Respuesta en Frecuencia: Resonancia

Teoría de Circuitos III

Oscar Perpiñán Lamigueiro

Definición

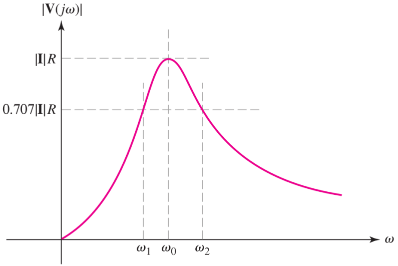
- Cuando un circuito eléctrico está en resonancia:
  - La **parte imaginaria** de su impedancia/admitancia es **nula**.
  - La **tensión y corriente** están en **fase**.
  - La **potencia reactiva** neta es **nula**.
- La resonancia se produce en una **frecuencia determinada**, f_0.
- Sólo puede ocurrir en circuitos con **al menos un inductor y un capacitor**.

Ancho de Banda y Factor de Calidad

- Frecuencias de potencia mitad: ω_1, ω_2

$$|\mathbf{Z}(\omega)|_{\omega=\omega_{1,2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |\mathbf{Z}(\omega_0)|$$

$$|\mathbf{Y}(\omega)|_{\omega=\omega_{1,2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |\mathbf{Y}(\omega_0)|$$



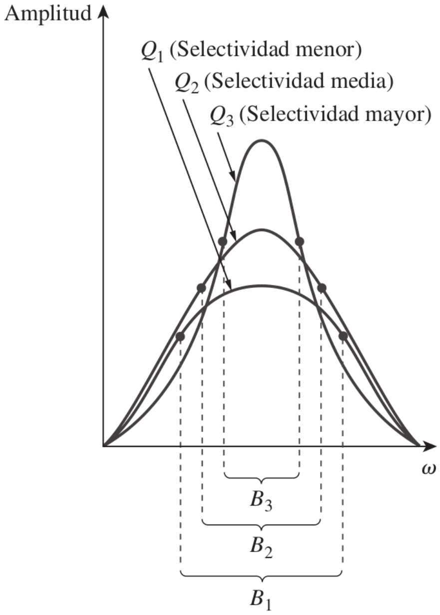
- Ancho de Banda (*de potencia mitad*):

$$B = \omega_2 - \omega_1$$

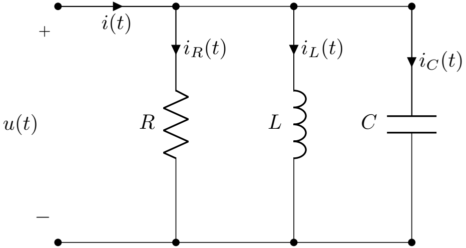
- Factor de Calidad (*en resonancia*):

$$\boxed{Q_0 = \frac{\omega_0}{B}}$$

Ancho de Banda y Factor de Calidad



Admitancia



- Admitancia:

$$\mathbf{Y}(\omega) = \frac{1}{R} + j(\omega C - \frac{1}{\omega L})$$

- Módulo en resonancia ω_0:

$$|\mathbf{Y}(\omega_0)| = \frac{1}{R} \rightarrow \omega_0 C - \frac{1}{\omega_0 L} = 0$$

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

Puntos de Potencia Mitad

- Definición de Puntos de potencia mitad (ω_1, ω_2)

$$|\mathbf{Y}(\omega_1)| = \frac{1}{\sqrt{2}R} \xrightarrow{\omega_1<\omega_0} \omega_1 C - \frac{1}{\omega_1 L} = -\frac{1}{R}$$
$$|\mathbf{Y}(\omega_2)| = \frac{1}{\sqrt{2}R} \xrightarrow{\omega_2>\omega_0} \omega_2 C - \frac{1}{\omega_2 L} = +\frac{1}{R}$$

- Ecuaciones

$$\omega_1^2\omega_0^2 + \frac{\omega_1 L}{R} - 1 = 0$$
$$\omega_2^2\omega_0^2 - \frac{\omega_2 L}{R} - 1 = 0$$

