

Teoremas Generales

Teoría de Circuitos II

Oscar Perpiñán Lamigueiro

- ① Teoremas de linealidad
- ② Teoremas de reciprocidad y sustitución
- ③ Teorema de compensación
- ④ Teorema de Millman
- ⑤ Teorema de Rosen
- ⑥ Teoremas de Thévenin/Norton
- ⑦ Teorema de Everitt
- ⑧ Teorema de Tellegen

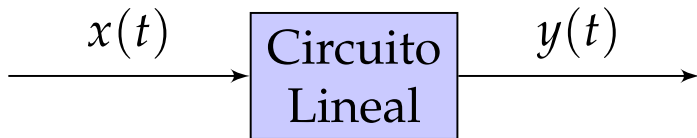
Elementos lineales

- ▶ Un circuito eléctrico es lineal si los elementos pasivos y activos que incluye son lineales.
- ▶ Un **elemento pasivo** es lineal si la relación entre la tensión entre sus terminales y la corriente que lo recorre es lineal: **resistencias, condensadores y bobinas**.
- ▶ Una **fuerza dependiente** es lineal si su salida (tensión o corriente) tiene una relación lineal con la magnitud del circuito de la que depende.
- ▶ Un circuito lineal tiene dos propiedades:
 - ▶ Homogeneidad o **proporcionalidad**.
 - ▶ Aditividad o **superposición**.

Homogeneidad o Proporcionalidad

Sea $y(t)$ la respuesta de un **circuito lineal** a una excitación $x(t)$.

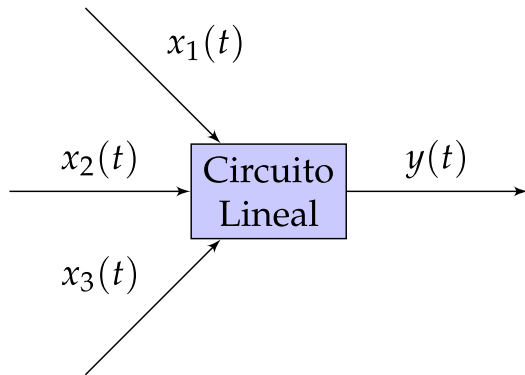
Si la excitación es multiplicada por una **constante**, $K \cdot x(t)$, la respuesta del circuito será modificada por la misma constante, $K \cdot y(t)$.



Teorema de superposición

La respuesta de un **circuito lineal** a varias fuentes de excitación actuando simultáneamente es igual a la suma de las respuestas que se tendrían cuando actuase cada una de ellas por separado

$$y(t) = \sum_i y_i(t)$$



Análisis de un circuito mediante superposición

Procedimiento

- 1 Se apagan todas las fuentes **independientes** del circuito menos una.
 - ▶ Las fuentes de tensión se sustituyen por un cortocircuito ($U = 0$).
 - ▶ Las fuentes de corriente se sustituyen por un circuito abierto ($I = 0$).
 - ▶ Las fuentes **dependientes** **no** se modifican.
- 2 Se analiza el circuito, obteniendo la respuesta individual a la fuente que permanece activa.
- 3 Se repite este procedimiento para cada una de las fuentes **independientes** del circuito.
- 4 La respuesta total del circuito es la suma de las respuestas individuales.

Análisis de un circuito mediante superposición

Observaciones

- ▶ **Siempre** hay que aplicar este método cuando en un circuito conviven fuentes de **diferente frecuencia** (o fuentes de corriente continua y corriente alterna).
- ▶ En el caso de fuentes de corriente alterna **sinusoidal**, la respuesta debe expresarse en el **dominio del tiempo**. **No** se pueden **sumar** los **fasores** que corresponden a **frecuencias diferentes**.
- ▶ En el primer paso del procedimiento, se pueden agrupar las fuentes que funcionan a la misma frecuencia y calcular la respuesta del circuito en esa frecuencia.

