Análisis del Transitorio con la Transformada de Laplace

Teoría de Circuitos III

Oscar Perpiñán Lamigueiro

Motivación

- La resolución directa de las ecuaciones diferenciales (análisis clásico) exige esfuerzo y no se puede sistematizar fácilmente.
- La transformada de Laplace convierte las ecuaciones integrodiferenciales en **ecuaciones algebraicas** basadas en una variable compleja:

$$\mathbf{s} = \sigma + j\omega$$

- Todos los **métodos de análisis** de circuitos son **aplicables** de forma directa.
- Las **condiciones iniciales** del circuito quedan incorporadas automáticamente en las ecuaciones.

Definición

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-\mathbf{s}t} f(t)\mathrm{d}t = \mathbf{F}(\mathbf{s})$$

$$\mathbf{s} = \sigma + j\omega$$

Motivación: transformada de derivadas e integrales

$$\mathcal{L}\{\frac{df(t)}{dt}\} = \mathbf{sF(s)} - f(0^-)$$

$$\mathcal{L}\{\frac{d^2f(t)}{dt^2}\} = \mathbf{s}^2\mathbf{F(s)} - \mathbf{s}f(0^-) - \left.\frac{d}{dt}f\right|_{0^-}$$

$$\mathcal{L}\{\int_{0^-}^{t} f(x)\mathrm{d}t\} = \frac{\mathbf{F(s)}}{\mathbf{s}} + \frac{1}{\mathbf{s}}\int_{-\infty}^{0^-} f(t)\mathrm{d}t$$

Ejemplo: ecuación de un RLC serie

Ecuación diferencial

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0$$

Transformada de Laplace (sin condiciones iniciales)

$$\mathbf{s}^2 \mathbf{I}(\mathbf{s}) + \frac{R}{L}\mathbf{s}\mathbf{I}(\mathbf{s}) + \frac{1}{LC}\mathbf{I}(\mathbf{s}) = 0$$

Ecuación característica

$$\mathbf{s}^2 + \frac{R}{L}\mathbf{s} + \frac{1}{LC} = 0$$

Propiedades básicas

Linealidad

$$\mathcal{L}\{f_1(t) + f_2(t)\} = \mathbf{F_1}(\mathbf{s}) + \mathbf{F_2}(\mathbf{s})$$

$$\mathcal{L}\{k \cdot f(t)\} = k \cdot \mathbf{F}(\mathbf{s})$$

Desplazamiento temporal

$$\mathcal{L}\{f(t - \alpha)\} = e^{-\alpha \mathbf{s}} \mathbf{F}(\mathbf{s})$$

Desplazamiento en frecuencia

$$\mathcal{L}\{e^{-\alpha t} f(t)\} = \mathbf{F}(\mathbf{s} + \alpha)$$

Teoremas de valor inicial y final

- Útiles para comprobar una transformada o una transformada inversa.

Valor inicial

$$f(0^+) = \lim_{\mathbf{s}\to\infty} \mathbf{sF}(\mathbf{s})$$

Valor final

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{\mathbf{s}\to 0} \mathbf{sF}(\mathbf{s})$$

Transformadas importantes

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{\mathbf{s}} \qquad \mathcal{L}\{e^{-\alpha t}\} = \frac{1}{\mathbf{s}+\alpha}$$

$$\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{\mathbf{s}^2} \qquad \mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{\mathbf{s}^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = \frac{\omega}{\mathbf{s}^2+\omega^2} \qquad \mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} = \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{s}^2+\omega^2}$$

Transformada Inversa

Expresamos la transformada como una fracción de polinomios:

$$\mathbf{F}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{N}(\mathbf{s})}{\mathbf{D}(\mathbf{s})} = K\frac{(\mathbf{s}-z_1)(\mathbf{s}-z_2)\dots(\mathbf{s}-z_m)}{(\mathbf{s}-p_1)(\mathbf{s}-p_2)\dots(\mathbf{s}-p_n)}$$

- Las raíces de $\mathbf{N}(\mathbf{s})$ son los **ceros** de la transformada, z_i.
- Las raíces de $\mathbf{D}(\mathbf{s})$ son los **polos** de la transformada, p_i.

Para obtener la transformada inversa diferenciamos tres casos (o una combinación):

- Polos reales únicos
- Polos reales repetidos
- Polos conjugados.

