Corriente alterna sinusoidal

Teoría de Circuitos

Oscar Perpiñán Lamigueiro

Forma de Onda

- La salida de los generadores (de tensión o de corriente) son funciones que pueden variar con el tiempo.
- La dependencia funcional $u = u(t)$ o $i = i(t)$ se denomina forma de onda.

Clasificación

Signo de la magnitud

- Unidireccionales
  - Signo constante
  - El valor puede ser constante (corriente continua) o variable.
- Bidireccionales
  - Signo variable con el tiempo.

Repetición del valor de la magnitud

- Periódicas
  El valor de la magnitud se repite de forma regular.
- No periódicas
  El valor de la magnitud varía de forma arbitraria con el tiempo.

Valores que definen una onda periódica

Período y frecuencia

- Período (T): tiempo que tarda en repetirse la función.
- Frecuencia (f): número de repeticiones por unidad de tiempo.
- $f = \frac{1}{T}$

Valor medio

$$U_m = \frac{1}{T} \int_T u(t)\, dt \qquad I_m = \frac{1}{T} \int_T i(t)\, dt$$

Valor eficaz

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_T u^2(t)\, dt} \qquad I = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_T i^2(t)\, dt}$$

Valores que definen una onda periódica

- Valores de pico

$$Y_{max} = \max(y(t)) \qquad Y_{min} = \min(y(t))$$

- Amplitud o valor pico a pico

$$|Y_{max} - Y_{min}|$$

- Factor de amplitud

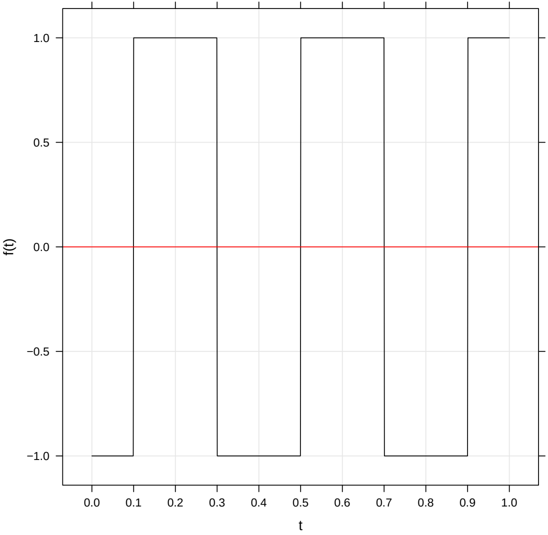
$$FA = \frac{Y_{max}}{Y}$$

- Factor de forma

$$FF = \frac{Y}{Y_m}$$

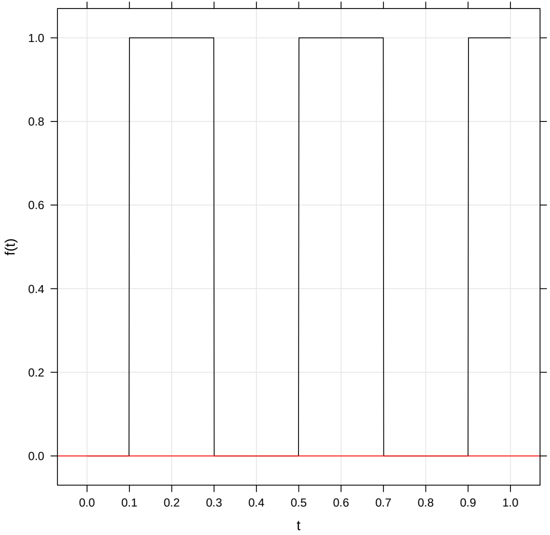
Formas de Onda Periódicas

Tren de Pulsos Bidireccional



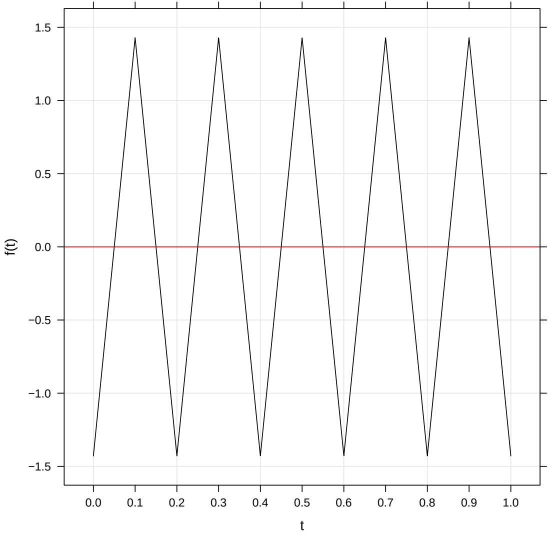
Formas de Onda Periódicas

Tren de Pulsos Unidireccional



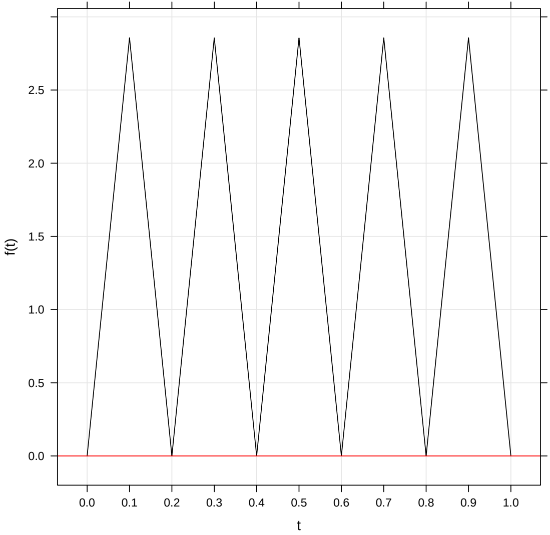
Formas de Onda Periódicas

Onda Triangular Bidireccional



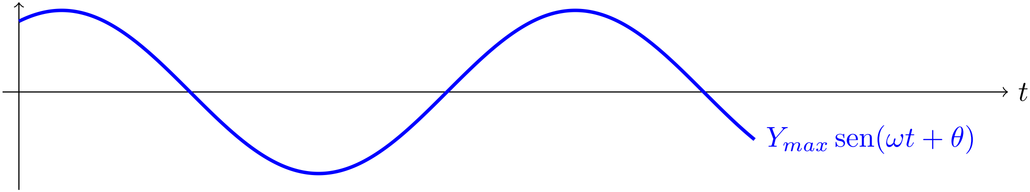
Formas de Onda Periódicas

Onda Triangular Unidireccional

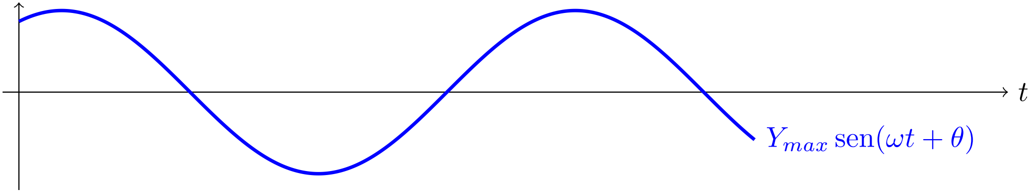


Formas de Onda Periódicas

Onda sinusoidal



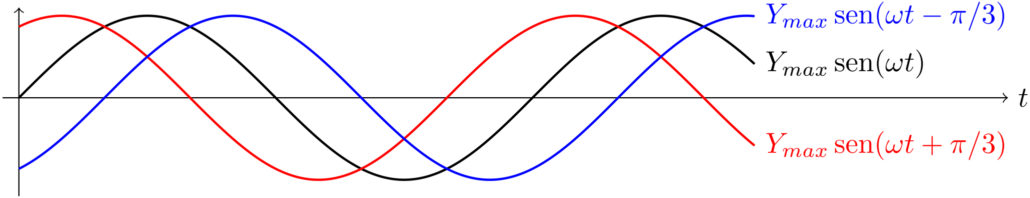
Definición



$$y(t) = Y_{max} \cdot \mathrm{sen}(\omega \cdot t + \theta)$$

- Y_{max} valor máximo de la onda.
