

Respuesta en Frecuencia

Teoría de Circuitos III

Oscar Perpiñán Lamigueiro

Noviembre 2018

Introducción

Función de Transferencia

Diagrama de Bode

Filtros

Respuesta en Frecuencia

La respuesta en frecuencia de un circuito es la variación del comportamiento del circuito a los cambios de la frecuencia de alimentación.

- ▶ Hasta ahora hemos analizado circuitos alimentados por generadores con frecuencia constante.
- ▶ El análisis de la **respuesta en frecuencia** consiste en variar la frecuencia de alimentación y estudiar la respuesta.
- ▶ Este análisis se realiza en **régimen permanente** con señales sinusoidales.

Introducción

Función de
Transferencia

Diagrama de Bode

Filtros

Introducción

Función de Transferencia

Diagrama de Bode

Filtros

Función de Transferencia

Respuesta en
Frecuencia

Oscar Perpiñán
Lamigueiro

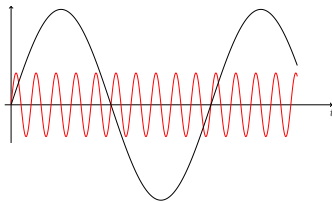
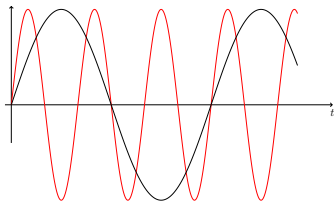
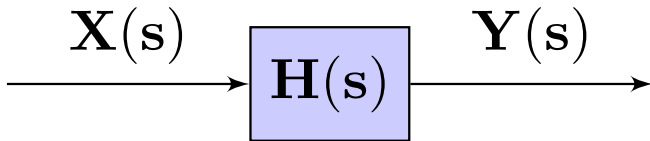
Introducción

Función de
Transferencia

Diagrama de Bode

Filtros

$$\mathbf{H(s)}|_{s=j\omega} = \frac{\mathbf{Y(s)}}{\mathbf{X(s)}}$$



- Ganancia de Tensión

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$$

- Ganancia de Corriente

$$H(s) = \frac{I_o(s)}{I_i(s)}$$

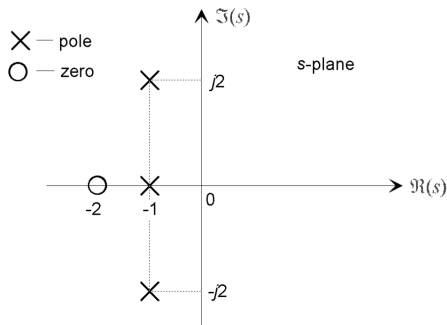
- Impedancia de Transferencia

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{I_i(s)}$$

- Admitancia de Transferencia

$$H(s) = \frac{I_o(s)}{V_i(s)}$$

$$\mathbf{H(s)}|_{s=j\omega} = \frac{\mathbf{N(s)}}{\mathbf{D(s)}} = K \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}$$



La función de transferencia es un fasor

Respuesta en
Frecuencia

Oscar Perpiñán
Lamigueiro

Introducción

Función de
Transferencia

Diagrama de Bode

Filtros

- Evaluamos la función de transferencia en el eje imaginario:

$$\mathbf{H}(\mathbf{s})|_{\mathbf{s}=j\omega} = \mathbf{H}(\omega)$$

- Dado que estamos en régimen permanente sinusoidal es **un fasor con módulo y ángulo**:

$$\mathbf{H}(\omega) = H/\underline{\phi}$$

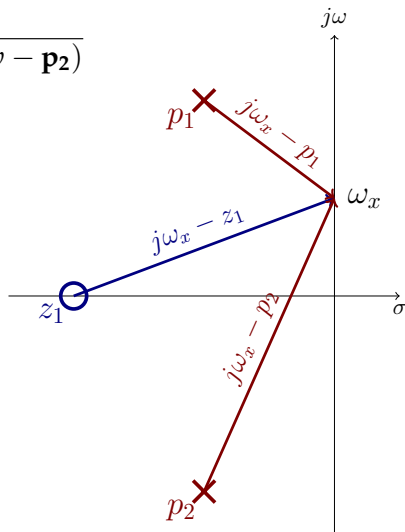
- Tanto el módulo como el ángulo **varían con la frecuencia**:

$$\mathbf{H}(\omega) \Rightarrow \begin{cases} |\mathbf{H}(\omega)| \\ \phi(\omega) \end{cases}$$

