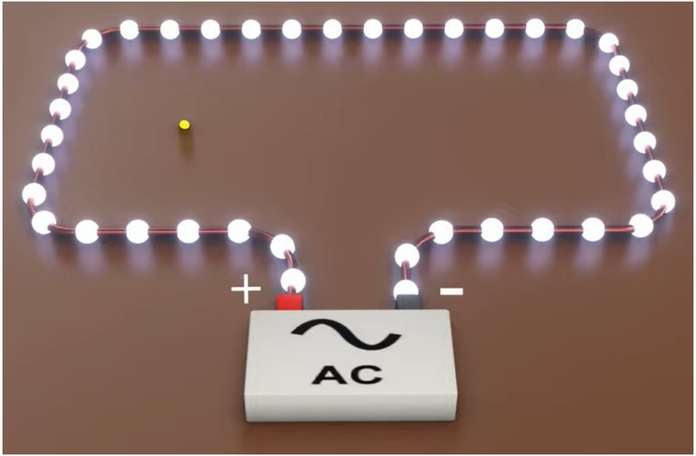
Corriente alterna senoidal

Teoría de Circuitos

Autor: Luis Badesa Bernardo

(basado en las diapositivas de Óscar Perpiñán Lamigueiro)

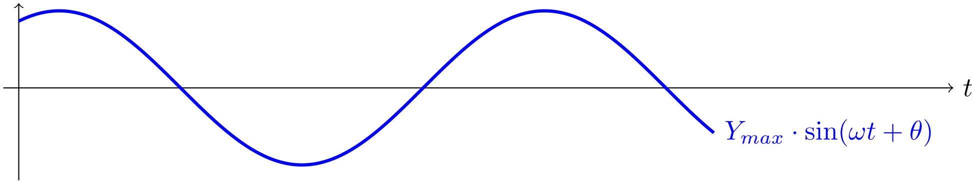
(clica en la imagen)



1. Formas de onda
2. Onda senoidal
3. Cálculo fasorial
4. Respuesta de elementos pasivos a excitación senoidal (R, L y C)
5. Potencia en corriente alterna

Forma de onda

- La salida de los generadores (de tensión o de corriente) es una función que puede variar con el tiempo
- La dependencia funcional $u = u(t)$ o $i = i(t)$ se denomina forma de onda
- En este Tema 2 vamos a centrarnos en **formas de onda periódicas** (su valor se repite a intervalos regulares) y, en concreto, en **señales senoidales**



Formas de onda periódicas

$$\boxed{y(t) = y(t+T) = y(t+n\cdot T)}$$

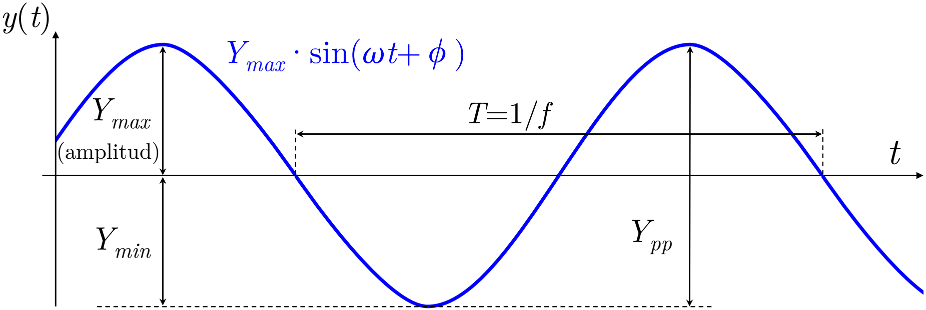
donde $n \in \mathbb{Z}$ (número entero)

- **Periodo (T)**: intervalo de tiempo a partir del cual se repite la forma de onda [s]
- **Frecuencia (f)**: número de repeticiones de la onda por unidad de tiempo [Hz]

$$f = \frac{1}{T}$$

Formas de onda periódicas

- Caso particular: **función senoidal** (señal centrada)



Formas de onda periódicas: valores característicos

- **Valor medio (Y_m)**: media aritmética de los valores instantáneos que toma la función en un periodo (o semiperiodo, o cuarto de periodo)

$$\boxed{Y_m = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} y(t)\,dt}$$

- **Valor eficaz (Y_{ef})**: raíz cuadrada de la media de los cuadrados de los valores que toma la función en un periodo

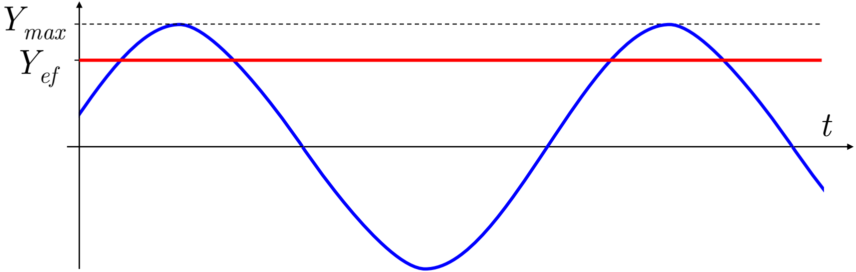
$$\boxed{Y_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T}\cdot\int_a^{a+T} y^2(t)\,dt}}$$

También denominado "valor RMS", del inglés *root mean square*

El valor eficaz es de especial interés en teoría de circuitos para **cálculos relacionados con la potencia**, como veremos más adelante

Formas de onda periódicas: valor eficaz

- Caso particular: valor eficaz de una onda senoidal

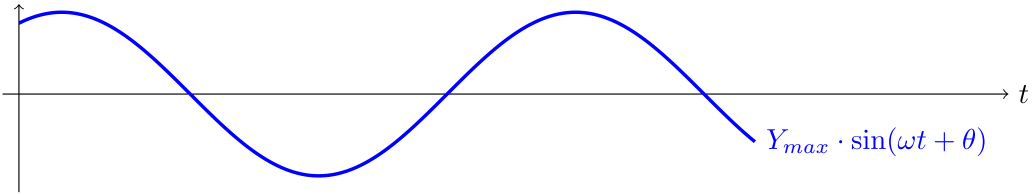


$$Y_{ef} = \frac{Y_{max}}{\sqrt{2}}$$

- ¿Por qué usamos el valor eficaz en corriente alterna? Porque establece un **paralelismo con la corriente continua**, que nos permitirá simplificar cálculos:

  El valor eficaz es igual al valor de una corriente continua constante que, al circular por una determinada resistencia, **produciría la misma disipación de** potencia que la corriente alterna que estamos considerando

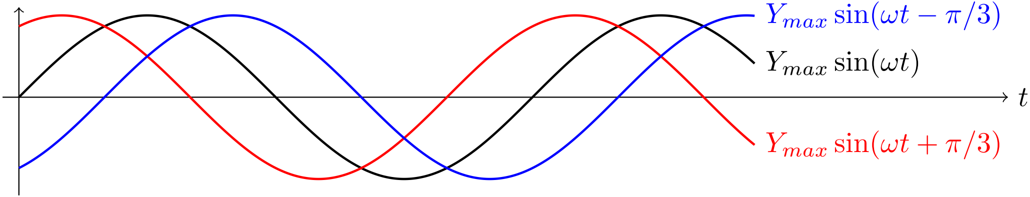
Onda senoidal, definición



$$y(t) = Y_o \cdot \sin(\omega \cdot t + \theta)$$

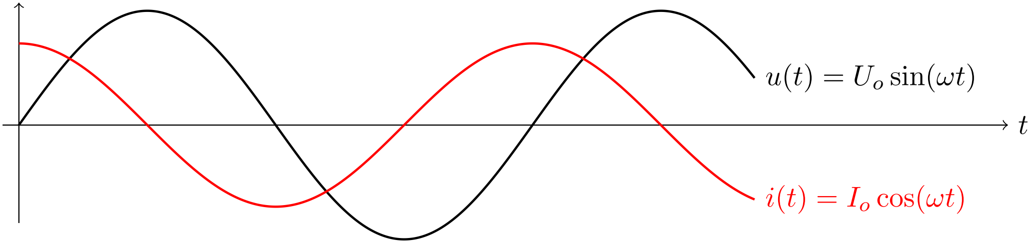
- $\boldsymbol{Y_{max}}$ o $\boldsymbol{Y_o}$: valor máximo de la onda
- $\boldsymbol{T}$: periodo de la onda (segundos)
- $\boldsymbol{\omega} = \frac{2\pi}{T}$: pulsación (rad/s)
- $\boldsymbol{f} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T}$: frecuencia (Hz)
- $\boldsymbol{\theta}$: fase (radianes o grados). También suelen usarse las letras griegas ϕ y φ

Fase



- Es el argumento de la función senoidal para $t = 0$
- Tomando una onda como referencia, si la **fase de otra onda es de 0º**, está **en fase** con la de referencia
- Si la **fase es positiva**, la onda **adelanta** a la referencia
- Si la **fase es negativa**, la onda **retrasa** a la referencia

Señales en cuadratura



- Cuando el **desfase entre dos señales es de 90º** ($\theta_I - \theta_U = \pi/2$), se dice que están en **cuadratura**
- El paso por cero de una señal coincide con el paso por el máximo/mínimo de la otra señal

