Teoremas Generales

Teoría de Circuitos II

Oscar Perpiñán Lamigueiro

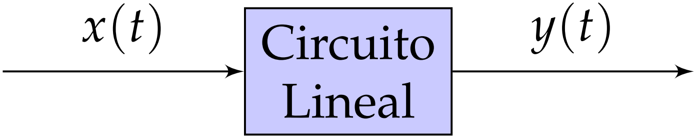
Elementos lineales

- Un circuito eléctrico es lineal si los elementos pasivos y activos que incluye son lineales.
- Un **elemento pasivo** es lineal si la relación entre la tensión entre sus terminales y la corriente que lo recorre es lineal: **resistencias, condensadores y bobinas**.
- Una **fuente dependiente** es lineal si su salida (tensión o corriente) tiene una relación lineal con la magnitud del circuito de la que depende.
- Un circuito lineal tiene dos propiedades:
  - Homogeneidad o **proporcionalidad**.
  - Aditividad o **superposición**.

Homogeneidad o Proporcionalidad

Sea $y(t)$ la respuesta de un **circuito lineal** a una excitación $x(t)$.

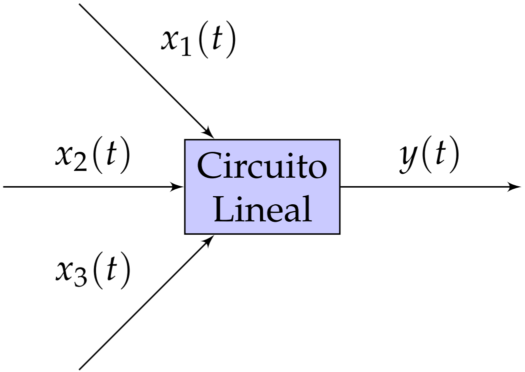
Si la excitación es multiplicada por una **constante**, $K \cdot x(t)$, la respuesta del circuito será modificada por la misma constante, $K \cdot y(t)$.



Teorema de superposición

La respuesta de un **circuito lineal** a varias fuentes de excitación actuando simultáneamente es igual a la suma de las respuestas que se tendrían cuando actuase cada una de ellas por separado

$$y(t) = \sum_i y_i(t)$$



Análisis de un circuito mediante superposición

Procedimiento

1. Se apagan todas las fuentes **independientes** del circuito menos una.
   - Las fuentes de tensión se sustituyen por un cortocircuito ($U = 0$).
   - Las fuentes de corriente se sustituyen por un circuito abierto ($I = 0$).
   - Las fuentes **dependientes no** se modifican.
2. Se analiza el circuito, obteniendo la respuesta individual a la fuente que permanece activa.
3. Se repite este procedimiento para cada una de las fuentes **independientes** del circuito.
4. La respuesta total del circuito es la suma de las respuestas individuales.

Análisis de un circuito mediante superposición

Observaciones

- **Siempre** hay que aplicar este método cuando en un circuito conviven fuentes de **diferente frecuencia** (o fuentes de corriente continua y corriente alterna).
- En el caso de fuentes de corriente alterna **sinusoidal**, la respuesta debe expresarse en el **dominio del tiempo**. **No** se pueden **sumar** los **fasores** que corresponden a **frecuencias diferentes**.
- En el primer paso del procedimiento, se pueden agrupar las fuentes que funcionan a la misma frecuencia y calcular la respuesta del circuito en esa frecuencia.

Cálculo de potencia con superposición

El principio de superposición aplica a tensiones y corrientes, pero **no** a potencias.
Supongamos $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$:

$$\begin{aligned} p(t) &= R \cdot i^2(t) = \\ &= R \cdot (i_1(t) + i_2(t))^2 = \\ &= R \cdot (i_1^2(t) + i_2^2(t) + 2 \cdot i_1(t) \cdot i_2(t)) \\ p(t) &\neq p_1(t) + p_2(t) \end{aligned}$$

Cálculo de potencia con superposición

- Cuando las señales son **ortogonales en un período*** se pueden sumar las potencias **medias** de cada circuito.

$$P = \sum_i P_i$$

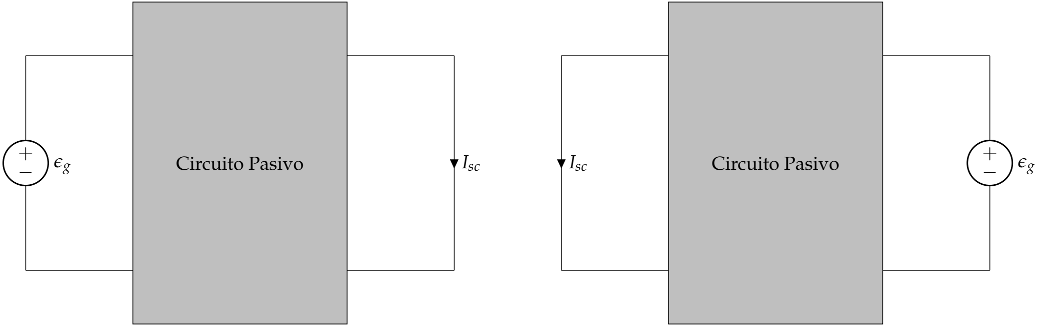
- Ejemplos de señales ortogonales: sinusoidales con diferente frecuencia, una sinusoide con una continua, ...

*Dos señales son ortogonales si cumplen la siguiente ecuación:

$$< f_1, f_2 >_T = \int_T f_1(t) \cdot f_2(t) dt = 0$$

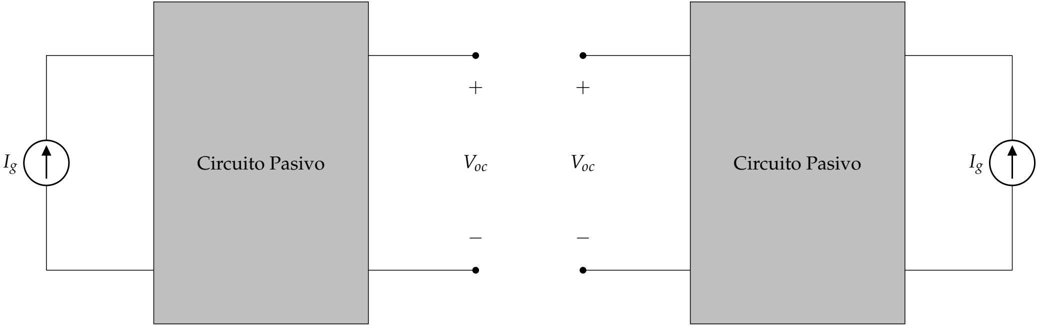
Teorema de reciprocidad

La matriz de impedancias de un circuito pasivo es simétrica. En consecuencia, al intercambiar la posición de una fuente de tensión, la corriente de cortocircuito en la otra rama no cambia.