Interpretación Geométrica

Cada uno de los factores de $\mathbf{H}(s)|_{s=j\omega}$ es un número complejo que conecta un cero/polo con el eje imaginario.

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{j\omega - \mathbf{z}_1}{(j\omega - \mathbf{p}_1) \cdot (j\omega - \mathbf{p}_2)}$$



Interpretación Geométrica: cero simple

Respuesta en
Frecuencia

Oscar Perpiñán
Lamigueiro

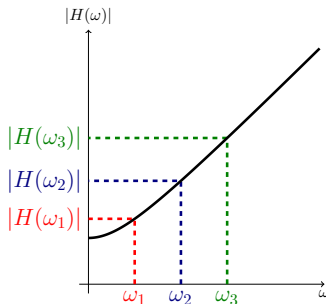
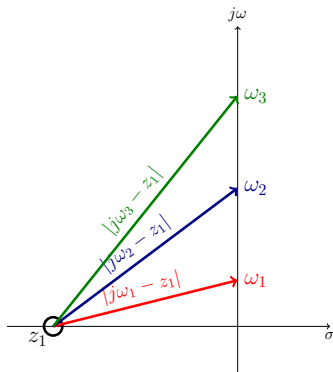
Introducción

Función de
Transferencia

Diagrama de Bode

Filtros

$$\mathbf{H}(\omega) = K \cdot (j\omega - \mathbf{z}_1)$$

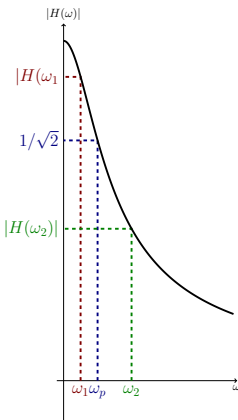
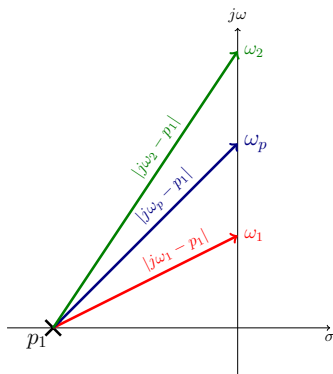


Interpretación Geométrica: polo simple

Respuesta en
Frecuencia

Oscar Perpiñán
Lamigueiro

$$H(\omega) = \frac{K}{j\omega - p_1}$$



Introducción

Función de
Transferencia

Diagrama de Bode

Filtros

- ▶ AS: Ejemplo 14.2.
- ▶ Exámenes:
 - ▶ Feb 2004 (a), Jun 2013 (a)
 - ▶ Sep 2007 (a), Feb 2005 (a), Feb 2010 (a)
 - ▶ Nov 2014 (a), Sep 2005 (a), Sep 2006 (a).

Introducción

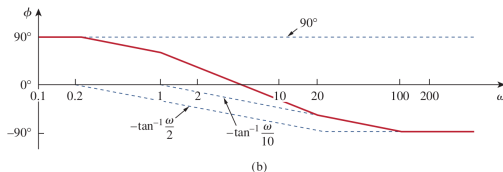
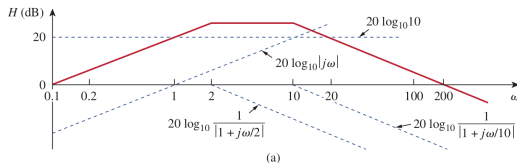
Función de Transferencia

Diagrama de Bode

Filtros

Introducción

- ▶ Un diagrama de Bode representa de forma **aproximada** la magnitud y la fase de la función de transferencia.
- ▶ Son **gráficos semilogarítmicos**:
 - ▶ Magnitud en **decibelios** frente al logaritmo de la frecuencia/pulsación.
 - ▶ Fase en radianes/grados frente al logaritmo de la frecuencia/pulsación.



