

# Respuesta en Frecuencia

## Teoría de Circuitos III

Oscar Perpiñán Lamigueiro

① **Introducción**

② Función de Transferencia

③ Diagrama de Bode

④ Filtros

# Introducción

## Respuesta en Frecuencia

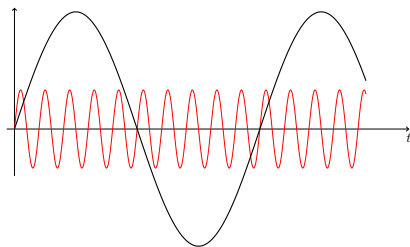
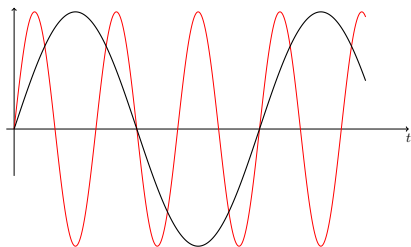
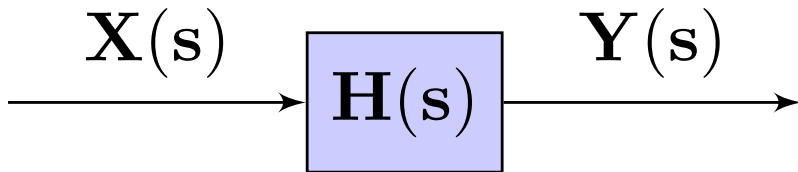
La respuesta en frecuencia de un circuito es la variación del comportamiento del circuito a los cambios de la frecuencia de alimentación.

- ▶ Hasta ahora hemos analizado circuitos alimentados por generadores con frecuencia constante.
- ▶ El análisis de la **respuesta en frecuencia** consiste en variar la frecuencia de alimentación y estudiar la respuesta.
- ▶ Este análisis se realiza en **régimen permanente** con señales sinusoidales.

- ① Introducción
- ② Función de Transferencia
- ③ Diagrama de Bode
- ④ Filtros

# Función de Transferencia

$$\mathbf{H(s)}|_{s=j\omega} = \frac{\mathbf{Y(s)}}{\mathbf{X(s)}}$$



# Funciones de Transferencia

- Ganancia de Tensión

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$$

- Ganancia de Corriente

$$H(s) = \frac{I_o(s)}{I_i(s)}$$

- Impedancia de Transferencia

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{I_i(s)}$$

- Admitancia de Transferencia

$$H(s) = \frac{I_o(s)}{V_i(s)}$$

# La función de transferencia es un fasor

- ▶ Evaluamos la función de transferencia en el eje imaginario:

$$\mathbf{H}(\mathbf{s})|_{\mathbf{s}=j\omega} = \mathbf{H}(\omega)$$

- ▶ Dado que estamos en régimen permanente sinusoidal es **un fasor con módulo y ángulo**:

$$\mathbf{H}(\omega) = H/\underline{\phi}$$

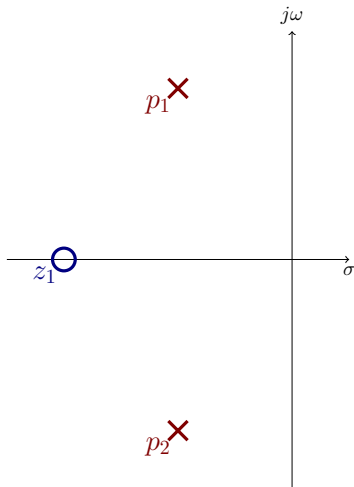
- ▶ Tanto el módulo como el ángulo **varían con la frecuencia**:

$$\mathbf{H}(\omega) \Rightarrow \begin{cases} |\mathbf{H}(\omega)| \\ \phi(\omega) \end{cases}$$

# División de Polinomios: Polos y Ceros

$$\mathbf{H}(\mathbf{s})|_{\mathbf{s}=j\omega} = \frac{\mathbf{N}(\mathbf{s})}{\mathbf{D}(\mathbf{s})} = K \frac{(\mathbf{s} - z_1)(\mathbf{s} - z_2) \dots (\mathbf{s} - z_m)}{(\mathbf{s} - p_1)(\mathbf{s} - p_2) \dots (\mathbf{s} - p_n)}$$

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{j\omega - \mathbf{z}_1}{(j\omega - \mathbf{p}_1) \cdot (j\omega - \mathbf{p}_2)}$$