- T: periodo de la onda (segundos)
- $\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T}$: pulsación (radianes/segundo)
- $f = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} = \frac{1}{T}$: frecuencia (Hz)
- θ: fase (radianes o grados)

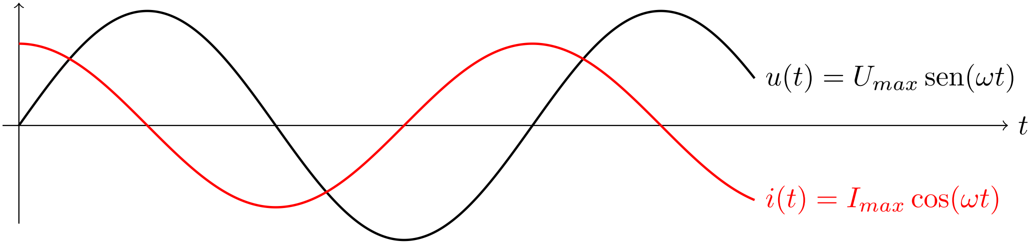
Fase



$$y(t) = Y_{max} \cdot \mathrm{sen}(\omega \cdot t + \theta)$$

- θ: fase (radianes o grados)
  - Es el argumento de la onda para t=0
  - Tomando una onda como referencia, si la fase es 0º, se dice que están en fase con la onda de referencia.
  - Si la fase es positiva, se dice que la onda adelanta respecto a la referencia.

Señales en Cuadratura



- Cuando el desfase entre dos señales es de 90º ($\theta_I - \theta_U = \pi/2$), se dice que están en cuadratura.
- El paso por cero de una señal coincide con el paso por el máximo/mínimo de la otra señal.

Valor medio y valor eficaz

Valor medio

$$Y_m = \frac{1}{T} \int_T y(t)\, dt$$

$$Y_m = \frac{1}{T} \int_T Y_{max} \cdot \operatorname{sen}(\omega \cdot t + \theta)\, dt = 0$$

Valor eficaz

$$Y = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_T y^2(t)\, dt}$$

$$Y = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_T \left(Y_{max} \cdot \operatorname{sen}(\omega \cdot t + \theta)\right)^2 dt} = \boxed{\frac{Y_{max}}{\sqrt{2}}}$$

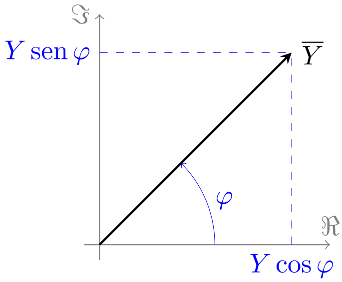
Representación fasorial

- Un fasor es un **número complejo** que representa una señal sinusoidal para simplificar cálculos.
- El **módulo** del fasor es el **valor eficaz**. El **argumento** es la **fase**.
- Descartamos pulsación: No se puede emplear cuando hay frecuencias diferentes en un mismo circuito.

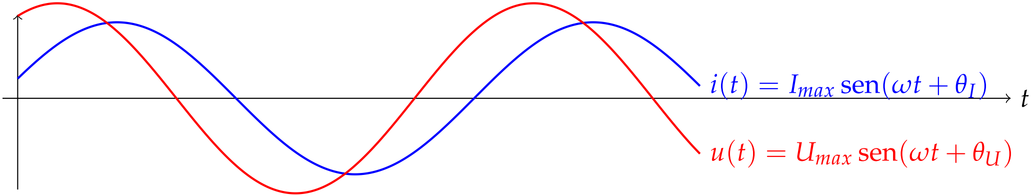
$$\overline{Y} = Y \cdot e^{j\theta}$$

$$\overline{Y} = Y\underline{/\theta}$$

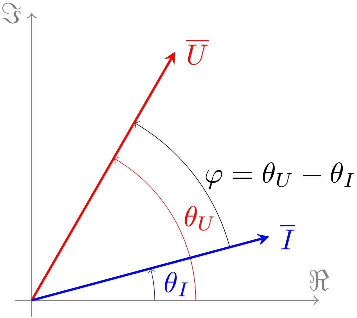
$$\overline{Y} = Y \cdot (\cos(\theta) + \mathrm{j} \cdot \mathrm{sen}(\theta))$$



Tensión y corriente en notación fasorial



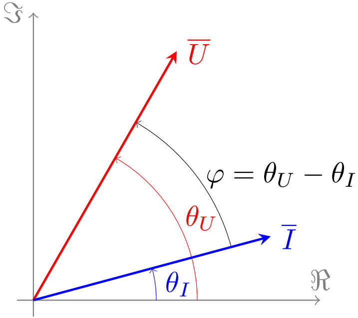
$$\overline{U} = U\underline{/\theta_U}$$
$$\bar{I} = I\underline{/\theta_I}$$



