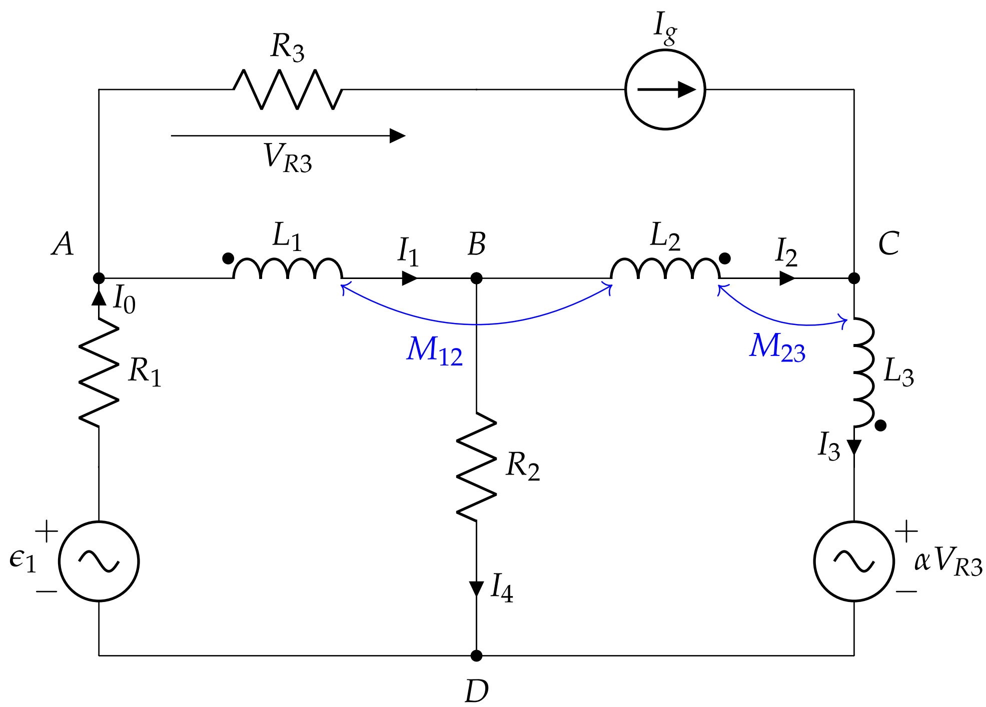
TEORÍA DE CIRCUITOS II :: Acoplamientos

En el circuito de la figura:

1. Escribe las ecuaciones de mallas sin realizar la sustitución numérica.
2. Tras realizar la sustitución numérica, resuelve las ecuaciones anteriores, y obtén las corrientes de rama indicadas.
3. Realiza un balance de potencias activas.



Datos:

$$
\begin{aligned}
\overline{I}_g &= 10\underline{/0^\circ}\,\mathrm{A} \\
\overline{\epsilon}_1 &= 10\underline{/0^\circ}\,\mathrm{A} \\
R_i &= 1\,\Omega \quad \forall i \\
X_{Li} &= 1\,\Omega \quad \forall i \\
\alpha &= 1
\end{aligned}
$$

Todos los acoplamientos magnéticos del circuito son perfectos.

Solución

Tomando las tres corrientes de malla en sentido dextrógiro, siendo I_a la corriente de la malla inferior izquierda, I_b la corriente de la malla inferior derecha, e I_c la corriente de la malla superior, las ecuaciones de las dos mallas inferiores son:

$$\begin{aligned}\overline{\epsilon}_1 = {} & \overline{I}_a(R_1 + j\omega L_1 + R_2) + \\ & + \overline{I}_b(-R_2 - j\omega M_{12}) + \\ & + \overline{I}_c(-j\omega L_1 + j\omega M_{12})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-\alpha \overline{U}_{R3} = {} & \overline{I}_a(-R_2 - j\omega M_{12}) + \\ & + \overline{I}_b(R_2 + j\omega L_2 + j\omega L_3 + 2j\omega M_{23}) + \\ & + \overline{I}_c(-j\omega L_2 - j\omega M_{23} + j\omega M_{12})\end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}\overline{I}_c &= \overline{I}_g \\ \overline{U}_{R3} &= R_3 \overline{I}_g\end{aligned}$$

