Elementos activos

Teoría de Circuitos II

Autor: Luis Badesa Bernardo

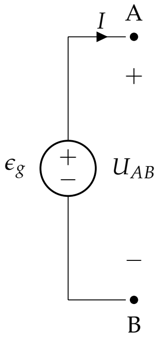
(basado en las diapositivas de Óscar Perpiñán Lamigueiro)

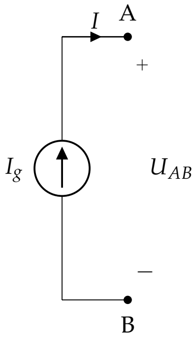
Elementos activos (generadores) $\rightarrow$ motivan la circulación de corriente

Tipos:

- De tensión o de corriente
- Ideales o reales
- Dependientes o independientes

Generador ideal





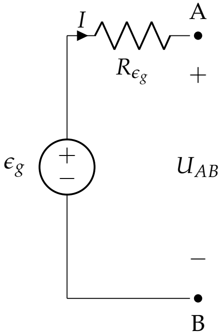
Un **generador de tensión ideal** impone la tensión a la salida

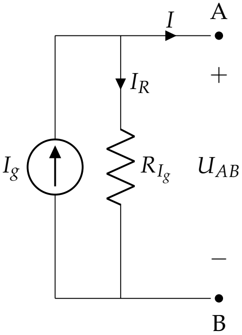
(*la corriente depende del circuito*)

Un **generador de corriente ideal** impone la corriente a la salida

(*la tensión depende del circuito*)

Generador real CC





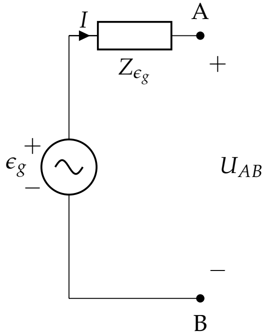
Real:
con pérdidas, modeladas mediante
una resistencia **en serie**

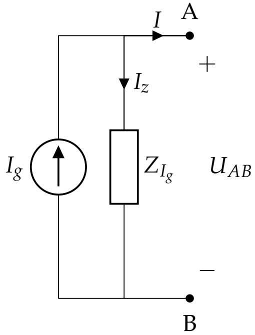
$$U_{AB} = \epsilon_g - R_{\epsilon_g} \cdot I$$

Real:
con pérdidas, modeladas mediante
una resistencia **en paralelo**

$$I = I_g - \frac{U_{AB}}{R_{I_g}}$$

Generador real CA





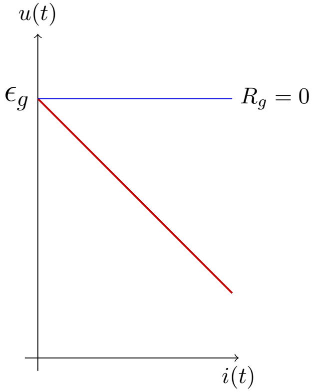
Real:
con pérdidas, modeladas mediante
una impedancia **en serie**

$$\overline{U}_{AB} = \overline{\epsilon}_g - \overline{Z}_{\epsilon_g} \cdot \overline{I}$$