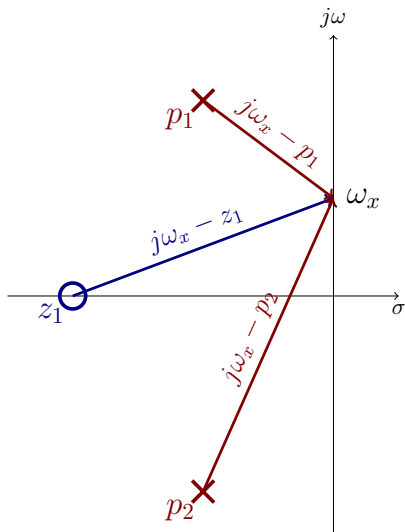




# Interpretación Geométrica

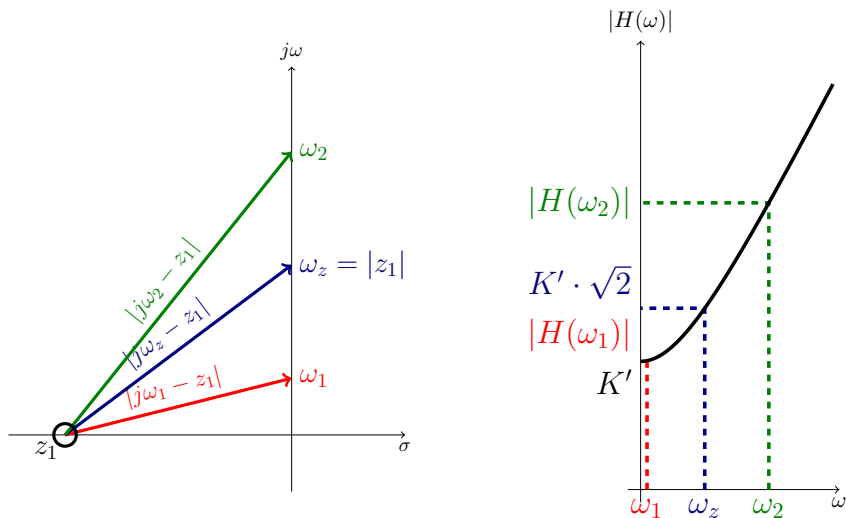
Cada uno de los factores de  $\mathbf{H}(\mathbf{s})|_{\mathbf{s}=j\omega}$  es un número complejo que conecta un cero/polo con el eje imaginario.

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{j\omega - \mathbf{z}_1}{(j\omega - \mathbf{p}_1) \cdot (j\omega - \mathbf{p}_2)}$$



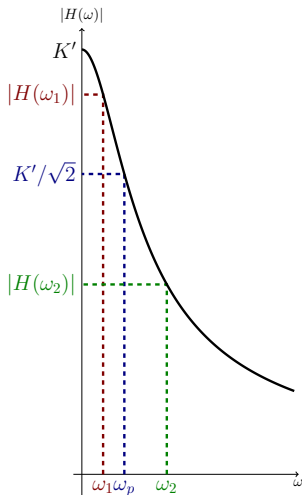
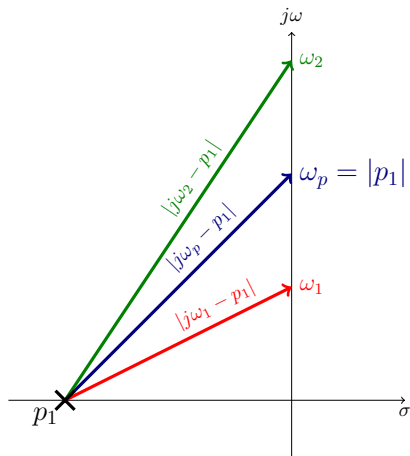
# Interpretación Geométrica: cero simple

$$\mathbf{H}(\omega) = K \cdot (j\omega - \mathbf{z}_1)$$



# Interpretación Geométrica: polo simple

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{K}{j\omega - \mathbf{p}_1}$$