Reagrupando obtenemos:

$$\begin{aligned}\overline{\epsilon}_1 + \overline{I}_g(j\omega L_1 - j\omega M_{12}) &= \overline{I}_a(R_1 + j\omega L_1 + R_2) + \overline{I}_b(-R_2 - j\omega M_{12}) \\ \overline{I}_g(j\omega L_2 + j\omega M_{23} - j\omega M_{12} - \alpha R_3) &= \overline{I}_a(-R_2 - j\omega M_{12}) + \overline{I}_b(R_2 + j\omega L_2 + j\omega L_3 + 2j\omega M_{23})\end{aligned}$$

Realizamos la sustitución numérica,

$$\begin{aligned}10 &= \overline{I}_a(2 + j) + \overline{I}_b(-1 - j) \\ 10(-1 + j) &= \overline{I}_a(-1 - j) + \overline{I}_b(1 + 4j)\end{aligned}$$

donde se ha tenido en cuenta que:

$$\begin{aligned}\omega M_{12} &= \sqrt{\omega L_1 \cdot \omega L_2} = 1\,\Omega \\ \omega M_{23} &= \sqrt{\omega L_2 \cdot \omega L_3} = 1\,\Omega\end{aligned}$$

La solución de este sistema es:

$$\begin{aligned}\overline{I}_a &= 5{,}66\underline{/-1{,}91^\circ}\,\mathrm{A} = 5{,}66 - 0{,}19\mathrm{j}\,\mathrm{A} \\ \overline{I}_b &= 3{,}88\underline{/29{,}05^\circ}\,\mathrm{A} = 3{,}39 + 1{,}89\mathrm{j}\,\mathrm{A}\end{aligned}$$

Las corrientes de rama indicadas son:

$$
\begin{aligned}
\overline{I}_0 &= 5{,}66 - 0{,}19\text{j}\,\text{A}\\
\overline{I}_1 &= -4{,}33 - 0{,}19\text{j}\,\text{A}\\
\overline{I}_2 &= -6{,}6 + 1{,}88\text{j}\,\text{A}\\
\overline{I}_3 &= 3{,}39 + 1{,}88\text{j}\,\text{A}\\
\overline{I}_4 &= 2{,}26 - 2{,}07\text{j}\,\text{A}
\end{aligned}
$$

Finalmente, las potencias activas de los generadores son:

$$
\begin{aligned}
P_{\epsilon 1} &= Re(\overline{\epsilon}_1 \cdot \overline{I}_0^*) = 56{,}6\,\text{W}\\
P_{\alpha} &= Re(\alpha R_3 \overline{I}_g \cdot (-\overline{I}_3)^*) = -33{,}96\,\text{W}\\
P_{\epsilon 1} &= Re(\overline{U}_{Ig} \cdot \overline{I}_g^*) = 118{,}87\,\text{W}
\end{aligned}
$$

donde la tensión U_{Ig} se calcula con:

$$
\begin{aligned}
\overline{U}_{AC} &= \overline{U}_{R3} - \overline{U}_{Ig}\\
\overline{U}_{AC} &= \overline{U}_{L1} + \overline{U}_{L2}\\
\overline{U}_{L1} &= \overline{I}_1 j\omega L_1 - \overline{I}_2 j\omega M_{12}\\
\overline{U}_{L2} &= -\overline{I}_1 j\omega M_{12} + \overline{I}_2 j\omega L_2 + \overline{I}_3 j\omega M_{23}
\end{aligned}
$$

Las potencias de las resistencias son:

$$
\begin{aligned}
P_{R1} &= R_1 I_0^2 = 32{,}08\,\text{W}\\
P_{R2} &= R_2 I_4^2 = 9{,}43\,\text{W}\\
P_{R3} &= R_3 I_g^2 = 100\,\text{W}
\end{aligned}
$$

Comprobamos que la potencia activa total entregada por las fuentes coincide con la potencia activa total consumida en las resistencias.