Propiedades

$$\log P_1 \cdot P_2 = \log P_1 + \log P_2$$

$$\log \frac{P_1}{P_2} = \log P_1 - \log P_2$$

$$\log P^n = n \cdot \log P$$

Valores útiles

$$\begin{array}{ll} \log 1 = 0 & \log 2 = 0.30103 \\ \log 10 = 1 & \log \frac{1}{2} = -0.30103 \end{array}$$

Introducción

Función de
Transferencia

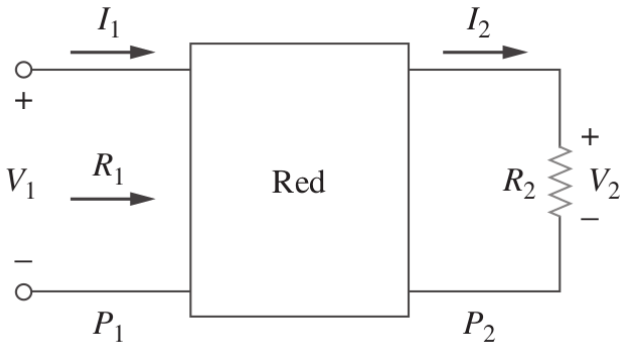
Diagrama de Bode

Filtros

Decibelio

El **decibelio** (dB) se emplea para medir la ganancia de potencia o la ratio de dos niveles de potencia:

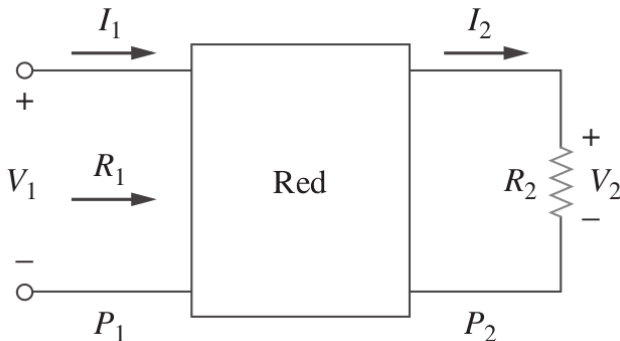
$$G_{dB} = 10 \log G = 10 \log \frac{P_2}{P_1}$$



Decibelio

Suponiendo $R_1 = R_2$, también se emplea para medir la ganancia de tensión/corriente:

$$G_{dB} = 10 \log \frac{V_2^2}{V_1^2} = 20 \log \frac{V_2}{V_1}$$



► Ganancia unidad

$$G = 1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P_1 = P_2 \\ V_1 = V_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} G_{dB} = 10 \log \frac{P_2}{P_1} = 0 \text{ dB} \\ G_{dB} = 20 \log \frac{V_2}{V_1} = 0 \text{ dB} \end{array} \right\}$$

► Potencia Mitad

$$P_2 = \frac{P_1}{2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} G = \frac{1}{2} \\ V_2 = \frac{V_1}{\sqrt{2}} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} G_{dB} = 10 \log \frac{P_2}{P_1} = -3 \text{ dB} \\ G_{dB} = 20 \log \frac{V_2}{V_1} = -3 \text{ dB} \end{array} \right\}$$

Construcción del Diagrama de Bode

Respuesta en
Frecuencia

Oscar Perpiñán
Lamigueiro

Introducción

Función de
Transferencia

Diagrama de Bode

Filtros

- Reescribimos $\mathbf{H}(s)$ de forma normalizada

$$\mathbf{H}(s)|_{s=j\omega} = K \frac{(1 + s/\omega_{z1}) \cdot (1 + s/\omega_{z2}) \dots (1 + s/\omega_{zm})}{(1 + s/\omega_{p1}) \cdot (1 + s/\omega_{p2}) \dots (1 + s/\omega_{pn})}$$