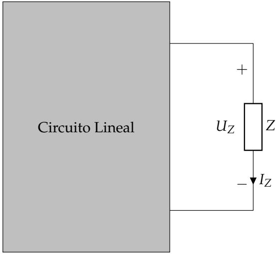


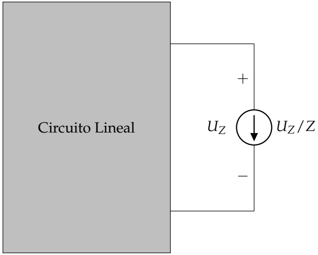
Teorema de reciprocidad

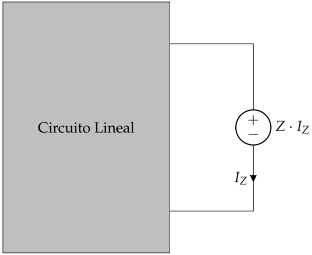
La matriz de admitancias de un circuito pasivo es simétrica. En consecuencia, al intercambiar la posición de una fuente de corriente, la tensión de circuito abierto en la otra posición no cambia.



Teorema de sustitución

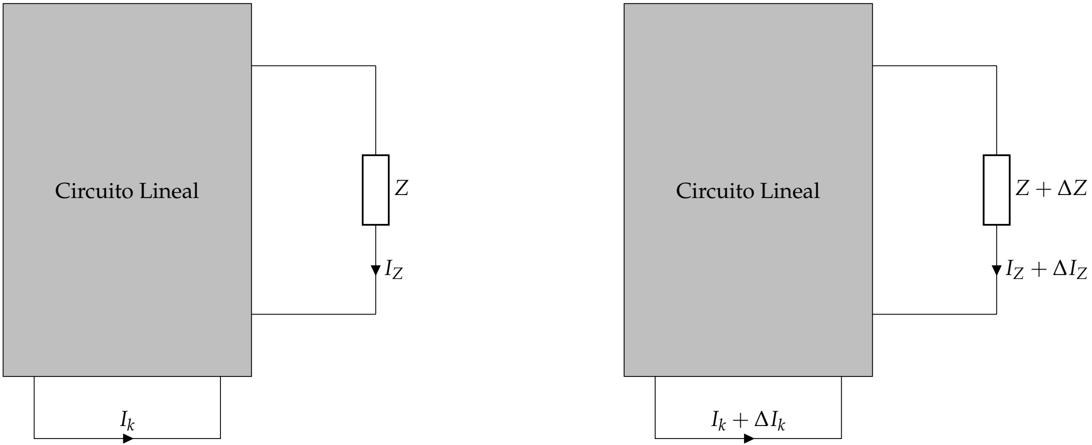




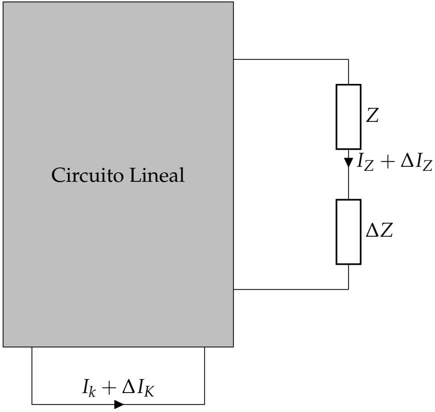


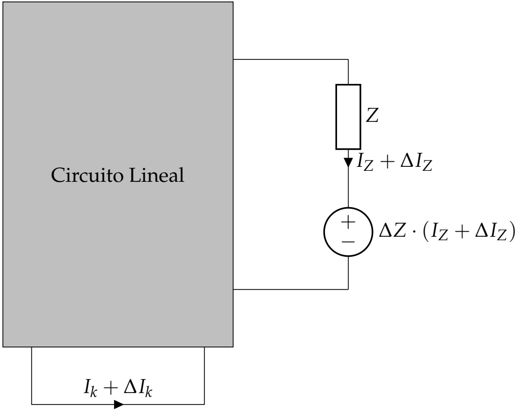
Planteamiento

¿Cuál es la variación en la respuesta I_k debida a una variación en la impedancia Z?

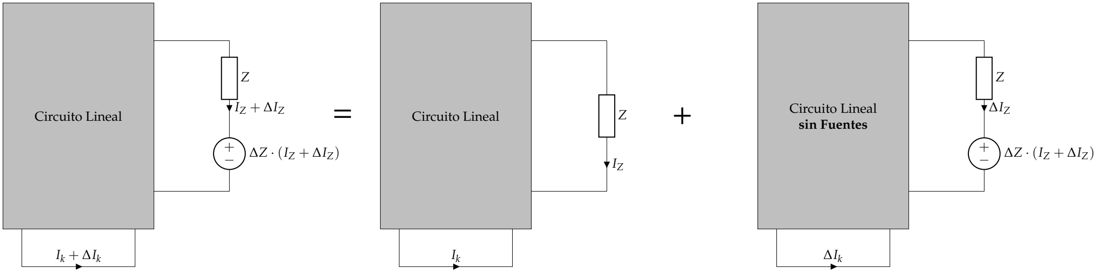


Aplicamos teorema de sustitución





A continuación, teorema de superposición

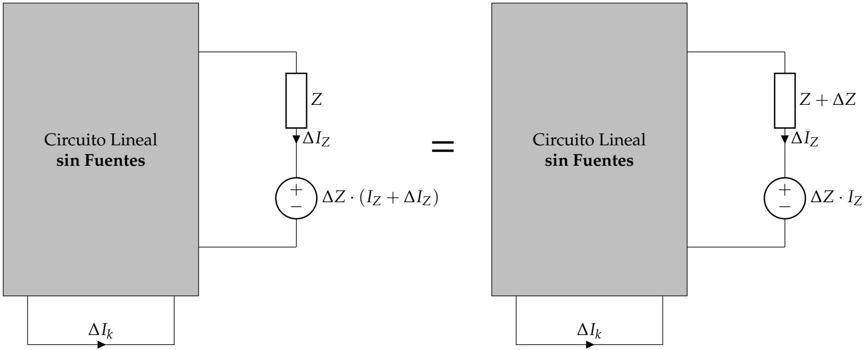


Nuevamente, teorema de sustitución

En el último circuito, expresamos la fuente como:

$$\Delta Z \cdot (I_Z + \Delta I_Z) = \Delta Z \cdot I_Z + \Delta Z \cdot \Delta I_Z$$

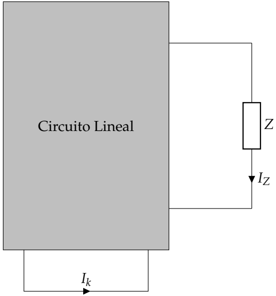
El último sumando representa la tensión en la impedancia ΔZ recorrida por la corriente de la rama, ΔI_z. Esta observación nos permite volver a utilizar el teorema de sustitución.

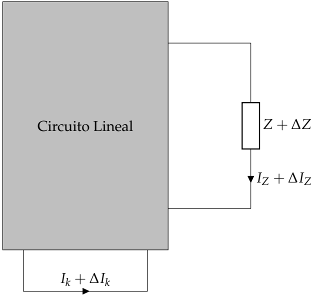


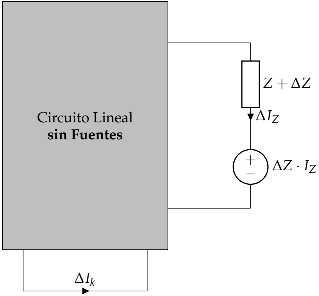
Solución

Para determinar el cambio en la respuesta, ΔI_k, debido a una variación en la impedancia, ΔZ:

1. Se calcula la corriente I_z en el circuito original.
2. Se apagan las fuentes independientes y se sustituye la impedancia Z por una impedancia de valor $Z + \Delta Z$ en serie con una fuente de tensión de valor $\Delta Z \cdot I_z$.
3. En el circuito resultante se calcula la respuesta, ΔI_k.

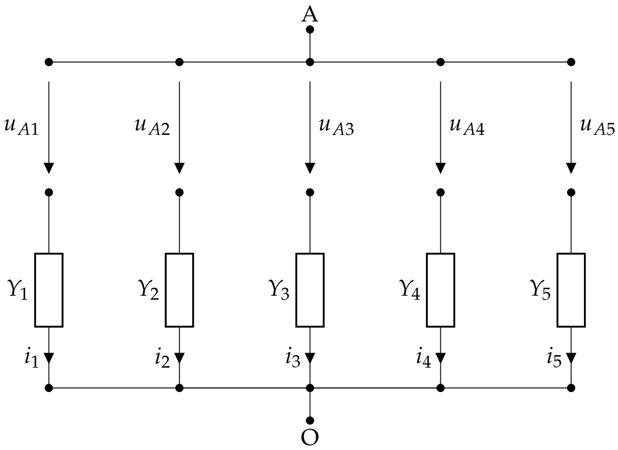






Planteamiento

El Teorema de Millman permite resolver la tensión entre dos puntos A y O, siendo éste un punto común de un conjunto de impedancias, y siendo conocidas las tensiones con el punto A y las impedancias.



Resolución

La tensión u_{AO} es:

$$u_{AO} = u_{Aj} + i_j / Y_j$$

Despejando i_j:

$$i_j = Y_j \cdot (u_{AO} - u_{Aj})$$

En el nudo O se puede plantear LKC:

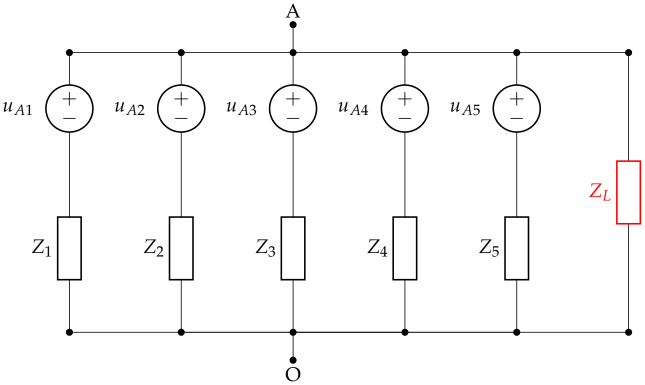
$$\sum_{j=1}^{n} i_j = 0$$

Por tanto:

$$\sum_{j=1}^{n} Y_j \cdot (u_{AO} - u_{Aj}) = 0 \rightarrow \boxed{u_{AO} = \frac{\sum_{j=1}^{n} Y_j u_{Aj}}{\sum_{i=1}^{n} Y_j}}$$

Aplicación

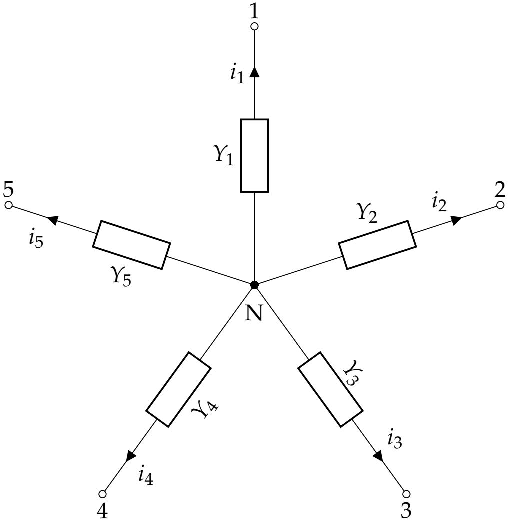
Este teorema permite resolver rápidamente circuitos como el siguiente:

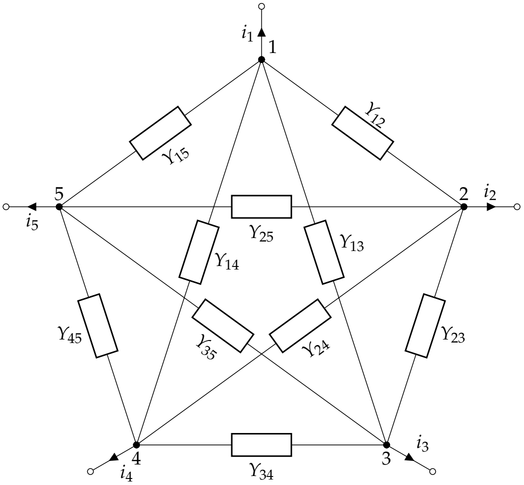


$$u_{AO} = \frac{\sum_{j=1}^{n} u_{Aj}/Z_j}{1/Z_L + \sum_{i=1}^{n} 1/Z_j}$$

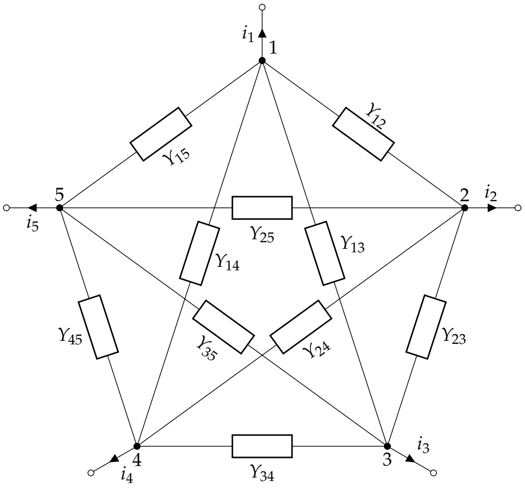
Planteamiento

Una estrella se puede transformar en un polígono (pero no al revés si $n > 3$):





Corrientes en el polígono

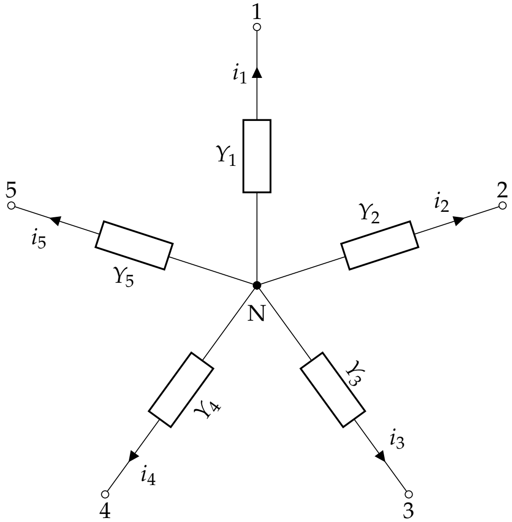


Podemos calcular la corriente que sale por cada terminal:

$$i_j = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} i_{kj} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} u_{kj} \cdot Y_{kj} = \sum_{k=1}^{n} u_{kj} \cdot Y_{kj}$$

teniendo en cuenta que $u_{kk} = 0$.

Corrientes en la estrella



La corriente en cada rama es:

$$i_j = Y_j \cdot u_{jN}$$

Resolución

Para que los dos circuitos sean equivalentes, las ecuaciones de las corrientes deben dar el mismo resultado:

$$Y_j \cdot u_{jN} = \sum_{k=1}^{n} u_{kj} \cdot Y_{kj}$$

La tensión u_{jN} de la estrella se puede relacionar con las tensiones entre terminales u_{kj} a través del Teorema de Millman:

$$u_{jN} = \frac{\sum_{k=1}^{n} u_{kj} Y_k}{\sum_{k=1}^{n} Y_k}$$

La relación entre estrella y polígono queda:

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} u_{kj} Y_k Y_j}{\sum_{k=1}^{n} Y_k} = \sum_{k=1}^{n} u_{kj} \cdot Y_{kj}$$

Resolución

Denominando $Y_Y = \sum_{k=1}^{n} Y_k$ y agrupando dentro del sumatorio:

$$\sum_{k=1}^{n} u_{kj} \frac{Y_k Y_j}{Y_Y} = \sum_{k=1}^{n} u_{kj} \cdot Y_{kj}$$

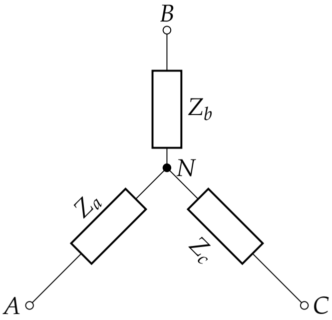
Por tanto:

$$\boxed{Y_{kj} = \frac{Y_k Y_j}{Y_Y}}$$

Aplicación

- Ejemplo para $n = 3$ (estrella $\rightarrow$ triángulo)

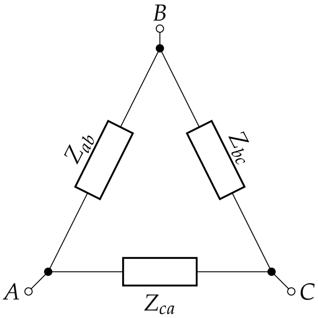
$$\boxed{Y_{kj} = \frac{Y_k Y_j}{\sum_{k=1}^{n} Y_k}}$$



$$Y_{ab} = \frac{Y_a Y_b}{Y_a + Y_b + Y_c}$$

$$Y_{bc} = \frac{Y_b Y_c}{Y_a + Y_b + Y_c}$$

$$Y_{ca} = \frac{Y_c Y_a}{Y_a + Y_b + Y_c}$$

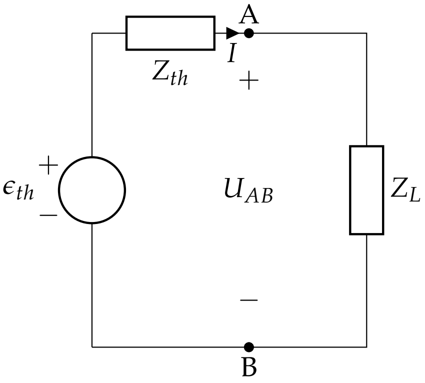


1. Teoremas de linealidad
2. Teoremas de reciprocidad y sustitución
3. Teorema de compensación
4. Teorema de Millman
5. Teorema de Rosen
6. **Teoremas de Thévenin/Norton**
7. Teorema de Everitt

