Introducción al Régimen Transitorio

Teoría de Circuitos

Oscar Perpiñán Lamigueiro

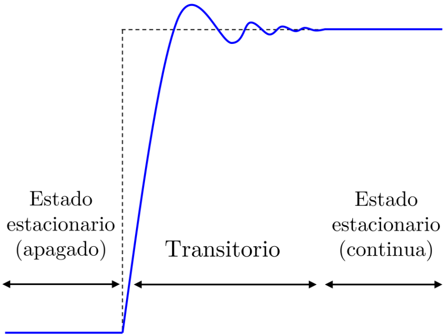
Régimen Permanente o Estacionario

Un circuito en régimen permanente o estacionario está en equilibrio:

- Las tensiones y corrientes en los elementos son constantes en amplitud y fase.
- La energía almacenada en las bobinas y condensadores no varía.

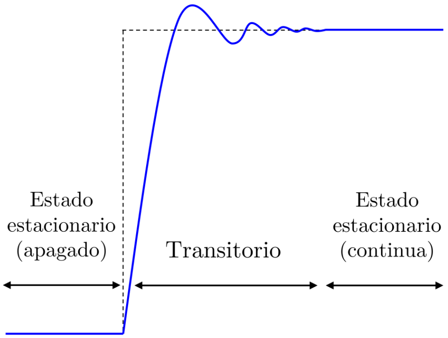
Régimen transitorio

- El equilibrio se rompe cuando se produce algún cambio en el circuito (apertura o cierre de interruptores, activación o apagado de fuentes, modificación de elementos pasivos).
- El circuito entra en régimen transitorio hasta que se alcanza un nuevo equilibrio:
  - La energía almacenada en condensadores y bobinas se redistribuye.
  - Las tensiones y corrientes varían de forma exponencial.



Régimen transitorio

- La redistribución de energía **no** se puede realizar de forma **inmediata**:
  - **Duración corta** (µs) pero superior a 0, dependiendo de **relación entre acumulación y disipación** (resistencia).
- En general, el estado transitorio es indeseado en sistemas eléctricos, pero provocado en sistemas electrónicos.



Ecuaciones integro-diferenciales

Al aplicar Kirchhoff a un circuito lineal obtenemos ecuaciones integro-diferenciales.

$$u_L(t) = L \cdot \frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} \leftrightarrow i_L(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} u_L(t')\mathrm{d}t'$$

$$i_C(t) = C \cdot \frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} \leftrightarrow u_C(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C(t')\mathrm{d}t'$$

Por ejemplo, la ecuación de un circuito RLC será de la forma:

$$a \cdot \frac{\mathrm{d}^2 f(t)}{\mathrm{d}t^2} + b \cdot \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} + c \cdot f(t) = g(t)$$

Respuesta completa de una red lineal

La solución de esta ecuación para $t > 0$ (respuesta completa del circuito lineal al transitorio) tiene dos componentes:

$$\boxed{f(t) = f_n(t) + f_\infty(t)}$$

- Respuesta **natural** o propia, $f_n(t)$:
  - Respuesta sin fuentes.
  - Determinada por la energía almacenada previamente y por la configuración del circuito.
  - Contiene constantes de integración. Se necesita información del estado del circuito en el instante que da origen al transitorio.
- Respuesta **forzada** o particular, $f_\infty(t)$:
  - Determinada por las fuentes existentes en $t > 0$.
  - Es la respuesta del circuito tras un tiempo suficiente, $t \to \infty$ (régimen permanente).

Condiciones iniciales

- El instante del cambio se representa habitualmente con $t = 0$:
  - $t = 0^-$: tiempo inmediatamente anterior al cambio.
  - $t = 0^+$: tiempo inmediatamente posterior al cambio.
- Las **condiciones iniciales** son el estado del circuito en el instante temporal en el que se produce el cambio.
  - **Se calculan** con las energías almacenadas en bobinas y condensadores en $t = 0^-$.
  - **Se aplican** a la topología del circuito en $t = 0^+$.
- Determinan las **constantes de integración** de la respuesta natural.

Resistencia

No acumula energía: sigue los cambios de forma instantánea.

$$u(t) = Ri(t)$$

Inductancia

La corriente en una bobina no puede variar de forma abrupta (implica tensión infinita).

$$u_L(t) = L \cdot \frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} \leftrightarrow i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{t} u_L(t')\mathrm{d}t'$$

$$\boxed{i_L(0^-) = i_L(0^+)}$$

Capacidad

La tensión en un condensador no puede variar de forma abrupta (implica corriente infinita).

$$i_C(t) = C \cdot \frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} \leftrightarrow u_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t} i_C(t')\mathrm{d}t'$$

$$\boxed{u_C(0^-) = u_C(0^+)}$$

Definición

- Circuitos que tienen un **único elemento de acumulación** (o *varios elementos que pueden ser simplificados a un elemento equivalente*) y parte resistiva.