- Módulo

$$|\mathbf{H}(\omega)| = K \frac{|1 + j\omega/\omega_{z1}| \cdot |1 + j\omega/\omega_{z2}| \dots |1 + j\omega/\omega_{zm}|}{|1 + j\omega/\omega_{p1}| \cdot |1 + j\omega/\omega_{p2}| \dots |1 + j\omega/\omega_{pn}|}$$

- Ángulo

$$\phi(\omega) = \text{atan}(\omega/\omega_{z1}) + \text{atan}(\omega/\omega_{z2}) + \dots + \text{atan}(\omega/\omega_{zm}) - \\ - (\text{atan}(\omega/\omega_{p1}) + \text{atan}(\omega/\omega_{p2}) + \dots + \text{atan}(\omega/\omega_{pn}))$$

Construcción del Diagrama de Bode

Respuesta en Frecuencia

Oscar Perpiñán Lamigueiro

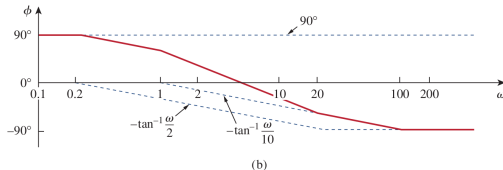
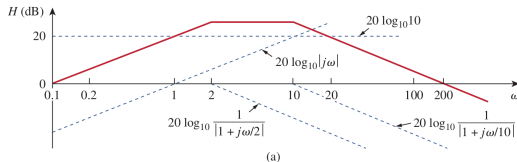
Introducción

Función de Transferencia

Diagrama de Bode

Filtros

- ▶ Al aplicar logaritmos a la expresión de la amplitud **los productos se convierten en sumas**.
- ▶ La estrategia de construcción consiste en analizar la **contribución de cada cero/polo por separado** y **sumar** para obtener el resultado global.



Posibilidades

- ▶ Término constante: K
- ▶ Cero/Polo en el origen: $j\omega$
- ▶ Cero/Polo simple: $1 + j\omega / \omega_c$
- ▶ Cero/Polo múltiple (*raíces reales repetidas*):
 $(1 + j\omega / \omega_c)^N$
- ▶ Cero/Polo cuadrático (*raíces complejas conjugadas*):
 $1 - (\omega / \omega_0)^2 + j2\zeta\omega / \omega_0$

Término Constante

Respuesta en
Frecuencia

Oscar Perpiñán
Lamigueiro

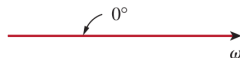
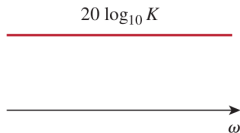
Introducción

Función de
Transferencia

Diagrama de Bode

Filtros

$$\mathbf{H}(\omega) = K \Rightarrow \begin{cases} |\mathbf{H}(\omega)| = 20 \log |K| \\ \phi(\omega) = \begin{cases} 0^\circ & \text{si } K > 0 \\ 180^\circ & \text{si } K < 0 \end{cases} \end{cases}$$



Cero en el origen*

Respuesta en
Frecuencia

Oscar Perpiñán
Lamigueiro

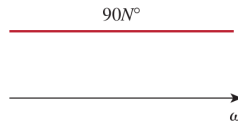
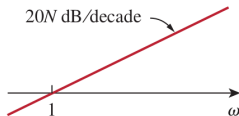
Introducción

Función de
Transferencia

Diagrama de Bode

Filtros

$$\mathbf{H}(\omega) = j\omega \Rightarrow \begin{cases} |\mathbf{H}(\omega)| = 20 \log \omega \\ \phi(\omega) = 90^\circ \end{cases}$$



Década: rango de frecuencias comprendido entre ω_1 y $10 \cdot \omega_1$.