Cálculo de potencia con superposición

El principio de superposición aplica a tensiones y corrientes, pero **no** a potencias.
Supongamos $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$:

$$\begin{aligned} p(t) &= R \cdot i^2(t) = \\ &= R \cdot (i_1(t) + i_2(t))^2 = \\ &= R \cdot (i_1^2(t) + i_2^2(t) + 2 \cdot i_1(t) \cdot i_2(t)) \\ p(t) &\neq p_1(t) + p_2(t) \end{aligned}$$

Cálculo de potencia con superposición

- ▶ Cuando las señales son **ortogonales en un período*** se pueden sumar las potencias **medias** de cada circuito.

$$P = \sum_i P_i$$

- ▶ Ejemplos de señales ortogonales: sinusoidales con diferente frecuencia, una senoide con una continua, ...

*Dos señales son ortogonales si cumplen la siguiente ecuación:

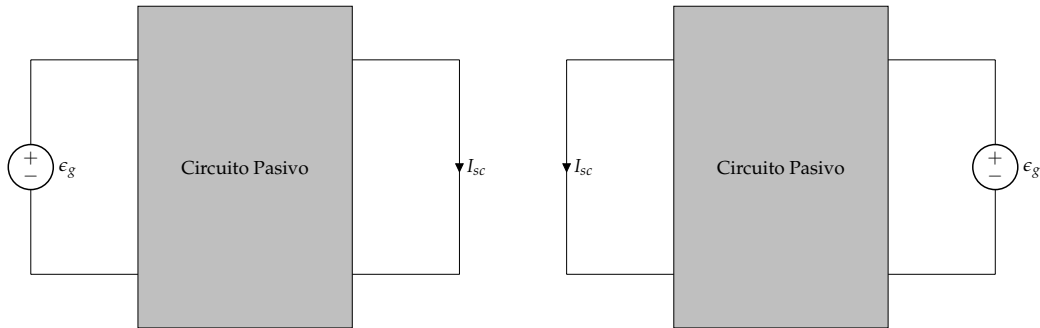
$$\langle f_1, f_2 \rangle_T = \int_T f_1(t) \cdot f_2(t) dt = 0$$

Cálculo de potencia

- ① Teoremas de linealidad
- ② Teoremas de reciprocidad y sustitución
- ③ Teorema de compensación
- ④ Teorema de Millman
- ⑤ Teorema de Rosen
- ⑥ Teoremas de Thévenin/Norton
- ⑦ Teorema de Everitt
- ⑧ Teorema de Tellegen

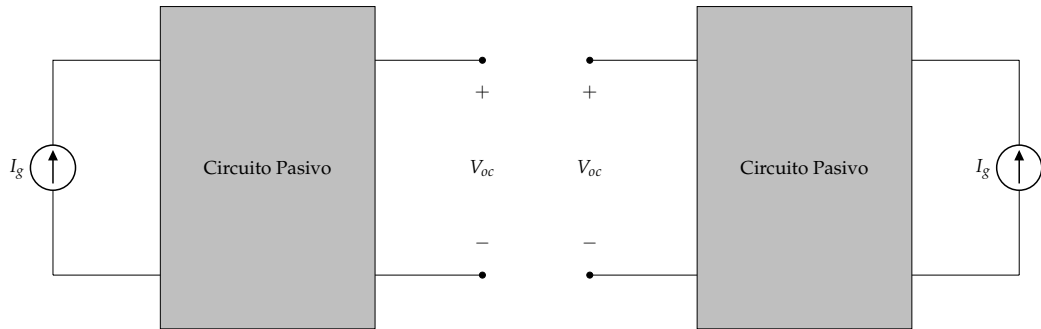
Teorema de reciprocidad

La matriz de impedancias de un circuito pasivo es simétrica. En consecuencia, al intercambiar la posición de una fuente de tensión, la corriente de cortocircuito en la otra rama no cambia.

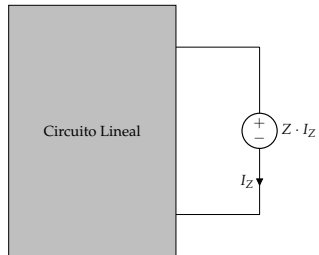
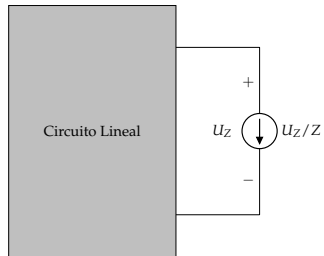
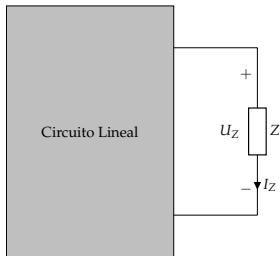


Teorema de reciprocidad

La matriz de admitancias de un circuito pasivo es simétrica. En consecuencia, al intercambiar la posición de una fuente de corriente, la tensión de circuito abierto en la otra posición no cambia.



