\bar{Z}_C}$$

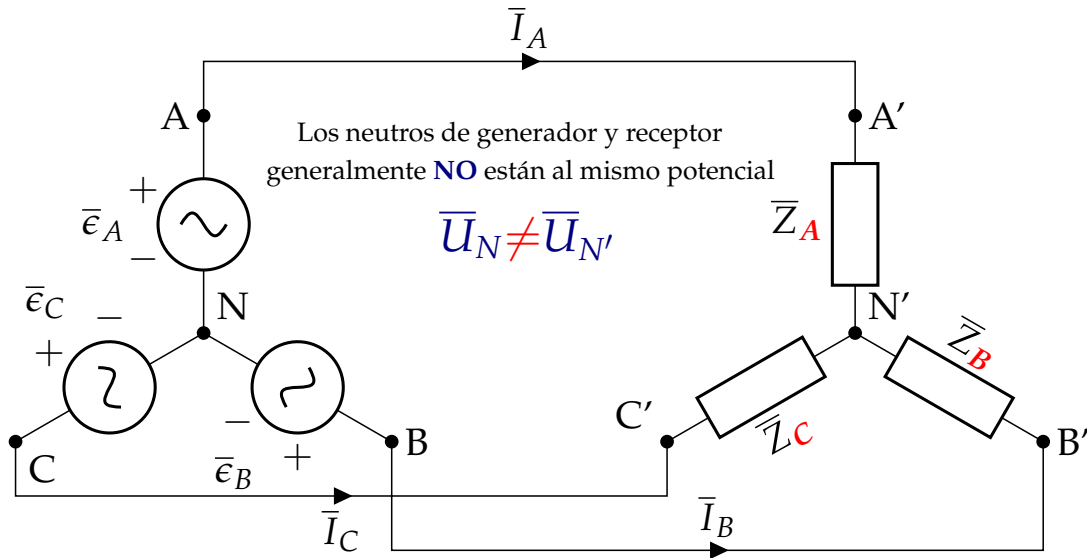
(cada corriente de fase/línea es **distinta**)

Aplicando **1LK** en el punto común del receptor:

$$\bar{I}_A + \bar{I}_B + \bar{I}_C + \bar{I}_N = 0$$

$$\bar{I}_A + \bar{I}_B + \bar{I}_C \neq 0 \rightarrow \boxed{\bar{I}_N \neq 0}$$

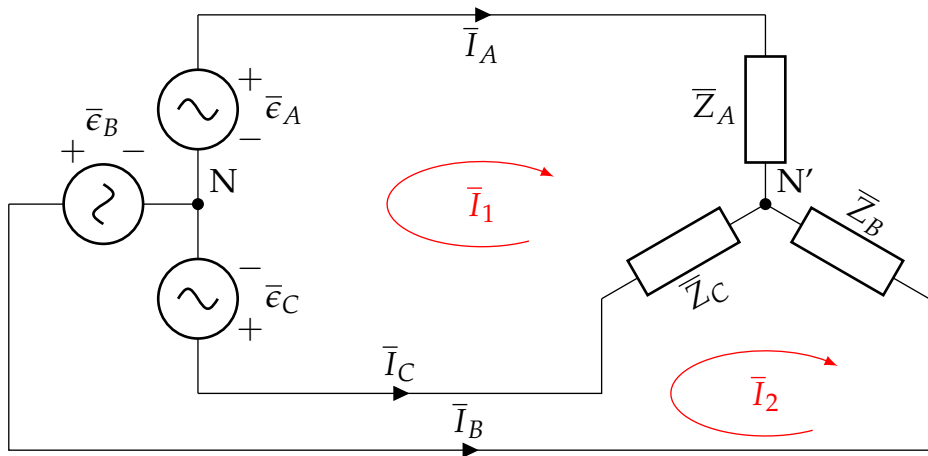
Receptor en estrella desequilibrado, sin neutro



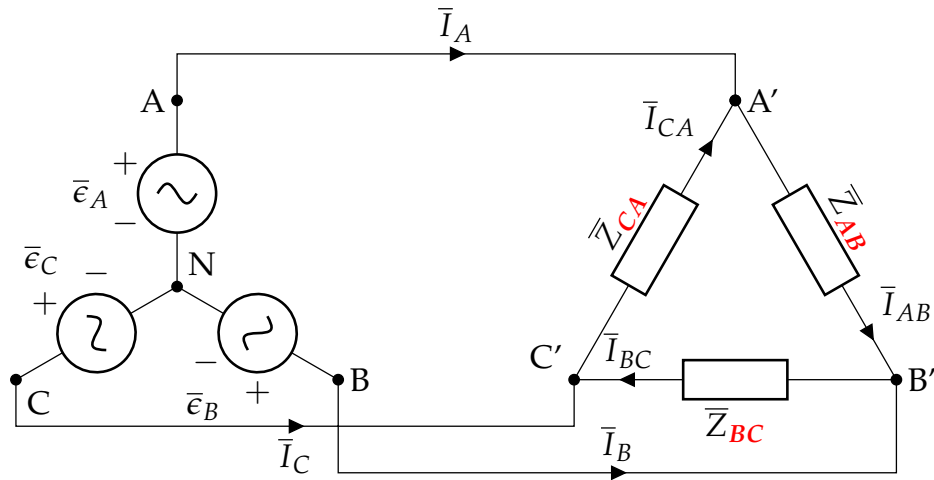
Receptor en estrella desequilibrado, sin neutro

En este caso **desconocemos la tensión** en las impedancias

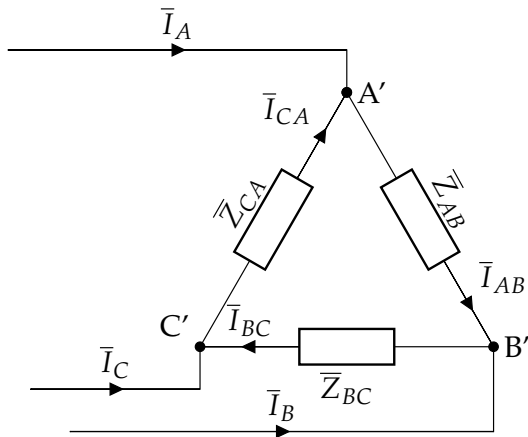
- Podría resolverse el circuito por el **método de las mallas**



