Corriente alterna senoidal

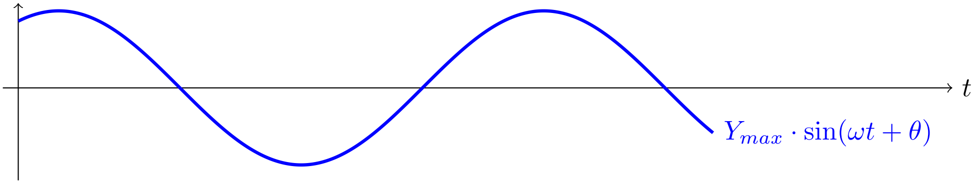
Teoría de Circuitos

Autor: Luis Badesa Bernardo

Forma de onda

- La salida de los generadores (de tensión o de corriente) es una función que puede variar con el tiempo
- La dependencia funcional $u = u(t)$ o $i = i(t)$ se denomina forma de onda

- En este bloque temático vamos a centrarnos en **formas de onda periódicas** (su valor se repite a intervalos regulares) y, en concreto, en **señales senoidales**



Formas de onda periódicas

$$\boxed{y(t) = y(t+T) = y(t+n \cdot T)} \quad \text{donde } n \in \mathbb{Z} \text{ (número entero)}$$

- **Periodo (T)**: intervalo de tiempo a partir del cual se repite la forma de onda [s]
- **Frecuencia (f)**: número de repeticiones de la onda por unidad de tiempo [Hz]

$$f = \frac{1}{T}$$

- **Valor instantáneo ($y(t)$)**: valor que toma la forma de onda en un instante t
- **Valores de pico (Y_{max}, Y_{min})**: valores máximo y mínimo que toma la forma de onda

$$Y_{max} = \max[\,f(t)\,] \qquad\qquad Y_{min} = \min[\,f(t)\,]$$

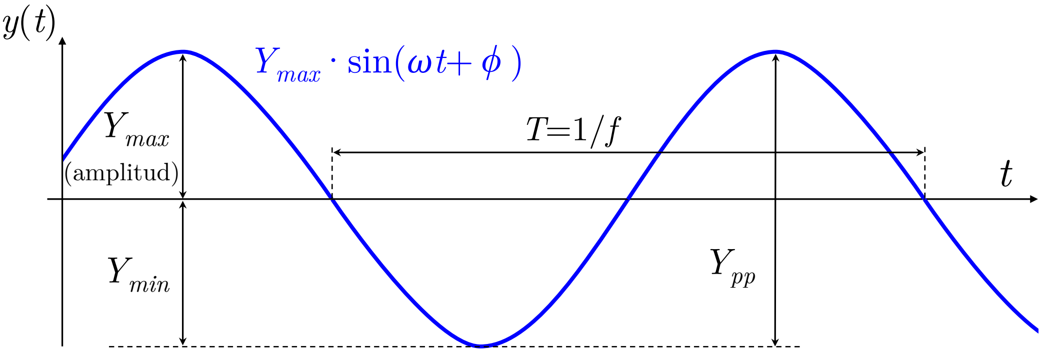
  Para ondas centradas ($Y_{max} = -Y_{min}$), el valor de pico también se denomina **amplitud**

- **Valor pico a pico (Y_{PP})**: diferencia (en valor absoluto) entre los valores de pico considerados con signo

$$Y_{PP} = |Y_{max} - Y_{min}|$$

Formas de onda periódicas

- Caso particular: **función senoidal** (señal centrada)



Formas de onda periódicas: valores característicos

- **Valor medio (Y_m)**: media aritmética de los valores instantáneos que toma la función en un periodo (o semiperiodo, o cuarto de periodo)

$$\boxed{Y_m = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} y(t)\,dt}$$

- **Valor eficaz (Y_{ef})**: raíz cuadrada de la media de los cuadrados de los valores que toma la función en un periodo

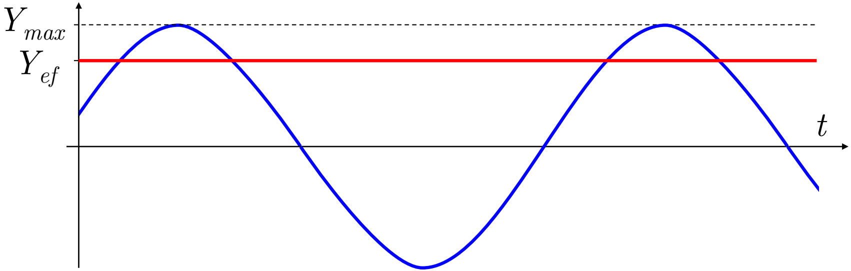
$$\boxed{Y_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T}\cdot\int_a^{a+T} y^2(t)\,dt}}$$

También denominado "valor RMS", del inglés *root mean square*

El valor eficaz es de especial interés en teoría de circuitos para **cálculos relacionados con la potencia**, como veremos más adelante

Formas de onda periódicas: valor eficaz

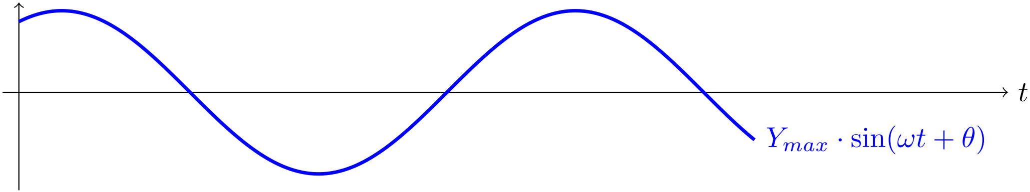
- Caso particular: valor eficaz de una **onda senoidal**



- ¿Por qué usamos el valor eficaz en corriente alterna? Porque establece un **paralelismo con la corriente continua**, que nos permitirá simplificar cálculos:

  El valor eficaz es igual al valor de una corriente continua constante que, al circular por una determinada resistencia, **produciría la misma disipación de potencia** que la corriente alterna que estamos considerando

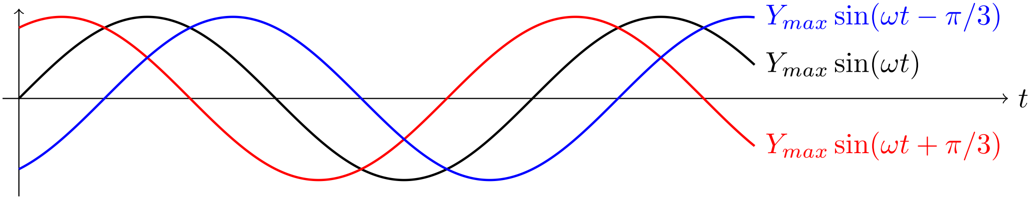
Onda senoidal, definición



$$y(t) = Y_o \cdot \sin(\omega \cdot t + \theta)$$

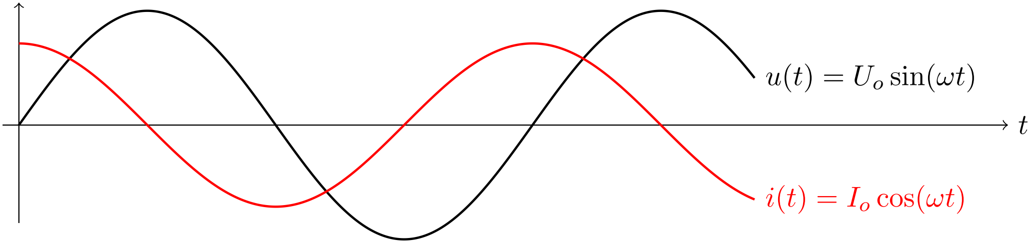
- $\boldsymbol{Y_{max}}$ o $\boldsymbol{Y_o}$: valor máximo de la onda
- $\boldsymbol{T}$: periodo de la onda (segundos)
- $\boldsymbol{\omega} = \dfrac{2\pi}{T}$: pulsación (rad/s)
- $\boldsymbol{f} = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{1}{T}$: frecuencia (Hz)
- $\boldsymbol{\theta}$: fase (radianes o grados). También suelen usarse las letras griegas ϕ y φ

Fase



- Es el argumento de la función senoidal para $t = 0$
- Tomando una onda como referencia, si la **fase de otra onda es de 0º**, está **en fase** con la de referencia
- Si la **fase es positiva**, la onda **adelanta** a la referencia
- Si la **fase es negativa**, la onda **retrasa** a la referencia

Señales en cuadratura



- Cuando el **desfase entre dos señales es de 90º** ($\theta_I - \theta_U = \pi/2$), se dice que están en **cuadratura**
- El paso por cero de una señal coincide con el paso por el máximo/mínimo de la otra señal

Valor medio y valor eficaz de una onda senoidal

Valor medio

En un periodo:

$$Y_m = \frac{1}{\boldsymbol{T}} \int_0^{\boldsymbol{T}} y(t)\, dt = \frac{1}{T} \int_0^{T} Y_o \cdot \sin(\omega \cdot t + \theta)\, dt = \boxed{\mathbf{0}}$$

En un semiperiodo positivo ($\theta = 0^\circ$):

$$Y_m = \frac{1}{\boldsymbol{T/2}} \int_0^{\boldsymbol{T/2}} Y_{max} \cdot \sin(\omega \cdot t)\, dt = \frac{2 \cdot Y_{max}}{\pi} \approx 0,637 \cdot Y_{max}$$

Valor eficaz

$$Y = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^{T} y^2(t)\, dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^{T} \left[Y_{max} \cdot \sin(\omega \cdot t + \theta)\right]^2 dt} = \boxed{\frac{\boldsymbol{Y_{max}}}{\sqrt{\mathbf{2}}}}$$

Recordatorio de 1LK

- La **1LK** es el principio de **conservación de la carga** aplicado a los circuitos eléctricos:

  La suma de las corrientes que llegan a un nudo es igual a la suma de las que salen

  $$\boxed{\sum_{j=1}^{n} i_j(t) = 0}$$

  La conservación de la carga **aplica a cada instante**, luego 1LK también **aplica en corriente alterna**

  Por lo tanto, vamos a sumar corrientes senoidales a menudo en este tema, para lo cual será muy útil el **cálculo fasorial**

Recordatorio de 2LK

- La **2LK** es el principio de **conservación de la energía** aplicado a los circuitos:

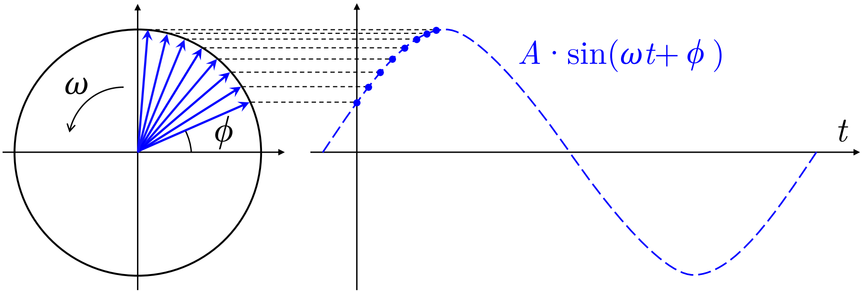
  La suma (con signo) de las tensiones a lo largo de un camino cerrado es cero

  $$\boxed{\sum_{j=1}^{m} u_j(t) = 0}$$

  La conservación de la energía **aplica a cada instante** $\rightarrow$ 2LK también **aplica en corriente alterna**

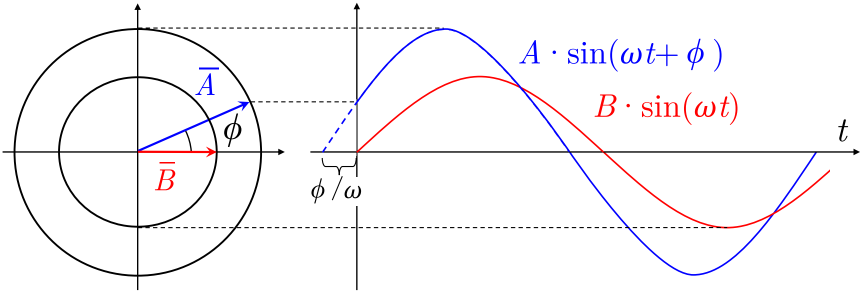
  Vamos a sumar tensiones senoidales a menudo en este tema $\rightarrow$ será muy útil el **cálculo fasorial**

Representación fasorial



- Un **fasor** es un artefacto matemático **útil para simplificar cálculos** con señales senoidales
- El término "fasor" viene del inglés *phasor*, forma corta de *phase vector* (vector de fase)
- Al **rotar en sentido antihorario** con velocidad angular ω, la proyección del fasor sobre el eje vertical es igual al valor de la señal senoidal en cada instante .

