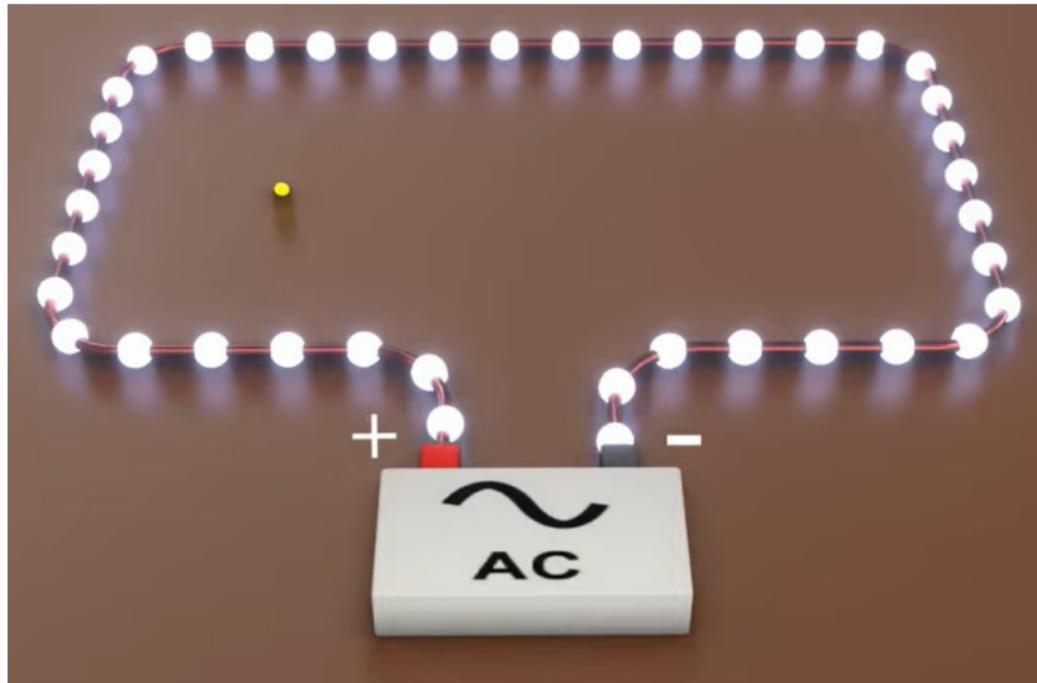


Corriente alterna senoidal

Teoría de Circuitos

Autor: Luis Badesa Bernardo

(clica en la imagen)



- ① Formas de onda**
- ② Onda senoidal**
- ③ Cálculo fasorial**
- ④ Respuesta de elementos pasivos a excitación senoidal**
- ⑤ Potencia en corriente alterna**
- ⑥ Teoremas**

Forma de onda

- ▶ La salida de los generadores (de tensión o de corriente) es una función que puede variar con el tiempo
- ▶ La dependencia funcional $u = u(t)$ o $i = i(t)$ se denomina forma de onda
- ▶ En este bloque temático vamos a centrarnos en **formas de onda periódicas** (su valor se repite a intervalos regulares) y, en concreto, en **señales senoidales**



Formas de onda periódicas

$$y(t) = y(t + T) = y(t + n \cdot T)$$

donde $n \in \mathbb{Z}$ (número entero)

- ▶ **Periodo (T)**: intervalo de tiempo a partir del cual se repite la forma de onda [s]
- ▶ **Frecuencia (f)**: número de repeticiones de la onda por unidad de tiempo [Hz]

$$f = \frac{1}{T}$$

- ▶ **Valor instantáneo ($y(t)$)**: valor que toma la forma de onda en un instante t
- ▶ **Valores de pico (Y_{max}, Y_{min})**: valores máximo y mínimo que toma la forma de onda

$$Y_{max} = \max[f(t)] \quad Y_{min} = \min[f(t)]$$

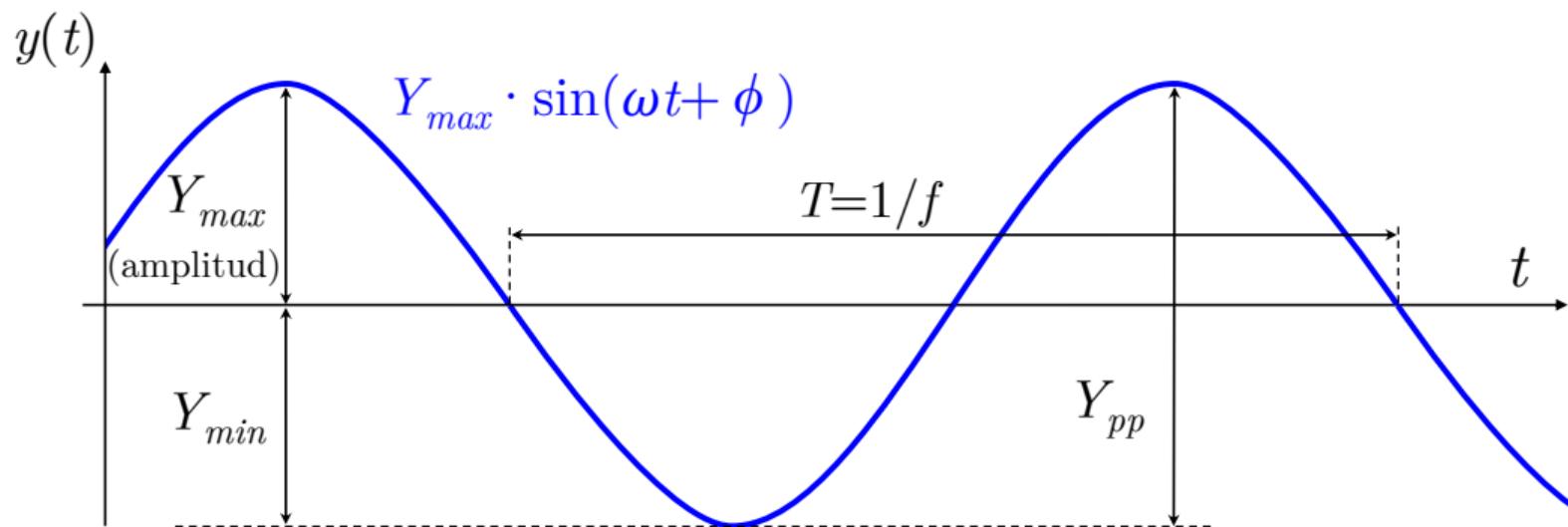
Para ondas centradas ($Y_{max} = -Y_{min}$), el valor de pico también se denomina **amplitud**

- ▶ **Valor pico a pico (Y_{PP})**: diferencia (en valor absoluto) entre los valores de pico considerados con signo

$$Y_{PP} = |Y_{max} - Y_{min}|$$

Formas de onda periódicas

- ▶ Caso particular: **función senoidal** (señal centrada)



Formas de onda periódicas: valores característicos

- **Valor medio (Y_m)**: media aritmética de los valores instantáneos que toma la función en un periodo (o semiperiodo, o cuarto de periodo)

$$Y_m = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} y(t) dt$$

- **Valor eficaz (Y_{ef})**: raíz cuadrada de la media de los cuadrados de los valores que toma la función en un periodo

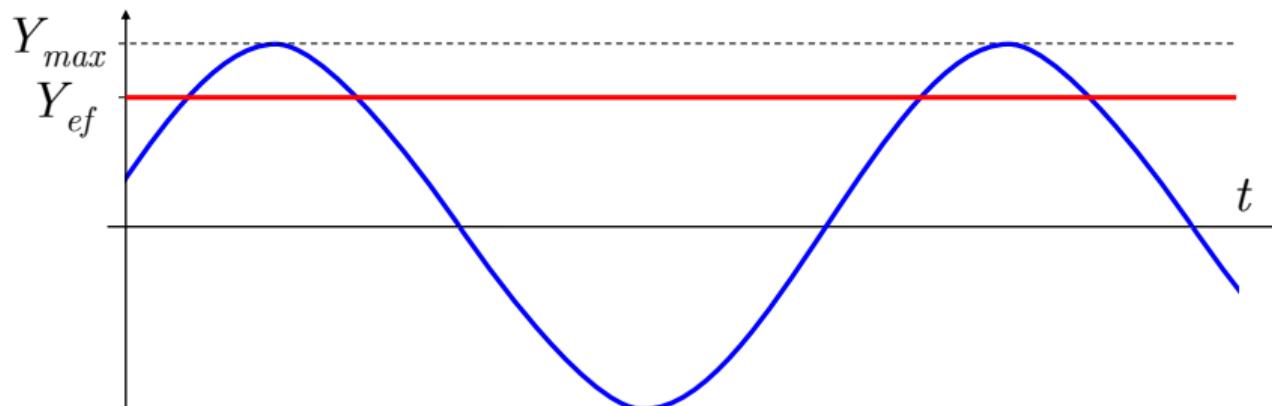
$$Y_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_a^{a+T} y^2(t) dt}$$

También denominado “valor RMS”, del inglés *root mean square*

El valor eficaz es de especial interés en teoría de circuitos para **cálculos relacionados con la potencia**, como veremos más adelante

Formas de onda periódicas: valor eficaz

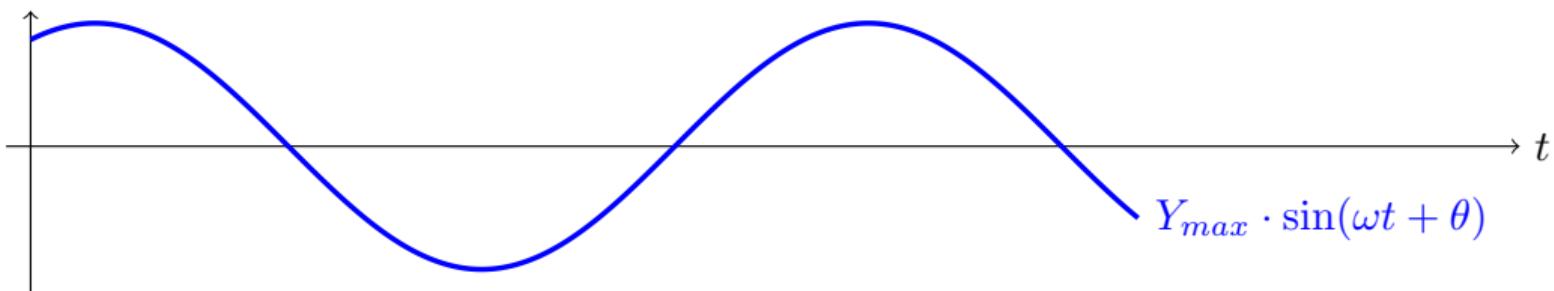
- ▶ Caso particular: valor eficaz de una **onda senoidal**



- ▶ ¿Por qué usamos el valor eficaz en corriente alterna? Porque establece un **paralelismo con la corriente continua**, que nos permitirá simplificar cálculos:
El valor eficaz es igual al valor de una corriente continua constante que, al circular por una determinada resistencia, **produciría la misma dissipación de potencia** que la corriente alterna que estamos considerando

- 1** Formas de onda
- 2** Onda senoidal
- 3** Cálculo fasorial
- 4** Respuesta de elementos pasivos a excitación senoidal
- 5** Potencia en corriente alterna
- 6** Teoremas

Onda senoidal, definición



$$y(t) = Y_o \cdot \sin(\omega \cdot t + \theta)$$

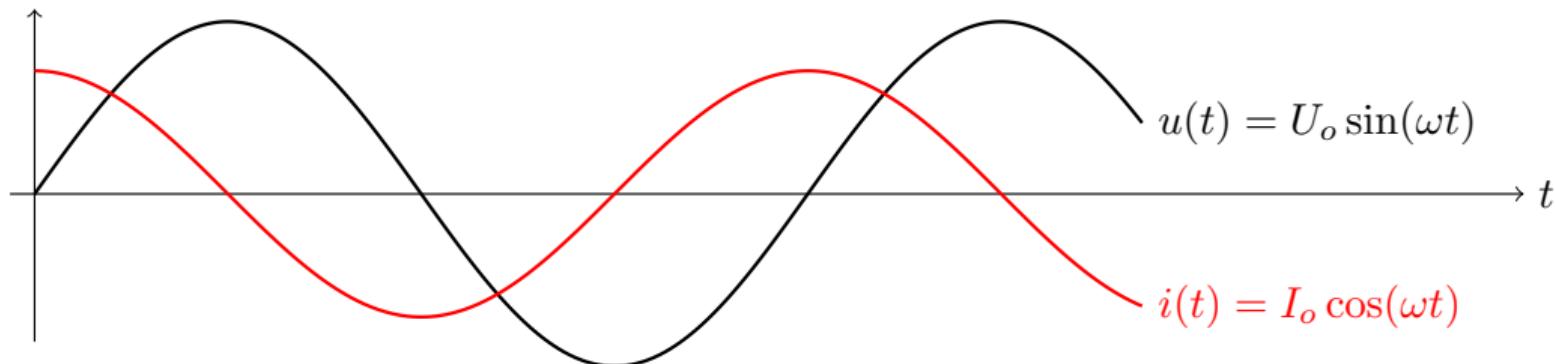
- ▶ Y_{max} o Y_o : valor máximo de la onda
- ▶ T : periodo de la onda (segundos)
- ▶ θ : fase (radianes o grados). También suelen usarse las letras griegas ϕ y φ
- ▶ $\omega = \frac{2\pi}{T}$: pulsación (rad/s)
- ▶ $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T}$: frecuencia (Hz)

Fase



- ▶ Es el argumento de la función senoidal para $t = 0$
- ▶ Tomando una onda como referencia, si la **fase de otra onda es de 0°** , está **en fase** con la de referencia
- ▶ Si la **fase es positiva**, la onda **adelanta** a la referencia
- ▶ Si la **fase es negativa**, la onda **retrasa** a la referencia

Señales en cuadratura



- ▶ Cuando el **desfase entre dos señales es de 90°** ($\theta_I - \theta_U = \pi/2$), se dice que están en **cuadratura**
- ▶ El paso por cero de una señal coincide con el paso por el máximo/mínimo de la otra señal

Valor medio y valor eficaz de una onda senoidal

Valor medio

En un periodo:

$$Y_m = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T Y_o \cdot \sin(\omega \cdot t + \theta) dt = \boxed{0}$$

En un semiperíodo positivo ($\theta = 0^\circ$):

$$Y_m = \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} Y_{max} \cdot \sin(\omega \cdot t) dt = \frac{2 \cdot Y_{max}}{\pi} \approx 0,637 \cdot Y_{max}$$

Valor eficaz

$$Y = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T y^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T [Y_{max} \cdot \sin(\omega \cdot t + \theta)]^2 dt} = \boxed{\frac{Y_{max}}{\sqrt{2}}}$$

- ① Formas de onda
- ② Onda senoidal
- ③ Cálculo fasorial
- ④ Respuesta de elementos pasivos a excitación senoidal
- ⑤ Potencia en corriente alterna
- ⑥ Teoremas

Recordatorio de 1LK

- La **1LK** es el principio de **conservación de la carga** aplicado a los circuitos eléctricos:

La suma de las corrientes que llegan a un nudo es igual a la suma de las que salen

$$\sum_{j=1}^n i_j(t) = 0$$

La conservación de la carga **aplica a cada instante**, luego 1LK también **aplica en corriente alterna**

Por lo tanto, vamos a sumar corrientes senoidales a menudo en este tema, para lo cual será muy útil el **cálculo fasorial**

Recordatorio de 2LK

- La **2LK** es el principio de **conservación de la energía** aplicado a los circuitos:

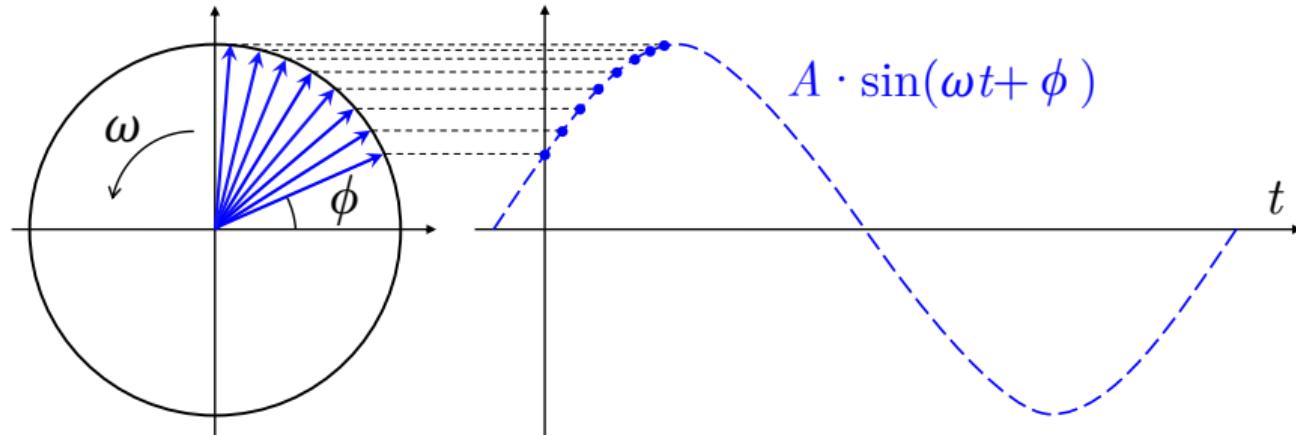
La suma (con signo) de las tensiones a lo largo de un camino cerrado es cero

$$\sum_{j=1}^m u_j(t) = 0$$

La conservación de la energía **aplica a cada instante** → 2LK también **aplica en corriente alterna**

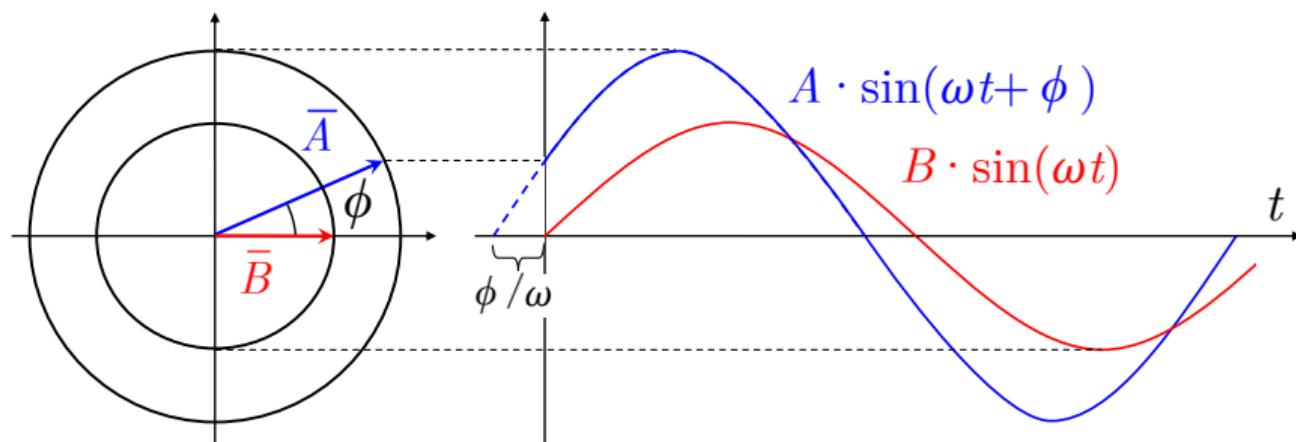
Vamos a sumar tensiones senoidales a menudo en este tema → será muy útil el **cálculo fasorial**

Representación fasorial



- Un **fasor** es un artefacto matemático **útil para simplificar cálculos** con señales senoidales
- El término “fasor” viene del inglés *phasor*, forma corta de *phase vector* (vector de fase)
- Al **rotar en sentido antihorario** con velocidad angular ω , la proyección del fasor sobre el eje vertical es igual al valor de la señal senoidal en cada instante .

