TEORÍA DE CIRCUITOS III
Examen Convocatoria Extraordinaria

25 de junio de 2019

Instrucciones

- El examen tiene una duración de 3 horas.
- Cada problema se deberá entregar en hojas separadas. No olvides cumplimentar tu número de matrícula, nombre y apellidos en todas las hojas. Las hojas de enunciados **no** se recogen.
- La calificación del examen es el promedio de las calificaciones de cada problema. Todos los problemas tienen el mismo peso en la calificación.
- Los resultados se publicarán el 28 de junio.La revisión del examen se realizará los días **2 y 4** de julio de **15:30h a 17:30h**.

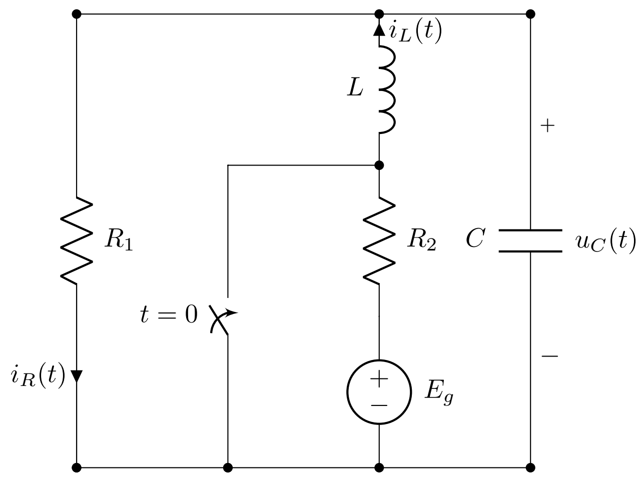
Ejercicio 1

El interruptor del circuito de la figura ha permanecido abierto un tiempo elevado, y se cierra en $t = 0$. En estas condiciones debes realizar el siguiente itinerario:

1. **(0,5p.)** Determinar las condiciones iniciales de las variables $u_C(0^+)$, $i_L(0^+)$, $i_R(0^+)$.
2. **(0,5p.)** Determinar los valores en régimen permanente de las variables $u_C(\infty)$, $i_L(\infty)$, $i_R(\infty)$.
3. **(4p.)** Dibujar el circuito en el dominio de Laplace para $t > 0$, y resolverlo para obtener las expresiones analíticas de $\mathbf{I_L(s)}$, $\mathbf{U_C(s)}$, $\mathbf{I_R(s)}$.
4. **(1p.)** Comprobar mediante los teoremas de valor inicial y valor final que las expresiones anteriores se ajustan a los resultados de los apartados 1 y 2.
5. **(1p.)** A partir de las expresiones obtenidas en el apartado 3, indica de forma razonada el tipo de transitorio existente en el circuito.
6. **(3p.)** Expresión de la variable $i_R(t)$ en el dominio del tiempo.

Datos:

$$
\begin{aligned}
E_g &= 4\,\mathrm{V} \\
R_1 &= 2\,\Omega \\
L &= 1\,\mathrm{H} \\
C &= 250\,\mathrm{mF} \\
R_2 &= 2\,\Omega
\end{aligned}
$$



Solución

1.

$$
\begin{aligned}
u_c(0^+) &= 2\,\mathrm{V} \\
i_L(0^+) &= 1\,\mathrm{A} \\
i_R(0^+) &= 1\,\mathrm{A}
\end{aligned}
$$

2.

$$
\begin{aligned}
u_c(\infty) &= 0\,\mathrm{V} \\
i_L(\infty) &= 0\,\mathrm{A} \\
i_R(\infty) &= 0\,\mathrm{A}
\end{aligned}
$$

3.

$$\mathbf{I_R}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{s}+2}{\mathbf{s}^2+2\mathbf{s}+4}$$
$$\mathbf{I_L}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{s}^2+2\mathbf{s}+4}$$
$$\mathbf{U_C}(\mathbf{s}) = \frac{2\mathbf{s}+4}{\mathbf{s}^2+2\mathbf{s}+4}$$