Real:
con pérdidas, modeladas mediante
una impedancia **en paralelo**

$$\overline{I} = \overline{I}_g - \frac{\overline{U}_{AB}}{\overline{Z}_{I_g}}$$

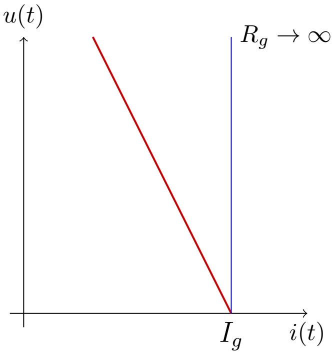
Fuente de **tensión**



$$u(t) = \epsilon_g - R_{\epsilon_g} \cdot i(t)$$

$$i(t) = \frac{\epsilon_g - u(t)}{R_{\epsilon_g}}$$

Fuente de **corriente**

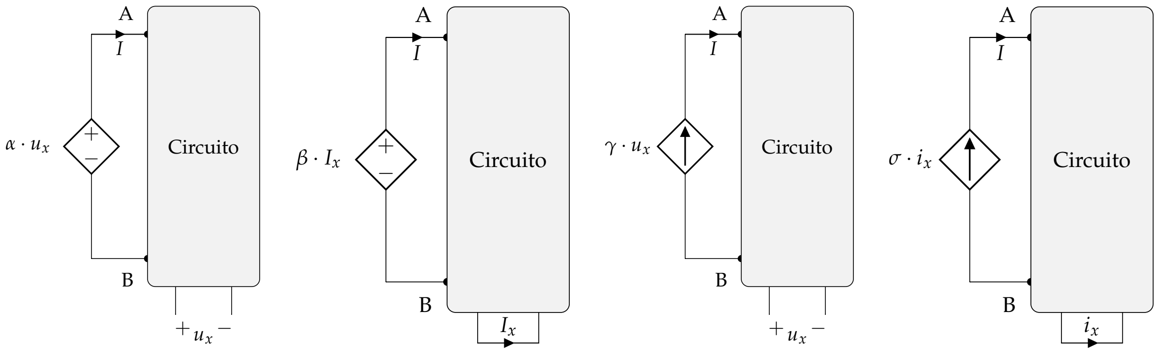


$$i(t) = I_g - \frac{u(t)}{R_{Ig}}$$

$$u(t) = R_{Ig} \cdot [I_g - i(t)]$$

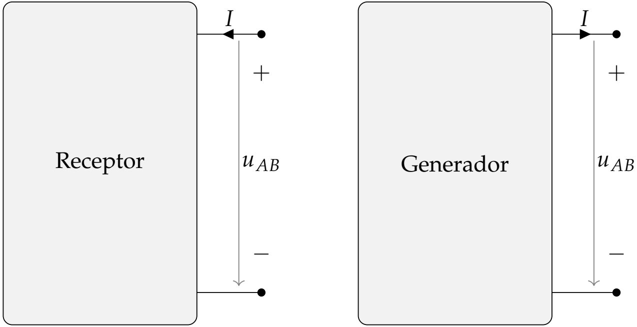
Generadores dependientes

No tienen valores de ϵ_g o I_g fijos, sino que estos **dependen** de la **tensión** o **corriente** en **otros puntos** de la red:

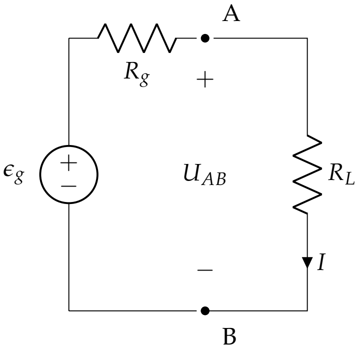


Receptores y generadores

- Un **circuito receptor <u>absorbe</u> potencia** y la corriente *entra* por el terminal de mayor potencial
- Un **circuito generador <u>entrega</u> potencia** y la corriente *sale* por el terminal de mayor potencial

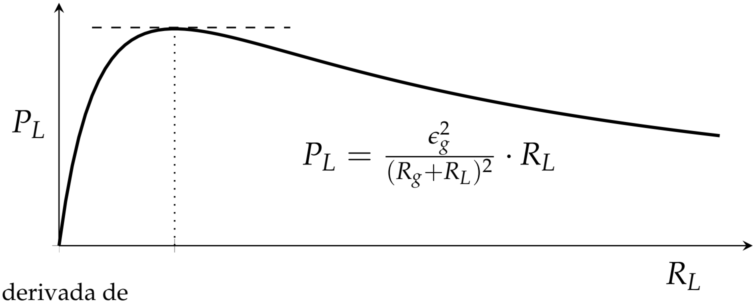


Potencia y rendimiento de una fuente CC



$$
\left.\begin{aligned}
I &= \frac{\epsilon_g}{R_g + R_L} \\
P_g &= \epsilon_g \cdot I \\
P_L &= I^2 \cdot R_L
\end{aligned}\right\} \rightarrow
\left\{\begin{aligned}
P_g &= \frac{\epsilon_g^2}{R_g + R_L} \\
P_L &= \frac{\epsilon_g^2 \cdot R_L}{(R_g + R_L)^2} \\
\eta &= \frac{P_L}{P_g} = \frac{R_L}{R_g + R_L}
\end{aligned}\right.
$$

Potencia máxima entregada por la fuente:



$$\frac{\mathrm{d}P_L}{\mathrm{d}R_L} \overset{\substack{\text{derivada de}\\ \text{un cociente}\\ \downarrow}}{=} \epsilon_g^2 \cdot \left[\frac{(R_L+R_g)^2 - 2\cdot(R_L+R_g)\cdot R_L}{(R_L+R_g)^4}\right] = \frac{\epsilon_g^2\cdot(R_g-R_L)}{(R_L+R_g)^3}$$

Aplicando la **condición de máximo**:

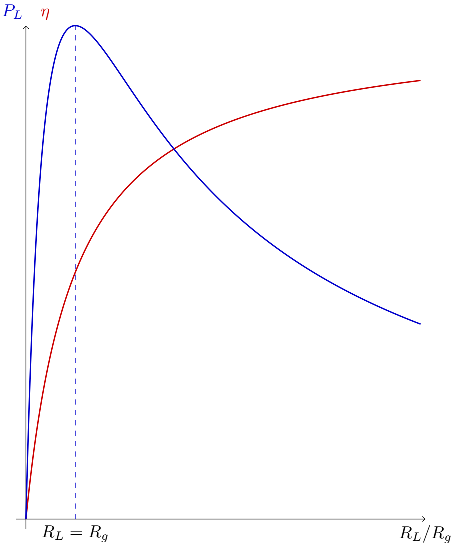
$$\frac{\mathrm{d}P_L}{\mathrm{d}R_L} = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{R_L = R_{th}}$$