Representación fasorial

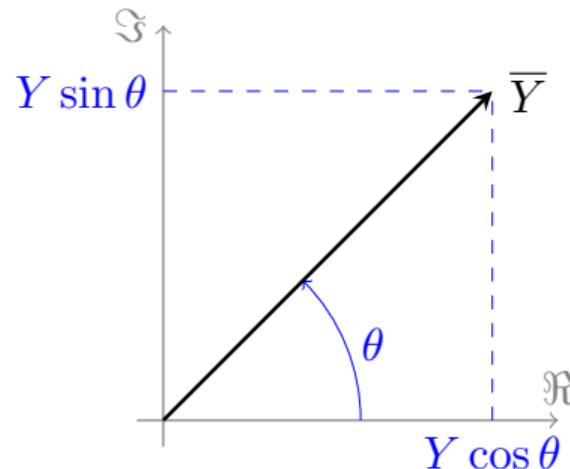


- ▶ Una señal senoidal **se representa mediante un único fasor**
- ▶ Para definir el fasor correspondiente a cada señal, tomamos como origen de fases una de las señales presentes en el circuito (e.g., la tensión en bornes de una fuente)

Representación fasorial

- Un fasor se representa matemáticamente mediante un **número complejo** (**repaso** de complejos y trigonometría):

$$\overline{Y} = \underbrace{Y_{ef} \angle \theta}_{\text{forma polar}} = \underbrace{Y_{ef} \cdot [\cos(\theta) + j \cdot \sin(\theta)]}_{\text{forma binómica}} \stackrel{\text{fórmula de Euler}}{\downarrow} \underbrace{Y_{ef} \cdot e^{j\theta}}_{\text{forma exponencial}}$$



Usamos **j** para la constante imaginaria, en lugar de i , ya que en el análisis de circuitos i se usa para intensidad

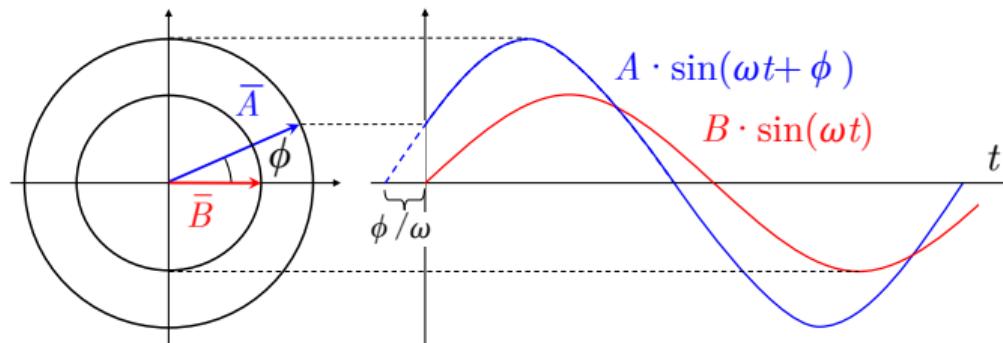
- El **argumento** del fasor es la **fase** de la onda. El **módulo** es el valor eficaz de la onda, **NO su amplitud**

Representación fasorial

- El **argumento** del fasor es la **fase** de la onda. El **módulo** es el valor eficaz de la onda, **NO su amplitud**

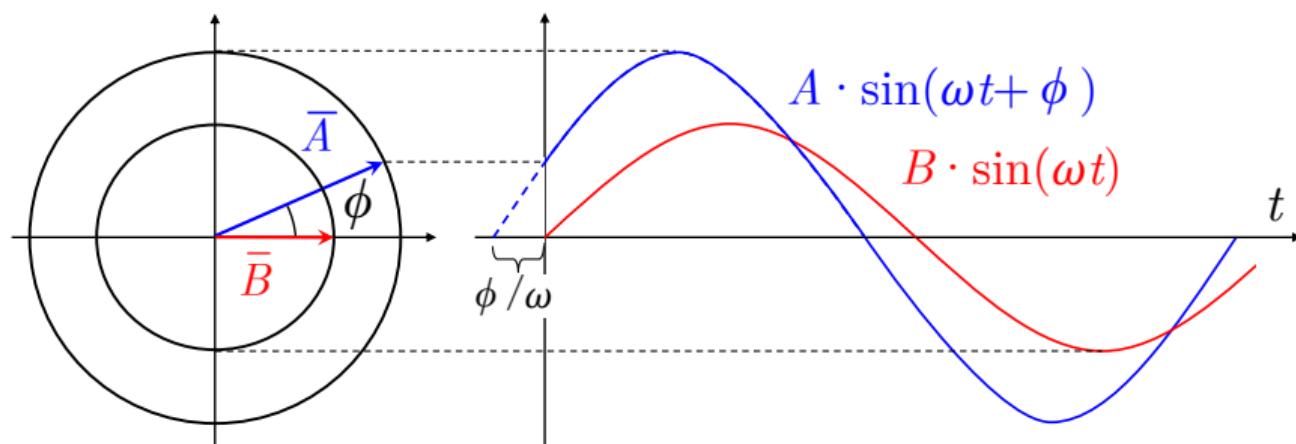
Se toma el valor eficaz por **conveniencia a la hora de calcular la potencia producida/consumida** en circuitos de corriente alterna, directamente operando con fasores

Nota: en varios gráficos de estas diapositivas, el módulo de los fasores corresponde a la amplitud de la onda, y no a su valor eficaz
Esto se debe simplemente a claridad en la representación gráfica



Representación fasorial

- ▶ Los fasores **representan las relaciones entre los valores eficaces y las fases** de las distintas señales presentes en el circuito, siempre asumiendo una frecuencia determinada
- ▶ Por lo tanto, las operaciones con fasores **solo son válidas entre señales de la misma frecuencia**.



Cálculo fasorial: propiedades de la función senoidal

Las razones por las que podemos usar cálculo fasorial para **simplificar operaciones entre señales senoidales** son dos propiedades importantes de la función senoidal:

►
$$A_1 \cdot \sin(\omega t + \theta_1) + A_2 \cdot \sin(\omega t + \theta_2) = A_3 \cdot \sin(\omega t + \theta_3)$$

Para sumar señales senoidales, podemos simplemente **sumar sus fasores correspondientes** (recuerda que 1LK y 2LK implican sumas)

►
$$\frac{d^n \sin(\omega t + \theta_1)}{dt^n} = C_2 \sin(\omega t + \theta_2) , \quad \int \cdots \int \sin(\omega t + \theta_1) dt \cdots dt = C_3 \sin(\omega t + \theta_3) + k$$

Las **tensiones y corrientes en bobinas y condensadores** (cuyas ecuaciones de definición contienen derivadas e integrales de estas magnitudes), **pueden expresarse mediante fasores**

Operaciones con fasores

Suma gráfica de dos fasores \bar{Y}_1 e \bar{Y}_2 , y sus correspondientes señales temporales:
(clica en la imagen)

Operaciones con fasores

- Un fasor **captura la información clave de una onda senoidal** para los propósitos del análisis de circuitos: su valor eficaz y su fase
- Nos permite **operar con ondas senoidales como si fueran vectores/números complejos**

$$\begin{aligned}\bar{Y}_1 &= \underbrace{Y_{ef_1} \cos(\theta_1)}^{a_1} + j \underbrace{Y_{ef_1} \sin(\theta_1)}^{b_1} = Y_{ef_1} / \underline{\theta_1} \\ \bar{Y}_2 &= \underbrace{Y_{ef_2} \cos(\theta_2)}_{a_2} + j \underbrace{Y_{ef_2} \sin(\theta_2)}_{b_2} = Y_{ef_2} / \underline{\theta_2}\end{aligned}$$

Forma binómica:

- Suma: $\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$
- Resta: $\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2 = (a_1 - a_2) + j(b_1 - b_2)$

Forma polar:

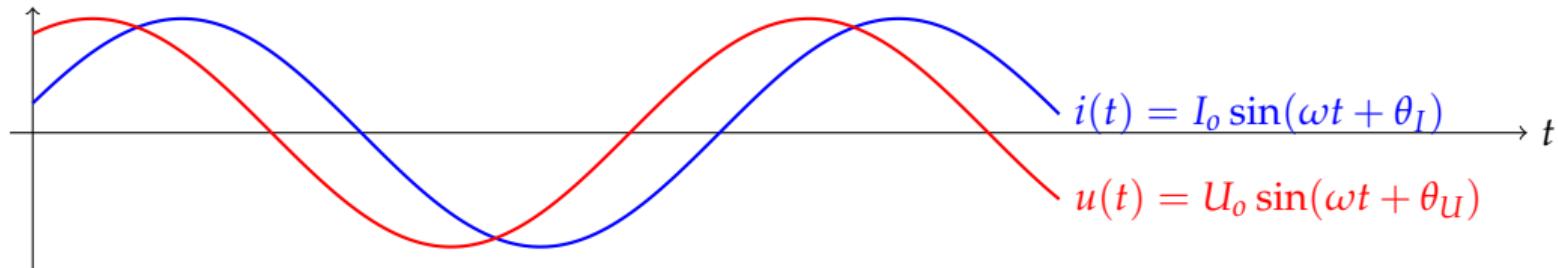
- Multiplicación: $\bar{Y}_1 \cdot \bar{Y}_2 = (Y_{ef_1} \cdot Y_{ef_2}) / \underline{\theta_1 + \theta_2}$
- División: $\frac{\bar{Y}_1}{\bar{Y}_2} = \frac{Y_{ef_1}}{Y_{ef_2}} / \underline{\theta_1 - \theta_2}$

Interudio: *Alternating Current ⚡ Direct Current*



- ① Formas de onda
- ② Onda senoidal
- ③ Cálculo fasorial
- ④ Respuesta de elementos pasivos a excitación senoidal
- ⑤ Potencia en corriente alterna
- ⑥ Teoremas

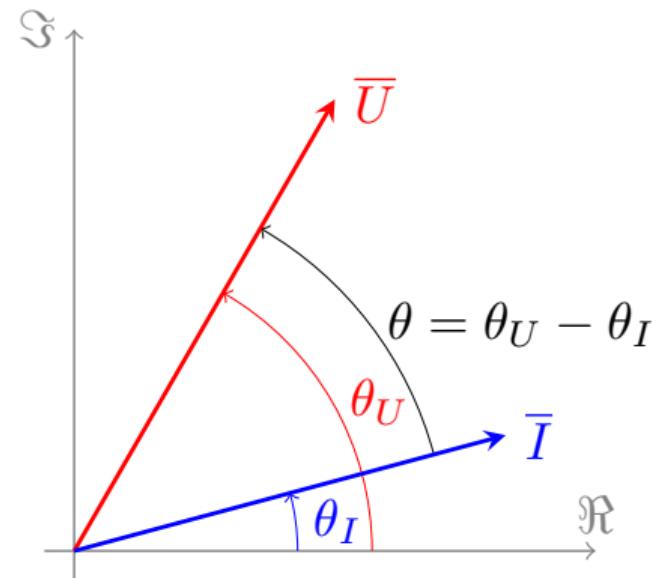
Impedancia: relación entre fasores de tensión y corriente



$$\bar{U} = \bar{Z} \cdot \bar{I} \quad (\text{equiv. a ley de Ohm})$$

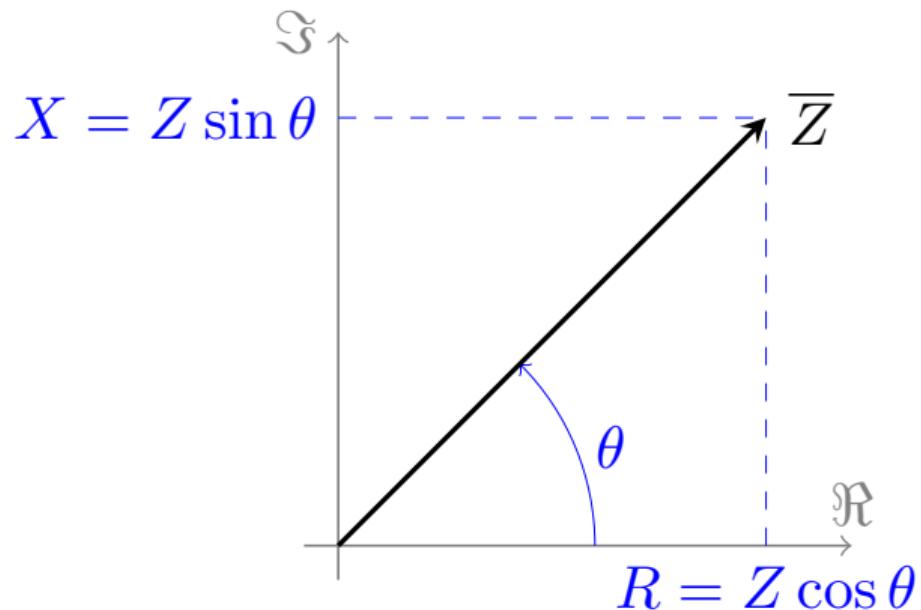
$$\bar{Z} = \frac{\bar{U}}{\bar{I}}$$

$$\boxed{\bar{Z} = \frac{U}{I} / \underline{\theta_U - \theta_I} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} Z = \frac{U}{I} \\ \theta = \theta_U - \theta_I \end{cases}}$$



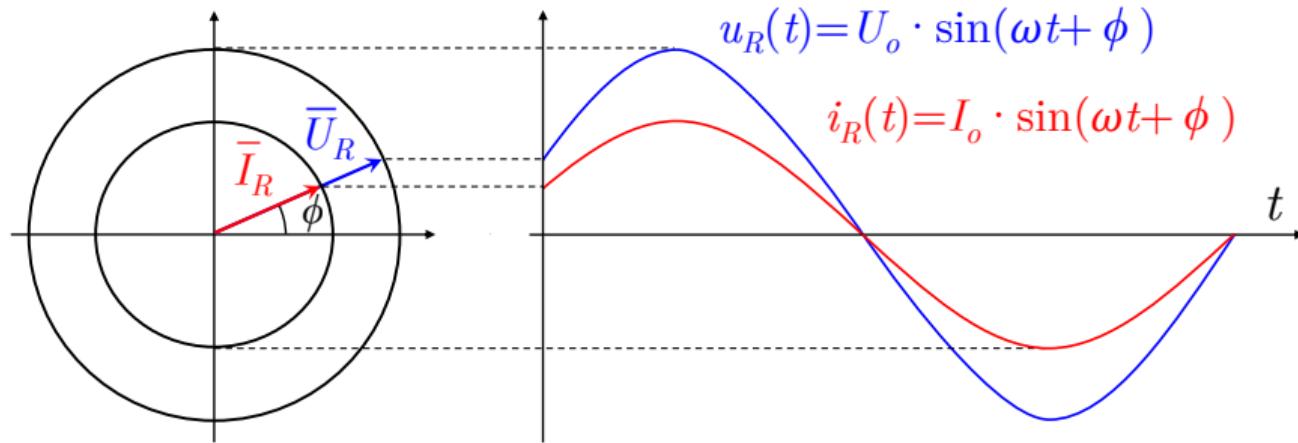
Impedancia genérica

$$\bar{Z} = Z \cdot \cos(\theta) + j Z \cdot \sin(\theta) = \underbrace{R}_{\text{resistencia}} + j \underbrace{X}_{\text{reactancia}}$$



Circuito resistivo

Un circuito resistivo no introduce desfase entre señales (**tensión y corriente en fase**)



ley de Ohm

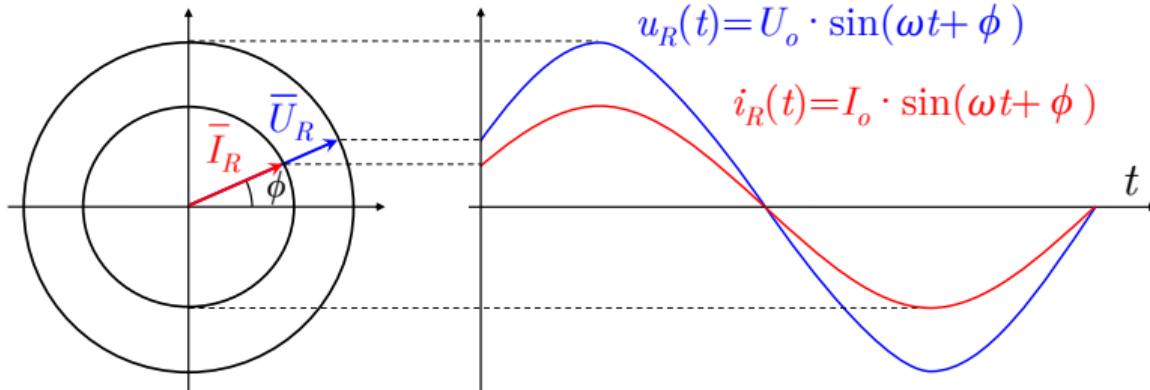
$$i(t) = I\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \theta_I)$$

$$\downarrow \\ u(t) = R \cdot i(t) = R \cdot I\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \theta_I) = U\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \theta_I)$$

(a partir de ahora, la notación U e I se refiere directamente a **valores eficaces**)

Circuito resistivo

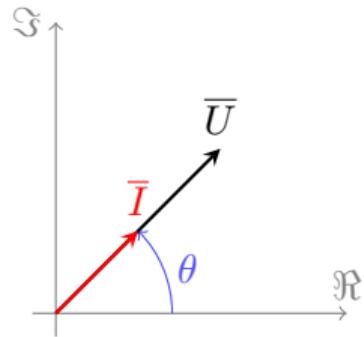
Un circuito resistivo no introduce desfase entre señales (**tensión y corriente en fase**)



$$Z = \frac{U}{I} = R$$

$$\theta = \theta_U - \theta_I = 0^\circ$$

$$\boxed{\bar{Z}_R = R/0^\circ}$$



Carga y descarga de una bobina

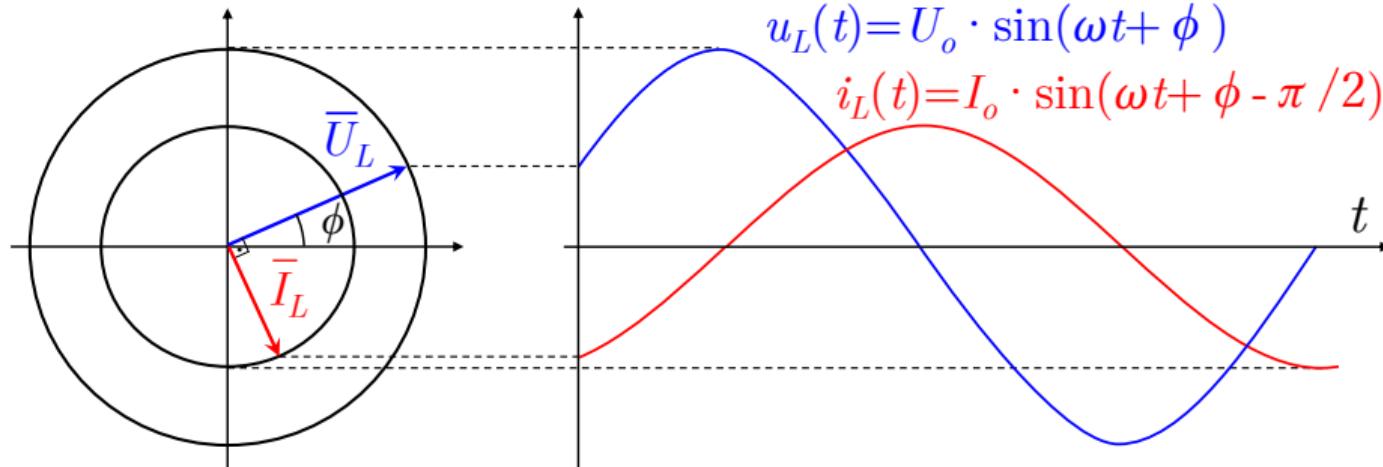
- La bobina **almacena energía magnética** cuando circula por ella una corriente

$$E_L = \frac{1}{2} \cdot L \cdot i_L^2(t)$$

Cuando el módulo de la corriente que circula por la bobina disminuye, **devuelve su energía almacenada** al circuito **(clica en la imagen)**

