

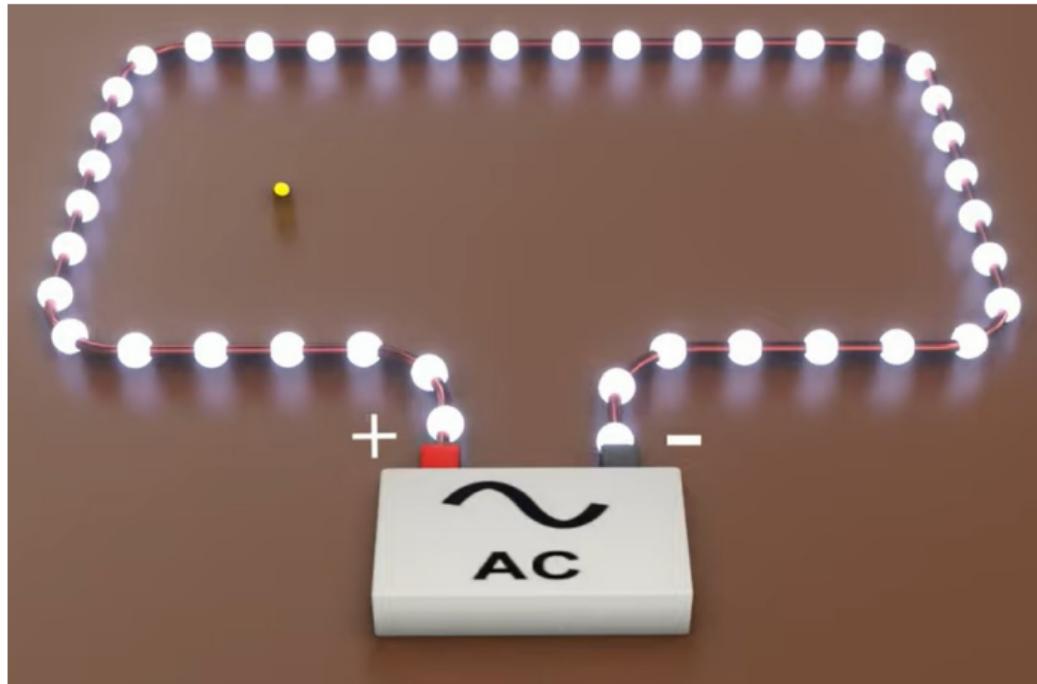
Corriente alterna senoidal

Teoría de Circuitos

Autor: Luis Badesa Bernardo

(basado en las diapositivas de Óscar Perpiñán Lamigueiro)

(clica en la imagen)



- ① Formas de onda**
- ② Onda senoidal**
- ③ Cálculo fasorial**
- ④ Respuesta de elementos pasivos a excitación senoidal**
- ⑤ Potencia en corriente alterna**

Forma de onda

- ▶ La salida de los generadores (de tensión o de corriente) es una función que puede variar con el tiempo
- ▶ La dependencia funcional $u = u(t)$ o $i = i(t)$ se denomina forma de onda
- ▶ En este Tema 2 vamos a centrarnos en **formas de onda periódicas** (su valor se repite a intervalos regulares) y, en concreto, en **señales senoidales**



Formas de onda periódicas

$$y(t) = y(t + T) = y(t + n \cdot T)$$

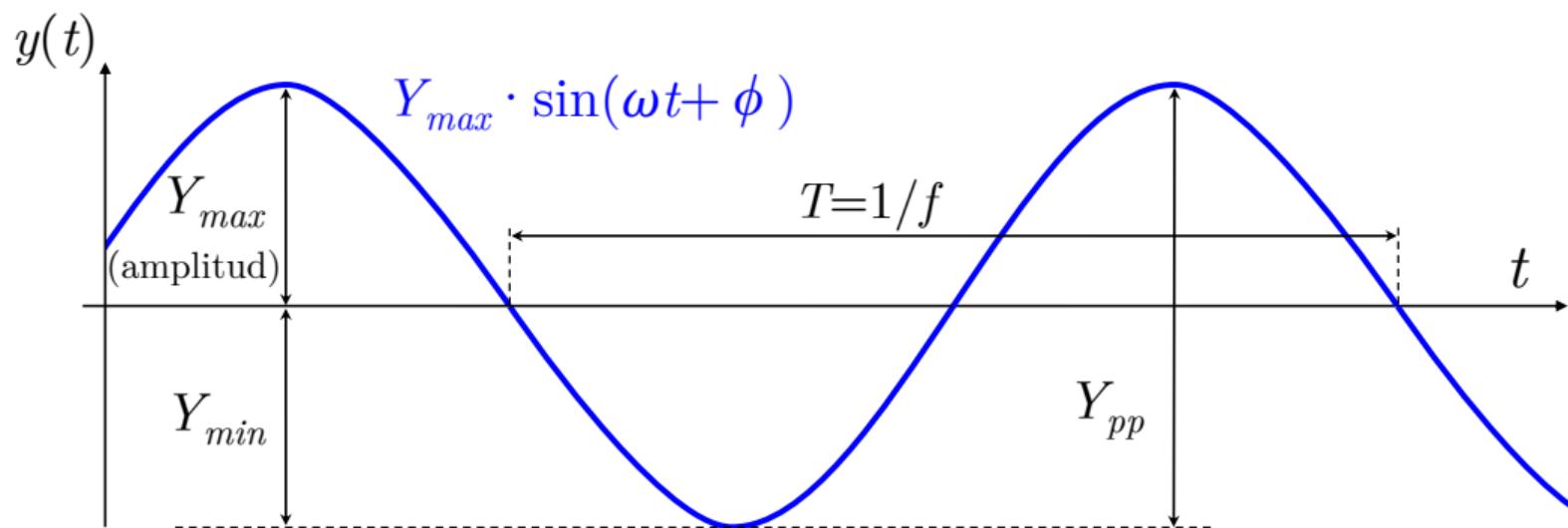
donde $n \in \mathbb{Z}$ (número entero)

- ▶ **Periodo (T)**: intervalo de tiempo a partir del cual se repite la forma de onda [s]
- ▶ **Frecuencia (f)**: número de repeticiones de la onda por unidad de tiempo [Hz]

$$f = \frac{1}{T}$$

Formas de onda periódicas

- ▶ Caso particular: **función senoidal** (señal centrada)



Formas de onda periódicas: valores característicos

- **Valor medio (Y_m)**: media aritmética de los valores instantáneos que toma la función en un periodo (o semiperiodo, o cuarto de periodo)

$$Y_m = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} y(t) dt$$

- **Valor eficaz (Y_{ef})**: raíz cuadrada de la media de los cuadrados de los valores que toma la función en un periodo

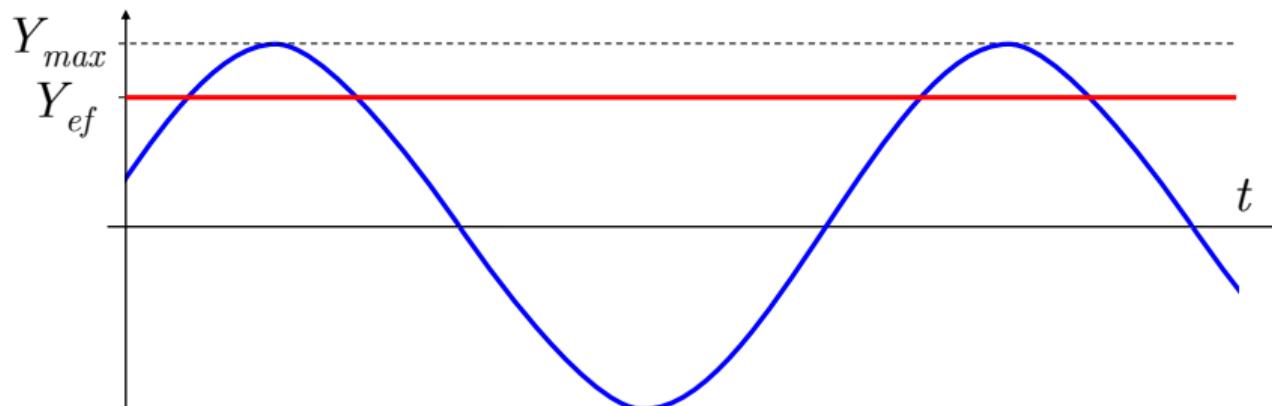
$$Y_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_a^{a+T} y^2(t) dt}$$

También denominado “valor RMS”, del inglés *root mean square*

El valor eficaz es de especial interés en teoría de circuitos para **cálculos relacionados con la potencia**, como veremos más adelante

Formas de onda periódicas: valor eficaz

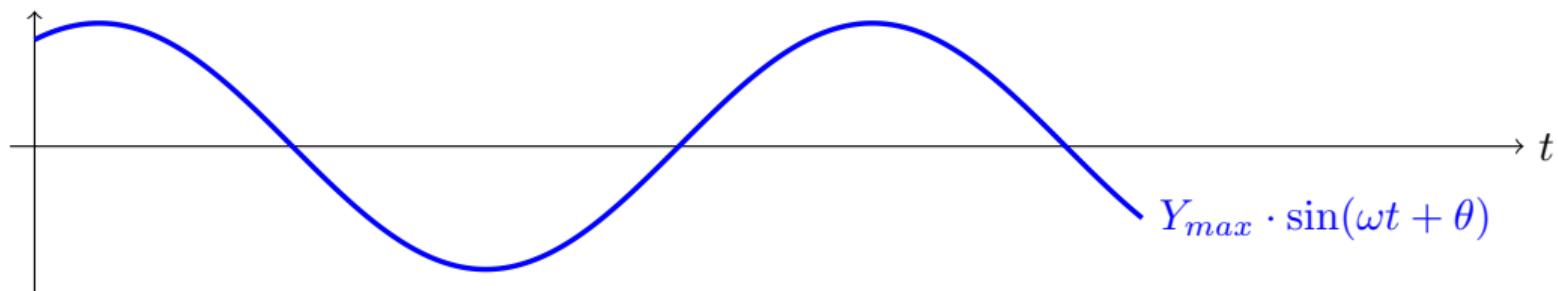
- ▶ Caso particular: valor eficaz de una **onda senoidal**



- ▶ ¿Por qué usamos el valor eficaz en corriente alterna? Porque establece un **paralelismo con la corriente continua**, que nos permitirá simplificar cálculos:
El valor eficaz es igual al valor de una corriente continua constante que, al circular por una determinada resistencia, **produciría la misma dissipación de potencia** que la corriente alterna que estamos considerando

- 1** Formas de onda
- 2** Onda senoidal
- 3** Cálculo fasorial
- 4** Respuesta de elementos pasivos a excitación senoidal
- 5** Potencia en corriente alterna

Onda senoidal, definición



$$y(t) = Y_o \cdot \sin(\omega \cdot t + \theta)$$

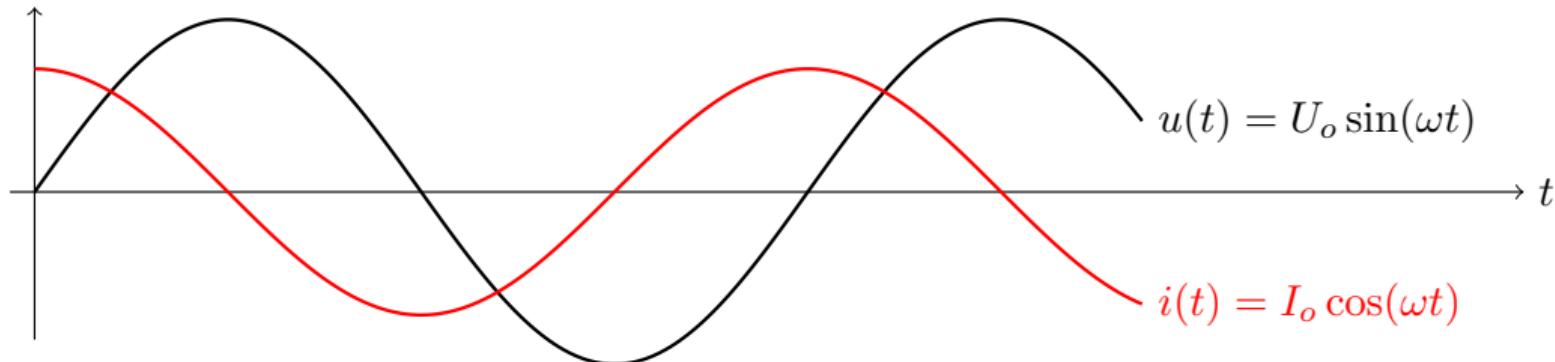
- ▶ Y_{max} o Y_o : valor máximo de la onda
- ▶ T : periodo de la onda (segundos)
- ▶ θ : fase (radianes o grados). También suelen usarse las letras griegas ϕ y φ
- ▶ $\omega = \frac{2\pi}{T}$: pulsación (rad/s)
- ▶ $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T}$: frecuencia (Hz)

Fase



- ▶ Es el argumento de la función senoidal para $t = 0$
- ▶ Tomando una onda como referencia, si la **fase de otra onda es de 0°** , está **en fase** con la de referencia
- ▶ Si la **fase es positiva**, la onda **adelanta** a la referencia
- ▶ Si la **fase es negativa**, la onda **retrasa** a la referencia

Señales en cuadratura



- ▶ Cuando el **desfase entre dos señales es de 90°** ($\theta_I - \theta_U = \pi/2$), se dice que están en **cuadratura**
- ▶ El paso por cero de una señal coincide con el paso por el máximo/mínimo de la otra señal

Valor medio y valor eficaz de una onda senoidal

Valor medio

En un periodo:

$$Y_m = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T Y_o \cdot \sin(\omega \cdot t + \theta) dt = \boxed{0}$$

En un semiperíodo positivo ($\theta = 0^\circ$):

$$Y_m = \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} Y_{max} \cdot \sin(\omega \cdot t) dt = \frac{2 \cdot Y_{max}}{\pi} \approx 0,637 \cdot Y_{max}$$

Valor eficaz

$$Y = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T y^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T [Y_{max} \cdot \sin(\omega \cdot t + \theta)]^2 dt} = \boxed{\frac{Y_{max}}{\sqrt{2}}}$$

Interudio: *Alternating Current ⚡ Direct Current*



- ① Formas de onda
- ② Onda senoidal
- ③ Cálculo fasorial
- ④ Respuesta de elementos pasivos a excitación senoidal
- ⑤ Potencia en corriente alterna

Recordatorio de 1LK

- ▶ La **1LK** es el principio de **conservación de la carga** aplicado a los circuitos eléctricos:

La suma de las corrientes que llegan a un nudo es igual a la suma de las que salen

$$\sum_{j=1}^n i_j(t) = 0$$

La conservación de la carga **aplica a cada instante**, luego 1LK también **aplica en corriente alterna**

Por lo tanto, vamos a sumar corrientes senoidales a menudo en este tema, para lo cual será muy útil el **cálculo fasorial**