Ancho de Banda y Factor de Calidad

- Resultado

$$\omega_1 = -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 + \frac{1}{LC}}$$

$$\omega_2 = +\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 + \frac{1}{LC}}$$

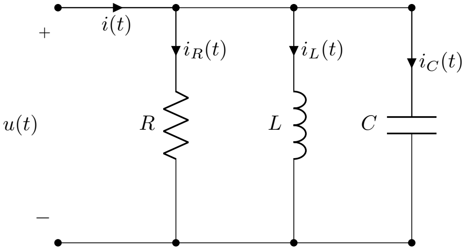
- Ancho de Banda

$$\boxed{B = \omega_2 - \omega_1 = \frac{1}{RC}}$$

- Factor de Calidad

$$\boxed{Q_0 = \frac{\omega_0}{B} = \omega_0 RC = \frac{R}{\omega_0 L}}$$

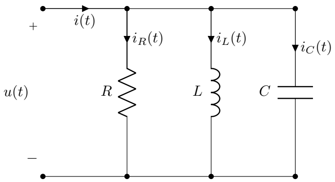
Balance de corrientes en resonancia



$$u(t) = U_0 \sin(\omega_0 t)$$

$$\left.\begin{array}{l} i_R(t) = \frac{U_0}{R}\sin(\omega_0 t) \\ i_L(t) = -\frac{U_0}{\omega_0 L}\cos(\omega_0 t) \\ i_C(t) = \omega_0 C U_0 \cos(\omega_0 t) \end{array}\right\} \xrightarrow{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \boxed{i(t) = i_R(t)}$$

Balance de corrientes en resonancia



- Valores máximos (**atención en circuitos con Q alto**)

$$I_{R0} = \max\{i_R(t)\} = \frac{U_0}{R}$$

$$I_{L0} = \max\{i_L(t)\} = \frac{U_0}{\omega_0 L} \xrightarrow{Q_0 = \frac{R}{\omega_0 L}} \boxed{\frac{I_{L0}}{I_{R0}} = Q_0}$$

$$I_{C0} = \max\{i_C(t)\} = \omega_0 C U_0 \xrightarrow{Q_0 = \omega_0 CR} \boxed{\frac{I_{C0}}{I_{R0}} = Q_0}$$

Balance de Energías

$$u(t) = U_0 \sin(\omega t)$$

- Energías total almacenada en $\omega \neq \omega_0$:

$$\begin{aligned} w_L(t) &= \frac{1}{2} L i_L^2(t) = \frac{U_0^2}{2\omega^2 L} \cos^2(\omega t) \\ w_C(t) &= \frac{1}{2} C u^2(t) = \frac{U_0^2 C}{2} \sin^2(\omega t) \end{aligned}$$

$$w_C(t) + w_L(t) = \frac{U_0^2}{2} \left(C \sin^2(\omega t) + \frac{U_0^2}{2\omega^2 L} \cos^2(\omega t) \right)$$

- La energía almacenada en resonancia es **constante**:

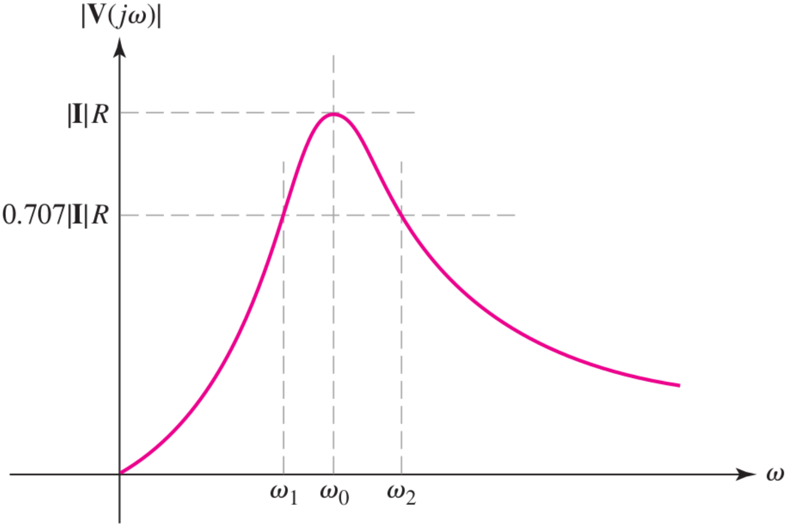
$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \rightarrow \boxed{w_C(t) + w_L(t) = \frac{1}{2} C U_0^2}$$