Circuito inductivo puro

Un circuito inductivo puro genera **señales en cuadratura** y retrasa la corriente.



ley de
Faraday

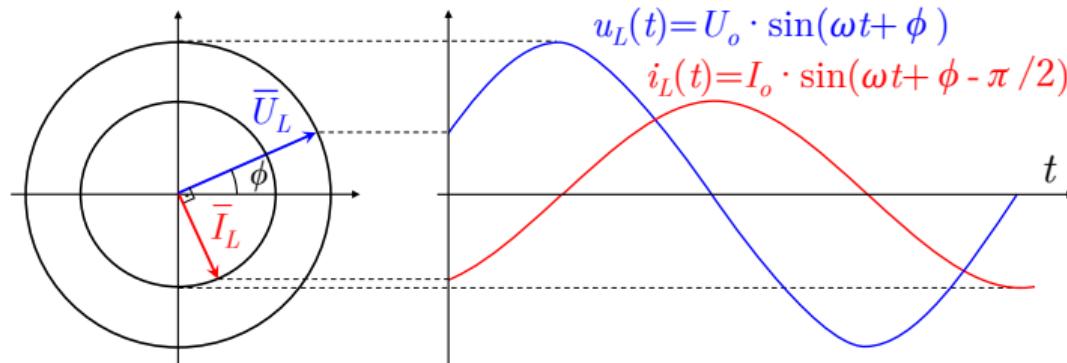
$$i(t) = I\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \theta_I)$$

$$u(t) \stackrel{\downarrow}{=} L \cdot \frac{di(t)}{dt} = \omega L \cdot I\sqrt{2} \cdot \cos(\omega t + \theta_I) = U\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \theta_I + \pi/2)$$

La bobina se carga cuando
 $\frac{d|i_L|}{dt} > 0$, y descarga cuando $\frac{d|i_L|}{dt} < 0$

Circuito inductivo puro

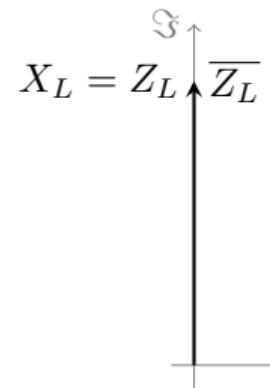
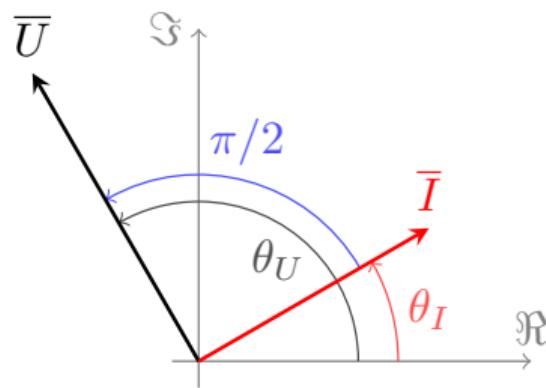
Un circuito inductivo puro genera **señales en cuadratura** y retrasa la corriente



$$Z = \frac{U}{I} = \omega L$$

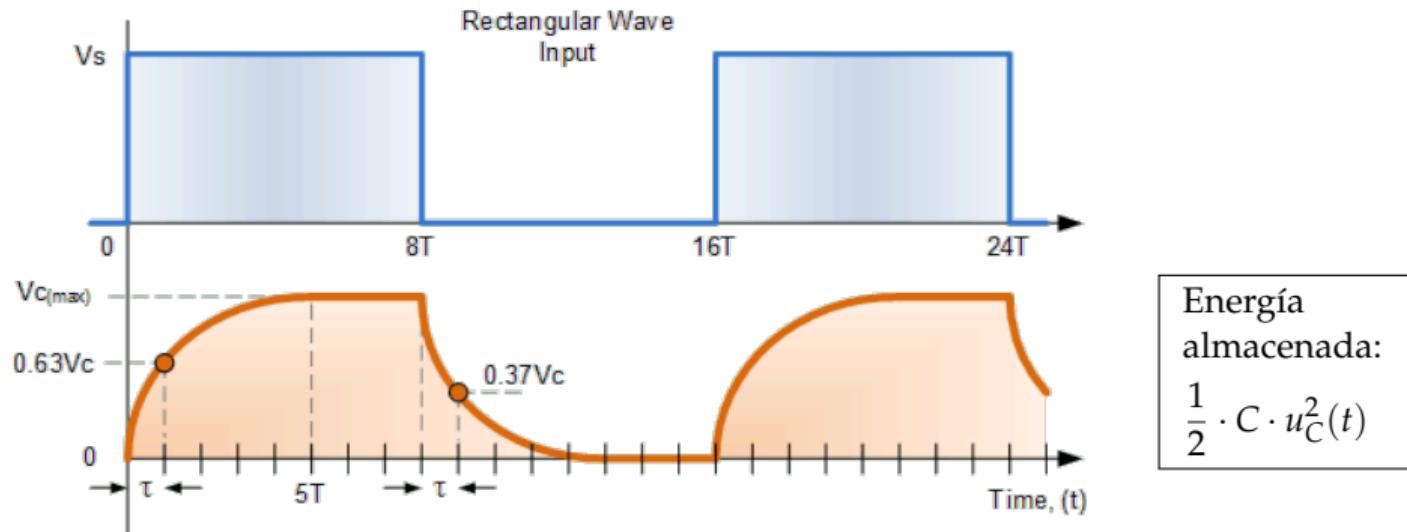
$$\theta = \theta_U - \theta_I = \frac{\pi}{2}$$

$$\bar{Z}_L = j\omega L = \omega L / 90^\circ$$



Carga y descarga de un condensador

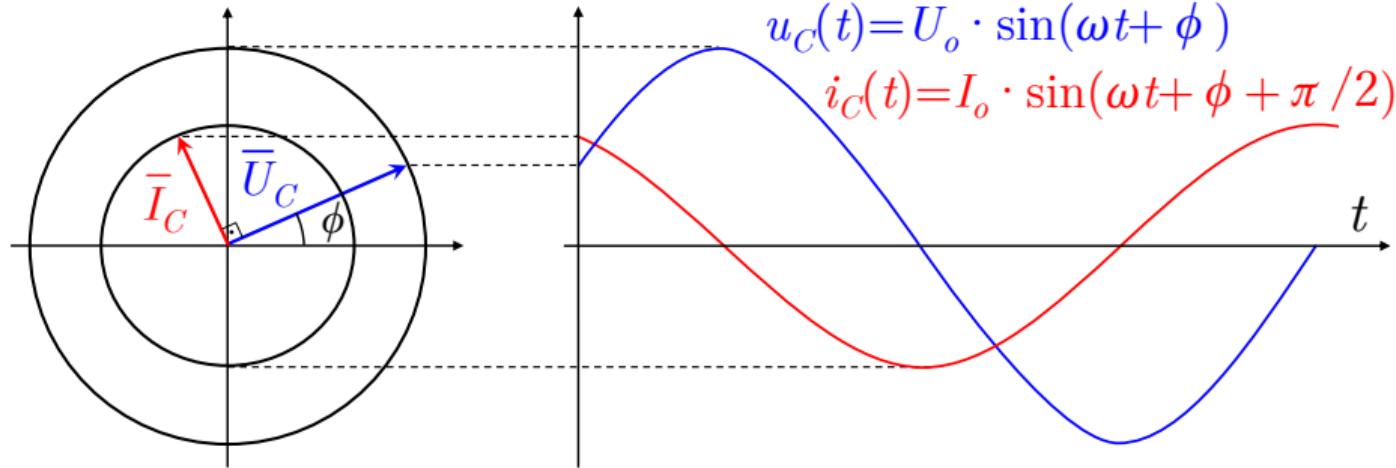
- ▶ Si se excita un condensador con pulsos rectangulares de tensión, se **almacena energía eléctrica, que luego se devuelve al circuito** en los semiciclos sin excitación



- ▶ Con **excitación alterna senoidal**, el condensador también se carga y descarga
 - ▶ Sin embargo, la tensión en el condensador nunca llega a estabilizarse, porque la excitación senoidal cambia todo el rato (siguiente diapositiva)

Circuito capacitivo puro

Un circuito capacitivo puro genera **señales en cuadratura** y adelanta la corriente.



definición
de condensador

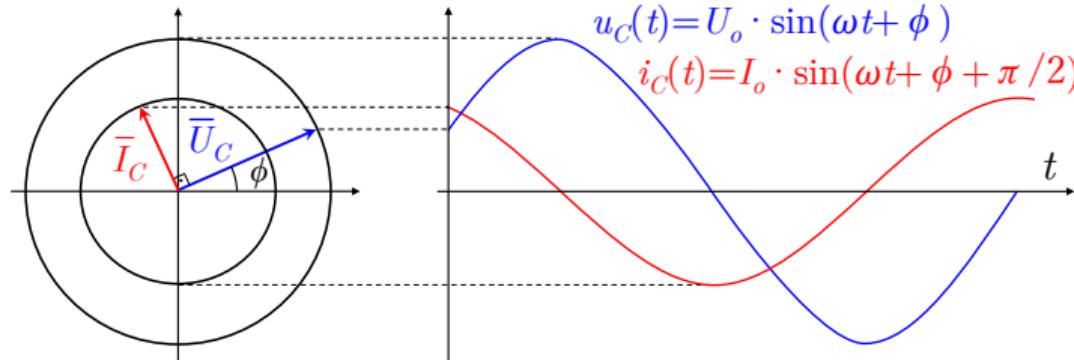
$$i(t) = I \sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \theta_I)$$

El condensador se carga cuando $\frac{d|u_C|}{dt} > 0$, y descarga cuando $\frac{d|u_C|}{dt} < 0$

$$u(t) \stackrel{\downarrow}{=} \frac{1}{C} \cdot \int_{-\infty}^t i(\tau) \cdot d\tau = \frac{I}{\omega C} \sqrt{2} \cdot [-\cos(\omega t + \theta_I)] = U \sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \theta_I - \pi/2)$$

Circuito capacitivo puro

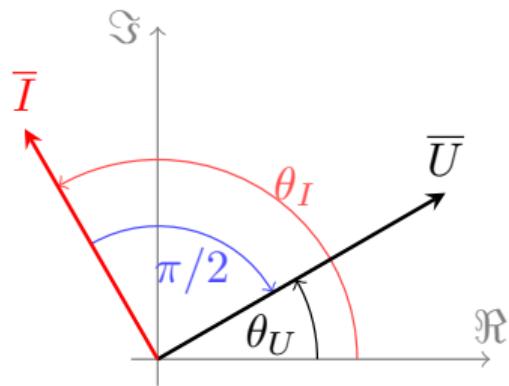
Un circuito capacitivo puro genera **señales en cuadratura** y adelanta la corriente



$$Z = \frac{U}{I} = \frac{1}{\omega C}$$

$$\theta = \theta_U - \theta_I = -\frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{\bar{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{\omega C} \angle -90^\circ}$$



$$X = Z_C \angle -90^\circ$$

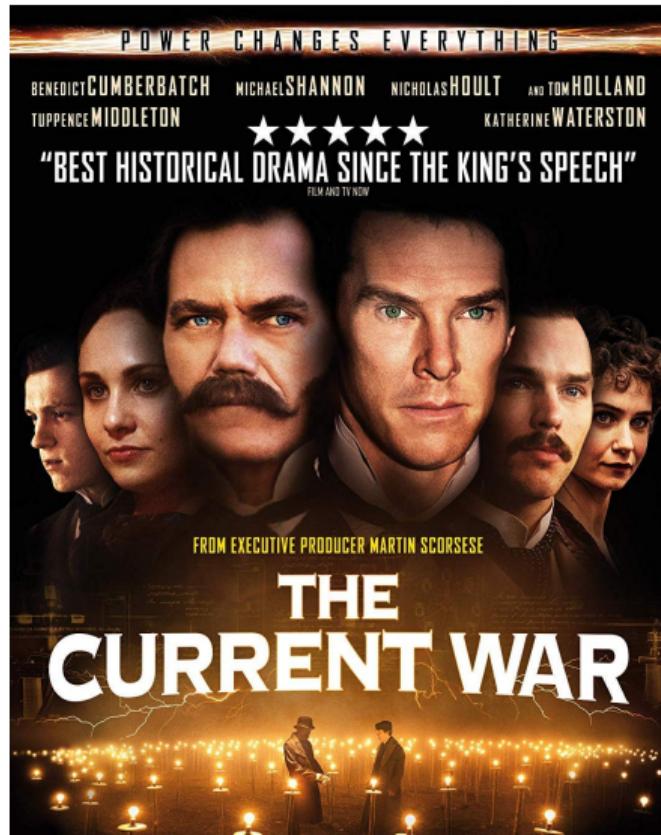
Resumen

Elemento	Impedancia	Módulo	Ángulo
Resistencia	R	R	0°
Bobina ideal	$j\omega L$	ωL	90°
Condensador	$1/(j\omega C)$	$1/(\omega C)$	-90°

- ▶ La impedancia de una bobina ideal $X_L = \omega L$ se denomina “reactancia inductiva”
- ▶ La impedancia de un condensador $X_C = \frac{1}{\omega C}$ se denomina “reactancia capacitiva”

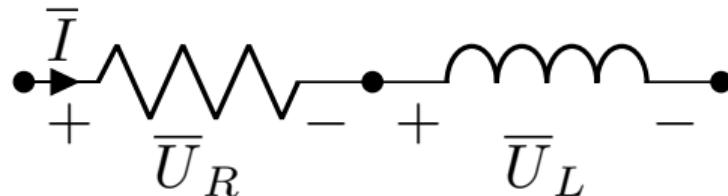
Interludio: película relacionada con la asignatura

La guerra de las corrientes, 2017



Circuito RL (inductivo con pérdidas)

Recordatorio: por elementos asociados en **serie**, circula la **misma corriente**



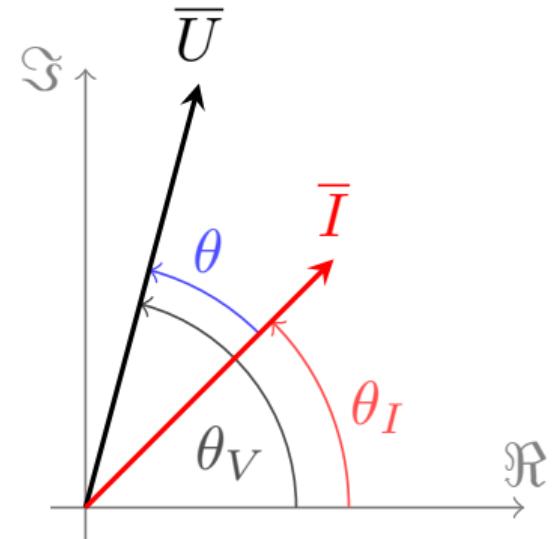
$$\bar{I} = I / \underline{\theta_I}$$

$$\bar{U}_R = R \cdot \bar{I} = R \cdot I / \underline{\theta_I}$$

$$\bar{U}_L = \bar{X}_L \cdot \bar{I} = \omega L I / \underline{\theta_I} + 90^\circ$$

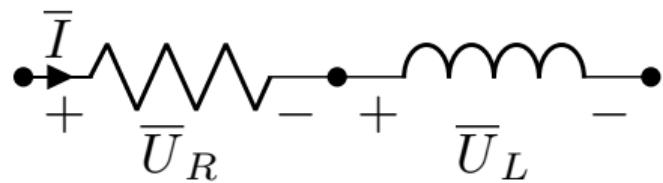
2LK

$$\bar{U} \downarrow = \bar{U}_R + \bar{U}_L = (\underbrace{(R + j\omega L)}_{\bar{Z}_{eq}}) \bar{I} \quad \leftarrow$$



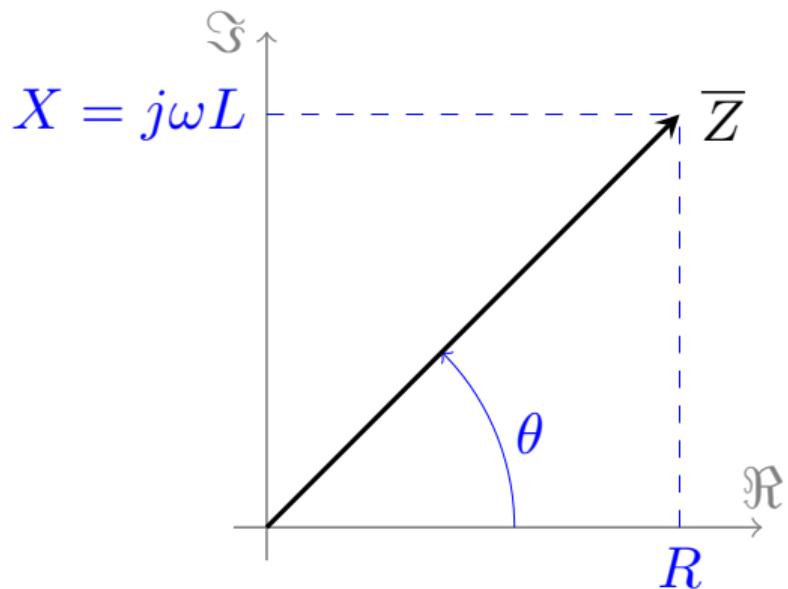
Importante: sumar módulos en lugar de fasores es un **error grave**

Circuito RL (inductivo con pérdidas)