Recordatorio de 2LK

- La **2LK** es el principio de **conservación de la energía** aplicado a los circuitos:

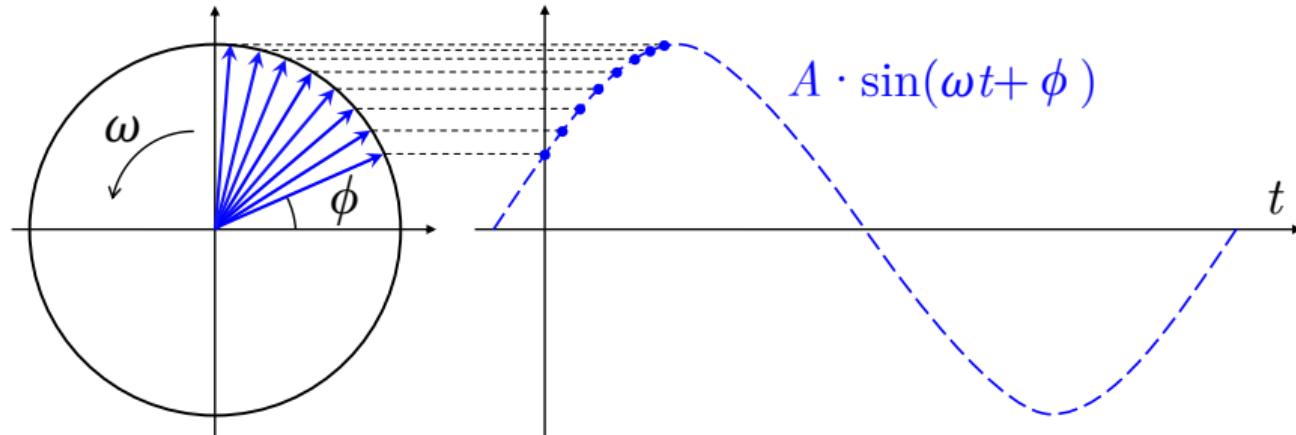
La suma (con signo) de las tensiones a lo largo de un camino cerrado es cero

$$\sum_{j=1}^m u_j(t) = 0$$

La conservación de la energía **aplica a cada instante** → 2LK también **aplica en corriente alterna**

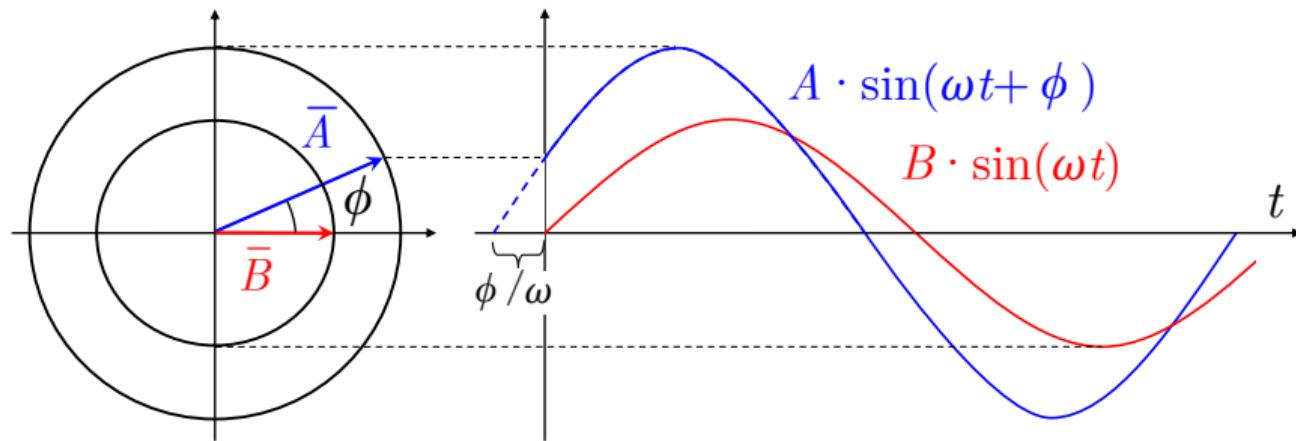
Vamos a sumar tensiones senoidales a menudo en este tema → será muy útil el **cálculo fasorial**

Representación fasorial



- Un **fasor** es un artefacto matemático **útil para simplificar cálculos** con señales senoidales
- El término “fasor” viene del inglés *phasor*, forma corta de *phase vector* (vector de fase)
- Al **rotar en sentido antihorario** con velocidad angular ω , la proyección del fasor sobre el eje vertical es igual al valor de la señal senoidal en cada instante .

Representación fasorial

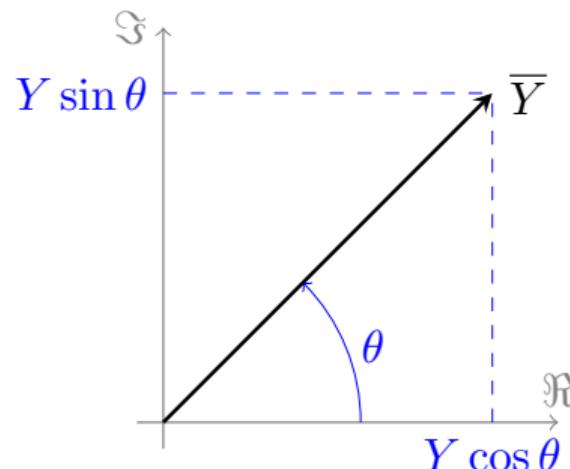


- ▶ Una señal senoidal **se representa mediante un único fasor**
- ▶ Para definir el fasor correspondiente a cada señal, tomamos como origen de fases una de las señales presentes en el circuito (e.g., la tensión en bornes de una fuente)

Representación fasorial

- Un fasor se representa matemáticamente mediante un **número complejo** (**repaso** de complejos y trigonometría):

$$\overline{Y} = \underbrace{Y_{ef} \angle \theta}_{\text{forma polar}} = \underbrace{Y_{ef} \cdot [\cos(\theta) + j \cdot \sin(\theta)]}_{\text{forma binómica}} \stackrel{\text{fórmula de Euler}}{\downarrow} \underbrace{Y_{ef} \cdot e^{j\theta}}_{\text{forma exponencial}}$$



Usamos **j para la constante imaginaria**, en lugar de i , ya que en el análisis de circuitos i se usa para intensidad

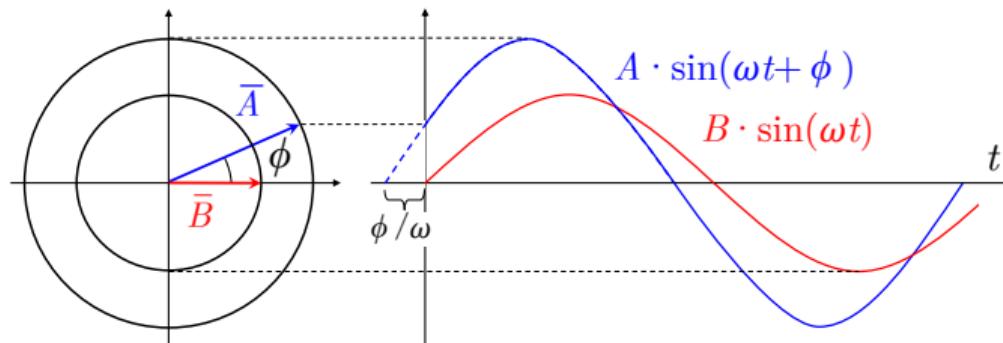
- El **argumento** del fasor es la **fase** de la onda. El **módulo** es el **valor eficaz** de la onda, **NO su amplitud**

Representación fasorial

- El **argumento** del fasor es la **fase** de la onda. El **módulo** es el valor eficaz de la onda, **NO su amplitud**

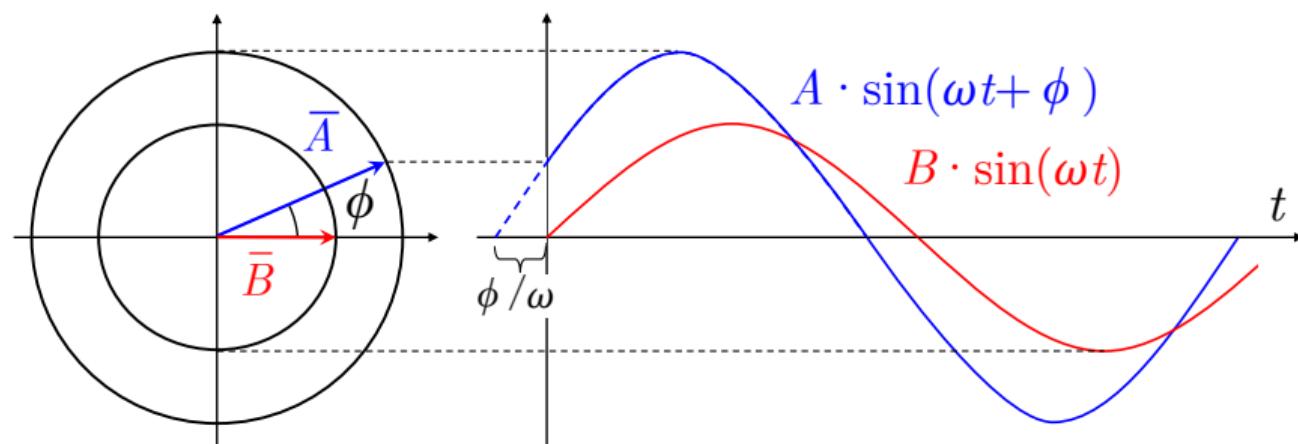
Se toma el valor eficaz por **conveniencia** a la hora de **calcular la potencia producida/consumida** en circuitos de corriente alterna, directamente operando con fasores

Nota: en varios gráficos de estas diapositivas, el módulo de los fasores corresponde a la amplitud de la onda, y no a su valor eficaz
Esto se debe simplemente a claridad en la representación gráfica

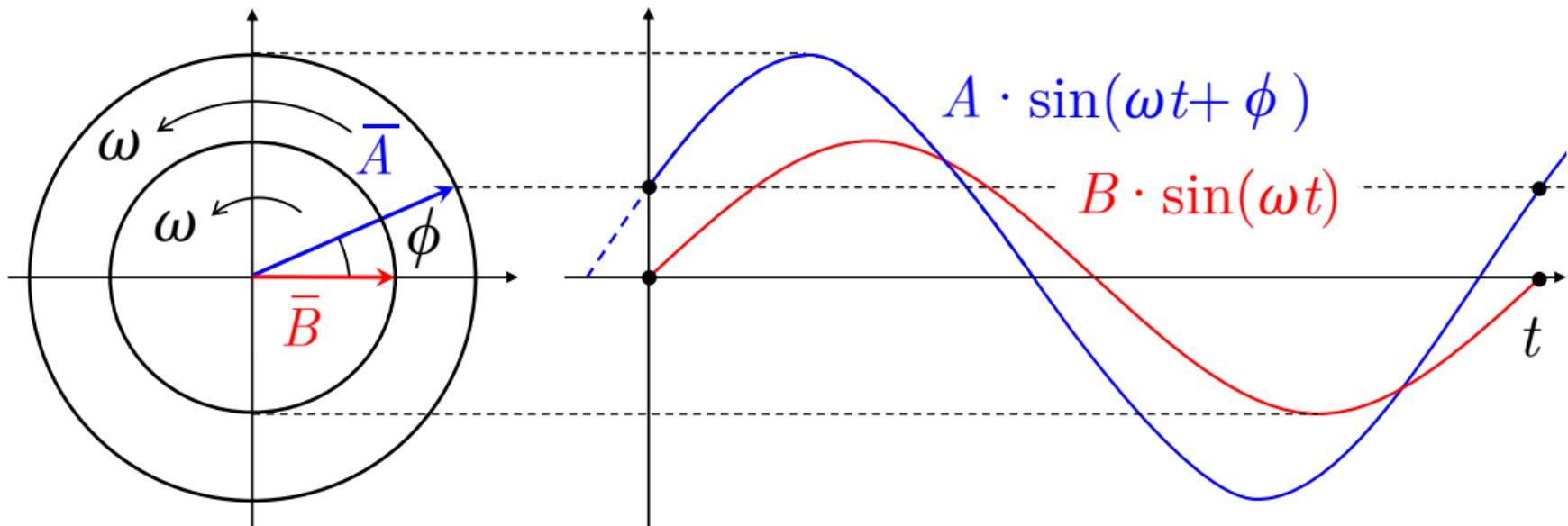


Representación fasorial

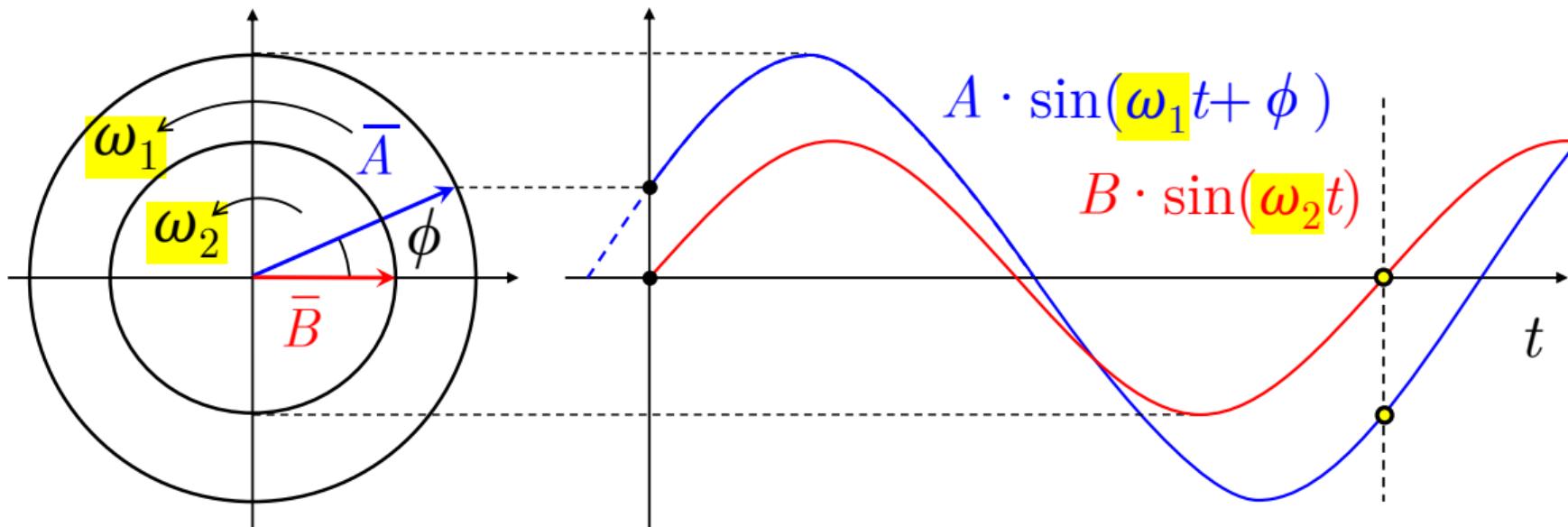
- ▶ Los fasores representan las **relaciones** entre los **valores eficaces** y las **fases** de las distintas señales presentes en el circuito, siempre asumiendo una frecuencia determinada
- ▶ Por lo tanto, las operaciones con fasores solo son **válidas** entre señales de la misma frecuencia



