Introducción al régimen transitorio

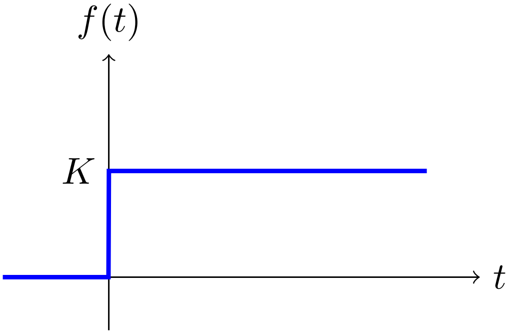
Ana Fernández-Guillamón

Formas de onda

- La salida de los generadores (de tensión o de corriente) son funciones que pueden variar con el tiempo
- La dependencia funcional $u = u(t)$ o $i = i(t)$ se denomina **forma de onda**
- Clasificación:
  - Signo de la magnitud
    - Unidireccionales: única polaridad (signo constante), aunque el valor puede ser constante (corriente continua) o variable
    - Bidireccionales: cambio de polaridad (signo variable con el tiempo)
  - Repetición del valor de la magnitud:
    - Periódicas: el valor de la magnitud se repite de forma regular
    - No periódicas: el valor de la magnitud varía de forma arbitraria con el tiempo

Formas de onda básicas

Función escalón

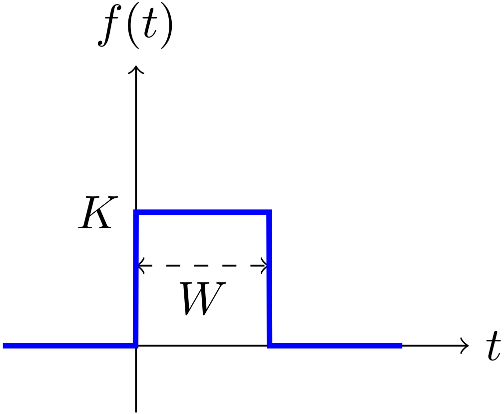


$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ K & t \geq 0 \end{cases}$$

$K = 1 \Rightarrow$ escalón unitario

Formas de onda básicas

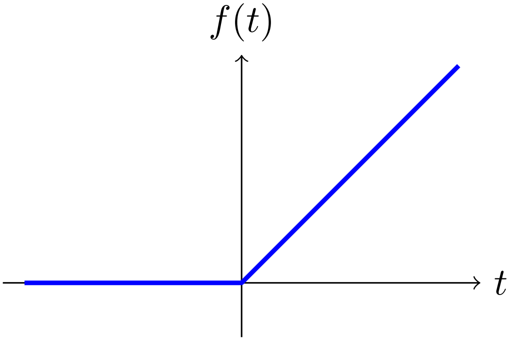
Función pulso rectangular



$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ K & 0 \leq t \leq W \\ 0 & t > W \end{cases}$$

Formas de onda básicas

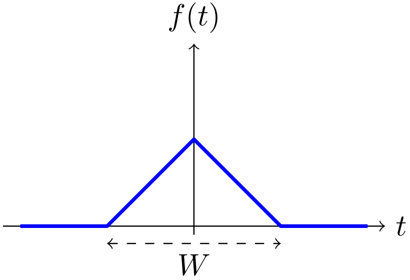
Función rampa



$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ m \cdot t & t \geq 0 \end{cases}$$