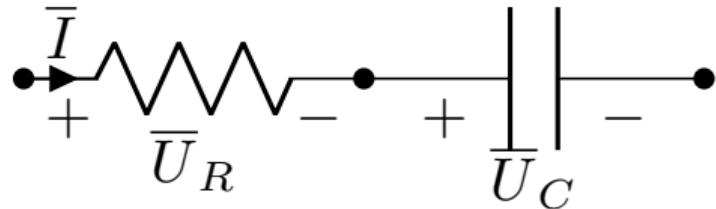
$$\bar{Z}_{eq} = R + j\omega L \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta > 0}$$

$$\bar{Z}_{eq} \begin{cases} |Z_{eq}| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \\ \theta = \text{atan}\left(\frac{\omega L}{R}\right) \end{cases}$$



Circuito RC (capacitivo con pérdidas)

Recordatorio: por elementos asociados en **serie**, circula la **misma corriente**



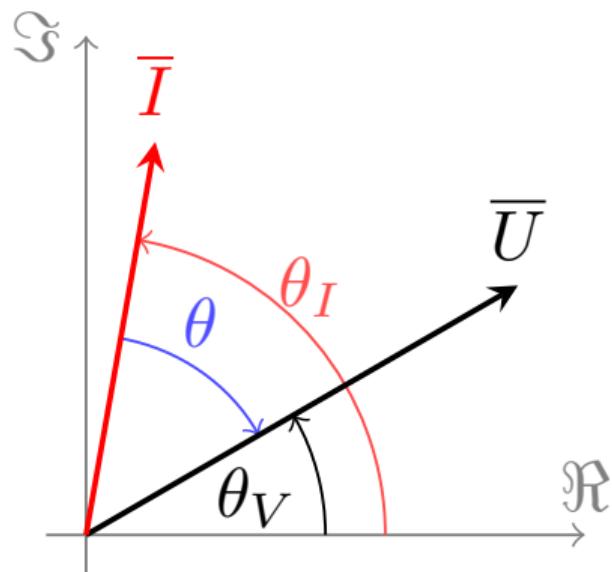
$$\bar{I} = \underline{I}/\theta_I$$

$$\bar{U}_R = R \cdot \bar{I} = R \cdot \underline{I}/\theta_I$$

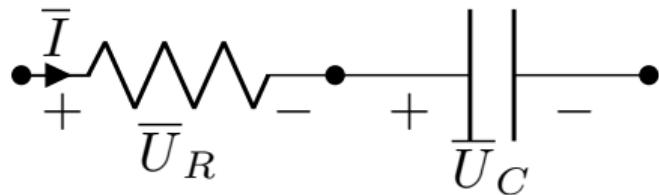
$$\bar{U}_C = \bar{X}_C \cdot \bar{I} = \frac{I}{\omega C} / \underline{\theta_I - 90^\circ}$$

2LK

$$\bar{U} \stackrel{\downarrow}{=} \bar{U}_R + \bar{U}_C = \left(R - j \frac{1}{\omega C} \right) \bar{I}$$

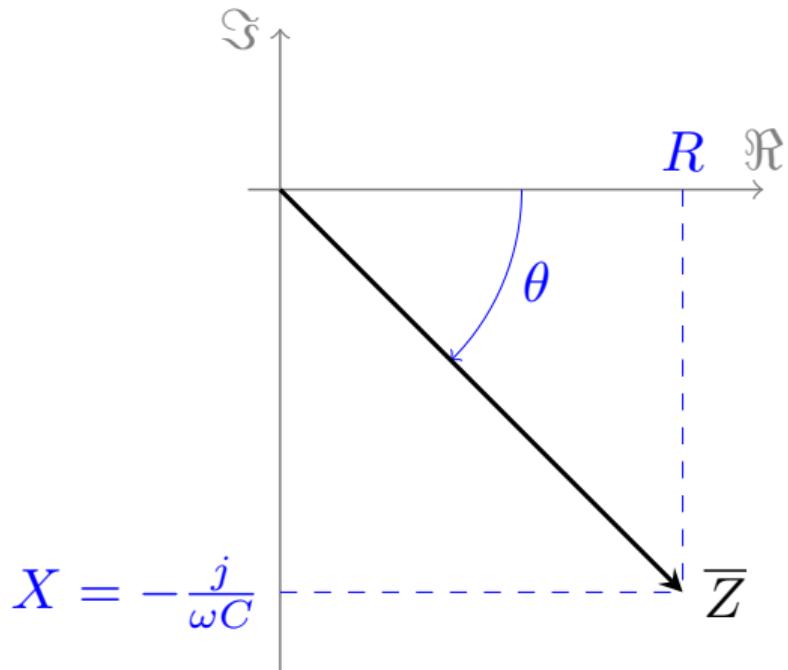


Circuito RC (capacitivo con pérdidas)

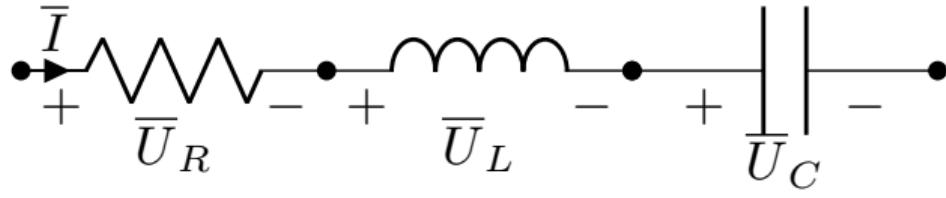


$$\bar{Z}_{eq} = R - j \frac{1}{\omega C} \Rightarrow \boxed{\theta < 0}$$

$$\bar{Z}_{eq} \begin{cases} |Z_{eq}| = \sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}} \\ \theta = \text{atan} \left(\frac{-\frac{1}{\omega C}}{R} \right) \end{cases}$$



Circuito RLC serie



$$\bar{I} = I / \underline{\theta_I}$$

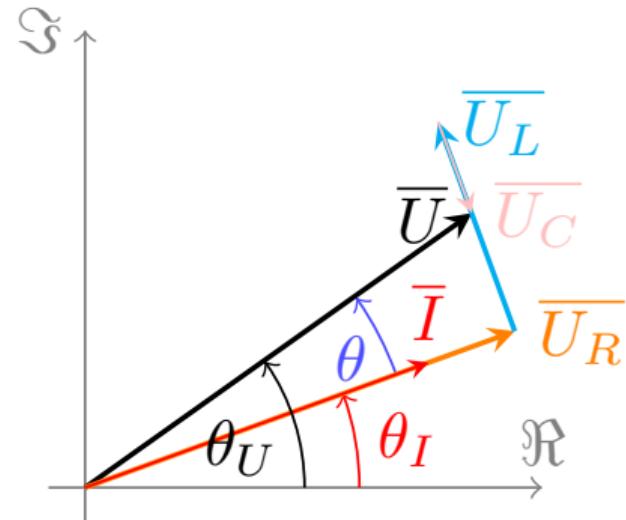
$$\bar{U}_R = R \cdot \bar{I} = R \cdot I / \underline{\theta_I}$$

$$\bar{U}_L = \bar{X}_L \cdot \bar{I} = \omega L I / \underline{\theta_I + 90^\circ}$$

$$\bar{U}_C = \bar{X}_C \cdot \bar{I} = \frac{I}{\omega C} / \underline{\theta_I - 90^\circ}$$

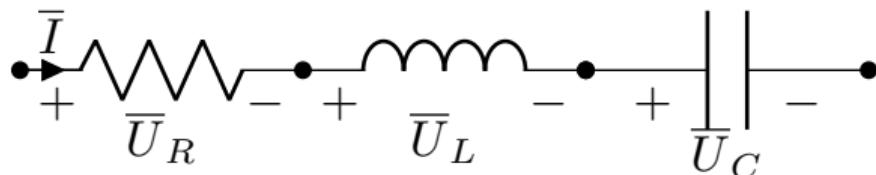
2LK

$$\bar{U} \stackrel{\downarrow}{=} \bar{U}_R + \bar{U}_L + \bar{U}_C = \underbrace{\left(R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C} \right)}_{\bar{Z}_{eq}} \bar{I}$$



(ejemplo, en el que $X_L > X_C$)

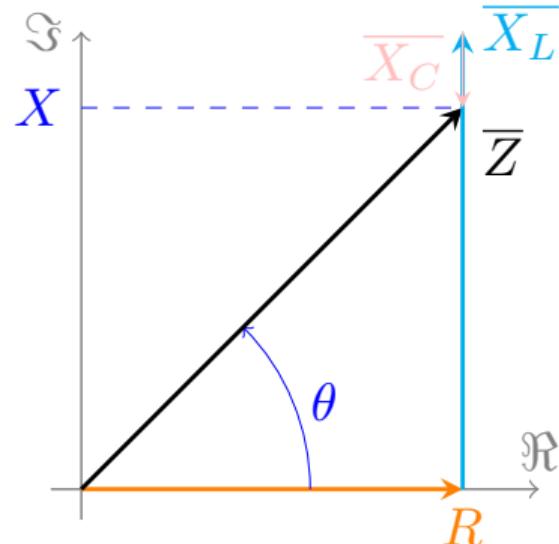
Circuito RLC serie



$$\bar{Z}_{eq} = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \Rightarrow \boxed{i\theta ?}$$

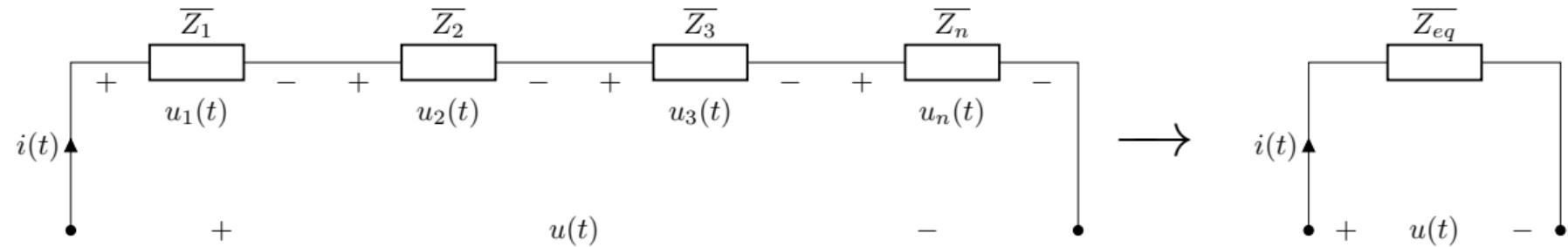
$$\bar{Z}_{eq} \begin{cases} |Z_{eq}| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \\ \theta = \text{atan} \left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right) \end{cases}$$

(ejemplo, en el que $X_L > X_C$)



- ▶ $\theta > 0 \Rightarrow \omega L > \frac{1}{\omega C}$: carácter inductivo
- ▶ $\theta < 0 \Rightarrow \omega L < \frac{1}{\omega C}$: carácter capacitivo
- ▶ $\theta = 0 \Rightarrow \omega L = \frac{1}{\omega C}$: carácter resistivo
(resonancia)

Circuito serie general



$$\overline{U} = \overline{U}_1 + \overline{U}_2 + \dots + \overline{U}_n = \bar{I} \cdot (\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \dots + \bar{Z}_n) = \bar{I} \cdot \bar{Z}_{eq}$$

\uparrow
2LK

$$\bar{Z}_{eq} = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \dots + \bar{Z}_n \Rightarrow$$

$$\bar{Z}_{eq} = \sum_{i=1}^n \bar{Z}_i$$

Importante: sumar módulos en lugar de fasores es un **error grave**

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^n R_i \quad X_{eq} = \sum_{i=1}^n X_i$$

$$\theta = \arctan \left(\frac{X_{eq}}{R_{eq}} \right)$$

Ejercicio

Un circuito serie formado por $R = 10 \Omega$, $L = 20 \text{ mH}$ y $C = 100 \mu\text{F}$ es alimentado con una tensión $u(t) = 200 \cdot \sin\left(1000t + \frac{\pi}{4}\right) \text{ V}$

Calcular \bar{I} , $u_R(t)$, $u_L(t)$ y $u_C(t)$, y dibujar el diagrama fasorial de tensiones y corrientes

Solución: $\bar{I} = 10/0^\circ \text{ A}$

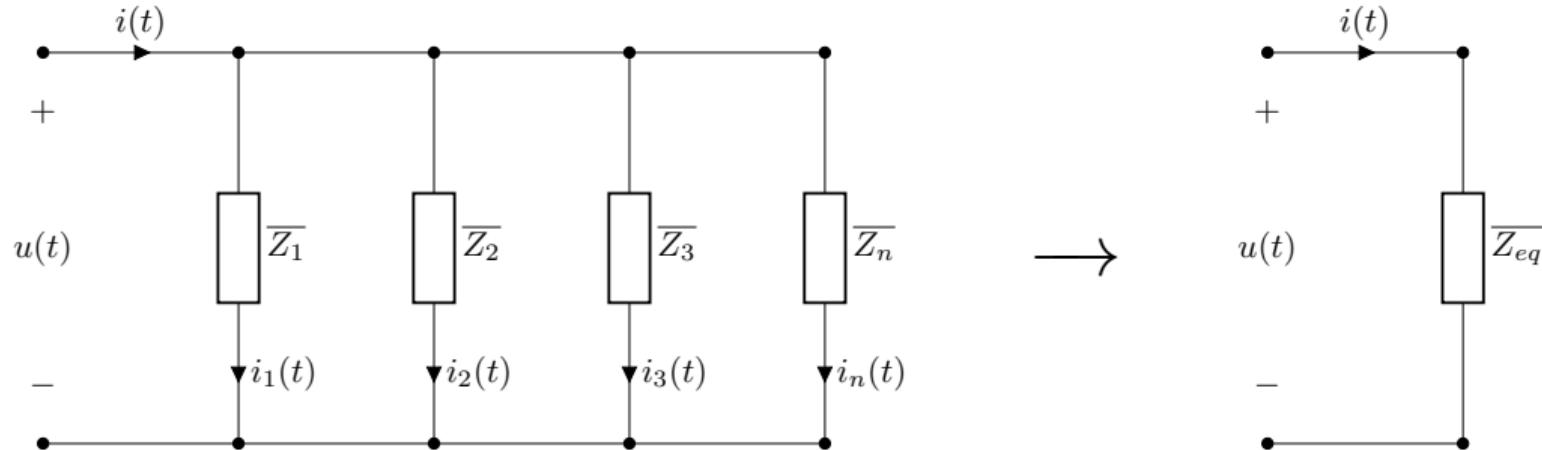
$$u_R(t) = 100\sqrt{2} \cdot \sin(1000t) \text{ V}$$

$$u_L(t) = 200\sqrt{2} \cdot \sin\left(1000t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ V}$$

$$u_C(t) = 100\sqrt{2} \cdot \sin\left(1000t - \frac{\pi}{2}\right) \text{ V}$$

Circuito paralelo general

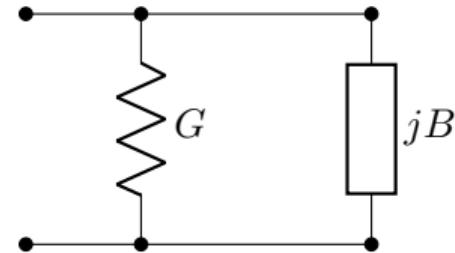
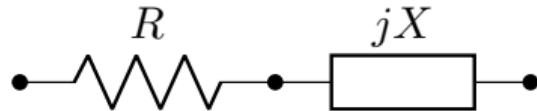
Recordatorio: los elementos asociados en **paralelo** están sometidos a la **misma tensión**



$$\bar{I} = \underbrace{\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \dots + \bar{I}_n}_{\uparrow} = \bar{U} \cdot \left(\frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_2} + \dots + \frac{1}{\bar{Z}_n} \right) = \frac{\bar{U}}{\bar{Z}_{eq}}$$

$$1LK \quad \frac{1}{\bar{Z}_{eq}} = \frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_2} + \dots + \frac{1}{\bar{Z}_n} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{\bar{Z}_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\bar{Z}_i}}$$

Impedancia y admitancia



$$\bar{U} = \bar{Z} \cdot \bar{I}$$

$$\bar{Z} = R + jX$$

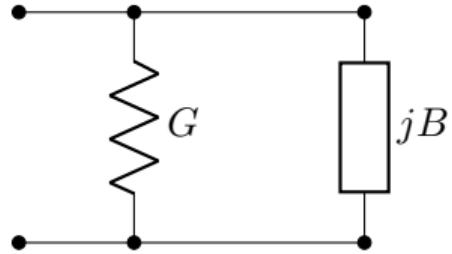
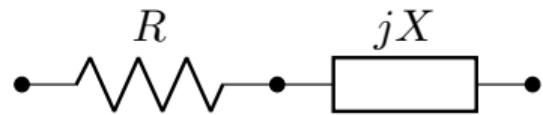
$$\bar{I} = \bar{Y} \cdot \bar{U}$$

$$\bar{Y} = G + jB$$

$$\boxed{\bar{Y} = \frac{1}{\bar{Z}} \rightarrow \begin{cases} |\bar{Y}| = \frac{1}{|\bar{Z}|} \\ \theta_Y = -\theta_Z \end{cases}}$$

Admitancia: facilidad que ofrece un circuito al paso de la corriente alterna

Impedancia y admitancia

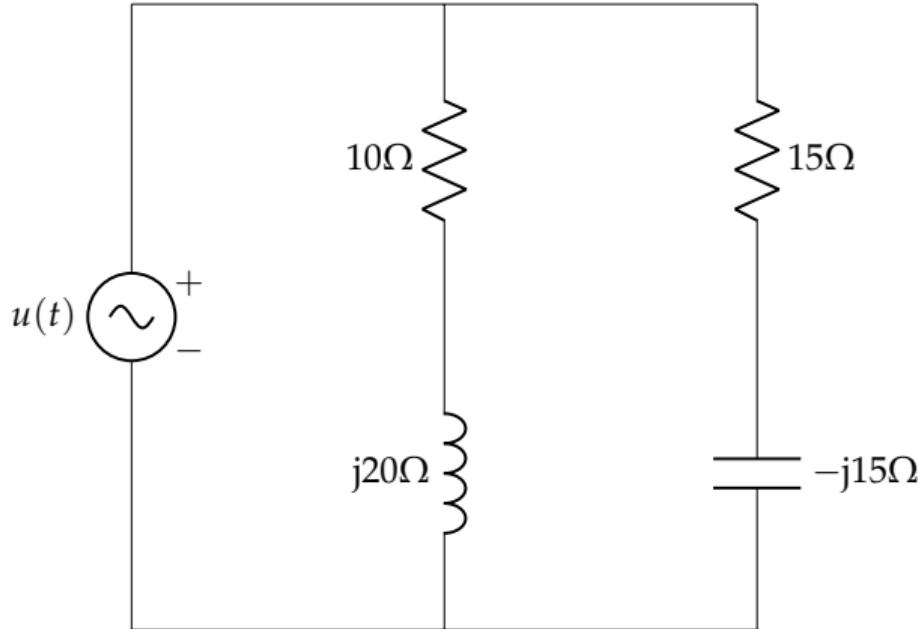


$$\bar{Z} = \frac{1}{G + jB} \rightarrow \begin{cases} R = \frac{G}{G^2 + B^2} \\ X = \frac{-B}{G^2 + B^2} \end{cases}$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{R + jX} \rightarrow \begin{cases} G = \frac{R}{R^2 + X^2} \\ B = \frac{-X}{R^2 + X^2} \end{cases}$$

Ejercicio

Calcular la impedancia y admitancia compleja equivalente del circuito de la figura