Transformada Inversa

Polos reales únicos

Reescribimos la transformada como suma de fracciones (descomposición en fracciones parciales):

$$\mathbf{F}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{N}(\mathbf{s})}{\mathbf{D}(\mathbf{s})} = \frac{K_1}{\mathbf{s} - p_1} + \frac{K_2}{\mathbf{s} - p_2} + \ldots + \frac{K_n}{\mathbf{s} - p_n}$$

$$K_i = \left[(\mathbf{s} - p_i)\mathbf{F}(\mathbf{s}) \right]_{s=p_i}$$

$$f(t) = K_1 e^{p_1 t} + K_2 e^{p_2 t} + \ldots + K_n e^{p_n t}$$

Ejemplo 15.9 AS

$$\mathbf{F}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{s}^2 + 12}{\mathbf{s}(\mathbf{s}+2)(\mathbf{s}+3)}$$

Transformada Inversa

Polos reales repetidos

Nuevamente descomposición de fracciones parciales, y calculamos coeficientes K_i con el método algebraico (véase ejemplo 15.9 de AS)

$$\mathbf{F}(\mathbf{s}) = \frac{K_1}{\mathbf{s} - p_1} + \frac{K_2}{(\mathbf{s} - p_1)^2} + \frac{K_3}{(\mathbf{s} - p_1)^3} + \ldots + \frac{K_n}{(\mathbf{s} - p_1)^n}$$

$$f(t) = K_1 e^{p_1 t} + K_2 t e^{p_1 t} + K_3 t^2 e^{p_1 t} + \ldots + K_n t^{n-1} e^{p_1 t}$$

Ejemplo 15.10 AS

$$\mathbf{F}(\mathbf{s}) = \frac{10\mathbf{s}^2 + 4}{\mathbf{s}(\mathbf{s}+1)(\mathbf{s}+2)^2}$$

Transformada Inversa

Polos complejos conjugados

Nuevamente calculamos con el método algebraico, y terminamos «completando cuadrados».

$$\mathbf{F}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{N}(\mathbf{s})}{\mathbf{s}^2 + a\mathbf{s} + b} = \frac{A(\mathbf{s}+\alpha) + B\omega}{(\mathbf{s}^2 + 2\alpha\mathbf{s} + \alpha^2) + \omega^2}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{s}) = \frac{A(\mathbf{s}+\alpha)}{(\mathbf{s}+\alpha)^2 + \omega^2} + \frac{B\omega}{(\mathbf{s}+\alpha)^2 + \omega^2}$$

$$f(t) = Ae^{-\alpha t}\cos(\omega t) + Be^{-\alpha t}\sin(\omega t)$$

Ejemplo 15.11 AS

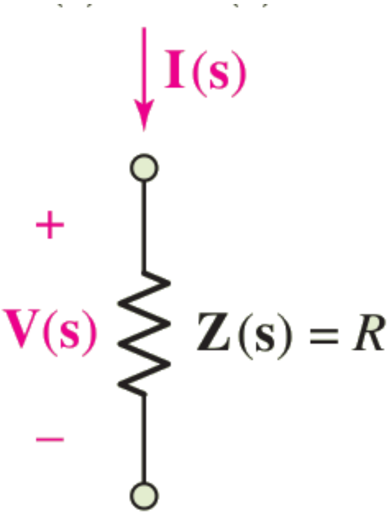
$$\mathbf{F}(\mathbf{s}) = \frac{20}{(\mathbf{s}+3)(\mathbf{s}^2 + 8\mathbf{s} + 25)}$$

Resistencia

$$v(t) = Ri(t)$$

$$\mathbf{U}(\mathbf{s}) = R\mathbf{I}(\mathbf{s})$$

$$\mathbf{Z}_R(\mathbf{s}) = R$$



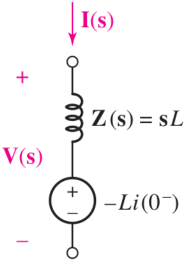
Bobina

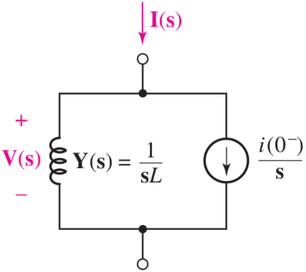
$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

$$\mathbf{U}(\mathbf{s}) = \mathbf{s}L\mathbf{I}(\mathbf{s}) - Li(0^-)$$

$$\mathbf{I}(\mathbf{s}) = \frac{1}{\mathbf{s}L}\mathbf{U}(\mathbf{s}) + \frac{i(0^-)}{\mathbf{s}}$$

