

TEORÍA DE CIRCUITOS

LUIS BADESA BERNARDO
ANA FERNÁNDEZ GUILLAMÓN
OSCAR PERPIÑÁN LAMIGUEIRO

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID
CURSO 2022/23

Febrero de 2023

© 2023 Luis Badesa Bernardo, Ana Fernández Guillamón, Oscar Perpiñán Lamigueiro

Este documento está accesible en <https://github.com/ETSIDI-IE/tc>



Esta obra está bajo una licencia **Reconocimiento-No comercial-Compartir bajo la misma licencia** 4.0 España de Creative Commons. Para ver una copia de esta licencia, visite:

https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/deed.es_ES

Usted es libre de copiar, distribuir y comunicar públicamente la obra, y hacer obras derivadas bajo las condiciones siguientes:

-  **Reconocimiento.** Debe reconocer adecuadamente la autoría, proporcionar un enlace a la licencia e indicar si se han realizado cambios. Puede hacerlo de cualquier manera razonable, pero no de una manera que sugiera que tiene el apoyo del licenciador o lo recibe por el uso que hace.
-  **No comercial.** No puede utilizar el material para una finalidad comercial.
-  **Compartir bajo la misma licencia.** Si remezcla, transforma o crea a partir del material, deberá difundir sus contribuciones bajo la misma licencia que el original.

Al reutilizar o distribuir la obra, tiene que dejar bien claro los términos de la licencia de esta obra. Alguna de estas condiciones puede no aplicarse si se obtiene el permiso del titular de los derechos de autor. Nada en esta licencia menoscaba o restringe los derechos morales del autor.

Índice general

1	Acoplamiento Magnético y Transformadores	1
1.1.	Acoplamiento magnético	1
1.2.	Transformadores	6

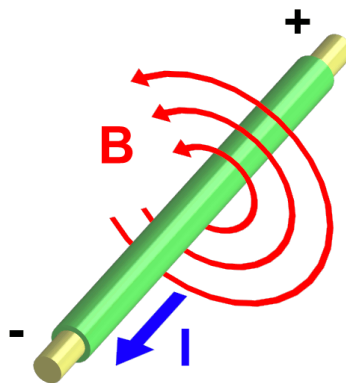
Capítulo 1

Acoplamientos Magnéticos y Transformadores

1.1. Acoplamientos magnéticos

1.1.1. Fundamentos Físicos

Según la ley de Ampere, una corriente eléctrica circulando por un conductor crea un campo magnético en torno al conductor (*regla de la mano derecha*).



Por otra parte, la ley de Faraday establece que cuando un *campo magnético variable*, \vec{B} , atraviesa una *espira estática* aparece una *tensión inducida proporcional al flujo* y opuesta a su variación.

$$u(t) = \frac{d\phi}{dt}$$

donde ϕ es el flujo magnético o cantidad de líneas de fuerza magnética que atraviesan una superficie:

$$\phi = \vec{B} \cdot \vec{A} \text{ [Wb]}$$

Combinando ambas leyes podemos comprender el funcionamiento de la bobina. Una bobina es un arrollamiento de un conductor (*conjunto de N espiras conectadas en serie*) alrededor de un material ferromagnético:

- Al circular corriente se produce un campo magnético (*ley de Ampere*).
- Este campo magnético atraviesa la propia bobina y produce una tensión (auto)inducida (*ley de Faraday*).

Por tanto, en una bobina de N espiras la tensión autoinducida es:

$$u(t) = N \cdot \frac{d\phi(t)}{dt}$$

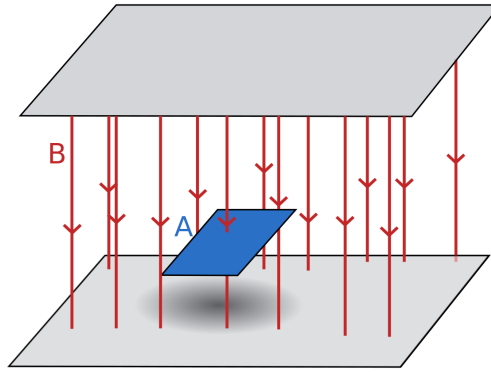
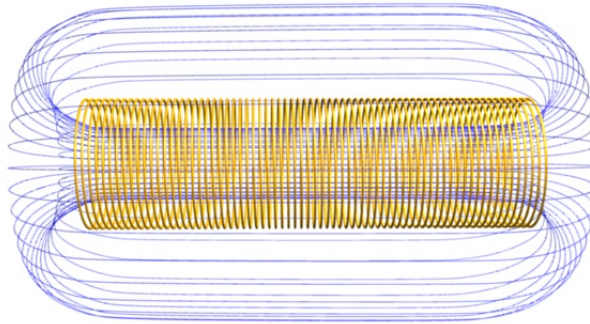


FIGURA 1.1: *Flujo magnético atravesando una superficie.*



Teniendo en cuenta que en circuito magnético lineal el flujo magnético es proporcional a la corriente:

$$\phi(t) = A \cdot i(t) \rightarrow \frac{d\phi(t)}{di(t)} = \frac{\phi(t)}{i(t)}$$

podemos obtener la tensión inducida en función de la corriente eléctrica:

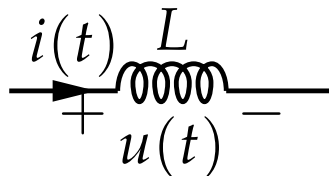
$$u(t) = N \cdot \frac{d\phi(t)}{di(t)} \cdot \frac{di(t)}{dt} \rightarrow u(t) = N \cdot \frac{\phi(t)}{i(t)} \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

y, en consecuencia, determinamos el coeficiente de autoinductancia, L [H]:

$$L = N \cdot \frac{\phi(t)}{i(t)}$$

y la ecuación de la bobina que utilizamos en los circuitos:

$$u(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} \quad (1.1)$$



1.1.2. Acoplamiento magnético

Cuando dos bobinas comparten el núcleo ferromagnético, el flujo magnético producido por cada una de ellas atraviesa a la otra bobina, lo que se conoce como acoplamiento magnético (figura 1.2).

En la figura 1.2 se indican los siguientes flujos:

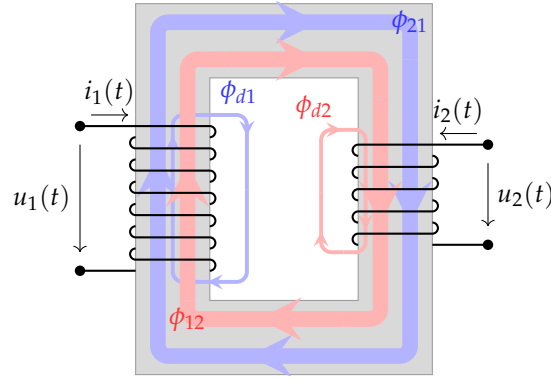


FIGURA 1.2: Acoplamiento magnético de dos bobinas. Definición de flujos.

- ϕ_{ii} : flujo producido por la bobina i
- ϕ_{ij} : flujo recibido en bobina i producido por bobina j
- ϕ_i : flujo total que atraviesa la bobina i
- ϕ_{di} : flujo de dispersión de la bobina i , o flujo que escapa del núcleo y no contribuye al acoplamiento.

Estos flujos cumplen las siguientes relaciones:

$$\phi_{11} = \phi_{d1} + \phi_{21}$$

$$\phi_1 = \phi_{11} + \phi_{12}$$

$$\phi_{22} = \phi_{d2} + \phi_{12}$$

$$\phi_2 = \phi_{22} + \phi_{21}$$

La ratio entre el flujo que recibe una bobina y el flujo producido por la bobina emisora se cuantifica con los coeficientes de acoplamiento k_i :

$$k_1 = \frac{\phi_{21}}{\phi_{11}} = 1 - \frac{\phi_{d1}}{\phi_{11}} \leq 1, k_2 = \frac{\phi_{12}}{\phi_{22}} = 1 - \frac{\phi_{d2}}{\phi_{22}} \leq 1 \quad (1.2)$$

Cuando el acoplamiento entre las dos bobinas es perfecto, los flujos de dispersión son nulos y, por tanto:

$$\left. \begin{array}{l} \phi_{d1} = 0 \rightarrow \phi_{11} = \phi_{21} \\ \phi_{d2} = 0 \rightarrow \phi_{22} = \phi_{12} \end{array} \right\} \rightarrow k = 1$$

A partir de los flujos que recorren el núcleo obtenemos las tensiones inducidas en la bobina 1:

$$u_1(t) = N_1 \frac{d\phi_1}{dt} = N_1 \frac{d\phi_{11}}{dt} + N_1 \frac{d\phi_{12}}{dt}$$

y en la bobina 2:

$$u_2(t) = N_2 \frac{d\phi_2}{dt} = N_2 \frac{d\phi_{22}}{dt} + N_2 \frac{d\phi_{21}}{dt}$$