Importante: el cálculo fasorial es válido para señales de igual ω



...pero NO para señales de distinta frecuencia ($\omega_1 \neq \omega_2$)



Cálculo fasorial: propiedades de la función senoidal

Las razones por las que podemos usar cálculo fasorial para **simplificar operaciones entre señales senoidales** son dos propiedades importantes de la función senoidal:

►
$$A_1 \cdot \sin(\omega t + \theta_1) + A_2 \cdot \sin(\omega t + \theta_2) = A_3 \cdot \sin(\omega t + \theta_3)$$

Para sumar señales senoidales, podemos simplemente **sumar sus fasores correspondientes** (recuerda que 1LK y 2LK implican sumas)

►
$$\frac{d^n \sin(\omega t + \theta_1)}{dt^n} = C_2 \sin(\omega t + \theta_2) , \quad \int \cdots \int \sin(\omega t + \theta_1) dt \cdots dt = C_3 \sin(\omega t + \theta_3) + k$$

Las **tensiones** y **corrientes** en **bobinas** y **condensadores** (cuyas ecuaciones de definición contienen derivadas e integrales de estas magnitudes), pueden expresarse mediante **fasores**

Operaciones con fasores

Suma gráfica de dos fasores \bar{Y}_1 e \bar{Y}_2 , y sus correspondientes señales temporales:
(clica en la imagen)

Operaciones con fasores

- Un fasor **captura la información clave** de una **onda senoidal** para los propósitos del análisis de circuitos: su valor eficaz y su fase
- Nos permite **operar con ondas senoidales como si fueran vectores/números complejos**

$$\begin{aligned}\bar{Y}_1 &= \underbrace{Y_{ef_1} \cos(\theta_1)}^{a_1} + j \underbrace{Y_{ef_1} \sin(\theta_1)}^{b_1} = Y_{ef_1} / \underline{\theta_1} \\ \bar{Y}_2 &= \underbrace{Y_{ef_2} \cos(\theta_2)}_{a_2} + j \underbrace{Y_{ef_2} \sin(\theta_2)}_{b_2} = Y_{ef_2} / \underline{\theta_2}\end{aligned}$$

Forma binómica:

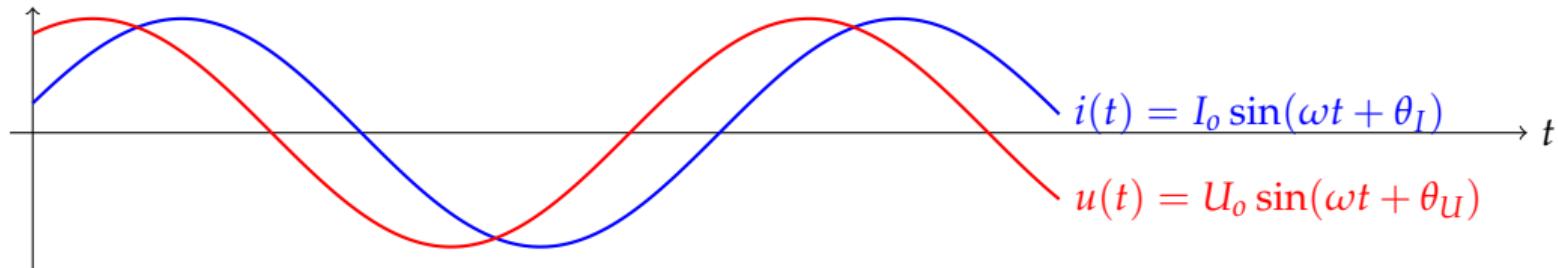
- Suma: $\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$
- Resta: $\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2 = (a_1 - a_2) + j(b_1 - b_2)$

Forma polar:

- Multiplicación: $\bar{Y}_1 \cdot \bar{Y}_2 = (Y_{ef_1} \cdot Y_{ef_2}) / \underline{\theta_1 + \theta_2}$
- División: $\frac{\bar{Y}_1}{\bar{Y}_2} = \frac{Y_{ef_1}}{Y_{ef_2}} / \underline{\theta_1 - \theta_2}$

- ① Formas de onda
- ② Onda senoidal
- ③ Cálculo fasorial
- ④ Respuesta de elementos pasivos a excitación senoidal
- ⑤ Potencia en corriente alterna

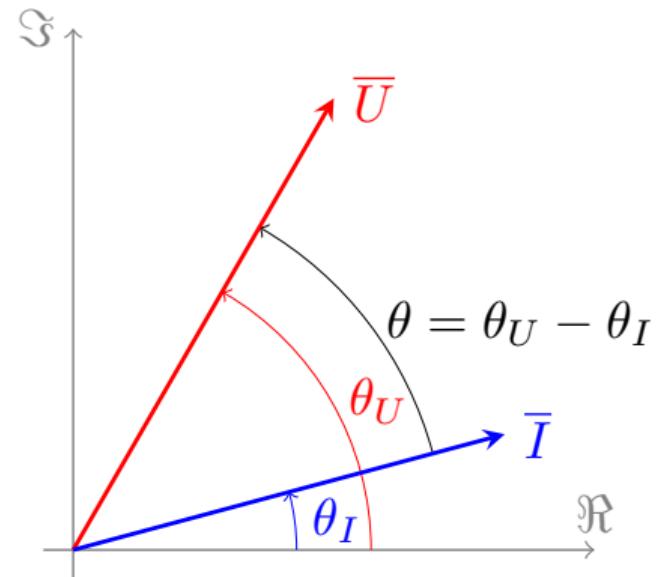
Impedancia: relación entre fasores de tensión y corriente



$$\bar{U} = \bar{Z} \cdot \bar{I} \quad (\text{equiv. a ley de Ohm})$$

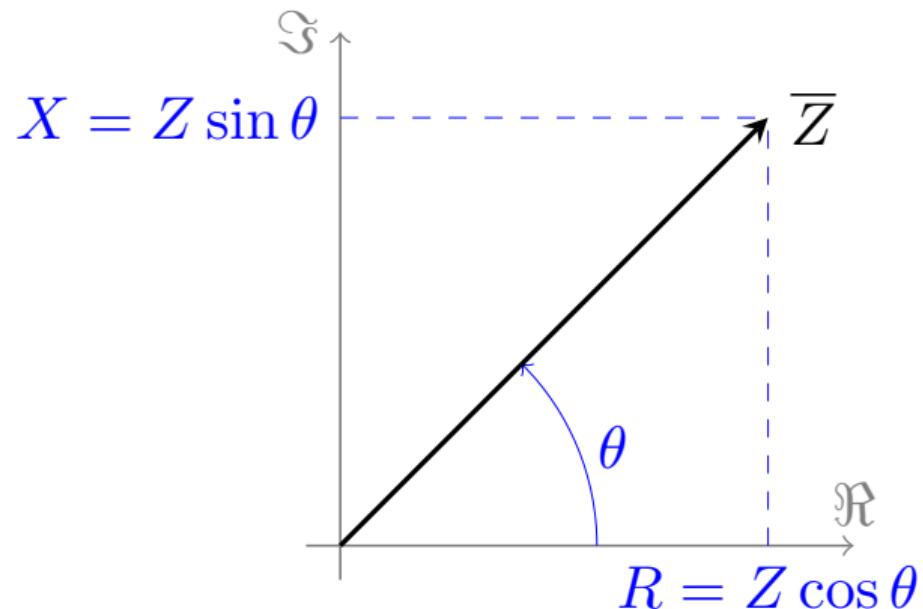
$$\bar{Z} = \frac{\bar{U}}{\bar{I}}$$

$$\boxed{\bar{Z} = \frac{U}{I} / \underline{\theta_U - \theta_I} \Rightarrow \begin{cases} Z = \frac{U}{I} \\ \theta = \theta_U - \theta_I \end{cases}}$$



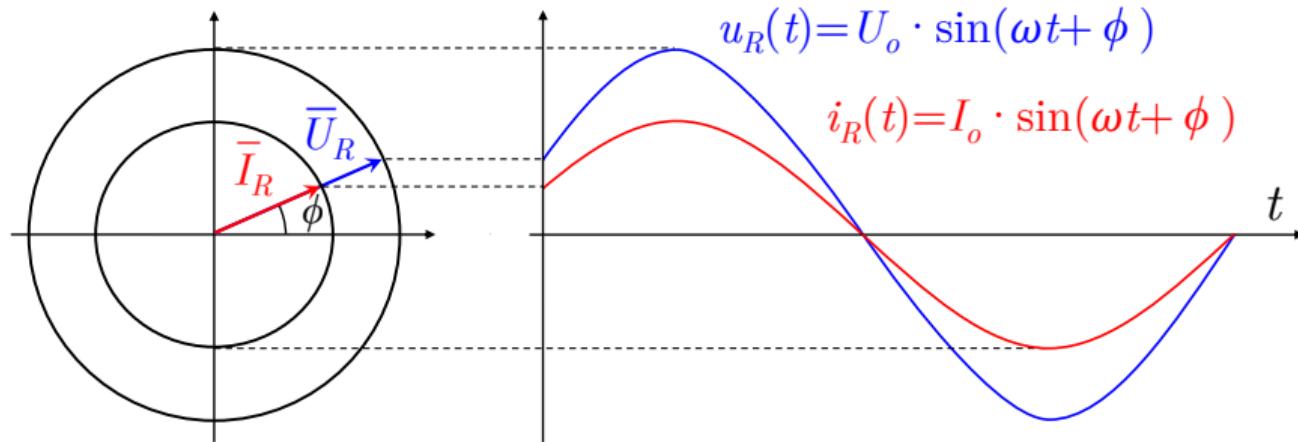
Impedancia genérica

$$\bar{Z} = Z \cdot \cos(\theta) + j Z \cdot \sin(\theta) = \underbrace{R}_{\text{resistencia}} + j \underbrace{X}_{\text{reactancia}}$$



Circuito resistivo

Un circuito resistivo no introduce desfase entre señales (**tensión y corriente en fase**)



ley de Ohm

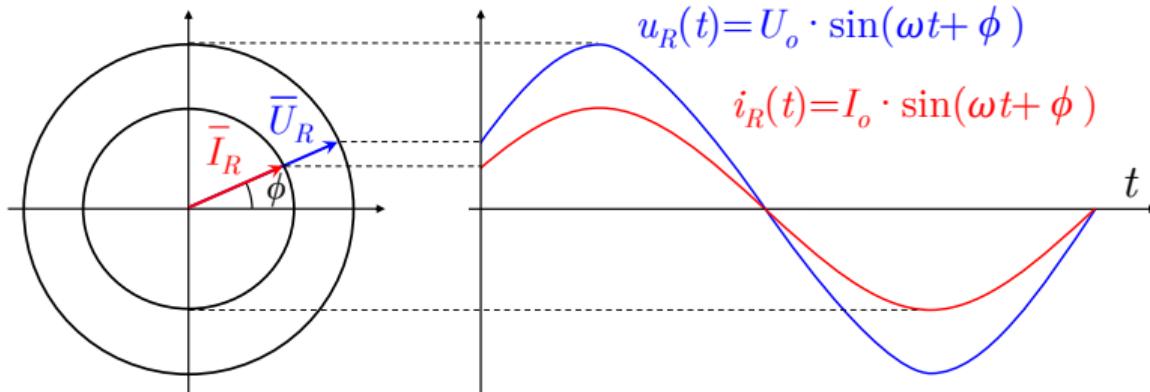
$$i(t) = I\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \theta_I)$$

$$\downarrow \\ u(t) = R \cdot i(t) = R \cdot I\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \theta_I) = U\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \theta_I)$$

(a partir de ahora, la notación U e I se refiere directamente a **valores eficaces**)

Circuito resistivo

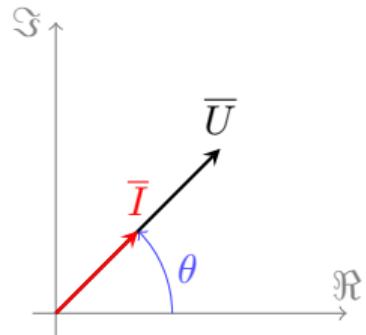
Un circuito resistivo no introduce desfase entre señales (**tensión y corriente en fase**)



$$Z = \frac{U}{I} = R$$

$$\theta = \theta_U - \theta_I = 0^\circ$$

$$\boxed{\bar{Z}_R = R/0^\circ}$$



Carga y descarga de una bobina

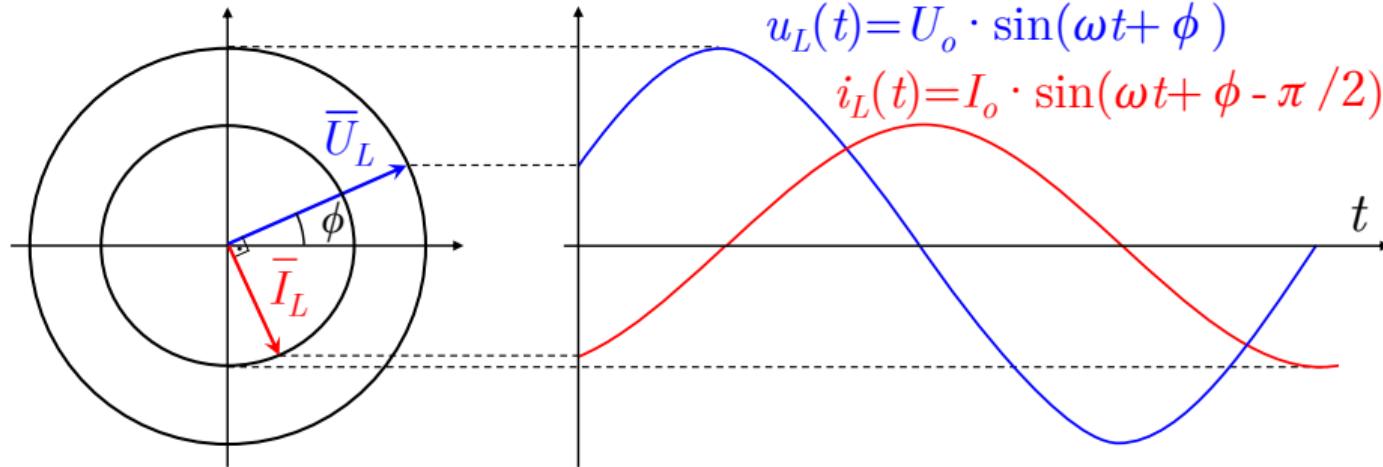
- La bobina **almacena energía magnética** cuando circula por ella una corriente

$$E_L = \frac{1}{2} \cdot L \cdot i_L^2(t)$$

Cuando el módulo de la corriente que circula por la bobina disminuye, **devuelve su energía almacenada** al circuito **(clica en la imagen)**