Representación fasorial

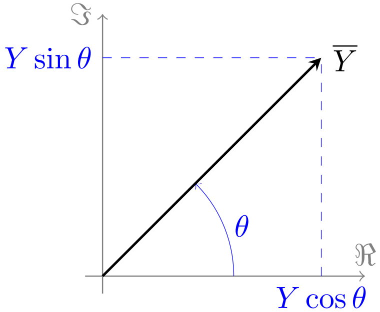


- Una señal senoidal **se representa mediante un único fasor**
- Para definir el fasor correspondiente a cada señal, tomamos como origen de fases una de las señales presentes en el circuito (*e.g.*, la tensión en bornes de una fuente)

Representación fasorial

- Un fasor se representa matemáticamente mediante un **número complejo** (repaso de complejos y trigonometría):

$$\overline{Y} = \underbrace{Y_{ef}\angle\theta}_{\text{forma polar}} = \underbrace{Y_{ef}\cdot[\cos(\theta)+j\cdot\sin(\theta)]}_{\text{forma binómica}} \overset{\substack{\text{fórmula}\\ \text{de Euler}\\ \downarrow}}{=} \underbrace{Y_{ef}\cdot e^{j\theta}}_{\text{forma exponencial}}$$



Usamos ***j* para la constante imaginaria**, en lugar de *i*, ya que en el análisis de circuitos *i* se usa para intensidad

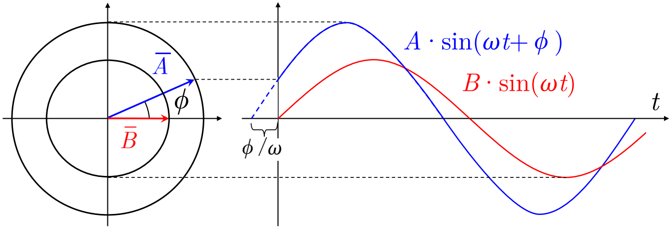
- El **argumento** del fasor es la **fase** de la onda. El **módulo** es el **valor eficaz** de la onda, NO su amplitud

Representación fasorial

- El **argumento** del fasor es la **fase** de la onda. El **módulo** es el **valor eficaz** de la onda, NO su amplitud

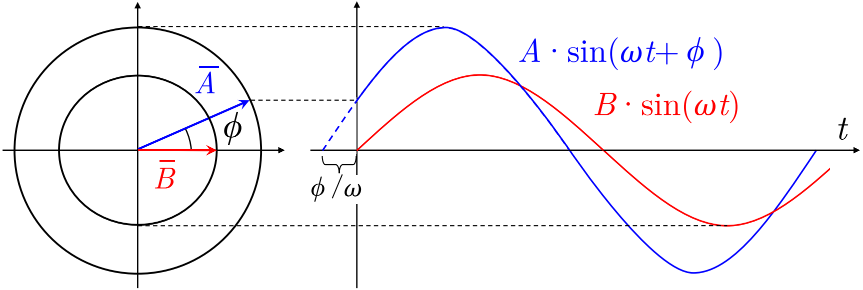
  Se toma el valor eficaz por **conveniencia a la hora de calcular la potencia producida/consumida** en circuitos de corriente alterna, directamente operando con fasores

  Nota: en varios gráficos de estas diapositivas, el módulo de los fasores corresponde a la amplitud de la onda, y no a su valor eficaz
  Esto se debe simplemente a claridad en la representación gráfica



Representación fasorial

- Los fasores **representan las relaciones entre los valores eficaces y las fases** de las distintas señales presentes en el circuito, siempre asumiendo una frecuencia determinada
- Por lo tanto, las operaciones con fasores **solo son válidas entre <u>señales de la misma frecuencia</u>**



Cálculo fasorial: propiedades de la función senoidal

Las razones por las que podemos usar cálculo fasorial para **simplificar operaciones entre señales senoidales** son dos propiedades importantes de la función senoidal:

- $$\boxed{A_1 \cdot \sin(\omega t + \theta_1) \; + \; A_2 \cdot \sin(\omega t + \theta_2) \; = \; A_3 \cdot \sin(\omega t + \theta_3)}$$

  Para sumar señales senoidales, podemos simplemente **sumar sus fasores correspondientes** (recuerda que 1LK y 2LK implican sumas)

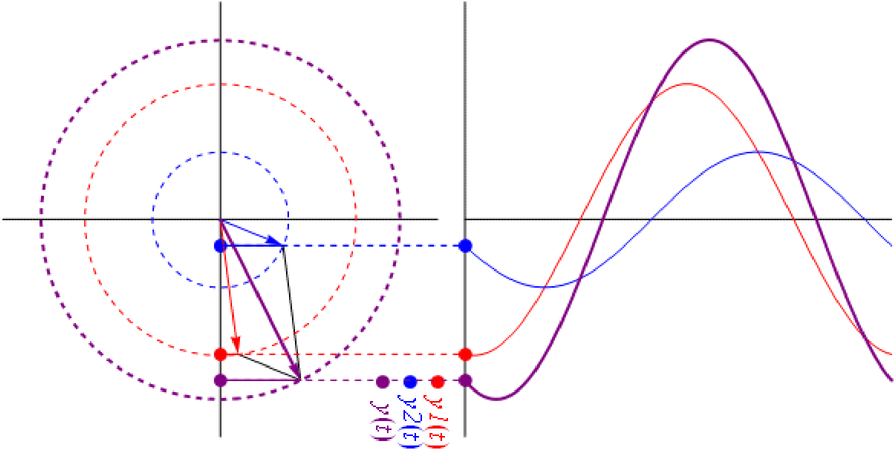
- $$\boxed{\frac{d^n \sin(\omega t + \theta_1)}{dt^n} = C_2 \sin(\omega t + \theta_2) \;\; , \quad \int \cdots \int \sin(\omega t + \theta_1)\, dt \cdots dt = C_3 \sin(\omega t + \theta_3) + k}$$

  Las **tensiones y corrientes en bobinas y condensadores** (cuyas ecuaciones de definición contienen derivadas e integrales de estas magnitudes), **pueden expresarse mediante fasores**

Operaciones con fasores

Suma gráfica de dos fasores $\overline{Y}_1$ e $\overline{Y}_2$, y sus correspondientes señales temporales:

(**clica en la imagen**)



Operaciones con fasores

- Un fasor **captura la información clave de una onda senoidal** para los propósitos del análisis de circuitos: su valor eficaz y su fase
- Nos permite **operar con ondas senoidales como si fueran vectores/números complejos**

$$\overline{Y}_1 = \overbrace{Y_{ef_1}\ \cos(\theta_1)}^{a_1} + \mathrm{j}\ \overbrace{Y_{ef_1}\ \sin(\theta_1)}^{b_1} = Y_{ef_1}\underline{/\theta_1}$$

$$\overline{Y}_2 = \underbrace{Y_{ef_2}\ \cos(\theta_2)}_{a_2} + \mathrm{j}\ \underbrace{Y_{ef_2}\ \sin(\theta_2)}_{b_2} = Y_{ef_2}\underline{/\theta_2}$$

Forma binómica:

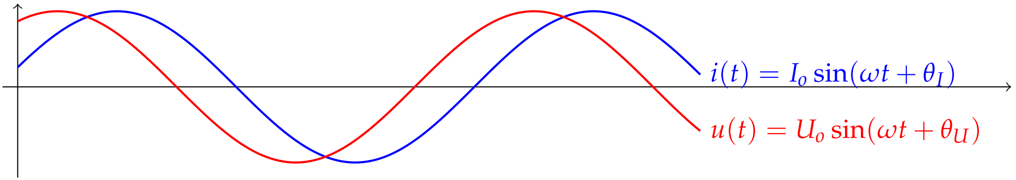
- Suma: $\overline{Y}_1 + \overline{Y}_2 = (a_1 + a_2) + \mathrm{j}\,(b_1 + b_2)$
- Resta: $\overline{Y}_1 - \overline{Y}_2 = (a_1 - a_2) + \mathrm{j}\,(b_1 - b_2)$

Forma polar:

- Multiplicación: $\overline{Y}_1 \cdot \overline{Y}_2 = (Y_{ef_1} \cdot Y_{ef_2})\underline{/\theta_1 + \theta_2}$
- División: $\dfrac{\overline{Y}_1}{\overline{Y}_2} = \dfrac{Y_{ef_1}}{Y_{ef_2}}\underline{/\theta_1 - \theta_2}$

Interludio: *Alternating Current ϟ Direct Current*

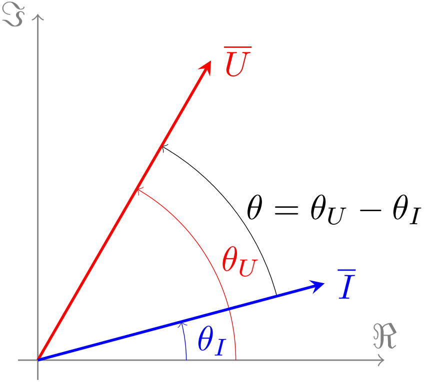
Impedancia: relación entre fasores de tensión y corriente



$\overline{U} = \overline{Z} \cdot \overline{I}$ (equiv. a ley de Ohm)

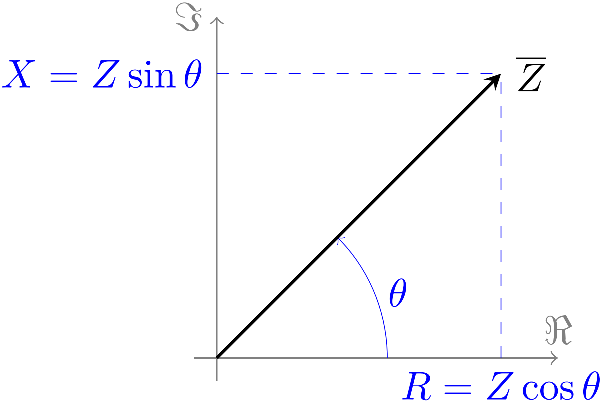
$$\overline{Z} = \frac{\overline{U}}{\overline{I}}$$

$$\boxed{\overline{Z} = \frac{U}{I}\underline{/\theta_U - \theta_I} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} Z = \dfrac{U}{I} \\ \theta = \theta_U - \theta_I \end{cases}}$$