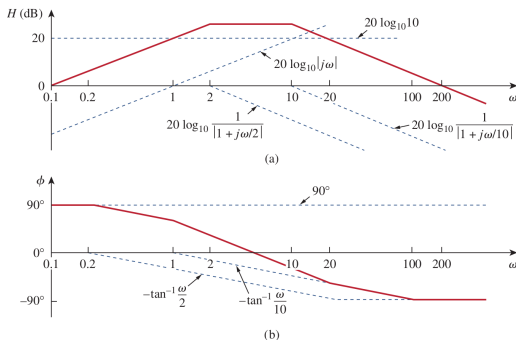
# Ejercicios Recomendados

- ▶ AS: Ejemplo 14.2.
- ▶ Exámenes:
  - ▶ Feb 2004 (a), Jun 2013 (a)
  - ▶ Sep 2007 (a), Feb 2005 (a), Feb 2010 (a)
  - ▶ Nov 2014 (a), Sep 2005 (a), Sep 2006 (a).

- ① Introducción
- ② Función de Transferencia
- ③ Diagrama de Bode
- ④ Filtros

# Introducción

- ▶ Un diagrama de Bode representa de forma **aproximada** la magnitud y la fase de la función de transferencia.
- ▶ Son **gráficos semilogarítmicos**:
  - ▶ Magnitud en **decibelios** frente al logaritmo de la frecuencia/pulsación.
  - ▶ Fase en radianes/grados frente al logaritmo de la frecuencia/pulsación.



# Repaso de logaritmos

## Propiedades

$$\log P_1 \cdot P_2 = \log P_1 + \log P_2$$

$$\log \frac{P_1}{P_2} = \log P_1 - \log P_2$$

$$\log P^n = n \cdot \log P$$

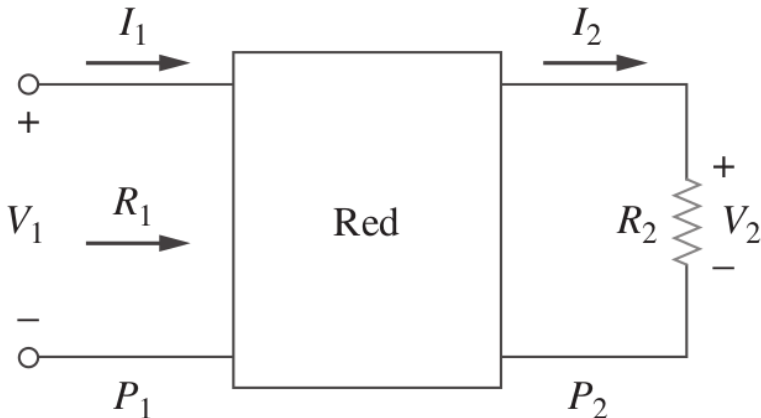
## Valores útiles

$$\begin{array}{ll} \log 1 = 0 & \log 2 = 0.30103 \\ \log 10 = 1 & \log \frac{1}{2} = -0.30103 \end{array}$$

## Decibelio

El **decibelio** (dB) se emplea para medir la ganancia de potencia o la ratio de dos niveles de potencia:

$$G_{dB} = 10 \log G = 10 \log \frac{P_2}{P_1}$$

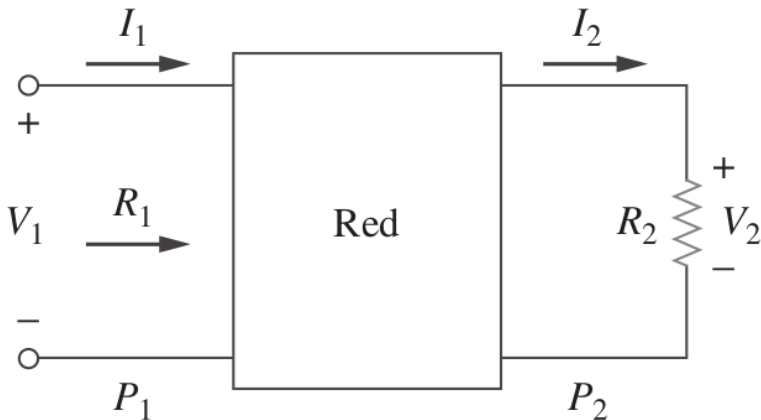




## Decibelio

Suponiendo  $R_1 = R_2$ , también se emplea para medir la ganancia de tensión/corriente:

$$G_{dB} = 10 \log \frac{V_2^2}{V_1^2} = 20 \log \frac{V_2}{V_1}$$



# Valores importantes

## ► Ganancia unidad

$$G = 1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P_1 = P_2 \\ V_1 = V_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} G_{dB} = 10 \log \frac{P_2}{P_1} = 0 \text{ dB} \\ G_{dB} = 20 \log \frac{V_2}{V_1} = 0 \text{ dB} \end{array} \right\}$$