- **Ecuación diferencial de primer orden**: la respuesta natural es siempre una **exponencial decreciente**.

- Circuitos típicos:
  - RL serie
  - RC paralelo

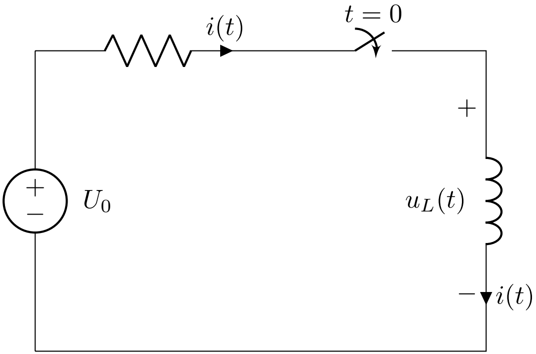
Respuesta natural y forzada

El método de resolución analiza el circuito en tres etapas:

- Cálculo de las **condiciones iniciales**, analizando el circuito en $t < 0$.
- **Respuesta natural**: análisis del circuito *sin fuentes* en $t > 0$ (la energía acumulada en $t < 0$ se disipa en la resistencia).
- **Respuesta forzada**: análisis del circuito *con fuentes* en $t > 0$ (la respuesta está determinada por la forma de onda de las fuentes).

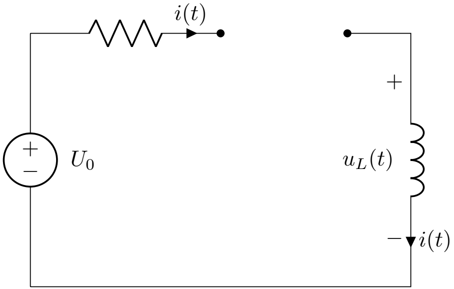
Circuito básico

- En $t < 0$ la fuente está desconectada.
- En $t = 0$ se cierra el interruptor.
- En $t > 0$ la fuente alimenta el circuito RL (la bobina almacena energía).



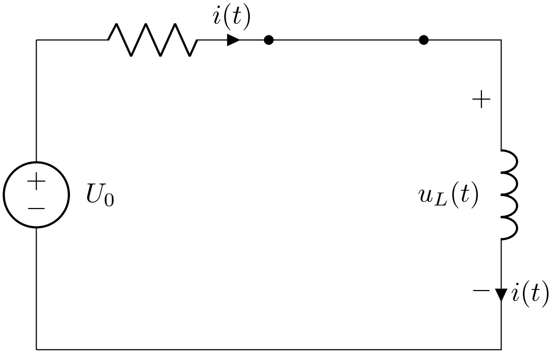
Condiciones Iniciales

Analizando el circuito para $t < 0$ ...



... obtenemos $i(0^-) = 0$ (*resultado particular de este circuito.*)

Circuito en $t > 0$

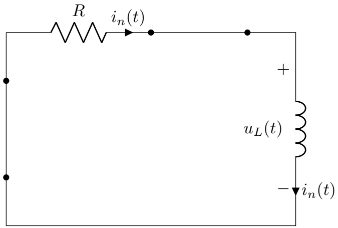


$$u_R(t) + u_L(t) = U_0$$

$$Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = U_0$$

Respuesta Natural

Apagamos la fuente:



$$u_R(t) + u_L(t) = 0$$
$$Ri_n + L\frac{\mathrm{d}i_n}{\mathrm{d}t} = 0$$

Solución Genérica

$$\boxed{i_n(t) = Ae^{st}}$$

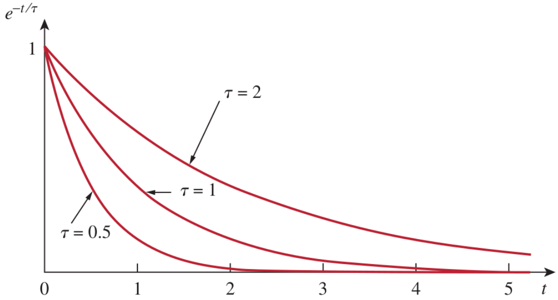
Ecuación Característica

$$s + \frac{R}{L} = 0 \Rightarrow \boxed{s = -\frac{R}{L}}$$

Constante de tiempo

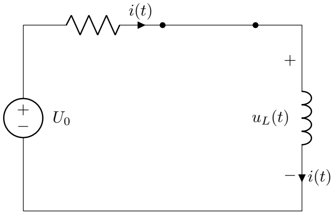
$$\boxed{i_n(t) = Ae^{-t/\tau}}$$

- $\tau = \frac{L}{R}$ es la constante de tiempo (unidades [s]).
- Ratio entre almacenamiento (L) y disipación (R).
- Valores altos de τ implican decrecimiento lento.
- La respuesta natural «desaparece» tras $\simeq 5\tau$.