4. Los resultados del teorema de valor inicial son:

$$\lim_{s\to\infty} \mathbf{s}\mathbf{I_L}(\mathbf{s}) = i_L(0^+) = 1\,\mathrm{A}$$
$$\lim_{s\to\infty} \mathbf{s}\mathbf{I_R}(\mathbf{s}) = i_R(0^+) = 1\,\mathrm{A}$$
$$\lim_{s\to\infty} \mathbf{s}\mathbf{U_C}(\mathbf{s}) = u_c(0^+) = 2\,\mathrm{V}$$

Los resultados del teorema de valor final son:

$$\lim_{s\to 0} \mathbf{s}\mathbf{I_L}(\mathbf{s}) = i_L(\infty) = 0\,\mathrm{A}$$
$$\lim_{s\to 0} \mathbf{s}\mathbf{I_R}(\mathbf{s}) = i_R(\infty) = 0\,\mathrm{A}$$
$$\lim_{s\to 0} \mathbf{s}\mathbf{U_C}(\mathbf{s}) = u_C(\infty) = 0\,\mathrm{V}$$

Estos resultados corresponden con los obtenidos en los apartados 1 y 2.

5. El polinomio del denominador tiene raíces complejas conjugadas ($-1 \pm j\sqrt{3}$), de forma que se trata de un transitorio subamortiguado.

6.

$$\begin{aligned} i_R(t) &= e^{-t}(\cos(\sqrt{3}t) + \sqrt{3}/3\sin(\sqrt{3}t)) \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3}e^{-t}\sin(\sqrt{3}t + 60^\circ) \end{aligned}$$

Ejercicio 2

En este ejercicio se analizará el comportamiento en frecuencia del circuito de la figura.

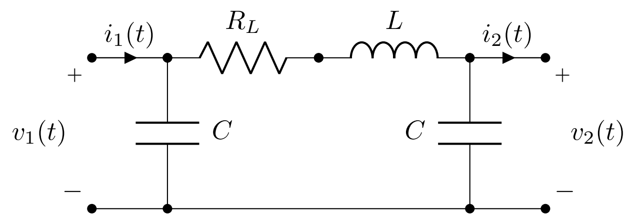
1. (**4p.**) Determina la función de transferencia en el dominio de Laplace

$$\mathbf{H(s)} = \frac{\mathbf{V_2(s)}}{\mathbf{V_1(s)}}$$

2. (**1p.**) A partir de la expresión anterior, obtén la expresión normalizada de la función de transferencia en el dominio de la frecuencia, $\mathbf{H}(\omega)$.
3. (**1p.**) Determina la pulsación a la que se encuentran los polos y ceros del sistema.
4. (**4p.**) Dibuja el diagrama de Bode de **amplitud y de fase**. ¿Qué tipo de filtro es este circuito?

Datos:

$$C = 170\,\mathrm{nF}$$
$$L = 30\,\mathrm{mH}$$
$$R_L = 1\,\Omega$$



Solución

$$\mathbf{H(s)} = \frac{\mathbf{V_2(s)}}{\mathbf{V_1(s)}} = \frac{1}{\mathbf{s}^2 LC + \mathbf{s}RC + 1}$$

$$\mathbf{H(s)} = \frac{1}{5{,}1 \cdot 10^{-9}\mathbf{s}^2 + 1{,}7 \cdot 10^{-7}\mathbf{s} + 1}$$

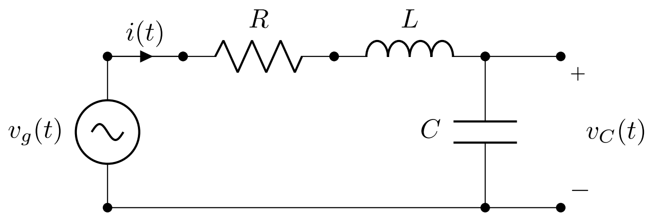
Sustituyendo valores numéricos, y reordenando comprobamos que la función se ajusta a la expresión:

$$\mathbf{H}(\omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta\frac{\omega}{\omega_o} - (\frac{\omega}{\omega_o})^2}$$

siendo $\zeta = 1{,}19 \cdot 10^{-3}$ y $\omega_o = 14\,002{,}8\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$. Esta expresión corresponde a un polo cuadrático en ω_o, y ningún cero. Por tanto, se trata de un filtro paso bajo.