Teoremas de Thévenin/Norton

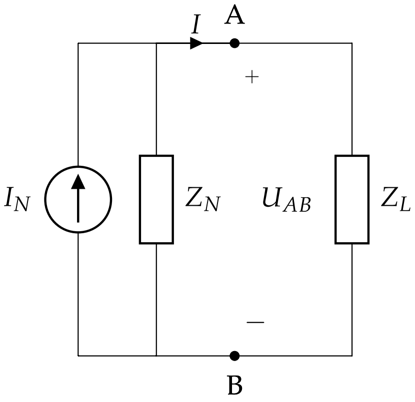
Thévenin

Cualquier **red lineal** compuesta por elementos activos y pasivos puede sustituirse, desde el punto de vista de sus terminales externos AB, por una **fuente de tensión** (generador de Thévenin, ϵ_{th}) en **serie** con una impedancia (impedancia de Thévenin, Z_{th}).



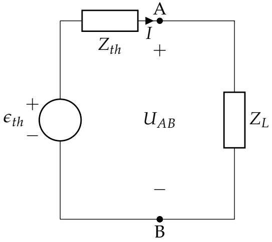
Norton

Cualquier **red lineal** compuesta por elementos activos y pasivos puede sustituirse, desde el punto de vista de sus terminales externos AB, por una **fuente de corriente** (generador de Norton, I_N) en **paralelo** con una impedancia (impedancia de Norton, Z_N).



Teoremas de Thévenin/Norton

Cálculo del equivalente de Thévenin



- Circuito Abierto ($Z_L \to \infty, \quad U_{AB} = U_{oc}$)

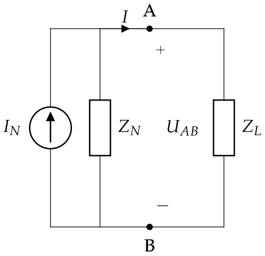
$$\boxed{\epsilon_{th} = U_{oc}}$$

- Cortocircuito ($Z_L = 0, \quad I = I_{sc}$)

$$\boxed{Z_{th} = \frac{\epsilon_{th}}{I_{sc}} = \frac{U_{oc}}{I_{sc}}}$$

Teoremas de Thévenin/Norton

Cálculo del equivalente de Norton



- Cortocircuito ($Z_L = 0, \quad I = I_{sc}$)

$$\boxed{I_N = I_{sc}}$$

- Circuito Abierto ($Z_L \to \infty, \quad U_{AB} = U_{oc}$)

$$\boxed{Z_N = \frac{U_{oc}}{I_N} = \frac{U_{oc}}{I_{sc}}}$$

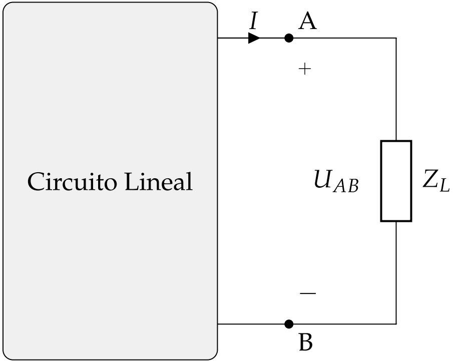
Observaciones

- Cálculo de la impedancia:
  - Si el circuito **no** contiene fuentes dependientes, se puede realizar **apagando** todos los **generadores** y obteniendo la impedancia equivalente.
  - Si el circuito contiene fuentes dependientes, es necesario conectar un **generador de prueba** a la salida del circuito y obtener la relación entre la tensión y corriente de este generador.
- Gracias a la equivalencia de fuentes, una vez obtenido uno de los equivalentes se puede obtener el otro mediante una transformación.

Máxima Transferencia de Potencia

Planteamiento

Sea el circuito lineal de la figura. ¿Qué impedancia Z_L hay que conectar en los terminales AB para que el circuito entregue la máxima potencia disponible?

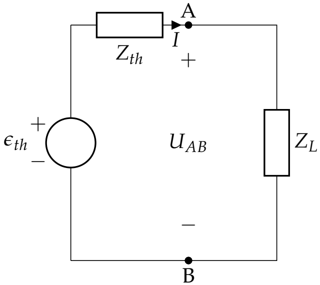


Resolvemos esta pregunta mediante el generador equivalente de Thévenin.

Máxima Transferencia de Potencia

Ecuaciones

Calculamos la potencia activa en la impedancia de carga Z_L:



$$\overline{Z}_{th} = R_{th} + jX_{th}$$
$$\overline{Z}_L = R_L + jX_L$$

$$\bar{I} = \frac{\bar{\epsilon}_{th}}{\overline{Z}_{th} + \overline{Z}_L}$$
$$P_L = I^2 \cdot R_L$$
$$\boxed{P_L = \frac{\epsilon_{th}^2}{|\overline{Z}_{th} + \overline{Z}_L|^2} \cdot R_L}$$

Las condiciones de máximo son:

$$\boxed{\frac{\partial P_L}{\partial X_L} = 0 \qquad \frac{\partial P_L}{\partial R_L} = 0}$$

Máxima Transferencia de Potencia

Reactancia

A partir de la expresión de potencia en la carga…

$$P_L = \frac{\epsilon_{th}^2}{|\overline{Z}_{th} + \overline{Z}_L|^2} \cdot R_L$$

calculamos la derivada parcial respecto de la reactancia:

$$\frac{\partial P_L}{\partial X_L} = \epsilon_{th}^2 \cdot R_L \cdot \left[\frac{-1}{\left((R_L + R_{th})^2 + (X_L + X_{th})^2\right)^2} \cdot 2 \cdot (X_L + X_{th}) \right]$$