Potencia y rendimiento de una fuente CC

- Suponiendo R_g constante, la potencia entregada por la fuente es máxima cuando $R_L = R_g$

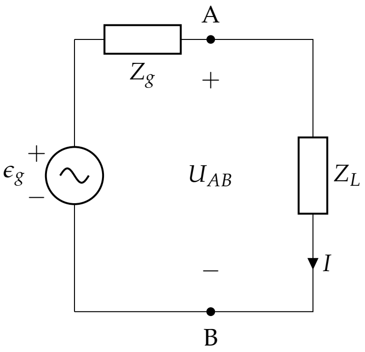
$$P_L = \frac{\epsilon_g^2}{4\,R_g}$$

- El rendimiento es una función creciente ($\eta \to 1$ para $R_L \gg R_g$)



Potencia de una fuente CA

Calculamos la potencia activa en la impedancia de carga Z_L:



$$\overline{Z}_g = R_g + jX_g$$

$$\overline{Z}_L = R_L + jX_L$$

$$\bar{I} = \frac{\bar{\epsilon}_g}{\overline{Z}_g + \overline{Z}_L}$$

$$P_L = I^2 \cdot R_L$$

$$P_L = \frac{\epsilon_g^2}{|\overline{Z}_g + \overline{Z}_L|^2} \cdot R_L$$

Máxima potencia de una fuente CA

Suponiendo $\overline{Z}_g$ constante, las condiciones de máximo son:

$$\frac{\partial P_L}{\partial X_L} = 0 \,, \qquad \frac{\partial P_L}{\partial R_L} = 0$$

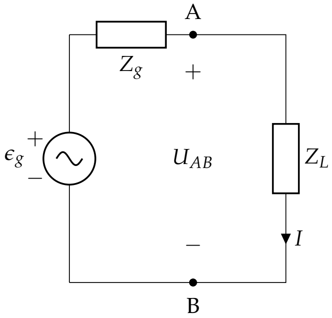
Los resultados son:

$$\frac{\partial P_L}{\partial X_L} = 0 \Rightarrow \boxed{X_L = -X_g}$$

$$\frac{\partial P_L}{\partial R_L} = 0 \Rightarrow \boxed{R_L = R_g}$$

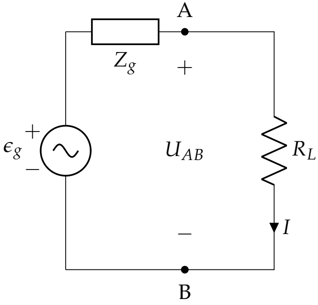
(deducción en Teoría de Circuitos I)

En estas condiciones, la **máxima potencia** disponible en la carga es:



$$\left.\begin{aligned} \overline{Z}_L &= \overline{Z}_g^* \\ P_L &= \frac{\epsilon_g^2}{|\overline{Z}_g + \overline{Z}_L|^2} \cdot R_L \end{aligned}\right\} \rightarrow \boxed{P_L = \frac{\epsilon_g^2}{4\,R_g}}$$

Si la **impedancia de carga** es **resistiva pura**, únicamente se puede cumplir la segunda condición del máximo, $\dfrac{\partial P_L}{\partial R_L} = 0$



Resolviendo $\dfrac{\partial P_L}{\partial R_L} = 0\,,$ se obtendría:

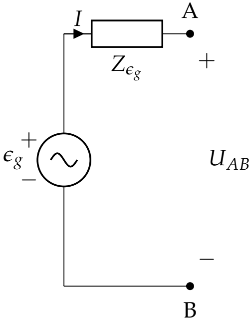
$$R_L = |\overline{Z}_g| = \sqrt{R_g^2 + X_g^2} \qquad \text{(luego } R_L > R_g\text{)}$$

$$P_L = \frac{\epsilon_g^2}{2(R_L + R_g)} \qquad \text{(se omite la deducción)}$$

1. Potencia
2. Transformación y asociación

Equivalencia de fuentes

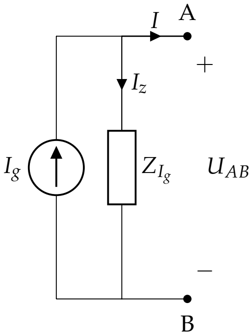
Sólo es posible establecer **equivalencia** entre **fuentes reales**