Receptor en triángulo desequilibrado



Receptor en triángulo desequilibrado



$$\bar{I}_{AB} = \frac{\bar{U}_{AB}}{\bar{Z}_{AB}}$$

$$\bar{I}_{BC} = \frac{\bar{U}_{BC}}{\bar{Z}_{BC}}$$

$$\bar{I}_{CA} = \frac{\bar{U}_{CA}}{\bar{Z}_{CA}}$$

(cada corriente de fase es **distinta**)

$$\bar{I}_A = \bar{I}_{AB} - \bar{I}_{CA}$$

$$\bar{I}_B = \bar{I}_{BC} - \bar{I}_{AB}$$

$$\bar{I}_C = \bar{I}_{CA} - \bar{I}_{BC}$$

(luego cada corriente de línea es **distinta**)

Resumen

Conexión del receptor	Tensiones	Corrientes
\curvearrowright equilibrado	$\sqrt{3} U_f = U_L$	$I_f = I_L$
\triangle equilibrado	$U_f = U_L$	$\sqrt{3} I_f = I_L$
\curvearrowright desequilibrado, con neutro	$\sqrt{3} U_f = U_L$	Deben calcularse para cada impedancia
\curvearrowright desequilibrado, sin neutro	Resolución por método de las mallas	
\triangle desequilibrado	$U_f = U_L$	Deben calcularse para cada impedancia

Nota: U_f en esta diapositiva se refiere a la tensión en cada fase del receptor (tensión en cada impedancia), **NO** a U_f del **generador en estrella**

Recordatorio del Tema 1: conversión $\star - \triangle$, caso equilibrado

En el caso de receptores estrella/triángulo **equilibrados**...

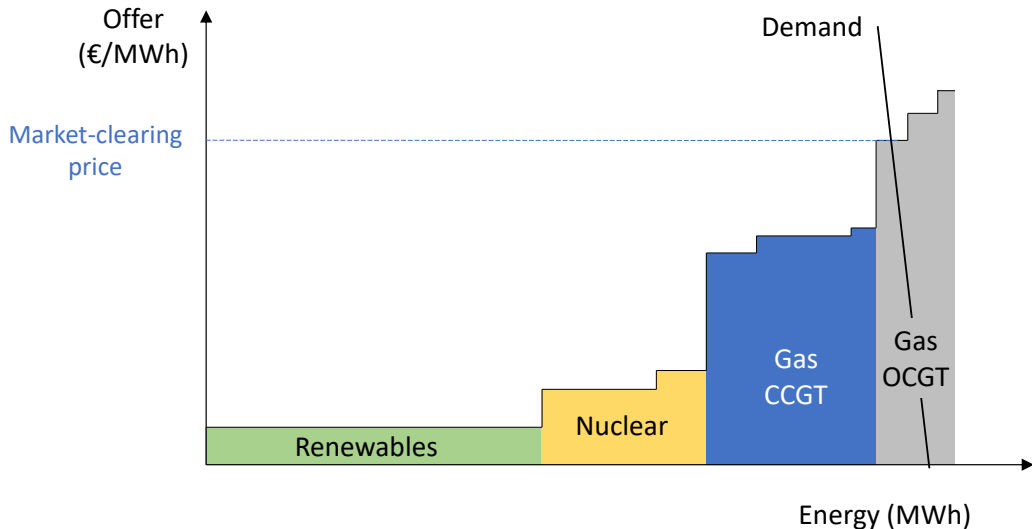
$$\bar{Z}_A = \bar{Z}_B = \bar{Z}_C = \bar{Z}_\star$$

$$\bar{Z}_{AB} = \bar{Z}_{BC} = \bar{Z}_{CA} = \bar{Z}_\triangle$$

...la expresión para **transformar** entre $\star - \triangle$ es:

$$\bar{Z}_\triangle = 3 \cdot \bar{Z}_\star$$

Interludio: mercado mayorista de electricidad



① Generadores

② Receptores

③ **Potencia en sistemas trifásicos**

Potencia instantánea en sistemas equilibrados

Supongamos un **receptor equilibrado** con **SFD** (la deducción es equivalente para SFI):

$$\begin{cases} u_A(t) = \sqrt{2} U_f \cos(\omega t + \pi/2) \\ u_B(t) = \sqrt{2} U_f \cos(\omega t - \pi/6) \\ u_C(t) = \sqrt{2} U_f \cos(\omega t - 5\pi/6) \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_A(t) = \sqrt{2} I_f \cos(\omega t + \pi/2 - \theta) \\ i_B(t) = \sqrt{2} I_f \cos(\omega t - \pi/6 - \theta) \\ i_C(t) = \sqrt{2} I_f \cos(\omega t - 5\pi/6 - \theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_A(t) = u_A(t) \cdot i_A(t) \\ p_B(t) = u_C(t) \cdot i_B(t) \\ p_C(t) = u_C(t) \cdot i_C(t) \end{cases}$$

$$p(t) = p_A(t) + p_B(t) + p_C(t)$$

Potencia instantánea en sistemas equilibrados

$$\begin{aligned} p(t) = & \sqrt{2} U_f \cos(\omega t + \pi/2) \cdot \sqrt{2} I_f \cos(\omega t + \pi/2 - \theta) + \\ & + \sqrt{2} U_f \cos(\omega t - \pi/6) \cdot \sqrt{2} I_f \cos(\omega t - \pi/6 - \theta) + \\ & + \sqrt{2} U_f \cos(\omega t - 5\pi/6) \cdot \sqrt{2} I_f \cos(\omega t - 5\pi/6 - \theta) \end{aligned}$$

Usando la identidad $\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) = \frac{1}{2} \cdot [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$:

$$\begin{aligned} p(t) = & U_f I_f [\cos(2\omega t + \pi - \theta) + \cos(\theta)] + \\ & + U_f I_f [\cos(2\omega t - \pi/3 - \theta) + \cos(\theta)] + \\ & + U_f I_f [\cos(2\omega t - 5\pi/3 - \theta) + \cos(\theta)] \end{aligned}$$

(los términos en gris suman cero, recordad [esta](#) propiedad)

$$p(t) = 3 \cdot U_f \cdot I_f \cdot \cos(\theta) = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L \cdot \cos(\theta)$$