Circuito inductivo puro

Un circuito inductivo puro genera **señales en cuadratura** y retrasa la corriente.



ley de
Faraday

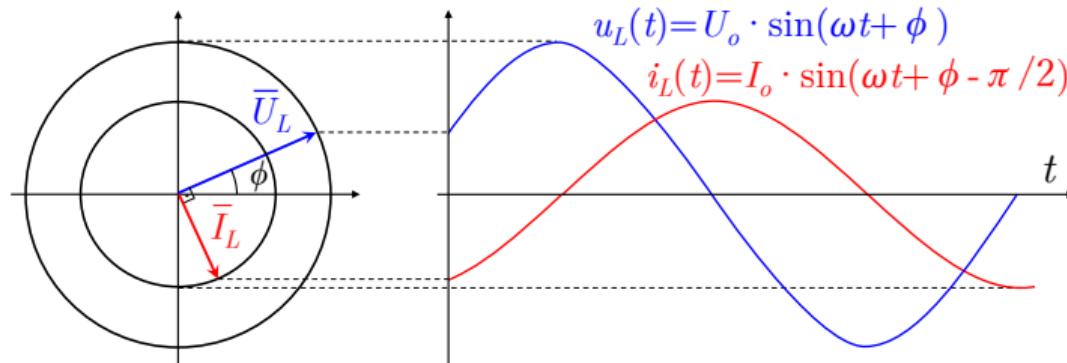
$$i(t) = I\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \theta_I)$$

$$u(t) \stackrel{\downarrow}{=} L \cdot \frac{di(t)}{dt} = \omega L \cdot I\sqrt{2} \cdot \cos(\omega t + \theta_I) = U\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \theta_I + \pi/2)$$

La bobina se carga cuando
 $\frac{d|i_L|}{dt} > 0$, y descarga cuando $\frac{d|i_L|}{dt} < 0$

Circuito inductivo puro

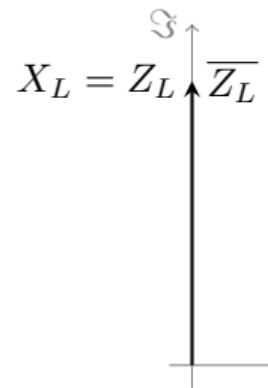
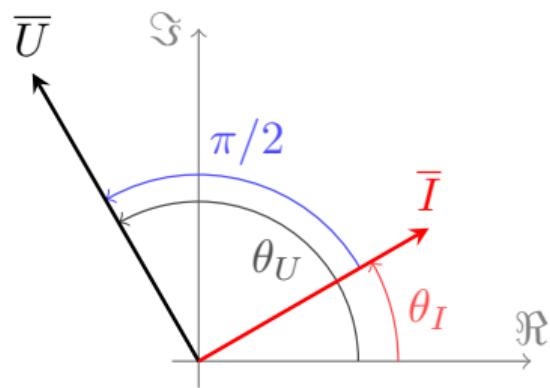
Un circuito inductivo puro genera **señales en cuadratura** y retrasa la corriente



$$Z = \frac{U}{I} = \omega L$$

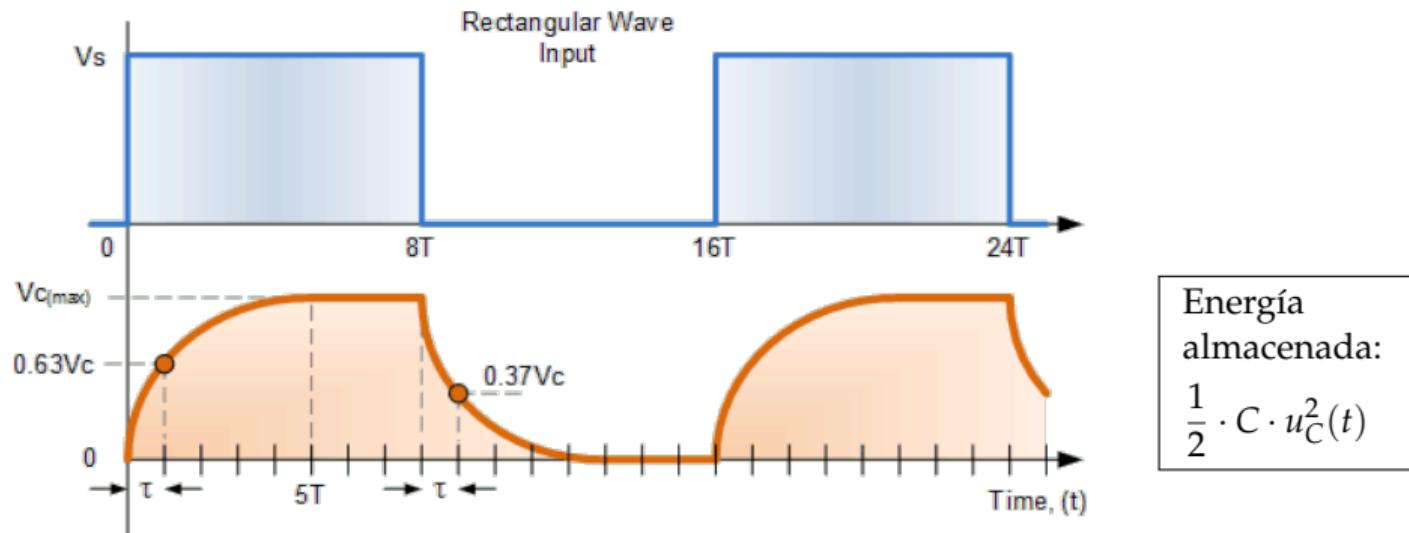
$$\theta = \theta_U - \theta_I = \frac{\pi}{2}$$

$$\bar{Z}_L = j\omega L = \omega L / 90^\circ$$



Carga y descarga de un condensador

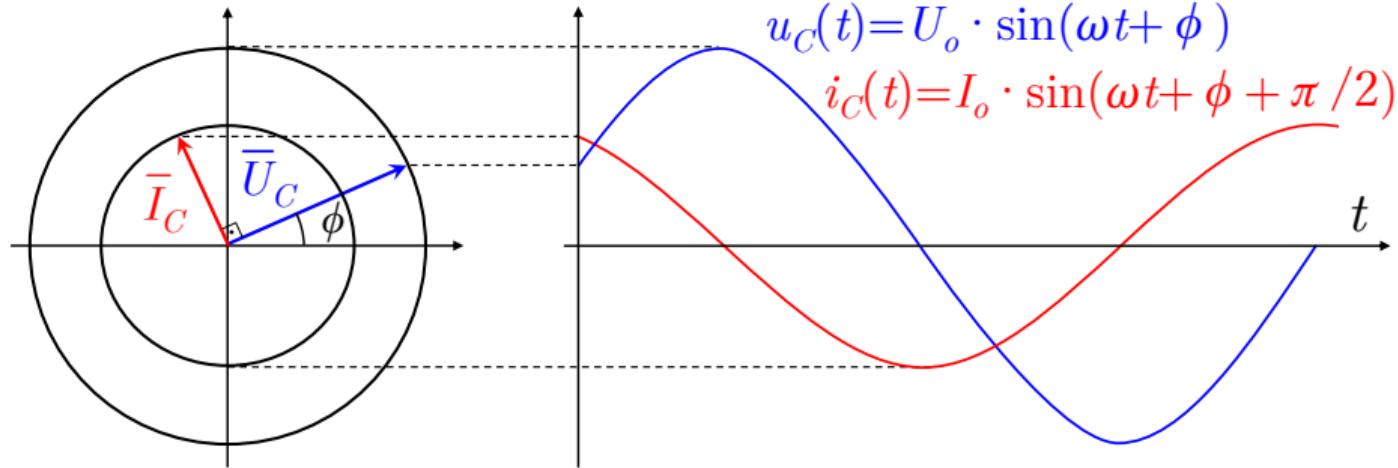
- ▶ Si se excita un condensador con pulsos rectangulares de tensión, se **almacena energía eléctrica, que luego se devuelve al circuito** en los semiciclos sin excitación



- ▶ Con **excitación alterna senoidal**, el condensador también se carga y descarga
 - ▶ Sin embargo, la tensión en el condensador nunca llega a estabilizarse, porque la excitación senoidal cambia todo el rato (siguiente diapositiva)

Circuito capacitivo puro

Un circuito capacitivo puro genera **señales en cuadratura** y adelanta la corriente.



definición
de condensador

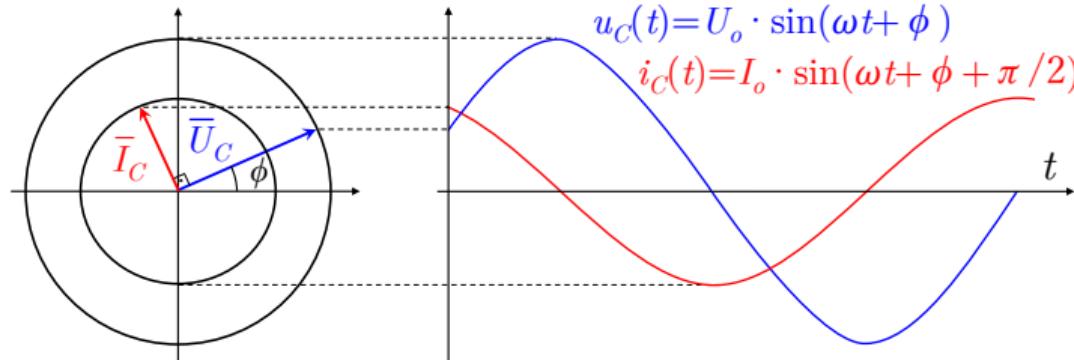
$$i(t) = I \sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \theta_I)$$

El condensador se carga cuando $\frac{d|u_C|}{dt} > 0$, y descarga cuando $\frac{d|u_C|}{dt} < 0$

$$u(t) \stackrel{\downarrow}{=} \frac{1}{C} \cdot \int_{-\infty}^t i(\tau) \cdot d\tau = \frac{I}{\omega C} \sqrt{2} \cdot [-\cos(\omega t + \theta_I)] = U \sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \theta_I - \pi/2)$$

Circuito capacitivo puro

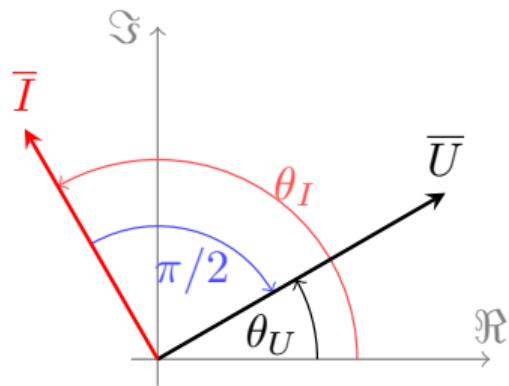
Un circuito capacitivo puro genera **señales en cuadratura** y adelanta la corriente



$$Z = \frac{U}{I} = \frac{1}{\omega C}$$

$$\theta = \theta_U - \theta_I = -\frac{\pi}{2}$$

$$\bar{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{\omega C} \angle -90^\circ$$



$$X = Z_C = \frac{1}{\omega C}$$

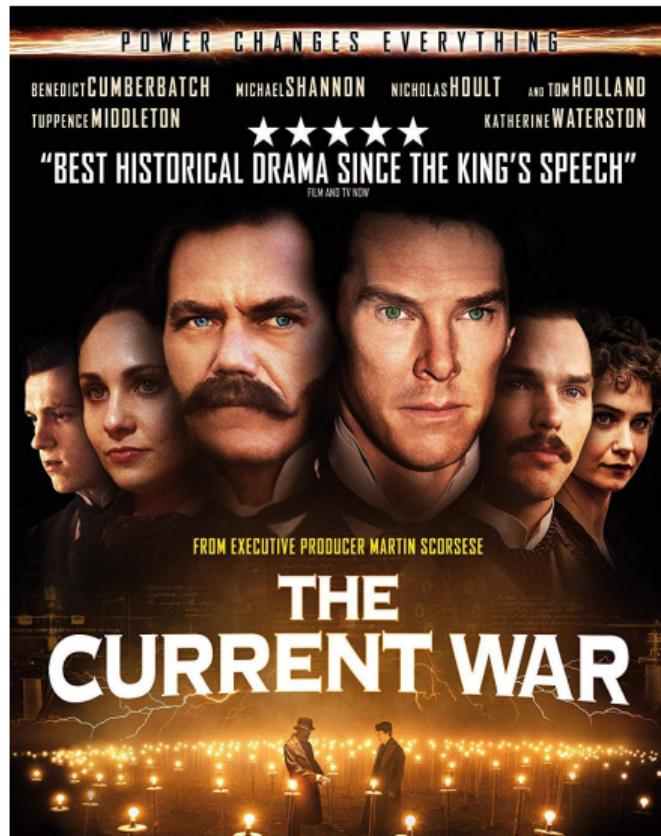
Resumen

Elemento	Impedancia	Módulo	Ángulo
Resistencia	R	R	0°
Bobina ideal	$j\omega L$	ωL	90°
Condensador	$1/(j\omega C)$	$1/(\omega C)$	-90°

- ▶ La impedancia de una **bobina ideal** $X_L = \omega L$ se denomina “reactancia inductiva”
- ▶ La impedancia de un **condensador** $X_C = \frac{1}{\omega C}$ se denomina “reactancia capacitiva”

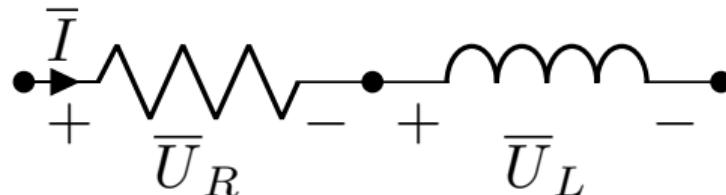
Interludio: película relacionada con la asignatura

La guerra de las corrientes, 2017



Circuito RL (inductivo con pérdidas)

Recordatorio: por elementos asociados en **serie**, circula la **misma corriente**