Valor medio y valor eficaz de una onda senoidal

Valor medio

En un periodo:

$$Y_m = \frac{1}{\boldsymbol{T}} \int_0^{\boldsymbol{T}} y(t)\, dt = \frac{1}{T} \int_0^T Y_o \cdot \sin(\omega \cdot t + \theta)\, dt = \boxed{\mathbf{0}}$$

En un semiperiodo positivo ($\theta = 0°$):

$$Y_m = \frac{1}{\boldsymbol{T/2}} \int_0^{\boldsymbol{T/2}} Y_{max} \cdot \sin(\omega \cdot t)\, dt = \frac{2 \cdot Y_{max}}{\pi} \approx 0,637 \cdot Y_{max}$$

Valor eficaz

$$Y_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T y^2(t)\, dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T [Y_{max} \cdot \sin(\omega \cdot t + \theta)]^2\, dt} = \boxed{\frac{\boldsymbol{Y_{max}}}{\sqrt{\mathbf{2}}}}$$

Interludio: *Alternating Current ϟ Direct Current*

1. Formas de onda
2. Onda senoidal
3. Cálculo fasorial
4. Respuesta de elementos pasivos a excitación senoidal (R, L y C)
5. Potencia en corriente alterna

Recordatorio de 1LK

- La **1LK** es el principio de **conservación de la carga** aplicado a los circuitos eléctricos:

  La suma de las corrientes que llegan a un nudo es igual a la suma de las que salen

  $$\boxed{\sum_{j=1}^{n} i_j(t) = 0}$$

  La conservación de la carga **aplica a cada instante**, luego 1LK también **aplica en corriente alterna**

Por lo tanto, vamos a sumar corrientes senoidales a menudo en este tema, para lo cual será muy útil el **cálculo fasorial**

Recordatorio de 2LK

- La **2LK** es el principio de **conservación de la energía** aplicado a los circuitos:

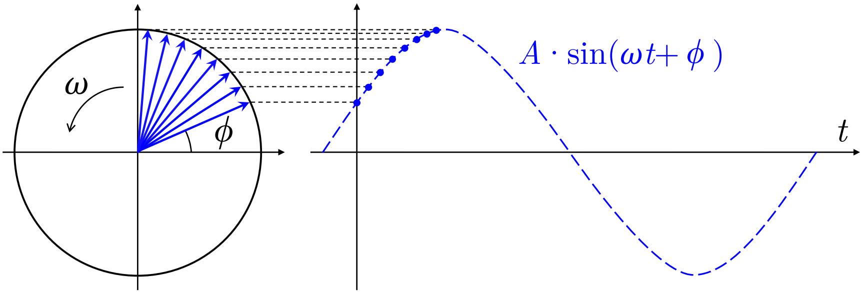
  La suma (con signo) de las tensiones a lo largo de un camino cerrado es cero

  $$\boxed{\sum_{j=1}^{m} u_j(t) = 0}$$

  La conservación de la energía **aplica a cada instante** $\rightarrow$ 2LK también **aplica en corriente alterna**

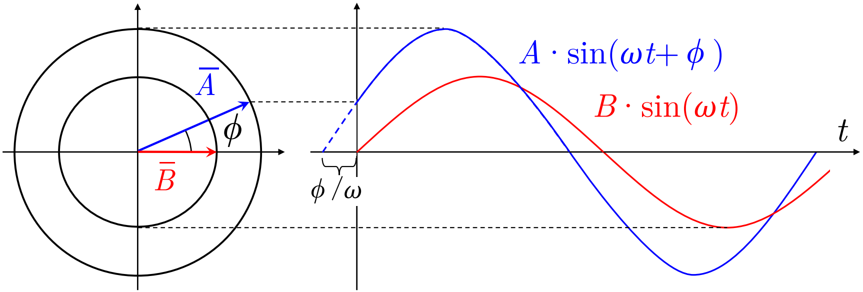
Vamos a sumar tensiones senoidales a menudo en este tema $\rightarrow$ será muy útil el **cálculo fasorial**

Representación fasorial



- Un **fasor** es un artefacto matemático **útil para simplificar cálculos** con señales senoidales
- El término "fasor" viene del inglés *phasor*, forma corta de *phase vector* (vector de fase)
- Al **rotar en sentido antihorario** con velocidad angular ω, la proyección del fasor sobre el eje vertical es igual al valor de la señal senoidal en cada instante .

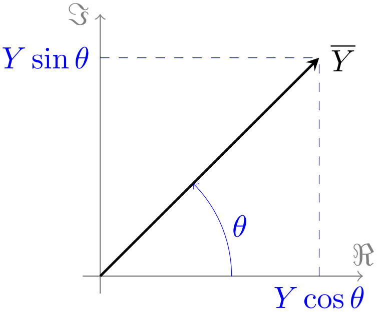
Representación fasorial



- Una señal senoidal **se representa mediante un único fasor**
- Para definir el fasor correspondiente a cada señal, tomamos como origen de fases una de las señales presentes en el circuito (*e.g.*, la tensión en bornes de una fuente)

Representación fasorial

- Un fasor se representa matemáticamente mediante un **número complejo** (repaso de complejos y trigonometría):



$$\overline{Y} = \underbrace{Y_{ef}\underline{/\theta}}_{\substack{\text{forma}\\\text{polar}}} = \underbrace{Y_{ef}\cdot[\cos(\theta)+j\cdot\sin(\theta)]}_{\text{forma binómica}} \overset{\substack{\text{fórmula}\\\text{de Euler}\\\downarrow}}{=} \underbrace{Y_{ef}\cdot e^{j\theta}}_{\substack{\text{forma}\\\text{exponencial}}}$$

  Usamos ***j* para la constante imaginaria**, en lugar de i, ya que en el análisis de circuitos i se usa para intensidad

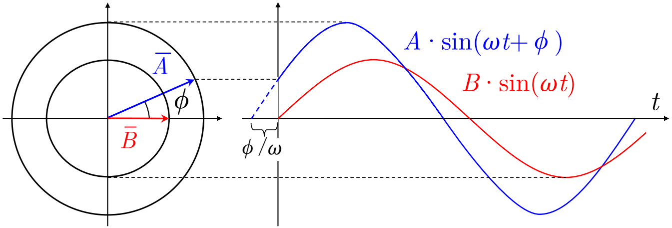
- El **argumento** del fasor es la **fase** de la onda. El **módulo** es el **valor eficaz** de la onda, NO su amplitud

Representación fasorial

- El **argumento** del fasor es la **fase** de la onda. El **módulo** es el **valor eficaz** de la onda, NO su amplitud

  Se toma el valor eficaz por **conveniencia** a la hora de **calcular la potencia producida** o **consumida** en circuitos de corriente alterna, directamente operando con fasores

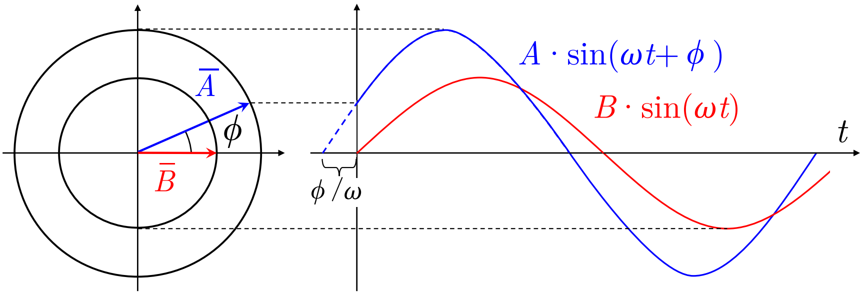
Nota: en varios gráficos de estas diapositivas, el módulo de los fasores corresponde a la amplitud de la onda, y no a su valor eficaz
Esto se debe simplemente a claridad en la representación gráfica



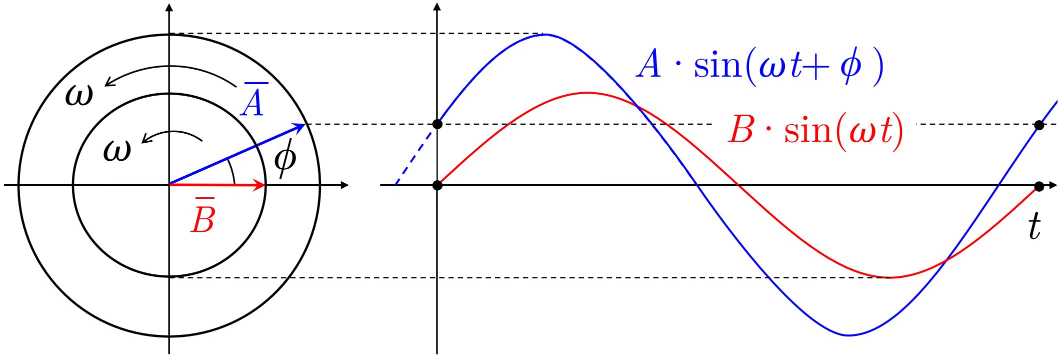
Representación fasorial

- Los fasores representan las **relaciones** entre los **valores eficaces** y las **fases** de las distintas señales presentes en el circuito, siempre asumiendo una frecuencia determinada

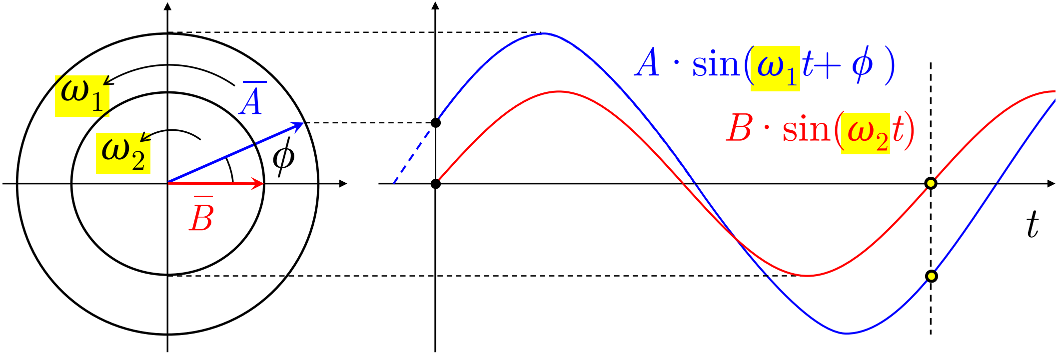
- Por lo tanto, las operaciones con fasores solo son **válidas** entre **señales de la misma frecuencia**



Importante: el cálculo fasorial es válido para señales de igual ω



...pero NO para señales de distinta frecuencia ($\omega_1 \neq \omega_2$)



Cálculo fasorial: ¿por qué funciona?