Ejercicio 3

En este ejercicio se analizará el comportamiento en resonancia del circuito de la figura. Este circuito está alimentado con una fuente de tensión sinusoidal de valor eficaz $V_g = 100\,\mathrm{V}$ y frecuencia $f = 1\,\mathrm{kHz}$. El condensador de salida tiene una capacidad de $C = 50\,\mathrm{nF}$.



1. **(2,5p.)** Determina la inductancia necesaria para que el circuito entre en resonancia a la frecuencia del generador.

2. **(2,5p.)** Determina la resistencia necesaria para obtener una tensión en el condensador de $V_c = 12\,\mathrm{kV}$.

3. **(2,5p.)** A partir de los valores de L y R obtenidos, determina el ancho de banda del circuito y las frecuencias de potencia mitad.

4. **(2,5p.)** La frecuencia del generador tiene una tolerancia de $\pm 1\,\%$. Manteniendo los valores de L y R obtenidos en los apartados 1 y 2, determina el valor eficaz de la corriente y la tensión en el condensador en los valores extremos de esta tolerancia.

Solución

1.
$$L = \frac{1}{\omega_o^2 C} = 0{,}506\,\mathrm{H}$$

2.
$$U_c = Q_o U_R = 12\,\mathrm{kV}$$

   Por tanto, $Q_o = 120$. Al tratarse de un circuito serie RLC:

$$R = \frac{\omega_o L}{Q_o} = 26{,}53\,\Omega$$

3.
$$B = \frac{R}{L} = 52{,}36\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$$

   Al ser un circuito con alto factor de calidad, se puede aproximar:

$$\omega_1 = \omega_o - B/2 = 6257\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$$
$$\omega_2 = \omega_o + B/2 = 6309\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$$

4. Usamos la curva universal de resonancia con $\epsilon = 0{,}001$ y $Q_o = 120$. Con $x = Q_o \cdot \epsilon = 1{,}2$ obtenemos

$$Y(x) = \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}} = 0{,}384$$

La corriente en ω_o es $I_o = U_g/R = 3{,}77\,\mathrm{A}$. Por tanto, dentro de esta tolerancia la corriente bajará hasta $1{,}46\,\mathrm{A}$, y la tensión en el condensador será $4{,}62\,\mathrm{kV}$.

Ejercicio 4

El cuadripolo Q puede modelarse como la asociación de dos cuadripolos Q_L y Q_{RC}.

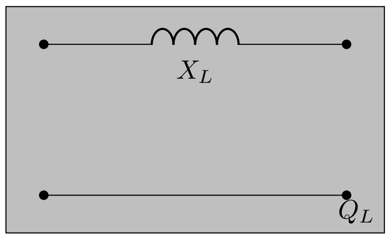
1. (**1,5p.**) Indica el tipo de asociación, dibuja los circuitos necesarios para comprobar si existe interacción entre los cuadripolos (test de Brune), y razona el resultado que se obtendría.

2. (**2,5p.**) Determina los parámetros de los cuadripolos Q_L y Q_{RC} más adecuados al tipo de asociación indicado en el apartado anterior.

3. (**1p.**) A partir de lo obtenido en el apartado anterior, determina los parámetros del cuadripolo Q como asociación de Q_L y Q_{RC}.