En estas ecuaciones podemos identificar los términos debidos a la autoinducción, con sus dos coeficientes de autoinducción:

$$L_1 = N_1 \frac{\phi_{11}}{i_1} \quad (1.3)$$

$$L_2 = N_2 \frac{\phi_{22}}{i_2} \quad (1.4)$$

y los términos de inducción mutua, con los que podemos definir los coeficientes de inducción mutua, M_{12} y M_{21} :

$$M_{12} = N_1 \frac{\phi_{12}}{i_2} \quad (1.5)$$

$$M_{21} = N_2 \frac{\phi_{21}}{i_1} \quad (1.6)$$

Los coeficientes de acoplamiento y los coeficientes de inducción mutua son iguales cuando el circuito magnético es lineal:

$$M_{12} = M_{21} = M$$

$$k_1 = k_2 = k$$

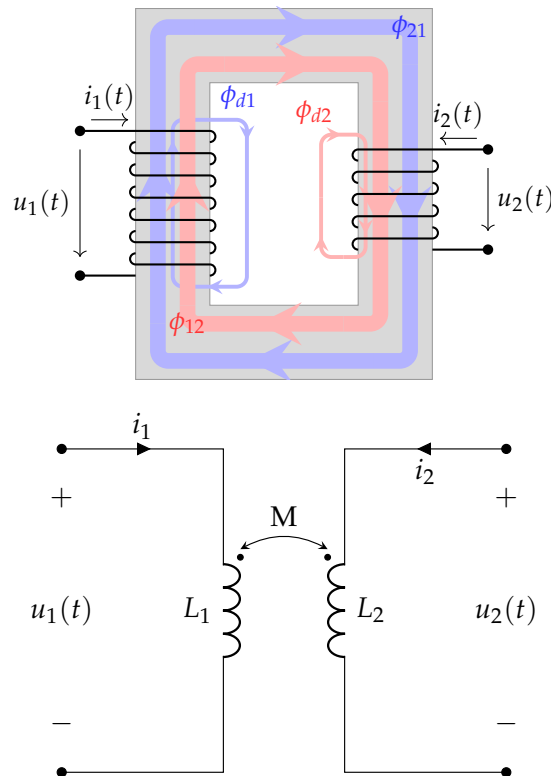
Esta condición nos permite relacionar los coeficientes de autoinducción con el coeficiente de inducción mutua:

$$M = k \sqrt{L_1 \cdot L_2} \quad k \leq 1 \quad (1.7)$$

1.1.3. Representación Circuital

Para representar un acoplamiento magnético en un circuito eléctrico se emplea la convención del punto, señalando con un punto los terminales de las bobinas por los que hay que introducir corrientes que producen flujos del mismo sentido. Una corriente que entra por un terminal con punto induce una tensión positiva en el otro terminal con punto.

En la siguiente figura, las dos bobinas están arrolladas de forma que introduciendo corrientes por los terminales superiores se obtienen flujos que circulan en el mismo sentido:

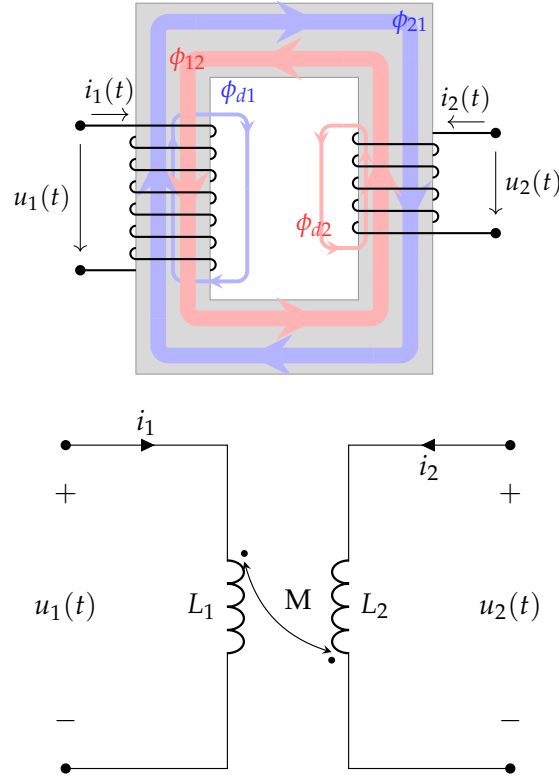


Las ecuaciones circuital de este acoplamiento son:

$$u_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{di_2(t)}{dt}$$

$$u_2(t) = M \frac{di_1(t)}{dt} + L_2 \frac{di_2(t)}{dt}$$

Por el contrario, la siguiente figura representa un acoplamiento en el que las bobinas están arrolladas de forma que los flujos tienen sentidos contrapuestos si se introduce corriente por los terminales superiores.



Las ecuaciones circuitales de este acoplamiento son:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= L_1 \frac{di_1(t)}{dt} - M \frac{di_2(t)}{dt} \\ u_2(t) &= -M \frac{di_1(t)}{dt} + L_2 \frac{di_2(t)}{dt} \end{aligned}$$

Las ecuaciones anteriores están expresadas en el dominio del tiempo. Cuando las bobinas están alimentadas por corriente alterna sinusoidal, podemos expresar las ecuaciones con fasores, ya sea para flujos en el mismo sentido:

$$\begin{aligned} \bar{U}_1 &= j\omega L_1 \bar{I}_1 + j\omega M \bar{I}_2 \\ \bar{U}_2 &= j\omega M \bar{I}_1 + j\omega L_2 \bar{I}_2 \end{aligned}$$

o para flujos contrapuestos:

$$\begin{aligned} \bar{U}_1 &= j\omega L_1 \bar{I}_1 - j\omega M \bar{I}_2 \\ \bar{U}_2 &= -j\omega M \bar{I}_1 + j\omega L_2 \bar{I}_2 \end{aligned}$$

Como ejemplo, calculemos la bobina equivalente de dos bobinas conectadas en serie. Cuando las bobinas están acopladas con flujos en el mismo sentido (figura 1.3), las ecuaciones son:

$$\begin{aligned} \bar{U}_1 &= (j\omega L_1 + j\omega M) \bar{I} \\ \bar{U}_2 &= (j\omega L_2 + j\omega M) \bar{I} \\ \bar{U} &= \bar{U}_1 + \bar{U}_2 \end{aligned}$$

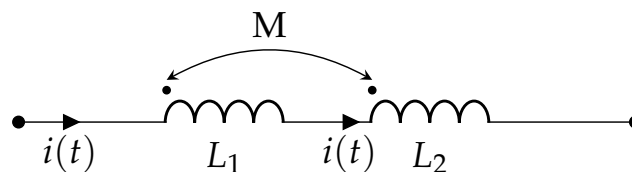


FIGURA 1.3: Dos bobinas conectadas en serie con acoplamiento magnético con flujos en el mismo sentido.

que permiten obtener la equivalencia de la ecuación 1.8:

$$L = L_1 + L_2 + 2M \quad (1.8)$$

Sin embargo, si las bobinas están acopladas con flujos contrapuestos (figura 1.4), las ecuaciones son:

$$\bar{U}_1 = (j\omega L_1 - j\omega M)\bar{I}$$

$$\bar{U}_2 = (j\omega L_2 - j\omega M)\bar{I}$$

$$\bar{U} = \bar{U}_1 + \bar{U}_2$$

de forma que la inductancia equivalente es ahora:

$$L = L_1 + L_2 - 2M \quad (1.9)$$

1.2. Transformadores

Un transformador es una máquina eléctrica compuesta por dos o más devanados arrollados sobre un núcleo ferromagnético sin conexión eléctrica entre los devanados (figura 1.2), de forma que la transmisión de energía se realiza únicamente mediante el acoplamiento magnético.

1.2.1. Transformador Real

La figura 1.5 es la representación circuital simplificada de un transformador real, es decir, un transformador que tiene pérdidas resistivas en las bobinas y cuyo acoplamiento magnético no es perfecto ($k < 1$).

Las ecuaciones de este transformador son:

$$\bar{U}_1 = (R_1 + j\omega L_1) \cdot \bar{I}_1 + j\omega M \cdot \bar{I}_2 \quad (1.10)$$

$$\bar{U}_2 = j\omega M \cdot \bar{I}_1 + (R_2 + j\omega L_2) \cdot \bar{I}_2 \quad (1.11)$$

En general, los terminales de la izquierda (U_1) se denominan como primario, y los terminales de la derecha (U_2) como secundario.

Supongamos que conectamos una impedancia en el secundario de este transformador. Para calcular la impedancia que se ve desde el primario debemos calcular la relación \bar{U}_1 / \bar{I}_1 a partir de las ecuaciones 1.10 y de la ecuación de la impedancia:

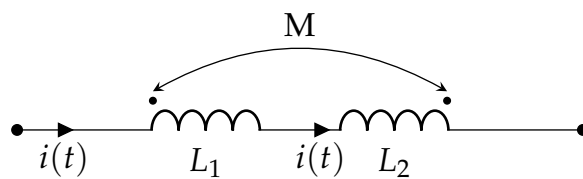


FIGURA 1.4: Dos bobinas conectadas en serie con acoplamiento magnético con flujos contrapuestos.