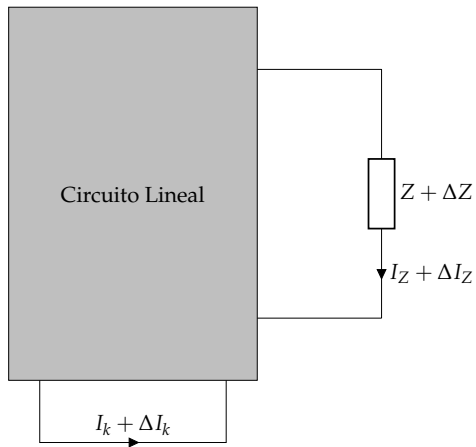
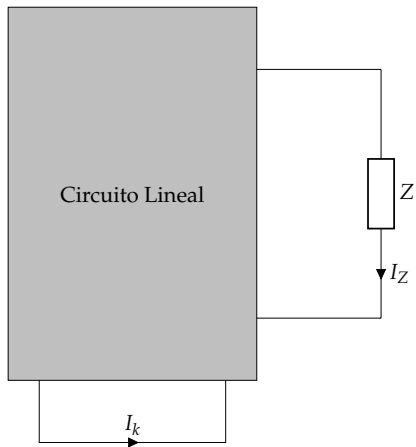
Teorema de sustitución



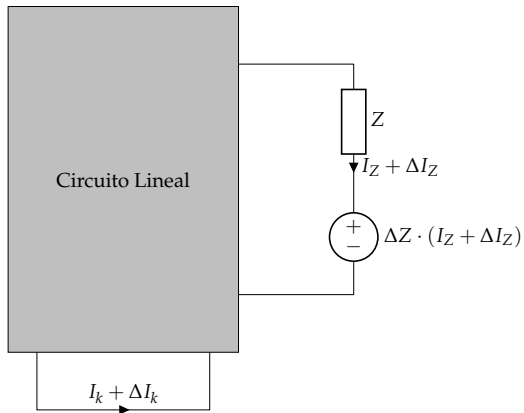
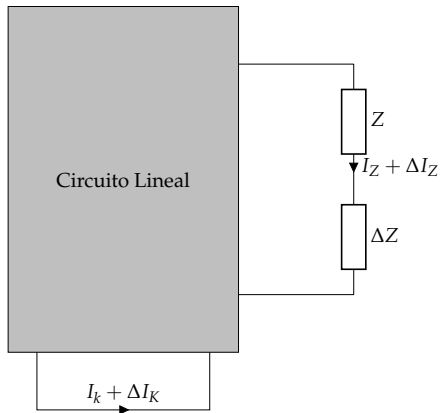
- ① Teoremas de linealidad
- ② Teoremas de reciprocidad y sustitución
- ③ Teorema de compensación
- ④ Teorema de Millman
- ⑤ Teorema de Rosen
- ⑥ Teoremas de Thévenin/Norton
- ⑦ Teorema de Everitt
- ⑧ Teorema de Tellegen

Planteamiento

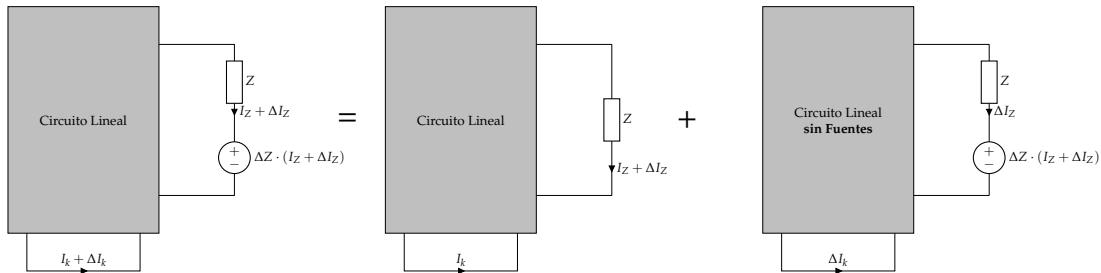
¿Cuál es la variación en la respuesta I_k debida a una variación en la impedancia Z ?