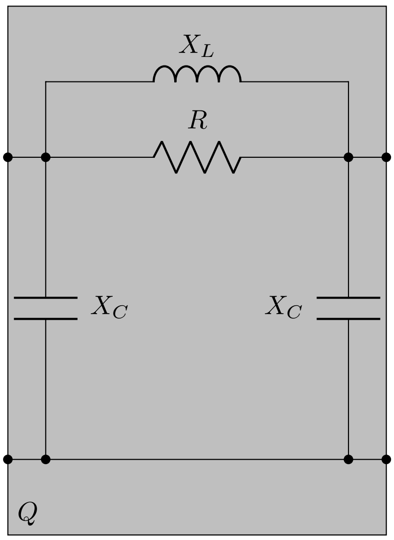
4. (**2,5p.**) Determina los parámetros de transmisión de un cuadripolo equivalente, Q_T, conformado por la asociación en cascada de dos cuadripolos Q.

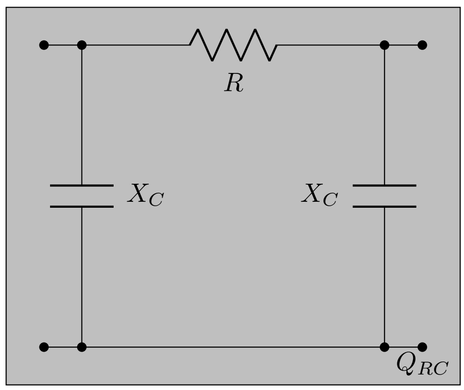
5. (**2,5p.**) Determina la impedancia que habría que conectar a la salida del cuadripolo Q_T para que desde la entrada de Q_T se observe esa misma impedancia. En estas condiciones, ¿que relación de atenuación hay entre los valores eficaces de las tensiones de entrada y salida del cuadripolo Q_T?.



Datos:

- $R = 2\,\Omega$
- $X_C = 0{,}5\,\Omega$
- $X_L = 2\,\Omega$





Solución

1. Se trata de una asociación paralelo-paralelo.

   Dado que los dos circuitos tienen un cortocircuito en la línea inferior, no habrá interacción (cumple test de Brune).

2. Los parámetros más adecuados son los admitancia.

$$[\overline{Y}_L] = \begin{bmatrix} -0{,}5j & 0{,}5j \\ 0{,}5j & -0{,}5j \end{bmatrix}$$

$$[\overline{Y}_{RC}] = \begin{bmatrix} 0{,}5+2j & -0{,}5 \\ -0{,}5 & 0{,}5+2j \end{bmatrix}$$

3. $$[\overline{Y}_Q] = \begin{bmatrix} 0{,}5+1{,}5j & -0{,}5+0{,}5j \\ -0{,}5+0{,}5j & 0{,}5+1{,}5j \end{bmatrix}$$

4. $$[\overline{T}_Q] = \begin{bmatrix} -1+2j & 1+j \\ -4 & -1+2j \end{bmatrix}$$

$$[\overline{T}_{QT}] = [\overline{T}_Q] \cdot [\overline{T}_Q] = \begin{bmatrix} -8-8j & -6+2j \\ 8-16j & -7-8j \end{bmatrix}$$

5. Se trata de conectar la impedancia característica del cuadripolo:

$$\overline{Z}_o = \sqrt{\frac{\overline{B}}{\overline{C}}} = 0{,}595\underline{/-67{,}5^\circ}\,\Omega$$

donde se ha escogido el signo positivo de la solución, dado que proporciona una impedancia de resistencia positiva.

Al conectar esta impedancia, la relación entre las tensiones de entrada y salida está definida por la constante de propagación:

$$\exp\overline{\gamma} = \overline{A} + \frac{\overline{B}}{\overline{Z}_o} = -13{,}97 - 16{,}04j$$

La relación de atenuación de los valores eficaces de tensión se determina con la parte real de $\overline{\gamma} = \alpha + j\beta$:

$$\exp\alpha = \frac{U_1}{U_2} = 21{,}27$$