Comparación con un sistema monofásico

En el Tema 2 dedujimos la expresión de la **potencia instantánea** en una **carga monofásica**:

$$\begin{aligned} p(t) &= U \cdot I \cos(\theta) + U \cdot I \cos(\theta) \cos(2\omega t) + U \cdot I \sin(\theta) \sin(2\omega t) = \\ &= P \cdot [1 + \cos(2\omega t)] + Q \cdot \sin(2\omega t) \end{aligned}$$

y calculamos también su valor medio, al que denominamos **potencia activa**:

$$P_m = UI \cos(\theta)$$

Acabamos de deducir que, en un **sistema trifásico**, la **potencia instantánea es constante**:

$$p(t) = 3 \cdot U_f \cdot I_f \cdot \cos(\theta) = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L \cdot \cos(\theta)$$

(y su expresión es proporcional a la potencia media en un sistema monofásico)

Receptor en estrella equilibrado

Por el T^a de **Boucherot**:

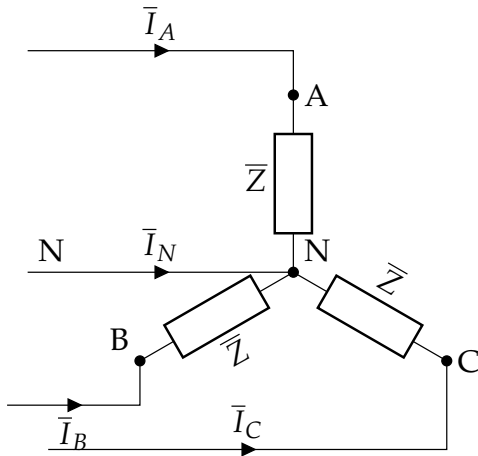
$$P = 3 \cdot P_Z = 3 \cdot U_f \cdot I_f \cdot \cos(\theta)$$

$$Q = 3 \cdot Q_Z = 3 \cdot U_f \cdot I_f \cdot \sin(\theta)$$

Relaciones en conexión \star :

$$I_f = I_L$$

$$U_f = \frac{U_L}{\sqrt{3}}$$



$$P = 3 \cdot U_f \cdot I_f \cdot \cos(\theta) = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L \cdot \cos(\theta)$$

$$Q = 3 \cdot U_f \cdot I_f \cdot \sin(\theta) = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L \cdot \sin(\theta)$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 3 \cdot U_f \cdot I_f = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L$$

Receptor en triángulo equilibrado

Por el T^a de **Boucherot**:

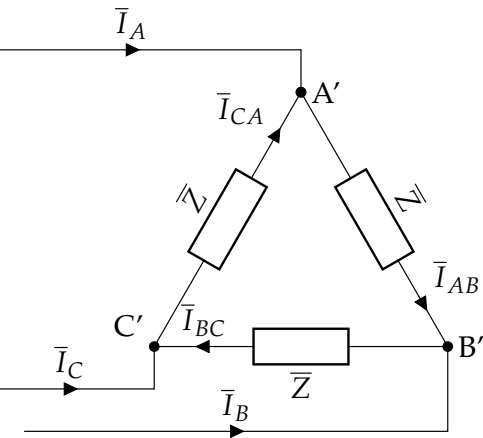
$$P = 3 \cdot P_Z = 3 \cdot U_f \cdot I_f \cdot \cos(\theta)$$

$$Q = 3 \cdot Q_Z = 3 \cdot U_f \cdot I_f \cdot \sin(\theta)$$

Relaciones en conexión Δ :

$$I_f = \frac{I_L}{\sqrt{3}}$$

$$U_f = U_L$$



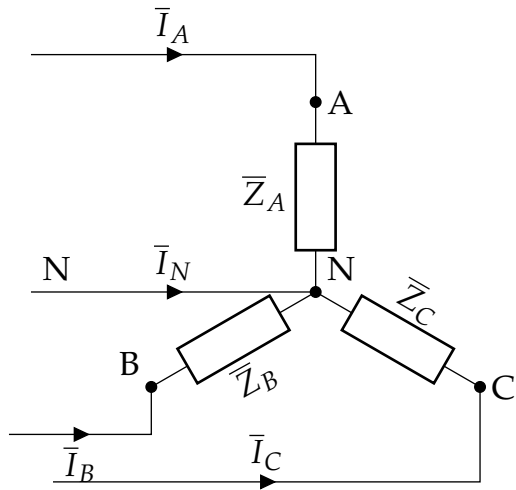
$$P = 3 \cdot U_f \cdot I_f \cdot \cos(\theta) = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L \cdot \cos(\theta)$$

$$Q = 3 \cdot U_f \cdot I_f \cdot \sin(\theta) = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L \cdot \sin(\theta)$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 3 \cdot U_f \cdot I_f = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L$$

(**mismas expresiones** que para \star equilibrado)

Receptor en estrella desequilibrado



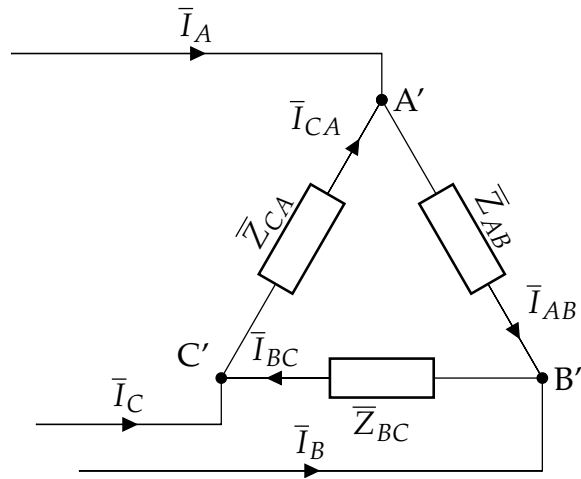
La **potencia** en cada fase puede ser **distinta**, luego hay que calcular cada una y aplicar el T^a de Boucherot:

$$P = P_A + P_B + P_C$$

$$Q = Q_A + Q_B + Q_C$$

$$\bar{S} = P + jQ$$

Receptor en triángulo desequilibrado



La **potencia** en cada fase puede ser **distinta**, luego hay que calcular cada una y aplicar el T^a de Boucherot:

$$P = P_{AB} + P_{BC} + P_{CA}$$

$$Q = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CA}$$

$$\bar{S} = P + jQ$$

Comparativa entre monofásica y trifásica equilibrada

Comparemos un sistema monofásico y un sistema trifásico (a 3 hilos, *i.e.*, sin neutro) que transmiten la **misma potencia activa** y funcionan a la **misma tensión entre líneas**:

$$P_{\text{mono}} = U \cdot I_{\text{mono}} \cdot \cos \theta = P_{\text{tri}} = \sqrt{3} U_L \cdot I_{\text{tri}} \cdot \cos \theta \rightarrow \boxed{I_{\text{mono}} = \sqrt{3} I_{\text{tri}}}$$