Aplicamos teorema de sustitución



A continuación, teorema de superposición

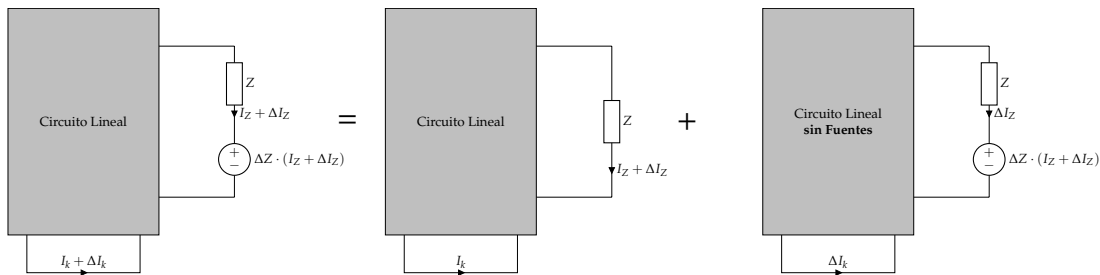


Nuevamente, teorema de sustitución

En el último circuito, expresamos la fuente como:

$$\Delta Z \cdot (I_Z + \Delta I_Z) = \Delta Z \cdot I_Z + \Delta Z \cdot \Delta I_Z$$

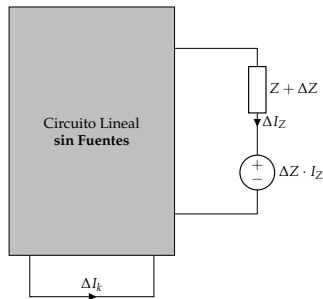
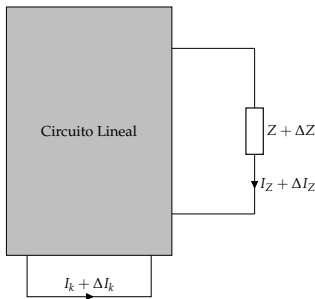
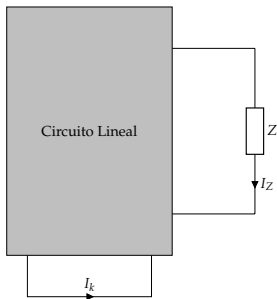
El último sumando representa la tensión en la impedancia ΔZ recorrida por la corriente de la rama, ΔI_Z . Esta observación nos permite volver a utilizar el teorema de sustitución.



Solución

Para determinar el cambio en la respuesta, ΔI_k , debido a una variación en la impedancia, ΔZ :

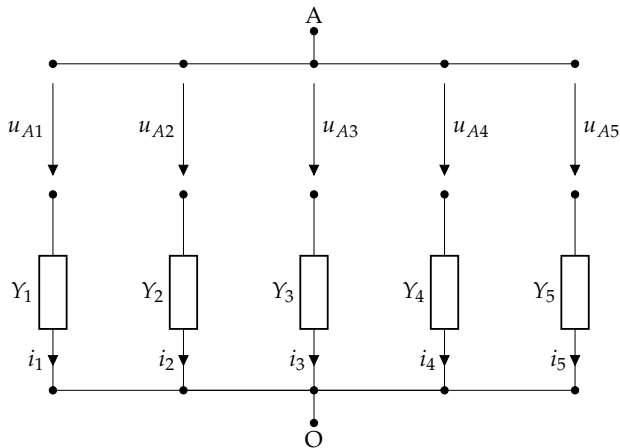
- 1 Se calcula la corriente I_Z en el circuito original.
- 2 Se apagan las fuentes independientes y se sustituye la impedancia Z por una impedancia de valor $Z + \Delta Z$ en serie con una fuente de tensión de valor $\Delta Z \cdot I_Z$.
- 3 En el circuito resultante se calcula la respuesta, ΔI_k .