Impedancia: relación entre fasores de tensión y corriente

$$\overline{U} = \overline{Z} \cdot \overline{I}$$

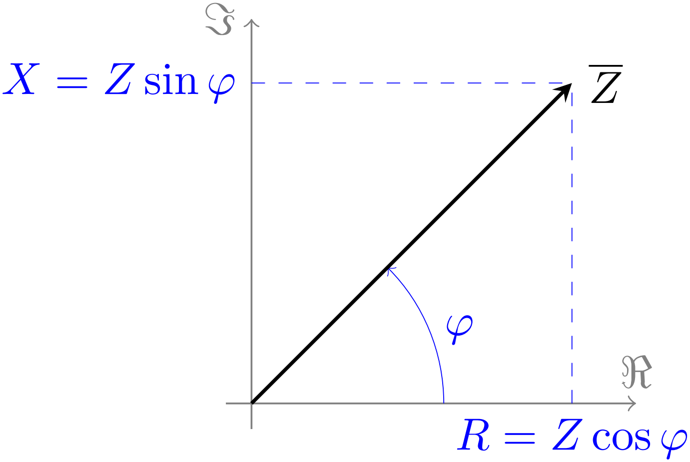
$$\overline{Z} = \frac{\overline{U}}{\overline{I}}$$



$$\boxed{\overline{Z} = \frac{U}{I}\underline{/\theta_U - \theta_I} \Rightarrow \begin{cases} Z = \frac{U}{I} \\ \varphi = \theta_U - \theta_I \end{cases}}$$

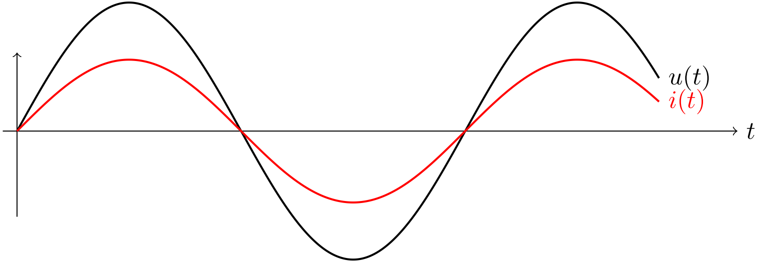
Impedancia Genérica

$$\overline{Z} = R + jX$$



Circuito Resistivo

Un circuito resistivo no desfasa (**tensión y corriente en fase**).

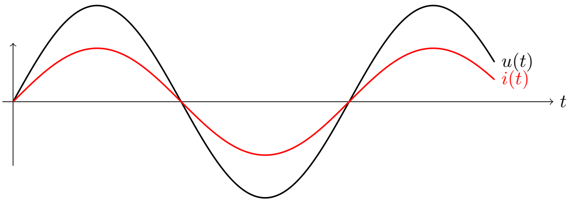


$$i(t) = I_{max} \cdot \text{sen}(\omega t + \theta_I)$$

$$\begin{aligned} u(t) &= R \cdot i(t) = \\ &= R \cdot I_{max} \cdot \text{sen}(\omega t + \theta_I + 0) = \\ &= U_{max} \cdot \text{sen}(\omega t + \theta_U) \end{aligned}$$

Circuito Resistivo

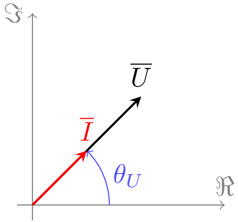
Un circuito resistivo no desfasa (**tensión y corriente en fase**).

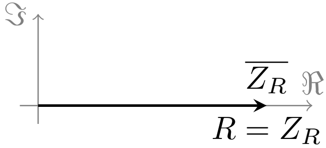


$$Z = \frac{U}{I} = R$$

$$\varphi = \theta_U - \theta_I = 0$$

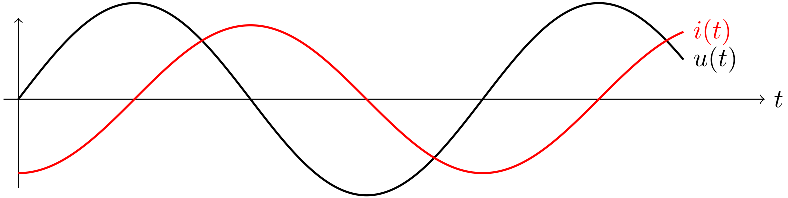
$$\boxed{\overline{Z}_R = R\underline{/0}}$$





Circuito Inductivo puro

Un circuito inductivo puro genera **señales en cuadratura** y **retrasa la corriente**.

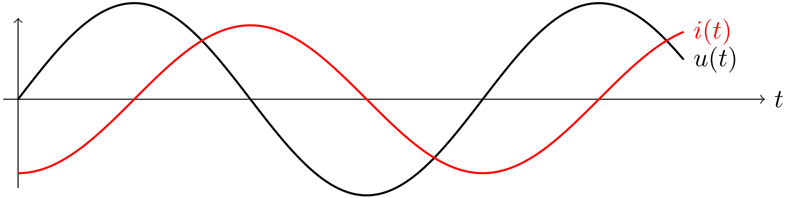


$$i(t) = I_{max} \cdot \text{sen}(\omega t + \theta_I)$$

$$\begin{aligned} u(t) &= L \cdot \frac{di(t)}{dt} = \\ &= \omega L \cdot I_{max} \cdot \text{sen}(\omega t + \theta_I + \pi/2) = \\ &= U_{max} \cdot \text{sen}(\omega t + \theta_U) \end{aligned}$$

Circuito Inductivo puro

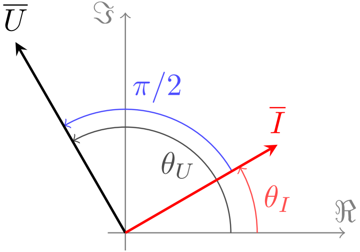
Un circuito inductivo puro genera **señales en cuadratura** y **retrasa la corriente**.

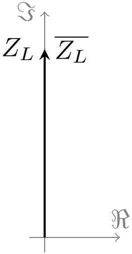


$$Z = \frac{U}{I} = \omega L$$

$$\varphi = \theta_U - \theta_I = \pi/2$$

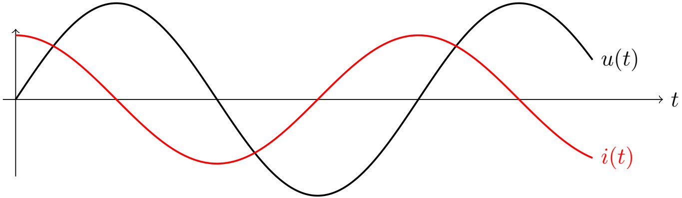
$$\boxed{\overline{Z}_L = j\omega L = \omega L \underline{/90^\circ}}$$





Circuito Capacitivo puro

Un circuito capacitivo puro genera **señales en cuadratura** y **adelanta la corriente**.