## ► Potencia Mitad

$$P_2 = \frac{P_1}{2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} G = \frac{1}{2} \\ V_2 = \frac{V_1}{\sqrt{2}} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} G_{dB} = 10 \log \frac{P_2}{P_1} = -3 \text{ dB} \\ G_{dB} = 20 \log \frac{V_2}{V_1} = -3 \text{ dB} \end{array} \right\}$$

# Construcción del Diagrama de Bode

- Reescribimos  $\mathbf{H}(s)$  de forma normalizada

$$\mathbf{H}(s)|_{s=j\omega} = K \frac{(1 + s/\omega_{z1}) \cdot (1 + s/\omega_{z2}) \dots (1 + s/\omega_{zm})}{(1 + s/\omega_{p1}) \cdot (1 + s/\omega_{p2}) \dots (1 + s/\omega_{pn})}$$

- Módulo

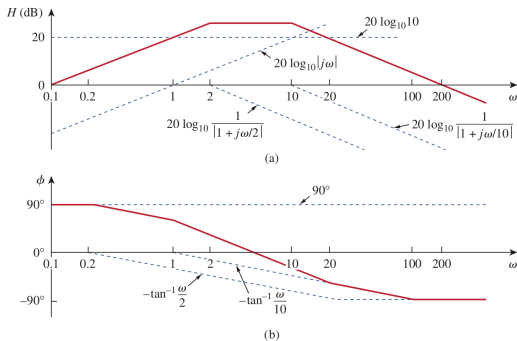
$$|\mathbf{H}(\omega)| = K \frac{|1 + j\omega/\omega_{z1}| \cdot |1 + j\omega/\omega_{z2}| \dots |1 + j\omega/\omega_{zm}|}{|1 + j\omega/\omega_{p1}| \cdot |1 + j\omega/\omega_{p2}| \dots |1 + j\omega/\omega_{pn}|}$$

- Ángulo

$$\phi(\omega) = \text{atan}(\omega/\omega_{z1}) + \text{atan}(\omega/\omega_{z2}) + \dots + \text{atan}(\omega/\omega_{zm}) - \\ - (\text{atan}(\omega/\omega_{p1}) + \text{atan}(\omega/\omega_{p2}) + \dots + \text{atan}(\omega/\omega_{pn}))$$

# Construcción del Diagrama de Bode

- ▶ Al aplicar logaritmos a la expresión de la amplitud **los productos se convierten en sumas**.
- ▶ La estrategia de construcción consiste en analizar la **contribución de cada cero/polo por separado** y **sumar** para obtener el resultado global.



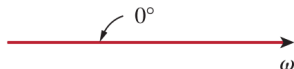
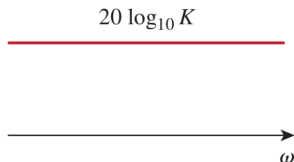
# Construcción del Diagrama de Bode

## Posibilidades

- ▶ Término constante:  $K$
- ▶ Cero/Polo en el origen:  $j\omega$
- ▶ Cero/Polo simple:  $1 + j\omega / \omega_c$
- ▶ Cero/Polo múltiple (*raíces reales repetidas*):  $(1 + j\omega / \omega_c)^N$
- ▶ Cero/Polo cuadrático (*raíces complejas conjugadas*):  
 $1 - (\omega / \omega_0)^2 + j2\zeta\omega / \omega_0$

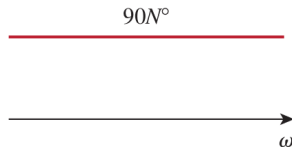
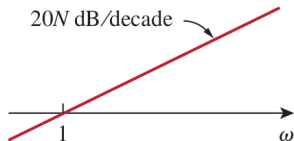
# Término Constante

$$\mathbf{H}(\omega) = K \Rightarrow \begin{cases} |\mathbf{H}(\omega)| = 20 \log |K| \\ \phi(\omega) = \begin{cases} 0^\circ & \text{si } K > 0 \\ 180^\circ & \text{si } K < 0 \end{cases} \end{cases}$$



## Cero en el origen\*

$$\mathbf{H}(\omega) = j\omega \Rightarrow \begin{cases} |\mathbf{H}(\omega)| = 20 \log \omega \\ \phi(\omega) = 90^\circ \end{cases}$$



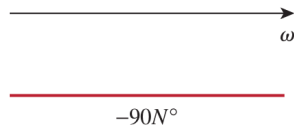
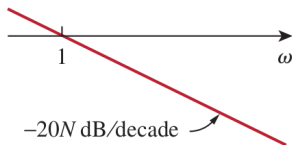
Década: rango de frecuencias comprendido entre  $\omega_1$  y  $10 \cdot \omega_1$ .