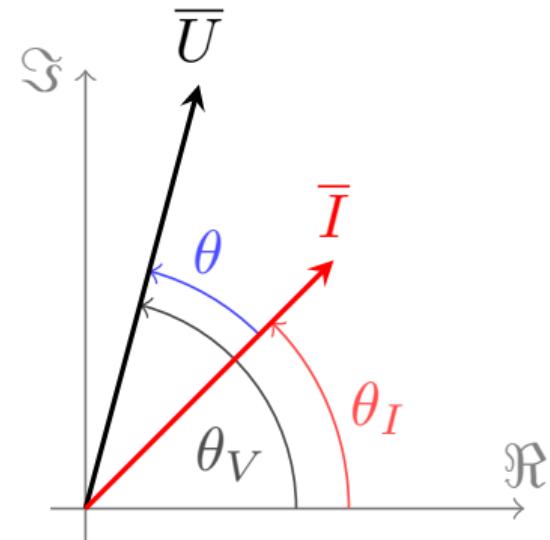
$$\bar{I} = I / \underline{\theta_I}$$

$$\bar{U}_R = R \cdot \bar{I} = R \cdot I / \underline{\theta_I}$$

$$\bar{U}_L = \bar{X}_L \cdot \bar{I} = \omega L I / \underline{\theta_I} + 90^\circ$$

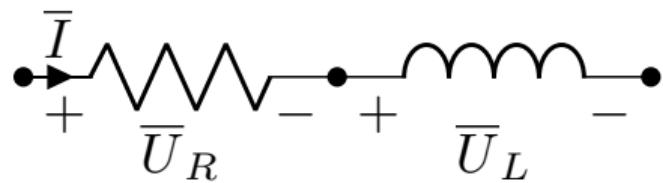
2LK

$$\bar{U} \downarrow = \bar{U}_R + \bar{U}_L = (\underbrace{(R + j\omega L)}_{\bar{Z}_{eq}}) \bar{I} \quad \leftarrow$$



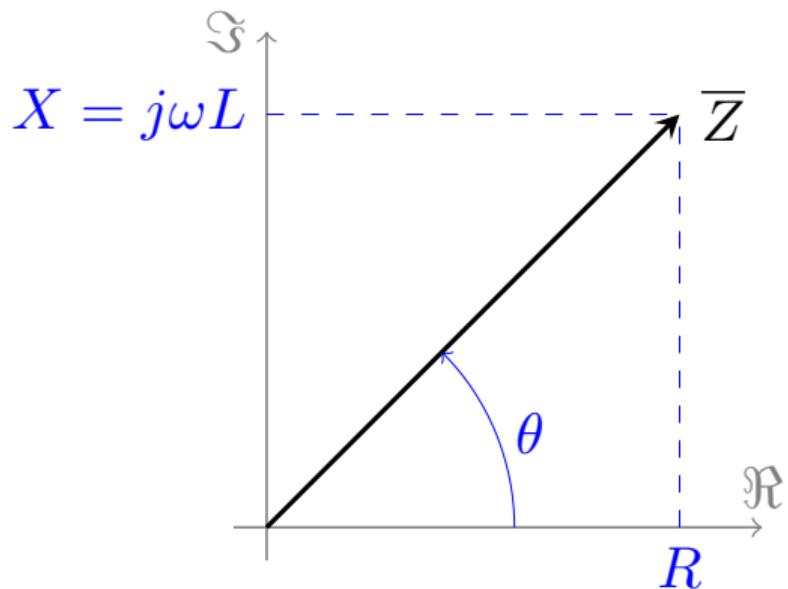
Importante: sumar módulos en lugar de fasores es un **error grave**

Circuito RL (inductivo con pérdidas)



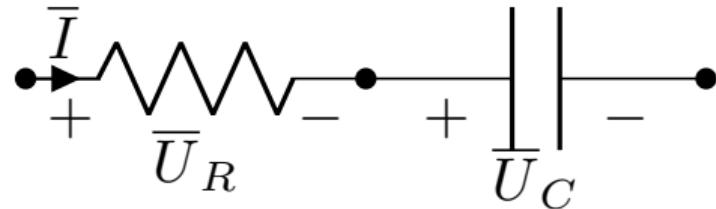
$$\bar{Z}_{eq} = R + j\omega L \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta > 0}$$

$$\bar{Z}_{eq} \begin{cases} |Z_{eq}| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \\ \theta = \text{atan}\left(\frac{\omega L}{R}\right) \end{cases}$$



Circuito RC (capacitivo con pérdidas)

Recordatorio: por elementos asociados en **serie**, circula la **misma corriente**



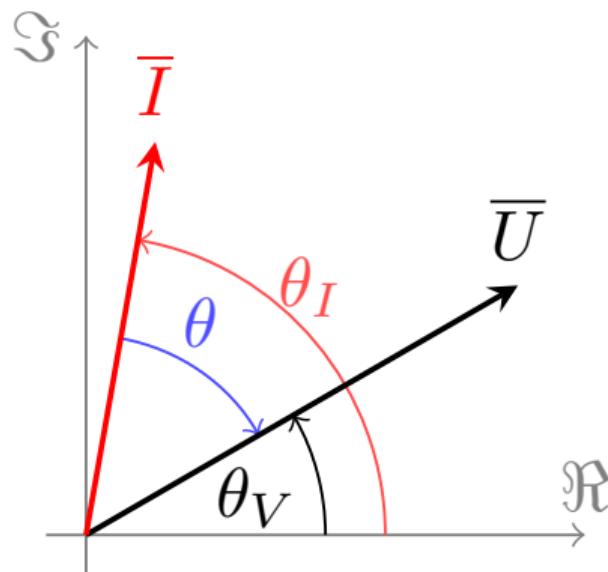
$$\bar{I} = \underline{I}/\theta_I$$

$$\bar{U}_R = R \cdot \bar{I} = R \cdot \underline{I}/\theta_I$$

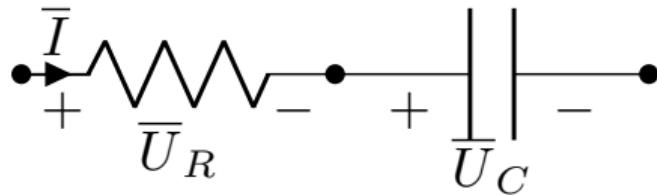
$$\bar{U}_C = \bar{X}_C \cdot \bar{I} = \frac{I}{\omega C} / \underline{\theta_I - 90^\circ}$$

2LK

$$\bar{U} \stackrel{\downarrow}{=} \bar{U}_R + \bar{U}_C = \left(R - j \frac{1}{\omega C} \right) \bar{I}$$

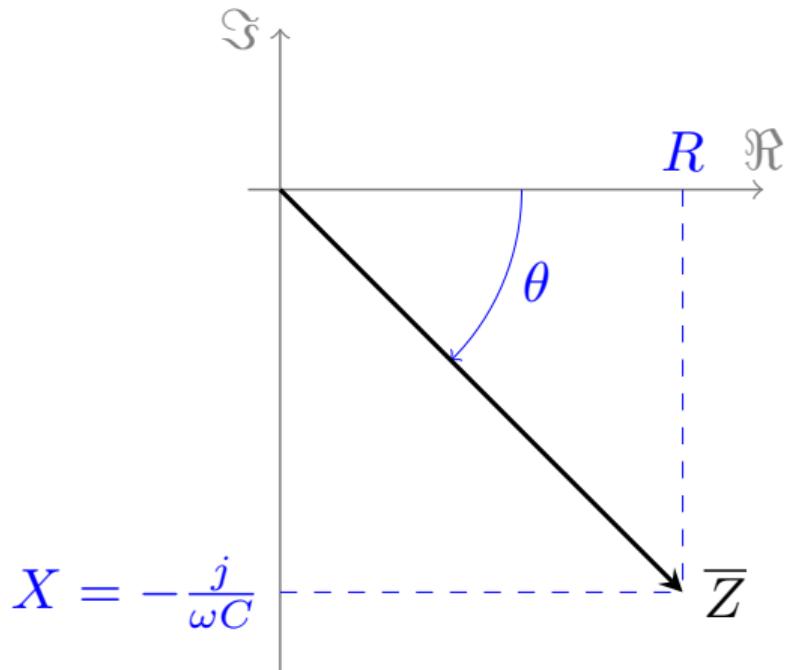


Circuito RC (capacitivo con pérdidas)

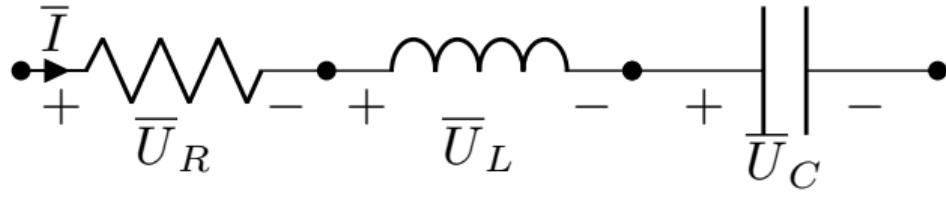


$$\bar{Z}_{eq} = R - j \frac{1}{\omega C} \Rightarrow \boxed{\theta < 0}$$

$$\bar{Z}_{eq} \begin{cases} |Z_{eq}| = \sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}} \\ \theta = \text{atan} \left(\frac{-\frac{1}{\omega C}}{R} \right) \end{cases}$$



Circuito RLC serie



$$\bar{I} = I / \underline{\theta_I}$$

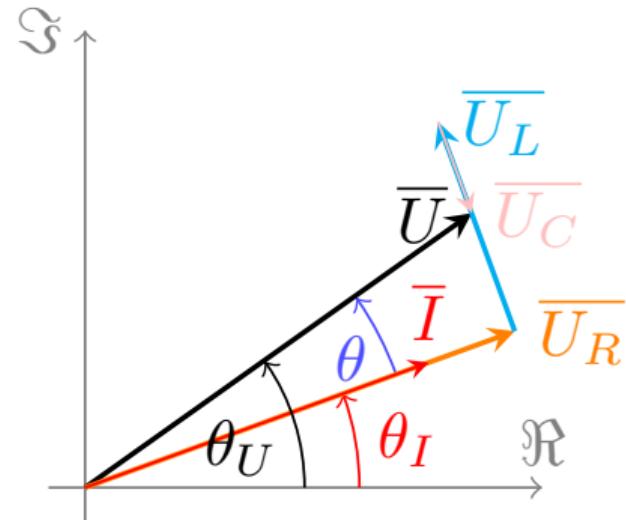
$$\bar{U}_R = R \cdot \bar{I} = R \cdot I / \underline{\theta_I}$$

$$\bar{U}_L = \bar{X}_L \cdot \bar{I} = \omega L I / \underline{\theta_I + 90^\circ}$$

$$\bar{U}_C = \bar{X}_C \cdot \bar{I} = \frac{I}{\omega C} / \underline{\theta_I - 90^\circ}$$

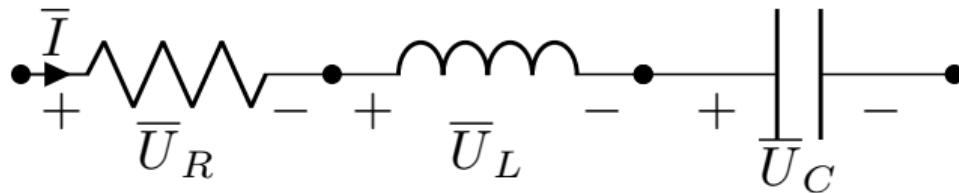
2LK

$$\bar{U} \stackrel{\downarrow}{=} \bar{U}_R + \bar{U}_L + \bar{U}_C = \underbrace{\left(R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C} \right)}_{\bar{Z}_{eq}} \bar{I}$$



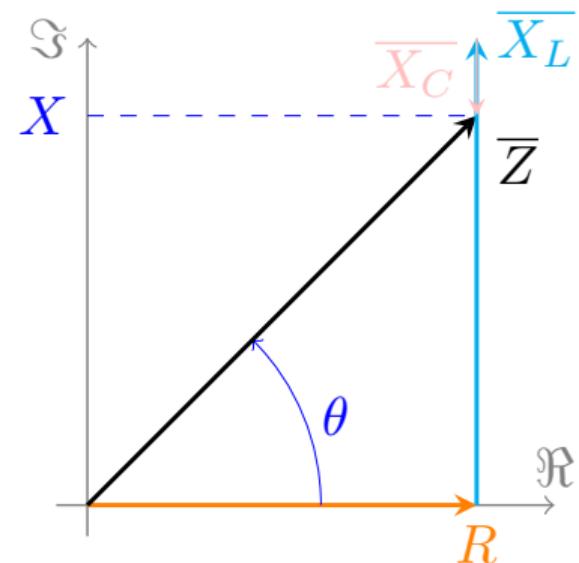
(ejemplo, en el que $X_L > X_C$)

Circuito RLC serie



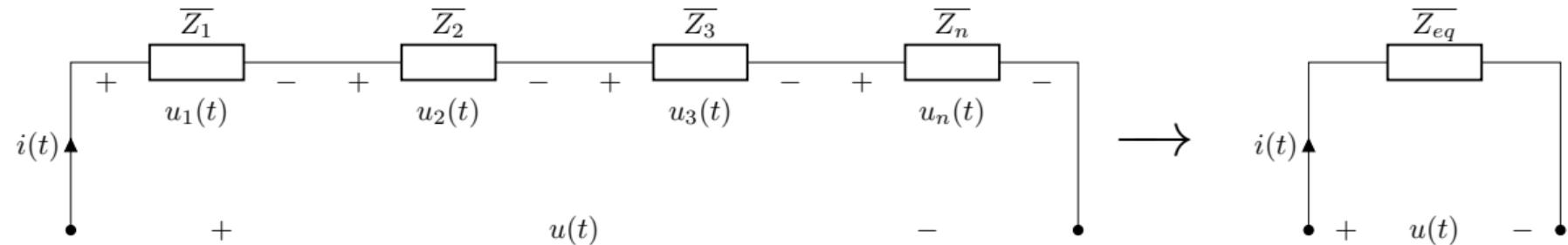
$$\bar{Z}_{eq} = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$$

- $\theta > 0 \Rightarrow \omega L > \frac{1}{\omega C}$: carácter **inductivo**
- $\theta < 0 \Rightarrow \omega L < \frac{1}{\omega C}$: carácter **capacitivo**
- $\theta = 0 \Rightarrow \omega L = \frac{1}{\omega C}$: carácter **resistivo (resonancia)**



(ejemplo, en el que $X_L > X_C$)

Circuito serie general



$$\overline{U} = \overline{U}_1 + \overline{U}_2 + \dots + \overline{U}_n = \bar{I} \cdot (\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2 + \dots + \overline{Z}_n) = \bar{I} \cdot \overline{Z}_{eq}$$

\uparrow
2LK

$$\overline{Z}_{eq} = \overline{Z}_1 + \overline{Z}_2 + \dots + \overline{Z}_n \Rightarrow$$

$$\boxed{\overline{Z}_{eq} = \sum_{i=1}^n \overline{Z}_i}$$

Importante: sumar módulos en lugar de fasores es un **error grave**

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^n R_i \quad X_{eq} = \sum_{i=1}^n X_i$$

$$\theta = \arctan \left(\frac{X_{eq}}{R_{eq}} \right)$$

Ejercicio

Un circuito serie formado por $R = 10 \Omega$, $L = 20 \text{ mH}$ y $C = 100 \mu\text{F}$ es alimentado con una tensión $u(t) = 200 \cdot \sin\left(1000t + \frac{\pi}{4}\right) \text{ V}$