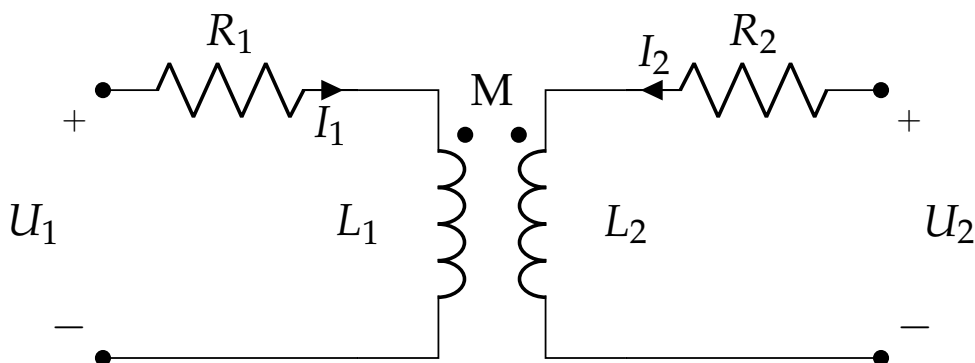


FIGURA 1.5: Representación circuital de un transformador real

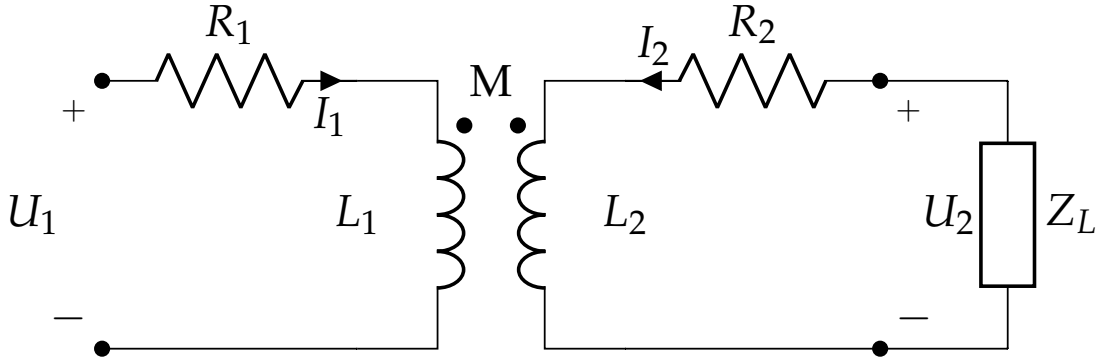


FIGURA 1.6: Impedancia conectada en el secundario de un transformador real.

$$\bar{U}_2 = -\bar{I}_2 \cdot \bar{Z}_L$$

Combinando la ecuación del secundario con la ecuación de la carga obtenemos la corriente en el secundario:

$$\bar{I}_2 = -\frac{j\omega M}{(R_2 + j\omega L_2) + \bar{Z}_L} \cdot \bar{I}_1$$

que podemos insertar en la ecuación del primario para obtener la impedancia de entrada:

$$\bar{Z}_{in} = \frac{\bar{U}_1}{\bar{I}_1} = (R_1 + j\omega L_1) + \frac{\omega^2 M^2}{(R_2 + j\omega L_2) + \bar{Z}_L} = \boxed{\bar{Z}_1 + \frac{\omega^2 M^2}{\bar{Z}_2 + \bar{Z}_L}} \quad (1.12)$$

Podemos interpretar este resultado como la conexión serie de la impedancia de primario con una impedancia transformada, obtenida a partir de la conexión serie de la impedancia de secundario y la impedancia de carga.

Calculemos ahora el equivalente de Thévenin desde secundario de una fuente real conectada en el primario (figura 1.7).

La ecuación del generador es:

$$\bar{U}_1 = \bar{\epsilon}_g - \bar{I}_1 \cdot \bar{Z}_g$$

mientras que las ecuaciones del transformador se simplifican al tener en cuenta que $\bar{I}_2 = 0$:

$$\bar{U}_1 = (R_1 + j\omega L_1) \cdot \bar{I}_1$$

$$\bar{U}_2 = j\omega M \cdot \bar{I}_1$$

Despejamos la corriente de primario I_1 :

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{\epsilon}_g}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_g}$$

y la utilizamos en la ecuación del secundario para obtener la tensión de Thévenin:

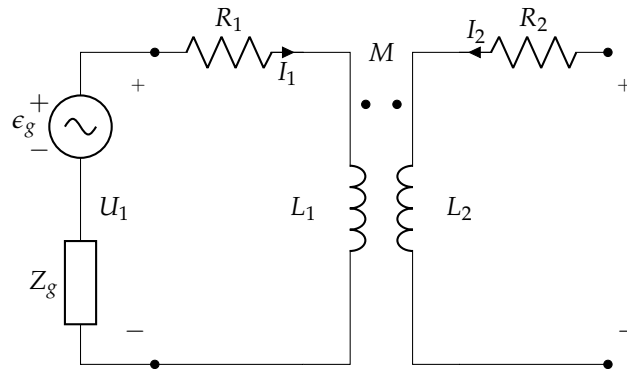


FIGURA 1.7: Fuente real conectada en el primario de un transformador real.

$$\bar{U}_2 = \bar{\epsilon}_{th} = \frac{j\omega M}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_g} \cdot \bar{\epsilon}_g \quad (1.13)$$

Este resultado recuerda a la expresión de un divisor de tensión, aunque el numerador está transformado respecto a la expresión original.

Para calcular la impedancia de Thévenin apagamos la fuente ϵ_g y conectamos una fuente de prueba en secundario (figura 1.8). Con esta conexión, las ecuaciones del transformador son:

$$\begin{aligned} \bar{U}_1 &= (R_1 + j\omega L_1) \cdot \bar{I}_1 + j\omega M \cdot \bar{I}_0 \\ \bar{\epsilon}_0 &= j\omega M \cdot \bar{I}_1 + (R_2 + j\omega L_2) \cdot \bar{I}_0 \end{aligned}$$

y la ecuación de la impedancia:

$$\bar{U}_1 = -\bar{Z}_g \cdot \bar{I}_1$$

Combinando estas ecuaciones obtenemos la impedancia de Thévenin:

$$\bar{Z}_{th} = \frac{\bar{\epsilon}_0}{\bar{I}_0} = \bar{Z}_2 + \frac{\omega^2 M^2}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_g} \quad (1.14)$$

Esta expresión, al igual que la ecuación 1.12, se asemeja a la conexión serie de la impedancia de secundario con una impedancia transformada obtenida a partir de la impedancia de primario y del generador.

1.2.2. Transformador Perfecto

Para facilitar el tratamiento circuital de un transformador, emplearemos el modelo del transformador perfecto (figura 1.9), que incluye dos simplificaciones:

- Las pérdidas resistivas son despreciables.

$$R_1 = R_2 = 0$$

- El acoplamiento es perfecto.

$$k = 1 \rightarrow \begin{cases} \phi_{12} = \phi_{22} \\ \phi_{21} = \phi_{11} \end{cases}$$

Las ecuaciones de este modelo de transformador son:

$$\begin{aligned} \bar{U}_1 &= j\omega L_1 \cdot \bar{I}_1 + j\omega M \cdot \bar{I}_2 \\ \bar{U}_2 &= j\omega M \cdot \bar{I}_1 + j\omega L_2 \cdot \bar{I}_2 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $k = 1$, a partir de las ecuaciones de $M_{12} = M_{21} = M$:

$$N_1 \frac{\phi_{12}}{i_2} = N_2 \frac{\phi_{21}}{i_1}$$

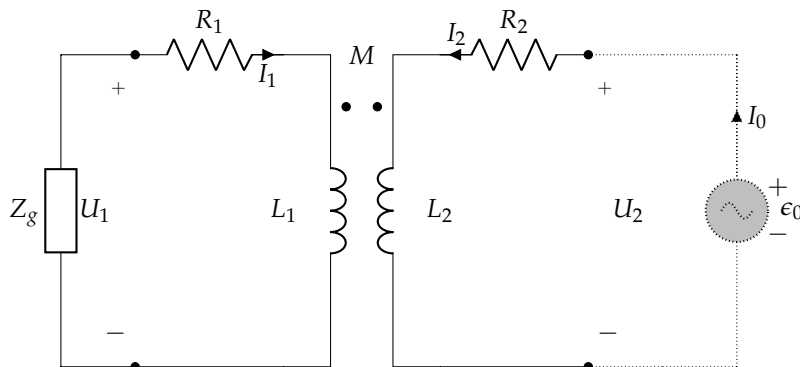


FIGURA 1.8: Cálculo de la impedancia de Thévenin de una fuente conectada en primario.