$$\overline{Z}_g = \overline{Z}_{\epsilon_g} = \overline{Z}_{I_g}$$

$$\overline{\epsilon}_g = \overline{Z}_g \cdot \overline{I}_g$$

$$\overline{I}_g = \frac{\overline{\epsilon}_g}{\overline{Z}_g}$$



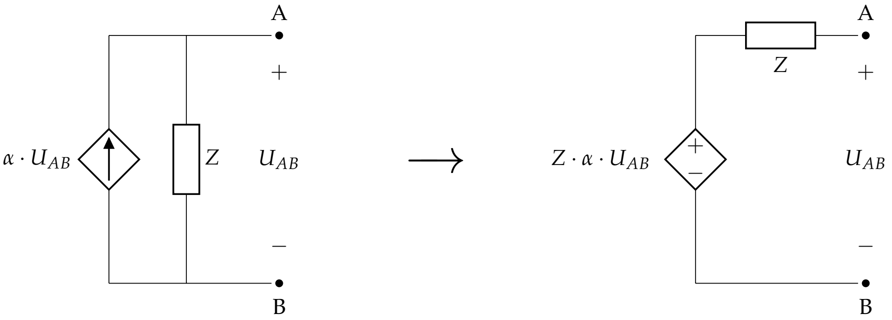
$$\overline{U}_{AB} = \overline{\epsilon}_g - \overline{Z}_{\epsilon_g} \cdot \overline{I}$$

(demostración en
Teoría de Circuitos I)

$$\overline{I} = \overline{I}_g - \frac{\overline{U}_{AB}}{\overline{Z}_{I_g}}$$

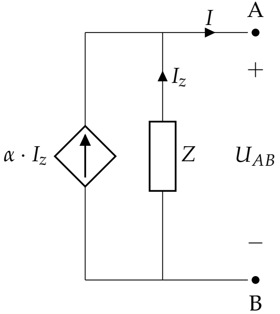
Transformación de fuentes dependientes

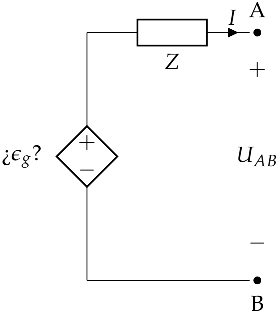
Si la variable de la que depende la fuente **no "desaparece"** en la transformación, la **conversión es directa**:



Si la **variable "desaparece"** en la transformación, hay que tener mucho cuidado: hay que hacer un **cambio de variable** por otra que se mantenga (siguiente diapositiva)

Transformación de fuentes dependientes: cambio de variable





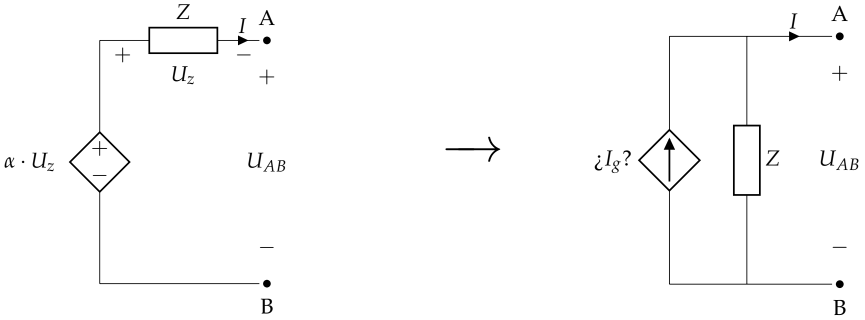
Cualquiera de estos dos cambios de variable es válido:

$$I_z = \frac{-U_{AB}}{Z}\,, \qquad I_z = \frac{I}{1+\alpha}$$

Dando lugar a estas expresiones igualmente válidas:

$$\epsilon_g = -\alpha \cdot U_{AB}\,, \qquad \epsilon_g = \frac{\alpha \cdot Z}{1+\alpha} I$$

Transformación de fuentes dependientes: cambio de variable



Cualquiera de estos dos cambios de variable es válido:

$$U_z = \frac{U_{AB}}{\alpha - 1}, \qquad U_z = Z \cdot I$$

Dando lugar a estas expresiones igualmente válidas:

$$I_g = \frac{\alpha \cdot U_z}{Z} = \frac{\alpha \cdot U_{AB}}{Z(\alpha - 1)}, \quad I_g = \alpha \cdot I$$

Conexión en serie de generadores

Generadores de tensión

Pueden conectarse en serie **sin restricción** (tanto generadores ideales como reales)

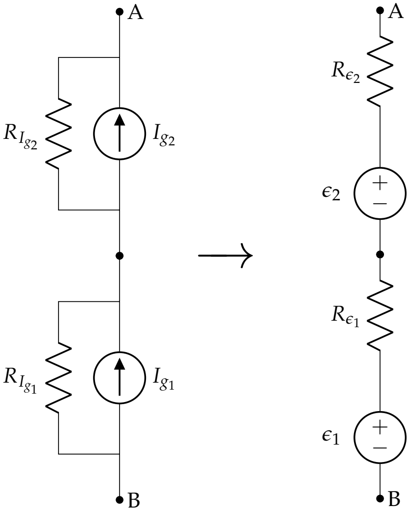
$$\text{CC} \rightarrow \begin{cases} \epsilon_T = \sum_{\forall i} \epsilon_i \\ R_{g_T} = \sum_{\forall i} R_{g_i} \end{cases} \qquad \text{CA} \rightarrow \begin{cases} \overline{\epsilon}_T = \sum_{\forall i} \overline{\epsilon}_i \\ \overline{Z}_{g_T} = \sum_{\forall i} \overline{Z}_{g_i} \end{cases}$$