Las **pérdidas en la línea** deben ser **iguales** para salvar la **misma distancia**:

$$P_{\text{mono, línea}} = 2 \cdot R_{\text{mono, línea}} \cdot I_{\text{mono}}^2 = P_{\text{tri, líneas}} = 3 \cdot R_{\text{tri, línea}} \cdot I_{\text{tri}}^2$$

Sustituyendo la relación de corrientes y teniendo en cuenta la relación entre resistencia y sección (área):

$$2 \cdot R_{\text{mono, línea}} \cdot (\sqrt{3} I_{\text{tri}})^2 = 3 \cdot R_{\text{tri, línea}} \cdot I_{\text{tri}}^2 \rightarrow R_{\text{mono, línea}} = \frac{1}{2} R_{\text{tri, línea}} \rightarrow \boxed{A_{\text{mono}} = 2 \cdot A_{\text{tri}}}$$

Finalmente, la **relación** entre **masas de conductor** es:

$$\frac{m_{\text{tri}}}{m_{\text{mono}}} = \frac{3 \cdot A_{\text{tri}}}{2 \cdot A_{\text{mono}}} = \frac{3}{4} \rightarrow \boxed{m_{\text{tri}} = 75 \% \cdot m_{\text{mono}}}$$

① Generadores

② Receptores

③ Potencia en sistemas trifásicos

Mejora del factor de potencia

Medida de potencia en sistemas trifásicos

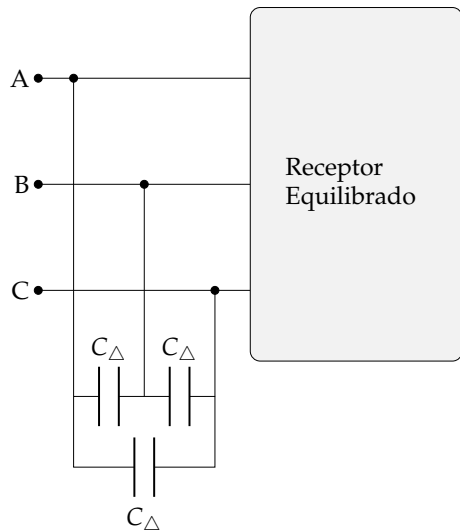
Mejora del factor de potencia

- ▶ Consideremos un **receptor equilibrado inductivo** del que conocemos P , Q y, por tanto, su factor de potencia ' $\cos \theta$ '
- ▶ Para reducir la potencia reactiva del sistema debemos instalar un **banco de condensadores** que suministrarán una potencia reactiva Q_c
- ▶ Como resultado, la **potencia reactiva** y el **f.d.p.** del sistema serán:

$$Q' = Q - Q_c \qquad \cos \theta' > \cos \theta$$

- ▶ En trifásica existen **dos posibilidades**:
 - ▶ Conexión en triángulo: C_{Δ}
 - ▶ Conexión en estrella: C_{Y}

Conexión de condensadores en triángulo



Independientemente de si el receptor está conectado en Y o en Δ :

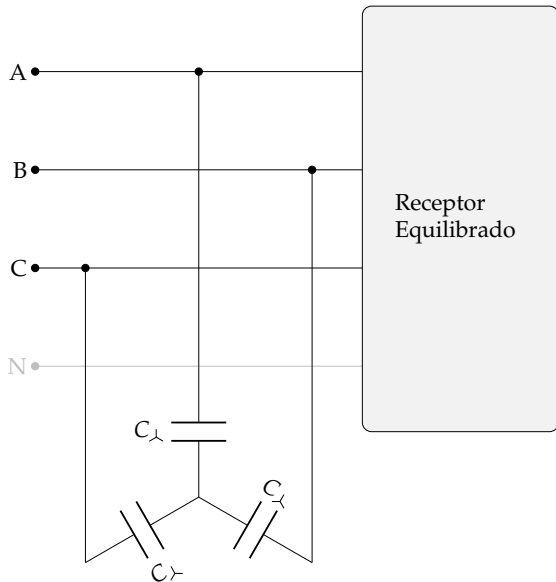
$$Q = P \cdot \tan \theta$$

$$Q' = P \cdot \tan \theta' = Q - Q_c$$

$$Q_c = \underbrace{3}_{\text{Boucherot}} \cdot \omega C_\Delta \cdot \mathbf{U}_L^2$$

$$C_\Delta = \frac{P \cdot (\tan \theta - \tan \theta')}{\mathbf{3} \cdot \omega U_L^2}$$

Conexión de condensadores en estrella



Independientemente de si el receptor está conectado en Y o en Δ :

$$Q = P \cdot \tan \theta$$

$$Q' = P \cdot \tan \theta' = Q - Q_c$$

$$Q_c = \underbrace{3}_{\text{Boucherot}} \cdot \omega C_{\text{Y}} \cdot \mathbf{U_f}^2 = 3 \cdot \omega C_{\text{Y}} \cdot \left(\frac{U_L}{\sqrt{3}} \right)^2$$

$$C_{\text{Y}} = \frac{P \cdot (\tan \theta - \tan \theta')}{\omega U_L^2}$$

(la **capacidad necesaria** en Y es **3 veces mayor** que en Δ)

① Generadores

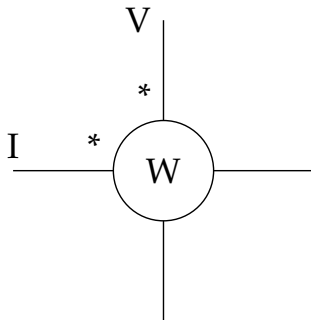
② Receptores

③ Potencia en sistemas trifásicos

Mejora del factor de potencia

Medida de potencia en sistemas trifásicos

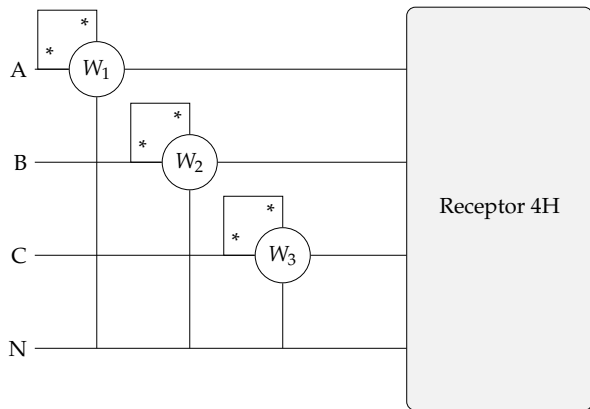
Recordatorio: vatímetro



Equipo de medida de **4 terminales** (un par para tensión, un par para corriente)

$$W = \underbrace{\bar{I} \bullet \bar{U}}_{\text{producto escalar}} = I \cdot U \cdot \cos(\widehat{\bar{I}, \bar{U}}) = \Re(\underbrace{\bar{U} \cdot \bar{I}^*}_{\text{potencia aparente}})$$