Aplicamos la condición de máximo y obtenemos un resultado parcial:

$$\frac{\partial P_L}{\partial X_L} = 0 \Rightarrow \boxed{X_L = -X_{th}}$$

Máxima Transferencia de Potencia

Resistencia

Simplificamos la expresión de la potencia teniendo en cuenta el resultado anterior ($X_L = -X_{th}$):

$$P_L = \frac{\epsilon_{th}^2}{(R_{th} + R_L)^2} \cdot R_L$$

Calculamos la derivada parcial respecto de la resistencia:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_L}{\partial R_L} &= \epsilon_{th}^2 \cdot \left[\frac{1}{(R_L + R_{th})^2} - 2 \cdot \frac{R_L}{(R_L + R_{th})^3} \right] \\ &= \frac{\epsilon_{th}^2 \cdot (R_{th} - R_L)}{(R_L + R_{th})^3} \end{aligned}$$

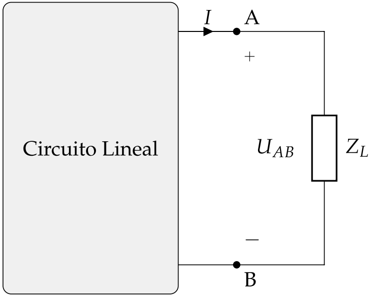
Nuevamente, aplicamos la condición de máximo y obtenemos la resistencia:

$$\frac{\partial P_L}{\partial R_L} = 0 \Rightarrow \boxed{R_L = R_{th}}$$

Máxima Transferencia de Potencia

Impedancia de carga

Dado un circuito lineal (del que podemos calcular su equivalente de Thévenin) ...



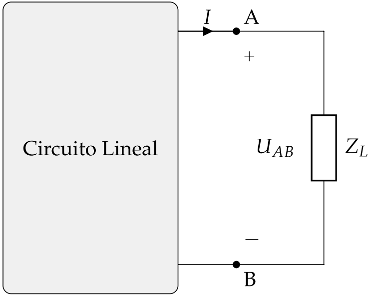
... la impedancia de carga que hay que conectar entre sus terminales AB para obtener la máxima potencia disponible es:

$$\boxed{\overline{Z}_L = \overline{Z}_{th}^*}$$

Máxima Transferencia de Potencia

Máxima potencia disponible

La máxima potencia disponible en la carga es:



$$\left.\begin{aligned} \overline{Z}_L &= \overline{Z}^*_{th} \\ P_L &= \frac{\epsilon^2_{th}}{|\overline{Z}_{th}+\overline{Z}_L|^2} \cdot R_L \end{aligned}\right\} \rightarrow \boxed{P_L = \frac{\epsilon^2_{th}}{4R_{th}}}$$

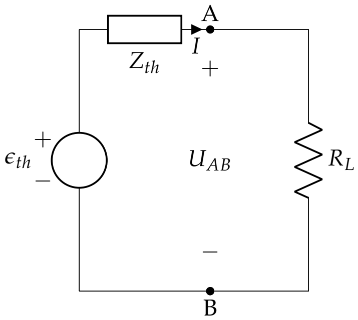
Máxima Transferencia de Potencia

Carga Resistiva

Si la impedancia de carga es resistiva pura:

$$P_L = \frac{\epsilon_{th}^2}{(R_{th} + R_L)^2 + X_{th}^2} \cdot R_L$$

Aplicando $\frac{\mathrm{d}P_L}{\mathrm{d}R_L} = 0$ obtenemos:

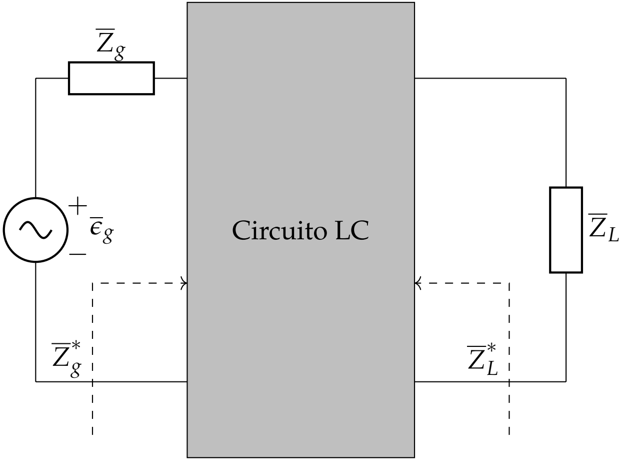


$$R_L = |\overline{Z}_{th}| = \sqrt{R_{th}^2 + X_{th}^2}$$

$$P_L = \frac{\epsilon_{th}^2}{2(R_L + R_{th})}$$

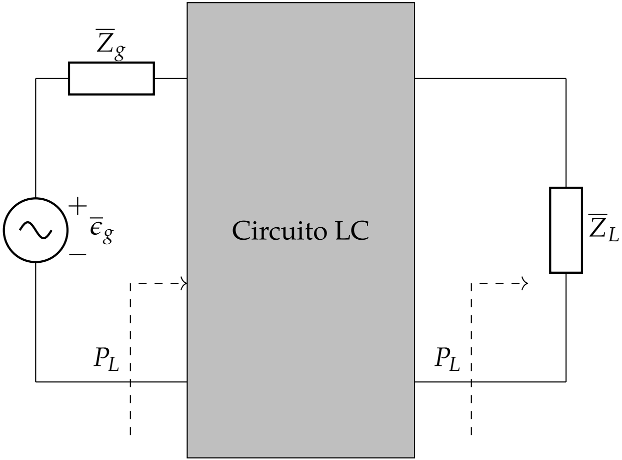
Planteamiento

Si a la entrada de un circuito no disipativo (LC) existe adaptación de impedancias, a la salida de este circuito también hay adaptación. Dado que $\overline{Z}_L \neq \overline{Z}_g^*$, el circuito LC es una red adaptadora.