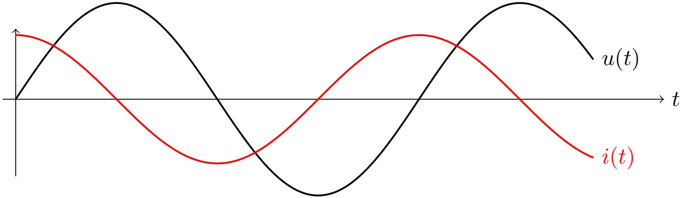


$$i(t) = I_{max} \cdot \text{sen}(\omega t + \theta_I)$$

$$\begin{aligned} u(t) &= 1/C \cdot \int_{-\infty}^{t} i(\tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{\omega C} \cdot I_{max} \cdot \text{sen}(\omega t + \theta_I - \pi/2) = \\ &= U_{max} \cdot \text{sen}(\omega t + \theta_U) \end{aligned}$$

Circuito Capacitivo puro

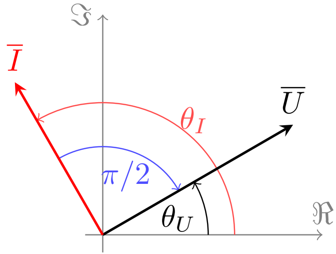
Un circuito capacitivo puro genera **señales en cuadratura** y **adelanta la corriente**.

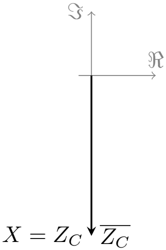


$$Z = \frac{U}{I} = \frac{1}{\omega C}$$

$$\varphi = \theta_U - \theta_I = -\pi/2$$

$$\boxed{\overline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{\omega C}\underline{/-90^\circ}}$$

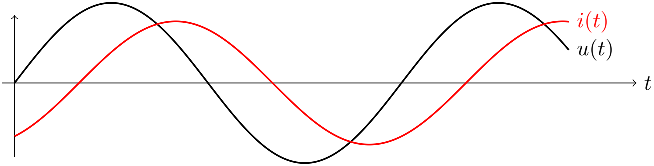


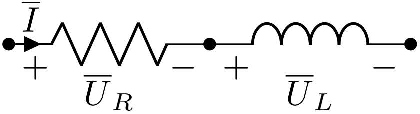


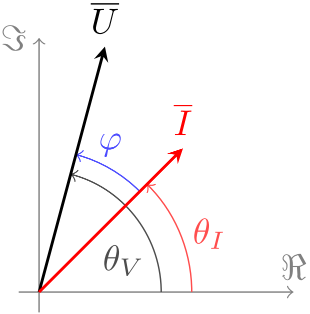
Resumen

Elemento	Impedancia	Módulo	Ángulo
Resistencia	R	R	0
Bobina	$j\omega L$	ωL	90°
Condensador	$1/(j\omega C)$	$1/(\omega C)$	-90°

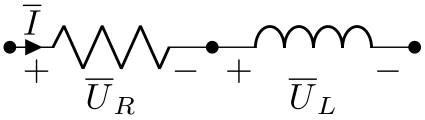
Circuito RL (inductivo con pérdidas)







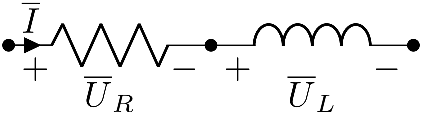
Circuito RL (inductivo con pérdidas)



$$\overline{U}_R = R\bar{I}$$
$$\overline{U}_L = j\omega L\bar{I}$$

$$\overline{U} = \overline{U}_R + \overline{U}_L =$$
$$= (R + j\omega L)\bar{I}$$

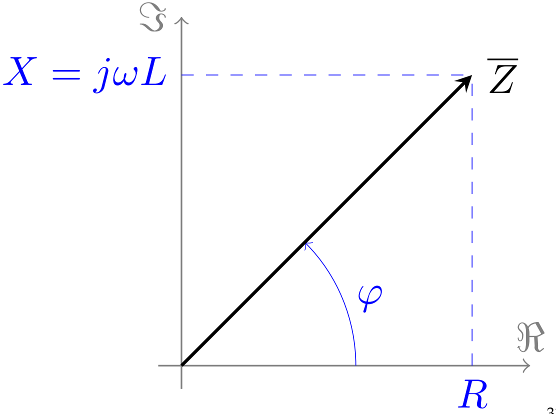
Circuito RL (inductivo con pérdidas)



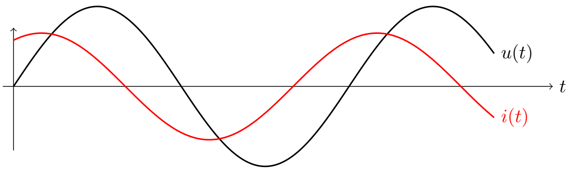
$$\overline{Z} = R + j\omega L \Rightarrow \boxed{\varphi > 0}$$

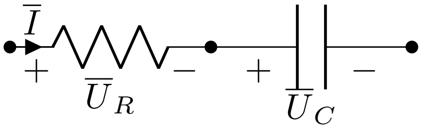
$$|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$

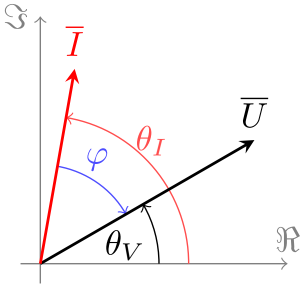
$$\varphi = \text{atan}\frac{\omega L}{R}$$



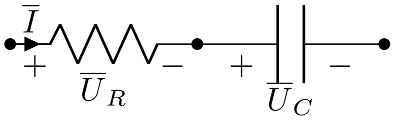
Circuito RC (capacitivo con pérdidas)







Circuito RC (capacitivo con pérdidas)



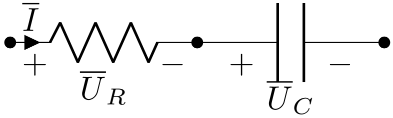
$$\overline{U}_R = R\overline{I}$$

$$\overline{U}_C = -j\frac{1}{\omega C}\overline{I}$$

$$\overline{U} = \overline{U}_R + \overline{U}_C =$$

$$= (R - j\frac{1}{\omega C})\overline{I}$$

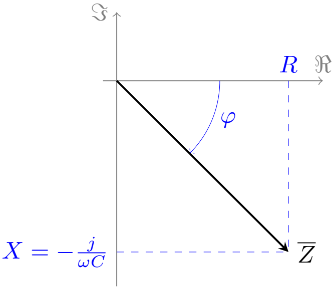
Circuito RC (capacitivo con pérdidas)