Formas de onda básicas

Función triangular

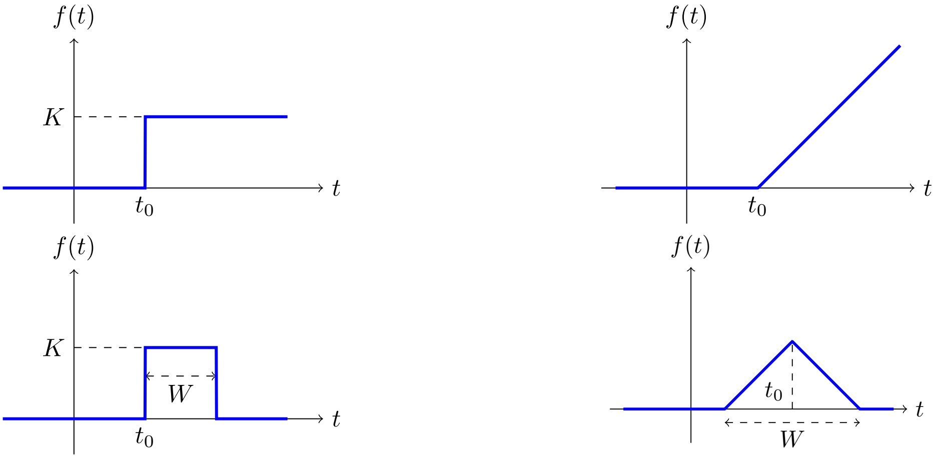


$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < -W/2 \\ m \cdot (t + W/2) & -W/2 \leq t \leq 0 \\ -m \cdot (t - W/2) & 0 \leq t \leq W/2 \\ 0 & t > W/2 \end{cases}$$

Formas de onda básicas

Retraso del origen de tiempos

Desplazamiento en el eje de ordenadas una cantidad $-t_0$



Introducción al régimen transitorio

Régimen transitorio

- Cambio en las condiciones de funcionamiento de un circuito: activación o apagado de fuentes, cambio en las cargas, interruptores...
- Variación de $u(t)$ e $i(t)$ hasta alcanzar nuevos valores $\rightarrow$ circuito estabilizado
- **Ecuaciones diferenciales**

Régimen permanente o estacionario (circuito estabilizado)

Las tensiones y corrientes de un circuito son constantes (CC) o periódicas (CA)

Al aplicar Kirchhoff a un circuito lineal, se obtienen ecuaciones diferenciales:

$$u_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} \leftrightarrow i_L(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} u_L(t')\mathrm{d}t'$$

$$i_C(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} \leftrightarrow u_C(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C(t')\mathrm{d}t'$$

Importante recordar el operador D

$$Z_R(D) = \frac{u_R(t)}{i(t)} = R$$

$$Z_L(D) = \frac{u_L(t)}{i(t)} = LD$$

$$Z_C(D) = \frac{u_C(t)}{i(t)} = \frac{1}{CD}$$

Introducción al régimen transitorio

Respuesta completa de una red lineal

La solución de esta ecuación diferencial para $t > 0$ tiene dos componentes:

$$\boxed{f(t) = f_n(t) + f_\infty(t)}$$

- Respuesta **natural** o general, $f_n(t)$:
  - Respuesta sin fuentes
  - Determinada por la energía almacenada previamente y por la configuración del circuito
  - Contiene constantes de integración
  - Resolver **ecuación homogénea**
- Respuesta **forzada** o particular, $f_\infty(t)$:
  - Determinada por las fuentes existentes en $t > 0$
  - Es la respuesta del circuito tras un tiempo suficiente, $t \to \infty$ (régimen permanente)

Condiciones iniciales

- El instante del cambio se representa habitualmente con $t = 0$:
  - $t = 0^-$: tiempo inmediatamente anterior al cambio
  - $t = 0^+$: tiempo inmediatamente posterior al cambio
- Dependen de las **energías almacenadas** en $t = 0^-$
- Se aplican a la **topología** del circuito en $t = 0^+$
- Determinan las constantes de integración

Condiciones iniciales

Resistencia

No acumula energía: sigue los cambios de forma instantánea.

$$u(t) = R \cdot i(t)$$

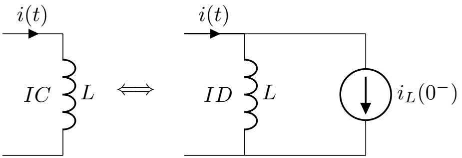
Condiciones iniciales

Bobina

La corriente no puede variar de forma brusca (implica tensión infinita):

$$u_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} \leftrightarrow i_L(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} u_L(t')\mathrm{d}t'$$

$$\boxed{i_L(0^-) = i_L(0^+)}$$



Continuidad en una bobina

Una bobina inicialmente cargada (IC) se puede sustituir por una fuente ideal de corriente de valor $i_g = i_L(0^+) = i_L(0^-)$ en paralelo con una bobina descargada (ID). Si la bobina está descargada ($i_L(0^-) = 0$), se comporta inicialmente como un **circuito abierto**, independientemente de la tensión en sus terminales.