Solución: $\bar{Z} = 18,61 \angle 7,1250^\circ \Omega$, $\bar{Y} = 0,054 \angle -7,1250^\circ \Omega^{-1}$

(se recomienda dar hasta 4 decimales en los ángulos)

- 1 Formas de onda**
- 2 Onda senoidal**
- 3 Cálculo fasorial**
- 4 Respuesta de elementos pasivos a excitación senoidal**
- 5 Potencia en corriente alterna**
- 6 Teoremas**

Potencia en CA, expresión general

Tomemos la tensión como referencia de fases

Sin pérdida de generalidad, asumamos que el ángulo de la impedancia equivalente de un circuito es $\theta > 0$ (circuito **inductivo**): la corriente está retrasada respecto de la tensión

$$\begin{cases} u(t) = U_o \cos(\omega t) \\ i(t) = I_o \cos(\omega t - \theta) \quad (\text{circuito en retrazo}) \end{cases}$$

$$p(t) = u(t) \cdot i(t)$$

Potencia en CA, expresión general

conveniente reformular
producto de cosenos

$$\begin{aligned} p(t) &= \underbrace{U_o \cos(\omega t)}_{u(t)} \cdot \underbrace{I_o \cos(\omega t - \theta)}_{i(t)} = \underbrace{U_o \cdot I_o}_{\text{amplitud}} \cdot \cos(\omega t) \cdot \cos(\omega t - \theta) \stackrel{\downarrow}{=} \\ &= \frac{1}{2} \cdot U_o \cdot I_o \cdot [\cos(2\omega t - \theta) + \cos(\theta)] = \frac{U_o}{\sqrt{2}} \frac{I_o}{\sqrt{2}} \cdot [\cos(2\omega t - \theta) + \cos(\theta)] \\ &= \underbrace{U \cdot I}_{\substack{\text{valor} \\ \text{eficaz}}} \cdot [\cos(2\omega t - \theta) + \cos(\theta)] = \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \cos(\alpha - \beta) \\ &= U \cdot I \cdot [\cos(2\omega t) \cos(\theta) + \sin(2\omega t) \sin(\theta) + \cos(\theta)] \end{aligned}$$

$$p(t) = U \cdot I \cos(\theta) + U \cdot I \cos(\theta) \cos(2\omega t) + U \cdot I \sin(\theta) \sin(2\omega t)$$

Potencia en CA: potencia activa y potencia reactiva

En la expresión anterior, definimos dos términos:

potencia activa 'P' y potencia reactiva 'Q'

$$p(t) = U \cdot I \cos(\theta) + U \cdot I \cos(\theta) \cos(2\omega t) + U \cdot I \sin(\theta) \sin(2\omega t)$$

$$P = U \cdot I \cos \theta \quad Q = U \cdot I \sin \theta$$

$$p(t) = P \cdot [1 + \cos(2\omega t)] + Q \cdot \sin(2\omega t)$$

Pero, ¿qué significa que la potencia sea *activa* o *reactiva*? → Siguiente diapositiva

Potencia en CA: potencia disipada y potencia entretenida

Dado que $p(t)$ varía en el tiempo, sus **efectos netos** en el circuito tras cada ciclo pueden calcularse con el **valor medio** en un periodo:

$$P_m = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \left[P \int_0^T dt + P \int_0^T \cos(2\omega t) dt + Q \int_0^T \sin(2\omega t) dt \right] = \boxed{P}$$

- ▶ $P = UI \cos(\theta)$ es la **potencia neta que se disipa en la carga**, dado que el resto de la potencia $p(t)$ es fluctuante
(Unidades de P : W)
- ▶ $Q = UI \sin(\theta)$ es **potencia únicamente entretenida**, ya que es potencia almacenada y sucesivamente devuelta por las bobinas y condensadores (para los que $\sin(\theta) \neq 0$)
(Unidades de Q : VAr)

Potencia en CA, circuito resistivo

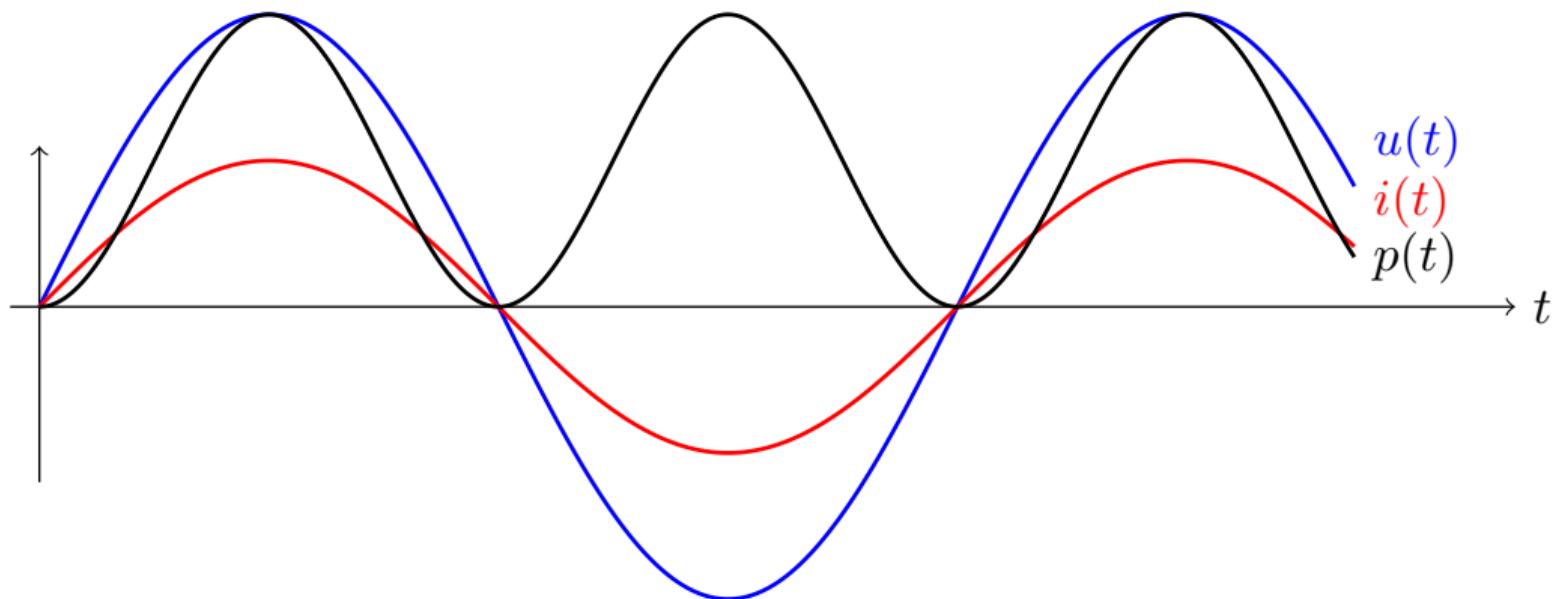
$$P = UI \underbrace{\cos \theta}_{=1} \quad Q = UI \sin \theta \rightarrow 0$$

$$p(t) = P \cdot [1 + \cos(2\omega t)] + Q \cdot \sin(2\omega t)$$

$$\bar{Z}_R = R \underline{/0^\circ} \rightarrow \theta = 0 \rightarrow \begin{cases} P = UI = \frac{U^2}{R} = I^2 R \\ Q = 0 \end{cases}$$

$$p(t) = P \cdot [1 + \cos(2\omega t)]$$

Potencia en CA, circuito resistivo



- ▶ Fluctúa al doble de frecuencia que la tensión y corriente
- ▶ Es siempre positiva
- ▶ Su valor medio es $P = UI \cos \theta = UI$

Potencia en CA, circuito inductivo puro

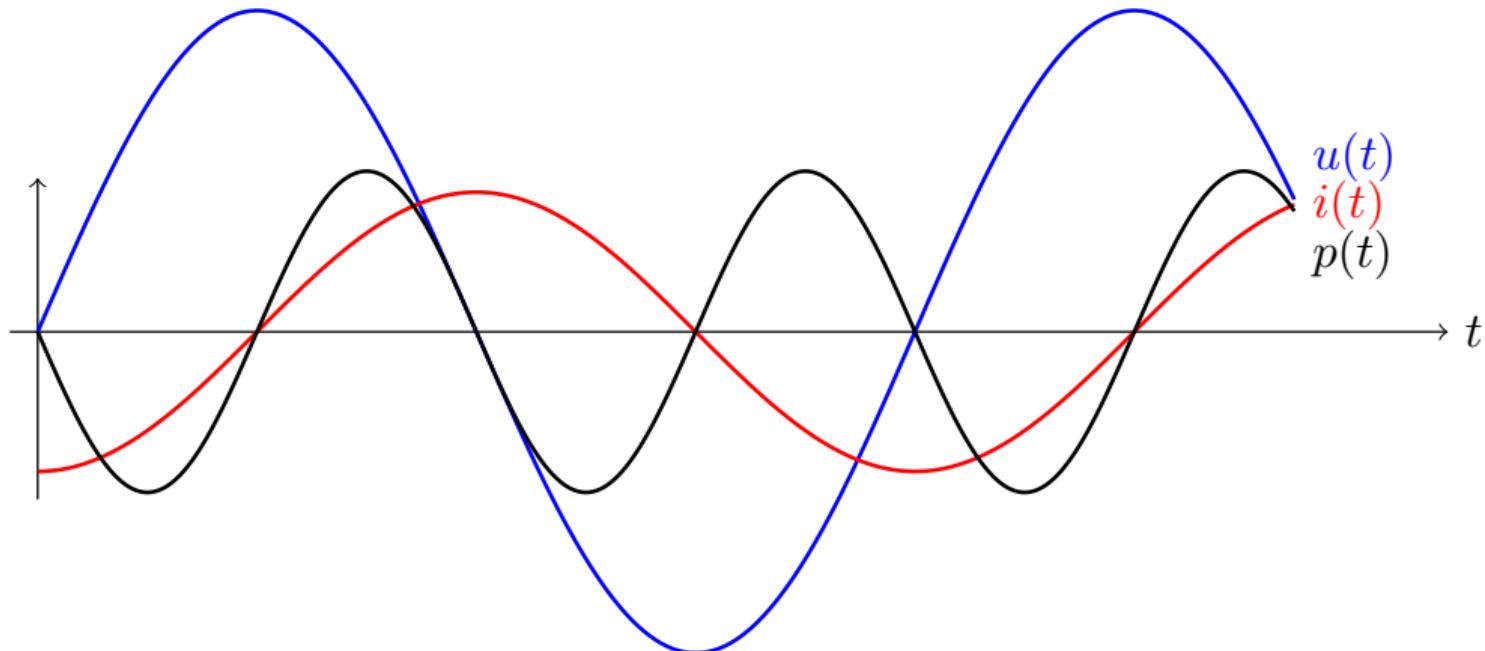
$$P = UI \cos \theta \xrightarrow{\theta=0} 0 \quad Q = UI \underbrace{\sin \theta}_{=1}$$

$$p(t) = P \cdot [1 + \cos(2\omega t)] + Q \cdot \sin(2\omega t)$$

$$\bar{Z}_L = \underline{\omega L / 90^\circ} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow \begin{cases} P = 0 \\ Q = UI = \frac{U^2}{\omega L} = I^2 \omega L \end{cases}$$

$$p(t) = Q \cdot \sin(2\omega t)$$

Potencia en CA, circuito inductivo puro



- ▶ Fluctúa al doble de frecuencia que la tensión y corriente
- ▶ Pasa por los ceros de tensión y corriente
- ▶ Su valor medio es nulo

Potencia en CA, circuito capacitivo puro

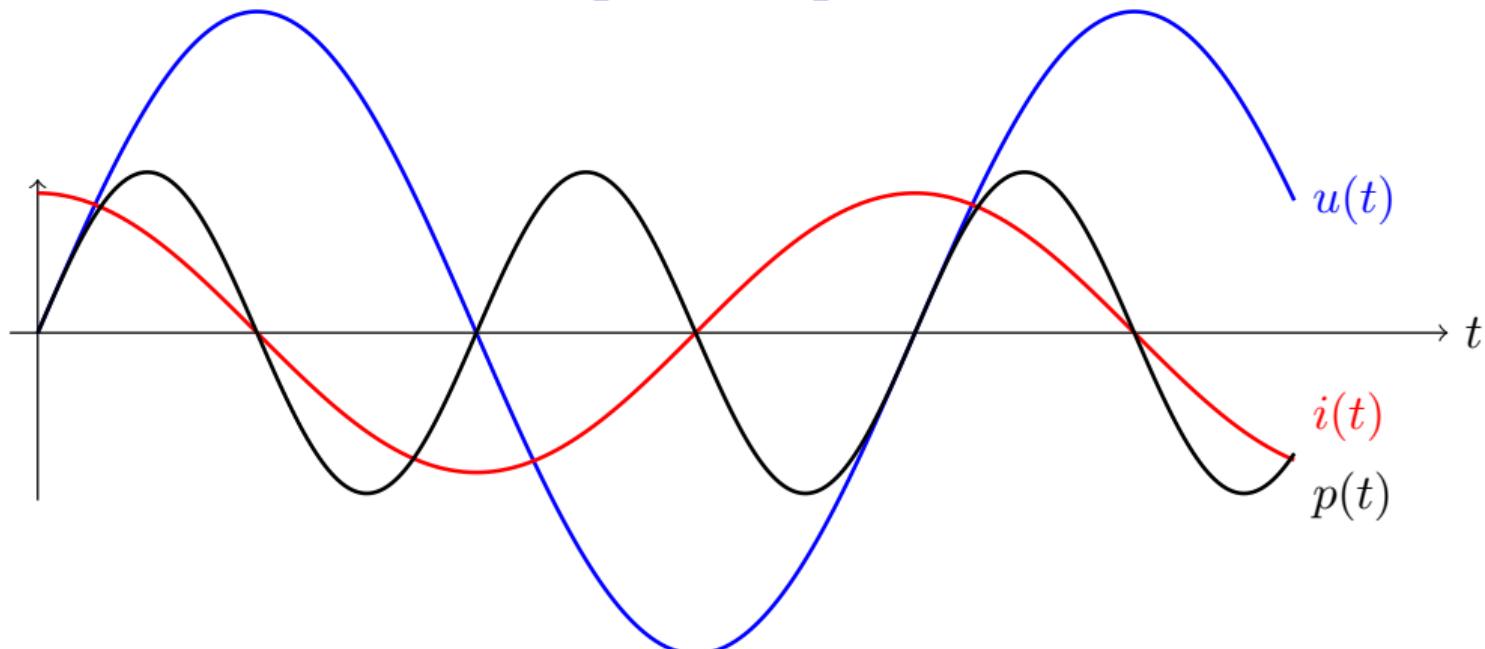
$$P = UI \cos \theta \xrightarrow{\theta=0} 0 \quad Q = UI \underbrace{\sin \theta}_{=-1}$$

$$p(t) = P \cdot [1 + \cos(2\omega t)] + Q \cdot \sin(2\omega t)$$

$$\bar{Z}_C = \frac{1}{\omega C} \angle -90^\circ \rightarrow \theta = -\frac{\pi}{2} \rightarrow \begin{cases} P = 0 \\ Q = -UI = -U^2\omega C = -\frac{I^2}{\omega C} \end{cases}$$