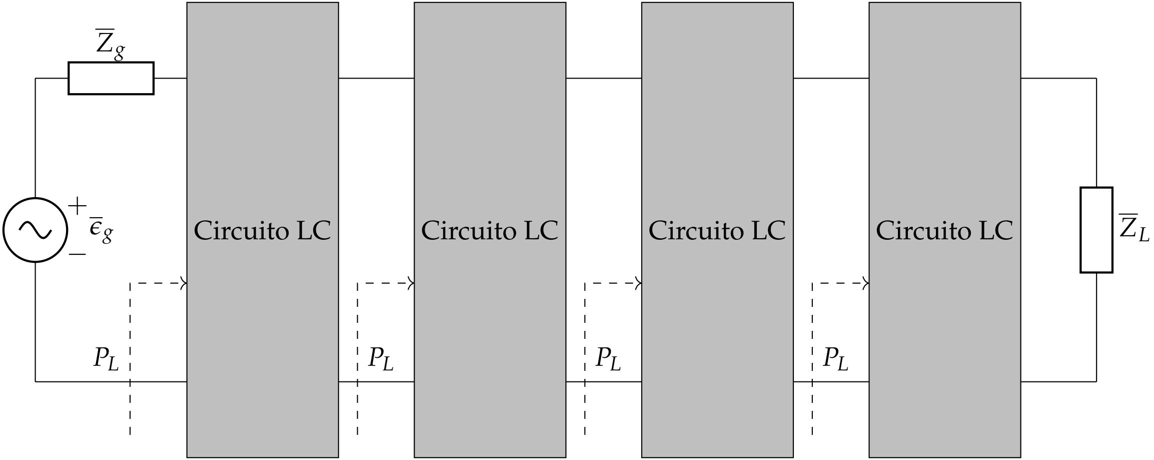
Potencia

Dado que el circuito LC no consume potencia activa, la potencia a la entrada es la potencia consumida por la carga. Por tanto, si la potencia a la entrada es máxima (adaptación en la entrada), también lo será a la salida (adaptación a la salida).



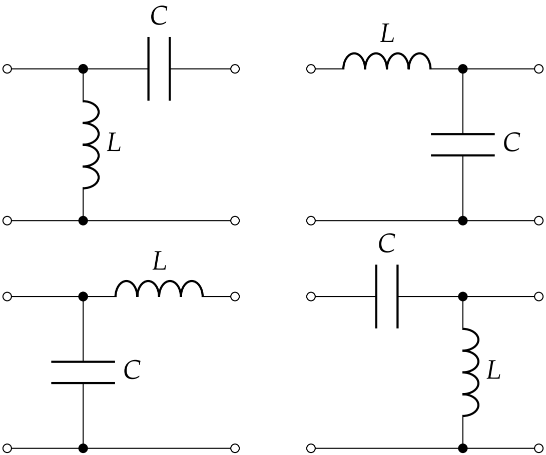
Redes en cascada

Si en una cascada de circuitos LC existe adaptación de impedancias en un punto de la cadena, existirá adaptación en cualquier punto de la misma.



Diseño de redes adaptadoras

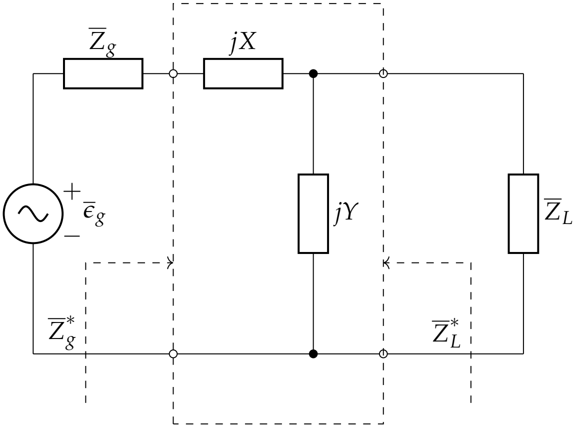
Emplearemos redes en L compuestas por dos elementos reactivos.

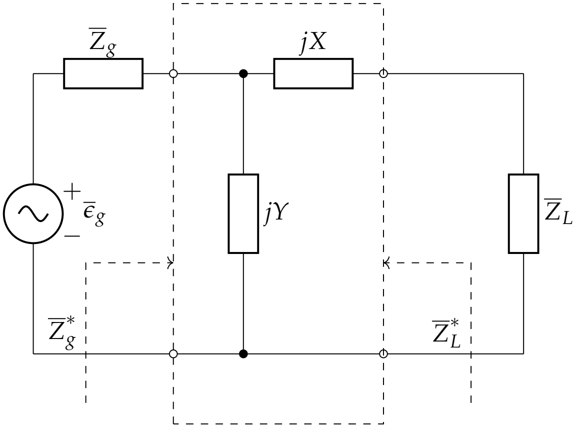


Esta adaptación es selectiva: si varía la frecuencia, no habrá adaptación.

Diseño de redes adaptadoras

La red debe diseñarse con el elemento paralelo en el extremo de la impedancia que tenga parte real mayor.





Diseño de redes adaptadoras: $R_g > R_L$

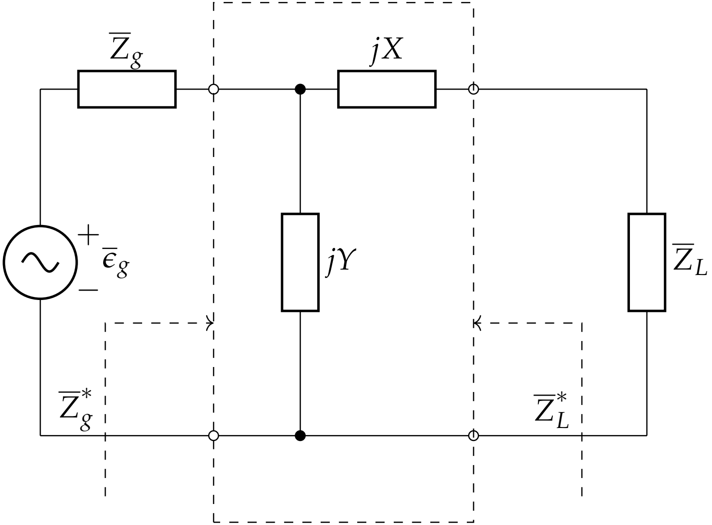
Condición:

$$\overline{Z}_L^* = jX + (jY || \overline{Z}_g)$$

Ecuaciones:

$$R_L = \Re\left(\frac{jY \cdot \overline{Z}_g}{jY + \overline{Z}_g}\right)$$

$$X_L = -X - \Im\left(\frac{jY \cdot \overline{Z}_g}{jY + \overline{Z}_g}\right)$$



