Introducción al Régimen Transitorio

Teoría de Circuitos

Oscar Perpiñán Lamigueiro

Mayo 2020

Permanente y Transitorio

Régimen permanente o estacionario

Las tensiones y corrientes de un circuito son constantes (continua) o periódicas (alterna) (circuito estabilizado)

Régimen transitorio

- Para alcanzar el régimen permanente (o para alternar entre dos regímenes permanentes) el circuito atraviesa el régimen transitorio.
- Posibles cambios: activación o apagado de fuentes, cambio en las cargas, cambio en el circuito (línea).
- En general, el estado transitorio es indeseado en sistemas eléctricos, pero provocado en sistemas electrónicos.

Acumulación de Energía

Régimen Permanente

Energía acumulada en **bobinas** y **condensadores**

Régimen Estacionario

- **Redistribución** y **disipación** de energía acumulada.
- La redistribución de energía **no** se puede realizar de forma **inmediata**
- **Duración corta** (μs) pero superior a 0, dependiendo de **relación entre acumulación y disipación** (resistencia).

Respuesta completa de una red lineal

La respuesta completa de una red lineal a un cambio tiene dos componentes:

- Respuesta **natural** o propia (sin fuentes, determinada únicamente por la configuración del circuito)
- Respuesta **forzada** o particular (determinada por las fuentes existentes, $t = \infty$).

$$\boxed{f(t) = f_n(t) + f_\infty(t)}$$

Condiciones iniciales

- Las **condiciones iniciales** son el estado del circuito en el instante temporal en el que se produce el cambio.
- Determinan las constantes de integración de la respuesta natural.
- El instante del cambio se representa habitualmente con $t = 0$:
  - $t = 0^-$: la topología del circuito es la anterior al cambio.
  - $t = 0^+$: la topología del circuito es la posterior al cambio.

Resistencia

$$u(t) = Ri(t)$$

No acumula energía: sigue los cambios de forma instantánea.

Inductancia

$$u(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} \leftrightarrow i_L(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} u(t')\mathrm{d}t'$$

La corriente en una bobina no puede variar de forma abrupta (implica tensión infinita).

$$\boxed{i_L(0^-) = i_L(0^+)}$$

Capacidad

$$i(t) = C\frac{du_C(t)}{dt} \leftrightarrow u(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(t')\mathrm{d}t'$$

La tensión en un condensador no puede variar de forma abrupta (implica corriente infinita).

$$\boxed{u_C(0^-) = u_C(0^+)}$$

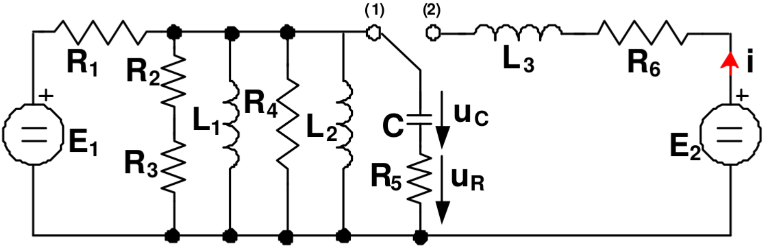
Circuitos Equivalentes en $t = 0^+$

- Sustituir fuentes de tensión $u_g(t)$ por $u_g(0^+)$.
- Sustituir fuentes de corriente $i_g(t)$ por $i_g(0^+)$.
- Sustituir bobinas por fuentes de corriente $i_L(0^+)$.
- Sustituir condensadores por fuentes de tensión $u_C(0^+)$.
- Calcular tensiones y corrientes en circuito.

ELEMENTO	Circuito equivalente inicial ($t=0^+$)		Circuito equivalente final (solo con c.c.) $t=\infty$
	CARGADO	**DESCARGADO**	
R	R	R	R
L i_L	$i_L(0^+)=i_L(0^-)$	$i_L(0^+)=0$	Cortocircuito
C $+\ u_C\ -$	$u_C(0^+)=u_C(0^-)$	$u_C(0^+)=0$	Circuito abierto

Ejemplo

El interruptor lleva en la posición (1) desde un tiempo infinito y pasa a la posición (2) en $t = 0$:



Definición

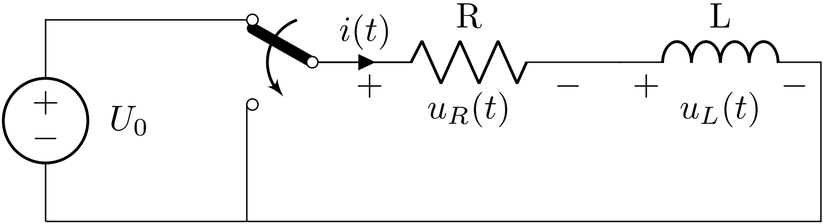
- Circuitos que tienen un **único elemento de acumulación** (o *varios elementos que pueden ser simplificados a un elemento equivalente*) y parte resistiva.
- **Ecuación diferencial de primer orden**: la respuesta natural es siempre una **exponencial decreciente**.
- Circuitos típicos:
  - RL serie
  - RC paralelo