Nueva definición del Factor de Calidad

- Energía almacenada en resonancia:
$$w_{total} = \frac{1}{2}CU_0^2 = CU^2$$
- Energía disipada en un período
$$P_R = \frac{U^2}{R} \rightarrow w_R = T_0 \cdot \frac{U^2}{R}$$
- Ratio entre almacenamiento y disipación
$$\frac{w_{total}}{w_R} = f_0CR \xrightarrow{Q_0=\omega_0 CR} \boxed{Q_0 = 2\pi\frac{w_{total}}{w_R}}$$
- Un circuito resonante almacena $Q_0/2\pi$ veces la energía suministrada.

La curva de resonancia **no** es simétrica

La frecuencia de resonancia no está en el centro del ancho de banda



La curva de resonancia **no** es simétrica

- Retomamos expresión de puntos de potencia mitad:

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \mp \frac{1}{2RC}$$

- Los expresamos en función de Q y ω_0:

$$\omega_{1,2} = \omega_0 \left(\sqrt{\left(\frac{1}{2Q_0}\right)^2 + 1} \mp \frac{1}{2Q_0} \right)$$

- La frecuencia de resonancia es la media geométrica (*no está en el centro del ancho de banda*).

$$\boxed{\omega_1 \cdot \omega_2 = \omega_0^2}$$

Aproximación para circuitos con alto Q_0

- Cuando $Q \geq 10$ podemos escribir:

$$\omega_1 \simeq \omega_0 \left(1 - \frac{1}{2Q_0}\right) = \omega_0 - \frac{B}{2}$$
$$\omega_2 \simeq \omega_0 \left(1 + \frac{1}{2Q_0}\right) = \omega_0 + \frac{B}{2}$$

- En circuitos de **alto factor de calidad**, la frecuencia de resonancia está **aproximadamente** en el **centro** del ancho de banda.

$$\boxed{\omega_0 \simeq \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega 2)}$$

Admitancia en función de ω_0 y Q_0

- Recordamos expresión de la admitancia:

$$\mathbf{Y}(\omega) = \frac{1}{R} + j(\omega C - \frac{1}{\omega L})$$

- Expresamos los componentes en función de Q y ω_0:

$$Q_0 = \omega_0 CR \rightarrow C = \frac{Q_0}{\omega_0 R}$$
$$Q_0 = \frac{R}{\omega_0 L} \rightarrow \frac{1}{L} = \frac{\omega_0 Q_0}{R}$$

- Admitancia expresada en función de Q_0 y ω_0:

$$\boxed{\mathbf{Y}(\omega) = \frac{1}{R}\left[1 + jQ_0\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right]} \rightarrow \mathbf{Y}(\omega_0) = \frac{1}{R} = Y_0$$

Desintonización Relativa

- Definimos la desintonización relativa

$$\epsilon = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \rightarrow \omega = \omega_0(1+\epsilon)$$

- Expresamos la admitancia en función de ϵ:

$$\mathbf{Y}(\omega) = Y_0 \left[1 + jQ_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right]$$

$$\mathbf{Y}(\omega) = Y_0 \left[1 + jQ_0 \left((1+\epsilon) - \frac{1}{1+\epsilon}\right)\right] =$$
$$= Y_0 \left[1 + jQ_0\epsilon \left(\frac{2+\epsilon}{1+\epsilon}\right)\right]$$

Aproximación para cercanías de la resonancia

- Expresión exacta en función de ϵ:

$$\mathbf{Y}(\omega) = Y_0 \left[1 + jQ_0\epsilon \left(\frac{2+\epsilon}{1+\epsilon} \right) \right]$$