***Atención:** el origen $\omega = 0$ no se representa en una escala logarítmica.

Polo en el origen

Respuesta en
Frecuencia

Oscar Perpiñán
Lamigueiro

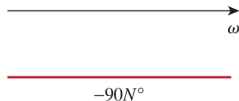
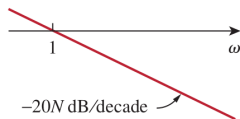
Introducción

Función de
Transferencia

Diagrama de Bode

Filtros

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{1}{j\omega} \Rightarrow \begin{cases} |\mathbf{H}(\omega)| = -20 \log \omega \\ \phi(\omega) = -90^\circ \end{cases}$$



Cero simple

Respuesta en
Frecuencia

Oscar Perpiñán
Lamigueiro

Introducción

Función de
Transferencia

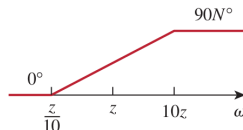
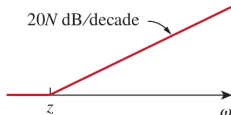
Diagrama de Bode

Filtros

$$\mathbf{H}(\omega) = 1 + j\frac{\omega}{\omega_z} \Rightarrow \begin{cases} |\mathbf{H}(\omega)| = 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_z}\right)^2} \\ \phi(\omega) = \text{atan}\left(\frac{\omega}{\omega_z}\right) \end{cases}$$

$$|\mathbf{H}(\omega)| = \begin{cases} 20 \log 1 = 0, & \omega \rightarrow 0 \\ 20 \log \frac{\omega}{\omega_z}, & \omega \gg \omega_z \end{cases}$$

$$\phi(\omega) = \begin{cases} 0^\circ, & \omega \leq 0.1\omega_z \\ 45^\circ, & \omega = \omega_z \\ 90^\circ, & \omega \geq 10\omega_z \end{cases}$$



Polo simple

Respuesta en
Frecuencia

Oscar Perpiñán
Lamigueiro

Introducción

Función de
Transferencia

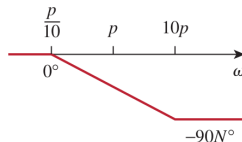
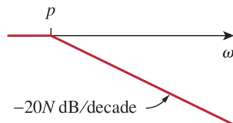
Diagrama de Bode

Filtros

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_p}} \Rightarrow \begin{cases} |\mathbf{H}(\omega)| = -20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2} \\ \phi(\omega) = -\text{atan}\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right) \end{cases}$$

$$|\mathbf{H}(\omega)| = \begin{cases} -20 \log 1 = 0, & \omega \rightarrow 0 \\ -20 \log \frac{\omega}{\omega_p}, & \omega \gg \omega_p \end{cases}$$

$$\phi(\omega) = \begin{cases} 0^\circ, & \omega \leq 0.1\omega_p \\ -45^\circ, & \omega = \omega_p \\ -90^\circ, & \omega \geq 10\omega_p \end{cases}$$



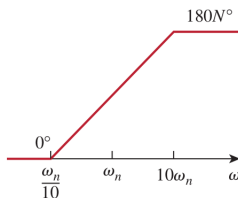
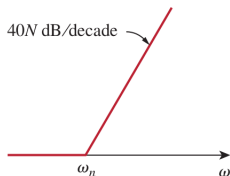
Cero cuadrático

Sea $\mathbf{H}(s)|_{s=j\omega} = s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2$, con $\alpha < \omega_0$. Usando $\zeta = \alpha/\omega_0 < 1$ y normalizando:

$$\mathbf{H}(\omega) = 1 + j2\zeta \frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2$$

$$|\mathbf{H}(\omega)| = \begin{cases} 20 \log 1 = 0, & \omega \rightarrow 0 \\ 40 \log(\omega/\omega_0), & \omega \gg \omega_0 \end{cases}$$

$$\phi(\omega) = \text{atan} \frac{2\zeta\omega/\omega_0}{1 - \omega^2/\omega_0^2} \begin{cases} 0^\circ, & \omega \leq 0.1\omega_0 \\ 90^\circ, & \omega = \omega_0 \\ 180^\circ, & \omega \geq 10\omega_0 \end{cases}$$