Respuesta natural y forzada

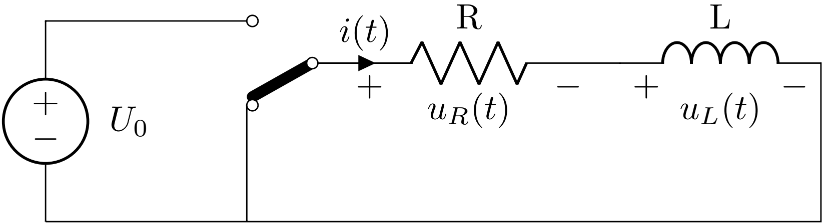
- El método de resolución analiza el circuito en dos etapas:
  - Sin fuentes: **respuesta natural** (la energía acumulada en $t < 0$ se disipa en la resistencia).
  - Con fuentes: **respuesta forzada** (determinada por la forma de onda de las fuentes).

Circuito básico

- En $t < 0$ la fuente alimenta el circuito RL (la bobina almacena energía).
- En $t = 0$ la fuente se desconecta.
- En $t > 0$ la bobina se descarga en la resistencia.



Respuesta natural



Ecuaciones

$$u_R(t) + u_L(t) = 0$$

$$Ri + L\frac{di}{dt} = 0$$

Solución Genérica

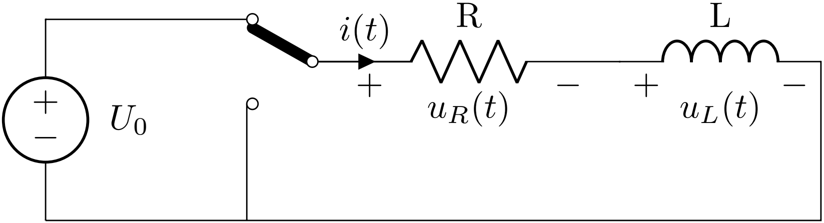
$$i(t) = Ae^{st}$$

Ecuación Característica

$$s + \frac{R}{L} = 0 \Rightarrow s = -\frac{R}{L}$$

Condiciones Iniciales

Analizando circuito para $t < 0\dots$



$\dots$ obtenemos $i(0^-) = I_0 = \frac{U_0}{R}$

Condiciones Iniciales

Por otra parte, para $t > 0$:

$$i(t) = Ae^{-R/Lt}$$
$$i(0^+) = Ae^0 = A$$

Y dada la condición de continuidad, $i(0^+) = i(0^-)$:

$$A = I_0$$

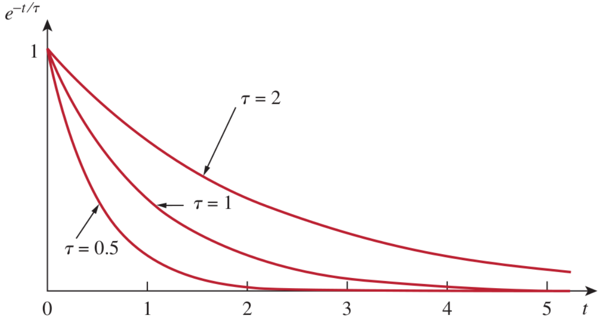
Por tanto, la respuesta natural es:

$$\boxed{i(t) = I_0 e^{-R/Lt}}$$

Constante de tiempo

$$\boxed{i(t) = I_0 e^{-t/\tau}}$$

- $\tau = \frac{L}{R}$ es la constante de tiempo (unidades [s]).
- Ratio entre almacenamiento (L) y disipación (R).
- Valores altos de τ implican decrecimiento lento.
- La respuesta natural «desaparece» tras $\simeq 5\tau$.



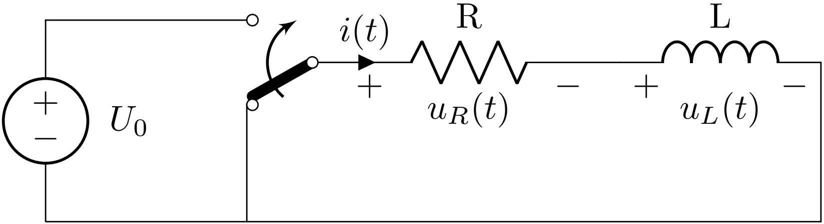
Balance Energético

La energía acumulada en la bobina en $t < 0$ se disipa en la resistencia en $t > 0$