- Aproximación para frecuencias cercanas a la resonancia ($\epsilon \to 0$):

$$\boxed{\mathbf{Y}(\omega) \simeq Y_0(1 + j2Q_0\epsilon)}$$

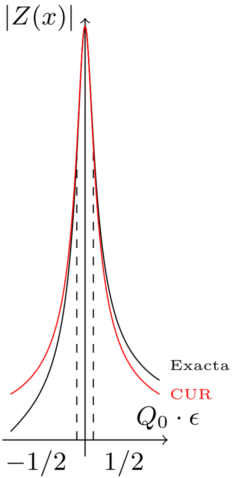
$$\boxed{|\mathbf{Y}(\omega)| \simeq Y_0\sqrt{1 + 4Q_0^2\epsilon^2}}$$

Curva Universal de Resonancia

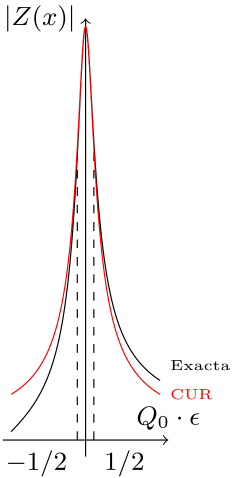
- La **Curva Universal de Resonancia** (CUR) se obtiene invirtiendo y normalizando por Y_0 esta expresión:

$$\boxed{Z(x) = \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}}$$

$$x = Q_0 \cdot \epsilon$$



Puntos de potencia mitad en la CUR



- La Curva Universal de Resonancia es simétrica: la frecuencia de resonancia está en el centro del ancho de banda.
- Retomamos la expresión aproximada de los puntos de potencia mitad:

$$\omega_{1,2} \simeq \omega_0 (1 \mp \frac{1}{2Q_0})$$

- Reescribimos usando la desintonización relativa:

$$\frac{\omega_{1,2} - \omega_0}{\omega_0} \simeq \mp \frac{1}{2Q_0}$$

Impedancia

- Impedancia

$$\mathbf{Z}(\omega) = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})$$

- Impedancia en función de ω_0 y Q_0

$$\mathbf{Z}(\omega) = R\left[1 + jQ_0\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right]$$

- Impedancia en función de la desintonización relativa

$$\mathbf{Z}(\omega) = Z_0\left[1 + jQ_0\epsilon\left(\frac{2+\epsilon}{1+\epsilon}\right)\right]$$

Frecuencias

- Pulsación de Resonancia

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

- Puntos de Potencia Mitad

$$\omega_{1,2} = \mp \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}}$$

- Ancho de Banda

$$B = \omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L}$$

- Factor de Calidad

$$Q_0 = \frac{1}{\omega_0 CR} = \frac{\omega_0 L}{R}$$

Tensiones y energías

- Tensiones en los elementos

$$U(\omega_0) = U_R(\omega_0)$$
$$U_L(\omega_0) = U_C(\omega_0) = Q_0 U$$

- Energías almacenadas

$$w_L(t) + w_c(t) = \frac{1}{2} L I_0^2$$
$$P_R = R I^2$$
$$w_{total} = \frac{Q_0}{2\pi} w_R$$

Curva Universal de Resonancia

- Aproximación para cercanías de la resonancia

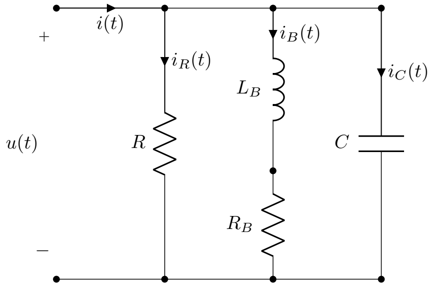
$$\mathbf{Z}(\omega) \simeq Z_0(1 + j2Q_0\epsilon)$$

$$|\mathbf{Z}(\omega)| \simeq Z_0\sqrt{1 + 4Q_0^2\epsilon^2}$$

- Curva Universal de Resonancia

$$Y(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4x^2}}$$

Circuito RLC con bobina real



La figura representa un circuito paralelo con una bobina real (con pérdidas). La impedancia de este circuito es:

$$\mathbf{Y}(\omega) = \frac{1}{R} + j\omega C + \frac{1}{R_B + j\omega L_B} =$$

$$= \left(\frac{1}{R} + \frac{R_B}{R_B^2 + \omega^2 L_B^2}\right) + j\left(\omega C - \frac{\omega L_B}{R_B^2 + \omega^2 L_B^2}\right)$$