Polo cuadrático

Respuesta en
Frecuencia

Oscar Perpiñán
Lamigueiro

Introducción

Función de
Transferencia

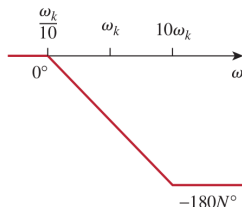
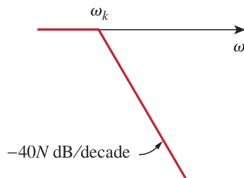
Diagrama de Bode

Filtros

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{1}{1 + j2\zeta \frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

$$|\mathbf{H}(\omega)| = \begin{cases} -20 \log 1 = 0, & \omega \rightarrow 0 \\ -40 \log(\omega/\omega_0), & \omega \gg \omega_0 \end{cases}$$

$$\phi(\omega) = -\text{atan} \frac{2\zeta\omega/\omega_0}{1 - \omega^2/\omega_0^2} \begin{cases} 0^\circ, & \omega \leq 0.1\omega_0 \\ -90^\circ, & \omega = \omega_0 \\ -180^\circ, & \omega \geq 10\omega_0 \end{cases}$$



- ▶ AS: ejemplos 14.3, 14.4, 14.5, 14.6.
- ▶ Exámenes:
 - ▶ Feb 2004 (b), Jun 2013 (b)
 - ▶ Sep 2007 (b), Feb 2005 (b), Feb 2010 (b)
 - ▶ Nov 2014 (b), Sep 2005 (b), Sep 2006 (b).

Introducción

Función de Transferencia

Diagrama de Bode

Filtros

Filtro Paso Bajo

Respuesta en
Frecuencia

Oscar Perpiñán
Lamigueiro

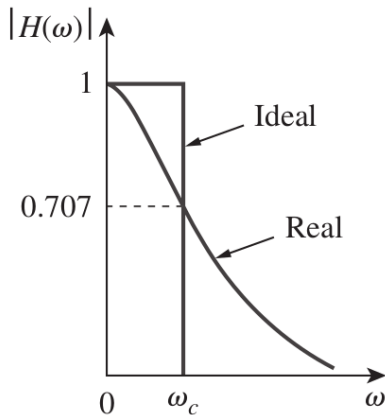
Introducción

Función de
Transferencia

Diagrama de Bode

Filtros

$$\begin{aligned}|H(0)| &= 1 \\ |H(\omega_c)| &= 1/\sqrt{2} \\ |H(\infty)| &= 0\end{aligned}$$



Filtro Paso Alto

Respuesta en
Frecuencia

Oscar Perpiñán
Lamigueiro

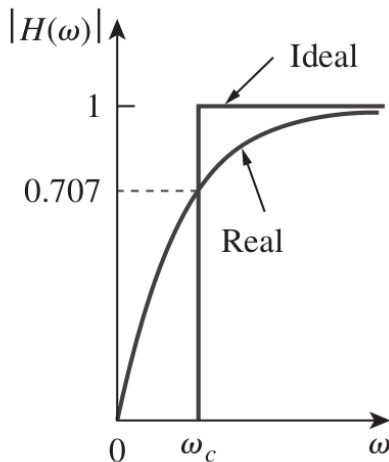
Introducción

Función de
Transferencia

Diagrama de Bode

Filtros

$$\begin{aligned}|H(0)| &= 0 \\ |H(\omega_c)| &= 1/\sqrt{2} \\ |H(\infty)| &= 1\end{aligned}$$