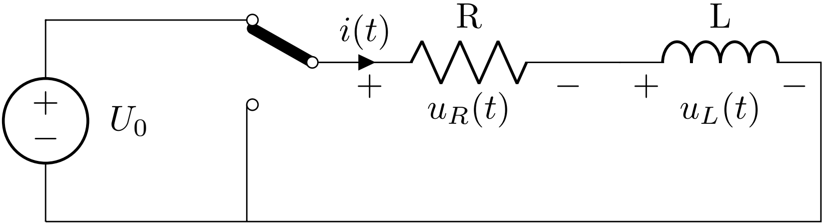
$$\begin{aligned} W_R &= \int_0^\infty R i^2(t) \mathrm{d}t = \\ &= \int_0^\infty R(I_0 e^{-t/\tau})^2 \mathrm{d}t = \\ &= \frac{1}{2} L I_0^2 = W_L \end{aligned}$$

Respuesta forzada

Cambiemos el funcionamiento del interruptor: en $t > 0$ la fuente alimenta el circuito RL.



Respuesta forzada



Las ecuaciones son ahora:

$$u_R(t) + u_L(t) = u(t) \rightarrow Ri + L\frac{di}{dt} = U_0$$

Para la solución particular, i_∞, se propone una función análoga a la excitación (analizando circuito para $t > 0$)

$$i(t) = i_n(t) + i_\infty(t)$$

$$i_n(t) = Ae^{st}$$

$$i_\infty(t) = U_0/R$$

Condiciones iniciales

Particularizamos las ecuaciones en $t = 0^+$:

$$\begin{aligned} i(0^+) &= i_n(0^+) + i_\infty(0^+) \\ i(0^+) &= A + i_\infty(0^+) \\ A &= i(0^+) - i_\infty(0^+) \end{aligned}$$

Respuesta completa (ejemplo)

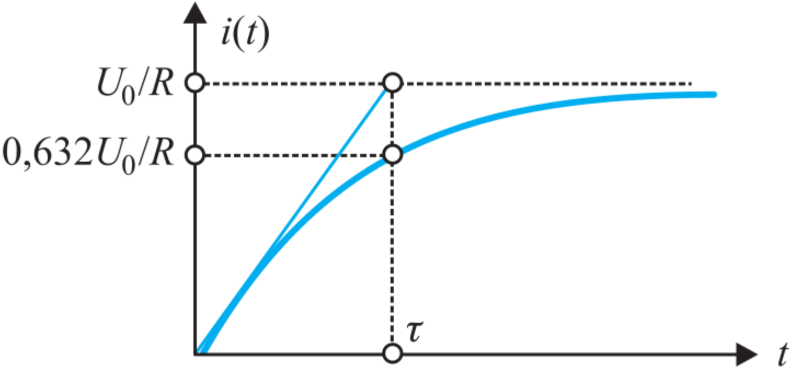
$$
\begin{aligned}
i(t) &= i_n(t) + i_\infty(t) \\
i_n(t) &= Ae^{st} \\
i_\infty(t) &= U_0/R \\
A &= i(0^+) - i_\infty(0^+)
\end{aligned}
$$

Suponiendo que la bobina está inicialmente descargada, $i(0^-) = 0$, y teniendo en cuenta la condición de continuidad, $i(0^+) = i(0^-) = 0$, obtenemos $A = 0 - U_0/R$.
La solución completa es:

$$\boxed{i(t) = \frac{U_0}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})}$$

Respuesta completa

$$\boxed{i(t) = \frac{U_0}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})}$$



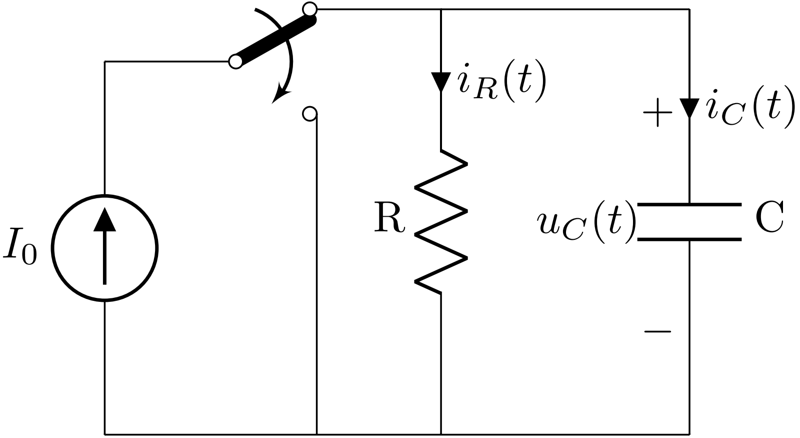
Expresión general de la respuesta completa

$$\boxed{i(t) = \left[i(0^+) - i_\infty(0^+)\right] e^{-t/\tau} + i_\infty(t)}$$

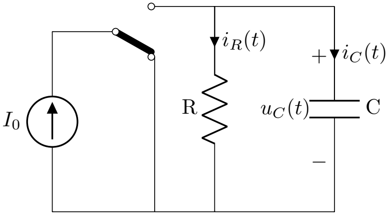
- $i(0^+)$: corriente en la bobina, condiciones iniciales, $i(0^-) = i(0^+)$.
- $i_\infty(t)$: corriente en la bobina en régimen permanente para $t > 0$.
- $i_\infty(0^+)$: corriente en la bobina en régimen permanente particularizada en $t = 0$.