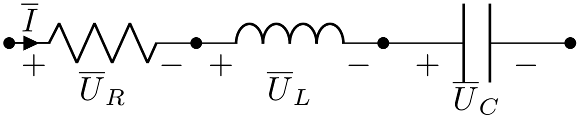
$$\overline{Z} = R - \frac{j}{\omega C} \Rightarrow \boxed{\varphi < 0}$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}$$

$$\varphi = -\text{atan}\frac{1}{\omega RC}$$



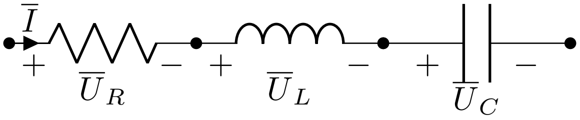
Circuito RLC serie



$$\overline{U}_R = R\overline{I}$$
$$\overline{U}_L = j\omega L\overline{I}$$
$$\overline{U}_C = -j\frac{1}{\omega C}\overline{I}$$

$$\begin{aligned}\overline{U} &= \overline{U}_R + \overline{U}_L + \overline{U}_C = \\ &= \left(R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})\right)\overline{I}\end{aligned}$$

Circuito RLC serie



$$\overline{Z} = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})$$

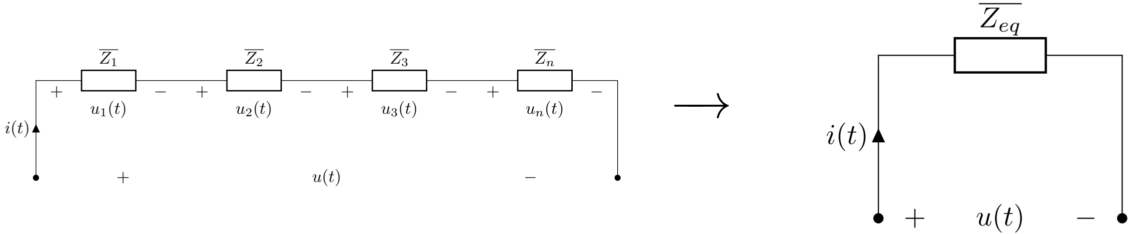
$$|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$$

$$\varphi = \text{atan}\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

- $\varphi > 0 \Rightarrow \omega L > \frac{1}{\omega C}$: inductivo
- $\varphi < 0 \Rightarrow \omega L < \frac{1}{\omega C}$: capacitivo
- $\varphi = 0 \Rightarrow \omega L = \frac{1}{\omega C}$: resistivo (resonancia)

$$\boxed{u(t) = Z \cdot I_{max}\,\text{sen}(\omega t + \theta_I + \varphi)}$$

Circuito serie general

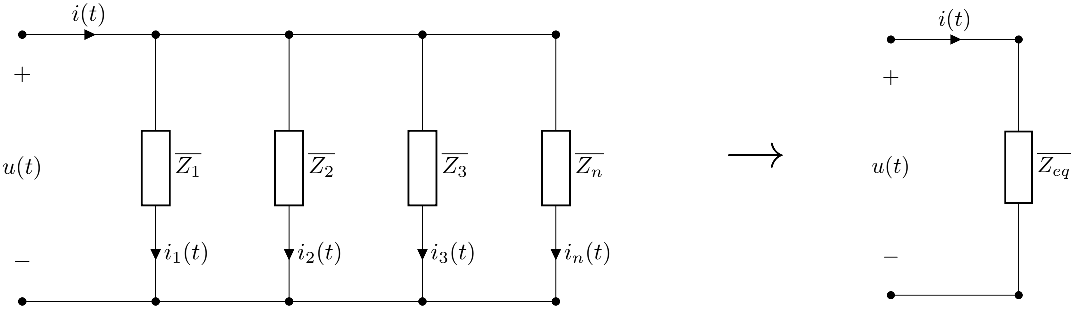


$$\overline{U} = \overline{U}_1 + \overline{U}_2 + ... + \overline{U}_n \ = \ \overline{I} \cdot (\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2 + ... + \overline{Z}_n) \ = \ \overline{I} \cdot \overline{Z}_{eq}$$

$$\boxed{\overline{Z}_{eq} = \sum_{i=1}^{n} \overline{Z}_i}$$

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^{n} R_i \qquad X_{eq} = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

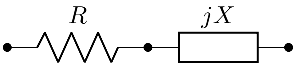
Circuito paralelo general



$$\overline{I} = \overline{I}_1 + \overline{I}_2 + \ldots + \overline{I}_n = \overline{U} \cdot \left(\frac{1}{\overline{Z}_1} + \frac{1}{\overline{Z}_2} + \ldots + \frac{1}{\overline{Z}_n} \right) = \frac{\overline{U}}{\overline{Z}_{eq}}$$

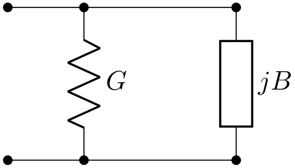
$$\boxed{\frac{1}{\overline{Z}_{eq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\overline{Z}_i}}$$

Impedancia y Admitancia



$$\overline{U} = \overline{Z} \cdot \overline{I}$$

$$\overline{Z} = R + jX$$

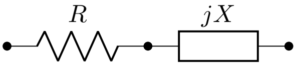


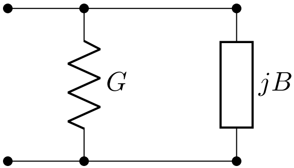
$$\overline{I} = \overline{Y} \cdot \overline{U}$$

$$\overline{Y} = G + jB$$

$$\boxed{\overline{Y} = \frac{1}{\overline{Z}} \rightarrow \begin{cases} |\overline{Y}| = \dfrac{1}{|\overline{Z}|} \\ \varphi_Y = -\varphi_Z = -\varphi \end{cases}}$$

Impedancia y Admitancia





$$\overline{Z} = \frac{1}{G + jB} \rightarrow \begin{cases} R = \dfrac{G}{G^2 + B^2} \\[2ex] X = -j\dfrac{B}{G^2 + B^2} \end{cases}$$

$$\overline{Y} = \frac{1}{R + jX} \rightarrow \begin{cases} G = \dfrac{R}{R^2 + X^2} \\[2ex] B = -j\dfrac{X}{R^2 + X^2} \end{cases}$$