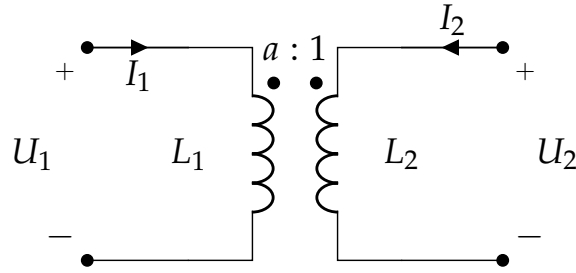


FIGURA 1.9: Representación circuital de un transformador perfecto.

podemos escribir:

$$N_1 \frac{\phi_{22}}{i_2} = N_2 \frac{\phi_{11}}{i_1}$$

Además, con las definiciones de L_1 y L_2 :

$$N_1 \frac{L_2}{N_2} = N_2 \frac{L_1}{N_1}$$

obtenemos la relación de transformación de un transformador perfecto:

$$\boxed{\frac{L_1}{L_2} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 = a^2} \quad (1.15)$$

Con esta relación de transformación podemos simplificar las ecuaciones del transformador. En primer lugar dividimos las ecuaciones:

$$\frac{\bar{U}_1}{\bar{U}_2} = \frac{j\omega L_1 \cdot \bar{I}_1 + j\omega M \cdot \bar{I}_2}{j\omega M \cdot \bar{I}_1 + j\omega L_2 \cdot \bar{I}_2}$$

y empleamos la relación de transformación:

$$\frac{L_1}{L_2} = a^2 \rightarrow \begin{cases} L_1 &= a^2 \cdot L_2 \\ M &= a \cdot L_2 \end{cases}$$

para escribir:

$$\frac{\bar{U}_1}{\bar{U}_2} = \frac{a^2 L_2 \cdot \bar{I}_1 + a L_2 \cdot \bar{I}_2}{a L_2 \cdot \bar{I}_1 + L_2 \cdot \bar{I}_2}$$

que, después de simplificar, conduce a la relación entre tensiones de un transformador perfecto:

$$\boxed{\frac{\bar{U}_1}{\bar{U}_2} = a = \frac{N_1}{N_2}} \quad (1.16)$$

Estas relaciones nos permiten simplificar los resultados obtenidos con el transformador real. En primer lugar, la impedancia de entrada en un transformador real con $R_1 = R_2 = 0$ es:

$$\bar{Z}_{in} = j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{j\omega L_2 + \bar{Z}_L}$$

A continuación, teniendo en cuenta la relación entre L_1 , L_2 y M :

$$\bar{Z}_{in} = j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{j\omega L_2 + \bar{Z}_L} = \frac{j\omega L_1 \bar{Z}_L}{j\omega L_2 + \bar{Z}_L}$$

y, finalmente, incorporando la relación de transformación:

$$\bar{Z}_{in} = a^2 \cdot \frac{j\omega L_2 \cdot \bar{Z}_L}{j\omega L_2 + \bar{Z}_L} = \frac{j\omega L_1 \cdot a^2 \cdot \bar{Z}_L}{j\omega L_1 + a^2 \cdot \bar{Z}_L} \quad (1.17)$$

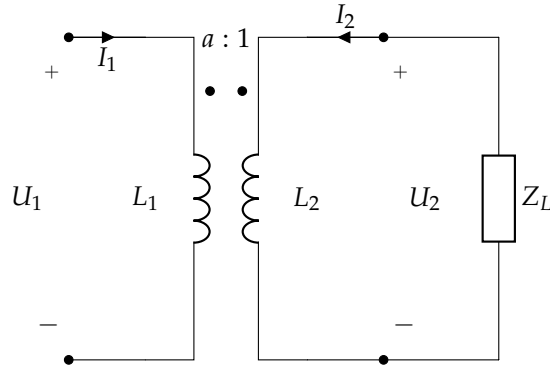


FIGURA 1.10: Impedancia conectada en el secundario de un transformador perfecto.

Esta expresión se puede interpretar como un factor de escala aplicado a una conexión en paralelo entre la inductancia de secundario y la impedancia de carga, o como una conexión en paralelo entre la inductancia de primario y la impedancia de carga con un factor de escala.

De forma equivalente, el equivalente de Thévenin de una fuente real conectada en primario es:

$$\bar{\epsilon}_{th} = \bar{U}_2 = \frac{j\omega M}{j\omega L_1 + \bar{Z}_g} \cdot \bar{\epsilon}_g$$

Teniendo en cuenta que $M = L_1/a$:

$$\bar{\epsilon}_{th} = \frac{1}{a} \cdot \left(\frac{j\omega L_1}{j\omega L_1 + \bar{Z}_g} \right) \cdot \bar{\epsilon}_g \quad (1.18)$$

Esta expresión corresponde a un divisor de tensión entre la impedancia del generador y la inductancia del primario, aplicando previamente un factor de escala.

Por otra parte, la impedancia de Thévenin es:

$$\bar{Z}_{th} = j\omega L_2 + \frac{\omega^2 M^2}{j\omega L_1 + \bar{Z}_g}$$

Aplicando las relaciones $L_2 = L_1/a^2$ y $M = L_1/a$ obtenemos:

$$\bar{Z}_{th} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{j\omega L_1 \cdot \bar{Z}_g}{j\omega L_1 + \bar{Z}_g} \quad (1.19)$$

Este resultado se puede interpretar como una impedancia equivalente de una conexión en paralelo entre la inductancia de primario y la impedancia del generador, aplicando previamente un factor de escala.

1.2.3. Transformador Ideal

Como siguiente y último paso en la simplificación del circuito que representa un transformador, vamos a considerar el transformador ideal (figura 1.12). Este modelo de transformador comparte con el

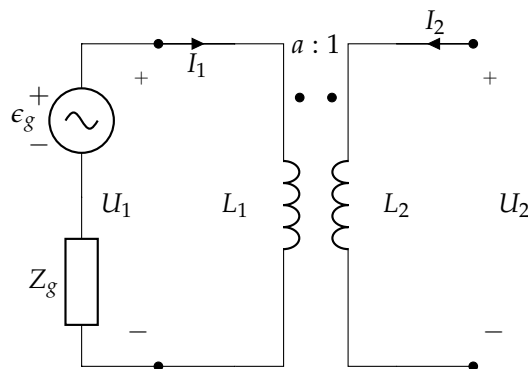


FIGURA 1.11: Fuente real conectada en el primario de un transformador perfecto.

transformador perfecto las dos condiciones ya conocidas (las pérdidas resistivas son despreciables, y el acoplamiento es perfecto) y añade una adicional: las bobinas tienen un número muy elevado de espiras.

$$N_1 \rightarrow \infty$$

$$N_2 \rightarrow \infty$$

Teniendo en cuenta la relación que la tensión tiene con el número de espiras, este modelo implica que los flujos fasoriales que atraviesan las bobinas deben ser nulos:

$$\bar{U}_1 = N_1 \bar{\phi}_1 \rightarrow \bar{\phi}_1 \rightarrow 0$$

$$\bar{U}_2 = N_2 \bar{\phi}_2 \rightarrow \bar{\phi}_2 \rightarrow 0$$

donde

$$\bar{\phi}_1 = \bar{\phi}_{11} + \bar{\phi}_{12}$$

$$\bar{\phi}_2 = \bar{\phi}_{22} + \bar{\phi}_{21}$$

Teniendo en cuenta que el acoplamiento es perfecto, $k = 1$:

$$\left. \begin{array}{l} \phi_{12} = \phi_{22} \\ \phi_{21} = \phi_{11} \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 = \bar{\phi}_{21} + \bar{\phi}_{12} \\ 0 = \bar{\phi}_{12} + \bar{\phi}_{21} \end{array} \right.$$

y, por tanto,

$$\bar{\phi}_{11} + \bar{\phi}_{22} = 0$$

Recuperando las definiciones de L_1 , L_2 :

$$L_1 = N_1 \frac{\phi_{11}}{I_1}; \quad L_2 = N_2 \frac{\phi_{22}}{I_2}$$

podemos escribir:

$$\frac{L_1 \bar{I}_1}{N_1} + \frac{L_2 \bar{I}_2}{N_2} = 0$$

y, a continuación,

$$L_1 = L_2 \cdot \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 \rightarrow \frac{N_1 L_2 \bar{I}_1}{N_2^2} + \frac{L_2 \bar{I}_2}{N_2} = 0$$

Por tanto, en un transformador ideal, las corrientes en primario y secundario están relacionadas mediante la expresión 1.20:

$$\boxed{\frac{\bar{I}_1}{\bar{I}_2} = \mp \frac{1}{a} = \mp \frac{N_2}{N_1}} \quad (1.20)$$

En esta ecuación, si las dos corrientes van en el mismo sentido (I_1 entrando en primario e I_2 saliendo de secundario), la ecuación tendrá un signo positivo.