Circuito básico

- En $t < 0$ la fuente alimenta el circuito RC (el condensador se carga).
- En $t = 0$ se desconecta la fuente (el condensador comienza a descargarse en la resistencia).



Respuesta natural



Ecuaciones

$$i_R(t) + i_C(t) = 0$$

$$Gu + C\frac{du}{dt} = 0$$

Solución Genérica

$$u(t) = Ae^{st}$$

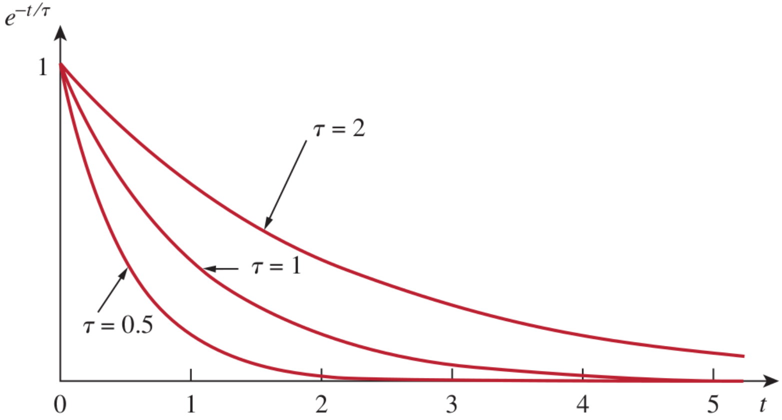
Respuesta natural

$$\boxed{u(t) = U_0 e^{-G/Ct}}$$

Constante de tiempo

- $\tau = \frac{C}{G}$ es la constante de tiempo (unidades [s]).
- Ratio entre almacenamiento (C) y disipación (G).

$$\boxed{u(t) = U_0 e^{-t/\tau}}$$



Balance Energético

La energía acumulada en el condensador en $t < 0$ se disipa en la resistencia (conductancia) en $t > 0$

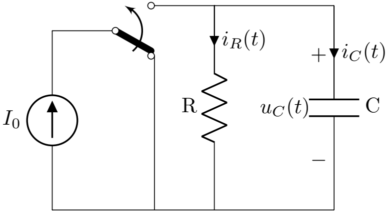
$$W_G = \int_0^\infty G u^2(t) \mathrm{d}t = \frac{1}{2} C U_0^2 = W_C$$

Expresión general de la respuesta completa

$$\boxed{u(t) = \left[u(0^+) - u_\infty(0^+)\right] e^{-t/\tau} + u_\infty(t)}$$

- $u(0^+)$: tensión en el condensador, condiciones iniciales, $u(0^-) = u(0^+)$.
- $u_\infty(t)$: tensión en el condensador en régimen permanente para $t > 0$.
- $u_\infty(0^+)$: tensión en el condensador en régimen permanente particularizada en $t = 0$.

Ejemplo con respuesta forzada

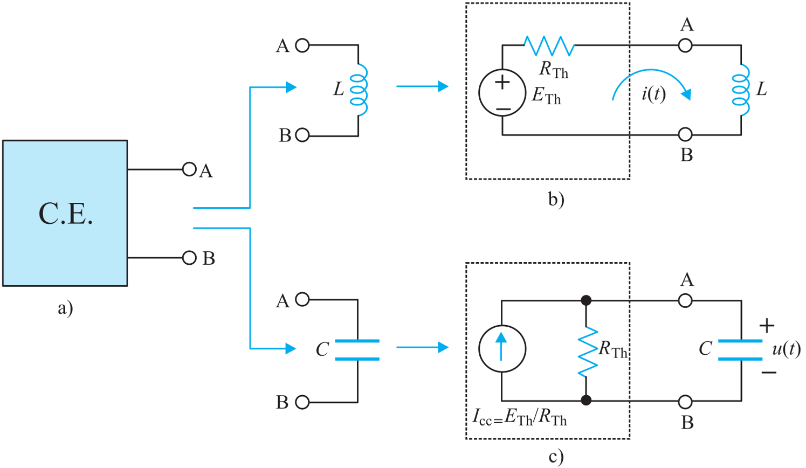


$$\boxed{u(t) = \left[u(0^+) - u_\infty(0^+)\right] e^{-t/\tau} + u_\infty(t)}$$

Suponiendo que el condensador está inicialmente descargado:

$$u(0^+) = u(0^-) = 0$$
$$u_\infty(0^+) = I_0/G$$
$$u(t) = \frac{I_0}{G}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Equivalente de Thévenin (Norton)