Expresión general

Sea la tensión referencia de fases. Si $\varphi > 0$ (inductivo) la corriente está retrasada respecto de la tensión (*circuito en retraso*).

$$u(t) = U_{max}\cos\omega t$$
$$i(t) = I_{max}\cos(\omega t - \varphi)$$
$$p(t) = u(t)\cdot i(t)$$

Expresión general

$$
\begin{aligned}
p(t) &= (\sqrt{2} \cdot U \cdot \cos(\omega t)) \cdot (\sqrt{2} \cdot I \cdot \cos(\omega t - \varphi)) = \\
&= 2 \cdot U \cdot I \cdot \cos(\omega t) \cdot \cos(\omega t - \varphi) = \\
&= UI \cdot (\cos(2\omega t - \varphi) + \cos(\varphi)) = \\
&= UI \cdot (\cos(2\omega t)\cos(\varphi) + \operatorname{sen}(2\omega t)\operatorname{sen}(\varphi) + \cos(\varphi))
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{p(t) = UI\cos(\varphi) + UI\cos(\varphi)\cos(2\omega t) + UI\operatorname{sen}(\varphi)\operatorname{sen}(2\omega t)}
$$

Expresión general

$$p(t) = UI\cos(\varphi) + UI\cos(\varphi)\cos(2\omega t) + UI\,\mathrm{sen}(\varphi)\,\mathrm{sen}(2\omega t)$$

$$P = UI\cos\varphi \qquad Q = UI\,\mathrm{sen}\,\varphi$$

$$\boxed{p(t) = P\cdot(1+\cos(2\omega t)) + Q\cdot\mathrm{sen}(2\omega t)}$$

Circuito Resistivo

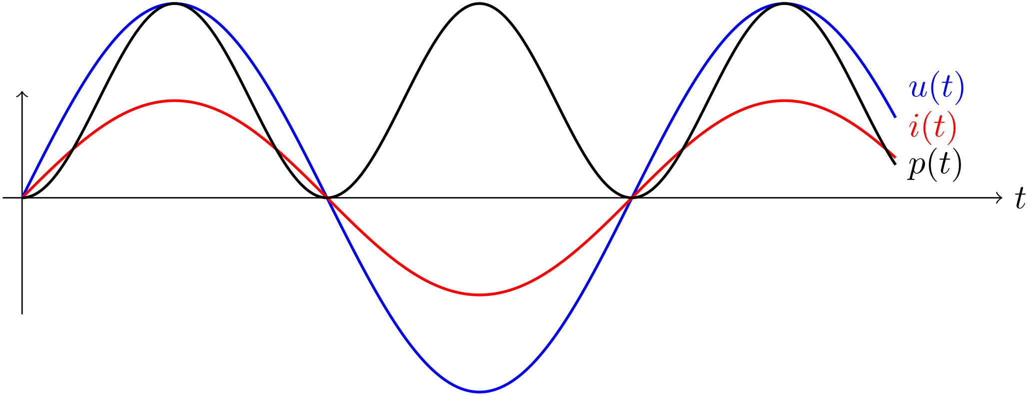
$$P = UI\cos\varphi \quad Q = UI\,\mathrm{sen}\,\varphi$$

$$p(t) = P\cdot(1+\cos(2\omega t)) + Q\cdot\mathrm{sen}(2\omega t)$$

$$\varphi = 0 \rightarrow \begin{cases} P = UI = U^2/R = I^2R \\ Q = 0 \end{cases}$$

$$p(t) = P\cdot(1+\cos(2\omega t))$$

Circuito Resistivo



- Fluctúa al doble de frecuencia.
- Es siempre positiva.

Circuito Inductivo puro

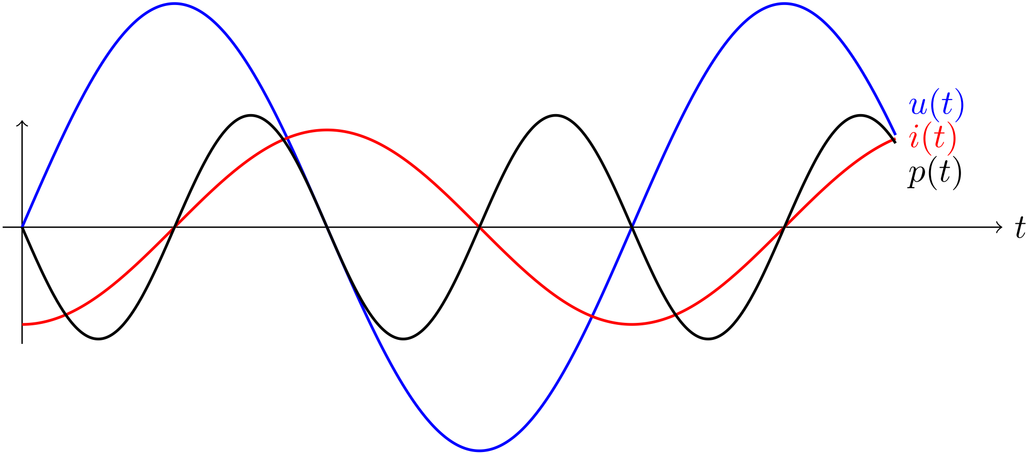
$$P = UI\cos\varphi \quad Q = UI\,\mathrm{sen}\,\varphi$$

$$p(t) = P \cdot (1 + \cos(2\omega t)) + Q \cdot \mathrm{sen}(2\omega t)$$

$$\varphi = \pi/2 \rightarrow \begin{cases} P = 0 \\ Q = UI = \frac{U^2}{\omega L} = I^2 \omega L \end{cases}$$

$$p(t) = Q \cdot \mathrm{sen}(2\omega t)$$

Circuito Inductivo puro



- Fluctúa al doble de frecuencia.
- Pasa por los ceros de tensión y corriente.
- Su valor medio es nulo.