Sistema a 4 hilos (4H), caso general



En el caso general, el receptor puede ser **desequilibrado** \rightarrow **potencia distinta** en cada fase

Necesarios **3 vatímetros**, uno por fase:

$$W_1 = \Re(\bar{U}_A \cdot \bar{I}_A^*) = P_A$$

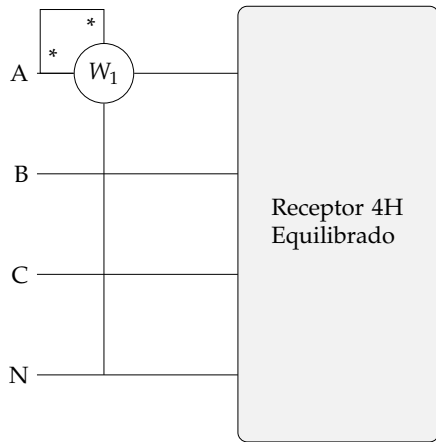
$$W_2 = \Re(\bar{U}_B \cdot \bar{I}_B^*) = P_B$$

$$W_3 = \Re(\bar{U}_C \cdot \bar{I}_C^*) = P_C$$

Por el T^a de **Boucherot**:

$$P = W_1 + W_2 + W_3$$

Sistema a 4 hilos (4H), caso equilibrado



En el caso de un receptor **equilibrado**
→ **misma potencia** en todas las fases

Basta con **1 vatímetro**:

$$P_A = P_B = P_C$$

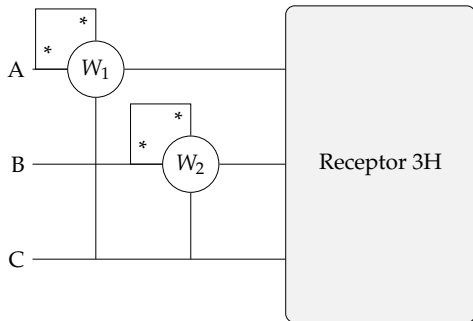
Por el T^a de **Boucherot**:

$$P = 3 \cdot W_1$$

Sistema a 3 hilos (3H)

NO es posible usar **3 vatímetros**, porque no es posible medir P en cada Z **por separado**:

- ▶ Si el **receptor** está conectado en \curvearrowright : no es posible medir la **tensión de fase**
- ▶ Si el **receptor** está conectado en \triangle : no es posible medir la **corriente de fase**



Pero **existe un método** para medida de potencia en sistemas a 3 hilos

- ▶ Válido tanto para receptores en \curvearrowright como en \triangle , equilibrados o desequilibrados

El “método de los **2 vatímetros**”,
o “montaje de **Aron**”

$$P = W_1 + W_2$$

(demostración a continuación)

Método de los 2 vatímetros: demostración

Para un **receptor** en Δ (sin asumir que sea necesariamente equilibrado)

Potencia total en el receptor:

$$\bar{S} = \bar{S}_A + \bar{S}_B + \bar{S}_C = \bar{U}_A \cdot \bar{I}_A^* + \bar{U}_B \cdot \bar{I}_B^* + \bar{U}_C \cdot \bar{I}_C^*$$

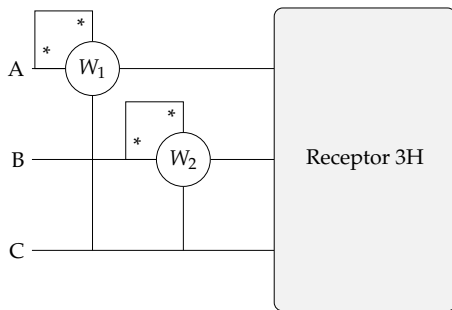
Al no haber conductor neutro (**3 hilos**), por **1LK** en el punto común de la Δ :

$$\bar{I}_A + \bar{I}_B + \bar{I}_C = 0 \quad \rightarrow \quad \bar{I}_C = -(\bar{I}_A + \bar{I}_B)$$

Sustituyendo en la 1ª expresión y agrupando términos:

$$\bar{S} = \bar{U}_{AC} \cdot \bar{I}_A^* + \bar{U}_{BC} \cdot \bar{I}_B^*$$

$$P = \Re(\bar{U}_{AC} \cdot \bar{I}_A^* + \bar{U}_{BC} \cdot \bar{I}_B^*) = \boxed{W_1 + W_2}$$



Método de los 2 vatímetros: demostración

Para un **receptor** en \triangle (sin asumir que sea necesariamente equilibrado)

$$\text{Potencia total} \rightarrow \bar{S} = \bar{S}_{AB} + \bar{S}_{BC} + \bar{S}_{CA} = \bar{U}_{AB} \cdot \bar{I}_{AB}^* + \bar{U}_{BC} \cdot \bar{I}_{BC}^* + \bar{U}_{CA} \cdot \bar{I}_{CA}^*$$

Aplicando **2LK** en el \triangle del **receptor**:

$$\bar{U}_{AB} + \bar{U}_{BC} + \bar{U}_{CA} = 0 \rightarrow \bar{U}_{AB} = -(\bar{U}_{BC} + \bar{U}_{CA})$$

y aplicando **1LK** en los nudos del **receptor**:

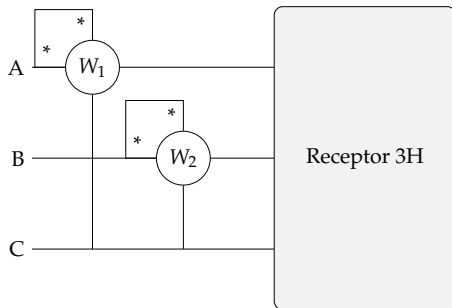
$$\bar{I}_{CA} = \bar{I}_{AB} - \bar{I}_A, \quad \bar{I}_{BC} = \bar{I}_B + \bar{I}_{AB}$$