Generadores de corriente

- **Ideal**: todas las fuentes **deben ser idénticas** (valor y sentido)
- **Real**: sin restricción
  - Transformación a fuentes de tensión para obtener la **fuente equivalente**

Ejemplo: fuentes de corriente reales en serie

Se transforman primero cada una de las fuentes de corriente en fuentes de tensión:



Donde:

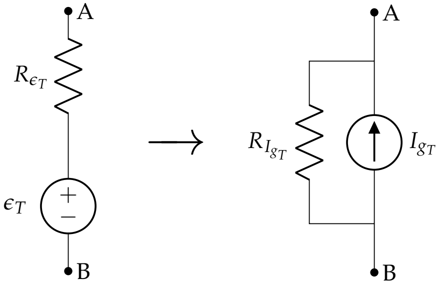
$$\epsilon_1 = I_{g_1} \cdot R_{I_{g_1}}$$
$$\epsilon_2 = I_{g_2} \cdot R_{I_{g_2}}$$

$$R_{\epsilon_1} = R_{I_{g_1}}$$
$$R_{\epsilon_2} = R_{I_{g_2}}$$

(continúa en la siguiente diapositiva)

Ejemplo: fuentes de corriente reales en serie (continuación)

Las fuentes de tensión en serie se asocian en una fuente equivalente, y esta se transforma de vuelta en una fuente de corriente:



Donde:

$$\epsilon_T = \epsilon_1 + \epsilon_2 = I_{g_1} \cdot R_{I_{g_1}} + I_{g_2} \cdot R_{I_{g_2}}$$

$$R_{\epsilon_T} = R_{\epsilon_1} + R_{\epsilon_2} = R_{I_{g_1}} + R_{I_{g_2}}$$

Y finalmente:

$$\boxed{I_{g_T} = \frac{\epsilon_T}{R_{I_{g_T}}} = \frac{I_{g_1} \cdot R_{I_{g_1}} + I_{g_2} \cdot R_{I_{g_2}}}{R_{I_{g_1}} + R_{I_{g_2}}}}$$

$$\boxed{R_{I_{g_T}} = R_{\epsilon_T} = R_{I_{g_1}} + R_{I_{g_2}}}$$

Conexión en paralelo de generadores

Generadores de tensión

- **Ideal**: todas las fuentes **deben ser idénticas** (valor y polaridad)
- **Real**: sin restricción
  - Transformación a fuentes de corriente para obtener la **fuente equivalente**

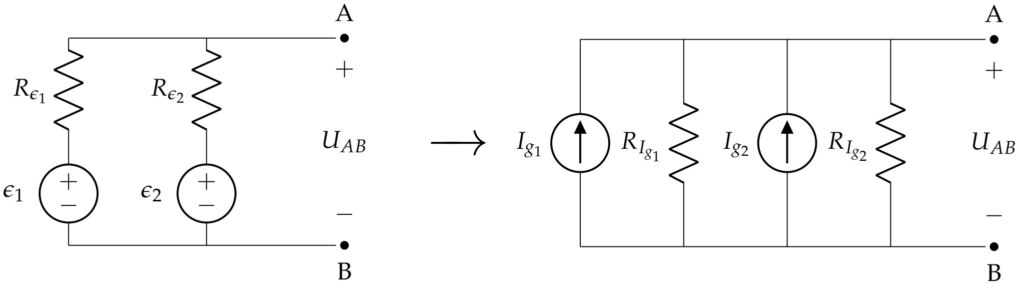
Generadores de corriente

Pueden conectarse en paralelo **sin restricción** (tanto generadores ideales como reales)

$$\text{CC} \rightarrow \begin{cases} I_{g_T} = \sum\limits_{\forall i} I_{g_i} \\ G_{g_T} = \sum\limits_{\forall i} G_{g_i} \end{cases} \qquad \text{CA} \rightarrow \begin{cases} \overline{I}_{g_T} = \sum\limits_{\forall i} \overline{I}_{g_i} \\ \overline{Y}_{g_T} = \sum\limits_{\forall i} \overline{Y}_{g_i} \end{cases}$$

Ejemplo: fuentes de tensión reales en paralelo

Se transforman primero cada una de las fuentes de tensión en fuentes de corriente:



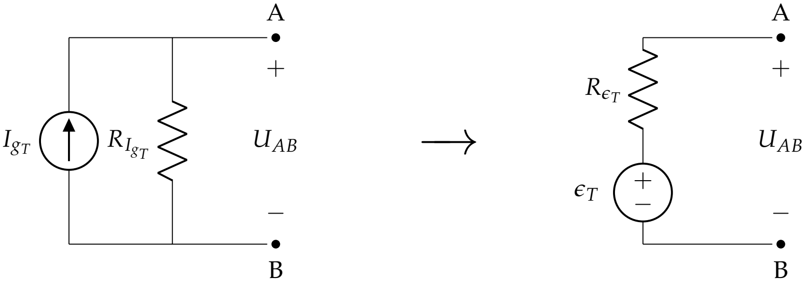
Donde:

$$I_{g_1} = \frac{\epsilon_1}{R_{\epsilon_1}} \qquad I_{g_2} = \frac{\epsilon_2}{R_{\epsilon_2}} \qquad R_{I_{g_1}} = R_{\epsilon_1} \qquad R_{I_{g_2}} = R_{\epsilon_2}$$

(continúa en la siguiente diapositiva)

Ejemplo: fuentes de tensión reales en paralelo (continuación)

Las fuentes de corriente en paralelo se asocian en una fuente equivalente, y esta se transforma de vuelta en una fuente de tensión:



$$I_{g_T} = I_{g_1} + I_{g_2} = \frac{\epsilon_1}{R_{\epsilon_1}} + \frac{\epsilon_2}{R_{\epsilon_2}}$$

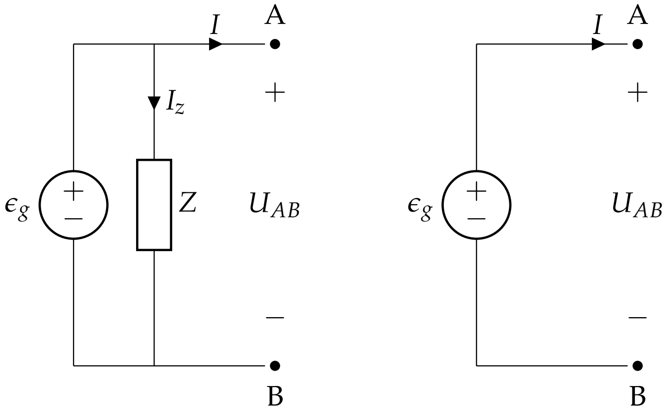
$$R_{I_{g_T}} = R_{I_{g_1}} \parallel R_{I_{g_2}} = R_{\epsilon_1} \parallel R_{\epsilon_2}$$

$$\boxed{\epsilon_T = R_{\epsilon_T} \cdot I_{g_T} = \frac{\epsilon_1 \cdot R_{\epsilon_2} + \epsilon_2 \cdot R_{\epsilon_1}}{R_{\epsilon_1} + R_{\epsilon_2}}}$$

$$\boxed{R_{\epsilon_T} = R_{I_{g_T}} = R_{\epsilon_1} \parallel R_{\epsilon_2}}$$

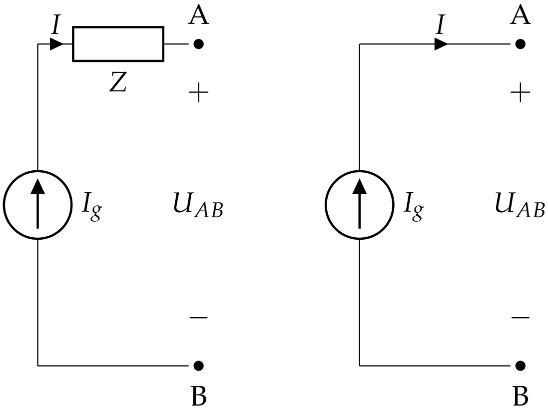
Fuentes dominantes

Una fuente de **tensión** ideal es **dominante** sobre las ramas conectadas en **paralelo** (se puede **prescindir** de **estas ramas** si solo nos interesa la salida en A-B)



Fuentes dominantes

Una fuente de **corriente** ideal es **dominante** sobre los elementos conectados en **serie** (se puede **prescindir** de **estos elementos** si solo nos interesa la salida en A-B)



Modificación de la geometría de un circuito: movilidad de fuentes

Recordatorio de Teoría de Circuitos I:

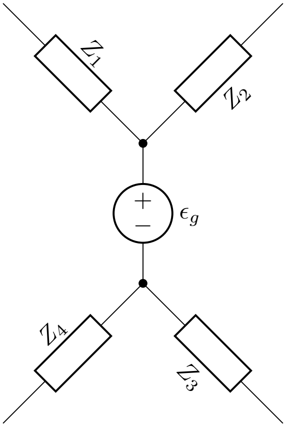
- Método de las mallas: únicamente aplicable con **fuentes de tensión**
- Método de los nudos: únicamente aplicable con **fuentes de corriente**

¿Qué hacer si hay **generadores ideales**, y no es posible transformación?