Esta relación, unida a la relación de tensiones que obtuvimos en el modelo de transformador perfecto, (ecuación 1.16), nos permite calcular el triángulo de potencias en primario y secundario, y la relación entre ambos:

$$\bar{S}_2 = \bar{U}_2 \cdot (-\bar{I}_2)^* = \frac{1}{a} \cdot \bar{U}_1 \cdot a \cdot \bar{I}_1^* = \bar{S}_1$$

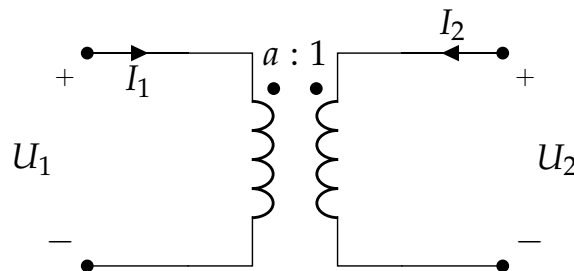


FIGURA 1.12: Representación circuital de un transformador ideal.

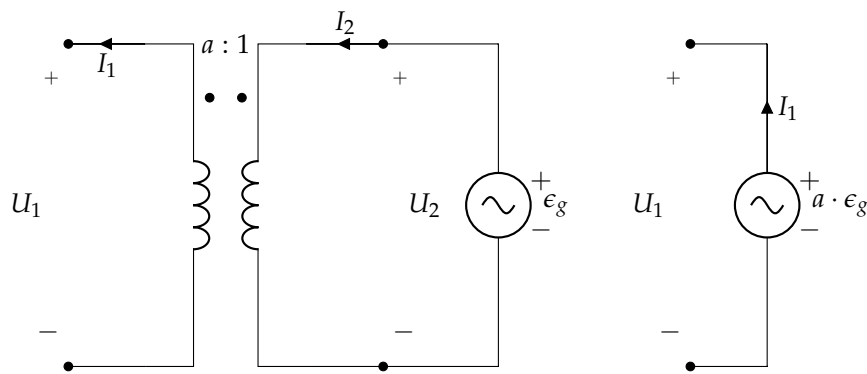
En esta ecuación aplicamos un signo negativo a la corriente I_2 dado su sentido en la figura 1.12. Así pues, un transformador ideal no consume ni potencia activa ni potencia reactiva (ecuación 1.21):

$$\boxed{\bar{S}_1 = \bar{S}_2} \quad \boxed{P_1 = P_2} \quad \boxed{Q_1 = Q_2} \quad (1.21)$$

Transferencia de Circuitos

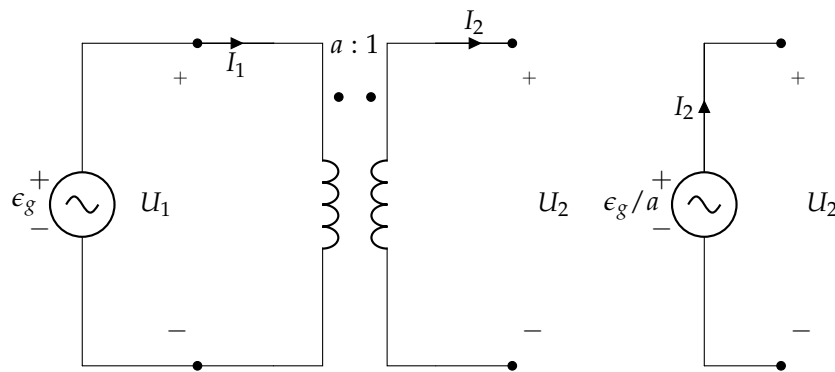
El modelo de transformador ideal permite transferir circuitos de primario a secundario y viceversa de forma sencilla. A continuación, las figuras de la izquierda representan los circuitos con transformador ideal, y las de la derecha el circuito equivalente sin transformador una vez realizada la transferencia. Todos los transformadores de estos circuitos tienen los puntos en concordancia y las corrientes en el mismo sentido. En consecuencia, los signos de todas las ecuaciones son positivos. En caso contrario, habrá que adaptar los signos como corresponda.

- Fuente de tensión ideal de secundario a primario



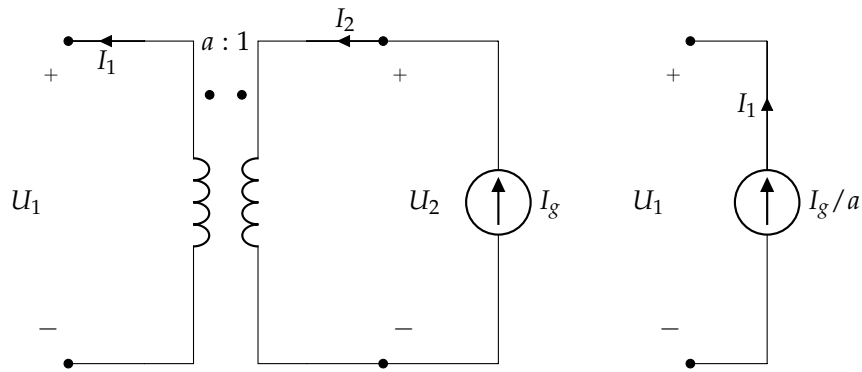
$$\bar{U}_1 = a \cdot \bar{U}_2 \rightarrow \boxed{\bar{\epsilon}_{g1} = a \cdot \bar{\epsilon}_g}$$

- Fuente de Tensión de primario a secundario



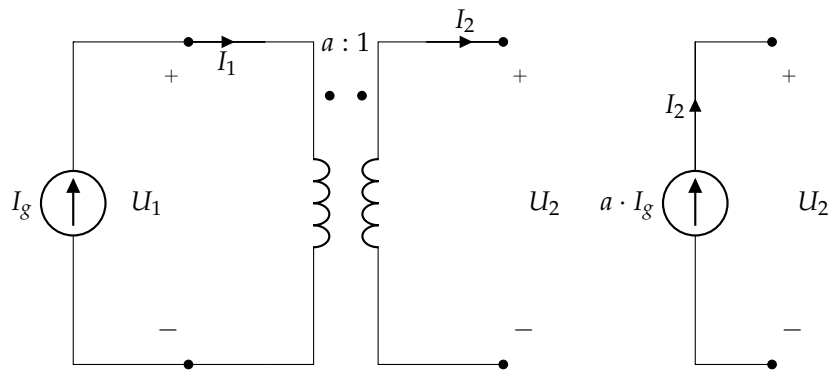
$$\bar{U}_2 = \bar{U}_1 / a \rightarrow \boxed{\bar{\epsilon}_{g2} = \bar{\epsilon}_g / a}$$

- Fuente de corriente de secundario a primario



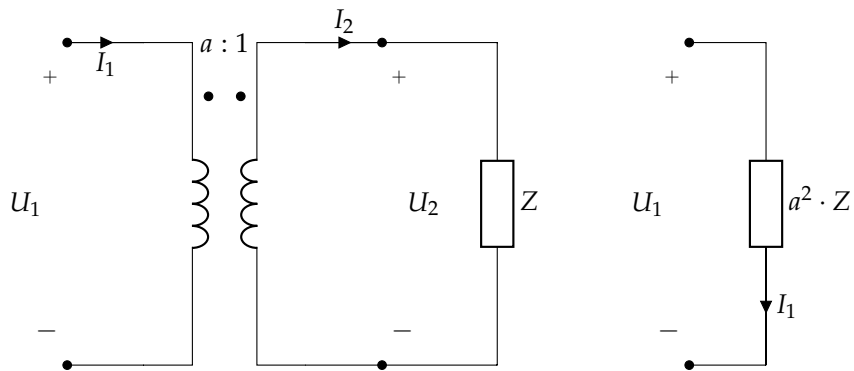
$$\bar{I}_1 = \bar{I}_2 / a \rightarrow \boxed{\bar{I}_{g1} = \bar{I}_g / a}$$

- Fuente de corriente de primario a secundario



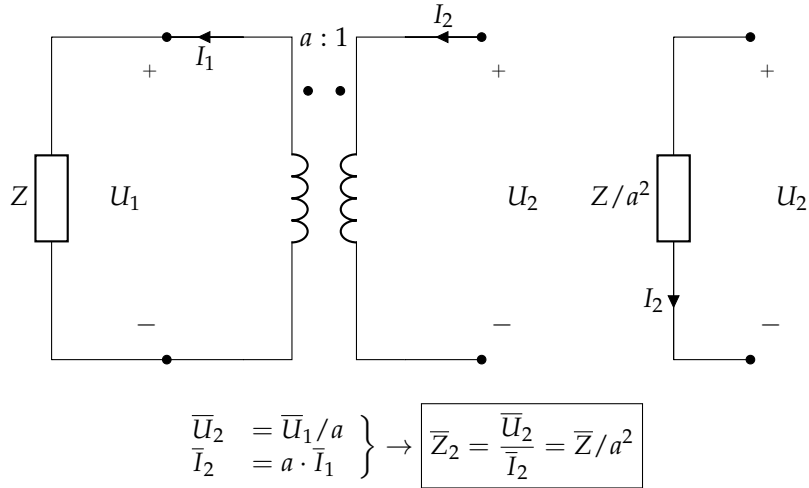
$$\bar{I}_2 = a \cdot \bar{I}_1 \rightarrow \boxed{\bar{I}_{g2} = a \cdot \bar{I}_g}$$