Las razones por las que podemos usar cálculo fasorial para **simplificar operaciones** entre señales senoidales son **dos propiedades importantes** de la función senoidal:

- $$\boxed{A_1 \cdot \sin(\omega t + \theta_1) \; + \; A_2 \cdot \sin(\omega t + \theta_2) \; = \; A_3 \cdot \sin(\omega t + \theta_3)}$$

  Para **sumar señales senoidales**, podemos simplemente **sumar sus fasores correspondientes** (recuerda que 1LK y 2LK implican sumas)

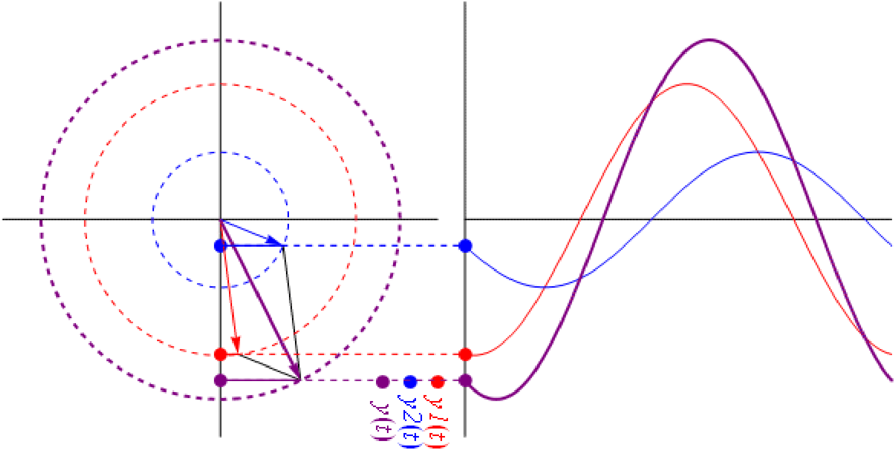
- $$\boxed{\frac{d^n \sin(\omega t + \theta_1)}{dt^n} = C_2 \sin(\omega t + \theta_2) \;\; , \quad \int \cdots \int \sin(\omega t + \theta_1)\, dt \cdots dt = C_3 \sin(\omega t + \theta_3) + k}$$

  Las **tensiones** y **corrientes** en **bobinas** y **condensadores** (cuyas ecuaciones de definición contienen derivadas e integrales de estas magnitudes), pueden expresarse mediante **fasores**

Operaciones con fasores

Suma gráfica de dos fasores $\overline{Y}_1$ e $\overline{Y}_2$, y sus correspondientes señales temporales:

(**clica en la imagen**)



Operaciones con fasores

- Un fasor **captura** la **información clave** de una **onda senoidal** para los propósitos del análisis de circuitos:
  - Su valor eficaz
  - Y su fase
- Nos permite **operar** con ondas **senoidales** como si fueran **números complejos**

$$
\begin{aligned}
\overline{Y}_1 &= \underbrace{Y_{ef_1}\cos(\theta_1)}_{a_1} + \mathrm{j}\,\underbrace{Y_{ef_1}\sin(\theta_1)}_{b_1} &= Y_{ef_1}\underline{/\theta_1} \\
\overline{Y}_2 &= \underbrace{Y_{ef_2}\cos(\theta_2)}_{a_2} + \mathrm{j}\,\underbrace{Y_{ef_2}\sin(\theta_2)}_{b_2} &= Y_{ef_2}\underline{/\theta_2}
\end{aligned}
$$

Operaciones con fasores

$$\overline{Y}_1 = \underbrace{Y_{ef_1}\cos(\theta_1)}_{a_1} + \mathrm{j}\,\underbrace{Y_{ef_1}\sin(\theta_1)}_{b_1} = Y_{ef_1}\underline{/\theta_1}$$

$$\overline{Y}_2 = \underbrace{Y_{ef_2}\cos(\theta_2)}_{a_2} + \mathrm{j}\,\underbrace{Y_{ef_2}\sin(\theta_2)}_{b_2} = Y_{ef_2}\underline{/\theta_2}$$

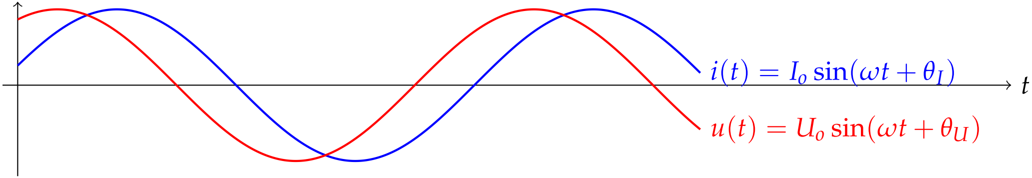
Forma binómica

- Suma: $\overline{Y}_1 + \overline{Y}_2 = (a_1 + a_2) + \mathrm{j}\,(b_1 + b_2)$
- Resta: $\overline{Y}_1 - \overline{Y}_2 = (a_1 - a_2) + \mathrm{j}\,(b_1 - b_2)$

Forma polar

- Multiplicación: $\overline{Y}_1 \cdot \overline{Y}_2 = (Y_{ef_1} \cdot Y_{ef_2})\underline{/\theta_1 + \theta_2}$
- División: $\dfrac{\overline{Y}_1}{\overline{Y}_2} = \dfrac{Y_{ef_1}}{Y_{ef_2}}\underline{/\theta_1 - \theta_2}$

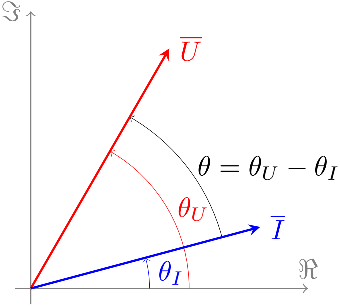
Impedancia: relación entre fasores de tensión y corriente



$\overline{U} = \overline{Z} \cdot \overline{I}$ (**ley de Ohm** generalizada)

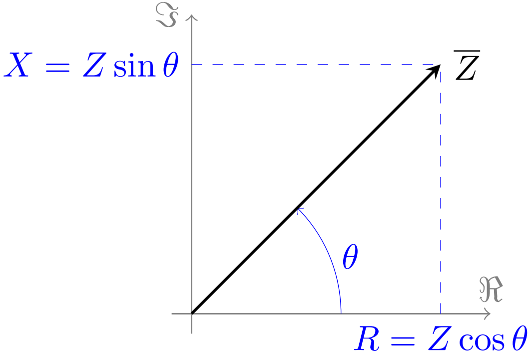
$$\overline{Z} = \frac{\overline{U}}{\overline{I}}$$

$$\boxed{\overline{Z} = \frac{U}{I}\underline{/\theta_U - \theta_I} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} Z = \dfrac{U}{I} \\ \theta = \theta_U - \theta_I \end{cases}}$$



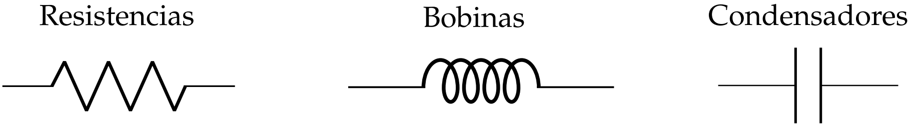
Impedancia genérica

$$\overline{Z} \;=\; Z\cdot\cos(\theta) \;+\; \mathrm{j}\,Z\cdot\sin(\theta) \;=\; \underbrace{R}_{\text{resistencia}} + \mathrm{j}\underbrace{X}_{\text{reactancia}}$$



Impedancia de elementos ideales

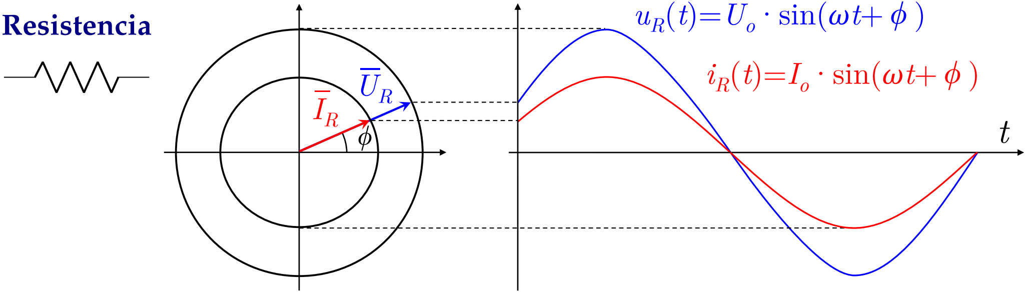
Vamos a deducir la impedancia de circuitos compuestos únicamente por:



1. Haremos circular una **corriente senoidal** por cada circuito
2. Calcularemos la **tensión** que se produce en bornes del circuito, usando la **ec. de definición** de cada elemento
3. El **cociente de los fasores** de tensión y corriente da la **impedancia** del circuito

Circuito resistivo

Un circuito resistivo no introduce desfase entre señales (**tensión y corriente <u>en fase</u>**)



$$i_R(t) = \boldsymbol{I\sqrt{2}} \cdot \sin(\omega t + \boldsymbol{\phi})$$

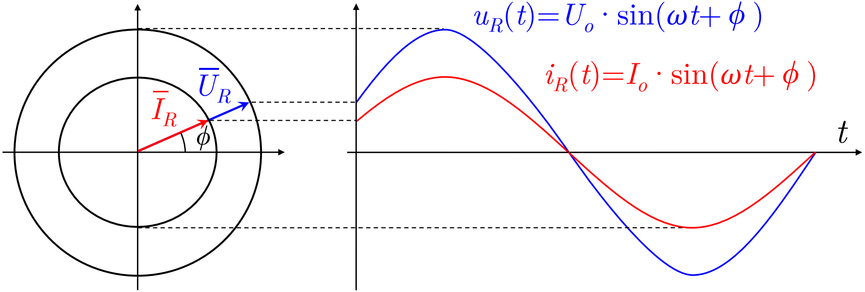
$$u_R(t) \overset{\text{ley de Ohm}}{=} R \cdot i(t) = \boldsymbol{R \cdot I\sqrt{2}} \cdot \sin(\omega t + \boldsymbol{\phi}) = \boldsymbol{U\sqrt{2}} \cdot \sin(\omega t + \boldsymbol{\phi})$$

(a partir de ahora, la notación ‘$\boldsymbol{U}$’ e ‘$\boldsymbol{I}$’ se refiere directamente a **valores eficaces**)

Circuito resistivo

Un circuito resistivo no introduce desfase entre señales (**tensión y corriente <u>en fase</u>**)

Resistencia



$$\overline{Z}_R = \frac{\overline{U}_R}{\overline{I}_R} = \frac{U}{I} \underline{/\phi_U - \phi_I} = R\underline{/0^\circ} \quad \rightarrow \quad \boxed{\overline{Z}_R = R + \mathrm{j}\,0 = R}$$

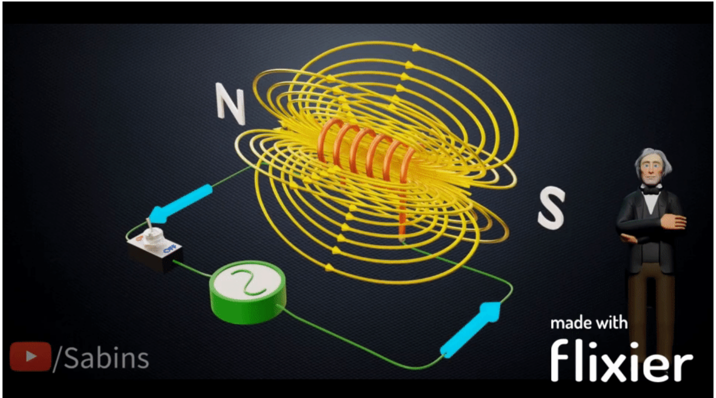
Carga y descarga de una bobina

- La bobina **almacena** energía magnética cuando circula por ella una corriente

$$E_L = \frac{1}{2} \cdot L \cdot i_L^2(t)$$

En **corriente alterna**, la bobina se **carga y descarga** constantemente

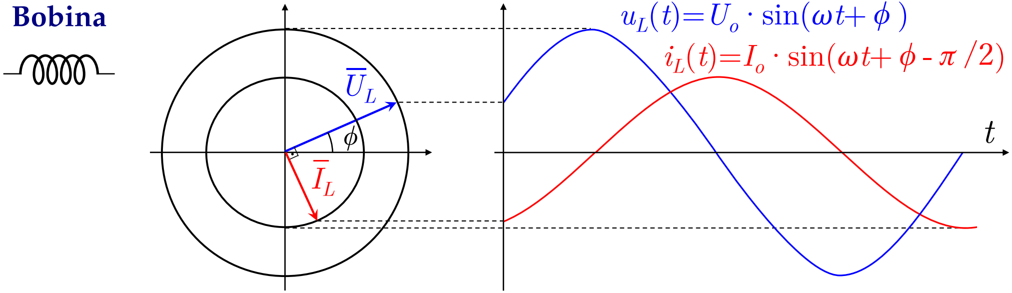
(clica en la imagen)



Circuito inductivo puro

Un circuito inductivo puro genera **señales en cuadratura** y **<u>retrasa la corriente</u>** .

Bobina



$$i_L(t) = \boldsymbol{I\sqrt{2}} \cdot \sin(\omega t + \phi_I)$$

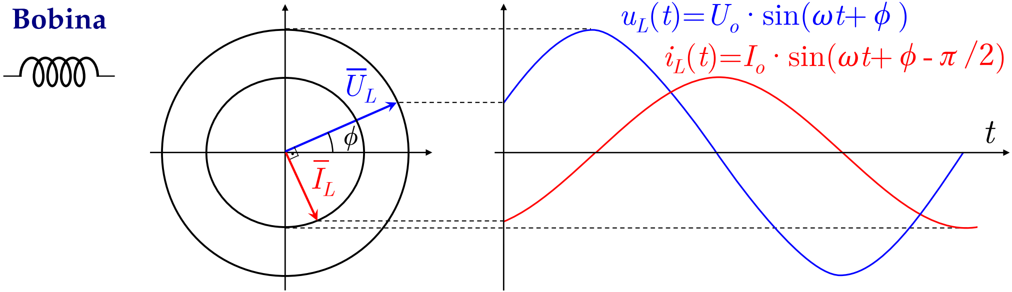
ley de Faraday

$$u_L(t) \overset{\downarrow}{=} L \cdot \frac{di(t)}{dt} = \boldsymbol{\omega L \cdot I\sqrt{2}} \cdot \cos(\omega t + \phi_I) = \boldsymbol{U\sqrt{2}} \cdot \sin(\omega t + \phi_I \boldsymbol{+\pi/2})$$

Circuito inductivo puro

Un circuito inductivo puro genera **señales en cuadratura** y **retrasa la corriente**

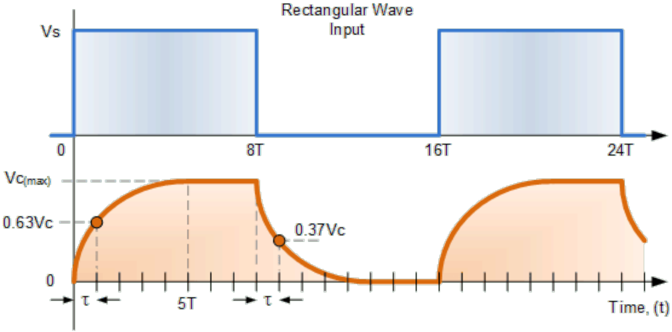
Bobina



$$\overline{Z}_L = \frac{\overline{U}_L}{\overline{I}_L} = \frac{U}{I} \angle \phi_U - \phi_I = \omega L \angle 90^\circ \quad \rightarrow \quad \boxed{\overline{Z}_L = 0 + j\omega L = \omega L \angle 90^\circ}$$

Carga y descarga de un condensador

- Si se excita un condensador con pulsos rectangulares de tensión, se **almacena** energía eléctrica, que luego se **devuelve al circuito** en los semiciclos sin excitación



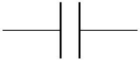
Energía almacenada: $\frac{1}{2} \cdot C \cdot u_C^2(t)$

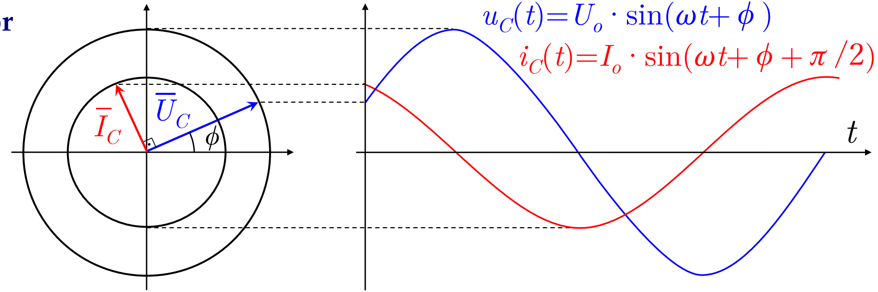
- Con **excitación alterna senoidal**, el condensador también se **carga** y **descarga**
  - Sin embargo, la tensión en el condensador nunca llega a estabilizarse, porque la excitación senoidal cambia todo el rato (siguiente diapositiva)

Circuito capacitivo puro

Un circuito capacitivo puro genera **señales en cuadratura** y **adelanta la corriente** .