$$\mathbf{Z}_L(\mathbf{s}) = \mathbf{s}L$$





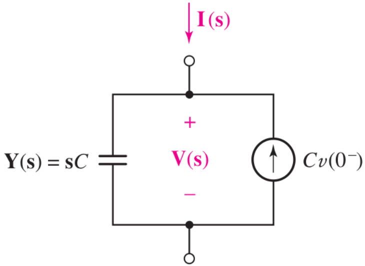
Condensador

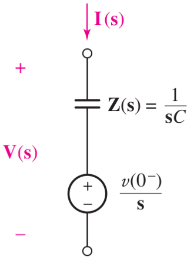
$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$$

$$\mathbf{I}(\mathbf{s}) = \mathbf{s}C\mathbf{U}(\mathbf{s}) - Cu(0^-)$$

$$\mathbf{U}(\mathbf{s}) = \frac{1}{\mathbf{s}C}\mathbf{I}(\mathbf{s}) + \frac{u(0^-)}{\mathbf{s}}$$

$$\mathbf{Z}_C(\mathbf{s}) = \frac{1}{\mathbf{s}C}$$



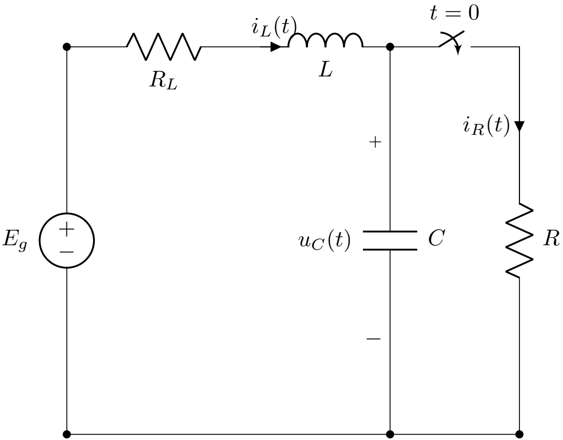


Procedimiento

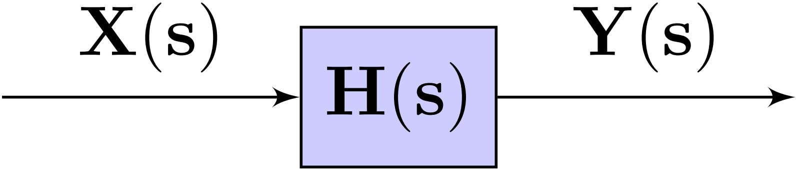
1. Determinar las **condiciones iniciales** en los elementos que almacenan energía: $i_L(0^-)$, $u_C(0^-)$.
2. **Transformar** el circuito **al dominio de Laplace**:
   - Resistencia por $\mathbf{Z}_R(\mathbf{s}) = R$.
   - Bobina por $\mathbf{Z}_L(\mathbf{s}) = \mathbf{s}L$ en serie con fuente de tensión de polaridad negativa.
   - Condensador por $\mathbf{Z}_C(\mathbf{s}) = \frac{1}{\mathbf{s}C}$ en serie con fuente de tensión.
   - Generadores por su transformada de Laplace.
3. **Resolver el circuito** con el método que corresponda (mallas, nudos, transformación de fuentes, etc.).
4. Determinar **transformada inversa** de la respuesta (conviene comprobar resultado con teoremas valor inicial y final).

Ejemplo (examen 2018-19)

$$E_g = 500\,\mathrm{V}$$
$$R_L = 10\,\Omega$$
$$L = 200\,\mathrm{mH}$$
$$C = 100\,\mathrm{mF}$$
$$R = 1\,\Omega$$



Función de Transferencia



$$\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{Y}(\mathbf{s})}{\mathbf{X}(\mathbf{s})} = K\frac{(\mathbf{s}-z_1)(\mathbf{s}-z_2)\dots(\mathbf{s}-z_m)}{(\mathbf{s}-p_1)(\mathbf{s}-p_2)\dots(\mathbf{s}-p_n)}$$

Polos y Ceros

Ceros

- $z_1 \ldots z_m$ son los ceros de $\mathbf{H}(\mathbf{s})$

$$\lim_{\mathbf{s} \to z_i} \mathbf{H}(\mathbf{s}) = 0$$

- Salida $\mathbf{Y}(\mathbf{s})$ nula

$$\mathbf{Y}(z_i) = \mathbf{H}(z_i) \cdot \mathbf{X}(z_i) = 0$$

Polos y Ceros

Polos

- $p_1 \ldots p_n$ son los polos de $\mathbf{H}(\mathbf{s})$

$$\lim_{\mathbf{s} \to p_i} \mathbf{H}(\mathbf{s}) = \infty$$

- Salida $\mathbf{Y}(\mathbf{s})$ no nula para entrada $\mathbf{X}(\mathbf{s})$ nula