Respuesta forzada

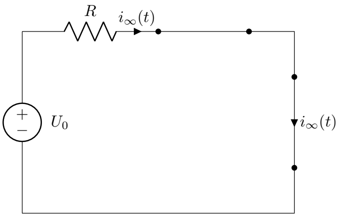
Volvemos a activar la fuente:



$$u_R(t) + u_L(t) = u(t) \rightarrow Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = U_0$$

Respuesta forzada

Para la solución particular, i_∞, se propone una función análoga a la excitación (analizando circuito para $t \to \infty$):



$$i_\infty(t) = U_0/R$$

Respuesta completa

$$i(t) = i_n(t) + i_\infty(t) \rightarrow \begin{cases} i_n(t) = Ae^{st} \\ i_\infty(t) = U_0/R \end{cases}$$

Para determinar el valor de la constante de integración particularizamos en $t = 0$:

$$i(0^+) = A + U_0/R \rightarrow A = i(0^+) - i_\infty(0^+)$$

Teniendo en cuenta la condición de continuidad, $i(0^+) = i(0^-) = 0$, obtenemos:

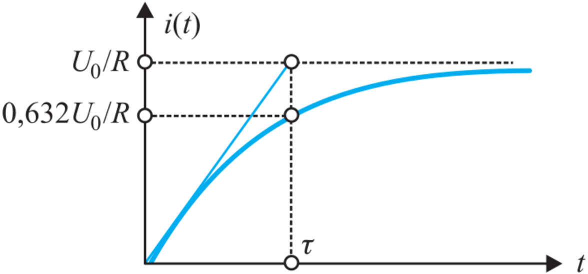
$$A = 0 - U_0/R$$

La solución completa es (*en este circuito de ejemplo*):

$$\boxed{i(t) = \frac{U_0}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})}$$

Respuesta completa

$$\boxed{i(t) = \frac{U_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$$

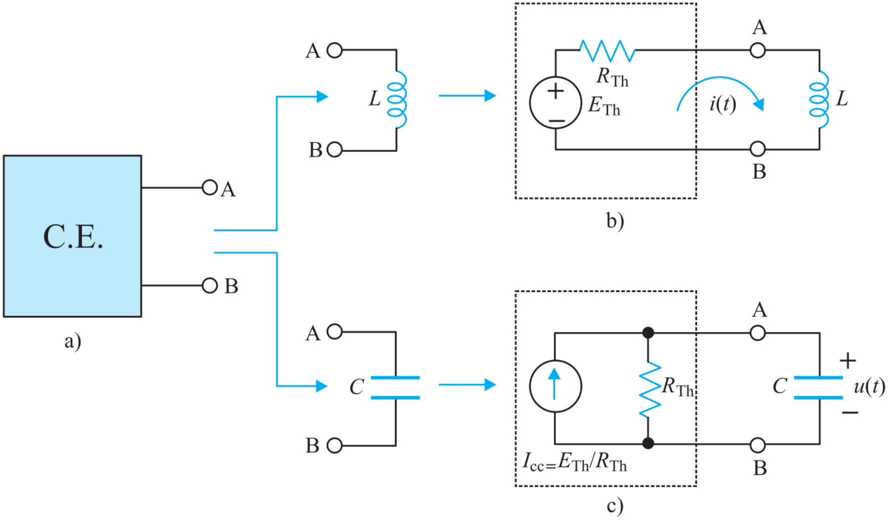


Expresión general de la respuesta completa

$$\boxed{i(t) = \left[i(0^+) - i_\infty(0^+)\right] e^{-t/\tau} + i_\infty(t)}$$

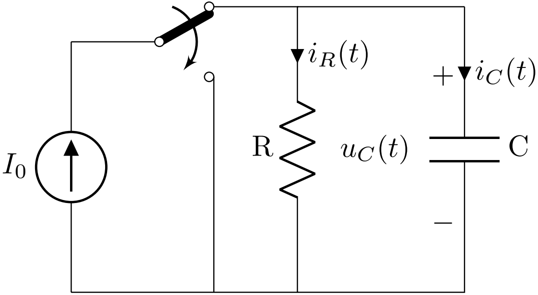
- $i(0^+)$: corriente en la bobina, condiciones iniciales, $i(0^-) = i(0^+)$.
- $i_\infty(t)$: corriente en la bobina en régimen permanente para $t > 0$.
- $i_\infty(0^+)$: corriente en la bobina en régimen permanente particularizada en $t = 0$.