Condensador





$$i_C(t) = \boldsymbol{I\sqrt{2}} \cdot \sin(\omega t + \phi_I)$$

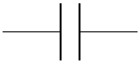
definición
de condensador

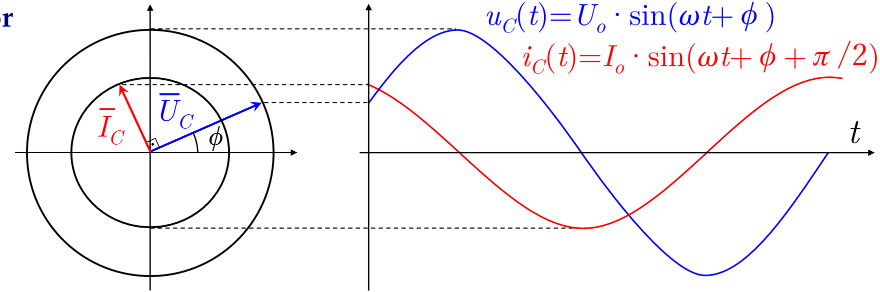
$$u_C(t) \overset{\downarrow}{=} \frac{1}{C} \cdot \int_{-\infty}^{t} i(\tau) \cdot d\tau = \boldsymbol{\frac{I}{\omega C}\sqrt{2}} \cdot [-\cos(\omega t + \phi_I)] = \boldsymbol{U\sqrt{2}} \cdot \sin\left(\omega t + \phi_I \boldsymbol{-\pi/2}\right)$$

Circuito capacitivo puro

Un circuito capacitivo puro genera **señales en cuadratura** y **adelanta la corriente**

Condensador





$$\overline{Z}_C = \frac{\overline{U}_C}{\overline{I}_C} = \frac{U}{I}\underline{/\phi_U - \phi_I} = \frac{1}{\omega C}\underline{/-90^\circ} \quad \rightarrow \quad \boxed{\overline{Z}_C = 0 - \frac{j}{\omega C} = \frac{1}{\omega C}\underline{/-90^\circ}}$$

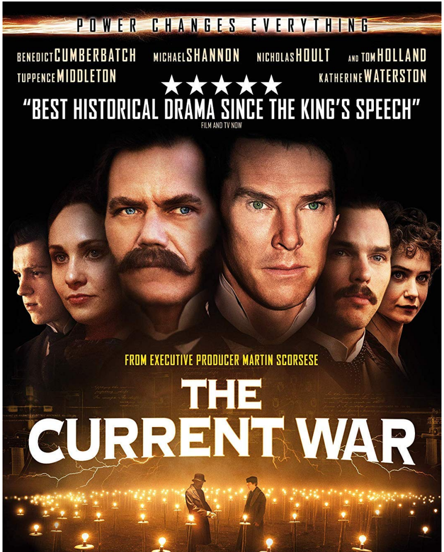
Resumen

Elemento	Impedancia	Módulo	Ángulo
Resistencia	R	R	0°
Bobina ideal	$j\omega L$	ωL	90°
Condensador	$1/(j\omega C)$	$1/(\omega C)$	-90°

- La impedancia de una **bobina ideal** $X_L = \omega L$ se denomina "reactancia inductiva"
- La impedancia de un **condensador** $X_C = \dfrac{1}{\omega C}$ se denomina "reactancia capacitiva"

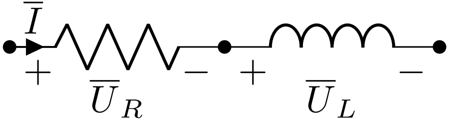
Interludio: película relacionada con la asignatura

La guerra de las corrientes, 2017



Circuito RL (inductivo con pérdidas)

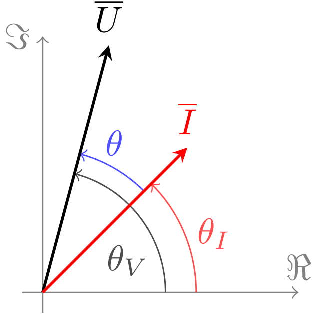
Recordatorio: por elementos asociados en **serie**, circula la **misma corriente**



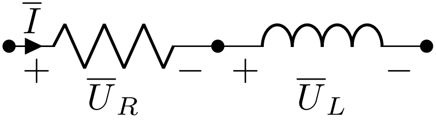
$$\overline{U}_{\text{Tot}} \overset{\text{2LK}}{\overset{\downarrow}{=}} \overline{U}_R + \overline{U}_L \quad \leftarrow$$

Importante: sumar módulos en lugar de fasores es un error grave

$$= R \cdot \bar{I} + \mathrm{j} \underbrace{X_L}_{\omega L} \cdot \bar{I} \;=\; \underbrace{(R + \mathrm{j}\,\omega L)}_{\overline{Z}_{eq}} \bar{I}$$

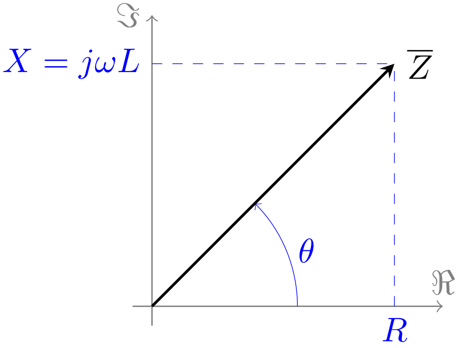


Circuito RL (inductivo con pérdidas)

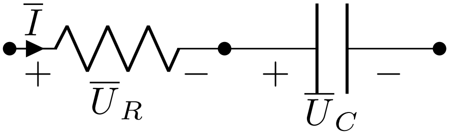


$$\overline{Z}_{eq} = R + \mathrm{j}\,\omega L \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta > 0}$$

$$\overline{Z}_{eq} \begin{cases} |Z_{eq}| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \\ \theta = \operatorname{atan}\left(\dfrac{\omega L}{R}\right) \end{cases}$$



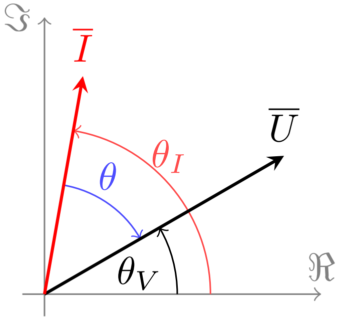
Circuito RC (capacitivo con pérdidas)



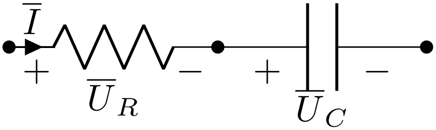
$$\overline{U}_{\text{Tot}} \overset{\substack{\text{2LK}\\ \downarrow}}{=} \overline{U}_R + \overline{U}_C \quad \leftarrow$$

Importante: sumar módulos en lugar de fasores es un error grave

$$= R \cdot \overline{I} - \mathrm{j} \underbrace{X_C}_{\frac{1}{\omega C}} \cdot \overline{I} = \underbrace{\left(R - \mathrm{j}\,\frac{1}{\omega C}\right)}_{\overline{Z}_{eq}} \overline{I}$$

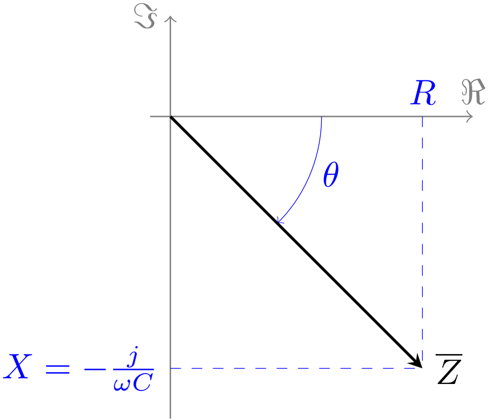


Circuito RC (capacitivo con pérdidas)

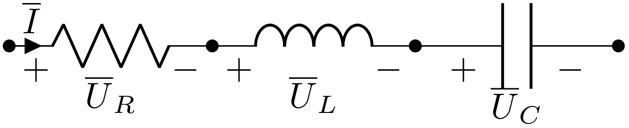


$$\overline{Z}_{eq} = R - \mathrm{j}\frac{1}{\omega C} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta < 0}$$

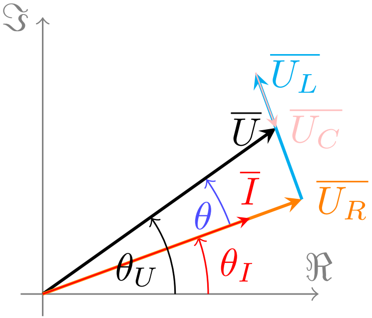
$$\overline{Z}_{eq} \begin{cases} |Z_{eq}| = \sqrt{R^2 + \dfrac{1}{(\omega C)^2}} \\ \theta = \mathrm{atan}\left(\dfrac{-\frac{1}{\omega C}}{R}\right) \end{cases}$$



Circuito RLC serie

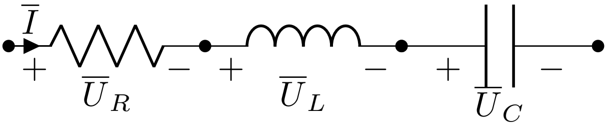


$$\overline{U} \overset{\substack{\text{2LK}\\ \downarrow}}{=} \overline{U}_R + \overline{U}_L + \overline{U}_C = \Bigg(\underbrace{R + \mathrm{j}\,\omega L - \mathrm{j}\frac{1}{\omega C}}_{\overline{Z}_{eq}}\Bigg)\,\overline{I}$$