- ① Teoremas de linealidad
- ② Teoremas de reciprocidad y sustitución
- ③ Teorema de compensación
- ④ **Teorema de Millman**
- ⑤ Teorema de Rosen
- ⑥ Teoremas de Thévenin/Norton
- ⑦ Teorema de Everitt
- ⑧ Teorema de Tellegen

Planteamiento

El Teorema de Millman permite resolver la tensión entre dos puntos A y O, siendo éste un punto común de un conjunto de impedancias, y siendo conocidas las tensiones con el punto A y las impedancias.



Resolución

La tensión u_{AO} es:

$$u_{AO} = u_{Aj} + i_j / Y_j$$

Despejando i_j :

$$i_j = Y_j \cdot (u_{AO} - u_{Aj})$$

En el nudo O se puede plantear LKC:

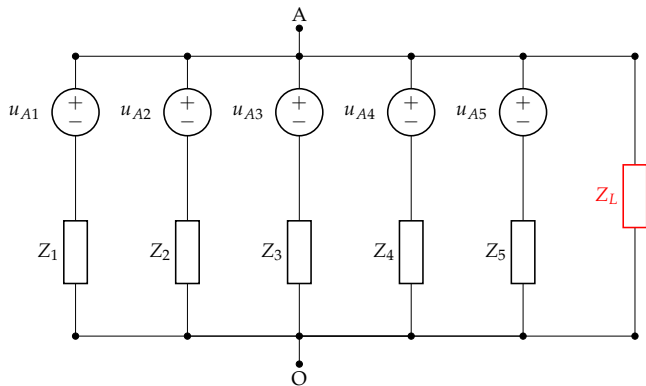
$$\sum_{j=1}^n i_j = 0$$

Por tanto:

$$\sum_{j=1}^n Y_j \cdot (u_{AO} - u_{Aj}) = 0 \rightarrow \boxed{u_{AO} = \frac{\sum_{j=1}^n Y_j u_{Aj}}{\sum_{j=1}^n Y_j}}$$

Aplicación

Este teorema permite resolver rápidamente circuitos como el siguiente:



$$u_{AO} = \frac{\sum_{j=1}^n u_{Aj} / Z_j}{1 / Z_L + \sum_{i=1}^n 1 / Z_j}$$

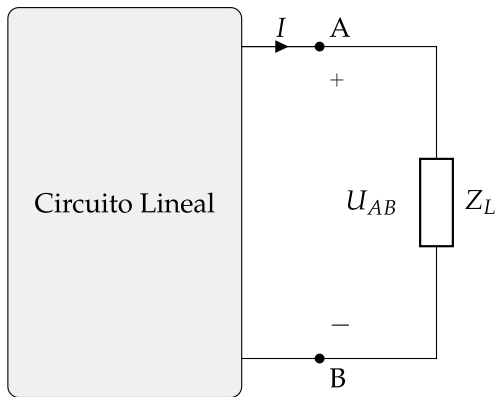
- ① Teoremas de linealidad
- ② Teoremas de reciprocidad y sustitución
- ③ Teorema de compensación
- ④ Teorema de Millman
- ⑤ Teorema de Rosen**
- ⑥ Teoremas de Thévenin/Norton
- ⑦ Teorema de Everitt
- ⑧ Teorema de Tellegen

- ① Teoremas de linealidad
- ② Teoremas de reciprocidad y sustitución
- ③ Teorema de compensación
- ④ Teorema de Millman
- ⑤ Teorema de Rosen
- ⑥ Teoremas de Thévenin/Norton
- ⑦ Teorema de Everitt
- ⑧ Teorema de Tellegen

Teoremas de Thévenin/Norton

Thévenin

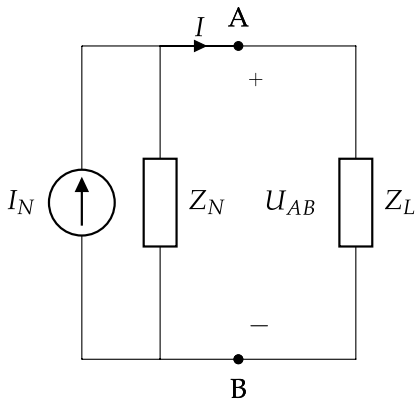
Cualquier **red lineal** compuesta por elementos activos y pasivos puede sustituirse, desde el punto de vista de sus terminales externos AB, por una **fuentes de tensión** (generador de Thévenin, ϵ_{th}) en **serie** con una impedancia (impedancia de Thévenin, Z_{th}).