Circuito Capacitivo puro

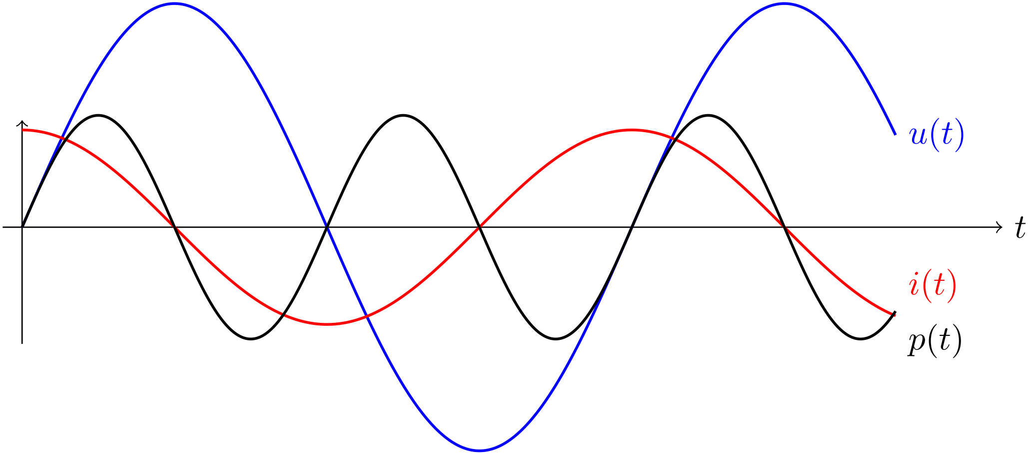
$$P = UI\cos\varphi \quad Q = UI\,\mathrm{sen}\,\varphi$$

$$p(t) = P\cdot(1+\cos(2\omega t)) + Q\cdot\mathrm{sen}(2\omega t)$$

$$\varphi = -\pi/2 \rightarrow \begin{cases} P = 0 \\ Q = -UI = -U^2\omega C = -\frac{I^2}{\omega C} \end{cases}$$

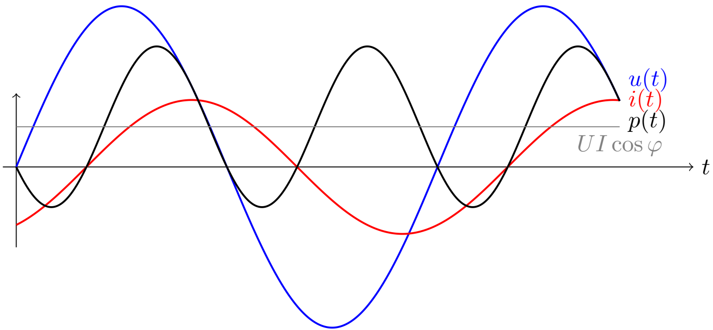
$$p(t) = Q\cdot\mathrm{sen}(2\omega t)$$

Circuito Capacitivo puro



- Fluctúa al doble de frecuencia.
- Pasa por los ceros de tensión y corriente.
- Su valor medio es nulo.

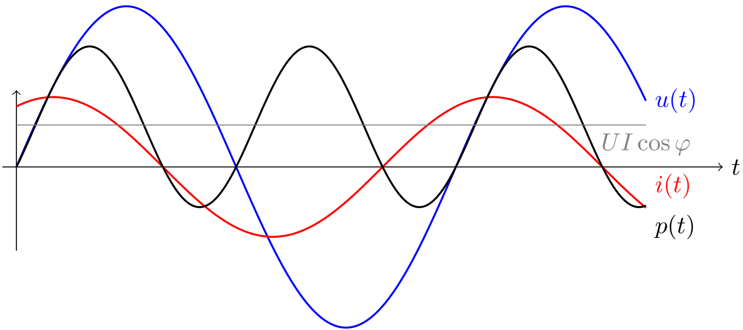
Circuito Inductivo con pérdidas



$$p(t) = P \cdot (1 + \cos(2\omega t)) + Q \cdot \operatorname{sen}(2\omega t)$$

Valor medio positivo, $P = UI\cos\varphi$

Circuito Capacitivo con pérdidas



$$p(t) = P \cdot (1 + \cos(2\omega t)) + Q \cdot \operatorname{sen}(2\omega t)$$

Valor medio positivo, $P = UI\cos\varphi$

Triángulo de Potencias

- Potencia Activa $[W]$

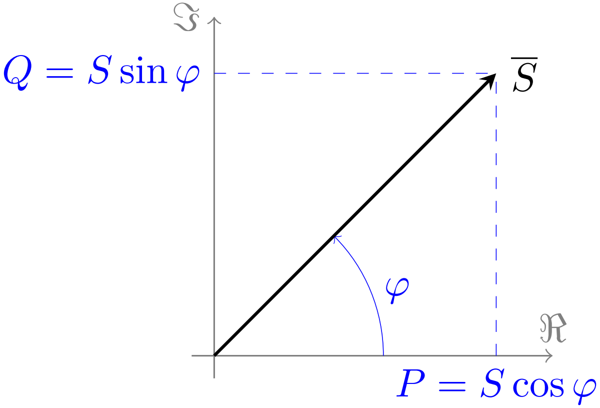
$$\boxed{P = U \cdot I \cdot \cos(\varphi) = R \cdot I^2}$$

- Potencia Reactiva $[var]$

$$\boxed{Q = U \cdot I \cdot \operatorname{sen}(\varphi) = X \cdot I^2}$$

- Potencia Aparente $[VA]$

$$\boxed{\overline{S} = P + jQ = \overline{U} \cdot \overline{I}^*}$$



$$\begin{aligned}
\overline{U} &= U\angle 0 \\
\overline{I} &= I\angle -\varphi \\
\overline{U}\overline{I}^* &= U\angle 0 \cdot I\angle \varphi = UI\angle \varphi \\
&= UI(\cos\varphi + j\operatorname{sen}\varphi) = \\
&= P + jQ
\end{aligned}$$

$$|S| = U \cdot I$$

$$\varphi_S = \varphi_Z = \varphi$$

Potencia de elementos: Resistencia

$$\varphi = 0 \Rightarrow \begin{cases} P_R = RI^2 \\ Q_R = 0 \\ S_R = P_R \end{cases}$$

- Consume potencia activa
- No consume potencia reactiva

Potencia de elementos: Inductancia

$$\varphi = \pi/2 \Rightarrow \begin{cases} P_L = 0 \\ Q_L = \omega L I^2 \\ \overline{S}_L = \omega L I^2 \underline{/\pi/2} \end{cases}$$

- No consume potencia activa
- Consume potencia reactiva ($Q > 0$)

Potencia de elementos: Condensador

$$\varphi = -\pi/2 \Rightarrow \begin{cases} P_L = 0 \\ Q_C = -\omega C U^2 \\ \overline{S}_C = \omega C U^2 \underline{/-\pi/2} \end{cases}$$

- No consume potencia activa
- Genera potencia reactiva ($Q < 0$)