---

\* **Atención:** el origen  $\omega = 0$  no se representa en una escala logarítmica.

## Polo en el origen

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{1}{j\omega} \Rightarrow \begin{cases} |\mathbf{H}(\omega)| = -20 \log \omega \\ \phi(\omega) = -90^\circ \end{cases}$$



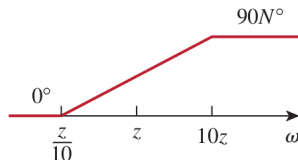
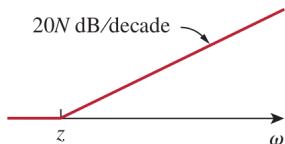


## Cero simple

$$\mathbf{H}(\omega) = 1 + j\frac{\omega}{\omega_z} \Rightarrow \begin{cases} |\mathbf{H}(\omega)| = 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_z}\right)^2} \\ \phi(\omega) = \text{atan}\left(\frac{\omega}{\omega_z}\right) \end{cases}$$

$$|\mathbf{H}(\omega)| = \begin{cases} 20 \log 1 = 0, & \omega \rightarrow 0 \\ 20 \log \frac{\omega}{\omega_z}, & \omega \gg \omega_z \end{cases}$$

$$\phi(\omega) = \begin{cases} 0^\circ, & \omega \leq 0.1\omega_z \\ 45^\circ, & \omega = \omega_z \\ 90^\circ, & \omega \geq 10\omega_z \end{cases}$$

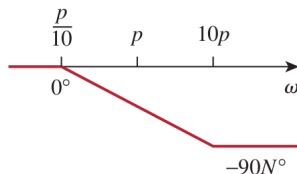
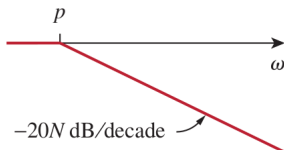


## Polo simple

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_p}} \Rightarrow \begin{cases} |\mathbf{H}(\omega)| = -20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2} \\ \phi(\omega) = -\text{atan}\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right) \end{cases}$$

$$|\mathbf{H}(\omega)| = \begin{cases} -20 \log 1 = 0, & \omega \rightarrow 0 \\ -20 \log \frac{\omega}{\omega_p}, & \omega \gg \omega_p \end{cases}$$

$$\phi(\omega) = \begin{cases} 0^\circ, & \omega \leq 0.1\omega_p \\ -45^\circ, & \omega = \omega_p \\ -90^\circ, & \omega \geq 10\omega_p \end{cases}$$



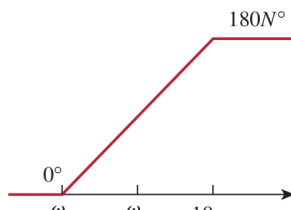
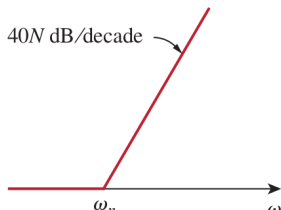
## Cero cuadrático

Sea  $\mathbf{H}(\mathbf{s})|_{\mathbf{s}=j\omega} = \mathbf{s}^2 + 2\alpha\mathbf{s} + \omega_0^2$ , con  $\alpha < \omega_0$ . Usando  $\zeta = \alpha/\omega_0 < 1$  y normalizando:

$$\mathbf{H}(\omega) = 1 + j2\zeta\frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$$

$$|\mathbf{H}(\omega)| = \begin{cases} 20 \log 1 = 0, & \omega \rightarrow 0 \\ 40 \log(\omega/\omega_0), & \omega \gg \omega_0 \end{cases}$$

$$\phi(\omega) = \text{atan} \frac{2\zeta\omega/\omega_0}{1 - \omega^2/\omega_0^2} \begin{cases} 0^\circ, & \omega \leq 0.1\omega_0 \\ 90^\circ, & \omega = \omega_0 \\ 180^\circ, & \omega \geq 10\omega_0 \end{cases}$$