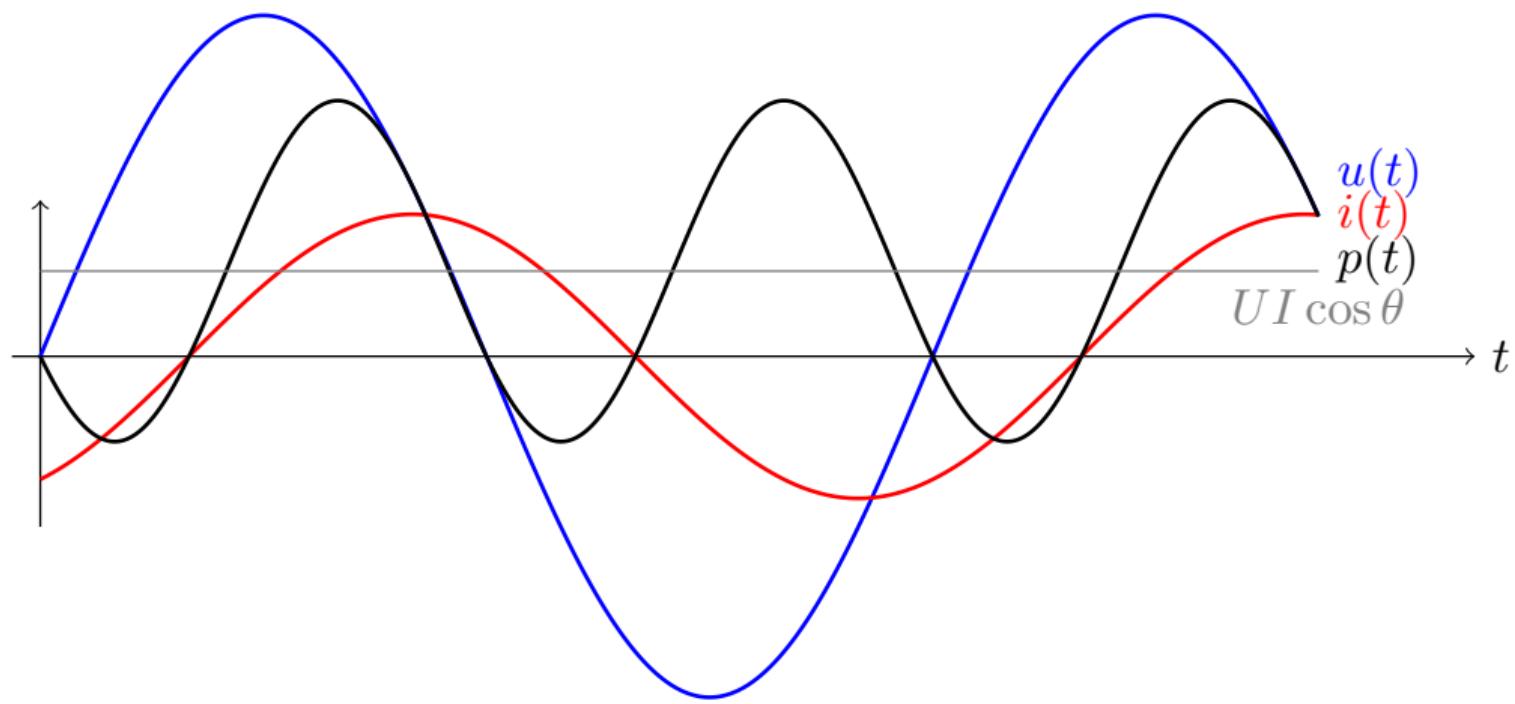
$$p(t) = Q \cdot \sin(2\omega t)$$

Potencia en CA, circuito capacitivo puro

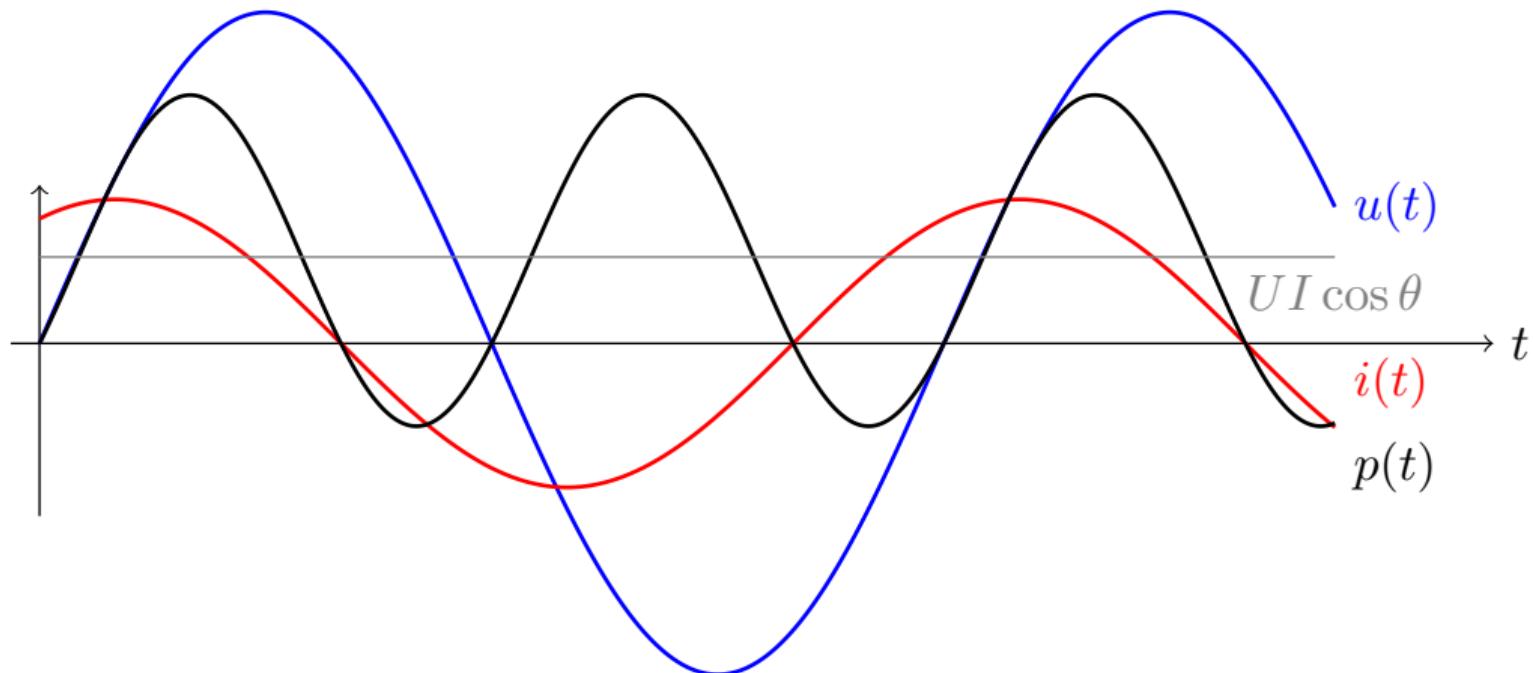


- ▶ Fluctúa al doble de frecuencia que la tensión y corriente
- ▶ Pasa por los ceros de tensión y corriente
- ▶ Su valor medio es nulo

Potencia en CA, circuito inductivo con pérdidas (RL)



Potencia en CA, circuito capacitivo con pérdidas (RC)

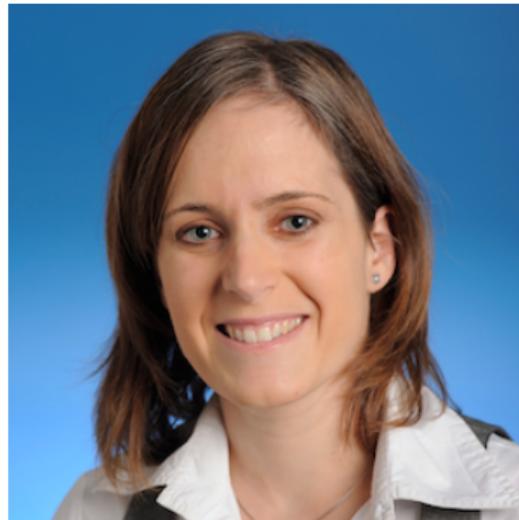


Interludio: pasado y presente de los sistemas eléctricos

Ms. Edith Clarke,
General Electric



Prof. Gabriela Hug,
ETH Zurich



Dr Vera Silva,
General Electric



Triángulo de potencias

- ▶ Potencia activa [W]

$$P = U \cdot I \cdot \cos(\theta) = R \cdot I^2$$

- ▶ Potencia reactiva [VAr]

$$Q = U \cdot I \cdot \sin(\theta) = X \cdot I^2$$

- ▶ Potencia aparente [VA]

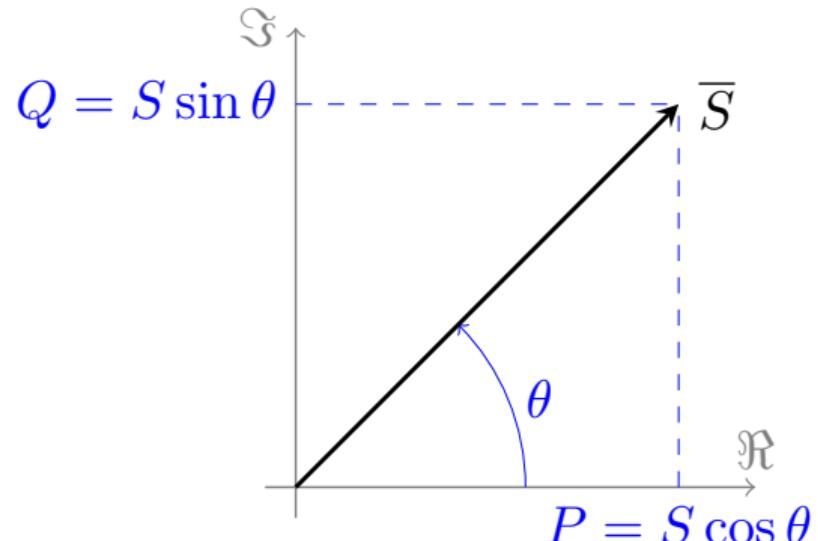
$$\bar{S} = P + jQ = \bar{U} \cdot \bar{I}^*$$

Demostración de la expresión para \bar{S} :

$$\bar{U} = U/\underline{0}$$

$$\bar{I} = I/\underline{-\theta} \quad (\text{circuito en retraso})$$

$$\begin{aligned}\bar{U} \cdot \bar{I}^* &= U/\underline{0} \cdot I/\underline{\theta} = UI/\underline{\theta} = \\ &= UI(\cos \theta + j \sin \theta) = P + jQ\end{aligned}$$



$$S = U \cdot I$$

$$\theta_S = \theta_Z = \theta$$

Triángulo de potencias

- ▶ Potencia activa [W]

$$P = U \cdot I \cdot \cos(\theta) = R \cdot I^2$$

- ▶ Potencia reactiva [VAr]

$$Q = U \cdot I \cdot \sin(\theta) = X \cdot I^2$$

- ▶ Potencia aparente [VA]

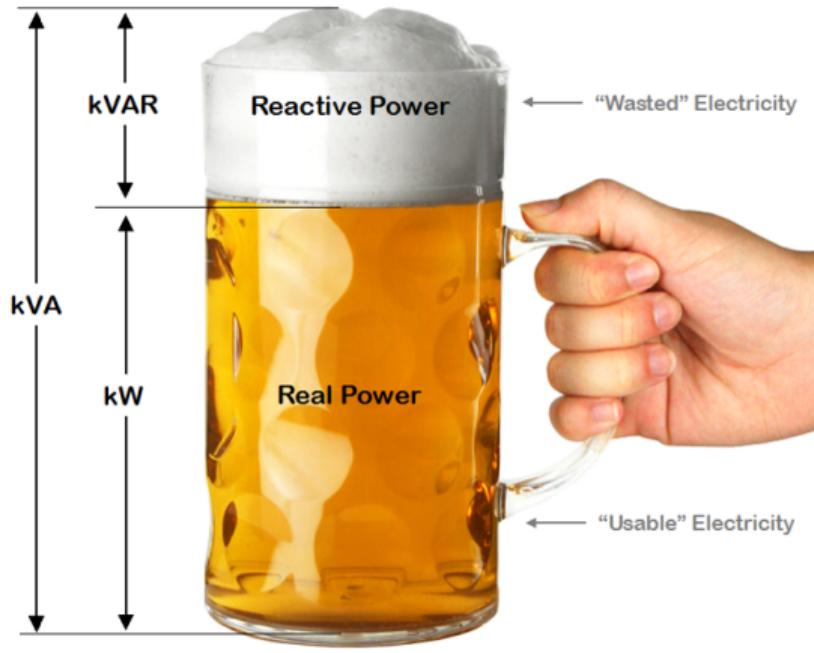
$$\bar{S} = P + jQ = \bar{U} \cdot \bar{I}^*$$

Demostración de la expresión para \bar{S} :

$$\bar{U} = U/\underline{0}$$

$$\bar{I} = I/\underline{-\theta} \quad (\text{circuito en retraso})$$

$$\begin{aligned}\bar{U} \cdot \bar{I}^* &= U/\underline{0} \cdot I/\underline{\theta} = UI/\underline{\theta} = \\ &= UI(\cos \theta + j \sin \theta) = P + jQ\end{aligned}$$



Potencia en elementos: resistencia

$$\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} P_R = R I^2 \\ Q_R = 0 \\ S_R = P_R \end{cases}$$

- ▶ Consume potencia activa
- ▶ No “consume” potencia reactiva

Potencia en elementos: inductancia

$$\theta = \pi/2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} P_L = 0 \\ Q_L = \omega L I^2 \\ \bar{S}_L = \omega L I^2 / \pi/2 \end{cases}$$

- ▶ No consume potencia activa
- ▶ “Consumo” potencia reactiva ($Q > 0$)
 - ▶ **Nota:** la potencia reactiva es potencia *entretenida*, no es potencia que se consuma
Pero, dado el convenio de signos, decimos que **las bobinas “consumen” Q** y **los condensadores “generan” Q** (ya que almacenan y devuelven energía al circuito en semiciclos opuestos)

Potencia en elementos: condensador

$$\theta = -\pi/2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} P_L = 0 \\ Q_C = -\omega C U^2 \\ \bar{S}_C = \omega C U^2 / -\pi/2 \end{cases}$$

- ▶ No consume potencia activa
- ▶ “Genera” potencia reactiva ($Q < 0$)
 - ▶ **Nota:** la potencia reactiva es potencia *entretenida*, no es potencia que se consuma
Pero, dado el convenio de signos, decimos que **las bobinas “consumen” Q** y **los condensadores “generan” Q** (ya que almacenan y devuelven energía al circuito en semiciclos opuestos)

Teorema de Boucherot

En un circuito con múltiples elementos, la potencia aparente total es la **suma de las potencias aparentes individuales**

(la potencia activa/reactiva total es la **suma de las potencias activas/reactivas individuales**)

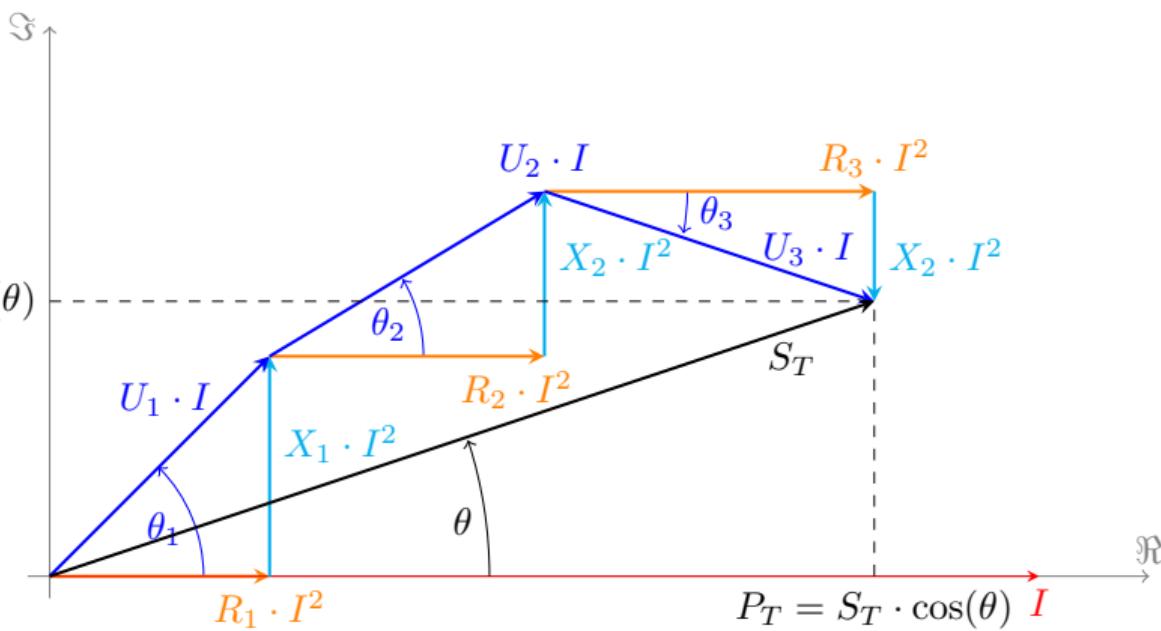
$$P_T + jQ_T = \sum_{i=1}^n (P_i + jQ_i)$$

$$\bar{S}_T = \sum_{i=1}^n \bar{S}_i$$

$$Q_T = S_T \cdot \sin(\theta)$$

$$P_T = \sum_{i=1}^n P_i$$

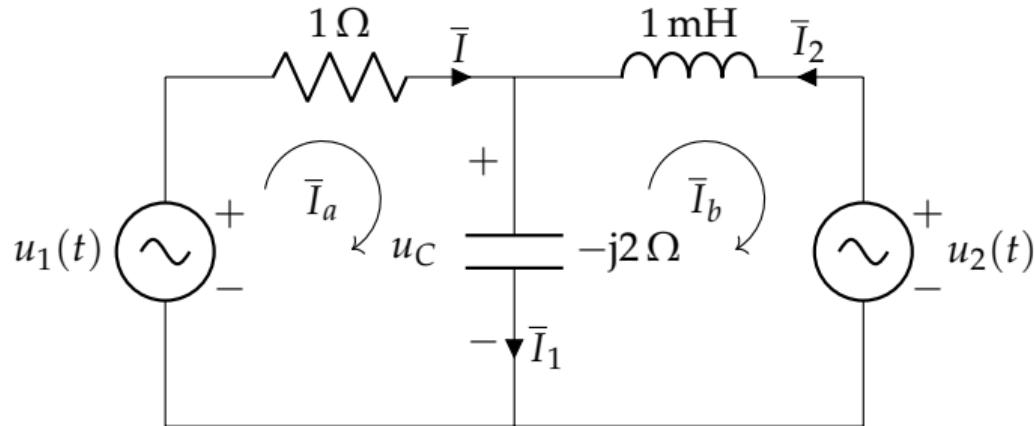
$$Q_T = \sum_{i=1}^n Q_i$$



$$P_T = S_T \cdot \cos(\theta) I$$

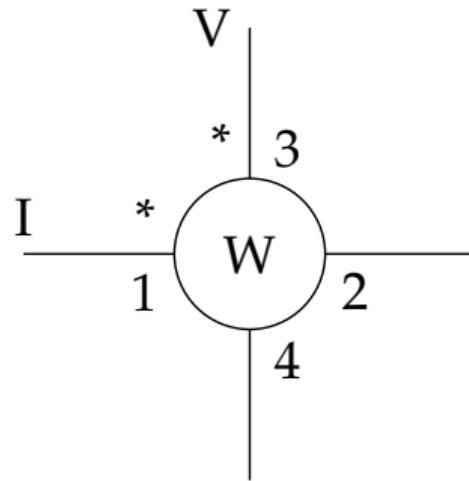
Ejercicio

Sabiendo que las fuentes de tensión del circuito de la figura vienen definidas por las formas de onda $u_1(t) = 10\sqrt{2} \cdot \cos(1000 \cdot t)$ V y $u_2(t) = 5\sqrt{2} \cdot \sin(1000 \cdot t)$ V, se debe calcular las potencias de cada elemento, así como el balance de potencias del circuito



Solución: aquí

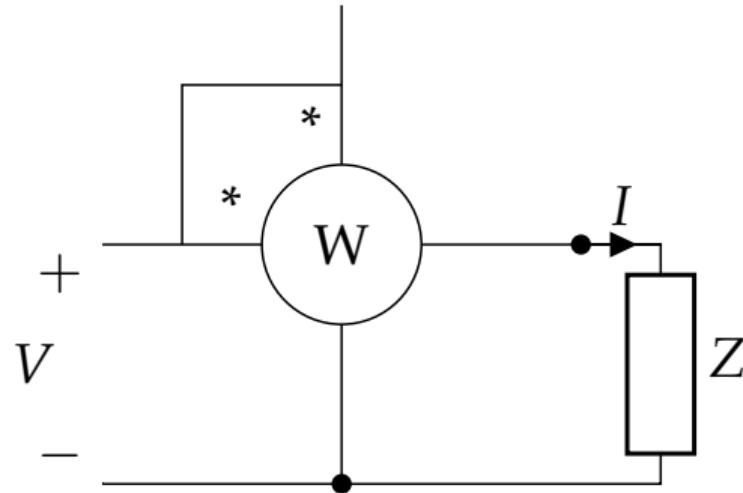
Medida de potencia: vatímetro



Vatímetro: equipo de medida de 4 terminales (un par para tensión, un par para corriente)

$$W = \underbrace{\bar{I}_{1,2} \bullet \bar{U}_{3,4}}_{\text{producto escalar}} = I_{1,2} \cdot U_{3,4} \cdot \cos(\widehat{\bar{I}_{1,2}, \bar{U}_{3,4}})$$

Medida de potencia



Habitualmente se emplea con 3 terminales, cortocircuitando terminales con *

$$W = |V| \cdot |I| \cdot \cos(\theta_V - \theta_I) = P_Z$$

- ① Formas de onda
- ② Onda senoidal
- ③ Cálculo fasorial
- ④ Respuesta de elementos pasivos a excitación senoidal
- ⑤ Potencia en corriente alterna
Factor de potencia: importancia y mejora
- ⑥ Teoremas

Factor de potencia

El factor de potencia (*f.d.p.*), $\cos(\theta)$, representa la aportación de potencia activa dentro de la potencia aparente:

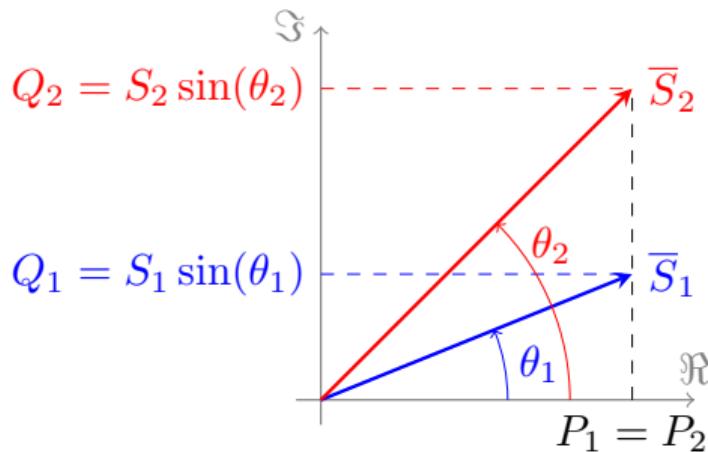
$$\cos(\theta) = \frac{P}{S}$$

Se dice que:

- ▶ *fdp en retraso* cuando el circuito tiene carácter inductivo (la intensidad va retrasada respecto a la tensión)
- ▶ *fdp en adelanto* cuando el circuito tiene carácter capacitivo (la intensidad va adelantada respecto a la tensión)

Factor de potencia: importancia y mejora

Sean dos sistemas con **misma tensión y potencia activa**, y factores de potencia $\cos \theta_2 < \cos \theta_1$ ($Q_2 > Q_1$)



- ▶ El sistema 2 requiere **mayor potencia aparente** (generador mayor) para alimentar la misma potencia activa:

$$\left(\frac{P}{\cos \theta_1} = S_1 \right) < \left(S_2 = \frac{P}{\cos \theta_2} \right)$$

- ▶ El sistema 2 requiere **mayor sección de cable** para transportar la misma potencia activa:

$$\left(\frac{P}{U \cos \theta_1} = I_1 \right) < \left(I_2 = \frac{P}{U \cos \theta_2} \right)$$

“Generación” local de reactiva

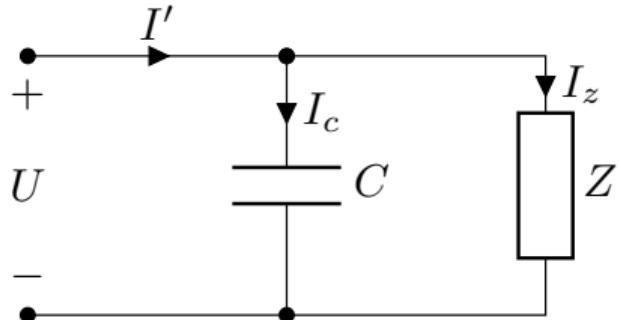
- ▶ Comúnmente, el factor de potencia es **inductivo** (máquinas eléctricas industriales)
- ▶ La red debe suministrar potencia reactiva inductiva (influye en secciones de líneas y tamaños de generadores → **mayor coste**)
- ▶ Es necesario mejorar **localmente** el factor de potencia

Solución común: utilizar **bancos de condensadores** como suministradores de Q

Cálculo de la capacidad para compensación de reactiva

Sea una carga de potencia activa P_z , potencia reactiva Q_z , factor de potencia $\cos \theta$

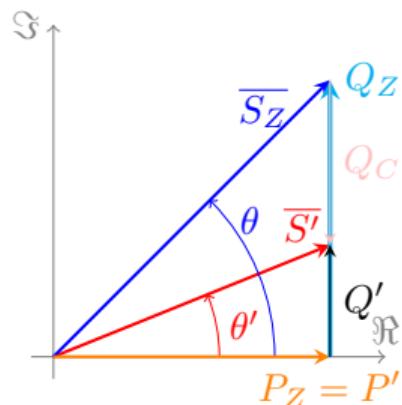
Se desea **mejorar el factor de potencia** a $\cos \theta' > \cos \theta$, manteniendo la potencia P_z



$$P' = P_z$$

$$Q' = Q_c + Q_z \quad (Q' < Q_z)$$

$$\bar{I}' = \bar{I}_c + \bar{I}_z \quad (I' < I_z)$$



$$Q_z = P_z \tan \theta$$

$$Q' = P_z \tan \theta'$$

$$|Q_c| = Q_z - Q' = P_z(\tan \theta - \tan \theta')$$

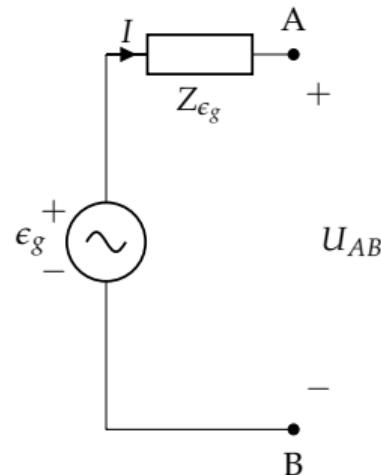
$$|Q_c| = \underbrace{X_c \cdot I_c^2}_{= \frac{1}{\omega C}} = \omega C U^2 \rightarrow C = \boxed{\frac{P_z(\tan \theta - \tan \theta')}{\omega U^2}}$$

- 1** Formas de onda
- 2** Onda senoidal
- 3** Cálculo fasorial
- 4** Respuesta de elementos pasivos a excitación senoidal
- 5** Potencia en corriente alterna
- 6** Teoremas

Equivalencia de fuentes

Sólo es posible establecer equivalencia entre **fuentes reales**

(la deducción es equivalente a la ya vista para corriente continua)

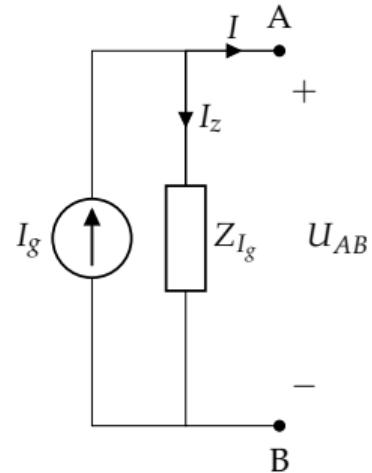


$$\bar{Z}_g = \bar{Z}_{\epsilon_g} = \bar{Z}_{I_g}$$

$$\bar{\epsilon}_g = \bar{Z}_g \cdot \bar{I}_g$$

$$\bar{I}_g = \frac{\bar{\epsilon}_g}{\bar{Z}_g}$$

$$\bar{U}_{AB} = \bar{\epsilon}_g - \bar{Z}_{\epsilon_g} \cdot \bar{I}$$



$$\bar{I} = \bar{I}_g - \frac{\bar{U}_{AB}}{\bar{Z}_{I_g}}$$

- ① Formas de onda
- ② Onda senoidal
- ③ Cálculo fasorial
- ④ Respuesta de elementos pasivos a excitación senoidal
- ⑤ Potencia en corriente alterna
- ⑥ Teoremas

Principio de superposición

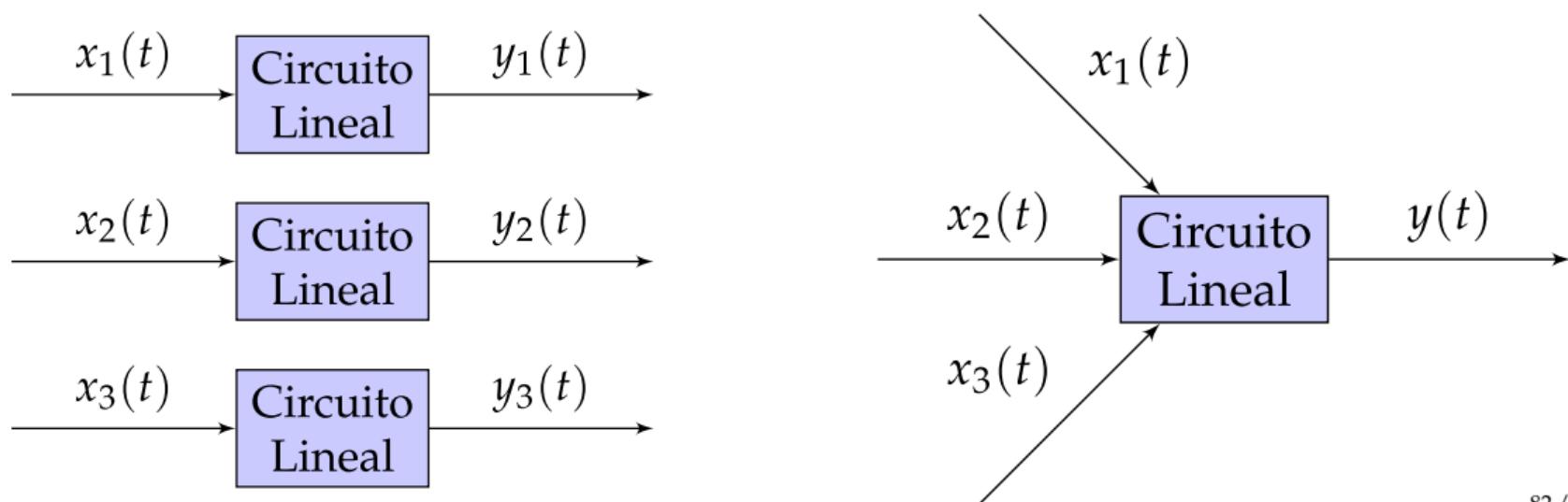
Teoremas de Thévenin y Norton

Teorema de máxima transferencia de potencia

Superposición

La respuesta de un **circuito lineal** a varias fuentes de excitación actuando simultáneamente es igual a la **suma de las respuestas** que se tendrían cuando actuase cada una de ellas por separado

$$y(t) = \sum_i y_i(t)$$



Análisis de un circuito mediante superposición

Procedimiento

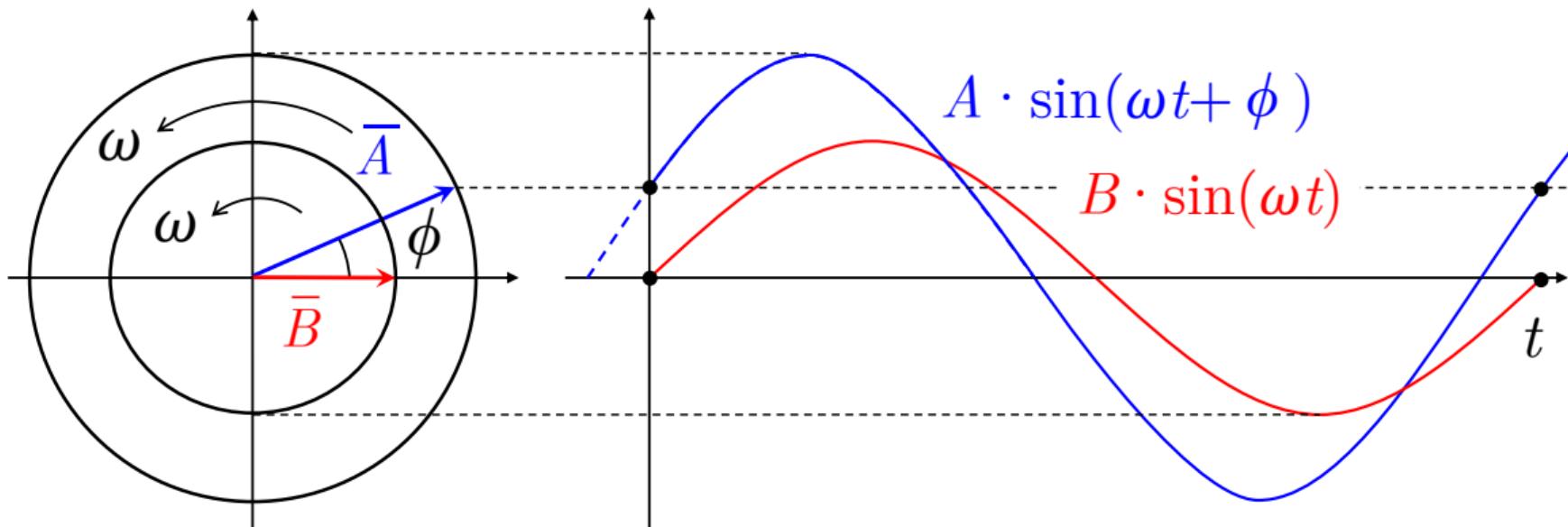
- ① Se **eliminan** todas las **fuentes independientes** del circuito menos una
 - ▶ Las fuentes de **tensión** se sustituyen por un **cortocircuito** ($U = 0$)
 - ▶ Las fuentes de **corriente** se sustituyen por un **circuito abierto** ($I = 0$)
 - ▶ Las fuentes **dependientes no se modifican**
- ② Se analiza el circuito, obteniendo la **respuesta individual** a la fuente que permanece activa
- ③ Se repite este procedimiento para **cada una de las fuentes independientes** del circuito
- ④ La respuesta total del circuito es la **suma de las respuestas individuales**

Análisis de un circuito mediante superposición

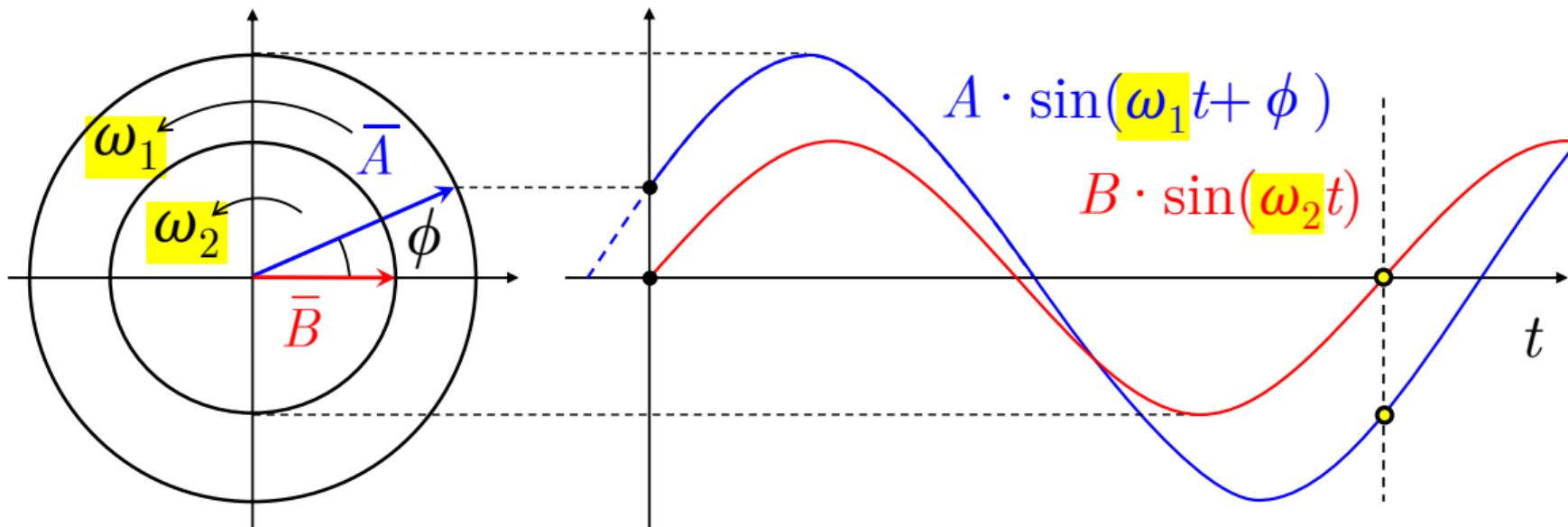
Observaciones

- ▶ Siempre hay que **aplicar este método** cuando en un circuito conviven **fuentes de distinta frecuencia** (o fuentes de corriente continua y corriente alterna)
- ▶ En el caso de fuentes de **corriente alterna senoidal**:
 - ▶ Para cada frecuencia, las bobinas y condensadores presentarán **diferente reactancia**, por lo que habrá que calcularlas
 - ▶ La respuesta total debe expresarse en el **dominio del tiempo**
(NO se pueden **sumar fasores** que corresponden a **frecuencias diferentes**)
- ▶ En el primer paso del procedimiento, se pueden **agrupar las fuentes que funcionan a la misma frecuencia** y calcular la respuesta del circuito en esa frecuencia

Recordatorio: el cálculo fasorial es válido para señales de igual ω



...pero NO para señales de distinta frecuencia ($\omega_1 \neq \omega_2$)



Principio de superposición y potencia

El principio de superposición aplica a tensiones y corrientes, pero **NO a potencias** (ya que potencia es el resultado de una **operación no lineal**, el producto de corriente y tensión)

Supongamos $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$:

$$\begin{aligned} p(t) &= R \cdot i^2(t) = \\ &= R \cdot [i_1(t) + i_2(t)]^2 = \\ &= R \cdot [i_1^2(t) + i_2^2(t) + 2 \cdot i_1(t) \cdot i_2(t)] \end{aligned}$$

$$p(t) \neq p_1(t) + p_2(t)$$

Principio de superposición y potencia

- Cuando las señales son **ortogonales en un periodo*** se pueden sumar las **potencias medias** de cada circuito:

$$P = \sum_i P_i$$

- Ejemplos de señales ortogonales:
senoidales con diferente frecuencia, una senoidal con una continua...