Teorema de Boucherot

- En un circuito con múltiples elementos, la potencia aparente total es la suma de las potencias aparentes individuales.

$$\overline{S} = \sum_{i=1}^{n} \overline{S}_i$$

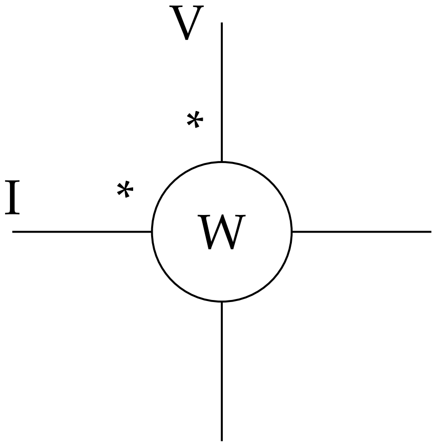
$$P + jQ = \sum_{i=1}^{n} (P_i + jQ_i)$$

- La potencia activa (reactiva) total es la suma de las potencias activas (reactivas) individuales.

$$P = \sum_{i=1}^{n} P_i$$

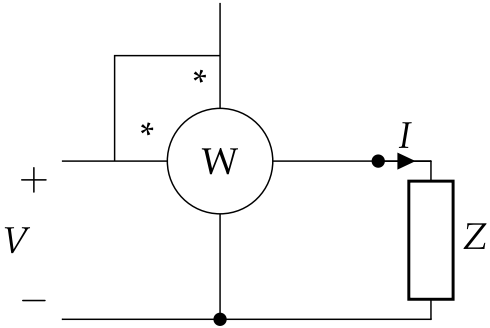
$$Q = \sum_{i=1}^{n} Q_i$$

Medida de potencia



Vatímetro: equipo de medida de 4 terminales (1 par para tensión, 1 par para corriente)

Medida de potencia



Habitualmente se emplea con 3 terminales cortocircuitando terminales con *.

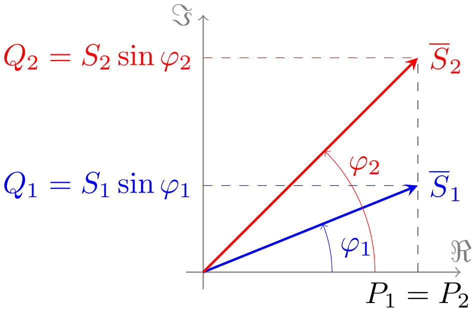
$$\boxed{W = |V||I|\cos(\varphi_V - \varphi_I) = P_Z}$$

Factor de potencia

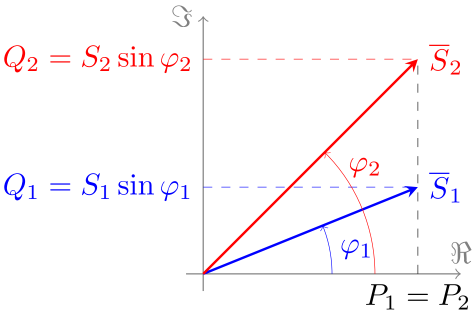
El factor de potencia, $\cos(\varphi)$, representa la aportación de potencia activa dentro de la potencia aparente.

$$P = S \cos \varphi$$

Sean dos sistemas con **misma tensión y potencia activa**, y factores de potencia $\cos \varphi_2 < \cos \varphi_1$ ($Q_2 > Q_1$)



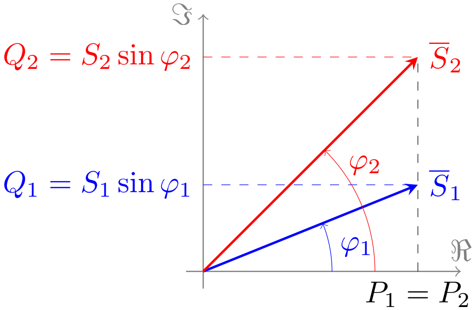
Potencia Aparente



El sistema 2 requiere **mayor potencia aparente** (generador mayor) para alimentar la misma potencia activa.

$$\left(\frac{P}{\cos\varphi_1} = S_1\right) < \left(S_2 = \frac{P}{\cos\varphi_2}\right)$$

Sección de Conductores



El sistema 2 requiere **mayor sección** de cable para transportar la misma potencia activa.

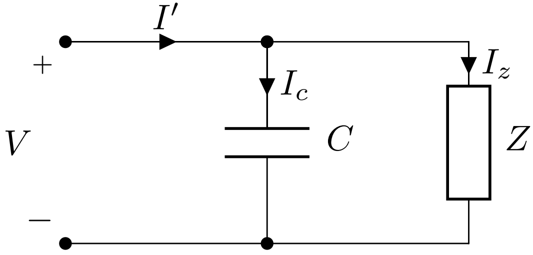
$$\left(\frac{P}{U\cos\varphi_1} = I_1\right) < \left(I_2 = \frac{P}{U\cos\varphi_2}\right)$$

Generación Local de Reactiva

- Comúnmente, el factor de potencia es **inductivo** (máquinas eléctricas industriales).
- La red debe suministrar potencia reactiva inductiva (influye en secciones de líneas y tamaños de generadores)
- Es necesario mejorar **localmente** el factor de potencia. Solución común: utilizar **bancos de condensadores** como suministradores de potencia reactiva.

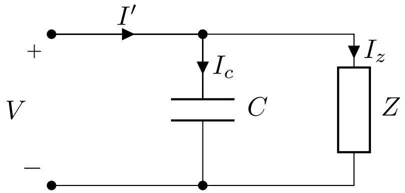
Compensación de Reactiva con Condensadores

Sea una carga de potencia activa P_z, potencia reactiva Q_z, factor de potencia $\cos\varphi$. Se desea **mejorar el factor de potencia** a $\cos\varphi' > \cos\varphi$.



$$
\begin{aligned}
P' &= P_z \\
Q' &= Q_c + Q_z \quad (Q' < Q_z) \\
\bar{I}' &= \bar{I}_c + \overline{I_z} \quad (I' < I_z)
\end{aligned}
$$

Cálculo de la Capacidad



$$\begin{aligned}
Q_z &= P_z \tan\varphi \\
Q' &= P_z \tan\varphi' \\
|Q_c| &= Q_z - Q' = P_z(\tan\varphi - \tan\varphi')
\end{aligned}$$

$$|Q_c| = \omega C U^2 \rightarrow \boxed{C = \frac{P_z(\tan\varphi - \tan\varphi')}{\omega U^2}}$$