Equivalente de Thévenin



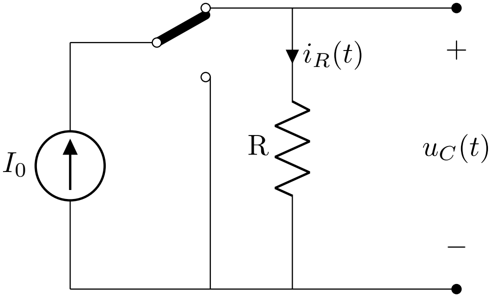
Circuito básico

- En $t < 0$ la fuente alimenta el circuito RC (el condensador se carga).
- En $t = 0$ se desconecta la fuente
- En $t > 0$ el condensador comienza a descargarse en la resistencia.



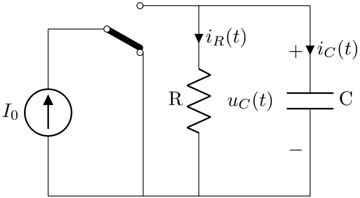
Condiciones iniciales

Analizamos el circuito en $t < 0$:



$$u_c(0^-) = R \cdot I_0$$

Respuesta natural



Ecuaciones

$$i_R(t) + i_C(t) = 0$$

$$Gu_n + C\frac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}t} = 0$$

Solución Genérica

$$u_n(t) = Ae^{st}$$

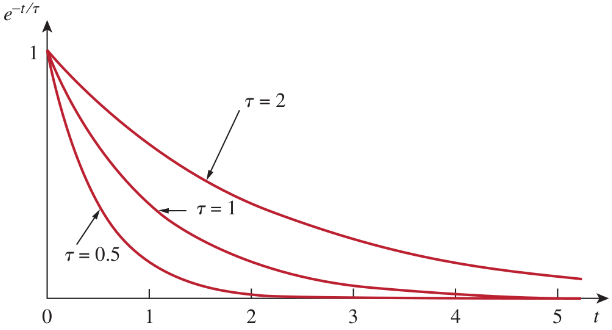
Respuesta natural

$$\boxed{u_n(t) = U_0 e^{-G/Ct}}$$

Constante de tiempo

- $\tau = \frac{C}{G}$ es la constante de tiempo (unidades [s]).
- Ratio entre almacenamiento (C) y disipación (G).