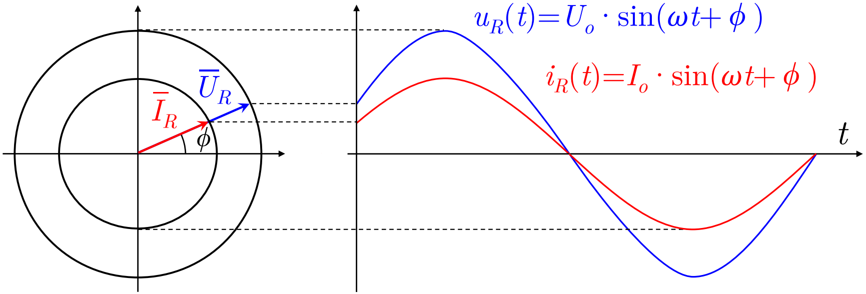
Impedancia genérica

$$\overline{Z} = Z \cdot \cos(\theta) + \mathrm{j} Z \cdot \sin(\theta) = \underbrace{R}_{\text{resistencia}} + \mathrm{j} \underbrace{X}_{\text{reactancia}}$$



Circuito resistivo

Un circuito resistivo no introduce desfase entre señales (**tensión y corriente en fase**)



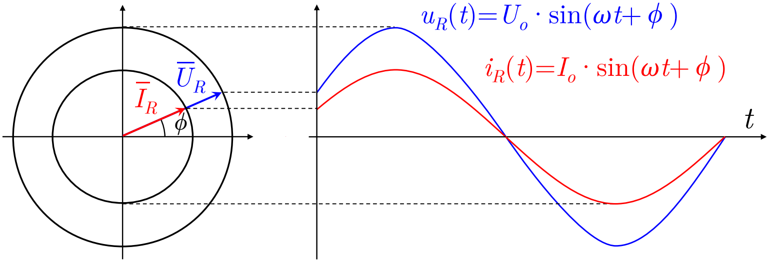
$$i(t) = \boldsymbol{I\sqrt{2}} \cdot \sin(\omega t + \boldsymbol{\theta_I})$$

$$u(t) \overset{\substack{\text{ley de Ohm} \\ \downarrow}}{=} R \cdot i(t) = \boldsymbol{R \cdot I\sqrt{2}} \cdot \sin(\omega t + \boldsymbol{\theta_I}) = \boldsymbol{U\sqrt{2}} \cdot \sin(\omega t + \boldsymbol{\theta_I})$$

(a partir de ahora, la notación U e I se refiere directamente a **valores eficaces**)

Circuito resistivo

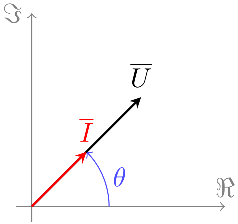
Un circuito resistivo no introduce desfase entre señales (**tensión y corriente en fase**)



$$Z = \frac{U}{I} = R$$

$$\theta = \theta_U - \theta_I = 0^\circ$$

$$\boxed{\overline{Z}_R = R\underline{/0^\circ}}$$

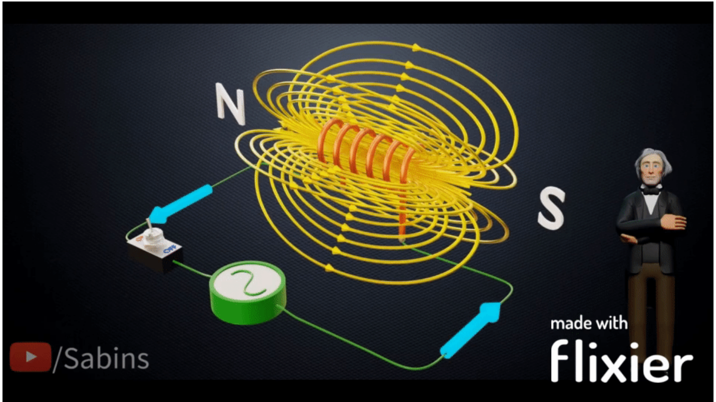


Carga y descarga de una bobina

- La bobina **almacena energía magnética** cuando circula por ella una corriente

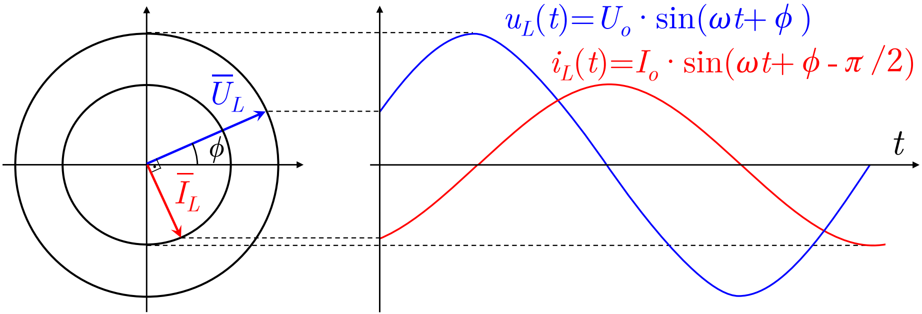
$$E_L = \frac{1}{2} \cdot L \cdot i_L^2(t)$$

Cuando el módulo de la corriente que circula por la bobina disminuye, **devuelve su energía almacenada** al circuito (**clica en la imagen**)



Circuito inductivo puro

Un circuito inductivo puro genera **señales en cuadratura** y **retrasa la corriente** .



$$i(t) = \boldsymbol{I\sqrt{2}} \cdot \sin(\omega t + \theta_I)$$

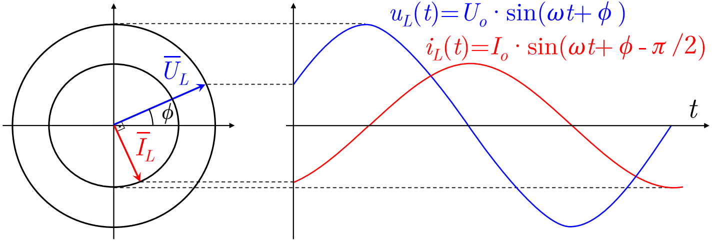
La bobina se carga cuando $\frac{d|i_L|}{dt} > 0$, y descarga cuando $\frac{d|i_L|}{dt} < 0$

ley de Faraday

$$u(t) \overset{\downarrow}{=} L \cdot \frac{di(t)}{dt} = \boldsymbol{\omega L \cdot I\sqrt{2}} \cdot \cos(\omega t + \theta_I) = \boldsymbol{U\sqrt{2}} \cdot \sin(\omega t + \theta_I \boldsymbol{+\pi/2})$$

Circuito inductivo puro

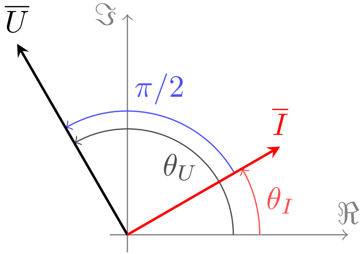
Un circuito inductivo puro genera **señales en cuadratura** y **<u>retrasa la corriente</u>**

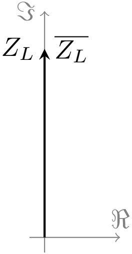


$$Z = \frac{U}{I} = \omega L$$

$$\theta = \theta_U - \theta_I = \frac{\pi}{2}$$

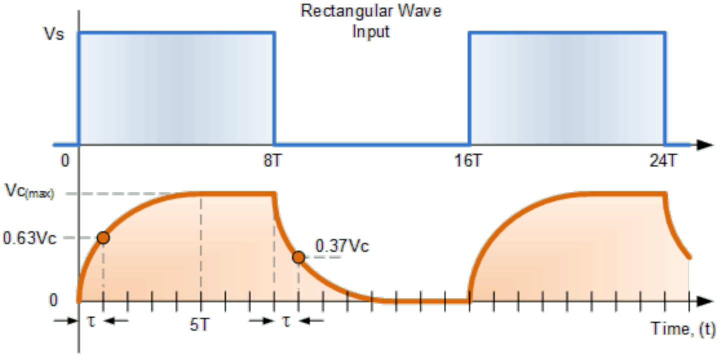
$$\boxed{\overline{Z}_L = j\omega L = \omega L\underline{/90^\circ}}$$





Carga y descarga de un condensador

- Si se excita un condensador con pulsos rectangulares de tensión, se **almacena energía eléctrica, que luego se devuelve al circuito** en los semiciclos sin excitación

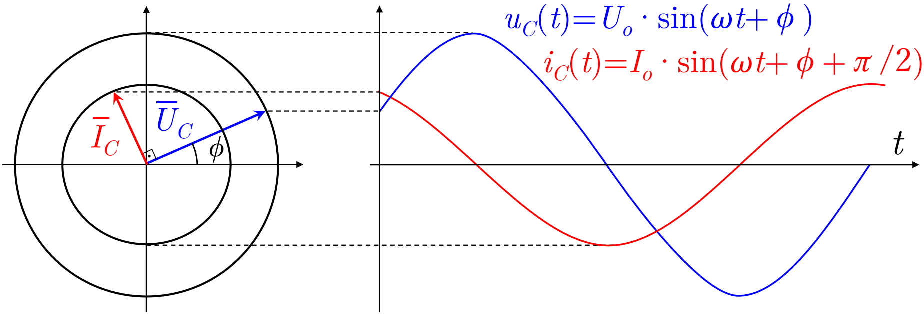


Energía almacenada:
$\frac{1}{2} \cdot C \cdot u_C^2(t)$

- Con **excitación alterna senoidal**, el condensador también se carga y descarga
  - Sin embargo, la tensión en el condensador nunca llega a estabilizarse, porque la excitación senoidal cambia todo el rato (siguiente diapositiva)

Circuito capacitivo puro

Un circuito capacitivo puro genera **señales en cuadratura** y **adelanta la corriente** .