Sustituyendo en la 1ª expresión y agrupando:

$$\bar{S} = \bar{U}_{AC} \cdot \bar{I}_A^* + \bar{U}_{BC} \cdot \bar{I}_B^*$$

$$P = \Re(\bar{U}_{AC} \cdot \bar{I}_A^* + \bar{U}_{BC} \cdot \bar{I}_B^*) = \boxed{W_1 + W_2}$$

(**mismo resultado** que en \triangle)

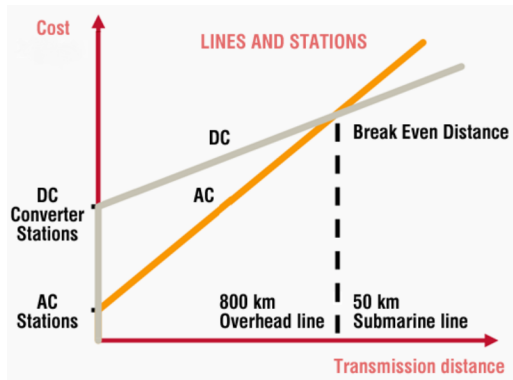


Resumen, medida de potencia en sistemas trifásicos

Conexión del receptor	Nº de vatímetros necesarios
\swarrow a 4 hilos (con neutro), equilibrado	1
\swarrow a 4 hilos (con neutro), desequilibrado	3
\swarrow a 3 hilos (sin neutro), equilibrado o desequilibrado	2 (montaje de Aron)
\triangle equilibrado o desequilibrado , (\triangle implica 3 hilos)	2 (montaje de Aron)

Interludio: corriente continua de alta tensión (HVDC)

- Más **económica** que corriente alterna para **largas distancias** o **cables submarinos**

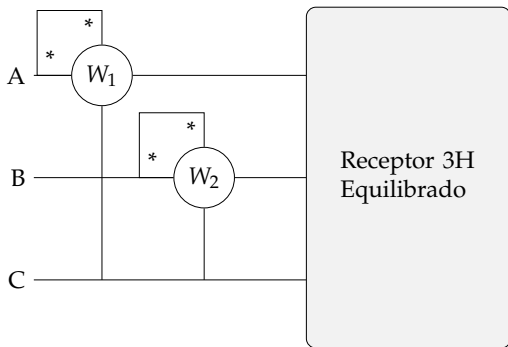


- Proyecto **Xlinks**:
3.800 km de cables submarinos HVDC

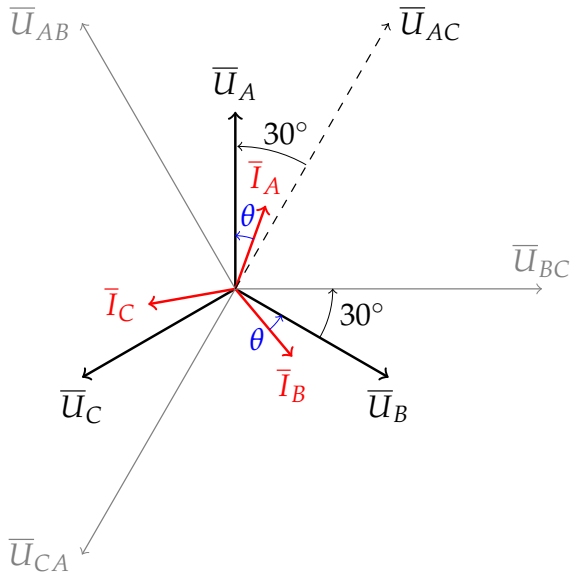


Método de los 2 vatímetros, caso particular: receptor equilibrado

- ▶ En el caso particular de un **receptor equilibrado**, el método de los 2 vatímetros aporta **información adicional** → también permite medir **potencia reactiva**
- ▶ Para demostrarlo, consideramos un **receptor** de carácter **inductivo**, tanto en **SFD** como en **SFI** (ver siguientes 2 diapositivas)



Método de los 2 vatímetros: receptor equilibrado, SFD



$$W_1 = \bar{U}_{AC} \bullet \bar{I}_A = U_L \cdot I_L \cdot \underbrace{\cos(30^\circ - \theta)}_{\text{ver gráfico}}$$

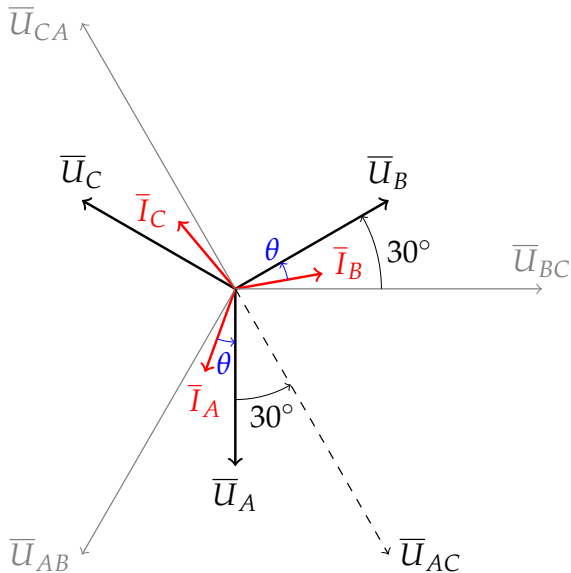
$$W_2 = \bar{U}_{BC} \bullet \bar{I}_B = U_L \cdot I_L \cdot \underbrace{\cos(30^\circ + \theta)}_{\text{ver gráfico}}$$

Usando $\cos(\alpha - \beta)$ se llega a:

$$W_1 + W_2 = \sqrt{3} U_L I_L \cos \theta = P$$

$$W_1 - W_2 = U_L I_L \sin \theta = \frac{Q}{\sqrt{3}}$$

Método de los 2 vatímetros: receptor equilibrado, SFI



Los únicos **cambios** para **SFI** son:

$$W_1 = \overline{U}_{AC} \bullet \overline{I}_A = U_L \cdot I_L \cdot \overbrace{\cos(30^\circ + \theta)}^{\text{ver gráfico}}$$

$$W_2 = \overline{U}_{BC} \bullet \overline{I}_B = U_L \cdot I_L \cdot \underbrace{\cos(30^\circ - \theta)}_{\text{ver gráfico}}$$