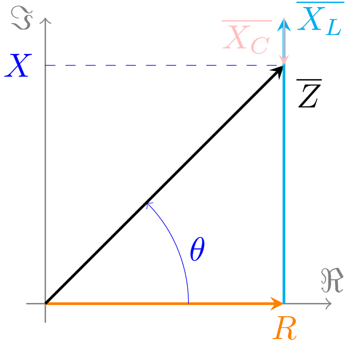
(ejemplo, en el que $X_L > X_C$)

Circuito RLC serie



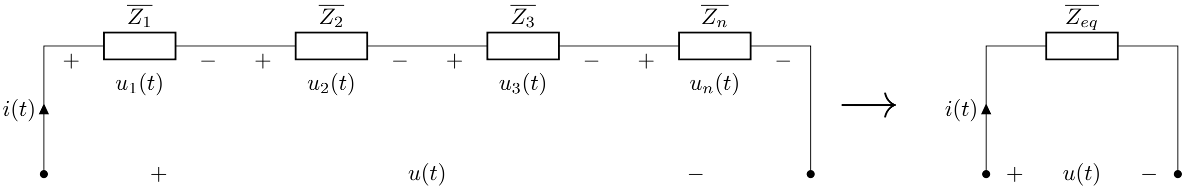
$$\overline{Z}_{eq} = R + \mathrm{j}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

- $\theta > 0 \;\Rightarrow\; \omega L > \frac{1}{\omega C}$: carácter **inductivo**
- $\theta < 0 \;\Rightarrow\; \omega L < \frac{1}{\omega C}$: carácter **capacitivo**
- $\theta = 0 \;\Rightarrow\; \omega L = \frac{1}{\omega C}$: carácter **resistivo** (**resonancia**)



(ejemplo, en el que $X_L > X_C$)

Circuito serie general



$$\overline{U} \overset{\substack{\textbf{2LK}\\ \downarrow}}{=} \overline{U}_1 + \overline{U}_2 + \ldots + \overline{U}_n = \overline{I} \cdot (\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2 + \ldots + \overline{Z}_n) = \overline{I} \cdot \overline{Z}_{eq}$$

$$\overline{Z}_{eq} = \overline{Z}_1 + \overline{Z}_2 + \ldots + \overline{Z}_n \implies \boxed{\overline{Z}_{eq} = \sum_{i=1}^{n} \overline{Z}_i}$$

Ejercicio

Un circuito serie formado por $R = 10\,\Omega$, $L = 20\,\text{mH}$ y $C = 100\,\mu\text{F}$ es alimentado con una tensión $u(t) = 200 \cdot \sin\left(1000t + \frac{\pi}{4}\right)$ V

Calcular $\bar{I}$, $u_R(t)$, $u_L(t)$ y $u_C(t)$, y dibujar el diagrama fasorial de tensiones y corrientes

Solución: $\bar{I} = 10\underline{/0^\circ}$ A

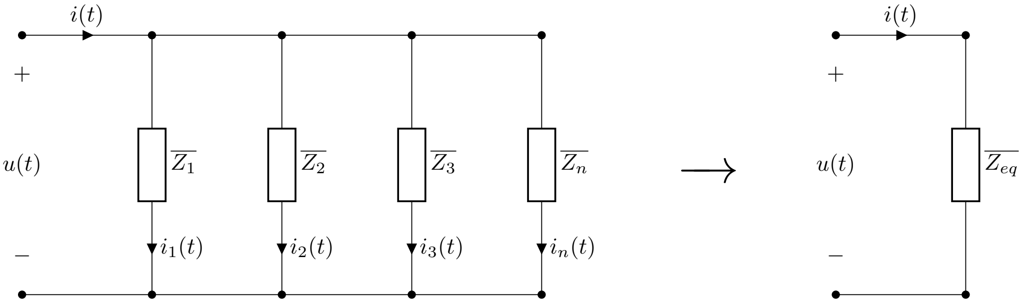
$$u_R(t) = 100\sqrt{2} \cdot \sin\left(1000t\right) \text{ V}$$

$$u_L(t) = 200\sqrt{2} \cdot \sin\left(1000t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ V}$$

$$u_C(t) = 100\sqrt{2} \cdot \sin\left(1000t - \frac{\pi}{2}\right) \text{ V}$$

Circuito paralelo general

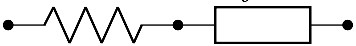
Recordatorio: los elementos asociados en **paralelo** está sometidos a la **misma tensión**

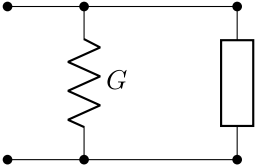


$$\bar{I} \underset{\substack{\uparrow \\ \textbf{1LK}}}{=} \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \ldots + \bar{I}_n = \overline{U} \cdot \left(\frac{1}{\overline{\overline{Z}}_1} + \frac{1}{\overline{\overline{Z}}_2} + \ldots + \frac{1}{\overline{\overline{Z}}_n} \right) = \frac{\overline{U}}{\overline{\overline{Z}}_{eq}}$$

$$\frac{1}{\overline{\overline{Z}}_{eq}} = \frac{1}{\overline{\overline{Z}}_1} + \frac{1}{\overline{\overline{Z}}_2} + \ldots + \frac{1}{\overline{\overline{Z}}_n} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{\overline{\overline{Z}}_{eq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\overline{\overline{Z}}_i}}$$

Impedancia y admitancia





$$\overline{U} = \overline{Z} \cdot \overline{I}$$

$$\overline{Z} = R + jX$$

$$\overline{I} = \overline{Y} \cdot \overline{U}$$

$$\overline{Y} = G + jB$$

$$\boxed{\overline{Y} = \frac{1}{\overline{Z}} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} |\overline{Y}| = \dfrac{1}{|\overline{Z}|} \\ \theta_Y = -\theta_Z \end{cases}}$$

Admitancia: facilidad que ofrece un circuito al paso de la corriente alterna

1. Formas de onda
2. Onda senoidal
3. Cálculo fasorial
4. Respuesta de elementos pasivos a excitación senoidal (R, L y C)
5. **Potencia en corriente alterna**

Potencia en CA, expresión general

Tomemos la tensión como referencia de fases

Sin pérdida de generalidad, asumamos que el ángulo de la impedancia equivalente de un circuito es $\theta > 0$ (circuito **inductivo**): la corriente está retrasada respecto de la tensión

$$\begin{cases} u(t) = U_o \cos(\omega t) \\ i(t) = I_o \cos(\omega t - \theta) \quad \text{(circuito en } \textbf{retraso}\text{)} \end{cases}$$

$$p(t) = u(t) \cdot i(t)$$

Potencia en CA, expresión general

conveniente reformular
producto de cosenos

$$p(t) = \underbrace{U_o \cos(\omega t)}_{u(t)} \cdot \underbrace{I_o \cos(\omega t - \theta)}_{i(t)} = \underbrace{U_o \cdot I_o}_{\text{amplitud}} \cdot \cos(\omega t) \cdot \cos(\omega t - \theta) \overset{\downarrow}{=}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot U_o \cdot I_o \cdot [\cos(2\omega t - \theta) + \cos(\theta)] = \frac{U_o}{\sqrt{2}} \frac{I_o}{\sqrt{2}} \cdot [\cos(2\omega t - \theta) + \cos(\theta)]$$

$$= \underbrace{U}_{\substack{\text{valor}\\ \text{eficaz}}} \cdot I \cdot [\cos(2\omega t - \theta) + \cos(\theta)] \underset{\uparrow}{=}$$

$\cos(\alpha - \beta)$

$$= U \cdot I \cdot [\cos(2\omega t)\cos(\theta) + \sin(2\omega t)\sin(\theta) + \cos(\theta)]$$

$$\boxed{p(t) \;=\; U \cdot I \cos(\theta) \;+\; U \cdot I \cos(\theta)\cos(2\omega t) \;+\; U \cdot I \sin(\theta)\sin(2\omega t)}$$

Potencia en CA: potencia activa y potencia reactiva

En la expresión anterior, definimos dos términos:

potencia activa 'P' y **potencia reactiva** 'Q'

$$p(t) \; = \; U \cdot I \cos(\theta) \; + \; U \cdot I \cos(\theta) \cos(2\omega t) \; + \; U \cdot I \sin(\theta) \sin(2\omega t)$$

$$P = U \cdot I \cos\theta \qquad Q = U \cdot I \sin\theta$$

$$\boxed{p(t) \; = \; P \cdot [1 \; + \; \cos(2\omega t)] \; + \; Q \cdot \sin(2\omega t)}$$

Pero, ¿qué significa que la potencia sea *activa* o *reactiva*? $\rightarrow$ Siguiente diapositiva

Potencia en CA: potencia disipada y potencia entretenida

Dado que $p(t)$ varía en el tiempo, sus **efectos netos** en el circuito tras cada ciclo pueden calcularse con el **valor medio** en un periodo:

$$P_m = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt = \frac{1}{T}\left[P\int_0^T dt + P\cancelto{0}{\int_0^T \cos(2\omega t)\,dt} + Q\cancelto{0}{\int_0^T \sin(2\omega t)\,dt}\right] = \boxed{P}$$