El condensador se carga cuando $\frac{d|u_C|}{dt} > 0$, y descarga cuando $\frac{d|u_C|}{dt} < 0$

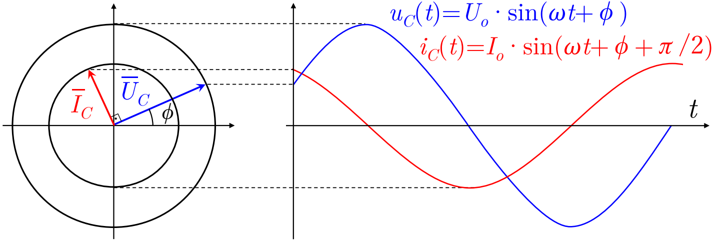
$$i(t) = \boldsymbol{I\sqrt{2}} \cdot \sin(\omega t + \theta_I)$$

definición de condensador

$$u(t) \overset{\downarrow}{=} \frac{1}{C} \cdot \int_{-\infty}^{t} i(\tau) \cdot d\tau = \frac{\boldsymbol{I}}{\boldsymbol{\omega C}}\boldsymbol{\sqrt{2}} \cdot [-\cos(\omega t + \theta_I)] = \boldsymbol{U\sqrt{2}} \cdot \sin(\omega t + \theta_I \boldsymbol{- \pi/2})$$

Circuito capacitivo puro

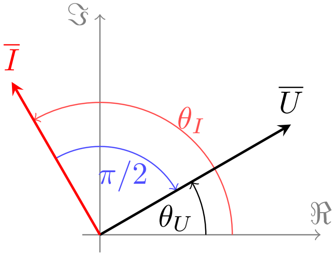
Un circuito capacitivo puro genera **señales en cuadratura** y **adelanta la corriente**

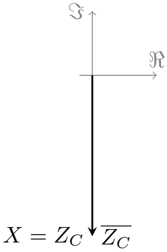


$$Z = \frac{U}{I} = \frac{1}{\omega C}$$

$$\theta = \theta_U - \theta_I = -\frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{\overline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{\omega C}\angle{-90^\circ}}$$





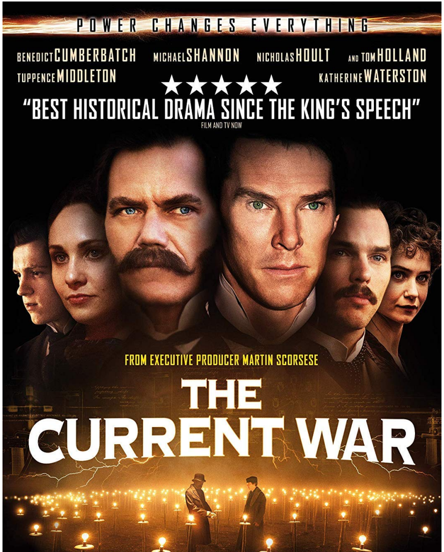
Resumen

Elemento	Impedancia	Módulo	Ángulo
Resistencia	R	R	0°
Bobina ideal	$j\omega L$	ωL	90°
Condensador	$1/(j\omega C)$	$1/(\omega C)$	-90°

- La impedancia de una bobina ideal $X_L = \omega L$ se denomina "reactancia inductiva"
- La impedancia de un condensador $X_C = \dfrac{1}{\omega C}$ se denomina "reactancia capacitiva"

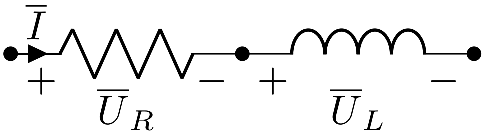
Interludio: película relacionada con la asignatura

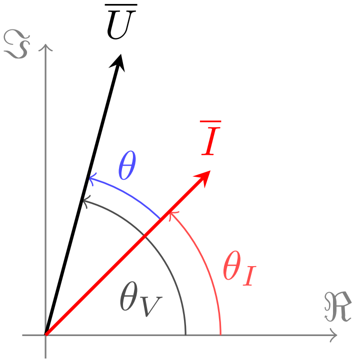
La guerra de las corrientes, 2017



Circuito RL (inductivo con pérdidas)

Recordatorio: por elementos asociados en **serie**, circula la **misma corriente**





$$\overline{I} = I\underline{/\theta_I}$$

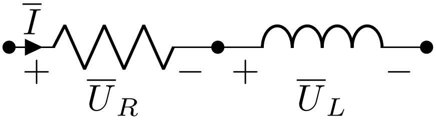
$$\overline{U}_R = R \cdot \overline{I} = R \cdot I\underline{/\theta_I}$$

$$\overline{U}_L = \overline{X}_L \cdot \overline{I} = \omega\, L\, I\underline{/\theta_I + 90^\circ}$$

$$\overline{U} \overset{\overset{\text{2LK}}{\downarrow}}{=} \overline{U}_R + \overline{U}_L = \underbrace{(R + \mathrm{j}\,\omega L)}_{\overline{Z}_{eq}}\, \overline{I} \quad \leftarrow$$

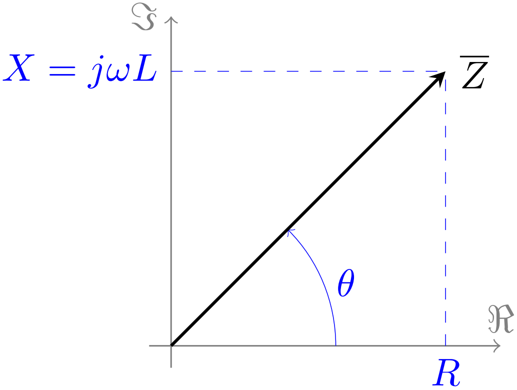
Importante: sumar módulos en lugar de fasores es un error grave

Circuito RL (inductivo con pérdidas)



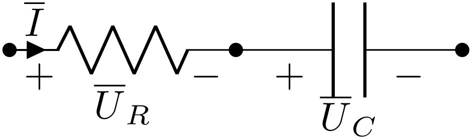
$$\overline{Z}_{eq} = R + \mathrm{j}\,\omega L \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta > 0}$$

$$\overline{Z}_{eq} \begin{cases} |Z_{eq}| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \\ \theta = \operatorname{atan}\left(\dfrac{\omega L}{R}\right) \end{cases}$$



Circuito RC (capacitivo con pérdidas)

Recordatorio: por elementos asociados en **serie**, circula la **misma corriente**

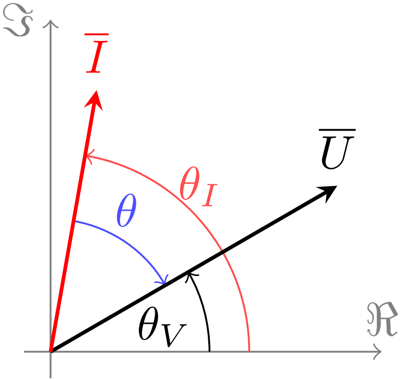


$$\bar{I} = I\underline{/\theta_I}$$

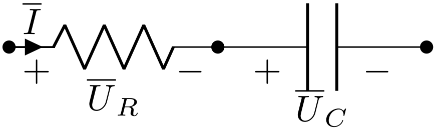
$$\overline{U}_R = R \cdot \bar{I} = R \cdot I\underline{/\theta_I}$$

$$\overline{U}_C = \overline{X}_C \cdot \bar{I} = \frac{I}{\omega C}\underline{/\theta_I - 90^\circ}$$

$$\overline{U} \overset{\substack{\text{2LK} \\ \downarrow}}{=} \overline{U}_R + \overline{U}_C = \left(\overbrace{R - \mathrm{j}\,\frac{1}{\omega C}}^{\overline{Z}_{eq}}\right)\bar{I}$$

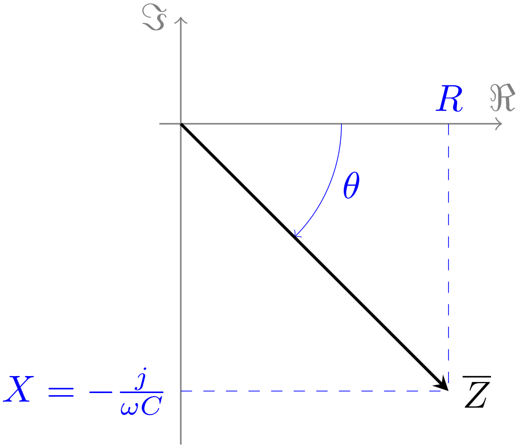


Circuito RC (capacitivo con pérdidas)

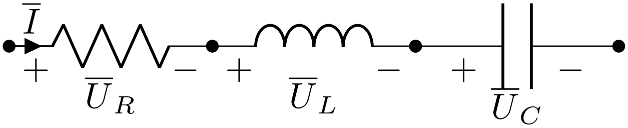


$$\overline{Z}_{eq} = R - \mathrm{j}\frac{1}{\omega C} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta < 0}$$

$$\overline{Z}_{eq} \begin{cases} |Z_{eq}| = \sqrt{R^2 + \dfrac{1}{(\omega C)^2}} \\ \theta = \mathrm{atan}\left(\dfrac{-\frac{1}{\omega C}}{R}\right) \end{cases}$$



Circuito RLC serie



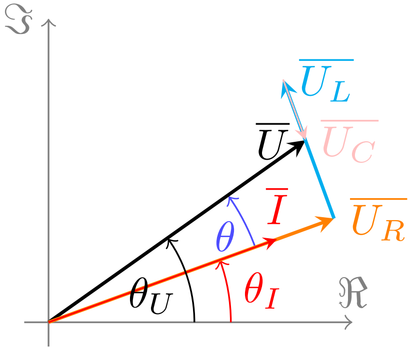
$$\overline{I} = I \underline{/\theta_I}$$

$$\overline{U}_R = R \cdot \overline{I} = R \cdot I \underline{/\theta_I}$$

$$\overline{U}_L = \overline{X}_L \cdot \overline{I} = \omega\, L\, I \underline{/\theta_I + 90^\circ}$$

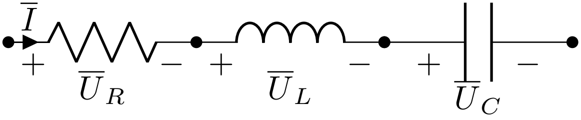
$$\overline{U}_C = \overline{X}_C \cdot \overline{I} = \frac{I}{\omega\, C} \underline{/\theta_I - 90^\circ}$$

$$\overline{U} \overset{\substack{\text{2LK}\\ \downarrow}}{=} \overline{U}_R + \overline{U}_L + \overline{U}_C = \Bigg(\underbrace{R + \mathrm{j}\,\omega L - \mathrm{j}\frac{1}{\omega C}}_{\overline{Z}_{eq}} \Bigg)\, \overline{I}$$



(ejemplo, en el que $X_L > X_C$)

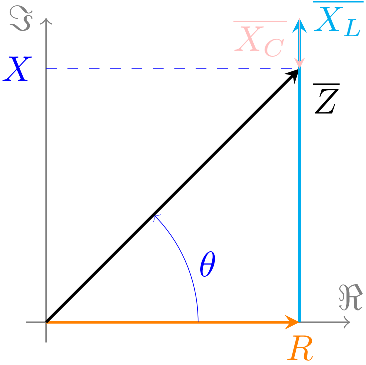
Circuito RLC serie



$$\overline{Z}_{eq} = R + \mathrm{j}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{¿\,\theta\,?}$$

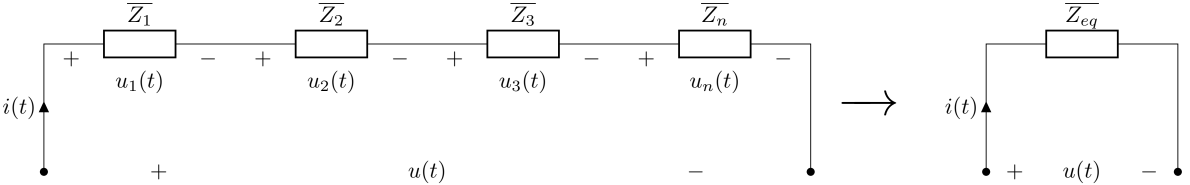
$$\overline{Z}_{eq} \begin{cases} |Z_{eq}| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \\ \theta = \operatorname{atan}\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right) \end{cases}$$

(ejemplo, en el que $X_L > X_C$)