Procedimiento General

- Dibujar el circuito para $t < 0$.
  - Determinar variables en régimen permanente, $u_c(t)$, $i_L(t)$.
  - Particularizar para $t = 0$, obteniendo $u_c(0^-)$ o $i_L(0^-)$.
  - Continuidad: $u_c(0^+) = u_c(0^-)$, $i_L(0^+) = i_L(0^-)$.
- Dibujar el circuito para $t > 0$.
  - Calcular el equivalente de Thevenin (Norton) visto por el elemento de acumulación.
  - La constante de tiempo de la respuesta natural es $\tau = \frac{L}{R_{th}}$ o $\tau = \frac{C}{G_{th}}$.
  - Calcular las variables $i_L(t)$ o $u_c(t)$ en régimen permanente, obteniendo $i_\infty(t)$ o $u_\infty(t)$.
- Obtener respuesta completa:

$$i_L(t) = \left(i_L(0^+) - i_\infty(0^+)\right) e^{-t/\tau} + i_\infty(t)$$
$$u_C(t) = \left(u_C(0^+) - u_\infty(0^+)\right) e^{-t/\tau} + u_\infty(t)$$

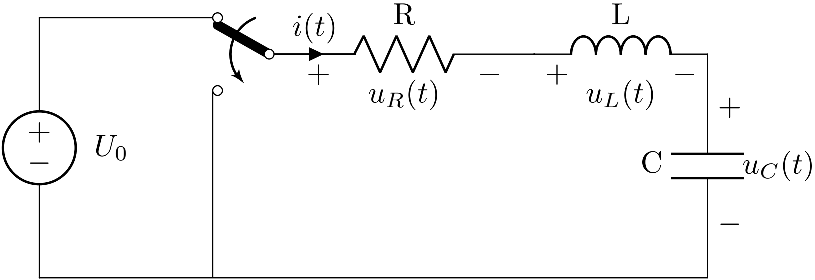
Introducción

- Circuitos que tienen **dos elementos de acumulación** que intercambian energía, y parte resistiva que disipa energía.
- **Ecuación diferencial de segundo orden**: la respuesta natural incluye exponenciales decrecientes y quizás señal sinusoidal.
- Circuitos típicos:
  - RLC serie
  - RLC paralelo

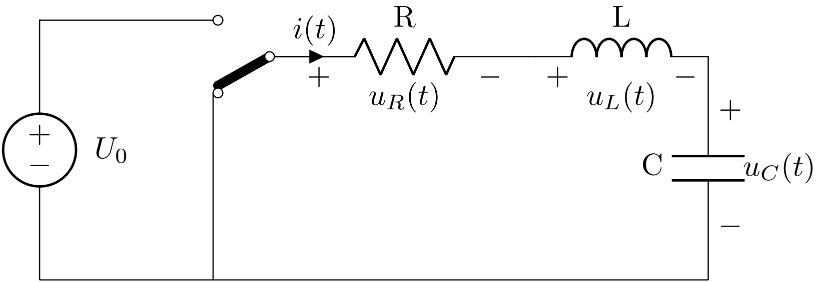
Respuesta natural y forzada

- El método de resolución analiza el circuito en dos etapas:
  - Sin fuentes: **respuesta natural** (la energía acumulada en $t < 0$ se redistribuye).
  - Con fuentes: **respuesta forzada** (determinada por la forma de onda de las fuentes).

Circuito básico



Respuesta natural (t > 0)



$$Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(t')\mathrm{d}t' = 0$$

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}i = 0}$$

Solución

Ecuación diferencial

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}i = 0$$

$$i_n(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

Ecuación característica

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0$$

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

Parámetros

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0$$
$$s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0$$

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$
$$i_n(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

$$\alpha = \frac{R}{2L}$$
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$
$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$
$$\xi = \frac{\alpha}{\omega_0}$$

- α: coeficiente de amortiguamiento exponencial
- ω_0: pulsación natural no amortiguada
- ω_d: pulsación natural amortiguada
- ξ: factor de amortiguamiento

Posibles soluciones

$$\boxed{s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}}$$

$\alpha > \omega_0$, $\xi > 1$

- $s_{1,2}$: dos soluciones reales (negativas) distintas
- Circuito **sobreamortiguado**.

$\alpha = \omega_0$, $\xi = 1$

- $s_{1,2}$: solución real doble.
- Circuito con **amortiguamiento crítico**.