*Dos señales son ortogonales si cumplen la siguiente propiedad:

$$\langle f_1, f_2 \rangle_T = \int_T f_1(t) \cdot f_2(t) dt = 0$$

Principio de superposición y potencia

- Cuando las señales son **ortogonales en un periodo**, se pueden sumar las **potencias medias** de cada circuito:

$$\begin{aligned} P_m &= \frac{1}{T} \int_T p(t) dt = \\ &= R \cdot \frac{1}{T} \left[\int_T i_1^2(t) dt + \int_T i_2^2(t) dt + \underbrace{\int_T 2 \cdot i_1(t) \cdot i_2(t) dt}_{\text{señales ortogonales}} \right] = \\ &= R \cdot \left(\underbrace{I_1^2 + I_2^2}_{\text{valores eficaces}} \right) = \boxed{P_1 + P_2} \end{aligned}$$

Principio de superposición y potencia: ejemplo

Teniendo en cuenta la propiedad de ortogonalidad, si en un circuito actúan **fuentes de continua** y **varias fuentes de alterna** de **distinta frecuencia** entre ellas:

- ▶ Potencia disipada en una **resistencia**:

$$P_R = R \cdot \left(I_{cc}^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots + I_n^2 \right)$$

- ▶ **Potencia entregada por fuente de tensión** de frecuencia ω_1 :

$$P = EI_1 \cos(\theta_{i_1})$$

- ▶ **Potencia entregada por fuente de corriente** de frecuencia ω_2 :

$$P = U_2 I_g \cos(\theta_{u_2})$$

Potencia entregada:

solo actúa la componente de la intensidad/tensión que tiene **la misma frecuencia** que el generador de tensión/corriente

- ① Formas de onda
- ② Onda senoidal
- ③ Cálculo fasorial
- ④ Respuesta de elementos pasivos a excitación senoidal
- ⑤ Potencia en corriente alterna
- ⑥ Teoremas

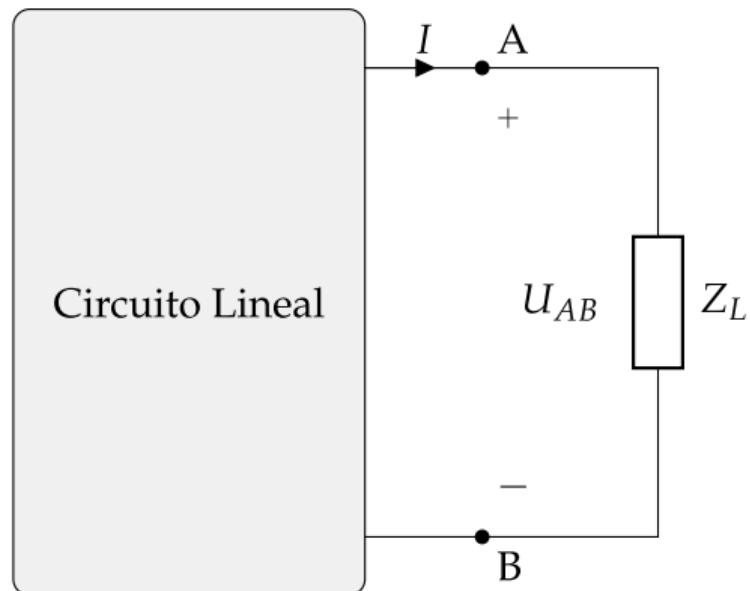
Principio de superposición

Teoremas de Thévenin y Norton

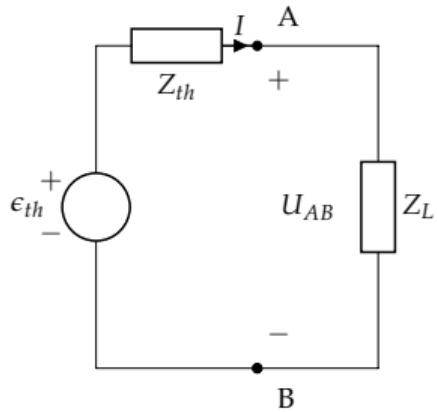
Teorema de máxima transferencia de potencia

Teorema de Thévenin

Cualquier **red lineal** compuesta por elementos activos y pasivos puede sustituirse, desde el punto de vista de sus terminales externos A-B, por una **fuente de tensión** (generador de Thévenin, ϵ_{th}) en **serie** con una impedancia (impedancia de Thévenin, Z_{th})



Cálculo del equivalente de Thévenin



- ▶ Circuito abierto ($Z_L \rightarrow \infty$, $U_{AB} = U_{oc}$)

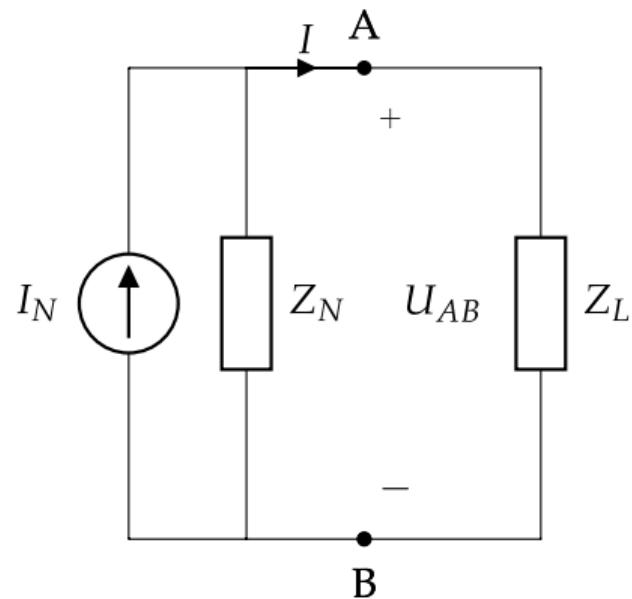
$$\epsilon_{th} = U_{oc} \quad (\text{SC} \equiv \text{short circuit}, \quad \text{OC} \equiv \text{open circuit})$$

- ▶ Cortocircuito ($Z_L = 0$, $I = I_{sc}$)

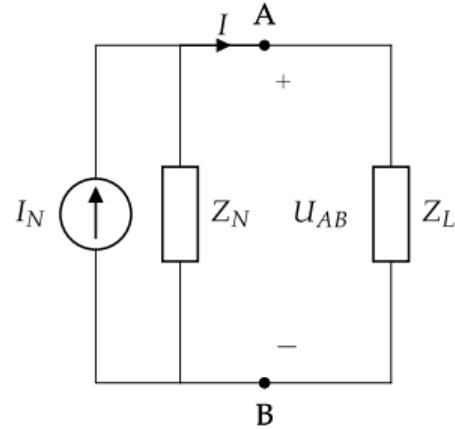
$$Z_{th} = \frac{\epsilon_{th}}{I_{sc}} = \frac{U_{oc}}{I_{sc}}$$

Teorema de Norton

Cualquier **red lineal** compuesta por elementos activos y pasivos puede sustituirse, desde el punto de vista de sus terminales externos A-B, por una **fuente de corriente** (generador de Norton, I_N) en **paralelo** con una impedancia (impedancia de Norton, Z_N)



Cálculo del equivalente de Norton



- Cortocircuito ($Z_L = 0$, $I = I_{sc}$)

$$I_N = I_{sc} \quad (\text{SC} \equiv \text{short circuit}, \quad \text{OC} \equiv \text{open circuit})$$

- Circuito abierto ($Z_L \rightarrow \infty$, $U_{AB} = U_{oc}$)

$$Z_N = \frac{U_{oc}}{I_N} = \frac{U_{oc}}{I_{sc}}$$

Cálculo de impedancia Thévenin/Norton

- ▶ Siempre podemos calcular la impedancia Thévenin/Norton **calculando tanto U_{oc} como I_{sc}** , pero en ocasiones **no es sencillo** calcular ambas magnitudes
- ▶ Existe un método alternativo:
 - ▶ Si el circuito **NO** contiene fuentes dependientes:
Se puede calcular **apagando** todos los **generadores** y obteniendo la impedancia equivalente
 - ▶ Si el circuito contiene fuentes dependientes:
Una **fuente dependiente no se puede apagar**, porque no tiene una excitación autónoma (depende de lo que está ocurriendo en otra parte del circuito)
Es **necesario** conectar un **generador de prueba** a la salida del circuito y obtener la relación entre tensión y corriente de este generador

- ① Formas de onda
- ② Onda senoidal
- ③ Cálculo fasorial
- ④ Respuesta de elementos pasivos a excitación senoidal
- ⑤ Potencia en corriente alterna
- ⑥ Teoremas

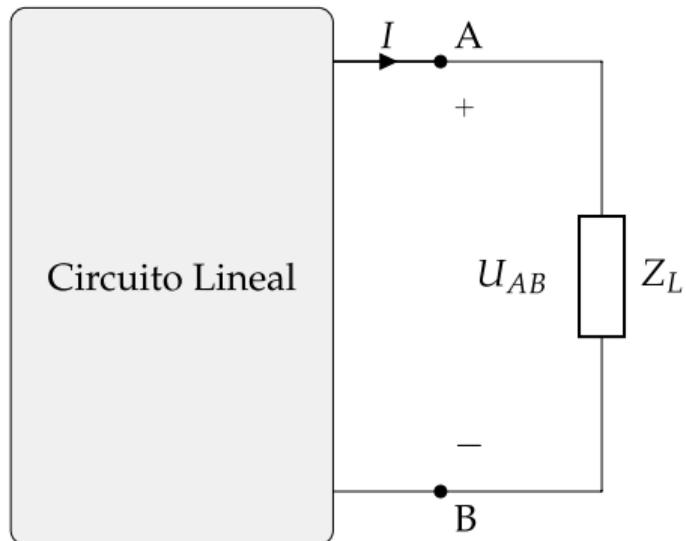
Principio de superposición

Teoremas de Thévenin y Norton

Teorema de máxima transferencia de potencia

Máxima transferencia de potencia

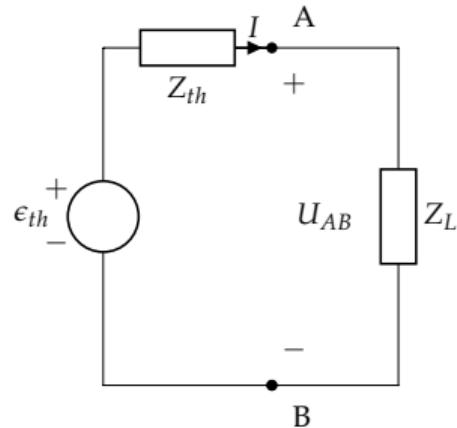
¿Qué impedancia \bar{Z}_L hay que conectar en los terminales A-B para que el circuito entregue la **máxima potencia posible**?



Se aplica el **equivalente de Thévenin** (siguiente diapositiva)

Máxima transferencia de potencia: ecuaciones

Calculamos la **potencia activa en la impedancia** de carga \bar{Z}_L :



$$\begin{aligned}\bar{Z}_{th} &= R_{th} + jX_{th} \\ \bar{Z}_L &= R_L + jX_L\end{aligned}$$

$$\bar{I} = \frac{\bar{\epsilon}_{th}}{\bar{Z}_{th} + \bar{Z}_L} \rightarrow |\bar{I}| = \frac{\epsilon_{th}}{|\bar{Z}_{th} + \bar{Z}_L|}$$

$$P_L = I^2 \cdot R_L$$

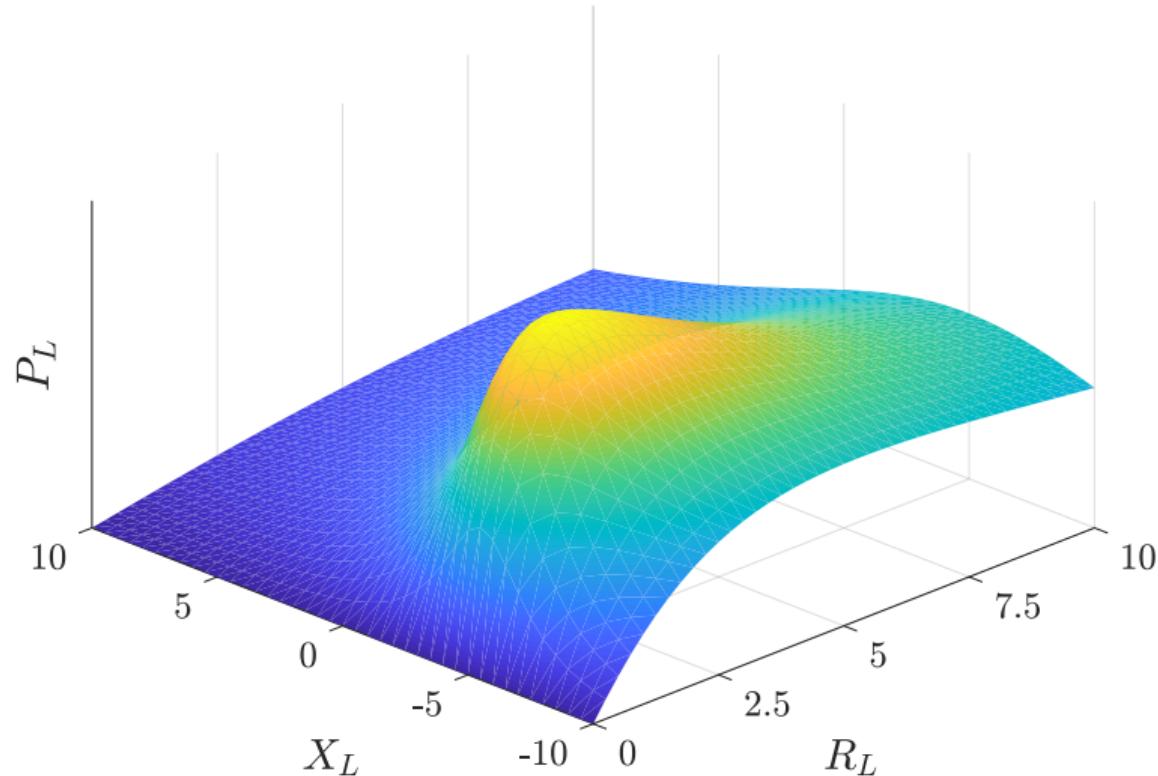
$$P_L = \frac{\epsilon_{th}^2}{|\bar{Z}_{th} + \bar{Z}_L|^2} \cdot R_L$$

Las condiciones de máximo son:

$$\boxed{\frac{\partial P_L}{\partial X_L} = 0, \quad \frac{\partial P_L}{\partial R_L} = 0}$$

Máxima transferencia de potencia: ejemplo gráfico

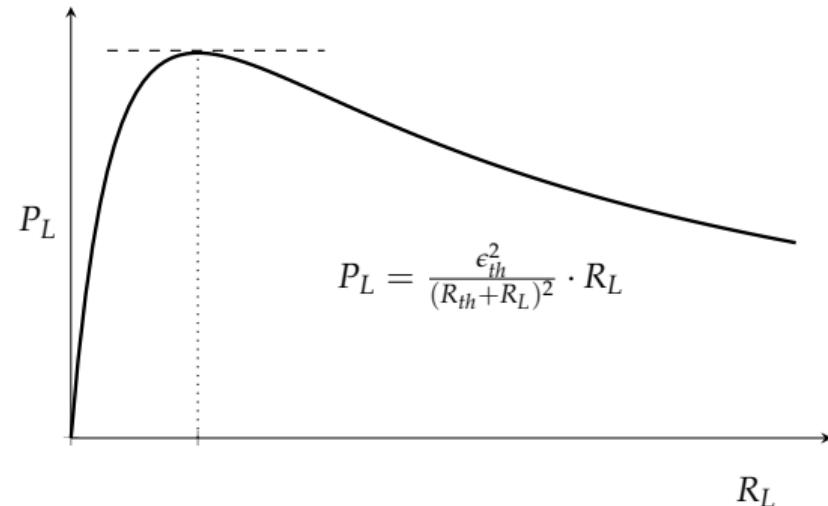
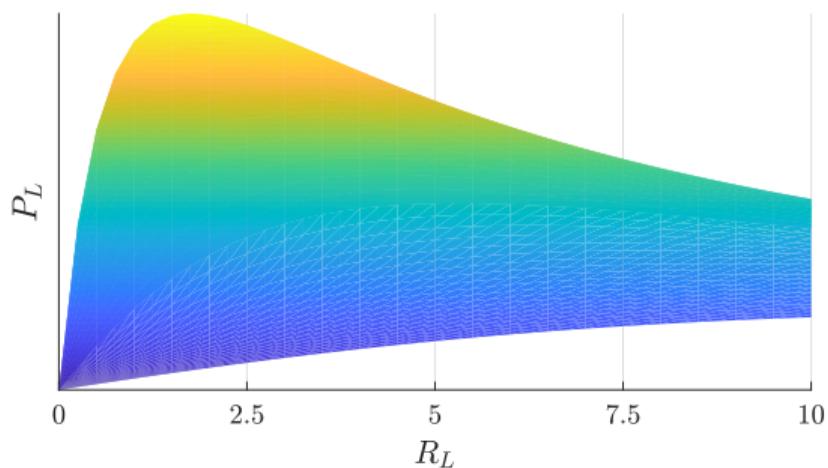
Ejemplo para $R_{th} = 1,25 \Omega$ y $X_{th} = 5 \Omega$:



Máxima transferencia de potencia: ejemplo gráfico

Ejemplo para $R_{th} = 1,25 \Omega$ y $X_{th} = 5 \Omega$:

Si tomamos la **vista perpendicular al eje de ' R_L '**, tenemos una gráfica cuyo límite superior es la curva que vimos en el Tema 1:



Máxima transferencia de potencia: reactancia

A partir de la expresión de potencia en la carga...

$$P_L = \frac{\epsilon_{th}^2}{|\bar{Z}_{th} + \bar{Z}_L|^2} \cdot R_L$$

...calculamos la derivada parcial respecto de la reactancia:

regla de
la cadena

$$\frac{\partial P_L}{\partial X_L} \stackrel{\downarrow}{=} \epsilon_{th}^2 \cdot R_L \cdot \left[\frac{-1}{[(R_L + R_{th})^2 + (X_L + X_{th})^2]^2} \cdot 2 \cdot (X_L + X_{th}) \right]$$

Aplicamos la **condición de máximo** y obtenemos un resultado parcial:

$$\frac{\partial P_L}{\partial X_L} = 0 \Rightarrow \boxed{X_L = -X_{th}}$$

Máxima transferencia de potencia: resistencia

Simplificamos la expresión de la potencia teniendo en cuenta el resultado anterior ($X_L = -X_{th}$):

$$P_L = \frac{\epsilon_{th}^2}{(R_{th} + R_L)^2} \cdot R_L$$

Calculamos la derivada parcial respecto de la resistencia:

derivada de
un producto

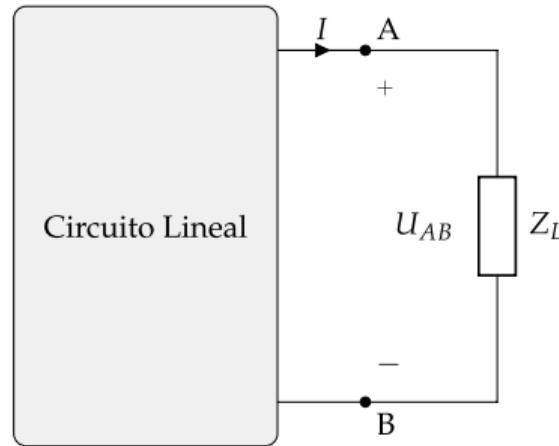
$$\frac{\partial P_L}{\partial R_L} \stackrel{\downarrow}{=} \epsilon_{th}^2 \cdot \left[\frac{1}{(R_L + R_{th})^2} - 2 \cdot \frac{R_L}{(R_L + R_{th})^3} \right] = \frac{\epsilon_{th}^2 \cdot (R_{th} - R_L)}{(R_L + R_{th})^3}$$

Nuevamente, aplicamos la **condición de máximo** y obtenemos la resistencia:

$$\frac{\partial P_L}{\partial R_L} = 0 \Rightarrow R_L = R_{th}$$

Impedancia de carga (o impedancias “adaptadas”)

Dado un circuito lineal (del que podemos calcular su equivalente de Thévenin)...

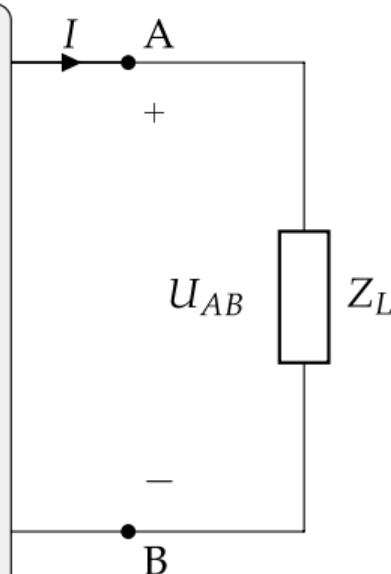


...la **impedancia de carga** que hay que conectar entre sus terminales A-B para obtener la máxima potencia disponible es:

$$\overline{Z}_L = \overline{Z}_{th}^* = R_{th} - j X_{th}$$

Máxima potencia disponible

La **máxima potencia** que puede entregarse a la carga es:



$$\left. \begin{aligned} \bar{Z}_L &= \bar{Z}_{th}^* \\ P_L &= \frac{\epsilon_{th}^2}{|\bar{Z}_{th} + \bar{Z}_L|^2} \cdot R_L \end{aligned} \right\} \rightarrow P_L = \frac{\epsilon_{th}^2}{4 \cdot R_{th}}$$

Importante

Esta expresión es **válida únicamente** para calcular la **máxima transferencia** de potencia

(no aplica para calcular la potencia disipada por una impedancia genérica \bar{Z}_L , únicamente aplica para $\bar{Z}_L = \bar{Z}_{th}^*$)

Interludio: mercado mayorista de electricidad