- $\theta > 0 \Rightarrow \omega L > \frac{1}{\omega C}$: carácter inductivo
- $\theta < 0 \Rightarrow \omega L < \frac{1}{\omega C}$: carácter capacitivo
- $\theta = 0 \Rightarrow \omega L = \frac{1}{\omega C}$: carácter resistivo (resonancia)

Circuito serie general



$$\overline{U} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{2LK}}}{=} \overline{U}_1 + \overline{U}_2 + \ldots + \overline{U}_n = \overline{I} \cdot (\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2 + \ldots + \overline{Z}_n) = \overline{I} \cdot \overline{Z}_{eq}$$

$$\overline{Z}_{eq} = \overline{Z}_1 + \overline{Z}_2 + \ldots + \overline{Z}_n \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overline{Z}_{eq} = \sum_{i=1}^{n} \overline{Z}_i} \quad \leftarrow$$

Importante: sumar módulos en lugar de fasores es un error grave

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^{n} R_i \qquad X_{eq} = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{X_{eq}}{R_{eq}}\right)$$

Ejercicio

Un circuito serie formado por $R = 10\,\Omega$, $L = 20\,\text{mH}$ y $C = 100\,\mu\text{F}$ es alimentado con una tensión $u(t) = 200 \cdot \sin\left(1000t + \frac{\pi}{4}\right)$ V

Calcular $\bar{I}$, $u_R(t)$, $u_L(t)$ y $u_C(t)$, y dibujar el diagrama fasorial de tensiones y corrientes

Solución: $\bar{I} = 10\underline{/0^\circ}$ A

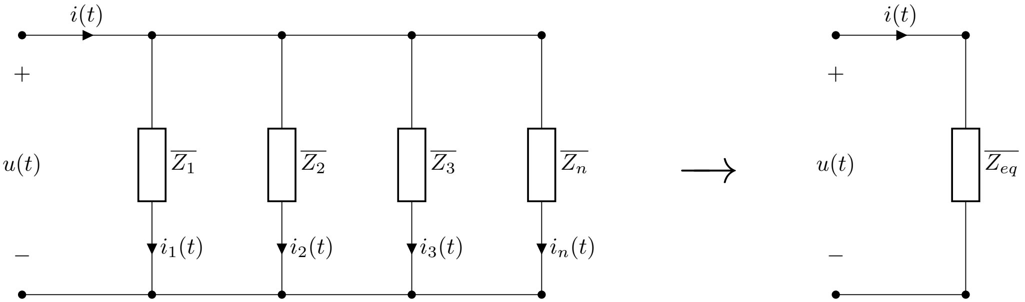
$$u_R(t) = 100\sqrt{2} \cdot \sin\left(1000t\right) \text{ V}$$

$$u_L(t) = 200\sqrt{2} \cdot \sin\left(1000t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ V}$$

$$u_C(t) = 100\sqrt{2} \cdot \sin\left(1000t - \frac{\pi}{2}\right) \text{ V}$$

Circuito paralelo general

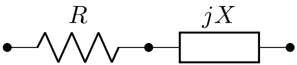
Recordatorio: los elementos asociados en **paralelo** está sometidos a la **misma tensión**

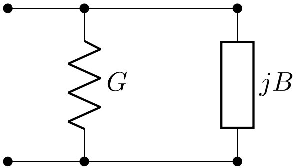


$$\bar{I} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1LK}}}{=} \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \ldots + \bar{I}_n = \bar{U} \cdot \left(\frac{1}{\bar{\bar{Z}}_1} + \frac{1}{\bar{\bar{Z}}_2} + \ldots + \frac{1}{\bar{\bar{Z}}_n} \right) = \frac{\bar{U}}{\bar{\bar{Z}}_{eq}}$$

$$\frac{1}{\bar{\bar{Z}}_{eq}} = \frac{1}{\bar{\bar{Z}}_1} + \frac{1}{\bar{\bar{Z}}_2} + \ldots + \frac{1}{\bar{\bar{Z}}_n} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{\bar{\bar{Z}}_{eq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\bar{\bar{Z}}_i}}$$

Impedancia y admitancia





$$\overline{U} = \overline{Z} \cdot \overline{I}$$

$$\overline{Z} = R + jX$$

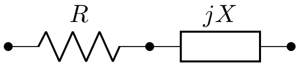
$$\overline{I} = \overline{Y} \cdot \overline{U}$$

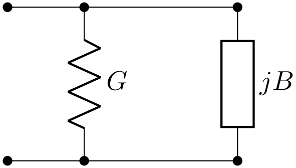
$$\overline{Y} = G + jB$$

$$\boxed{\overline{Y} = \frac{1}{\overline{Z}} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} |Y| = \dfrac{1}{|Z|} \\ \theta_Y = -\theta_Z \end{cases}}$$

Admitancia: facilidad que ofrece un circuito al paso de la corriente alterna

Impedancia y admitancia



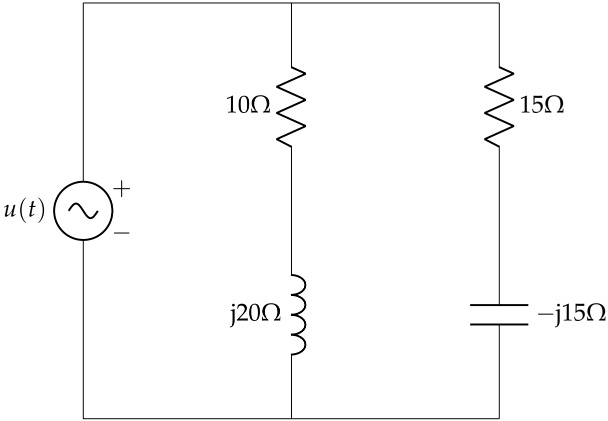


$$\overline{Z} = \frac{1}{G + \mathrm{j}B} \rightarrow \begin{cases} R = \dfrac{G}{G^2 + B^2} \\[2ex] X = \dfrac{-B}{G^2 + B^2} \end{cases}$$

$$\overline{Y} = \frac{1}{R + \mathrm{j}X} \rightarrow \begin{cases} G = \dfrac{R}{R^2 + X^2} \\[2ex] B = \dfrac{-X}{R^2 + X^2} \end{cases}$$

Ejercicio

Calcular la impedancia y admitancia compleja equivalente del circuito de la figura



Solución: $\overline{Z} = 18{,}61\underline{/7{,}1250^\circ}\,\Omega\,,\quad \overline{Y} = 0{,}054\underline{/-7{,}1250^\circ}\,\Omega^{-1}$

(se recomienda dar hasta 4 decimales en los ángulos)

Potencia en CA, expresión general

Tomemos la tensión como referencia de fases

Sin pérdida de generalidad, asumamos que el ángulo de la impedancia equivalente de un circuito es $\theta > 0$ (circuito **inductivo**): la corriente está retrasada respecto de la tensión

$$\begin{cases} u(t) = U_o \cos(\omega t) \\ i(t) = I_o \cos(\omega t - \theta) \quad \text{(circuito en } \textbf{retraso}\text{)} \end{cases}$$

$$p(t) = u(t) \cdot i(t)$$

Potencia en CA, expresión general

conveniente reformular
producto de cosenos

$$p(t) = \underbrace{U_o\cos(\omega t)}_{u(t)} \cdot \underbrace{I_o\cos(\omega t - \theta)}_{i(t)} = \underbrace{U_o \cdot I_o}_{\text{amplitud}} \cdot \cos(\omega t) \cdot \cos(\omega t - \theta) \overset{\downarrow}{=}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot U_o \cdot I_o \cdot [\cos(2\omega t - \theta) + \cos(\theta)] = \frac{U_o}{\sqrt{2}}\frac{I_o}{\sqrt{2}} \cdot [\cos(2\omega t - \theta) + \cos(\theta)]$$

$$= \underbrace{U}_{\substack{\text{valor}\\ \text{eficaz}}} \cdot I \cdot [\cos(2\omega t - \theta) + \cos(\theta)] \underset{\uparrow}{=}$$

$\cos(\alpha - \beta)$

$$= U \cdot I \cdot [\cos(2\omega t)\cos(\theta) + \sin(2\omega t)\sin(\theta) + \cos(\theta)]$$

$$\boxed{p(t) \; = \; U \cdot I\cos(\theta) \; + \; U \cdot I\cos(\theta)\cos(2\omega t) \; + \; U \cdot I\sin(\theta)\sin(2\omega t)}$$

Potencia en CA: potencia activa y potencia reactiva

En la expresión anterior, definimos dos términos:

potencia activa 'P' y **potencia reactiva** 'Q'

$$p(t) \;=\; U \cdot I \cos(\theta) \;+\; U \cdot I \cos(\theta) \cos(2\omega t) \;+\; U \cdot I \sin(\theta) \sin(2\omega t)$$

$$P = U \cdot I \cos\theta \qquad Q = U \cdot I \sin\theta$$

$$\boxed{p(t) \;=\; P \cdot [1 \;+\; \cos(2\omega t)] \;+\; Q \cdot \sin(2\omega t)}$$

Pero, ¿qué significa que la potencia sea *activa* o *reactiva*? $\rightarrow$ Siguiente diapositiva

Potencia en CA: potencia disipada y potencia entretenida

Dado que $p(t)$ varía en el tiempo, sus **efectos netos** en el circuito tras cada ciclo pueden calcularse con el valor medio en un periodo:

$$P_m = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt = \frac{1}{T}\left[P\int_0^T dt + P\cancelto{0}{\int_0^T \cos(2\omega t)\,dt} + Q\cancelto{0}{\int_0^T \sin(2\omega t)\,dt}\right] = \boxed{P}$$

- $\boldsymbol{P} = U\,I\,\cos(\theta)$ es la **potencia neta que se disipa en la carga**, dado que el resto de la potencia $p(t)$ es fluctuante

  (Unidades de P: W)

- $\boldsymbol{Q} = U\,I\,\sin(\theta)$ es **potencia únicamente *entretenida***, ya que es potencia almacenada y sucesivamente devuelta por las bobinas y condensadores (para los que $\sin(\theta) \neq 0$)

  (Unidades: VAr)

Potencia en CA, circuito resistivo

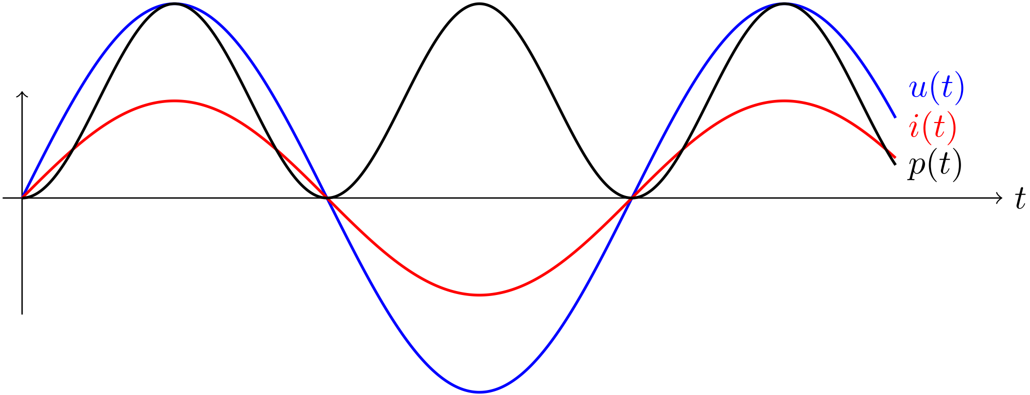
$$P = U\,I\cos\theta \qquad Q = U\,I\cancel{\sin\theta}^{\,0}$$

$$p(t) = P\cdot[1+\cos(2\omega t)] + Q\cdot\sin(2\omega t)$$

$$\overline{Z}_R = R\underline{/0^\circ} \;\rightarrow\; \theta = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} P = U\,I = \dfrac{U^2}{R} = I^2R \\ Q = 0 \end{cases}$$

$$p(t) = P\cdot[1+\cos(2\omega t)]$$

Potencia en CA, circuito resistivo



- Fluctúa al doble de frecuencia que la tensión y corriente
- Es siempre positiva
- Su valor medio es $P = U\,I \cos\theta$