$\alpha < \omega_0$, $\xi < 1$

- $s_{1,2}$: dos soluciones complejas conjugadas
- Circuito **subamortiguado**.

Tipos de Respuesta

- Tipo de respuesta determinado por relación entre R y L, C (disipación y almacenamiento).
- Resistencia crítica ($\alpha = \omega_0, \xi = 1$):

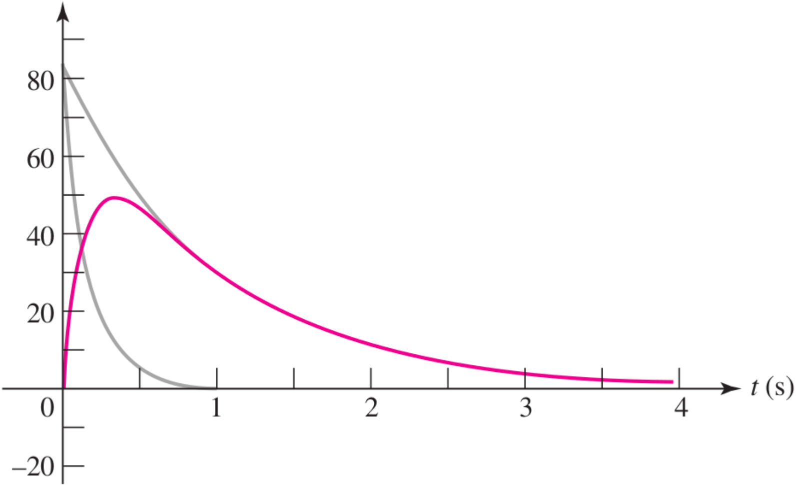
$$R_{cr} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Tipos

- $R > R_{cr}, \alpha > \omega, \xi > 1$: **sobreamortiguado**
- $R = R_{cr}, \alpha = \omega, \xi = 1$: **amortiguamiento crítico**
- $R < R_{cr}, \alpha < \omega, \xi < 1$: **subamortiguado**

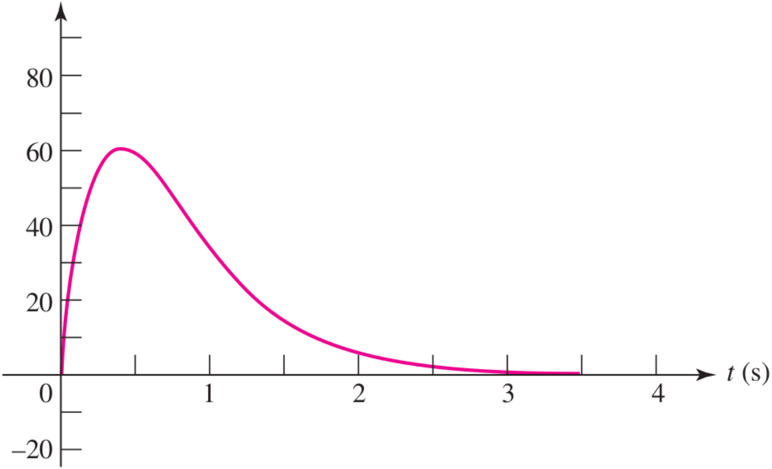
Circuito Sobreamortiguado ($\alpha > \omega_0$)

$$\boxed{i_n(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}}$$



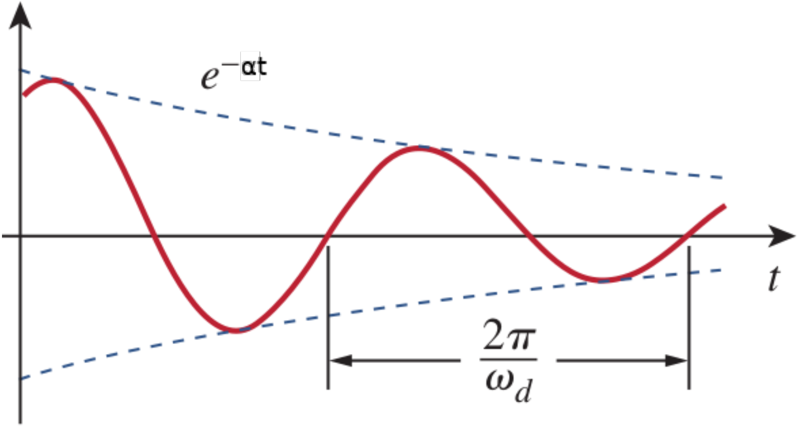
Amortiguamiento Crítico ($\alpha = \omega_0$)