Teoremas de Thévenin/Norton

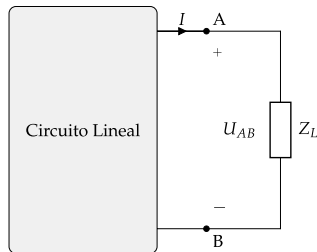
Norton

Cualquier **red lineal** compuesta por elementos activos y pasivos puede sustituirse, desde el punto de vista de sus terminales externos AB, por una **fuentes de corriente** (generador de Norton, I_N) en **paralelo** con una impedancia (impedancia de Norton, Z_N).



Teoremas de Thévenin/Norton

Cálculo del equivalente de Thévenin



- Circuito Abierto ($Z_L \rightarrow \infty$, $U_{AB} = U_{oc}$)

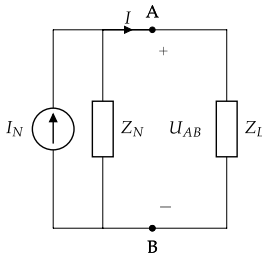
$$\epsilon_{th} = U_{oc}$$

- Cortocircuito ($Z_L = 0$, $I = I_{sc}$)

$$Z_{th} = \frac{\epsilon_{th}}{I_{sc}} = \frac{U_{oc}}{I_{sc}}$$

Teoremas de Thévenin/Norton

Cálculo del equivalente de Norton



- ▶ Cortocircuito ($Z_L = 0$, $I = I_{sc}$)

$$I_N = I_{sc}$$

- ▶ Circuito Abierto ($Z_L \rightarrow \infty$, $U_{AB} = U_{oc}$)

$$Z_N = \frac{U_{oc}}{I_N} = \frac{U_{oc}}{I_{sc}}$$

Teoremas de Thévenin/Norton

Cálculo de Thévenin/Norton

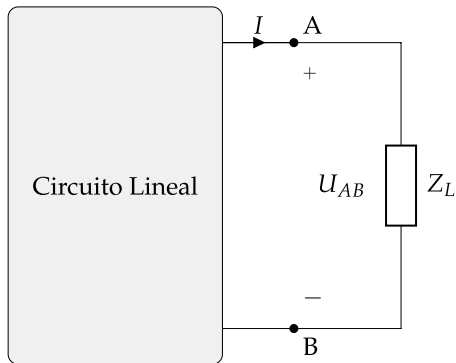
Observaciones

- ▶ Cálculo de la impedancia:
 - ▶ Si el circuito **no** contiene fuentes dependientes, se puede realizar **apagando** todos los **generadores** y obteniendo la impedancia equivalente.
 - ▶ Si el circuito contiene fuentes dependientes, es necesario conectar un **generador de prueba** a la salida del circuito y obtener la relación entre la tensión y corriente de este generador.
- ▶ Gracias a la equivalencia de fuentes, una vez obtenido uno de los equivalentes se puede obtener el otro mediante una transformación.

Máxima Transferencia de Potencia

Planteamiento

Sea el circuito lineal de la figura. ¿Qué impedancia Z_L hay que conectar en los terminales AB para que el circuito entregue la máxima potencia disponible?

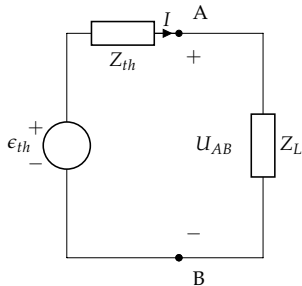


Resolvemos esta pregunta mediante el generador equivalente de Thévenin.