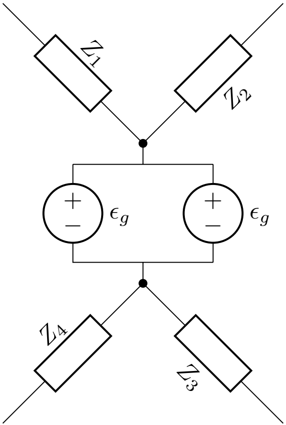
Una posibilidad $\rightarrow$ **movilidad de generadores**

- La movilidad de fuentes nos permite **transformar** un **generador ideal** en un **conjunto** de **generadores reales**
- Será necesaria una **modificación de la geometría** del circuito

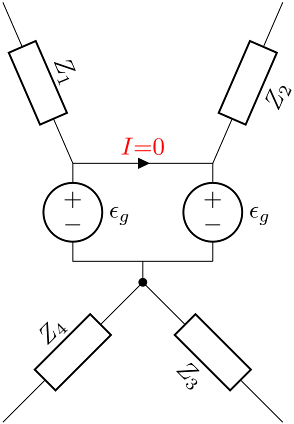
Movilidad de fuentes de tensión: paso a paso



Generador **ideal** de **tensión**

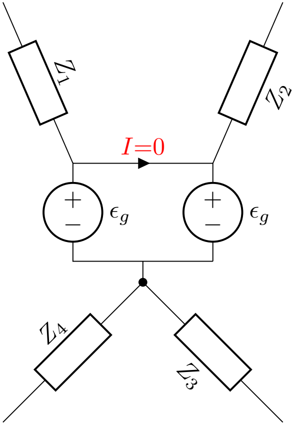


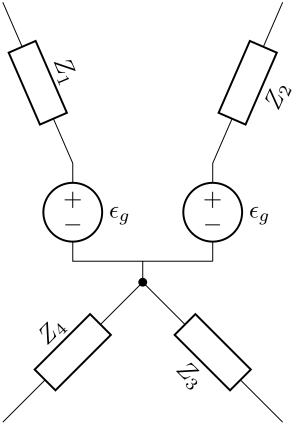
Desdoblamos en dos generadores en paralelo



Los **extremos del cable** están al **mismo potencial**, luego no circula corriente

Movilidad de fuentes de tensión: paso a paso

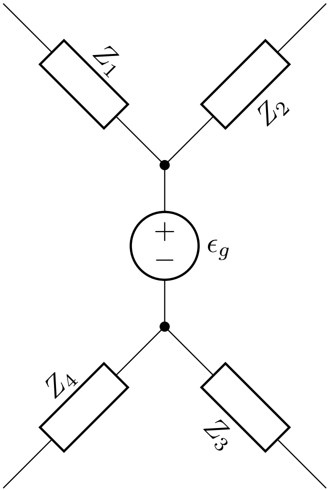


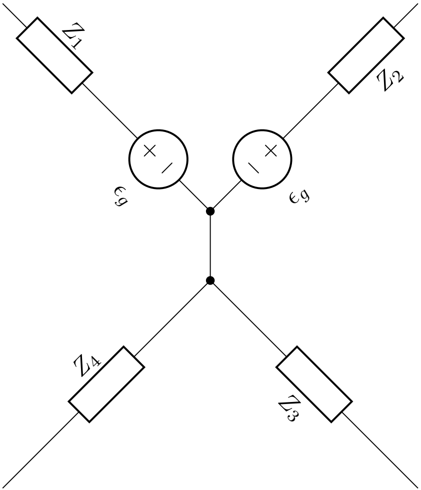


Los **extremos del cable** están al **mismo potencial**, luego no circula corriente

Podemos por lo tanto **prescindir** del cable

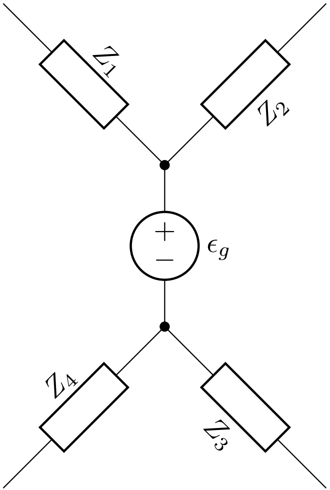
Movilidad de fuentes de tensión: proceso directo

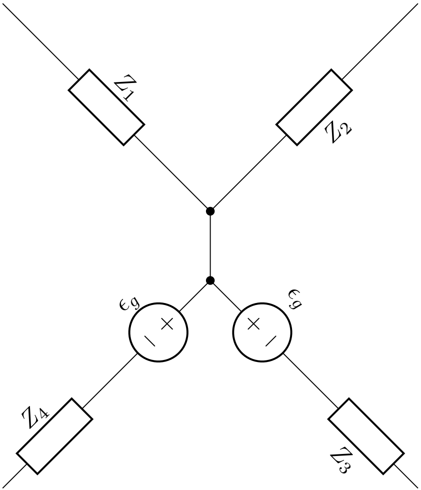




Puede comprobarse que los **elementos pasivos** están sometidos a las **mismas tensiones**