$$\boxed{i_n(t) = (A_1 + A_2 t)e^{st}}$$

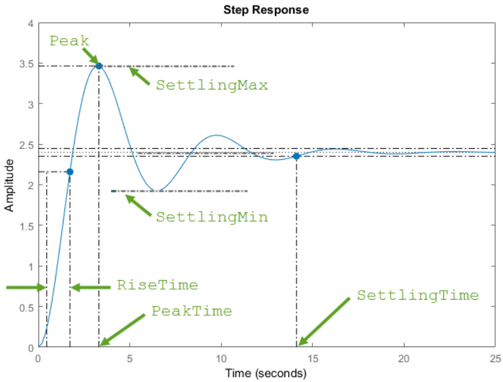


Circuito Subamortiguado ($\alpha < \omega$)

$$\boxed{i_n(t) = (B_1 \cos(\omega_d t) + B_2 \sin(\omega_d t))e^{-\alpha t}}$$

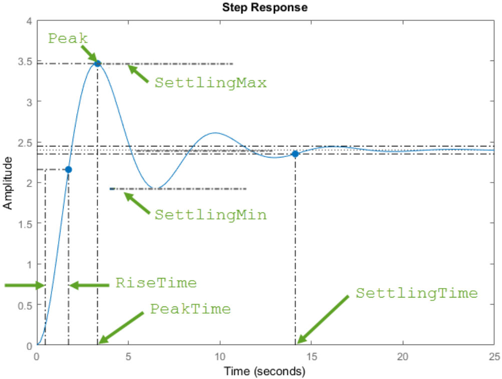


Valores Importantes



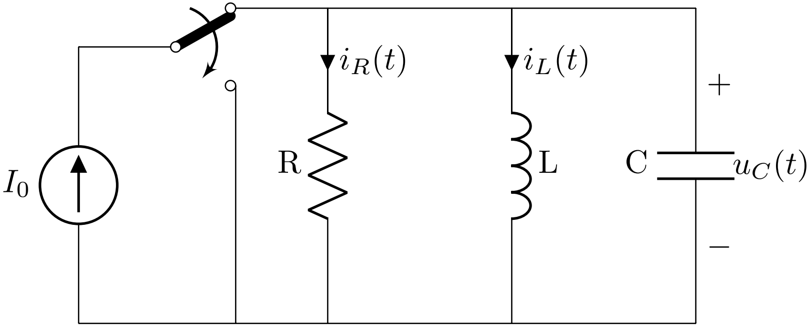
- **Tiempo de Subida**: tiempo para subir de 10% al 90% del valor en régimen permanente.
- **Tiempo de Establecimiento**: tiempo para que la diferencia entre la respuesta y el régimen permanente permanezca dentro de una banda del 1%.

Valores Importantes

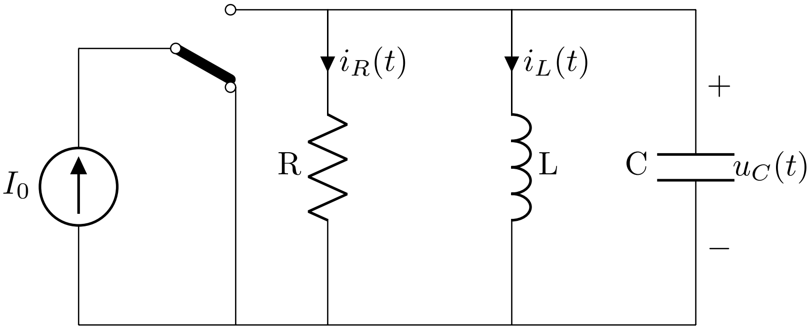


- **Valor máximo** y **Tiempo del Valor Máximo**.
- **Sobretensión**: porcentaje del valor máximo respecto del régimen permanente.

Circuito básico



Respuesta natural (t > 0)



$$Gu(t) + C\frac{du(t)}{dt} + \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} u(t')\mathrm{d}t' = 0$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{G}{C}\frac{du}{dt} + \frac{1}{LC}u = 0$$

Solución

Ecuación diferencial

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{G}{C}\frac{du}{dt} + \frac{1}{LC}u = 0$$

$$u_n(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

Ecuación característica

$$s^2 + \frac{G}{C}s + \frac{1}{LC} = 0$$

$$s_{1,2} = -\frac{G}{2C} \pm \sqrt{\left(\frac{G}{2C}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

Parámetros

Ecuación característica

$$s^2 + \frac{G}{C}s + \frac{1}{LC} = 0$$
$$s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0$$

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$$u_n(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

$$\alpha = \frac{G}{2C}$$
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$
$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$
$$\xi = \frac{\alpha}{\omega_0}$$