- Impedancia de secundario a primario



$$\left. \begin{array}{l} \bar{U}_1 = a \cdot \bar{U}_2 \\ \bar{I}_1 = \bar{I}_2 / a \end{array} \right\} \rightarrow \boxed{\bar{Z}_1 = \frac{\bar{U}_1}{\bar{I}_1} = a^2 \cdot \bar{Z}}$$

- Impedancia de primario a secundario



1.2.4. Transformador Perfecto y Transformador Ideal

En la ecuación 1.17 obteníamos dos expresiones para la impedancia de entrada vista desde el primario de un transformador perfecto. Teniendo en cuenta cómo realizar transferencia de circuitos con un transformador ideal, podemos volver a interpretar estas dos expresiones.

La primera expresión es la impedancia equivalente de una inductancia L_1 en paralelo con una impedancia Z_L transferida de secundario a primario de un transformador ideal. Tal y como se ve en la figura 1.13, esta expresión permite sustituir el transformador perfecto por un transformador ideal en paralelo con la inductancia de primario.

$$\bar{Z}_{in} = \frac{j\omega L_1 \cdot (a^2 \bar{Z}_L)}{j\omega L_1 + (a^2 \cdot \bar{Z}_L)}$$

La segunda expresión es la impedancia equivalente de una inductancia L_2 transferida de secundario a primario de un transformador ideal en paralelo con una impedancia Z_L . Tal y como se ve en la figura 1.14, esta expresión permite sustituir el transformador perfecto por un transformador ideal en paralelo con la inductancia de secundario.

$$\bar{Z}_{in} = a^2 \cdot \frac{j\omega L_2 \cdot \bar{Z}_L}{j\omega L_2 + \bar{Z}_L}$$

Este mismo razonamiento puede aplicarse a transformadores perfectos con fuentes de tensión en primario (figura 1.15), cuyas expresiones se recogían en las ecuaciones 1.19 y 1.18:

$$\bar{Z}_{th} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{j\omega L_1 \cdot \bar{Z}_g}{j\omega L_1 + \bar{Z}_g}$$

$$\bar{\epsilon}_{th} = \frac{1}{a} \cdot \left(\frac{j\omega L_1}{j\omega L_1 + \bar{Z}_g} \right) \cdot \bar{\epsilon}_g$$

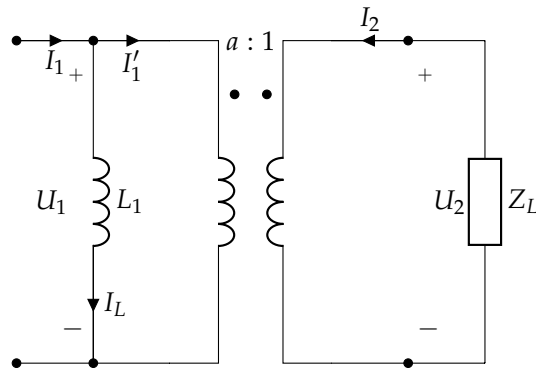


FIGURA 1.13: Circuito equivalente de un transformador perfecto con una impedancia de carga usando un transformador ideal y la inductancia de primario.

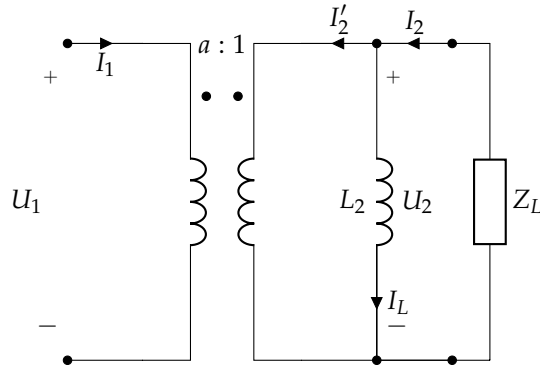


FIGURA 1.14: Circuito equivalente de un transformador perfecto con una impedancia de carga usando un transformador perfecto empleando la inductancia de primario.

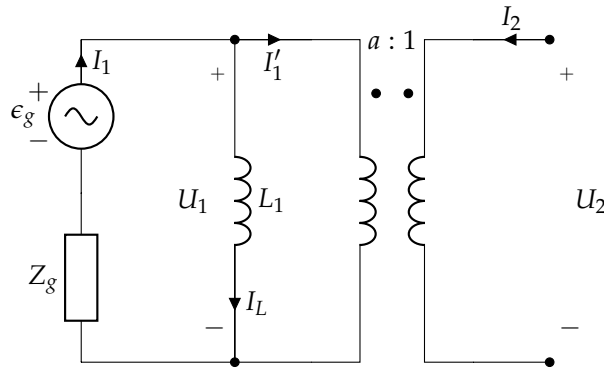


FIGURA 1.15: Circuito equivalente de un transformador perfecto con una fuente de tensión conectada en primario

En estos ejemplos, observamos que podemos sustituir un transformador perfecto por un transformador ideal en paralelo con una de sus dos inductancias, bien en primario o bien en secundario, según convenga a los propósitos del circuito.

Resolvamos otro ejemplo aplicando estas observaciones, una fuente de tensión real conectada en secundario (1.16). La impedancia equivalente será:

$$\bar{Z}_{th} = a^2 \cdot \frac{j\omega L_2 \cdot \bar{Z}_g}{j\omega L_2 + \bar{Z}_g}$$

mientras que la tensión de Thévenin es:

$$\bar{\epsilon}_{th} = a \cdot \left(\frac{j\omega L_2}{j\omega L_2 + \bar{Z}_g} \right) \cdot \bar{\epsilon}_g$$

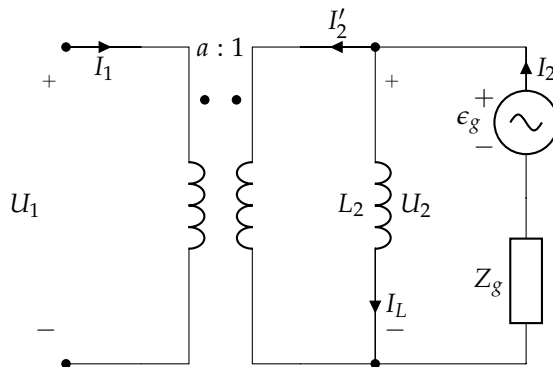


FIGURA 1.16: Circuito equivalente de un transformador perfecto con una fuente de tensión conectada en secundario.

1.2.5. Transformador de Varios Devanados

Hasta ahora hemos tratado con transformadores compuestos por dos bobinas acopladas. En esta sección ampliaremos el estudio a transformadores de tres devanados, y obtendremos ecuaciones y circuitos equivalentes que son aplicables a transformadores de varios devanados.

Las ecuaciones de un transformador real de tres devanados, cuya representación circuital se muestra en la figura 1.17, son las siguientes:

$$\begin{aligned}\bar{U}_1 &= (R_1 + j\omega L_1) \cdot \bar{I}_1 + j\omega M_{12} \cdot \bar{I}_2 + j\omega M_{13} \cdot \bar{I}_3 \\ \bar{U}_2 &= j\omega M_{12} \cdot \bar{I}_1 + (R_2 + j\omega L_2) \cdot \bar{I}_2 + j\omega M_{23} \cdot \bar{I}_3 \\ \bar{U}_3 &= j\omega M_{13} \cdot \bar{I}_1 + j\omega M_{12} \cdot \bar{I}_2 + (R_3 + j\omega L_3) \cdot \bar{I}_3\end{aligned}$$

Si aplicamos las condiciones de transformador perfecto (sección 1.2.2), la representación circuital es la de la figura 1.18 y las ecuaciones son:

$$\begin{aligned}\bar{U}_1 &= j\omega L_1 \cdot \bar{I}_1 + j\omega M_{12} \cdot \bar{I}_2 + j\omega M_{13} \cdot \bar{I}_3 \\ \bar{U}_2 &= j\omega M_{12} \cdot \bar{I}_1 + j\omega L_2 \cdot \bar{I}_2 + j\omega M_{23} \cdot \bar{I}_3 \\ \bar{U}_3 &= j\omega M_{13} \cdot \bar{I}_1 + j\omega M_{12} \cdot \bar{I}_2 + j\omega L_3 \cdot \bar{I}_3\end{aligned}$$

Si empleamos las relaciones de transformación de un transformador perfecto:

$$\begin{aligned}\frac{L_1}{L_2} &= \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 = a_{12}^2 \\ \frac{L_1}{L_3} &= \left(\frac{N_1}{N_3}\right)^2 = a_{13}^2\end{aligned}$$

obtenemos las relaciones entre las tensiones de los devanados:

$$\frac{\bar{U}_1}{\bar{U}_2} = a_{12} \quad (1.22)$$

$$\frac{\bar{U}_1}{\bar{U}_3} = a_{13} \quad (1.23)$$

Aplicando a continuación las condiciones de transformador ideal (sección 1.2.3), las relaciones de corriente en el circuito de la figura 1.19 son:

$$N_1 \bar{I}_1 \pm N_2 \bar{I}_2 \pm N_3 \bar{I}_3 = 0 \rightarrow \bar{I}_1 = \mp 1/a_{12} \cdot \bar{I}_2 \mp 1/a_{13} \cdot \bar{I}_3 \quad (1.24)$$

En la ecuación 1.24 emplearemos el signo positivo cuando las corrientes correspondientes tengan el mismo sentido y negativo con sentidos opuestos.