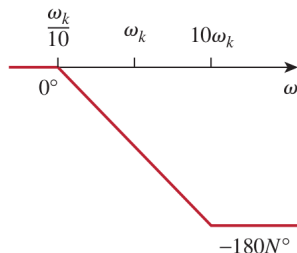
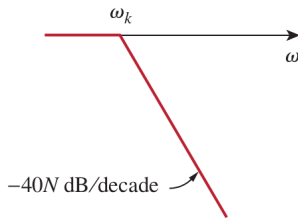


# Polo cuadrático

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{1}{1 + j2\zeta \frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

$$|\mathbf{H}(\omega)| = \begin{cases} -20 \log 1 = 0, & \omega \rightarrow 0 \\ -40 \log(\omega/\omega_0), & \omega \gg \omega_0 \end{cases}$$

$$\phi(\omega) = -\text{atan} \frac{2\zeta\omega/\omega_0}{1 - \omega^2/\omega_0^2} \begin{cases} 0^\circ, & \omega \leq 0.1\omega_0 \\ -90^\circ, & \omega = \omega_0 \\ -180^\circ, & \omega \geq 10\omega_0 \end{cases}$$



# Ejercicios Recomendados

- ▶ AS: ejemplos 14.3, 14.4, 14.5, 14.6.
- ▶ Exámenes:
  - ▶ Feb 2004 (b), Jun 2013 (b)
  - ▶ Sep 2007 (b), Feb 2005 (b), Feb 2010 (b)
  - ▶ Nov 2014 (b), Sep 2005 (b), Sep 2006 (b).

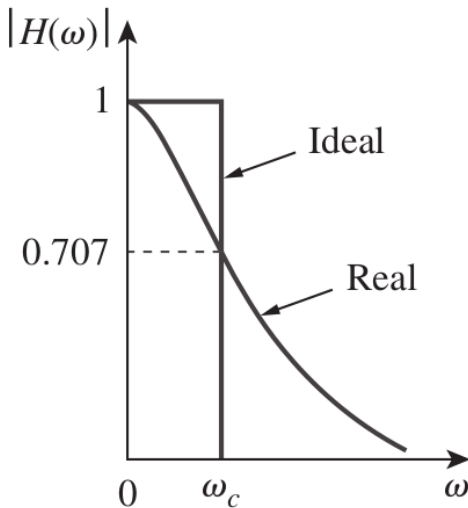
- ① Introducción
- ② Función de Transferencia
- ③ Diagrama de Bode
- ④ Filtros

# Filtro Paso Bajo

$$|H(0)| = 1$$

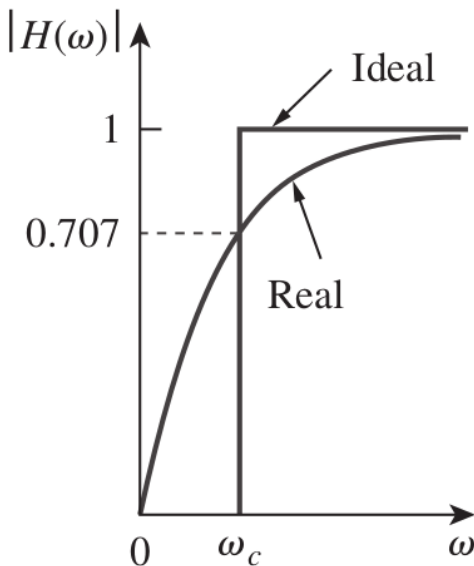
$$|H(\omega_c)| = 1/\sqrt{2}$$

$$|H(\infty)| = 0$$



# Filtro Paso Alto

$$\begin{aligned}|H(0)| &= 0 \\ |H(\omega_c)| &= 1/\sqrt{2} \\ |H(\infty)| &= 1\end{aligned}$$