Máxima Transferencia de Potencia

Ecuaciones

Calculamos la potencia activa en la impedancia de carga Z_L :



$$\bar{Z}_{th} = R_{th} + jX_{th}$$

$$\bar{Z}_L = R_L + jX_L$$

$$\bar{I} = \frac{\bar{\epsilon}_{th}}{\bar{Z}_{th} + \bar{Z}_L}$$

$$P_L = I^2 \cdot R_L$$

$$P_L = \frac{\epsilon_{th}^2}{|\bar{Z}_{th} + \bar{Z}_L|^2} \cdot R_L$$

Las condiciones de máximo son:

$$\frac{\partial P_L}{\partial X_L} = 0 \quad \frac{\partial P_L}{\partial R_L} = 0$$

Máxima Transferencia de Potencia

Reactancia

A partir de la expresión de potencia en la carga...

$$P_L = \frac{\epsilon_{th}^2}{|\bar{Z}_{th} + \bar{Z}_L|^2} \cdot R_L$$

calculamos la derivada parcial respecto de la reactancia:

$$\frac{\partial P_L}{\partial X_L} = \epsilon_{th}^2 \cdot R_L \cdot \left[\frac{-1}{((R_L + R_{th})^2 + (X_L + X_{th})^2)^2} \cdot 2 \cdot (X_L + X_{th}) \right]$$

Aplicamos la condición de máximo y obtenemos un resultado parcial:

$$\frac{\partial P_L}{\partial X_L} = 0 \Rightarrow \boxed{X_L = -X_{th}}$$

Máxima Transferencia de Potencia

Resistencia

Simplificamos la expresión de la potencia teniendo en cuenta el resultado anterior ($X_L = -X_{th}$):

$$P_L = \frac{\epsilon_{th}^2}{(R_{th} + R_L)^2} \cdot R_L$$

Calculamos la derivada parcial respecto de la resistencia:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_L}{\partial R_L} &= \epsilon_{th}^2 \cdot \left[\frac{1}{(R_L + R_{th})^2} - 2 \cdot \frac{R_L}{(R_L + R_{th})^3} \right] \\ &= \frac{\epsilon_{th}^2 \cdot (R_{th} - R_L)}{(R_L + R_{th})^3} \end{aligned}$$

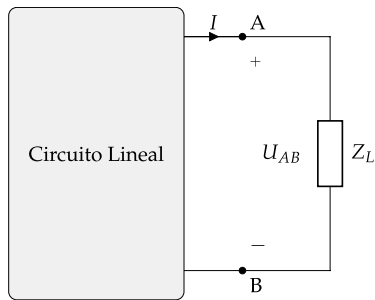
Nuevamente, aplicamos la condición de máximo y obtenemos la resistencia:

$$\frac{\partial P_L}{\partial R_L} = 0 \Rightarrow \boxed{R_L = R_{th}}$$

Máxima Transferencia de Potencia

Impedancia de carga

Dado un circuito lineal (del que podemos calcular su equivalente de Thévenin) ...



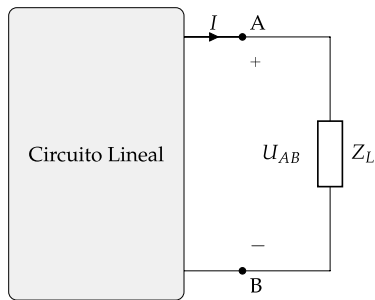
... la impedancia de carga que hay que conectar entre sus terminales AB para obtener la máxima potencia disponible es:

$$\bar{Z}_L = \bar{Z}_{th}^*$$

Máxima Transferencia de Potencia

Máxima potencia disponible

La máxima potencia disponible en la carga es:



$$\left. \begin{aligned} \bar{Z}_L &= \bar{Z}_{th}^* \\ P_L &= \frac{\epsilon_{th}^2}{|\bar{Z}_{th} + \bar{Z}_L|^2} \cdot R_L \end{aligned} \right\} \rightarrow \boxed{P_L = \frac{\epsilon_{th}^2}{4R_{th}}}$$

- ① Teoremas de linealidad
- ② Teoremas de reciprocidad y sustitución
- ③ Teorema de compensación
- ④ Teorema de Millman
- ⑤ Teorema de Rosen
- ⑥ Teoremas de Thévenin/Norton
- ⑦ Teorema de Everitt**
- ⑧ Teorema de Tellegen

- ① Teoremas de linealidad
- ② Teoremas de reciprocidad y sustitución
- ③ Teorema de compensación
- ④ Teorema de Millman
- ⑤ Teorema de Rosen
- ⑥ Teoremas de Thévenin/Norton
- ⑦ Teorema de Everitt
- ⑧ Teorema de Tellegen