$$\boxed{u_n(t) = U_0 e^{-t/\tau}}$$

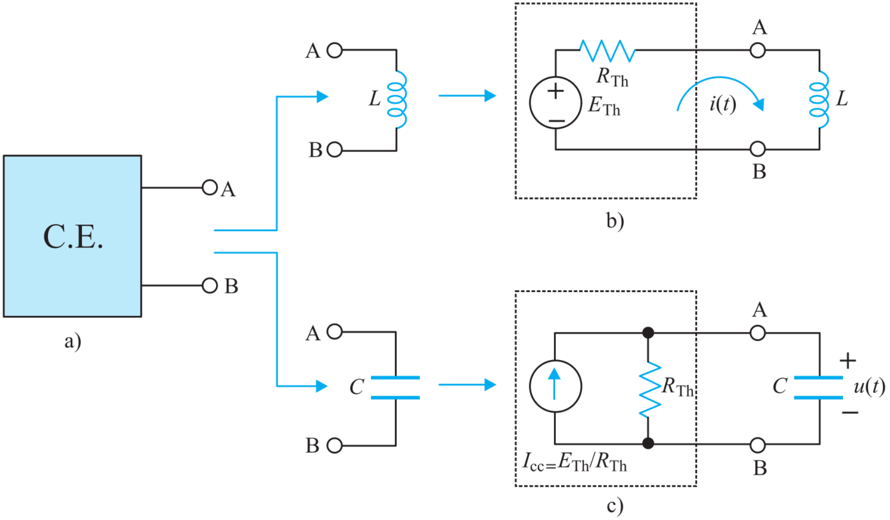


Expresión general de la respuesta completa

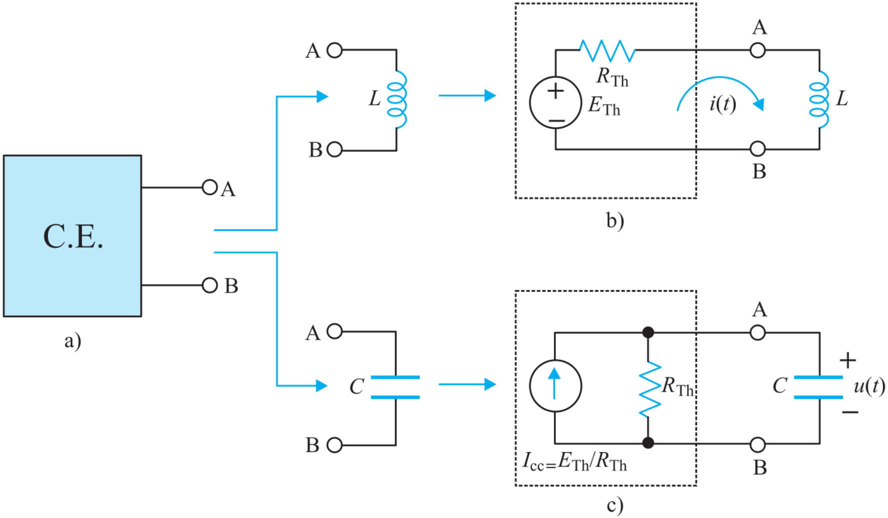
$$\boxed{u(t) = \left[u(0^+) - u_\infty(0^+)\right] e^{-t/\tau} + u_\infty(t)}$$

- $u(0^+)$: tensión en el condensador, condiciones iniciales, $u(0^-) = u(0^+)$.
- $u_\infty(t)$: tensión en el condensador en régimen permanente para $t > 0$.
- $u_\infty(0^+)$: tensión en el condensador en régimen permanente particularizada en $t = 0$.

Equivalente de Norton



Equivalente de Thévenin/Norton



Procedimiento General

- Dibujar el circuito para $t < 0$.
  - Determinar variables en régimen permanente, $u_c(t)$, $i_L(t)$.
  - Particularizar para $t = 0$, obteniendo $u_c(0^-)$ o $i_L(0^-)$.
  - Continuidad: $u_c(0^+) = u_c(0^-)$, $i_L(0^+) = i_L(0^-)$.
- Dibujar el circuito para $t > 0$.
  - Calcular el equivalente de Thevenin (Norton) visto por el elemento de acumulación.
  - La constante de tiempo de la respuesta natural es $\tau = \frac{L}{R_{th}}$ o $\tau = \frac{C}{G_{th}}$.
  - Calcular las variables $i_L(t)$ o $u_c(t)$ en régimen permanente, obteniendo $i_\infty(t)$ o $u_\infty(t)$.
- Obtener respuesta completa:

$$
\begin{aligned}
i_L(t) &= \left(i_L(0^+) - i_\infty(0^+)\right) e^{-t/\tau} + i_\infty(t) \\
u_C(t) &= \left(u_C(0^+) - u_\infty(0^+)\right) e^{-t/\tau} + u_\infty(t)
\end{aligned}
$$

Introducción

- Circuitos que tienen **dos elementos de acumulación** que intercambian energía, y parte resistiva que disipa energía.

- **Ecuación diferencial de segundo orden**: la respuesta natural incluye exponenciales decrecientes y quizás señal sinusoidal.

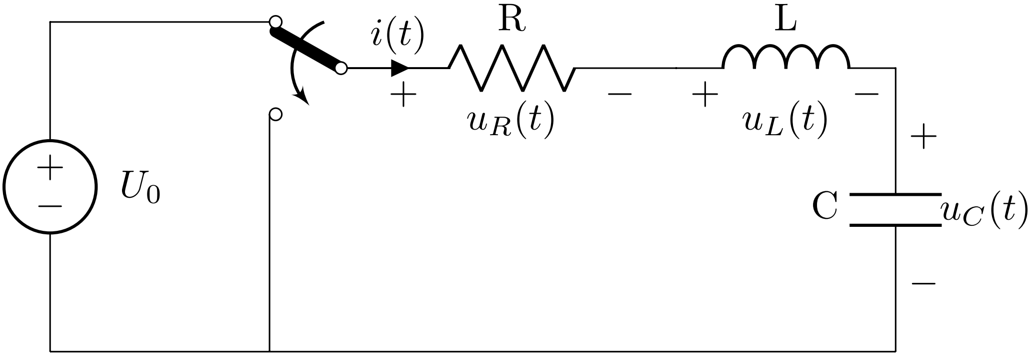
- Circuitos típicos:
  - RLC serie
  - RLC paralelo

Respuesta natural y forzada

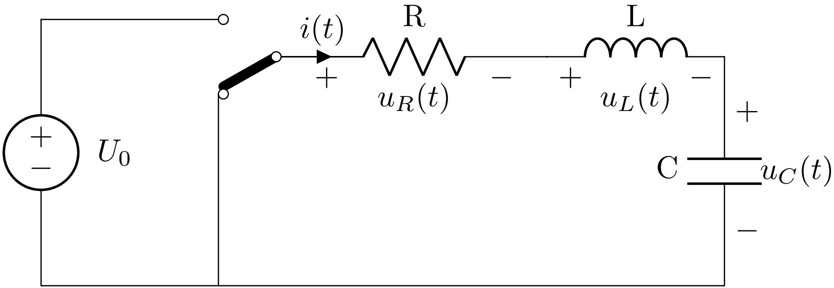
El método de resolución analiza el circuito en tres etapas:

- Cálculo de las **condiciones iniciales**, analizando el circuito en $t < 0$.
- **Respuesta natural**: análisis del circuito *sin fuentes* en $t > 0$ (la energía acumulada en $t < 0$ se redistribuye/disipa).
- **Respuesta forzada**: análisis del circuito *con fuentes* en $t > 0$ (la respuesta está determinada por la forma de onda de las fuentes).