Filtro Paso Banda

Respuesta en
Frecuencia

Oscar Perpiñán
Lamigueiro

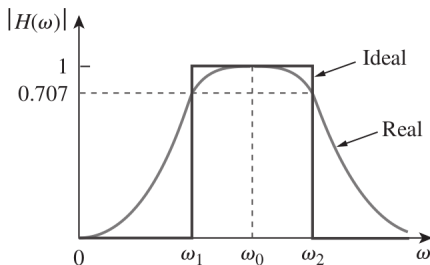
Introducción

Función de
Transferencia

Diagrama de Bode

Filtros

$$\begin{aligned}|H(\omega < \omega_1)| &= 0 \\ |H(\omega_1 < \omega < \omega_2)| &= 1 \\ |H(\omega > \omega_2)| &= 0\end{aligned}$$



Filtro Banda Eliminada

Respuesta en
Frecuencia

Oscar Perpiñán
Lamigueiro

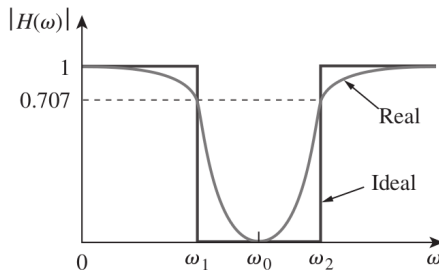
Introducción

Función de
Transferencia

Diagrama de Bode

Filtros

$$\begin{aligned}|H(\omega < \omega_1)| &= 1 \\ |H(\omega_1 < \omega < \omega_2)| &= 0 \\ |H(\omega > \omega_2)| &= 1\end{aligned}$$



Ejemplo: circuito RC

Respuesta en
Frecuencia

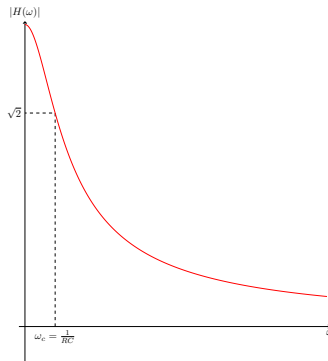
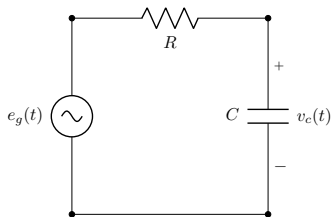
Oscar Perpiñán
Lamigueiro

Introducción

Función de
Transferencia

Diagrama de Bode

Filtros



$$\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{U}_c(\mathbf{s})}{\mathbf{E}_g(\mathbf{s})} \Rightarrow |\mathbf{H}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_c)^2}}$$

Ejemplo: circuito RL

Respuesta en
Frecuencia

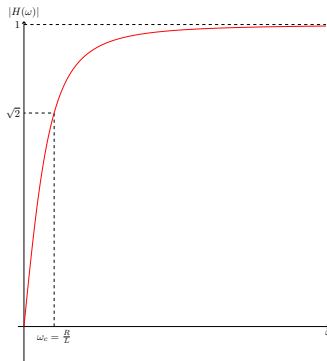
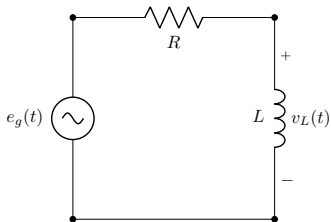
Oscar Perpiñán
Lamigueiro

Introducción

Función de
Transferencia

Diagrama de Bode

Filtros



$$\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{U}_L(\mathbf{s})}{\mathbf{E}_g(\mathbf{s})} \Rightarrow |\mathbf{H}(\omega)| = \frac{\omega/\omega_c}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_c)^2}}$$

Circuitos para practicar

Respuesta en
Frecuencia

Oscar Perpiñán
Lamigueiro

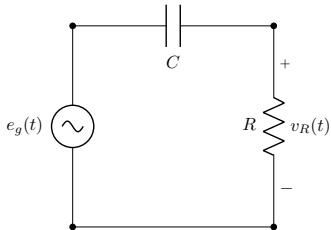
Introducción

Función de
Transferencia

Diagrama de Bode

Filtros

$$H(\omega) = \frac{U_R(\omega)}{E_g(\omega)}$$



$$H(\omega) = \frac{U_R(\omega)}{E_g(\omega)}$$