Potencia en CA, circuito inductivo puro

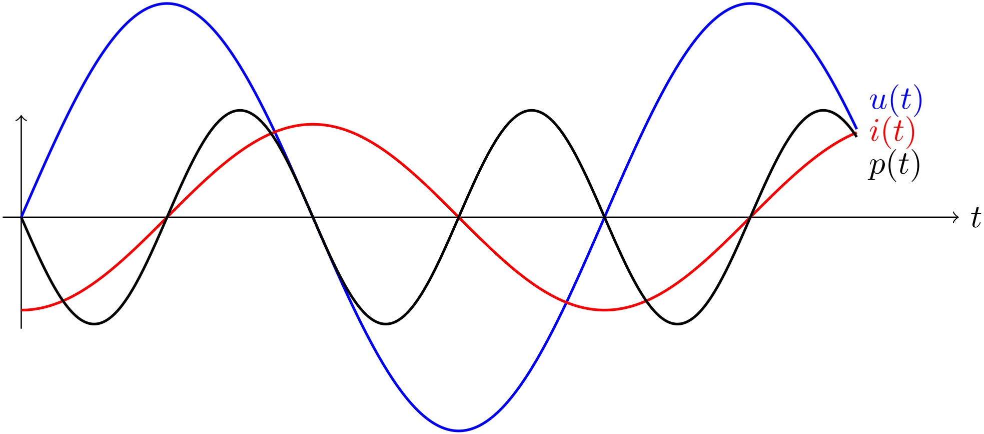
$$P = U\,I \xcancel{\cos\theta}^{\,0} \qquad Q = U\,I \sin\theta$$

$$p(t) = P \cdot [1 + \cos(2\omega t)] + Q \cdot \sin(2\omega t)$$

$$\overline{Z}_L = \omega L \underline{/90^\circ} \quad \rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} P = 0 \\ Q = U\,I = \dfrac{U^2}{\omega L} = I^2 \omega L \end{cases}$$

$$p(t) = Q \cdot \sin(2\omega t)$$

Potencia en CA, circuito inductivo puro



- Fluctúa al doble de frecuencia que la tensión y corriente
- Pasa por los ceros de tensión y corriente
- Su valor medio es nulo

Potencia en CA, circuito capacitivo puro

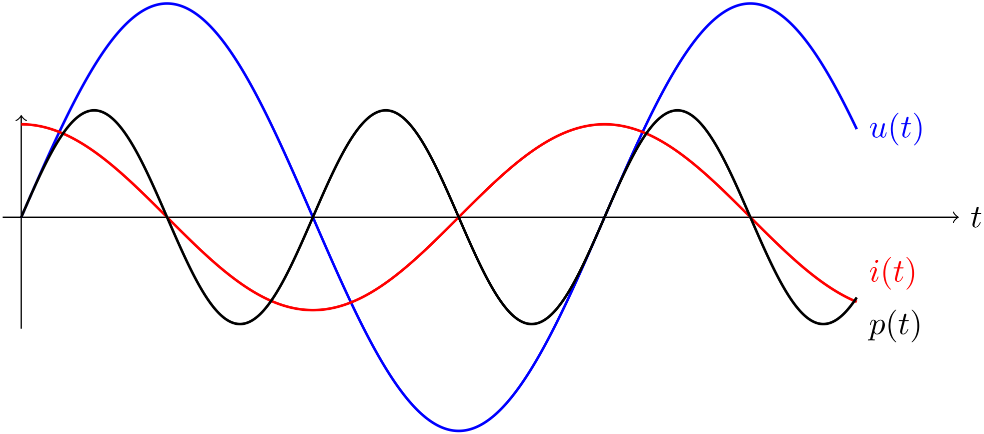
$$P = U\,I \cancel{\cos\theta}^{\,0} \qquad Q = U\,I \sin\theta$$

$$p(t) = P \cdot [1 + \cos(2\omega t)] + Q \cdot \sin(2\omega t)$$

$$\overline{Z}_C = \frac{1}{\omega C}\underline{/-90^\circ} \;\rightarrow\; \theta = -\frac{\pi}{2} \;\rightarrow\; \begin{cases} P = 0 \\ Q = -U\,I = -U^2\omega C = -\dfrac{I^2}{\omega C} \end{cases}$$

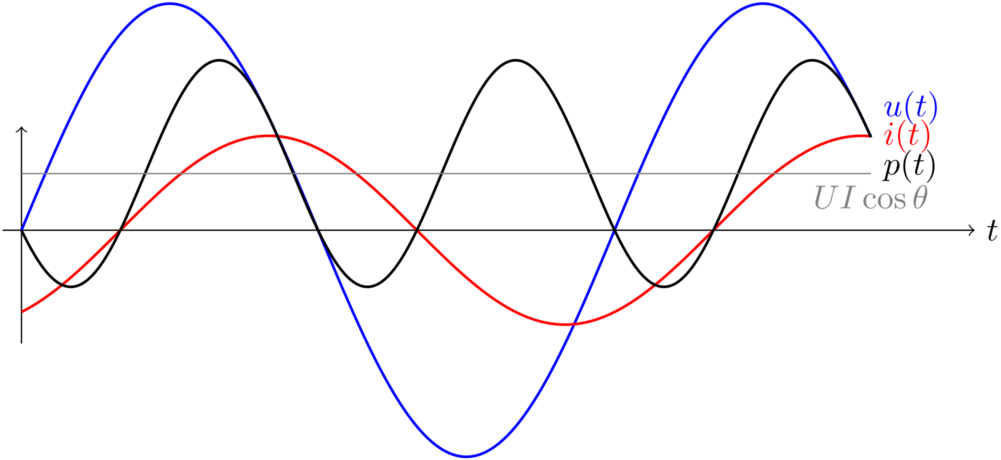
$$p(t) = Q \cdot \sin(2\omega t)$$

Potencia en CA, circuito capacitivo puro

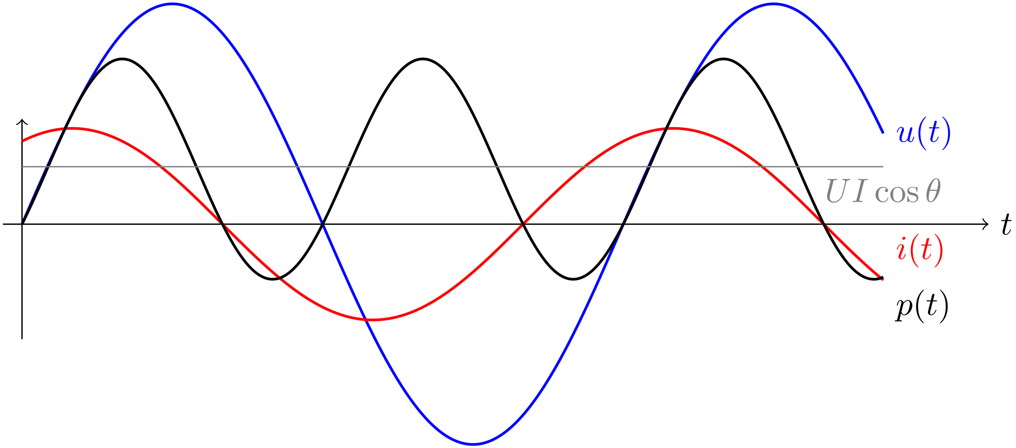


- Fluctúa al doble de frecuencia que la tensión y corriente
- Pasa por los ceros de tensión y corriente
- Su valor medio es nulo

Potencia en CA, circuito inductivo con pérdidas



Potencia en CA, circuito capacitivo con pérdidas



Triángulo de potencias

- Potencia activa [W]

$$\boxed{P = U \cdot I \cdot \cos(\theta) = R \cdot I^2}$$

- Potencia reactiva [VAr]

$$\boxed{Q = U \cdot I \cdot \sin(\theta) = X \cdot I^2}$$

- Potencia aparente [VA]

$$\boxed{\overline{S} = P + \mathrm{j}Q = \overline{U} \cdot \overline{I}^*}$$

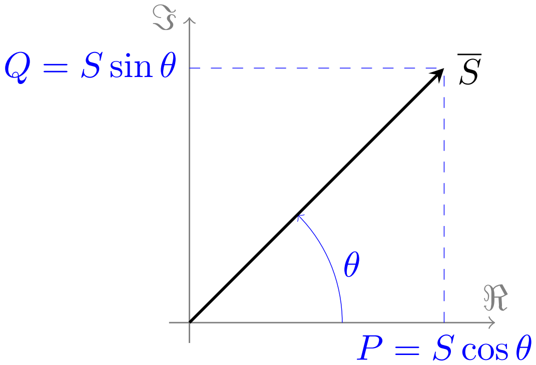
Demostración de la expresión para $\overline{S}$:

$$\overline{U} = U\underline{/0}$$

$$\overline{I} = I\underline{/-\theta} \quad \text{(circuito en retraso)}$$

$$\overline{U} \cdot \overline{I}^* = U\underline{/0} \cdot I\underline{/\theta} = U\,I\underline{/\theta} =$$

$$= U\,I\,(\cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta) = P + \mathrm{j}Q$$



$$S = U \cdot I$$

$$\theta_S = \theta_Z = \theta$$

Triángulo de potencias

- Potencia activa [W]

$$\boxed{P = U \cdot I \cdot \cos(\theta) = R \cdot I^2}$$

- Potencia reactiva [VAr]

$$\boxed{Q = U \cdot I \cdot \sin(\theta) = X \cdot I^2}$$

- Potencia aparente [VA]

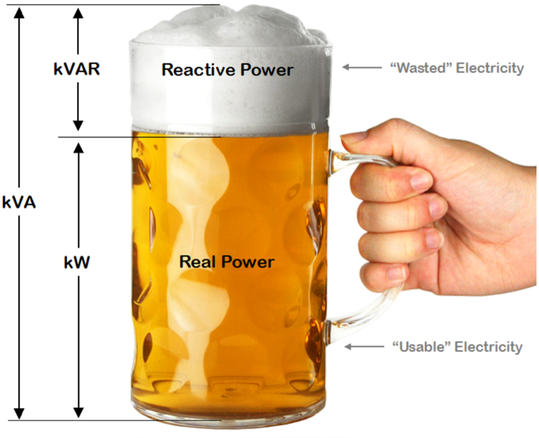
$$\boxed{\overline{S} = P + \mathrm{j}Q = \overline{U} \cdot \overline{I}^*}$$