Circuito básico



Respuesta natural (t > 0)



$$Ri(t) + L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(t')\mathrm{d}t' = 0$$

$$L\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}i = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}i = 0}$$

Solución

Ecuación diferencial

$$\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC} i = 0$$

$$i_n(t) = A \cdot e^{st}$$

Ecuación característica

$$s^2 + \frac{R}{L} s + \frac{1}{LC} = 0$$

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

Parámetros

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0$$
$$s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0$$

$$\alpha = \frac{R}{2L}$$
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$
$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$
$$\xi = \frac{\alpha}{\omega_0}$$

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$
$$i_n(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

- α: coeficiente de amortiguamiento exponencial
- ω_0: pulsación natural no amortiguada
- ω_d: pulsación natural amortiguada
- ξ: factor de amortiguamiento

Posibles soluciones

$$\boxed{s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}}$$

$\alpha > \omega_0,\ \xi > 1$

- $s_{1,2}$: dos soluciones reales (negativas) distintas
- Circuito **sobreamortiguado**.

$\alpha = \omega_0,\ \xi = 1$

- $s_{1,2}$: solución real doble.
- Circuito con **amortiguamiento crítico**.

$\alpha < \omega_0,\ \xi < 1$

- $s_{1,2}$: dos soluciones complejas conjugadas
- Circuito **subamortiguado**.

Tipos de Respuesta

- Tipo de respuesta determinado por relación entre R y L, C (disipación y almacenamiento).
- Resistencia crítica ($\alpha = \omega_0$, $\xi = 1$):

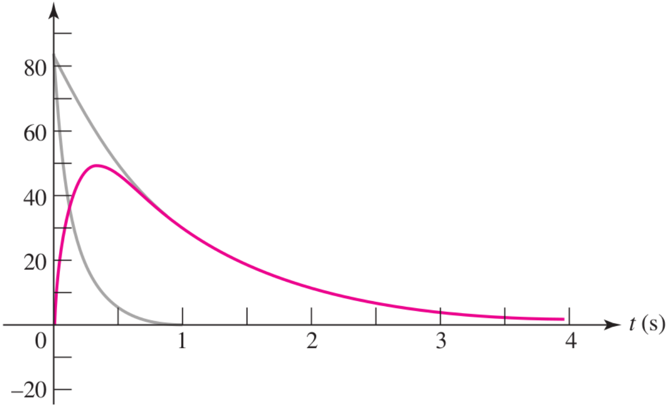
$$R_{cr} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Tipos

- $R > R_{cr}$, $\alpha > \omega_0$, $\xi > 1$: **sobreamortiguado**
- $R = R_{cr}$, $\alpha = \omega_0$, $\xi = 1$: **amortiguamiento crítico**
- $R < R_{cr}$, $\alpha < \omega_0$, $\xi < 1$: **subamortiguado**

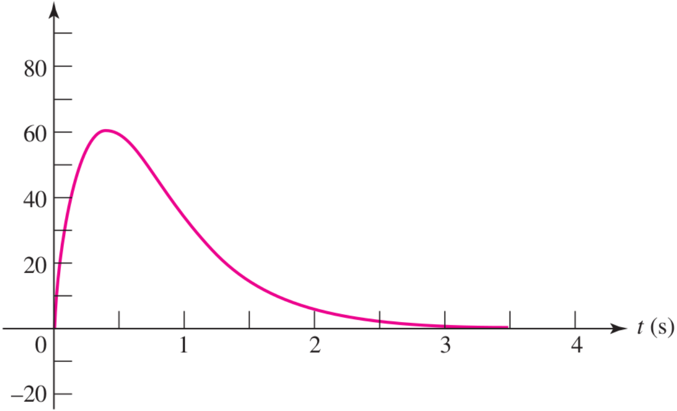
Circuito Sobreamortiguado ($\alpha > \omega_0$)