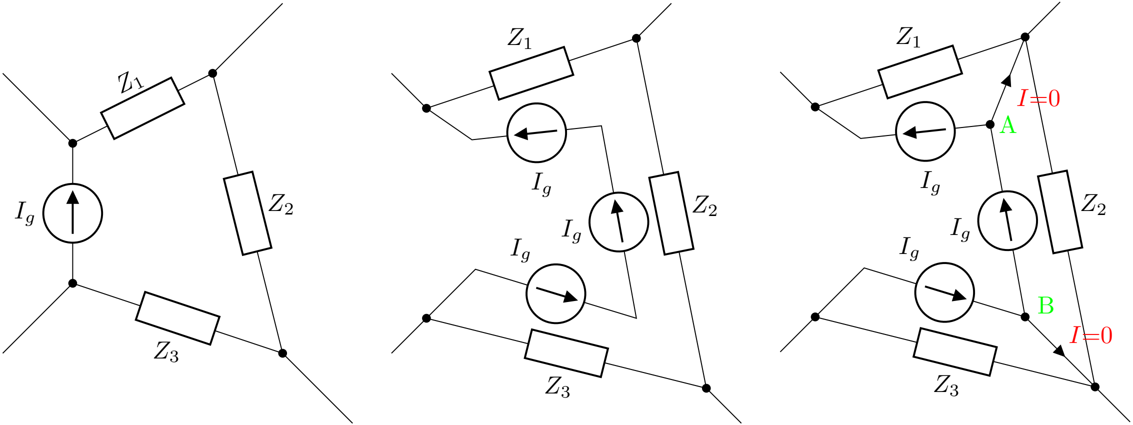
Movilidad de fuentes de tensión: proceso directo





Puede comprobarse que los **elementos pasivos** están sometidos a las **mismas tensiones**

Movilidad de fuentes de corriente: paso a paso

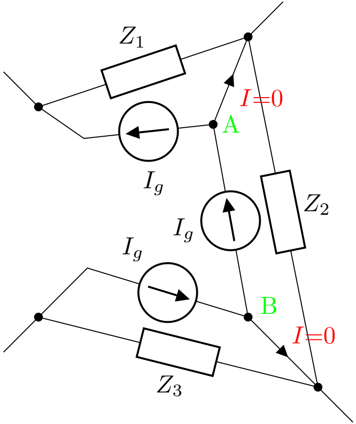


Generador **ideal** de **corriente**

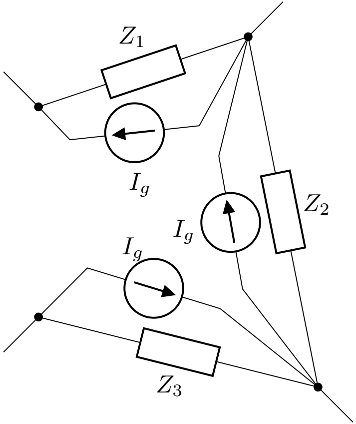
Desdoblamos en tres generadores en serie

No circula I por los cables añadidos (aplica 1LK en A y B)

Movilidad de fuentes de corriente: paso a paso

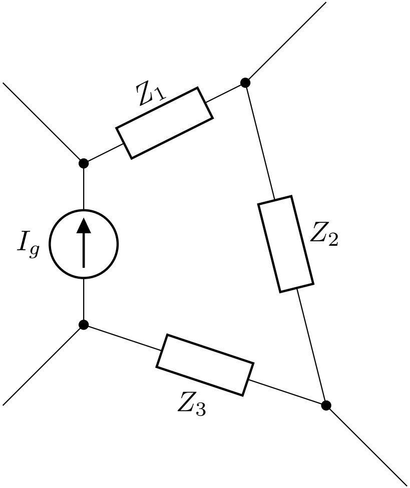


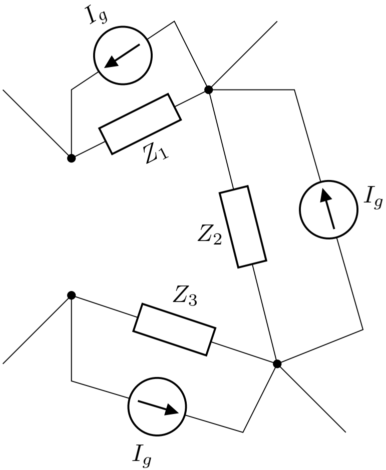
No circula I por los cables añadidos (aplica 1LK en A y B)



Redibujamos los cables de forma equivalente para mayor claridad

Movilidad de fuentes de corriente: proceso directo





Puede comprobarse que el **balance de corrientes** en cada nudo **es el mismo** en ambos