Demostración de la expresión para $\overline{S}$:

$$\overline{U} = U\underline{/0}$$

$$\overline{I} = I\underline{/-\theta} \quad \text{(circuito en retraso)}$$

$$\overline{U} \cdot \overline{I}^* = U\underline{/0} \cdot I\underline{/\theta} = U\,I\underline{/\theta} =$$
$$= U\,I\,(\cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta) = P + \mathrm{j}Q$$



Potencia en elementos: resistencia

$$\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} P_R = R\, I^2 \\ Q_R = 0 \\ S_R = P_R \end{cases}$$

- Consume potencia activa
- No "consume" potencia reactiva

Potencia en elementos: inductancia

$$\theta = \pi/2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} P_L = 0 \\ Q_L = \omega L I^2 \\ \overline{S}_L = \omega L I^2 \underline{/\pi/2} \end{cases}$$

- No consume potencia activa
- Consume potencia reactiva ($Q > 0$)
  - **Nota**: la potencia reactiva es potencia *entretenida*, no es potencia que se consuma

    Pero, dado el convenio de signos, decimos que **las bobinas "consumen"** Q y **los condensadores "generan"** Q (ya que almacenan y devuelven energía al circuito en semiciclos inversos)

Potencia en elementos: condensador

$$\theta = -\pi/2 \Rightarrow \begin{cases} P_L = 0 \\ Q_C = -\omega C\, U^2 \\ \overline{S}_C = \omega C\, U^2 \underline{/-\pi/2} \end{cases}$$

- No consume potencia activa
- Genera potencia reactiva ($Q < 0$)
  - **Nota**: la potencia reactiva es potencia *entretenida*, no es potencia que se consuma

    Pero, dado el convenio de signos, decimos que **las bobinas "consumen"** Q y **los condensadores "generan"** Q (ya que almacenan y devuelven energía al circuito en semiciclos inversos)

Teorema de Boucherot

En un circuito con múltiples elementos, la potencia aparente total es la **suma de las potencias aparentes individuales**

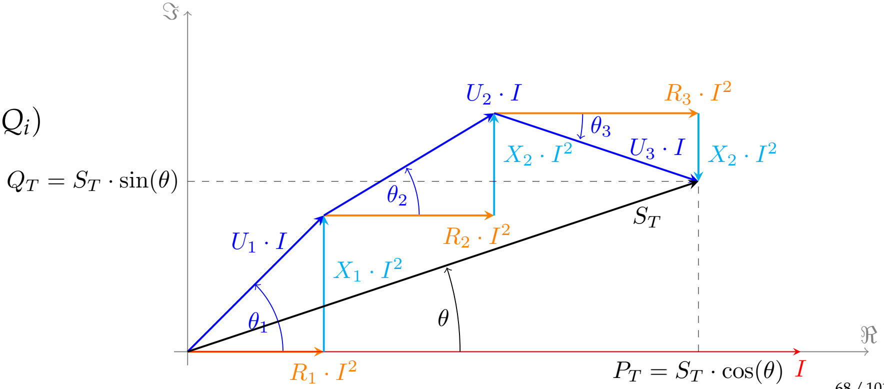
(la potencia activa/reactiva total es la **suma de las potencias activas/reactivas individuales**)

$$\overline{S} = \sum_{i=1}^{n} \overline{S}_i$$

$$P_T + \mathrm{j}Q_T = \sum_{i=1}^{n} (P_i + \mathrm{j}Q_i)$$

$$P = \sum_{i=1}^{n} P_i$$

$$Q = \sum_{i=1}^{n} Q_i$$



Teorema de Boucherot

- Consecuencia del **principio de conservación de la energía**
- Supóngase $\overline{Z_1} = R_1 + \mathrm{j}\,X_1$, $\overline{Z_2} = R_2 + \mathrm{j}\,X_2$ y $\overline{Z_3} = R_3 - \mathrm{j}\,X_3$ en serie recorridas por $\bar{I} = I\underline{/0^\circ}$:

$$\overline{U} \overset{\overset{\text{2LK}}{\downarrow}}{=} \sum_{i=1}^{3} \overline{U_i} \Rightarrow \begin{cases} U\,\cos(\theta) = \sum_{i=1}^{3} U_i\,\cos(\theta_i) \\ U\,\sin(\theta) = \sum_{i=1}^{3} U_i\,\sin(\theta_i) \end{cases}$$

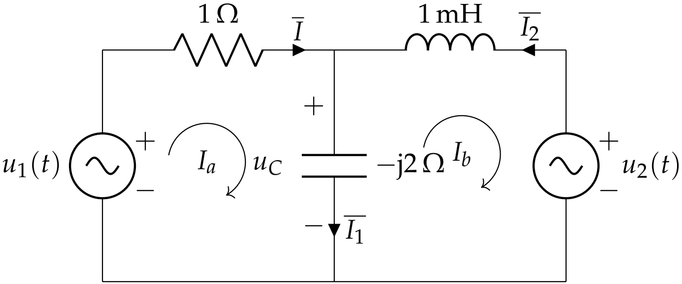
Multiplicando ambas expresiones por I:

$$U\,I\,\cos(\theta) = P_T = \sum_{i=1}^{3} U_i\,I\,\cos(\theta_i) = \sum_{i=1}^{3} P_i$$

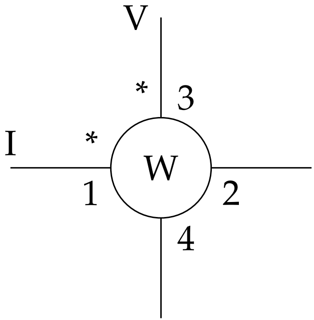
$$U\,I\,\sin(\theta) = Q_T = \sum_{i=1}^{3} U_i\,I\,\sin(\theta_i) = \sum_{i=1}^{3} Q_i$$

Ejercicio

Sabiendo que las fuentes de tensión del circuito de la figura vienen definidas por las formas de onda $u_1(t) = 10\sqrt{2} \cdot \cos(1000 \cdot t)$ V y $u_2(t) = 5\sqrt{2} \cdot \sin(1000 \cdot t)$ V, se debe calcular las potencias en cada elemento, así como el balance de potencias del circuito.



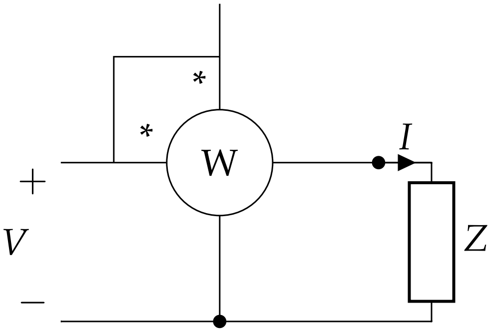
Medida de potencia: vatímetro



Vatímetro: equipo de medida de 4 terminales (un par para tensión, un par para corriente)

$$W = \overline{I_{1,2}} \circ \overline{U_{3,4}} = I_{1,2} \cdot U_{3,4} \cdot (\widehat{I_{1,2}, U_{3,4}})$$

Medida de potencia



Habitualmente se emplea con 3 terminales, cortocircuitando terminales con *

$$\boxed{W = |V||I|\cos(\theta_V - \theta_I) = P_Z}$$

Factor de potencia

El factor de potencia (*f.d.p.*), $\cos(\theta)$, representa la aportación de potencia activa dentro de la potencia aparente:

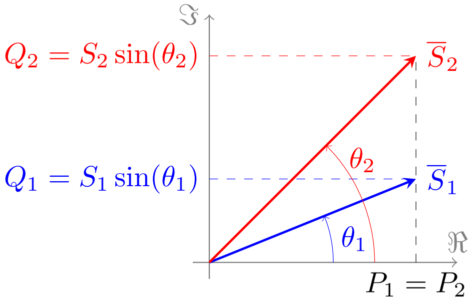
$$\cos(\theta) = \frac{P}{S}$$

Se dice que:

- *fdp* **en retraso** cuando el circuito tiene carácter inductivo (la intensidad va retrasada respecto a la tensión)
- *fdp* **en adelanto** cuando el circuito tiene carácter capacitivo (la intensidad va adelantada respecto a la tensión)

Factor de potencia: importancia y mejora

Sean dos sistemas con **misma tensión y potencia activa**, y factores de potencia $\cos\theta_2 < \cos\theta_1$ $(Q_2 > Q_1)$



- El sistema 2 requiere **mayor potencia aparente** (generador mayor) para alimentar la misma potencia activa:

$$\left(\frac{P}{\cos\theta_1} = S_1\right) < \left(S_2 = \frac{P}{\cos\theta_2}\right)$$

- El sistema 2 requiere **mayor sección de cable** para transportar la misma potencia activa:

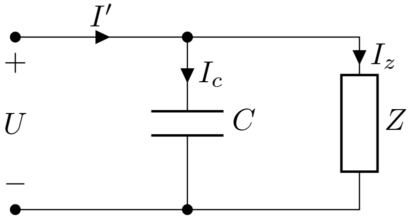
$$\left(\frac{P}{U\cos\theta_1} = I_1\right) < \left(I_2 = \frac{P}{U\cos\theta_2}\right)$$

“Generación” local de reactiva

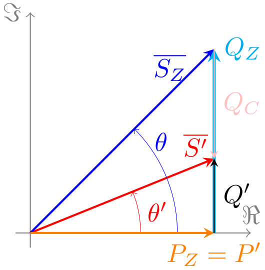
- Comúnmente, el factor de potencia es **inductivo** (máquinas eléctricas industriales).
- La red debe suministrar potencia reactiva inductiva (influye en secciones de líneas y tamaños de generadores)
- Es necesario mejorar **localmente** el factor de potencia. Solución común: utilizar **bancos de condensadores** como suministradores de potencia reactiva.