Calcular \bar{I} , $u_R(t)$, $u_L(t)$ y $u_C(t)$, y dibujar el diagrama fasorial de tensiones y corrientes

Solución: $\bar{I} = 10/\underline{0^\circ} \text{ A}$

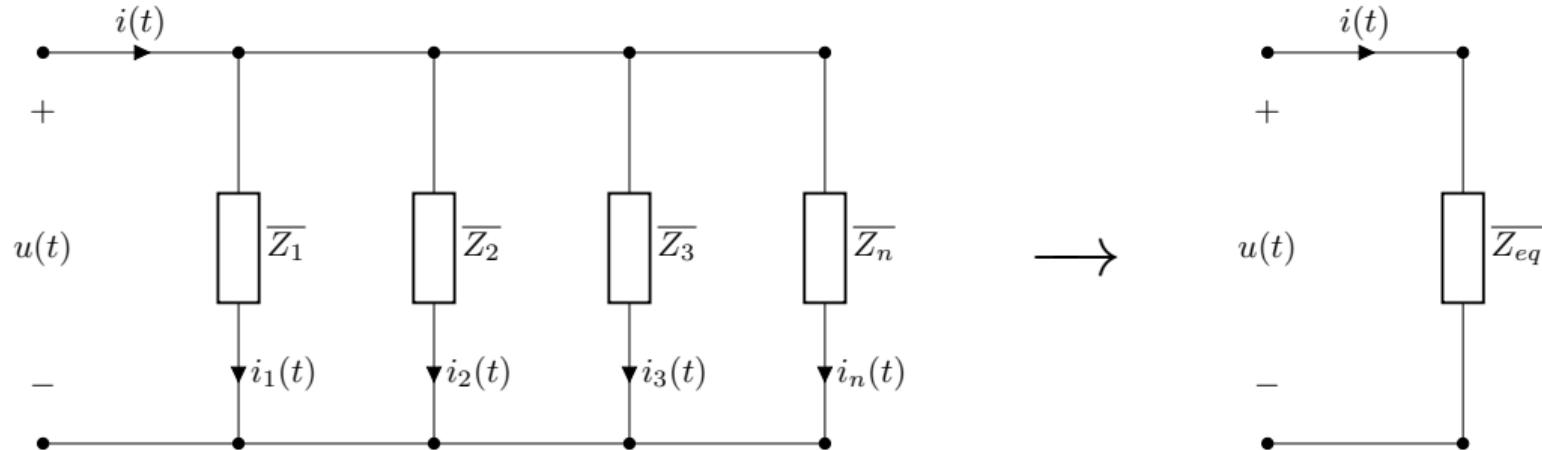
$$u_R(t) = 100\sqrt{2} \cdot \sin(1000t) \text{ V}$$

$$u_L(t) = 200\sqrt{2} \cdot \sin\left(1000t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ V}$$

$$u_C(t) = 100\sqrt{2} \cdot \sin\left(1000t - \frac{\pi}{2}\right) \text{ V}$$

Circuito paralelo general

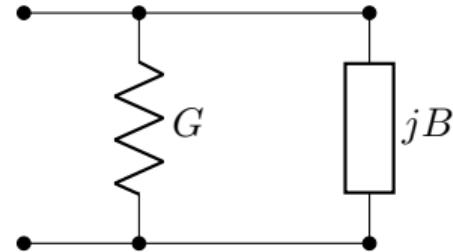
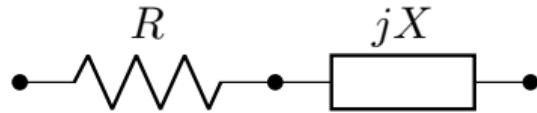
Recordatorio: los elementos asociados en **paralelo** están sometidos a la **misma tensión**



$$\bar{I} = \underbrace{\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \dots + \bar{I}_n}_{\uparrow} = \bar{U} \cdot \left(\frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_2} + \dots + \frac{1}{\bar{Z}_n} \right) = \frac{\bar{U}}{\bar{Z}_{eq}}$$

$$1LK \quad \frac{1}{\bar{Z}_{eq}} = \frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_2} + \dots + \frac{1}{\bar{Z}_n} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{\bar{Z}_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\bar{Z}_i}}$$

Impedancia y admitancia



$$\bar{U} = \bar{Z} \cdot \bar{I}$$

$$\bar{Z} = R + jX$$

$$\bar{I} = \bar{Y} \cdot \bar{U}$$

$$\bar{Y} = G + jB$$

$$\boxed{\bar{Y} = \frac{1}{\bar{Z}} \rightarrow \begin{cases} |\bar{Y}| = \frac{1}{|\bar{Z}|} \\ \theta_Y = -\theta_Z \end{cases}}$$

Admitancia: facilidad que ofrece un circuito al paso de la corriente alterna

- ① Formas de onda
- ② Onda senoidal
- ③ Cálculo fasorial
- ④ Respuesta de elementos pasivos a excitación senoidal
- ⑤ Potencia en corriente alterna

Potencia en CA, expresión general

Tomemos la tensión como referencia de fases

Sin pérdida de generalidad, asumamos que el ángulo de la impedancia equivalente de un circuito es $\theta > 0$ (circuito **inductivo**): la corriente está retrasada respecto de la tensión

$$\begin{cases} u(t) = U_o \cos(\omega t) \\ i(t) = I_o \cos(\omega t - \theta) \quad (\text{circuito en retrazo}) \end{cases}$$

$$p(t) = u(t) \cdot i(t)$$

Potencia en CA, expresión general

conveniente reformular
producto de cosenos

$$\begin{aligned} p(t) &= \underbrace{U_o \cos(\omega t)}_{u(t)} \cdot \underbrace{I_o \cos(\omega t - \theta)}_{i(t)} = \underbrace{U_o \cdot I_o}_{\text{amplitud}} \cdot \cos(\omega t) \cdot \cos(\omega t - \theta) \stackrel{\downarrow}{=} \\ &= \frac{1}{2} \cdot U_o \cdot I_o \cdot [\cos(2\omega t - \theta) + \cos(\theta)] = \frac{U_o}{\sqrt{2}} \frac{I_o}{\sqrt{2}} \cdot [\cos(2\omega t - \theta) + \cos(\theta)] \\ &= \underbrace{U \cdot I}_{\substack{\text{valor} \\ \text{eficaz}}} \cdot [\cos(2\omega t - \theta) + \cos(\theta)] = \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \cos(\alpha - \beta) \\ &= U \cdot I \cdot [\cos(2\omega t) \cos(\theta) + \sin(2\omega t) \sin(\theta) + \cos(\theta)] \end{aligned}$$

$$p(t) = U \cdot I \cos(\theta) + U \cdot I \cos(\theta) \cos(2\omega t) + U \cdot I \sin(\theta) \sin(2\omega t)$$

Potencia en CA: potencia activa y potencia reactiva

En la expresión anterior, definimos dos términos:

potencia activa 'P' y potencia reactiva 'Q'

$$p(t) = U \cdot I \cos(\theta) + U \cdot I \cos(\theta) \cos(2\omega t) + U \cdot I \sin(\theta) \sin(2\omega t)$$

$$P = U \cdot I \cos \theta \quad Q = U \cdot I \sin \theta$$

$$p(t) = P \cdot [1 + \cos(2\omega t)] + Q \cdot \sin(2\omega t)$$

Pero, ¿qué significa que la potencia sea *activa* o *reactiva*? → Siguiente diapositiva

Potencia en CA: potencia disipada y potencia entretenida

Dado que $p(t)$ varía en el tiempo, sus **efectos netos** en el circuito tras cada ciclo pueden calcularse con el **valor medio** en un periodo:

$$P_m = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \left[P \int_0^T dt + P \int_0^T \cos(2\omega t) dt + Q \int_0^T \sin(2\omega t) dt \right] = \boxed{P}$$

- $P = UI \cos(\theta)$ es la **potencia neta que se disipa en la carga**, dado que el resto de la potencia $p(t)$ es fluctuante
(Unidades de P : W)
- $Q = UI \sin(\theta)$ es **potencia únicamente entretenida**, ya que es potencia almacenada y sucesivamente devuelta por las bobinas y condensadores (para los que $\sin(\theta) \neq 0$)
(Unidades de Q : var)

Potencia en CA, circuito resistivo

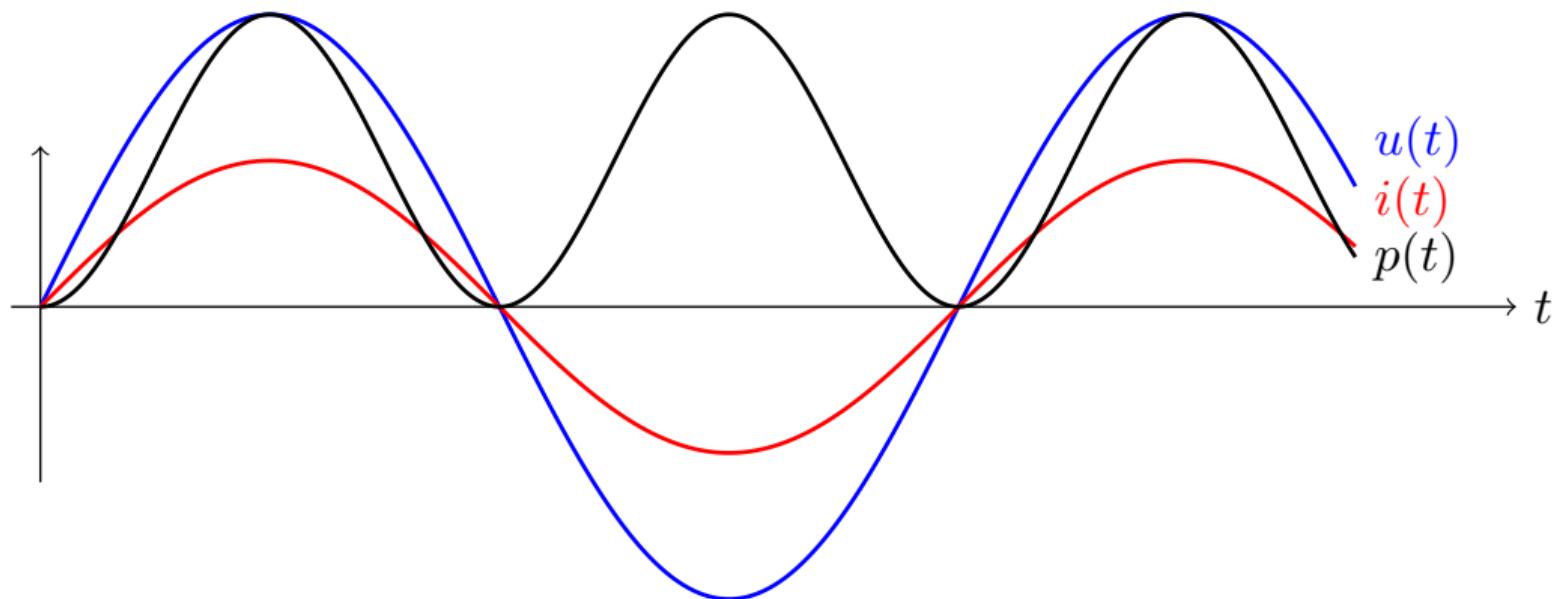
$$P = UI \underbrace{\cos \theta}_{=1} \quad Q = UI \sin \theta \rightarrow 0$$

$$p(t) = P \cdot [1 + \cos(2\omega t)] + Q \cdot \sin(2\omega t)$$

$$\bar{Z}_R = R \underline{/0^\circ} \rightarrow \theta = 0 \rightarrow \begin{cases} P = UI = \frac{U^2}{R} = I^2 R \\ Q = 0 \end{cases}$$

$$p(t) = P \cdot [1 + \cos(2\omega t)]$$

Potencia en CA, circuito resistivo



- ▶ Fluctúa al **doble de frecuencia** que la tensión y corriente
- ▶ Es siempre **positiva**
- ▶ Su **valor medio** es $P = UI \cos \theta = UI$

Potencia en CA, circuito inductivo puro

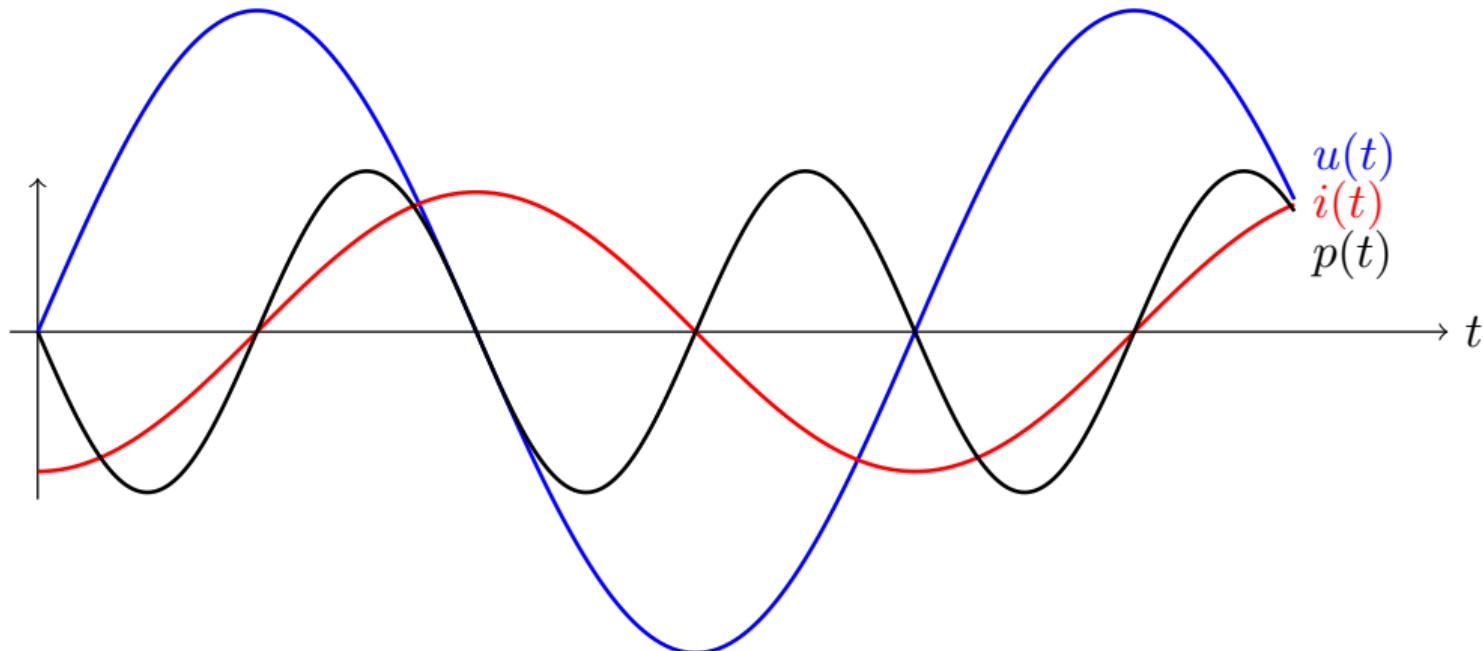
$$P = UI \cos \theta \xrightarrow{\theta=0} 0 \quad Q = UI \underbrace{\sin \theta}_{=1}$$

$$p(t) = P \cdot [1 + \cos(2\omega t)] + Q \cdot \sin(2\omega t)$$

$$\bar{Z}_L = \underline{\omega L / 90^\circ} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow \begin{cases} P = 0 \\ Q = UI = \frac{U^2}{\omega L} = I^2 \omega L \end{cases}$$

$$p(t) = Q \cdot \sin(2\omega t)$$

Potencia en CA, circuito inductivo puro



- ▶ Fluctúa al **doble de frecuencia** que la tensión y corriente
- ▶ Pasa por los ceros de tensión y corriente
- ▶ Su valor medio es **nulo**