Tipos de Respuesta

- Tipo de respuesta determinado por relación entre G y L, C (disipación y almacenamiento).
- Conductancia crítica ($\alpha = \omega_0$, $\xi = 1$):

$$G_{cr} = 2\sqrt{\frac{C}{L}}$$

Tipos

- $G > G_{cr}$, $\alpha > \omega$, $\xi > 1$: **sobreamortiguado**
- $G = G_{cr}$, $\alpha = \omega$, $\xi = 1$: **amortiguamiento crítico**
- $G < G_{cr}$, $\alpha < \omega$, $\xi < 1$: **subamortiguado**

Tipos de Respuesta

- Circuito Sobreamortiguado ($\alpha > \omega_0$)

$$\boxed{u_n(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}}$$

- Amortiguamiento Crítico ($\alpha = \omega_0$)

$$\boxed{u_n(t) = (A_1 + A_2 t)e^{st}}$$

- Circuito Subamortiguado ($\alpha < \omega$)

$$\boxed{u_n(t) = (B_1 \cos(\omega_d t) + B_2 \sin(\omega_d t))e^{-\alpha t}}$$

Condiciones Iniciales

Dos constantes a determinar

Son necesarias dos tipos de condiciones iniciales:

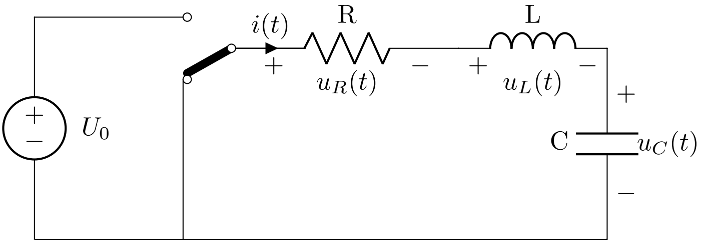
$$u_C(0^+) = u_C(0^-) \qquad\qquad i_L(0^+) = i_L(0^-)$$

$$\left.\frac{d}{dt}u_c\right|_{t=0^+} = \frac{1}{C}i_C(0^+) \qquad\qquad \left.\frac{d}{dt}i_L\right|_{t=0^+} = \frac{1}{L}u_L(0^+)$$

Derivadas en el origen

Para obtener valores de las derivadas en el origen hay que resolver el circuito en $t = 0^+$ empleando las condiciones de continuidad.

Derivadas en $t = 0^+$: ejemplo RLC serie

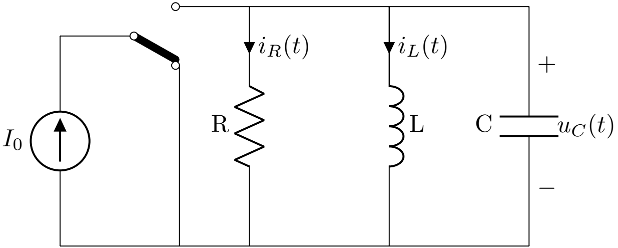


$$u_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} \longrightarrow \left.\frac{di_L(t)}{dt}\right|_{t=0^+} = \frac{1}{L} u_L(0^+)$$

$$u_L(0^+) = -u_R(0^+) - u_c(0^+)$$
$$u_R(0^+) = Ri_L(0^+)$$

$$\boxed{\left.\frac{di_L(t)}{dt}\right|_{t=0^+} = -\frac{1}{L}\left(Ri_L(0^+) + u_c(0^+)\right)}$$

Derivadas en $t = 0^+$: ejemplo RLC paralelo



$$i_c(t) = C \cdot \frac{du_c(t)}{dt} \longrightarrow \left.\frac{du_c(t)}{dt}\right|_{t=0^+} = \frac{1}{C} i_C(0^+)$$

$$i_C(0^+) = -i_R(0^+) - i_L(0^+)$$

$$i_R(0^+) = \frac{1}{R} u_C(0^+)$$

$$\boxed{\left.\frac{du_c(t)}{dt}\right|_{t=0^+} = -\frac{1}{C}\left(\frac{1}{R} u_C(0^+) + i_L(0^+)\right)}$$

Respuesta Completa

Las condiciones iniciales deben evaluarse teniendo en cuenta la respuesta forzada (si existe).

$$f(0^+) = f_n(0^+) + f_\infty(0^+)$$
$$\left.\frac{d}{dt}f\right|_{t=0^+} = \left.\frac{d}{dt}f_n\right|_{t=0^+} + \left.\frac{d}{dt}f_\infty\right|_{t=0^+}$$

Ejemplo

Circuito RLC paralelo sobreamortiguado con generador de corriente DC funcionando en $t > 0$.

Respuesta Completa

$$u_c(t) = U_\infty + A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

Condiciones Iniciales

$$\begin{aligned} u_c(0^+) &= U_\infty + A_1 + A_2 \\ \left.\frac{d}{dt} u_C \right|_{t=0^+} &= 0 + A_1 s_1 + A_2 s_2 \end{aligned}$$