$$\boxed{i_n(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}}$$



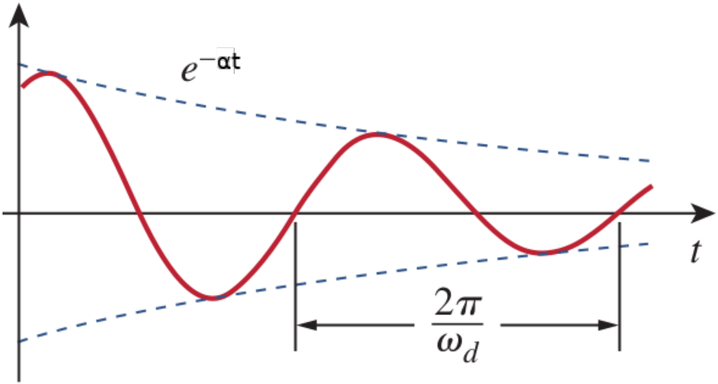
Amortiguamiento Crítico ($\alpha = \omega_0$)

$$\boxed{i_n(t) = (A_1 + A_2 t)e^{st}}$$



Circuito Subamortiguado ($\alpha < \omega$)

$$\boxed{i_n(t) = (B_1 \cos(\omega_d t) + B_2 \sin(\omega_d t))e^{-\alpha t}}$$



Condiciones Iniciales

Dos constantes a determinar

Son necesarias dos tipos de condiciones iniciales:

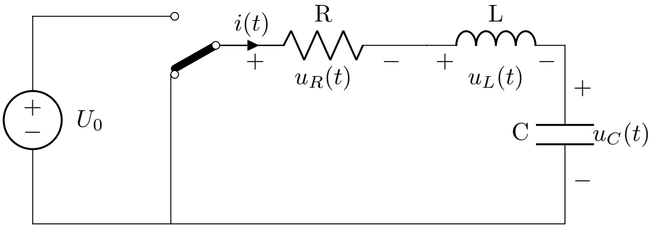
$$i_L(0^+) = i_L(0^-)$$

$$u_L(t) = L \cdot \frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} \longrightarrow \left(\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0^+} = \frac{1}{L} u_L(0^+)$$

Derivadas en el origen

Para obtener valores de las derivadas en el origen hay que resolver el circuito en $t = 0^+$ empleando las condiciones de continuidad.

Derivadas en $t = 0^+$



$$\left(\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0^+} = \frac{1}{L} u_L(0^+)$$

$$u_L(0^+) = -u_R(0^+) - u_c(0^+)$$

$$u_R(0^+) = R i_L(0^+)$$

$$\boxed{\left(\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0^+} = -\frac{1}{L}\left(R i_L(0^+) + u_c(0^+)\right)}$$

Respuesta Completa

Las condiciones iniciales deben evaluarse teniendo en cuenta la respuesta forzada (si existe).

$$i_L(0^+) = i_n(0^+) + i_\infty(0^+)$$
$$\left(\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0^+} = \left(\frac{\mathrm{d}i_n}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0^+} + \left(\frac{\mathrm{d}i_\infty}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0^+}$$

Ejemplo de Respuesta Completa

Circuito RLC serie sobreamortiguado con generador de tensión DC funcionando en $t > 0$.

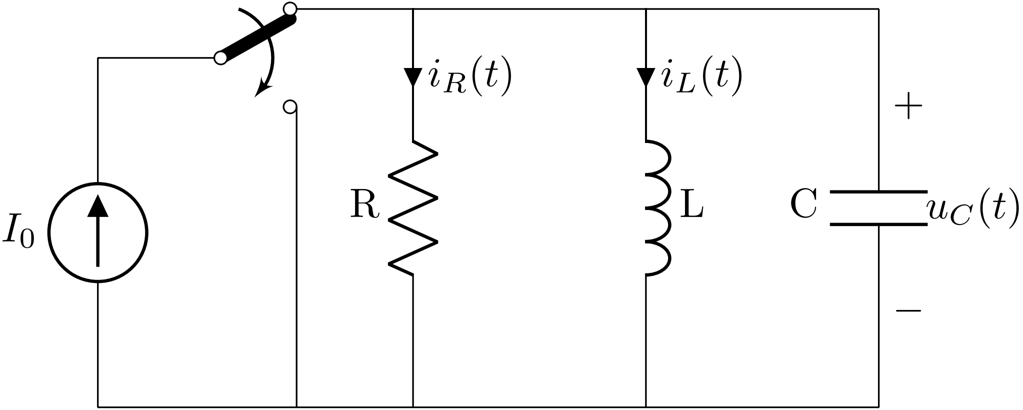
Respuesta Completa

$$i_L(t) = I_\infty + A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

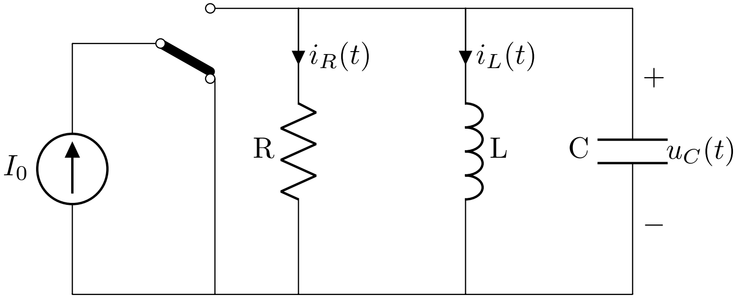
Condiciones Iniciales

$$\begin{aligned} i_L(0^+) &= I_\infty + A_1 + A_2 \\ \left(\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0^+} &= 0 + A_1 s_1 + A_2 s_2 \end{aligned}$$