- $\boldsymbol{P} = U\,I\,\cos(\theta)$ es la **potencia neta que se disipa en la carga**, dado que el resto de la potencia $p(t)$ es fluctuante

  (Unidades de P: W)

- $\boldsymbol{Q} = U\,I\,\sin(\theta)$ es **potencia únicamente *entretenida***, ya que es potencia almacenada y sucesivamente devuelta por las bobinas y condensadores (para los que $\sin(\theta) \neq 0$)

  (Unidades de Q: var)

Potencia en CA, circuito resistivo

Resistencia

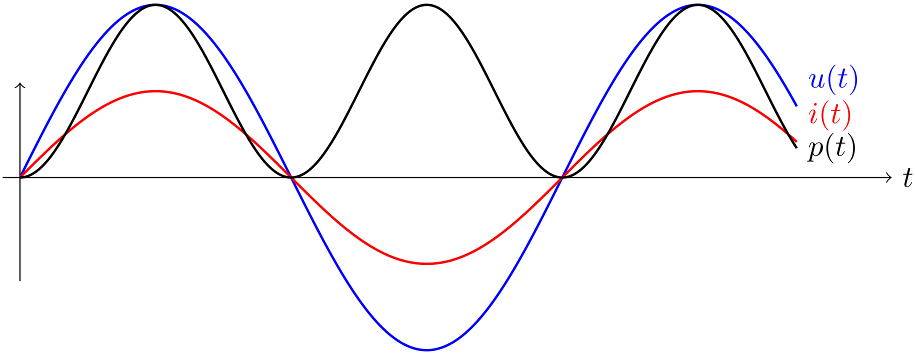
$\theta = 0^\circ$

$$P = U\,I\,\underbrace{\cos\theta}_{=1} \qquad Q = U\,I\,\cancelto{0}{\sin\theta}$$

$$p(t) = P\cdot[1+\cos(2\omega t)] + Q\cdot\sin(2\omega t)$$

Potencia en CA, circuito resistivo

Resistencia



- Fluctúa al **doble** de **frecuencia** que la tensión y corriente
- Es siempre **positiva**
- Su **valor medio** es $P = U\,I \cos\theta = U\,I$

Potencia en CA, circuito inductivo puro

Bobina

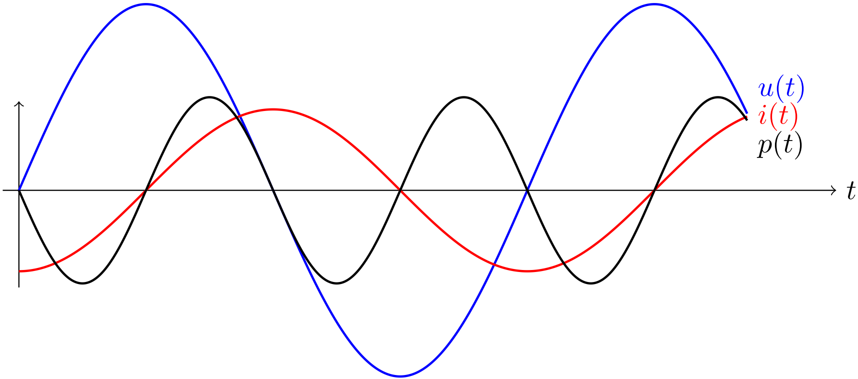
$\theta = 90^\circ$

$$P = U\,I\,\cancelto{0}{\cos\theta} \qquad Q = U\,I\,\underbrace{\sin\theta}_{=1}$$

$$p(t) = P \cdot [1 + \cos(2\omega t)] + Q \cdot \sin(2\omega t)$$

Potencia en CA, circuito inductivo puro

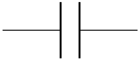
Bobina



- Fluctúa al **doble** de **frecuencia** que la tensión y corriente
- Su valor medio es **nulo**

Potencia en CA, circuito capacitivo puro

Condensador



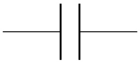
$\theta = -90^\circ$

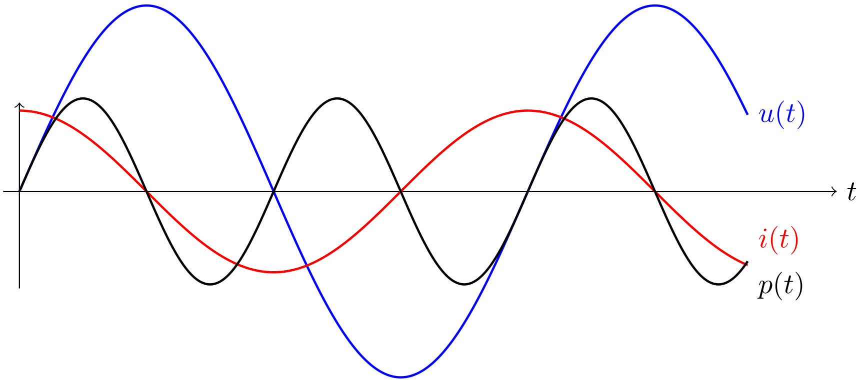
$$P = U\,I\,\cancelto{0}{\cos\theta} \qquad Q = U\,I\,\underbrace{\sin\theta}_{=-1}$$

$$p(t) = P \cdot [1 + \cos(2\omega t)] + Q \cdot \sin(2\omega t)$$

Potencia en CA, circuito capacitivo puro

Condensador

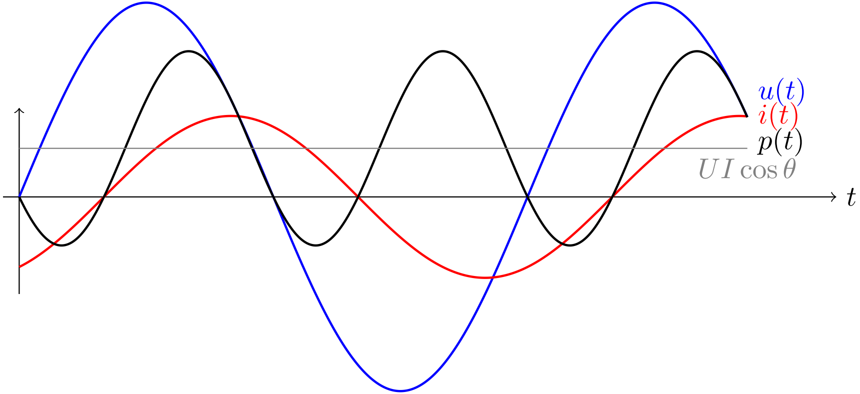




- Fluctúa al **doble** de **frecuencia** que la tensión y corriente
- Su valor medio es **nulo**

Potencia en CA, circuito inductivo con pérdidas

$0^\circ < \theta < 90^\circ$



Interludio: pasado y presente de los sistemas eléctricos

Ms. Edith Clarke,
General Electric

Prof. Gabriela Hug,
ETH Zurich

Dr Vera Silva,
General Electric

Triángulo de potencias

- Potencia **activa** [unidades: W]

$$\boxed{P = U \cdot I \cdot \cos(\theta) = R \cdot I^2}$$

- Potencia **reactiva** [unidades: var]

$$\boxed{Q = U \cdot I \cdot \sin(\theta) = X \cdot I^2}$$

- Potencia **aparente** [unidades: VA]

$$\boxed{\overline{S} = P + \mathrm{j}Q = \overline{U} \cdot \overline{I}^*}$$

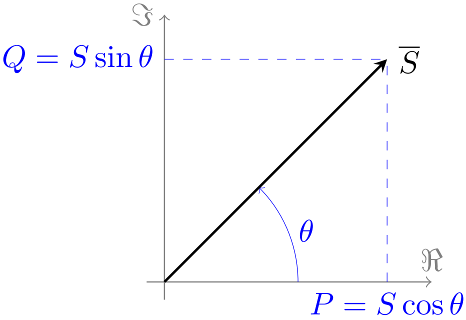
Demostración de la expresión para $\overline{S}$:

$$\overline{U} = U\underline{/0}$$

$$\overline{I} = I\underline{/-\theta} \quad \text{(circuito en retraso)}$$

$$\boldsymbol{\overline{U} \cdot \overline{I}^*} = U\underline{/0} \cdot I\underline{/\theta} = U\,I\underline{/\theta} =$$

$$= U\,I\,(\cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta) = \boldsymbol{P + \mathrm{j}Q}$$



$$S = U \cdot I$$

$$\theta_S = \theta_Z = \theta$$

Triángulo de potencias

- Potencia **activa** [unidades: W]

$$\boxed{P = U \cdot I \cdot \cos(\theta) = R \cdot I^2}$$

- Potencia **reactiva** [unidades: var]

$$\boxed{Q = U \cdot I \cdot \sin(\theta) = X \cdot I^2}$$

- Potencia **aparente** [unidades: VA]

$$\boxed{\overline{S} = P + \mathrm{j}Q = \overline{U} \cdot \overline{I}^*}$$

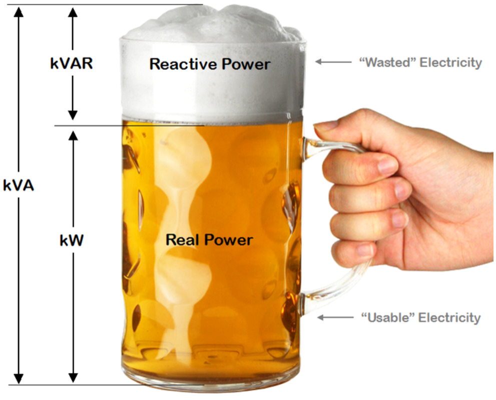
Demostración de la expresión para $\overline{S}$:

$$\overline{U} = U\underline{/0}$$

$$\overline{I} = I\underline{/-\theta} \quad \text{(circuito en retraso)}$$

$$\boldsymbol{\overline{U} \cdot \overline{I}^*} = U\underline{/0} \cdot I\underline{/\theta} = U\,I\underline{/\theta} =$$

$$= U\,I\,(\cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta) = \boldsymbol{P + \mathrm{j}Q}$$



