Ejercicio 12 de la colección de problemas

Enunciado:

Un generador de corriente alterna monofásica ($f = 50\,\text{Hz}$) alimenta a dos cargas a través de una línea de cobre. Esta línea, de resistividad $\rho = 21\,\text{m}\Omega\,\text{mm}^2/\text{m}$, tiene una longitud de 100 m y una sección de $16\,\text{mm}^2$. Las dos cargas, cuya tensión de alimentación es de 230 V, son dos motores, uno con potencia de 7 kW y f.d.p. de 0,65, y otro con una potencia de 5 kW y f.d.p. de 0,85. Con esta información, se pide calcular:

- Triángulo de potencias de cada carga y del conjunto de ambas.
- Valor eficaz de las corrientes en cada carga y de la corriente total.
- Triángulo de potencias del generador.
- Valor eficaz de la tensión en bornes del generador.
- Capacidad del condensador a instalar en bornes de las cargas para mejorar el factor de potencia a 0,95.
- Valor eficaz de la corriente entregada por el generador una vez instalado el condensador.
- Triángulo de potencias del generador una vez instalado el condensador.

Solución:

Las potencias del motor 1 son:

$$\begin{aligned}
P_1 &= 7000\,\text{W} \\
Q_1 &= P_1\ \tan(\phi_1) = 7000 \cdot \tan(\arccos(0{,}65)) = 8183{,}91\,\text{VA}_\text{r} \\
S_1 &= \frac{P_1}{\cos(\phi_1)} = \frac{7000}{0{,}65} = 10\,769{,}23\,\text{VA}
\end{aligned}$$

y las del motor 2:

$$\begin{aligned}
P_2 &= 5000\,\text{W} \\
Q_2 &= P_5\ \tan(\phi_2) = 5000 \cdot \tan(\arccos(0{,}85)) = 3098{,}72\,\text{VA}_\text{r} \\
S_2 &= \frac{P_2}{\cos(\phi_2)} = \frac{5000}{0{,}85} = 5882{,}53\,\text{VA}
\end{aligned}$$

Por el teorema de Boucherot, la potencia total de las cargas es:

$$\begin{aligned}
P_T &= P_1 + P_2 = 12\,000\,\text{W} \\
Q_T &= Q_1 + Q_2 = 11\,282{,}63\,\text{VA}_\text{r} \\
S_T &= \sqrt{P_T^2 + Q_T^2} = 16\,471{,}12\,\text{VA} \neq S_1 + S_2 \ \ \text{(la suma debe ser \underline{fasorial})}
\end{aligned}$$

por lo que la instalación conjunta tiene un f.d.p. de:

$$\text{f.d.p.}_{total} = \frac{P_T}{S_T} = \frac{12000}{16471{,}12} = 0{,}7285$$

Usando la definición de potencia activa, se obtienen los valores eficaces de las corrientes:

$$I_1 = \frac{P_1}{U\ \cos(\phi_1)} = \frac{7000}{230 \cdot 0{,}65} = 46{,}82\,\text{A}$$

$$I_2 = \frac{P_2}{U\ \cos(\phi_2)} = \frac{5000}{230 \cdot 0{,}85} = 25{,}58\,\mathrm{A}$$
$$I_T = \frac{P_T}{U\ \cos(\phi_T)} = \frac{12000}{230 \cdot 0{,}7285} = 71{,}62\,\mathrm{A}$$

La resistencia de cada conductor de la línea es:

$$R_l = \rho\,\frac{l}{S} = 21 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{100}{16} = 0{,}13\,\Omega$$

Así, las pérdidas en la línea son:

$$P_l = 2 \cdot R_l \cdot I^2 = 1346{,}2\,\mathrm{W}$$

y el triángulo de potencias del generador, por el teorema de Boucherot:

$$P_g = P_l + P_T = 13\,346{,}23\,\mathrm{W}$$
$$Q_g = Q_T = 11\,282{,}63\,\mathrm{VA_r}$$
$$S_g = \sqrt{P_g^2 + Q_g^2} = 17\,476{,}26\,\mathrm{VA}$$

por lo que la tensión a la salida del generador es:

$$U_g = \frac{S_g}{I} = 244{,}4\,\mathrm{V}$$

Para mejorar el factor de potencia, se sabe que la potencia reactiva inicial es $11\,282{,}63\,\mathrm{VA_r}$. Puesto que se quiere un f.d.p.′ de 0,95, la potencia reactiva final será:

$$Q'_T = P_T\ \tan(\phi') = 12000 \cdot \tan(\arccos(0{,}95)) = 3944{,}21\,\mathrm{VA_r}$$

siendo la potencia reactiva restante la generada por la batería de condensadores ($Q_C = Q'_T - Q_T = 3944{,}21 - 11282{,}63 = -7338{,}42\,\mathrm{VA_r}$). Por tanto, la capacidad del condensador equivalente a instalar es:

$$Q_c = X_c\,I^2 = \frac{U^2}{X_c} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{Q}{\omega\,U^2} = \frac{7338{,}42}{2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 230^2} = 441{,}57\,\mu\mathrm{F}$$

A este mismo resultado se llegaría a partir de la expresión:

$$C = \frac{P_T\,[\tan(\phi) - \tan(\phi')]}{\omega U^2} = \frac{12000\,[\tan(\arccos(0{,}7285)) - \tan(\arccos(0{,}95))]}{2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 230^2} = 441{,}66\,\mu\mathrm{F}$$

Una vez instalado el condensador, la potencia aparente es:

$$S'_T = \sqrt{P_T^2 + Q_T'^2} = \sqrt{12000^2 + 3944{,}21^2} = 12\,631{,}58\,\mathrm{VA}$$

siendo la corriente total en las cargas (entregada por el generador):

$$I' = \frac{S'}{U} = \frac{12631{,}58}{230} = 54{,}92\,\mathrm{A}$$

Con esta corriente, las pérdidas en la línea se reducen a:

$$P'_l = 2 \cdot R_l \cdot I'^2 = 791{,}76\,\mathrm{W}$$

y el triángulo de potencias del generador, por el teorema de Boucherot:

$$P'_g = P'_l + P_T = 12\,791{,}75\,\mathrm{W}$$
$$Q'_g = Q'_T = 3944{,}21\,\mathrm{VA_r}$$
$$S'_g = \sqrt{P_g'^2 + Q_g'^2} = 13\,386{,}02\,\mathrm{VA}$$