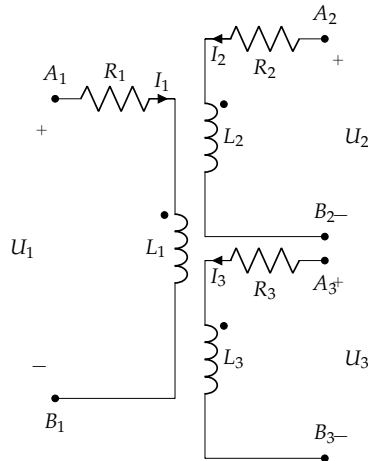


FIGURA 1.17: Representación circuital de un transformador real de varios devanados.

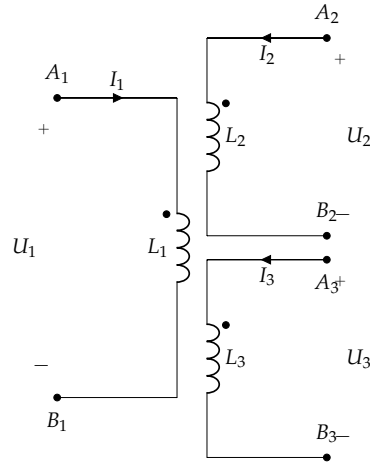


FIGURA 1.18: Representación circuital de un transformador perfecto de varios devanados.

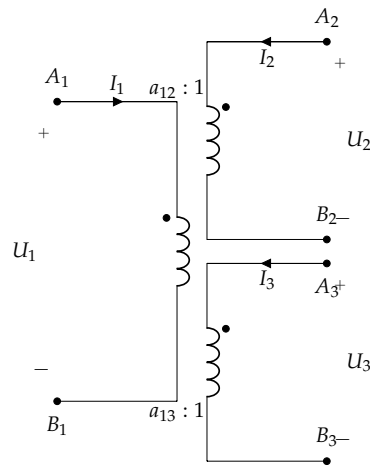


FIGURA 1.19: Representación circuital de un transformador ideal de varios devanados.

Con estas relaciones de tensiones y corrientes podemos obtener la impedancia equivalente vista desde un devanado de impedancias conectadas en los otros devanados (figura 1.20). Las ecuaciones que corresponden a los devanados con impedancias son:

$$\begin{aligned}\bar{U}_2 &= \bar{Z}_2 \cdot \bar{I}_2 \\ \bar{U}_3 &= \bar{Z}_3 \cdot \bar{I}_3\end{aligned}$$

Combinando estas dos ecuaciones con las relaciones entre tensiones y corrientes (ecuaciones 1.23 y 1.24) obtenemos la admitancia vista en el devanado sin carga. La ecuación 1.25 se puede interpretar como la admitancia equivalente de dos impedancias conectadas en paralelo y transferidas al devanado sin carga (figura 1.21).

$$\bar{Y}_{in} = \frac{\bar{I}_1}{\bar{U}_1} = \frac{1}{a_{12}^2 \bar{Z}_2} + \frac{1}{a_{13}^2 \bar{Z}_3} \quad (1.25)$$

Ahora bien, ¿qué ocurre si el transformador no es ideal sino perfecto (figura 1.22)? En este caso podemos sustituir el transformador perfecto por su equivalente de transformador ideal con una inductancia en paralelo (sección 1.2.4), tal y como muestra la figura 1.23. En el circuito resultante podemos aplicar la relación obtenida en la ecuación 1.25 para concluir con el circuito equivalente de la figura 1.24. En este circuito la inductancia del devanado sin carga está en paralelo con las impedancias de carga previamente transferidas a este devanado.

1.2.6. Autotransformador

Terminamos este capítulo con una sección dedicada al autotransformador. Este tipo de transformador posee un único devanado alrededor de un núcleo ferromagnético con tres terminales de conexión

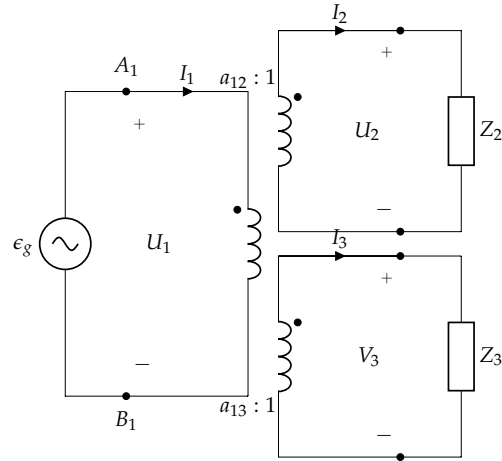


FIGURA 1.20: Transformador ideal de varios devanados con una impedancia conectada en uno de ellos.

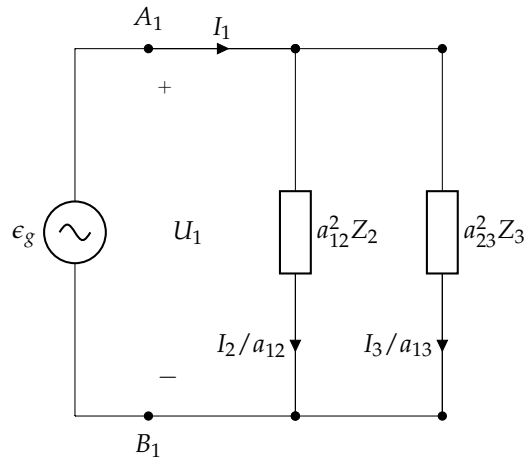


FIGURA 1.21: Circuito equivalente de un transformador ideal de tres devanados con impedancias conectadas en dos devanados.

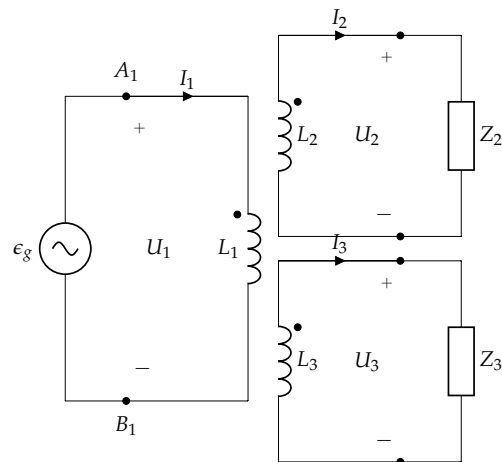


FIGURA 1.22: Representación circuital de un transformador perfecto de tres devanados con impedancias conectadas en dos devanados.

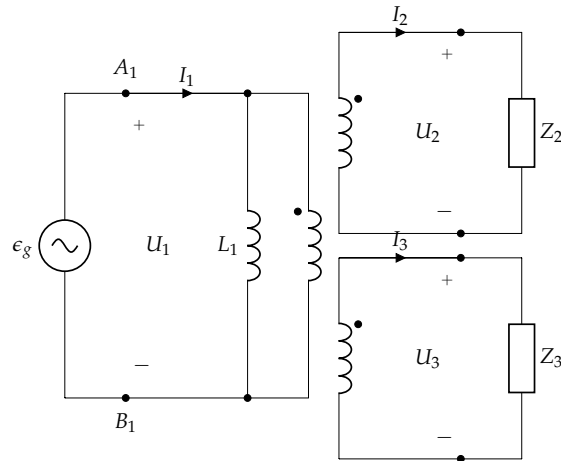


FIGURA 1.23: Representación circuital del transformador ideal equivalente de un transformador perfecto de tres devanados con impedancias conectadas en dos devanados.