Potencia en elementos: resistencia

Resistencia

$\theta = 0^\circ$

$$\begin{cases} P_R = R\, I^2 \\ Q_R = 0 \\ \overline{S}_R = P_R \end{cases}$$

- Consume potencia activa
- No “consume” potencia reactiva

Potencia en elementos: inductancia

Bobina

$\theta = 90^\circ$

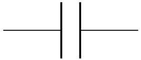
$$\begin{cases} P_L = 0 \\ Q_L = \omega L\, I^2 \\ \overline{S}_L = \omega L\, I^2 \underline{/\pi/2} \end{cases}$$

- No consume potencia activa
- "Consume" potencia reactiva ($Q > 0$)
  - **Nota**: la potencia reactiva es potencia *entretenida*, no es potencia que se consuma

    Pero, dado el convenio de signos, decimos que **las bobinas "consumen"** Q y **los condensadores "generan"** Q (ya que almacenan y devuelven energía al circuito en semiciclos opuestos)

Potencia en elementos: condensador

Condensador



$\theta = -90^\circ$

$$\begin{cases} P_C = 0 \\ Q_C = -\omega C\, U^2 \\ \overline{S}_C = \omega C\, U^2 \underline{/-\pi/2} \end{cases}$$

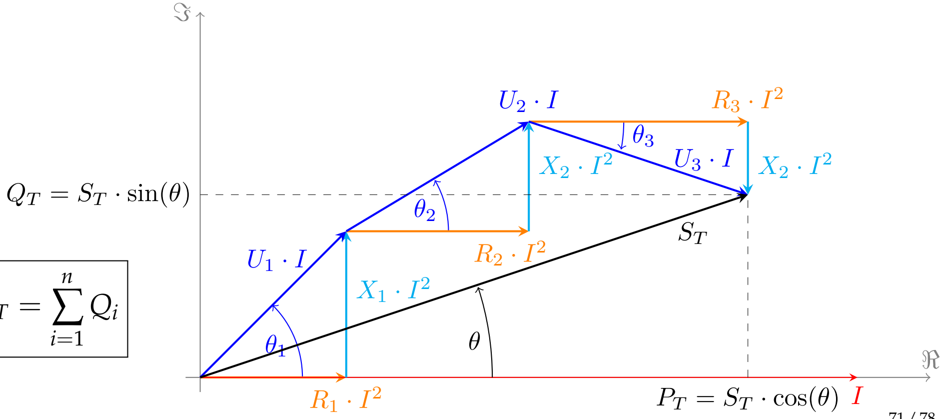
- No consume potencia activa
- "Genera" potencia reactiva ($Q < 0$)
  - **Nota**: la potencia reactiva es potencia *entretenida*, no es potencia que se consuma

    Pero, dado el convenio de signos, decimos que **las bobinas "consumen"** Q y **los condensadores "generan"** Q (ya que almacenan y devuelven energía al circuito en semiciclos opuestos)

Teorema de Boucherot

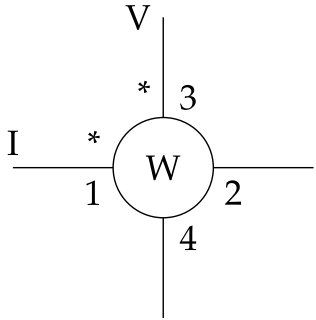
En un circuito con múltiples elementos, la potencia aparente total es la **suma de las potencias aparentes individuales**

(la potencia activa/reactiva total es la **suma de las potencias activas/reactivas individuales**)



$$\boxed{P_T = \sum_{i=1}^{n} P_i} \qquad \boxed{Q_T = \sum_{i=1}^{n} Q_i}$$

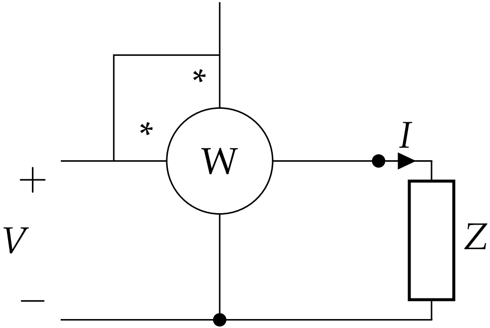
Medida de potencia: vatímetro



Equipo de medida de **4 terminales** (un par para tensión, un par para corriente)

$$W = \underbrace{\overline{I}_{1,2} \bullet \overline{U}_{3,4}}_{\text{producto escalar}} = I_{1,2} \cdot U_{3,4} \cdot \cos\left(\widehat{\overline{I}_{1,2}, \overline{U}_{3,4}}\right)$$

Medida de potencia



Habitualmente se emplea con 3 terminales, **cortocircuitando** terminales con *

$$\boxed{W \;=\; |\overline{V}| \cdot |\bar{I}| \cdot \cos(\theta_V - \theta_I) \;=\; P_Z}$$

1. Formas de onda
2. Onda senoidal
3. Cálculo fasorial
4. Respuesta de elementos pasivos a excitación senoidal (R, L y C)
5. Potencia en corriente alterna
   - Factor de potencia: importancia y mejora

Factor de potencia

El factor de potencia (***f.d.p.***), $\cos(\theta)$, representa la aportación de potencia activa dentro de la potencia aparente:

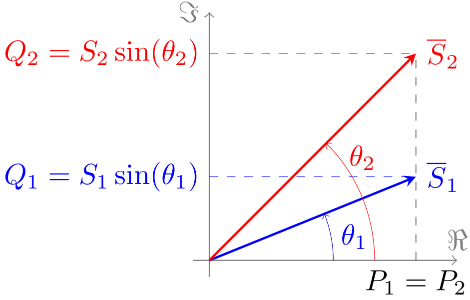
$$\cos(\theta) = \frac{P}{S}$$

Se dice que:

- *fdp* **en retraso** cuando el circuito tiene carácter inductivo (la intensidad va retrasada respecto a la tensión)
- *fdp* **en adelanto** cuando el circuito tiene carácter capacitivo (la intensidad va adelantada respecto a la tensión)

Factor de potencia: importancia y mejora

Consideremos dos sistemas con **misma tensión y potencia activa**, y factores de potencia $\cos\theta_2 < \cos\theta_1$ $(Q_2 > Q_1)$



- El sistema 2 requiere **mayor potencia aparente** (generador mayor) para alimentar la misma potencia activa:

$$\left(\frac{P}{\cos\theta_1} = S_1\right) < \left(S_2 = \frac{P}{\cos\theta_2}\right)$$

- El sistema 2 requiere **mayor sección de cable** para transportar la misma potencia activa:

$$\left(\frac{P}{U\cos\theta_1} = I_1\right) < \left(I_2 = \frac{P}{U\cos\theta_2}\right)$$

“Generación” local de reactiva

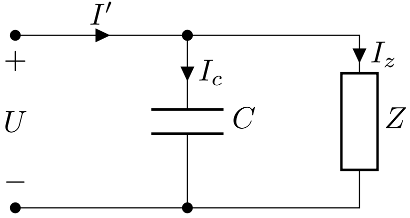
- Comúnmente, el factor de potencia es **inductivo** (máquinas eléctricas industriales)
- La red debe suministrar potencia reactiva inductiva (influye en secciones de líneas y tamaños de generadores $\rightarrow$ **mayor coste**)
- Es necesario mejorar **localmente** el factor de potencia

  Solución común: utilizar **bancos de condensadores** como suministradores de Q

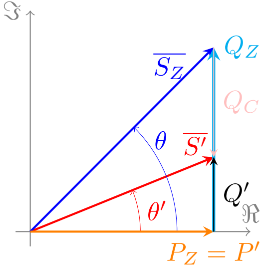
Cálculo de la capacidad para compensación de reactiva

Consideremos una carga de potencia activa P_z, potencia reactiva Q_z, y fdp $= \cos\theta$

Se desea **mejorar el factor de potencia** a $\cos\theta' > \cos\theta$, manteniendo la potencia P_z



$$
\begin{aligned}
P' &= P_z \\
Q' &= Q_c + Q_z \quad (Q' < Q_z) \\
\bar{I}' &= \bar{I}_c + \bar{I}_z \quad (I' < I_z)
\end{aligned}
$$



$$
\begin{aligned}
Q_z &= P_z \tan\theta \\
Q' &= P_z \tan\theta' \\
|Q_c| &= Q_z - Q' = P_z(\tan\theta - \tan\theta')
\end{aligned}
$$

$$
|Q_c| = \underbrace{X_c}_{=\frac{1}{\omega C}} \cdot I_c^2 = \omega C U^2 \rightarrow \boxed{C = \frac{P_z(\tan\theta - \tan\theta')}{\omega U^2}}
$$