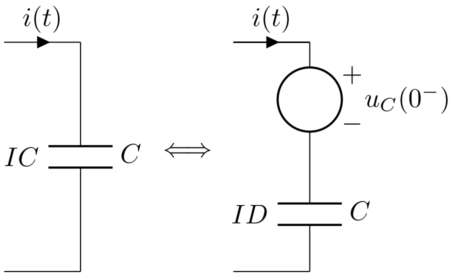
Condiciones iniciales

Condensador

La tensión no puede variar de forma brusca (implica corriente infinita):

$$i_C(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} \leftrightarrow u_C(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C(t')\mathrm{d}t'$$

$$\boxed{u_C(0^-) = u_C(0^+)}$$



Continuidad en un condensador bobina

Un condensador inicialmente cargado (IC) se puede sustituir por una fuente ideal de tensión de valor $u_g = u_C(0^+) = u_C(0^-)$ en serie con un condensador descargado (ID). Si el condensador está descargado ($u_C(0^-) = 0$), se comporta inicialmente como un **cortocircuito**, independientemente de la corriente que circule por el mismo.

Condiciones iniciales

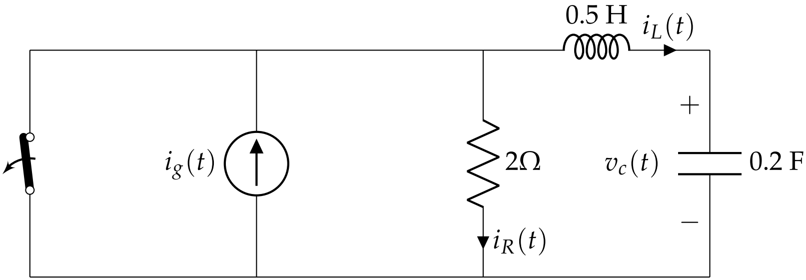
Procedimiento general para obtener las condiciones iniciales

1. Sustituir los generadores de tensión del circuito $\epsilon_g(t)$ por fuentes de tensión continua de valor $\epsilon_g(0^+)$.
2. Sustituir todos los generadores de corriente del circuito $i_g(t)$ por fuentes de corriente continua de valor $i_g(0^+)$.
3. Sustituir todas las bobinas cargadas por su circuito equivalente con condiciones iniciales $i_L(0^-) = i_L(0^+)$. Si la corriente inicial en la bobina es 0 ($i_L(0^-) = 0$), se sustituye por un circuito abierto.
4. Sustituir todos los condensadores cargados por su circuito equivalente con condiciones iniciales $u_C(0^+) = u_C(0^-)$. Si la tensión inicial en un condensador es 0 ($u_C(0^-) = 0$), se sustituye por un cortocircuito.
5. En la red resistiva resultante, calcular las corrientes y tensiones iniciales necesarias para el estudio subsiguiente de la red.

Condiciones iniciales

Ejemplo

En la red de la figura, la corriente del generador de intensidad es $i_g(t) = 10\,\mathrm{e}^{-2t}$ A. El interruptor se abre en $t = 0$, siendo los valores iniciales $i_L(0^-) = 0$ A; $u_C(0^-) = -5$ V. Se pide calcular $i_R(0^+)$, $i_C(0^+)$ y $u_L(0^+)$.



Circuitos de primer orden

Definición

- Circuitos que tienen un **único elemento de acumulación** (o *varios elementos que pueden ser simplificados a un elemento equivalente*) y resistencias
- **Ecuación diferencial de primer orden**:

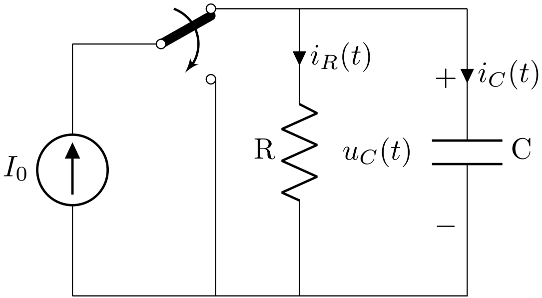
$$a_1\, y'(t) + a_0\, y(t) = g(t)$$

- Resolución:
  1. Cálculo de las **condiciones iniciales**, analizando el circuito en $t < 0$
  2. **Respuesta natural**: análisis de la *ecuación homogénea* ($g(t) = 0$, sin fuentes) en $t > 0$:

$$y_n(t) = K\, \mathrm{e}^{-\frac{a_0\, t}{a_1}}$$

  3. **Respuesta forzada**: análisis del circuito *con fuentes* en $t > 0$

- En $t = 0$ se cierra el interruptor



Circuitos de primer orden

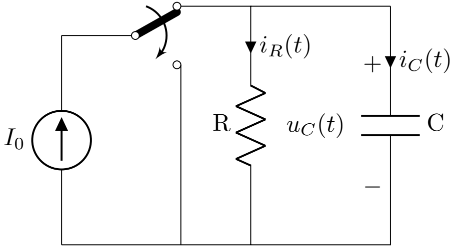
Circuito RC paralelo

Por 1LK:

$$\underbrace{i_R(t)}_{\frac{u_C(t)}{R}} + \underbrace{i_C(t)}_{C\,\frac{du_C(t)}{dt}} = I_0 \Rightarrow \frac{u_C(t)}{R} + C\,u'_C(t) = \frac{u_C(t)}{R\,C} + u'_C(t) = \frac{I_0}{C} \Rightarrow \boxed{\frac{I_0}{C} = u'_C(t) + \frac{1}{R\,C}\,u_C(t)}$$

Respuesta natural: $u_{C,n}(t) = K\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}$
Respuesta forzada: $u_{C,\infty}(t) = R \cdot I_0$
Respuesta completa: $u_C(t) = K\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} + R \cdot I_0$

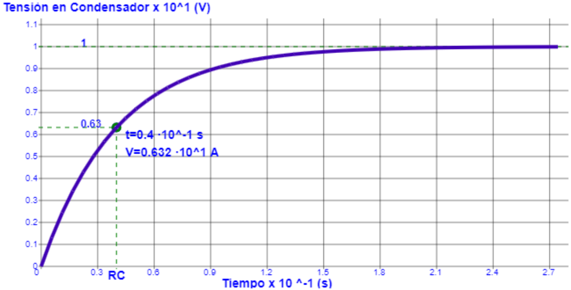
- Usar condiciones iniciales para K



Circuitos de primer orden

Circuito RC paralelo — Constante de tiempo

- $\tau = R \cdot C$ [s]
- Tiempo necesario para que el condensador se cargue al 63% $(1 - 1/e)$ de su capacidad
- C completamente cargado si $t > 5\tau$
- Enlace



Circuitos de primer orden

Circuito RC paralelo — Expresión general de la respuesta completa

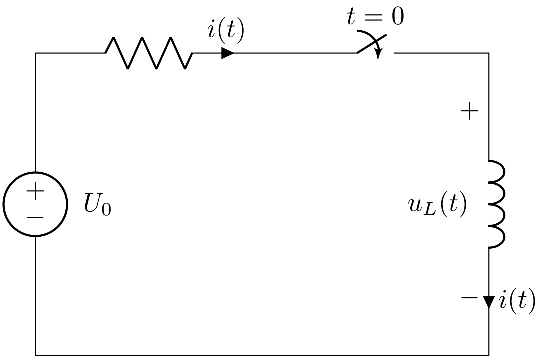
$$\boxed{u_C(t) = \left[u_C(0^+) - u_{C,\infty}(0^+)\right] \mathrm{e}^{-t/\tau} + u_{C,\infty(t)}}$$

- $u_C(0^+)$: tensión en el condensador, condiciones iniciales, $u(0^-) = u(0^+)$
- $u_{C,\infty(t)}$: tensión en el condensador en régimen permanente para $t > 0$
- $u_{C,\infty(0^+)}$: tensión en el condensador en régimen permanente particularizada en $t = 0$