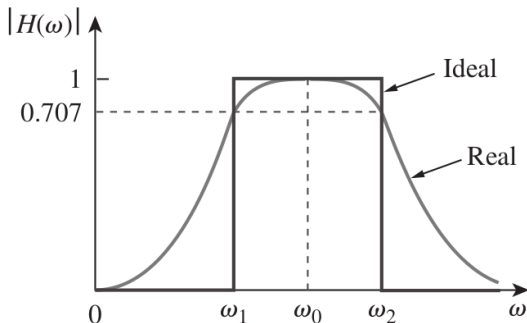


# Filtro Paso Banda

$$|H(\omega < \omega_1)| = 0$$

$$|H(\omega_1 < \omega < \omega_2)| = 1$$

$$|H(\omega > \omega_2)| = 0$$

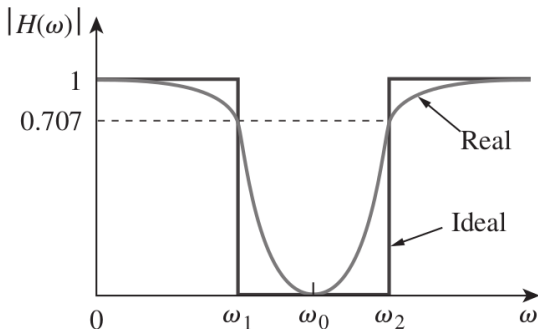


# Filtro Banda Eliminada

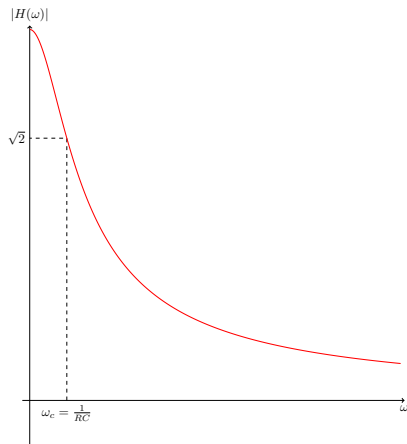
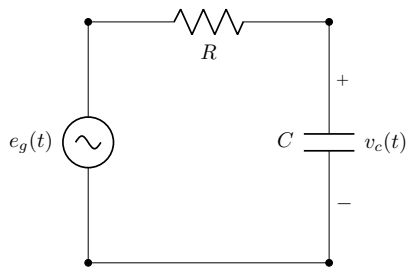
$$|H(\omega < \omega_1)| = 1$$

$$|H(\omega_1 < \omega < \omega_2)| = 0$$

$$|H(\omega > \omega_2)| = 1$$

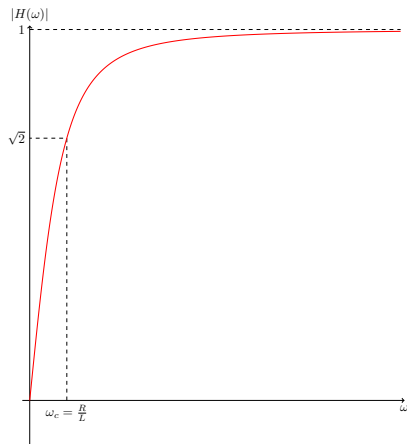
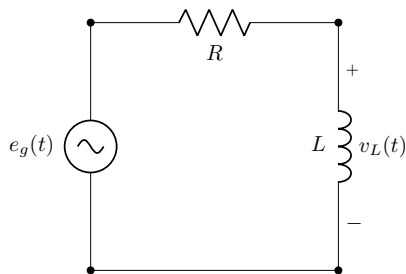


## Ejemplo: circuito RC



$$\mathbf{H}(s) = \frac{\mathbf{U}_c(s)}{\mathbf{E}_g(s)} \Rightarrow |\mathbf{H}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_c)^2}}$$

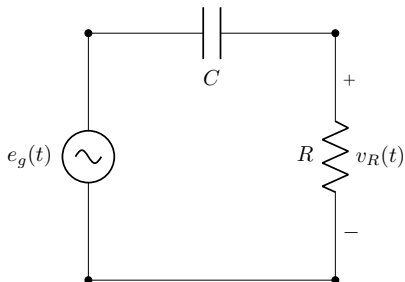
## Ejemplo: circuito RL



$$\mathbf{H}(s) = \frac{\mathbf{U}_L(s)}{\mathbf{E}_g(s)} \Rightarrow |\mathbf{H}(\omega)| = \frac{\omega/\omega_c}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_c)^2}}$$

# Circuitos para practicar

$$H(\omega) = \frac{U_R(\omega)}{E_g(\omega)}$$



$$H(\omega) = \frac{U_R(\omega)}{E_g(\omega)}$$