Usando $\cos(\alpha - \beta)$ se llega a:

$$W_1 + W_2 = \sqrt{3} U_L I_L \cos \theta = P$$

$$W_1 - W_2 = - U_L I_L \sin \theta = - \frac{Q}{\sqrt{3}}$$

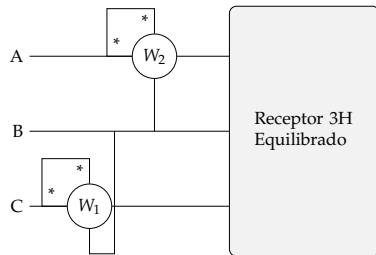
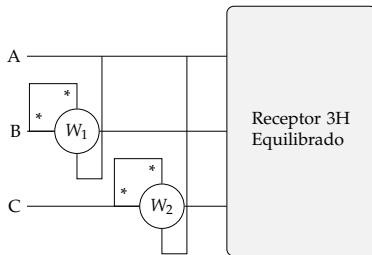
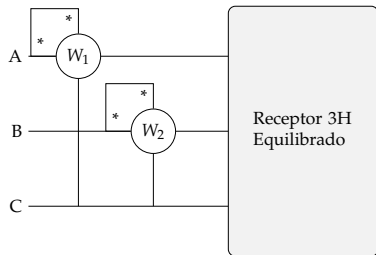
Método de los 2 vatímetros: receptor equilibrado, otras conexiones

Aunque hasta ahora hemos considerado que W_1 mide la tensión U_{AC} y W_2 la tensión U_{BC} , existen **3 posibilidades de conexión** para el método de los 2 vatímetros

Para aplicar las expresiones ya vistas para P y Q en cualquier conexión, usamos esta **regla mnemotécnica**:

- ▶ W_1 mide una **tensión que \notin** a la secuencia de fases
- ▶ W_2 mide una **tensión que \in** a la secuencia de fases

(en las 2 siguientes diapositivas se define cuándo una tensión “pertenece” a la secuencia de fases)



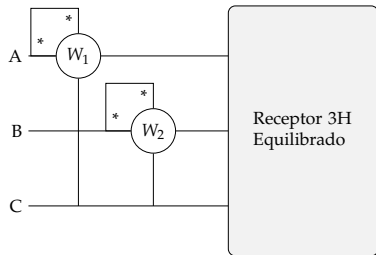
Otras conexiones de vatímetros, SFD

La tensiones que “pertenecen” a **SFD** son:

$$(ABC) : A \triangleright B \triangleright C \implies \{AB, BC, CA\}$$

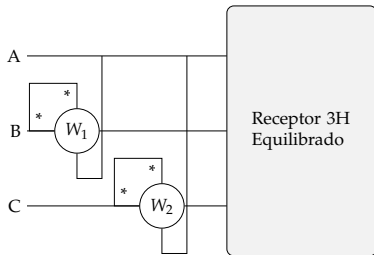
$$P = W_1 + W_2$$

$$Q = \sqrt{3} (W_1 - W_2)$$



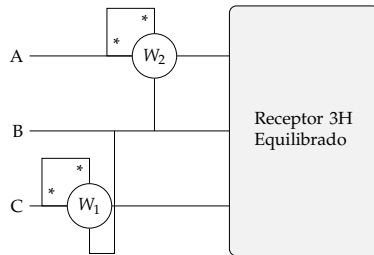
$W_1 : AC \notin \text{SFD}$

$W_2 : BC \in \text{SFD}$



$W_1 : BA \notin \text{SFD}$

$W_2 : CA \in \text{SFD}$



$W_1 : CB \notin \text{SFD}$

$W_2 : AB \in \text{SFD}$

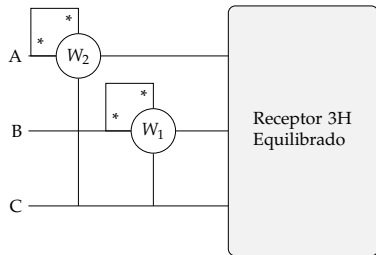
Otras conexiones de vatímetros, SFI

La tensiones que “pertenecen” a **SFI** son:

$$(ACB) : A \triangleright C \triangleright B \implies \{AC, CB, BA\}$$

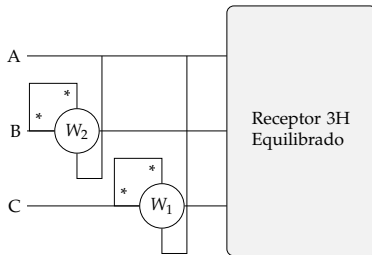
$$P = W_1 + W_2$$

$$Q = \sqrt{3} (W_1 - W_2)$$



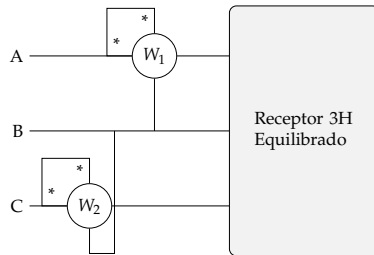
$W_1 : BC \notin \text{SFI}$

$W_2 : AC \in \text{SFI}$



$W_1 : CA \notin \text{SFI}$

$W_2 : BA \in \text{SFI}$

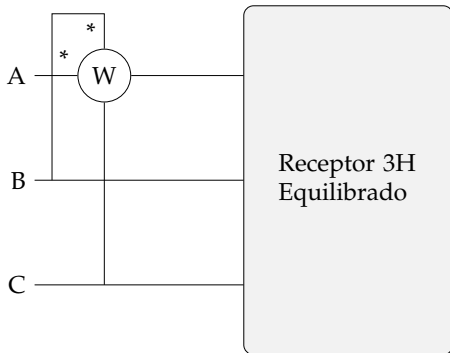


$W_1 : AB \notin \text{SFI}$

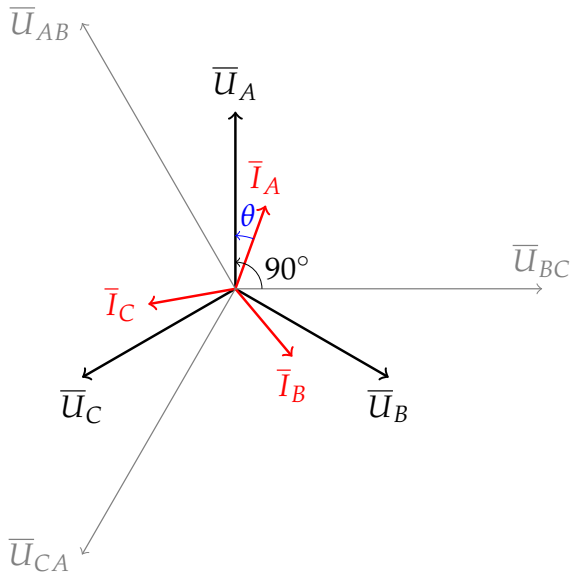
$W_2 : CB \in \text{SFI}$

Medida de reactiva con 1 vatímetro (sistemas equilibrados)