Circuitos de primer orden

Circuito RL serie

- En $t = 0$ se cierra el interruptor $\Rightarrow i_R(t) = i_L(t)$



Circuitos de primer orden

Circuito RL serie

Por 2LK:

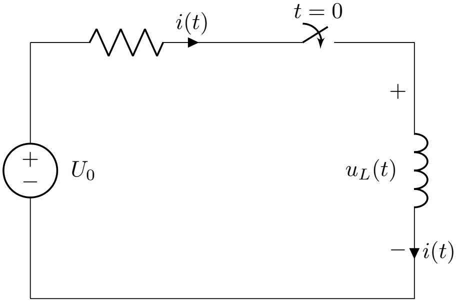
$$\underbrace{u_R(t)}_{R\,i_L(t)} + \underbrace{u_L(t)}_{L\,\frac{di_L(t)}{dt}} = U_0 \Rightarrow R\,i_L(t) + L\,i'_L(t) = \frac{R}{L}\,i_L + i'_L(t) = \frac{U_0}{L} \Rightarrow \boxed{\frac{U_0}{L} = i'_L(t) + \frac{R}{L}\,i_L(t)}$$

Respuesta natural: $i_{L,n}(t) = K\,\mathrm{e}^{-\frac{R\,t}{L}}$

Respuesta forzada: $i_{L,\infty}(t) = \dfrac{U_0}{R}$

Respuesta completa: $i_L(t) = K\,\mathrm{e}^{-\frac{R\,t}{L}} + \dfrac{U_0}{R}$

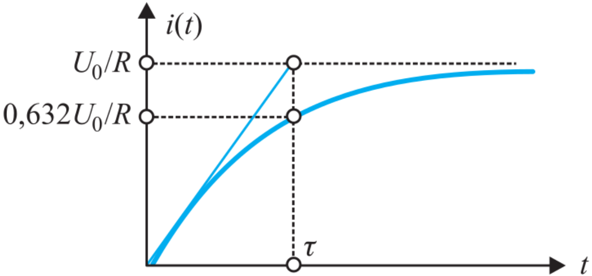
- Usar condiciones iniciales para K



Circuitos de primer orden

Circuito RL serie — Constante de tiempo

- $\tau = \dfrac{L}{R}$ [s]
- Tiempo necesario para que por la bobina circule el 63% de la máxima corriente
- L a máxima corriente si $t > 5\tau$
- Enlace



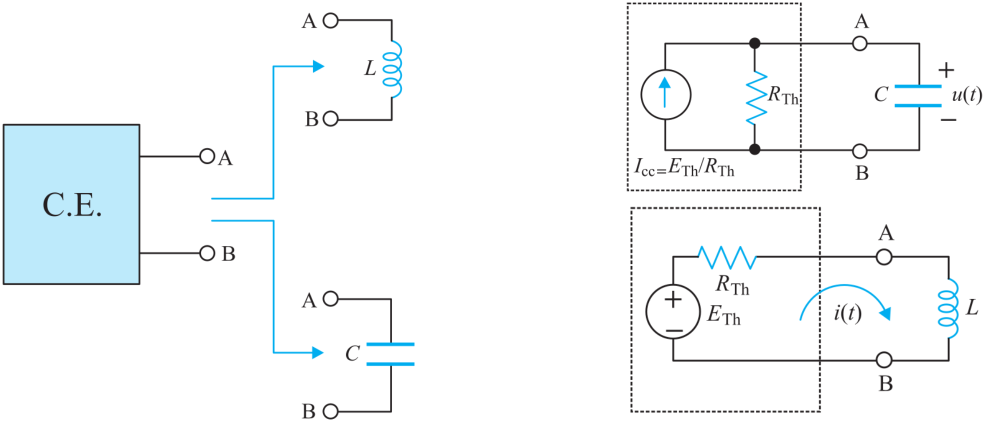
Circuitos de primer orden

Circuito RL serie — Expresión general de la respuesta completa

$$\boxed{i_L(t) = \left[i_L(0^+) - i_{L,\infty}(0^+)\right] \mathrm{e}^{-t/\tau} + i_{L,\infty(t)}}$$