Potencia en CA, circuito capacitivo puro

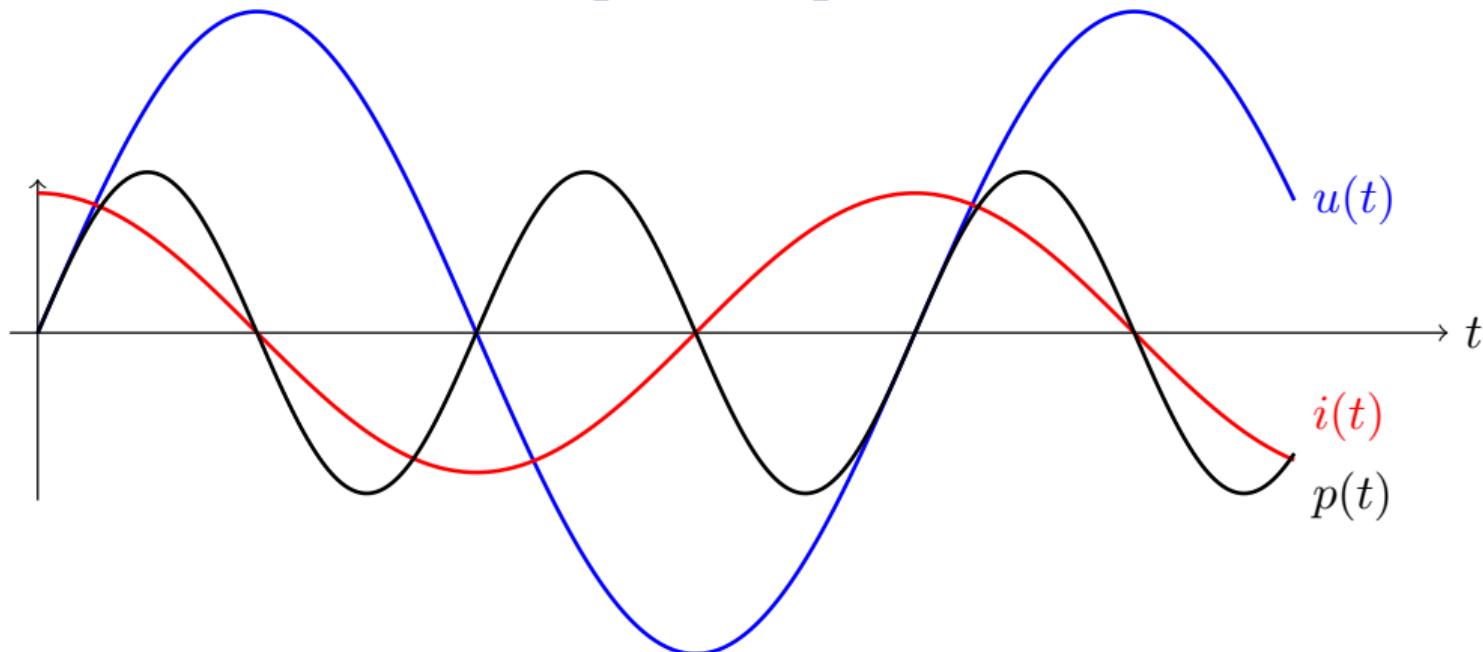
$$P = UI \cos \theta \xrightarrow{\theta=0} 0 \quad Q = UI \underbrace{\sin \theta}_{=-1}$$

$$p(t) = P \cdot [1 + \cos(2\omega t)] + Q \cdot \sin(2\omega t)$$

$$\bar{Z}_C = \frac{1}{\omega C} \angle -90^\circ \rightarrow \theta = -\frac{\pi}{2} \rightarrow \begin{cases} P = 0 \\ Q = -UI = -U^2\omega C = -\frac{I^2}{\omega C} \end{cases}$$

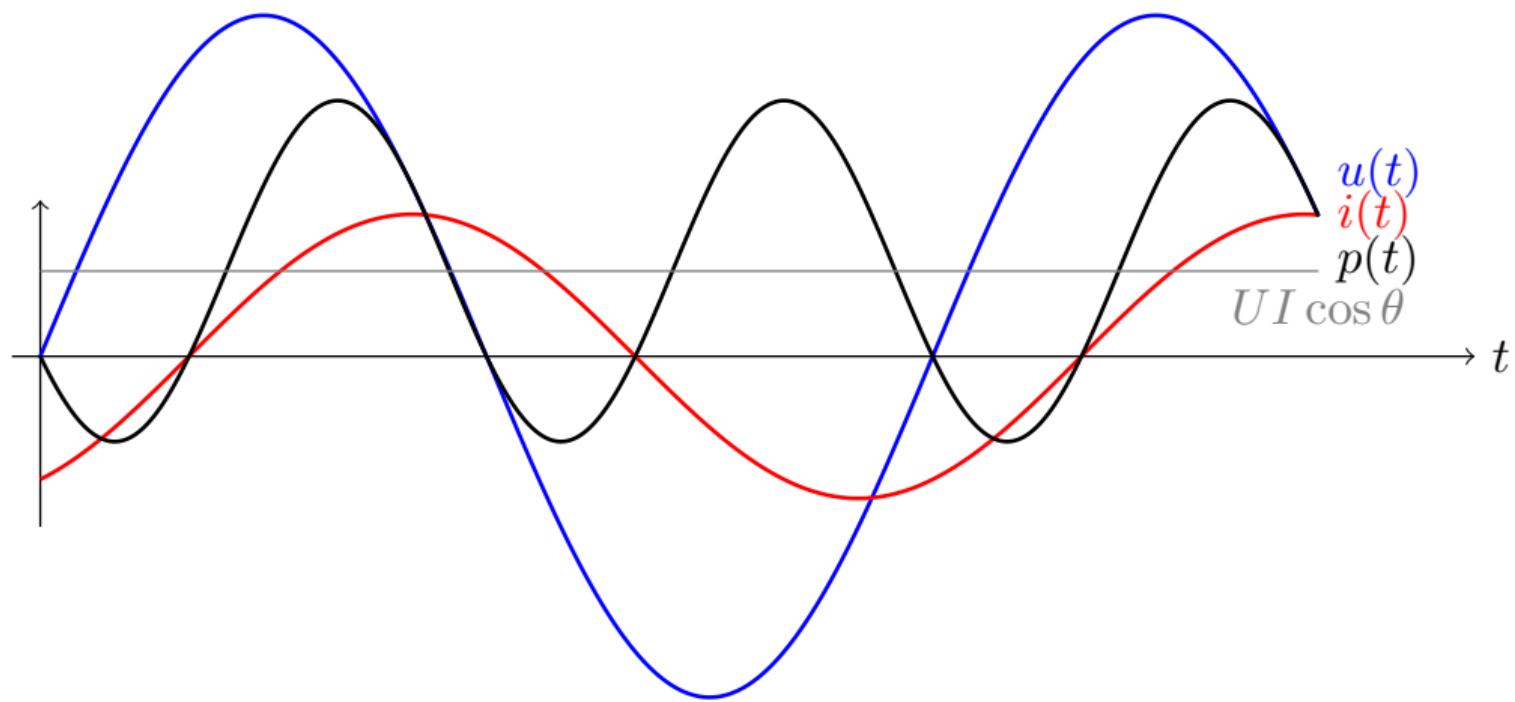
$$p(t) = Q \cdot \sin(2\omega t)$$

Potencia en CA, circuito capacitivo puro

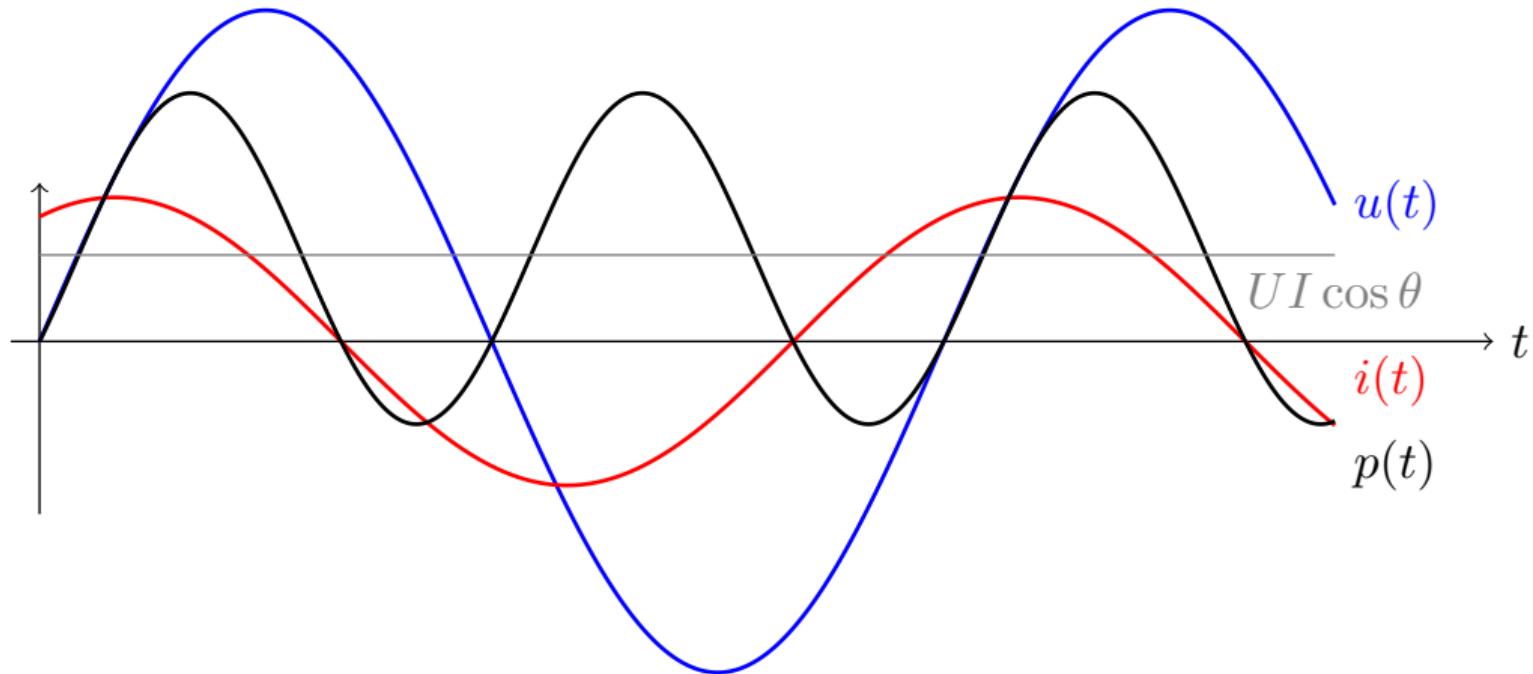


- ▶ Fluctúa al **doble de frecuencia** que la tensión y corriente
- ▶ Pasa por los ceros de tensión y corriente
- ▶ Su valor medio es **nulo**

Potencia en CA, circuito inductivo con pérdidas (RL)



Potencia en CA, circuito capacitivo con pérdidas (RC)



Interludio: pasado y presente de los sistemas eléctricos

Ms. Edith Clarke,
General Electric



Prof. Gabriela Hug,
ETH Zurich



Dr Vera Silva,
General Electric



Triángulo de potencias

- ▶ Potencia **activa** [unidades: W]

$$P = U \cdot I \cdot \cos(\theta) = R \cdot I^2$$

- ▶ Potencia **reactiva** [unidades: var]

$$Q = U \cdot I \cdot \sin(\theta) = X \cdot I^2$$

- ▶ Potencia **aparente** [unidades: VA]

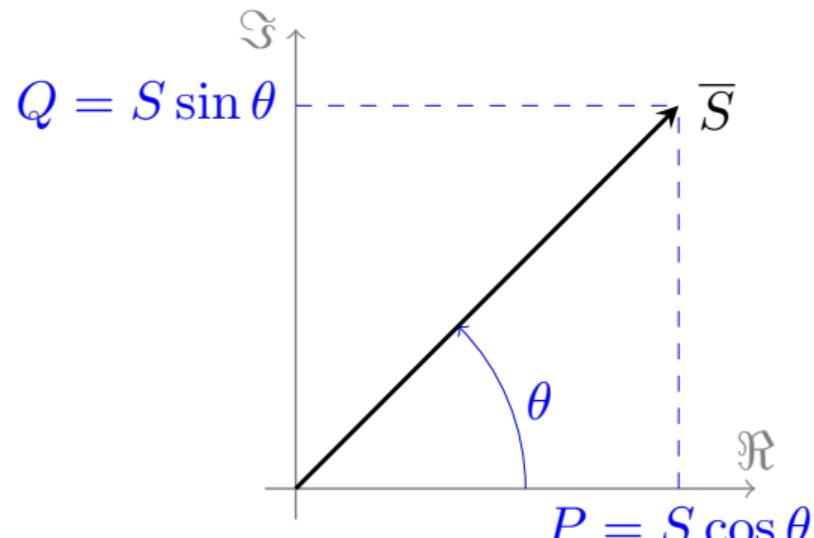
$$\bar{S} = P + jQ = \bar{U} \cdot \bar{I}^*$$

Demostración de la expresión para \bar{S} :

$$\bar{U} = U/\underline{0}$$

$$\bar{I} = I/\underline{-\theta} \quad (\text{circuito en retraso})$$

$$\begin{aligned}\bar{U} \cdot \bar{I}^* &= U/\underline{0} \cdot I/\underline{\theta} = UI/\underline{\theta} = \\ &= UI(\cos \theta + j \sin \theta) = P + jQ\end{aligned}$$



$$S = U \cdot I$$

$$\theta_S = \theta_Z = \theta$$

Triángulo de potencias

- ▶ Potencia **activa** [unidades: W]

$$P = U \cdot I \cdot \cos(\theta) = R \cdot I^2$$

- ▶ Potencia **reactiva** [unidades: var]

$$Q = U \cdot I \cdot \sin(\theta) = X \cdot I^2$$

- ▶ Potencia **aparente** [unidades: VA]