Circuito básico



Respuesta natural (t > 0)



$$Gu(t) + C\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} u(t')\mathrm{d}t' = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{G}{C}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}u = 0$$

Solución

Ecuación diferencial

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{G}{C}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}u = 0$$

$$u_n(t) = A_1e^{s_1t} + A_2e^{s_2t}$$

Ecuación característica

$$s^2 + \frac{G}{C}s + \frac{1}{LC} = 0$$

$$s_{1,2} = -\frac{G}{2C} \pm \sqrt{\left(\frac{G}{2C}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

Parámetros

Ecuación característica

$$s^2 + \frac{G}{C}s + \frac{1}{LC} = 0$$
$$s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0$$

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$$u_n(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

$$\alpha = \frac{G}{2C}$$
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$
$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$
$$\xi = \frac{\alpha}{\omega_0}$$

Tipos de Respuesta

- Tipo de respuesta determinado por relación entre G y L, C (disipación y almacenamiento).
- Conductancia crítica ($\alpha = \omega_0$, $\xi = 1$):

$$G_{cr} = 2\sqrt{\frac{C}{L}}$$

Tipos

- $G > G_{cr}$, $\alpha > \omega_0$, $\xi > 1$: **sobreamortiguado**
- $G = G_{cr}$, $\alpha = \omega_0$, $\xi = 1$: **amortiguamiento crítico**
- $G < G_{cr}$, $\alpha < \omega_0$, $\xi < 1$: **subamortiguado**

Tipos de Respuesta

- Circuito Sobreamortiguado ($\alpha > \omega_0$)

$$\boxed{u_n(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}}$$

- Amortiguamiento Crítico ($\alpha = \omega_0$)

$$\boxed{u_n(t) = (A_1 + A_2 t)e^{st}}$$

- Circuito Subamortiguado ($\alpha < \omega$)

$$\boxed{u_n(t) = (B_1 \cos(\omega_d t) + B_2 \sin(\omega_d t))e^{-\alpha t}}$$

Condiciones Iniciales

Dos constantes a determinar

Son necesarias dos tipos de condiciones iniciales:

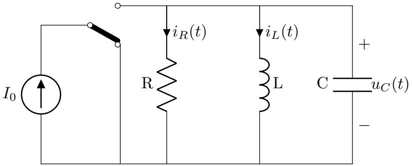
$$u_C(0^+) = u_C(0^-)$$

$$i_c(t) = C \cdot \frac{\mathrm{d}u_c(t)}{\mathrm{d}t} \longrightarrow \left(\frac{\mathrm{d}u_c(t)}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0^+} = \frac{1}{C} i_C(0^+)$$

Derivadas en el origen

Para obtener valores de las derivadas en el origen hay que resolver el circuito en $t = 0^+$ empleando las condiciones de continuidad.

Derivadas en $t = 0^+$: ejemplo RLC paralelo



$$\left(\frac{\mathrm{d}u_c(t)}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0^+} = \frac{1}{C} i_C(0^+)$$

$$i_C(0^+) = -i_R(0^+) - i_L(0^+)$$

$$i_R(0^+) = \frac{1}{R} u_C(0^+)$$

$$\boxed{\left(\frac{\mathrm{d}u_c(t)}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0^+} = -\frac{1}{C}\left(\frac{1}{R} u_C(0^+) + i_L(0^+)\right)}$$

Respuesta Completa

Las condiciones iniciales deben evaluarse teniendo en cuenta la respuesta forzada (si existe).

$$u_C(0^+) = u_n(0^+) + u_\infty(0^+)$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0^+} = \left(\frac{\mathrm{d}u_n(t)}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0^+} + \left(\frac{\mathrm{d}u_\infty(t)}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0^+}$$

Ejemplo de Respuesta Completa

Circuito RLC paralelo sobreamortiguado con generador de corriente DC funcionando en $t > 0$.

Respuesta Completa

$$u_c(t) = U_\infty + A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

Condiciones Iniciales

$$\begin{aligned} u_c(0^+) &= U_\infty + A_1 + A_2 \\ \left(\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0^+} &= 0 + A_1 s_1 + A_2 s_2 \end{aligned}$$