- $i_L(0^+)$: corriente en la bobina, condiciones iniciales, $i_L(0^-) = i_L(0^+)$
- $i_{L,\infty}(t)$: corriente en la bobina en régimen permanente para $t > 0$
- $i_{L,\infty}(0^+)$: corriente en la bobina en régimen permanente particularizada en $t = 0$

Procedimiento general



R_{th} **es la resistencia vista desde los bornes del condensador o de la bobina, cuando se anulan todas las fuentes independientes**

Procedimiento general

1. Dibujar el circuito para $t < 0$:
   - Obtener el valor de $i_L(0^-)$ o $u_C(0^-)$
   - Aplicar el principio de continuidad para determinar $i_L(0^+)$ o $u_C(0^+)$
2. Dibujar el circuito para $t > 0$:
   - Calcular el equivalente de Thévenin/Norton visto por el condensador/bobina
   - Determinar la constante de tiempo del circuito:

$$\tau = \frac{L}{R_{th}} \qquad\qquad \tau = R_{th}\,C$$

   - Calcular la respuesta en régimen permanente ($i_\infty(t)$ o $u_\infty(t)$):
     1. *Corriente continua*: sustituir la bobina por un cortocircuito y el condensador por un circuito abierto
     2. *Corriente alterna senoidal*: resolver el circuito por el método fasorial
     3. *Otro tipo de forma de onda*: determinar la solución particular de la ecuación diferencial
3. Escribir la solución completa para $t > 0$:

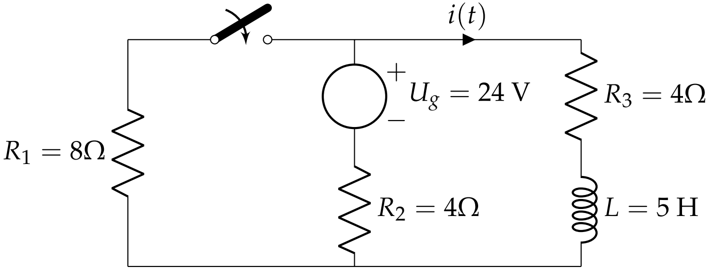
$$i_L(t) = \left(i_L(0^+) - i_\infty(0^+)\right) e^{-\frac{t}{\tau}} + i_\infty(t)$$

$$u_C(t) = \left(u_C(0^+) - u_\infty(0^+)\right) e^{-\frac{t}{\tau}} + u_\infty(t)$$

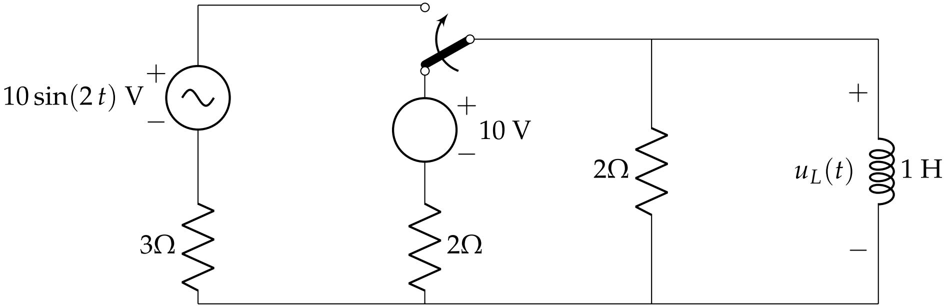
Circuitos de primer orden

Ejemplo 1

En el circuito de la figura, calcular la corriente $i(t)$ al cerrar el interruptor en $t = 0$ s.



El conmutador del circuito de la figura pasa de la posición a 1 a la 2 en $t = 0$ s. Calcular la tensión en bornes de la bobina $t > 0$ s.