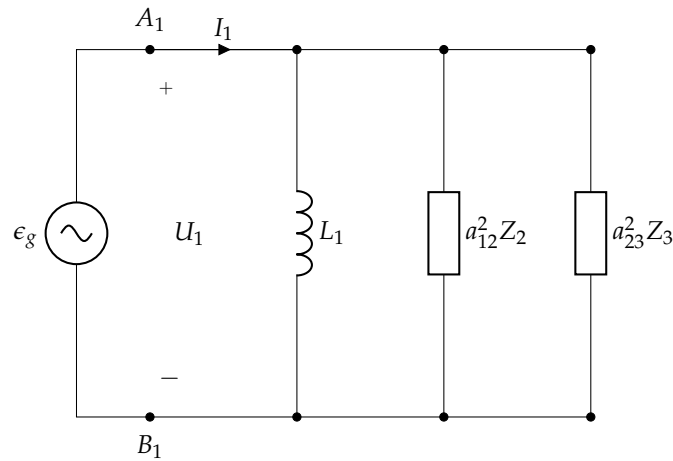


FIGURA 1.24: Circuito equivalente de un transformador perfecto de tres devanados con impedancias conectadas en dos devanados.

eléctrica (figura 1.25). Este tipo de transformador es más ligero que los anteriores, y permite regular la tensión de salida si el terminal intermedio es móvil. Sin embargo, el aislamiento galvánico que existía en los anteriores transformadores desaparece en esta configuración.

Las ecuaciones de un autotransformador perfecto son:

$$\begin{aligned}\bar{U}_1 &= j\omega L_1 \cdot \bar{I}_1 + j\omega(M + L_2) \cdot \bar{I}_2 \\ \bar{U}_2 &= j\omega(M + L_2) \cdot \bar{I}_1 + j\omega L_2 \cdot \bar{I}_2\end{aligned}$$

siendo $M = \sqrt{L' \cdot L_2}$.

Una representación alternativa del autotransformador se muestra en la figura 1.26, cuyas ecuaciones son:

$$\begin{aligned}\bar{U}_1 &= j\omega(L' + L_2 + 2M) \cdot \bar{I}_1 + j\omega(L_2 + M) \cdot \bar{I}_2 \\ \bar{U}_2 &= j\omega(L_2 + M) \cdot \bar{I}_1 + j\omega L_2 \cdot \bar{I}_2\end{aligned}$$

Comparando las ecuaciones de ambas representaciones obtenemos la equivalencia $L_1 = L' + L_2 + 2M$. Además, en estas ecuaciones podemos observar que el término $L_2 + M$ juega el papel de coeficiente de inducción mutua entre los dos terminales. Así pues, si sustituimos este término por $M' = L_2 + M$ tendremos las ecuaciones de un transformador perfecto equivalente (figura 1.27). Comprobemos que

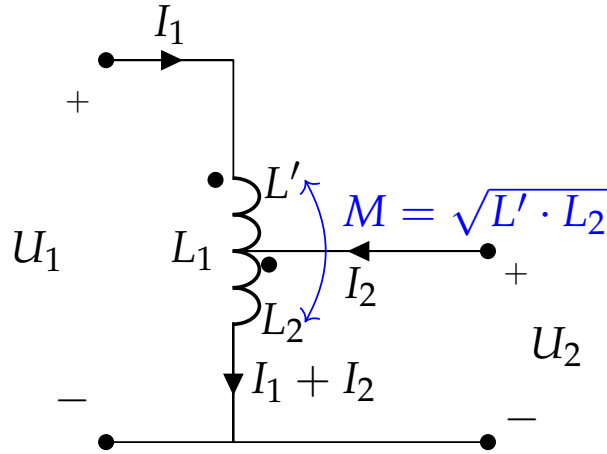


FIGURA 1.25: Representación circuital de un autotransformador perfecto.

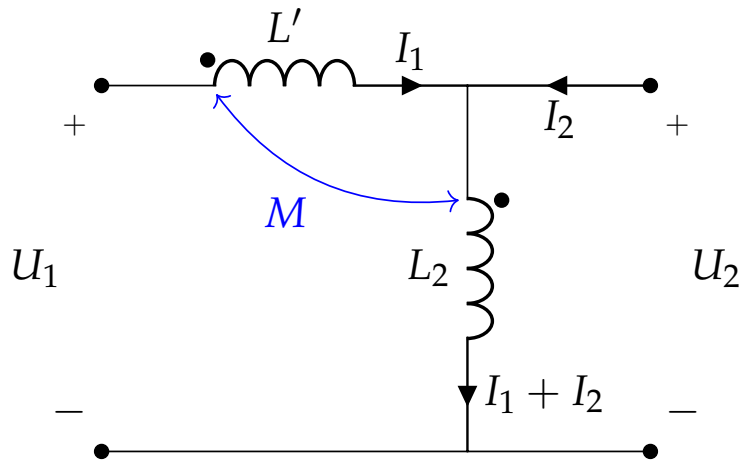


FIGURA 1.26: Representación alternativa de un autotransformador perfecto.

M' es realmente el coeficiente de inducción mutua entre L_1 y L_2 :

$$\begin{aligned}
 M' &= \sqrt{L_1 \cdot L_2} = \\
 &= \sqrt{(L' + L_2 + 2M)L_2} = \\
 &= \sqrt{L'L_2 + L_2^2 + 2ML_2} = \\
 &= \sqrt{M^2 + L_2^2 + 2ML_2} = \\
 &= M + L_2
 \end{aligned}$$

En consecuencia, podemos sustituir un autotransformador perfecto por un transformador perfecto respetando las relaciones:

$$\begin{aligned}
 L_1 &= L' + L_2 + 2M \\
 M &= \sqrt{L' \cdot L_2} \\
 M' &= M + L_2
 \end{aligned}$$

En el caso de un autotransformador ideal (figura 1.28), los terminales vendrán definidos por los números de vueltas de cada uno de ellos, N_1 y N_2 . Así, la equivalencia es aún más sencilla, empleando únicamente la relación de transformación del transformador ideal $a = \frac{N_1}{N_2}$ (figura 1.29).

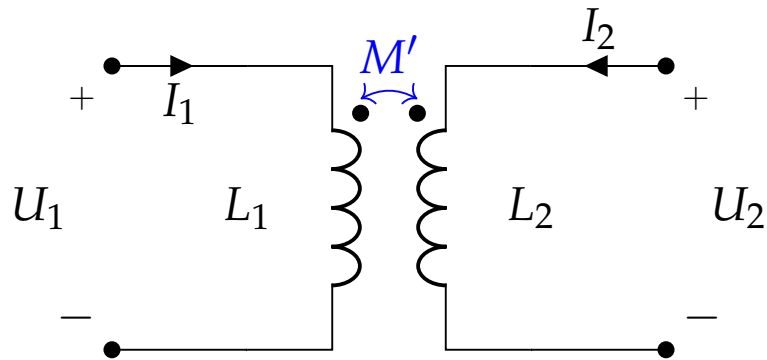


FIGURA 1.27: Transformador perfecto equivalente de un autotransformador perfecto.

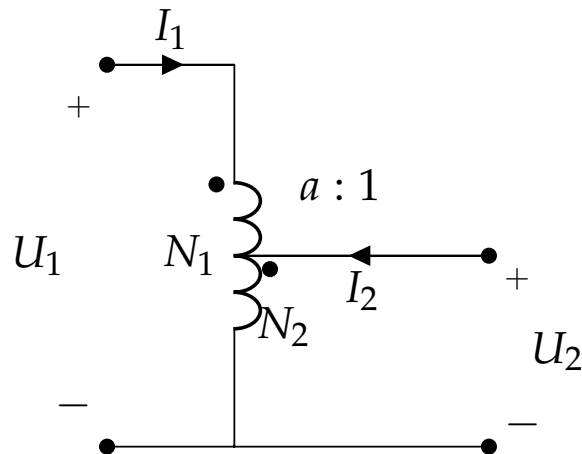


FIGURA 1.28: Representación circuital de un autotransformador ideal.

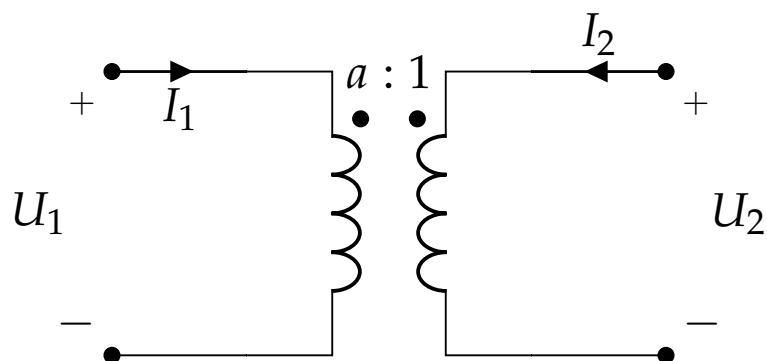


FIGURA 1.29: Transformador ideal equivalente de un autotransformador ideal.