Diseño de redes adaptadoras: $R_L > R_g$

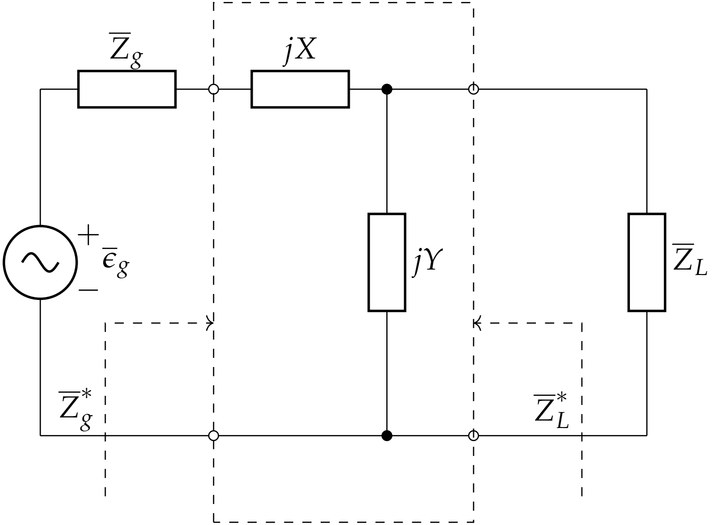
Condición:

$$\overline{Z}_g^* = jX + (jY || \overline{Z}_L)$$

Ecuaciones:

$$R_g = \Re\left(\frac{jY \cdot \overline{Z}_L}{jY + \overline{Z}_L}\right)$$

$$X_g = -X - \Im\left(\frac{jY \cdot \overline{Z}_L}{jY + \overline{Z}_L}\right)$$

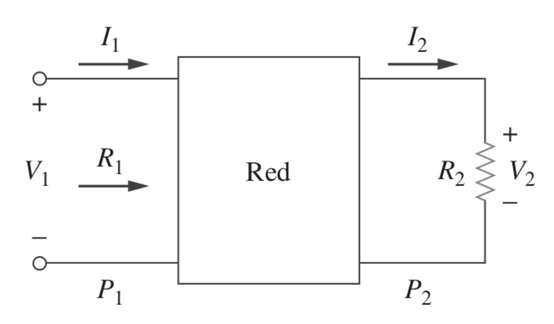


Pérdidas de transmisión e inserción

Decibelio: potencias

El **decibelio** (dB) se emplea para medir la ganancia de potencia o la ratio de dos niveles de potencia:

$$G_{dB} = 10 \log G = 10 \log \frac{P_2}{P_1}$$

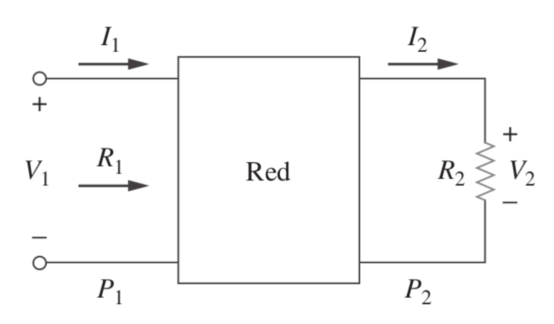


Pérdidas de transmisión e inserción

Decibelio: tensiones

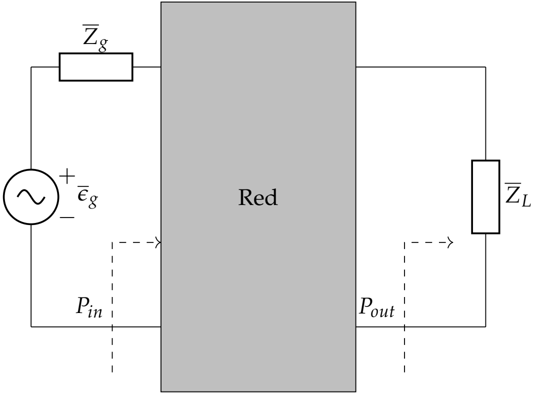
Suponiendo $R_1 = R_2$, también se emplea para medir la ganancia de tensión/corriente:

$$G_{dB} = 10 \log \frac{U_2^2}{U_1^2} = 20 \log \frac{U_2}{U_1}$$



Pérdidas de transmisión

Las pérdidas de transmisión, α_T, asociadas a una red miden la relación entre la potencia de entrada, P_{in}, y la potencia de salida, P_{out}.



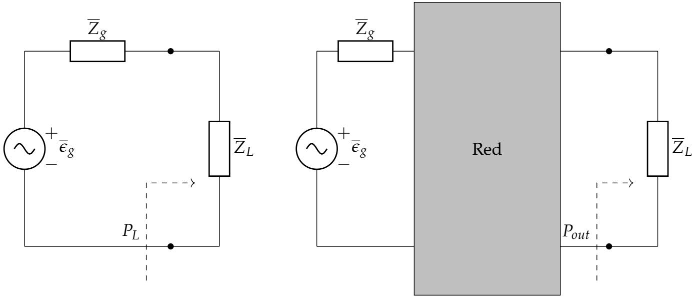
$$\alpha_T = 10 \log \frac{P_{in}}{P_{out}} \mathrm{dB}$$

Si la red es no disipativa (LC), $P_{in} = P_{out} \rightarrow \alpha_T = 0\,\mathrm{dB}$.

Pérdidas de inserción

Las pérdidas de inserción, α_I, asociadas a una red miden la relación entre la potencia entregada a la carga sin la red, P_L, y la potencia entregada a la carga con la red insertada.

$$\alpha_I = 10 \log \frac{P_L}{P_{out}} \mathrm{dB}$$



En el caso de una red adaptadora, $P_{out} > P_L$, por lo que $\alpha_I < 0$ (ganancia de inserción).