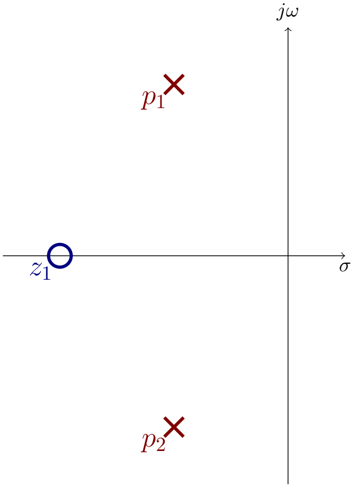
$$\mathbf{Y}(p_i) = \mathbf{H}(p_i) \cdot \mathbf{X}(p_i) \neq 0$$

- Raíces de la ecuación característica: **exponentes de la respuesta natural**

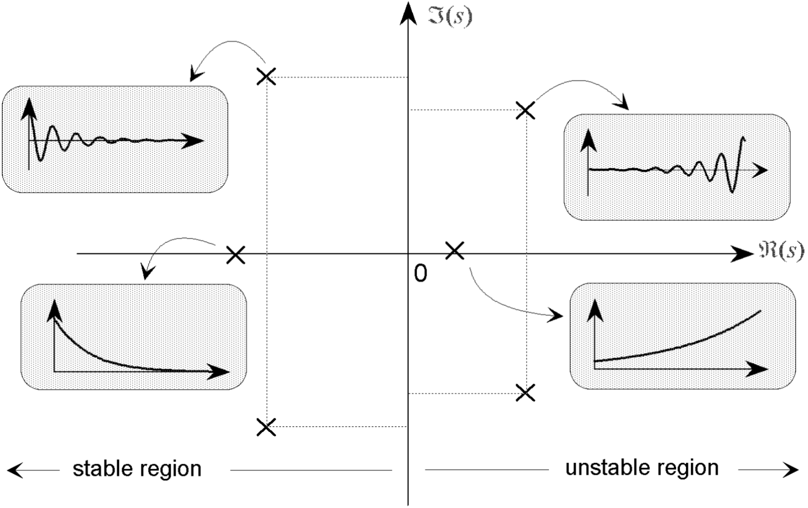
$$y_n(t) = \sum_{i=1}^{n} A_1 e^{p_i t}$$

Ejemplo Diagrama Polos y Ceros

$$\mathbf{H(s)} = \frac{\mathbf{s - z_1}}{\mathbf{(s - p_1) \cdot (s - p_2)}}$$

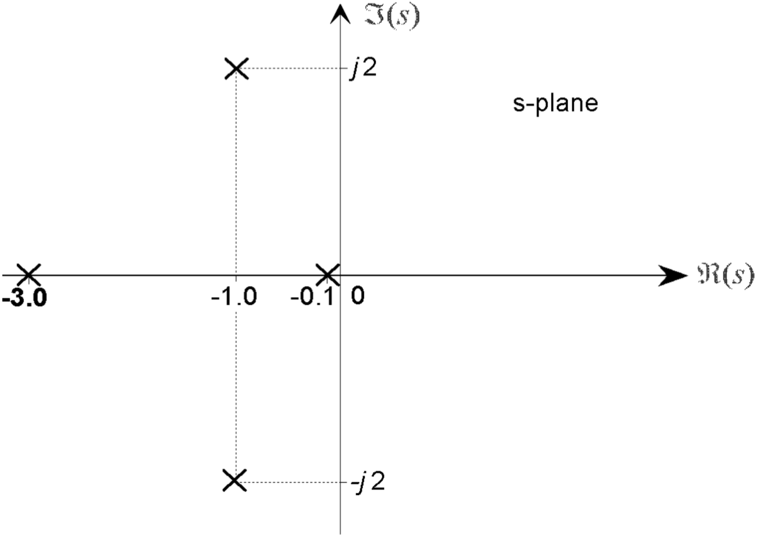


Significado Diagrama Polos y Ceros



Ejemplo Polos y Respuesta Natural

$$y_n(t) = A_1 e^{-3t} + A_2 e^{-0.1t} + A_3 e^{-t} \sin(2t + \theta)$$



Ejercicios

- AS: ejemplos 16.1, 16.3, 16.4, 16.6
- FM: ejemplos de aplicación 4.12, 4.13, 4.14 y 4.15
- HKD: ejemplo 15.4