Circuitos de segundo orden

- Circuitos que tienen **dos elementos de acumulación** (o más no asociados en serie/paralelo)
- **Ecuación diferencial de segundo orden**:

$$a_2\, y''(t) + a_1\, y'(t) + a_0\, y(t) = g(t)$$

- El método de resolución analiza el circuito en dos etapas:
  - **Respuesta natural** (ecuación diferencial homogénea, sin fuentes)
  - **Respuesta forzada** (ecuación completa, con fuentes)

Circuitos de segundo orden

Solución natural

$$a_2\, y''(t) + a_1\, y'(t) + a_0\, y(t) = 0 \Rightarrow \boxed{y''(t) + \frac{a_1}{a_2}\, y'(t) + \frac{a_0}{a_2} y(t) = 0}$$

- Cambios de variable:

$$\frac{a_1}{a_0} = 2\,\xi\,\omega_n \qquad\qquad \frac{a_0}{a_2} = \omega_n^2$$

ω_n pulsación natural no amortiguada

ξ coeficiente de amortiguamiento

- Resolver el polinomio característico:

$$\lambda^2 + 2\,\xi\,\omega_n\,\lambda + \omega_n^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\omega_n\left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}\right) \\ \lambda_2 = -\omega_n\left(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}\right) \end{cases}$$

Circuitos de segundo orden

Solución natural

Sistema sobreamortiguado ($\xi > 1$)

- $\lambda_1 \neq \lambda_2$
- Respuesta natural:

$$y_g(t) = K_1\, e^{\lambda_1 t} + K_2\, e^{\lambda_2 t}$$

Sistema críticamente amortiguado ($\xi = 1$)

- $\lambda_1 = \lambda_2 = -\xi\, \omega_n = -\omega_n$
- Respuesta natural:

$$y_g(t) = e^{-\omega_n t}(K_1 + K_2\, t)$$

Sistema subamortiguado ($0 < \xi < 1$)

- $\lambda = a \pm b\,i = -\omega_n\, \xi \pm \omega_n \sqrt{1-\xi^2}\, i$
- Respuesta natural:

$$y_g(t) = e^{-\omega_n \xi t}[K_1 \cos(\omega_n \sqrt{1-\xi^2}\, t) + \\ + K_2 \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2}\, t)]$$

que puede escribirse como:

$$y_g(t) = M\, e^{-\omega_n \xi t} \sin\left(\omega_n \sqrt{1-\xi^2}\, t + \theta\right)$$

donde $M = \sqrt{K_1^2 + K_2^2}$ y $\tan(\theta) = \frac{K_2}{K_1}$

Circuitos de segundo orden

Solución forzada

$y_\infty(t)$, depende del tipo de alimentación del circuito:

- *Corriente continua*: sustituir las bobinas por cortocircuitos y los condensadores por circuitos abiertos
- *Corriente alterna senoidal*: resolver el circuito por el método fasorial
- *Otro tipo de forma de onda*: determinar la solución particular de la ecuación diferencial

Circuitos de segundo orden

Constantes de integración

1. Dibujar el circuito en el instante $t = 0^+$, sustituyendo las bobinas y condensadores por fuentes de intensidad y tensión, respectivamente, de valor $i_L(0^+)$ y $u_C(0^+)$
2. Con este nuevo circuito, puramente resistivo, cualquier variable se puede obtener por superposición $\rightarrow$ se obtiene la primera condición de contorno
3. Derivar la expresión de la variable en estudio, particularizada para $t = 0^+$ $\rightarrow$ se obtiene la segunda condición de contorno
4. Resolver el sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas

Circuitos de segundo orden

Procedimiento general

1. Dibujar el circuito para $t < 0$:
   - Obtener los valores de $i_L(0^-)$ y $u_C(0^-)$
   - Aplicar el principio de continuidad para determinar $i_L(0^+)$ y $u_C(0^+)$
2. Dibujar el circuito para $t > 0$, caracterizando los elementos pasivos por su impedancia operacional:
   - Obtener la ecuación diferencial del sistema aplicando métodos de análisis generales
   - Determinar la solución natural de la ecuación diferencial, especificando también el tipo de sistema
   - Calcular la respuesta forzada, según el tipo de alimentación del circuito
3. Determinar las constantes de la ecuación
4. Escribir la solución completa para $t > 0$

Circuitos de segundo orden

Ejemplo

El circuito de la figura lleva en la situación indicada un tiempo suficientemente grande, de forma que se encuentra en régimen permanente. En el instante $t = 0$, se cierra el interruptor. Determinar la intensidad $i(t)$ para $t > 0$.