- ▶ En el caso particular de un **receptor equilibrado** a 3 hilos, también es posible medir **potencia reactiva** con un único vatímetro
- ▶ Para demostrarlo, consideramos un **receptor** de carácter **inductivo**, tanto en **SFD** como en **SFI** (ver siguientes 2 diapositivas)



Medida de reactiva con 1 vatímetro, SFD

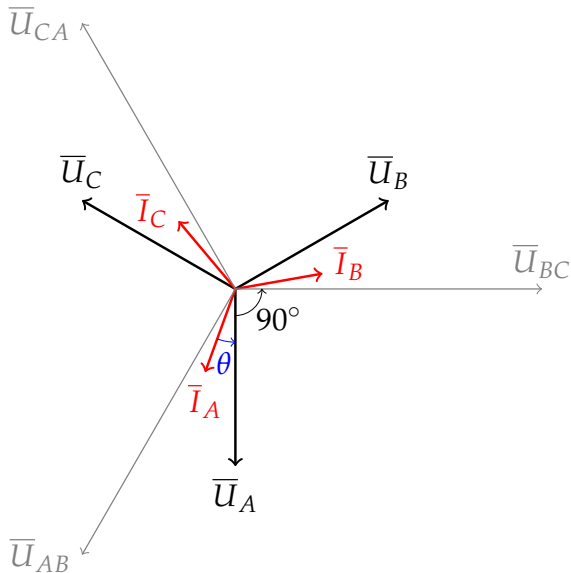


$$W = \bar{U}_{BC} \bullet \bar{I}_A = U_L \cdot I_L \cdot \overbrace{\cos(90^\circ - \theta)}^{\text{ver gráfico}}$$

Usando $\cos(\alpha - \beta)$ se llega a:

$$W = U_L I_L \sin \theta = \frac{Q}{\sqrt{3}}$$

Medida de reactiva con 1 vatímetro, SFI



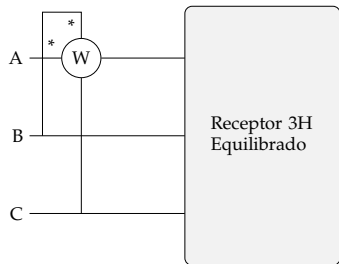
El único **cambio** para **SFI** es:

$$W = \bar{U}_{BC} \bullet \bar{I}_A = U_L \cdot I_L \cdot \overbrace{\cos(90^\circ + \theta)}^{\text{ver gráfico}}$$

Usando $\cos(\alpha - \beta)$ se llega a:

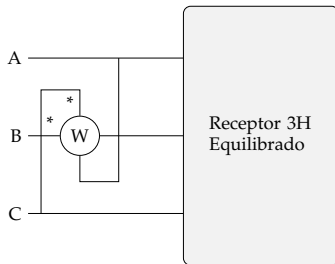
$$W = - U_L I_L \sin \theta = - \frac{Q}{\sqrt{3}}$$

Medida de reactiva con 1 vatímetro, otras conexiones



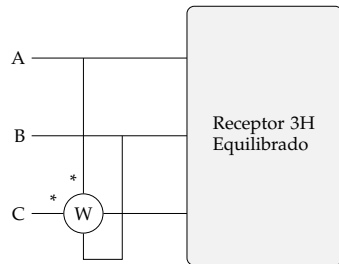
$BC \in \text{SFD}$

$BC \notin \text{SFI}$



$CA \in \text{SFD}$

$CA \notin \text{SFI}$



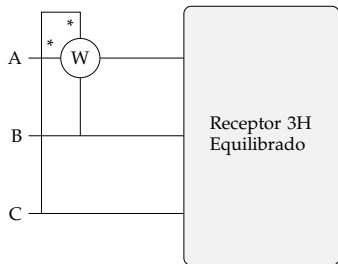
$AB \in \text{SFD}$

$AB \notin \text{SFI}$

$$\text{SFD} \rightarrow \boxed{W = \frac{Q}{\sqrt{3}}}$$

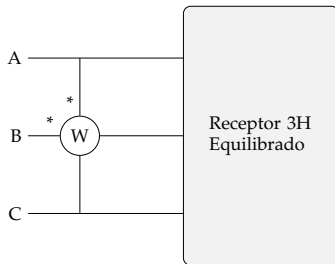
$$\text{SFI} \rightarrow \boxed{W = -\frac{Q}{\sqrt{3}}}$$

Medida de reactiva con 1 vatímetro, otras conexiones



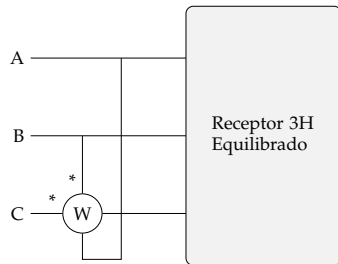
$CB \notin \text{SFD}$

$CB \in \text{SFI}$



$AC \notin \text{SFD}$

$AC \in \text{SFI}$



$BA \notin \text{SFD}$

$BA \in \text{SFI}$

$$\text{SFD} \rightarrow W = - \frac{Q}{\sqrt{3}}$$

$$\text{SFI} \rightarrow W = \frac{Q}{\sqrt{3}}$$

Resumen, potencia en receptores equilibrados a 3 hilos

Método de los **2 vatímetros** (o “montaje de Aron”)

- ▶ Permite medir P y $\frac{Q}{\sqrt{3}}$ (importante recordar el factor $\sqrt{3}$ en Q)
- ▶ **Cuidado** con el **signo** de Q :
depende de la **conexión** de los vatímetros y de la **secuencia de fases** (SFD o SFI)
(regla mnemotécnica [aquí](#))

Medida de **reactiva** con **1 vatímetro**

- ▶ Debe medir **una corriente de línea** y la **tensión entre las otras dos** líneas
- ▶ Importante recordar el factor $\sqrt{3}$ en Q
- ▶ **Cuidado** con el **signo** de Q :
depende de la **conexión** y de la **secuencia de fases** (ver diapositivas [69](#) y [70](#))