Impedancia

$$\mathbf{Y}(\omega) = \left(\frac{1}{R} + \frac{R_B}{R_B^2 + \omega^2 L_B^2}\right) + j\left(\omega C - \frac{\omega L_B}{R_B^2 + \omega^2 L_B^2}\right)$$

- Condición de Resonancia

$$\omega C - \frac{\omega L_B}{R_B^2 + \omega^2 L_B^2} = 0$$

- Pulsación de Resonancia

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{L_B C} - \left(\frac{R_B}{L_B}\right)^2}$$

Comparación con RLC paralelo

- La frecuencia de resonancia es diferente a un RLC serie/paralelo:

$$\omega_0 \neq \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

- El valor máximo de la admitancia **no** se alcanza en la frecuencia de resonancia, $\omega_{max} \neq \omega_0$.
- Cuando la **bobina** tiene **bajas pérdidas (Q alto)**, el circuito puede simplificarse a un RLC paralelo.

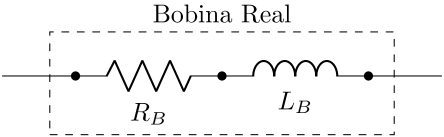
Factor de Calidad

- Retomamos la definición del factor de calidad como ratio entre la **máxima energía almacenada** y la **energía disipada en un período**.

$$Q(\omega) = 2\pi \frac{\max\{w_x(t)\}}{T \cdot P_R}$$

Bobina Real

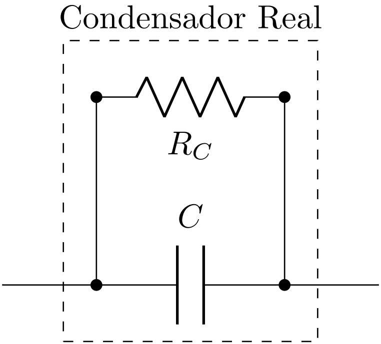
- Una bobina real tiene pérdidas resistivas debidas al hilo conductor*.
- Se modela como una conexión serie de una bobina ideal y una resistencia.



$$\left.\begin{array}{l} \max\{w_L(t)\} = \frac{1}{2}L_B I_o^2 = L_B I^2 \\ p_R(t) = R_B I^2 \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{Q(\omega) = \frac{\omega L_B}{R_B}}$$

*En algunos textos se emplea la tangente de pérdidas para caracterizar a la bobina real, siendo $\tan\delta = 1/Q$.

Condensador Real

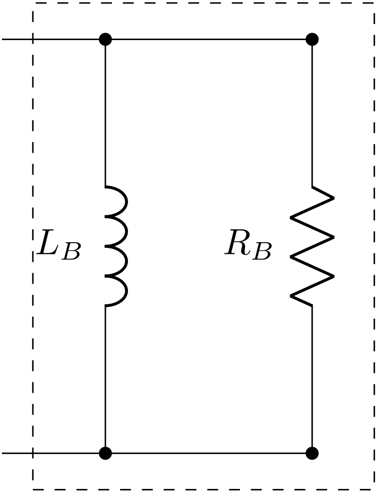


$$\left.\begin{array}{l} \max\{w_C(t)\} = \frac{1}{2}CU_o^2 = CU^2 \\ p_R(t) = G_C U^2 \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{Q(\omega) = \omega C R_C}$$

Ejercicio

Demuestra que la expresión del factor de calidad de una bobina con pérdidas modelada como un circuito paralelo es:

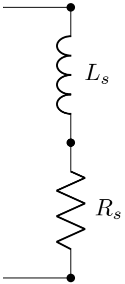
$$\boxed{Q = \frac{R_B}{\omega L_B}}$$

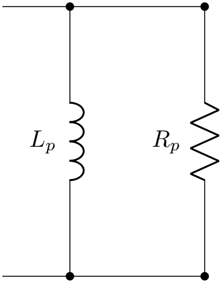


Conversión serie-paralelo

$$\mathbf{Y_s}(\omega) = \frac{R_s - j\omega L_s}{R_s^2 + (\omega L_s)^2}$$

$$\mathbf{Y_p}(\omega) = \frac{1}{R_p} - j\frac{1}{\omega L_p}$$





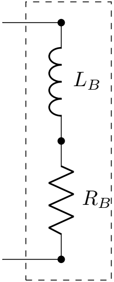
$$\left.\begin{aligned} R_p &= \tfrac{R_s^2+(\omega L_s)^2}{R_s} \\ \omega L_p &= \tfrac{R_s^2+(\omega L_s)^2}{\omega L_s} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\omega L_s}{R_s} = \frac{R_p}{\omega L_p} \Rightarrow \boxed{Q_p = Q_s}$$

Conversión serie-paralelo

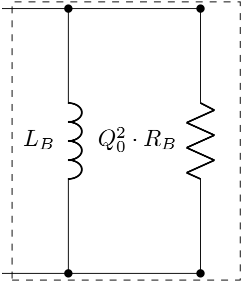
$$R_p = R_s + \frac{(\omega L_s)^2}{R_s} \xrightarrow{\omega L_s = Q_s \cdot R_s} \boxed{R_p = R_s(1+Q_S^2)}$$

$$\omega L_p = \omega L_s + \frac{R_s^2}{\omega L_s} \xrightarrow{R_s = \omega L_s / Q_s} \boxed{L_p = L_s(1+1/Q_s^2)}$$

Para bobinas con alto factor de calidad ($Q \geq 10$)

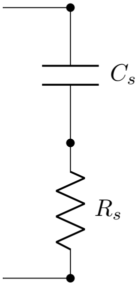


$$\boxed{\begin{array}{l} R_p \simeq Q^2 \cdot R_s \\ L_p \simeq L_s \end{array}}$$

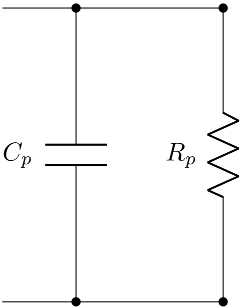


Conversión Serie-Paralelo

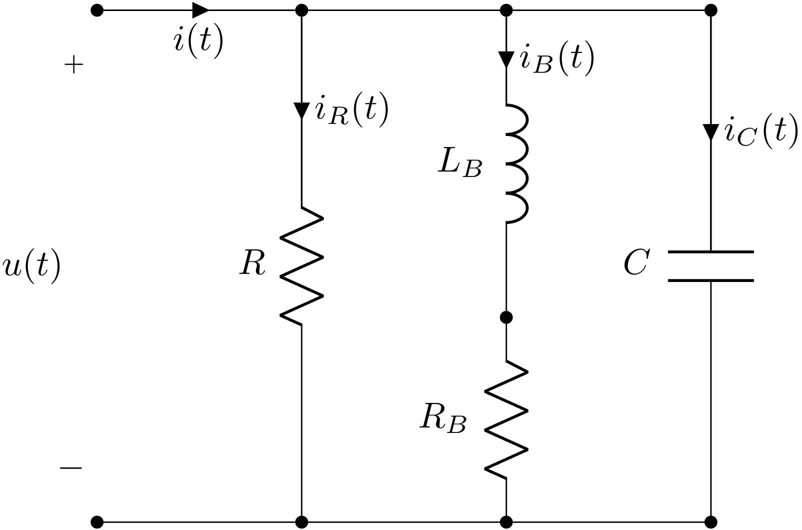
Empleando ecuaciones similares se puede demostrar la siguiente transformación para un condensador de alto factor de calidad:



$$\boxed{\begin{aligned} R_p &\simeq Q^2 \cdot R_s \\ C_p &\simeq C_s \end{aligned}}$$



Aplicación: transformación de circuito RLC



Ejercicios Recomendados

- AS: ejemplos 14.7 y 14.8
- HKD: página 641 (voltímetro), y práctica 16.8
- PO: problemas 23.5 y 23.7