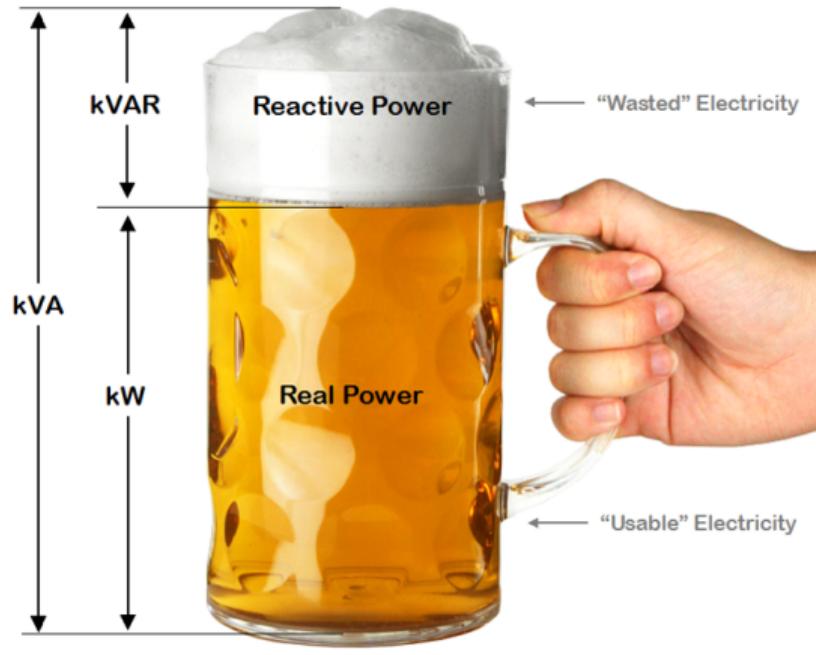
$$\bar{S} = P + jQ = \bar{U} \cdot \bar{I}^*$$

Demostración de la expresión para \bar{S} :

$$\bar{U} = U/\underline{0}$$

$$\bar{I} = I/\underline{-\theta} \quad (\text{circuito en retraso})$$

$$\begin{aligned}\bar{U} \cdot \bar{I}^* &= U/\underline{0} \cdot I/\underline{\theta} = UI/\underline{\theta} = \\ &= UI(\cos \theta + j \sin \theta) = P + jQ\end{aligned}$$



Potencia en elementos: resistencia

$$\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} P_R = R I^2 \\ Q_R = 0 \\ S_R = P_R \end{cases}$$

- ▶ Consume potencia activa
- ▶ No “consume” potencia reactiva

Potencia en elementos: inductancia

$$\theta = \pi/2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} P_L = 0 \\ Q_L = \omega L I^2 \\ \bar{S}_L = \omega L I^2 / \pi/2 \end{cases}$$

- ▶ No consume potencia activa
- ▶ “Consumo” potencia reactiva ($Q > 0$)
 - ▶ **Nota:** la potencia reactiva es potencia *entretenida*, no es potencia que se consuma
Pero, dado el convenio de signos, decimos que **las bobinas “consumen” Q** y **los condensadores “generan” Q** (ya que almacenan y devuelven energía al circuito en semiciclos opuestos)

Potencia en elementos: condensador

$$\theta = -\pi/2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} P_L = 0 \\ Q_C = -\omega C U^2 \\ \bar{S}_C = \omega C U^2 / -\pi/2 \end{cases}$$

- ▶ No consume potencia activa
- ▶ “Genera” potencia reactiva ($Q < 0$)
 - ▶ **Nota:** la potencia reactiva es potencia *entretenida*, no es potencia que se consuma
Pero, dado el convenio de signos, decimos que **las bobinas “consumen” Q** y **los condensadores “generan” Q** (ya que almacenan y devuelven energía al circuito en semiciclos opuestos)

Teorema de Boucherot

En un circuito con múltiples elementos, la potencia aparente total es la **suma de las potencias aparentes individuales**

(la potencia activa/reactiva total es la **suma de las potencias activas/reactivas individuales**)

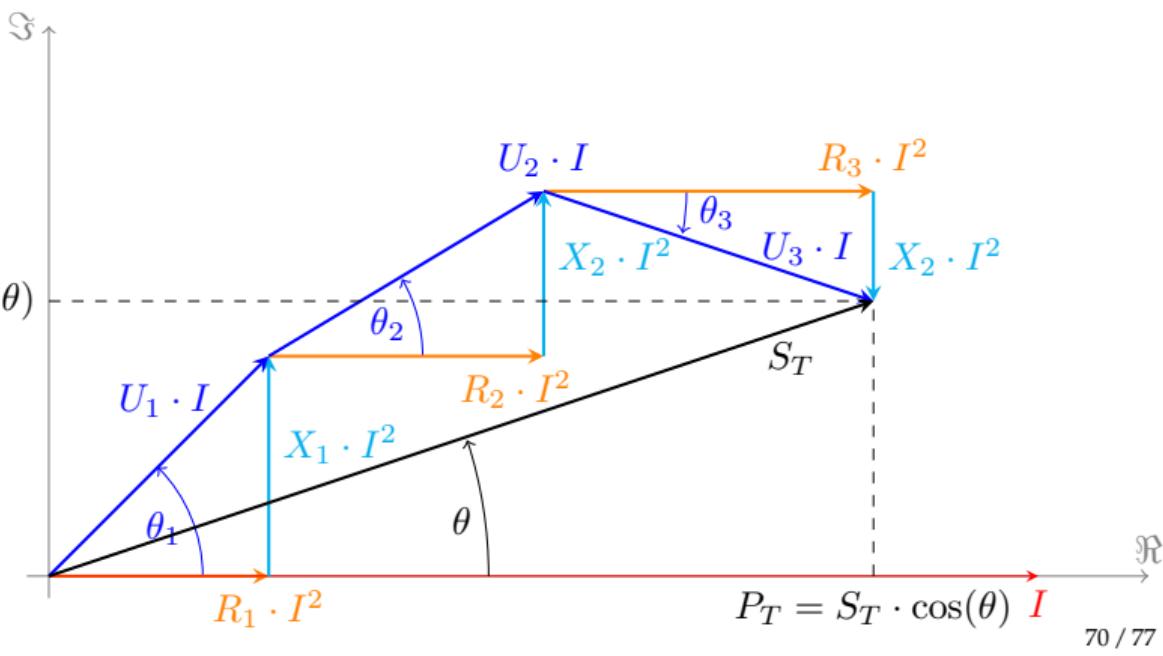
$$P_T + jQ_T = \sum_{i=1}^n (P_i + jQ_i)$$

$$\bar{S}_T = \sum_{i=1}^n \bar{S}_i$$

$$Q_T = S_T \cdot \sin(\theta)$$

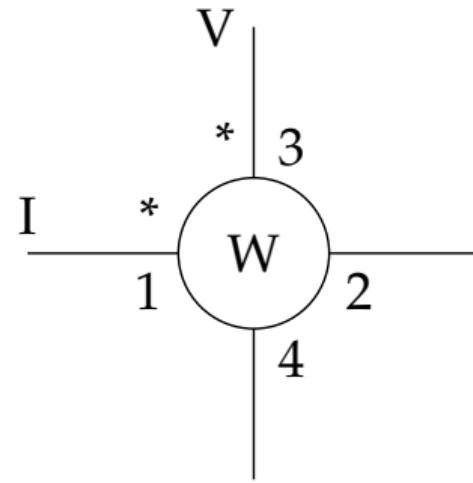
$$P_T = \sum_{i=1}^n P_i$$

$$Q_T = \sum_{i=1}^n Q_i$$



$$P_T = S_T \cdot \cos(\theta)$$

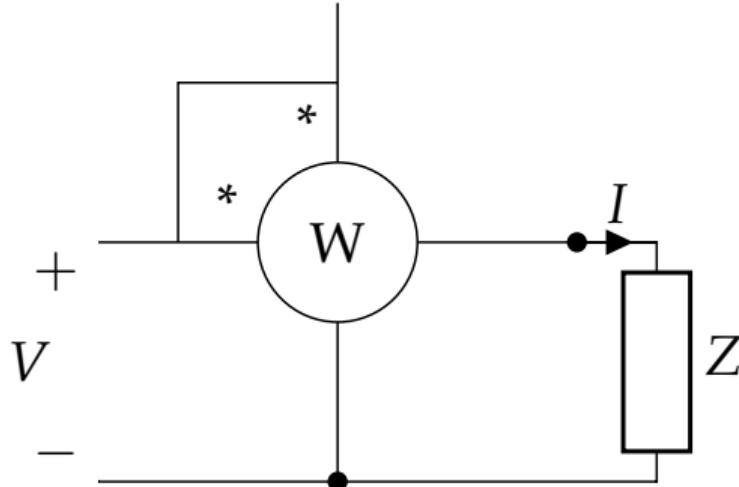
Medida de potencia: vatímetro



Equipo de medida de **4 terminales** (un par para tensión, un par para corriente)

$$W = \underbrace{\bar{I}_{1,2} \bullet \bar{U}_{3,4}}_{\text{producto escalar}} = I_{1,2} \cdot U_{3,4} \cdot \cos(\widehat{\bar{I}_{1,2}}, \widehat{\bar{U}_{3,4}})$$

Medida de potencia



Habitualmente se emplea con 3 terminales, **cortocircuitando** terminales con *

$$W = |\bar{V}| \cdot |\bar{I}| \cdot \cos(\theta_V - \theta_I) = P_Z$$

- ① Formas de onda
- ② Onda senoidal
- ③ Cálculo fasorial
- ④ Respuesta de elementos pasivos a excitación senoidal
- ⑤ Potencia en corriente alterna
Factor de potencia: importancia y mejora

Factor de potencia

El factor de potencia (*f.d.p.*), $\cos(\theta)$, representa la aportación de potencia activa dentro de la potencia aparente:

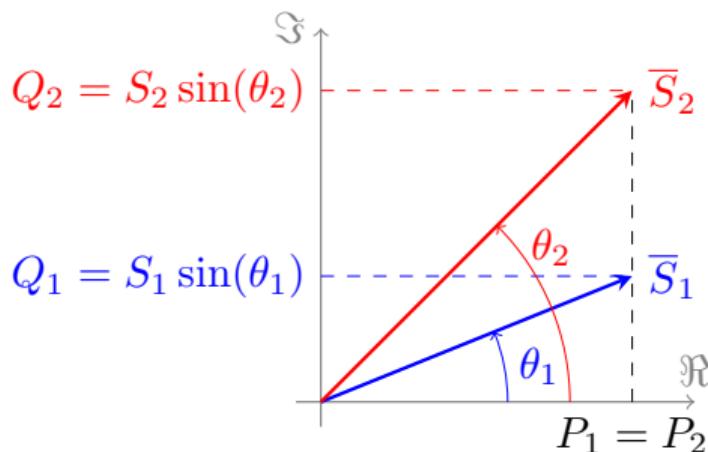
$$\cos(\theta) = \frac{P}{S}$$

Se dice que:

- ▶ *fdp en retraso* cuando el circuito tiene carácter inductivo (la intensidad va retrasada respecto a la tensión)
- ▶ *fdp en adelanto* cuando el circuito tiene carácter capacitivo (la intensidad va adelantada respecto a la tensión)

Factor de potencia: importancia y mejora

Consideremos dos sistemas con **misma tensión y potencia activa**, y factores de potencia $\cos \theta_2 < \cos \theta_1$ ($Q_2 > Q_1$)



- ▶ El sistema 2 requiere **mayor potencia aparente** (generador mayor) para alimentar la misma potencia activa:

$$\left(\frac{P}{\cos \theta_1} = S_1 \right) < \left(S_2 = \frac{P}{\cos \theta_2} \right)$$

- ▶ El sistema 2 requiere **mayor sección de cable** para transportar la misma potencia activa:

$$\left(\frac{P}{U \cos \theta_1} = I_1 \right) < \left(I_2 = \frac{P}{U \cos \theta_2} \right)$$

“Generación” local de reactiva

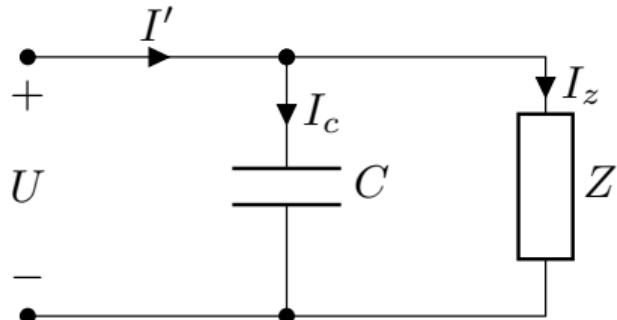
- ▶ Comúnmente, el factor de potencia es **inductivo** (máquinas eléctricas industriales)
- ▶ La red debe suministrar potencia reactiva inductiva (influye en secciones de líneas y tamaños de generadores → **mayor coste**)
- ▶ Es necesario mejorar **localmente** el factor de potencia

Solución común: utilizar **bancos de condensadores** como suministradores de Q

Cálculo de la capacidad para compensación de reactiva

Consideremos una carga de potencia activa P_z , potencia reactiva Q_z , y $\text{fdp} = \cos \theta$

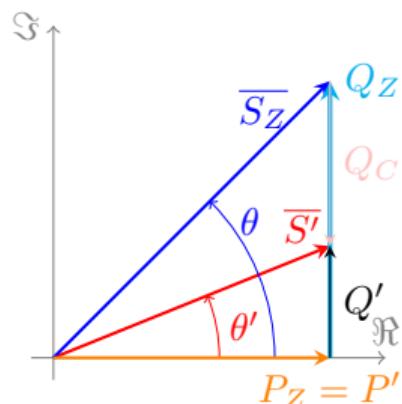
Se desea **mejorar el factor de potencia** a $\cos \theta' > \cos \theta$, manteniendo la potencia P_z



$$P' = P_z$$

$$Q' = Q_c + Q_z \quad (Q' < Q_z)$$

$$\bar{I}' = \bar{I}_c + \bar{I}_z \quad (I' < I_z)$$



$$Q_z = P_z \tan \theta$$

$$Q' = P_z \tan \theta'$$

$$|Q_c| = Q_z - Q' = P_z(\tan \theta - \tan \theta')$$

$$|Q_c| = \underbrace{X_c \cdot I_c^2}_{= \frac{1}{\omega C}} = \omega C U^2 \rightarrow C = \boxed{\frac{P_z(\tan \theta - \tan \theta')}{\omega U^2}}$$