Cálculo de la capacidad para compensación de reactiva

Sea una carga de potencia activa P_z, potencia reactiva Q_z, factor de potencia $\cos\theta$. Se desea **mejorar el factor de potencia** a $\cos\theta' > \cos\theta$, manteniendo la potencia P_z



$$P' = P_z$$
$$Q' = Q_c + Q_z \quad (Q' < Q_z)$$
$$\bar{I'} = \bar{I_c} + \bar{I_z} \quad (I' < I_z)$$



$$Q_z = P_z \tan\theta$$
$$Q' = P_z \tan\theta'$$
$$|Q_c| = Q_z - Q' = P_z(\tan\theta - \tan\theta')$$

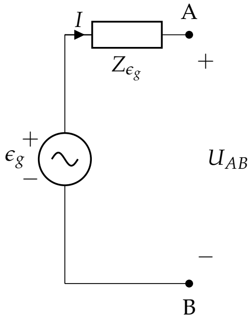
$$|Q_c| = \omega C U^2 \rightarrow \boxed{C = \frac{P_z(\tan\theta - \tan\theta')}{\omega U^2}}$$

1. Formas de onda
2. Onda senoidal
3. Cálculo fasorial
4. Respuesta de elementos pasivos a excitación senoidal
5. Potencia en corriente alterna
6. Teoremas

Equivalencia de fuentes

Sólo es posible establecer equivalencia entre **fuentes reales**

(la deducción es equivalente a la ya vista para corriente continua)

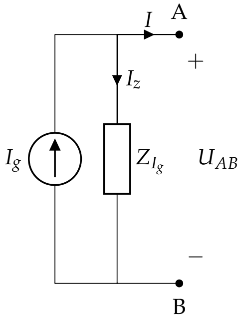


$$\overline{U}_{AB} = \overline{\epsilon}_g - \overline{Z}_{\epsilon_g} \cdot \overline{I}$$

$$\overline{Z}_g = \overline{Z}_{\epsilon_g} = \overline{Z}_{I_g}$$

$$\overline{\epsilon}_g = \overline{Z}_g \cdot \overline{I}_g$$

$$\overline{I}_g = \frac{\overline{\epsilon}_g}{\overline{Z}_g}$$

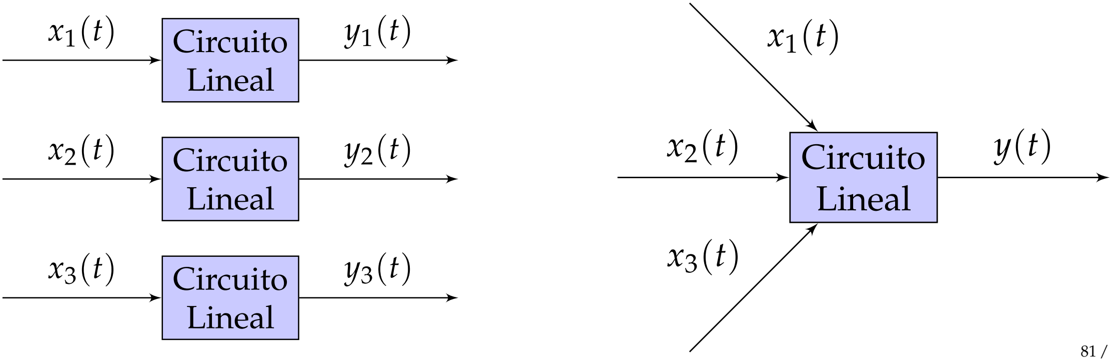


$$\overline{I} = \overline{I}_g - \frac{\overline{U}_{AB}}{\overline{Z}_{I_g}}$$

Superposición

La respuesta de un **circuito lineal** a varias fuentes de excitación actuando simultáneamente es igual a la **suma de las respuestas** que se tendrían cuando actuase cada una de ellas por separado

$$y(t) = \sum_i y_i(t)$$



Análisis de un circuito mediante superposición

Procedimiento

1. Se **eliminan** todas las **fuentes independientes** del circuito menos una
   - Las fuentes de **tensión** se sustituyen por un **cortocircuito** ($U = 0$)
   - Las fuentes de **corriente** se sustituyen por un **circuito abierto** ($I = 0$)
   - Las fuentes **dependientes no se modifican**
2. Se analiza el circuito, obteniendo la **respuesta individual** a la fuente que permanece activa
3. Se repite este procedimiento para **cada una de las fuentes independientes** del circuito
4. La respuesta total del circuito es la **suma de las respuestas individuales**

Análisis de un circuito mediante superposición

Observaciones

- **Siempre** hay que **aplicar este método** cuando en un circuito conviven **fuentes de diferente frecuencia** (o fuentes de corriente continua y corriente alterna)
- En el caso de fuentes de **corriente alterna senoidal**:
  - La respuesta total debe expresarse en el **dominio del tiempo** (**NO** se pueden **sumar fasores** que corresponden a **frecuencias diferentes**)
- En el primer paso del procedimiento, se pueden **agrupar las fuentes que funcionan a la misma frecuencia** y calcular la respuesta del circuito en esa frecuencia

Principio de superposición y potencia

El principio de superposición aplica a tensiones y corrientes, pero **NO a potencias**

(ya que potencia es el resultado de una **operación no lineal**, el producto de corriente y tensión)

Supongamos $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$:

$$\begin{aligned} p(t) &= R \cdot i^2(t) = \\ &= R \cdot [i_1(t) + i_2(t)]^2 = \\ &= R \cdot [i_1^2(t) + i_2^2(t) + 2 \cdot i_1(t) \cdot i_2(t)] \end{aligned}$$

$$\boxed{p(t) \neq p_1(t) + p_2(t)}$$

Principio de superposición y potencia

- Cuando las señales son **ortogonales en un periodo**[*] se pueden sumar las **potencias medias** de cada circuito

$$P = \sum_i P_i$$

- Ejemplos de señales ortogonales: senoidal con diferente frecuencia, una senoidal con una continua…

[*] Dos señales son ortogonales si cumplen la siguiente ecuación:

$$< f_1, f_2 >_T = \int_T f_1(t) \cdot f_2(t) dt = 0$$

Principio de superposición y potencia: ejemplo

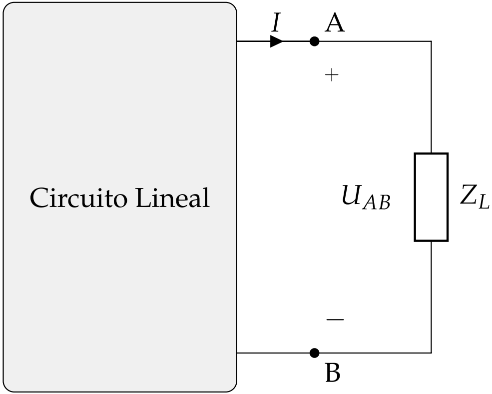
Teniendo en cuenta la propiedad de ortogonalidad, si en un circuito actúa **una fuente de continua** y **varias fuentes de alterna** de **distinta frecuencia** entre ellas:

- Potencia disipada en una **resistencia**:
$$P_R = R \cdot \left(I_{cc}^2 + I_1^2 + I_2^2 + ... + I_n^2 \right)$$
- **Potencia entregada por fuente de tensión** de frecuencia ω_1:
$$P = E\, I_1 \, \cos(\theta_{i_1})$$
- **Potencia entregada por fuente de corriente** de frecuencia ω_2:
$$P = U_2 \, I_g \, \cos(\theta_{u_2})$$

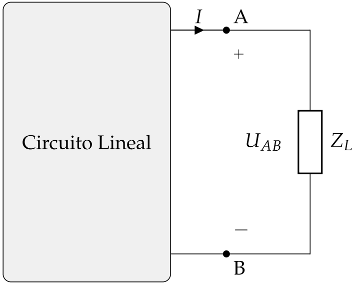
Potencia entregada:
solo actúa la componente de la intensidad/tensión que tiene **la misma frecuencia** que el generador de tensión/corriente

Teorema de Thévenin

Cualquier **red lineal** compuesta por elementos activos y pasivos puede sustituirse, desde el punto de vista de sus terminales externos AB, por una **fuente de tensión** (generador de Thévenin, ϵ_{th}) en **serie** con una impedancia (impedancia de Thévenin, Z_{th}).



Cálculo del equivalente de Thévenin



- Circuito abierto ($Z_L \to \infty, \quad U_{AB} = U_{oc}$)

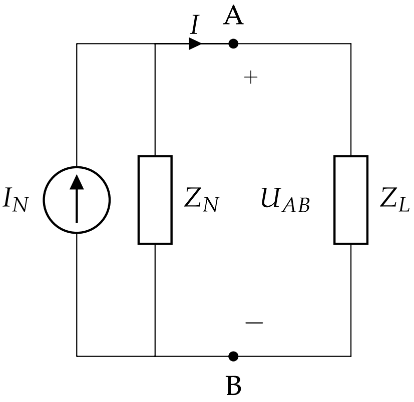
$$\boxed{\epsilon_{th} = U_{oc}} \qquad (\text{SC}\equiv\textit{short circuit}, \quad \text{OC}\equiv\textit{open circuit})$$

- Cortocircuito ($Z_L = 0, \quad I = I_{sc}$)

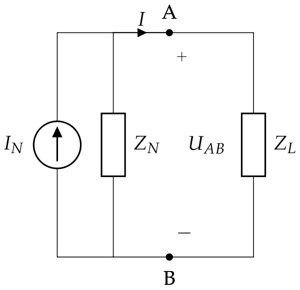
$$\boxed{Z_{th} = \frac{\epsilon_{th}}{I_{sc}} = \frac{U_{oc}}{I_{sc}}}$$

Teorema de Norton

Cualquier **red lineal** compuesta por elementos activos y pasivos puede sustituirse, desde el punto de vista de sus terminales externos AB, por una **fuente de corriente** (generador de Norton, I_N) en **paralelo** con una impedancia (impedancia de Norton, Z_N).



Cálculo del equivalente de Norton



- Cortocircuito ($Z_L = 0, \quad I = I_{sc}$)

$$\boxed{I_N = I_{sc}} \qquad (\text{SC}\equiv\textit{short circuit}, \quad \text{OC}\equiv\textit{open circuit})$$

- Circuito abierto ($Z_L \to \infty, \quad U_{AB} = U_{oc}$)

$$\boxed{Z_N = \frac{U_{oc}}{I_N} = \frac{U_{oc}}{I_{sc}}}$$

Cálculo de impedancia Thévenin/Norton

- Siempre podemos calcular la impedancia Thévenin/Norton **calculando tanto U_{oc} como I_{sc}**, pero en ocasiones **no es sencillo** calcular estas magnitudes

- Existe un método alternativo:
  - Si el circuito **NO** contiene **fuentes dependientes**:

    Se puede calcular **apagando** todos los **generadores** y obteniendo la impedancia equivalente

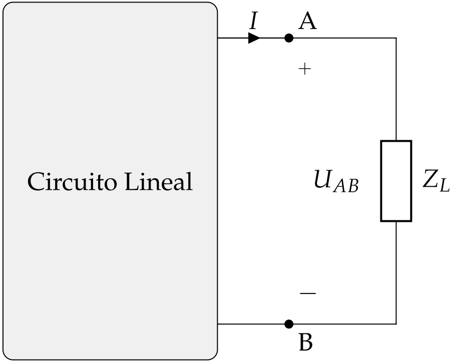
  - Si el circuito contiene **fuentes dependientes**:

    Una **fuente dependiente no se puede apagar**, porque no tiene una excitación autónoma (depende de lo que está ocurriendo en otra parte del circuito)

    Es **necesario** conectar un **generador de prueba** a la salida del circuito y obtener la relación entre tensión y corriente de este generador

Máxima transferencia de potencia

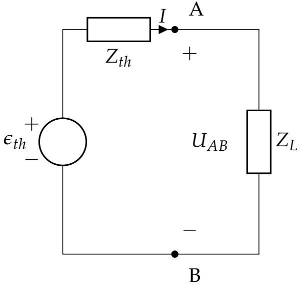
¿Qué impedancia $\overline{Z}_L$ hay que conectar en los terminales AB para que el circuito entregue la **máxima potencia disponible**?



Se aplica el **equivalente de Thévenin** (siguiente diapositiva)

Máxima transferencia de potencia: ecuaciones

Calculamos la **potencia activa en la impedancia** de carga $\overline{Z}_L$:



$$\overline{Z}_{th} = R_{th} + jX_{th}$$

$$\overline{Z}_L = R_L + jX_L$$

$$\bar{I} = \frac{\bar{\epsilon}_{th}}{\overline{Z}_{th} + \overline{Z}_L} \rightarrow |\bar{I}| = \frac{\epsilon_{th}}{|\overline{Z}_{th} + \overline{Z}_L|}$$

$$P_L = I^2 \cdot R_L$$

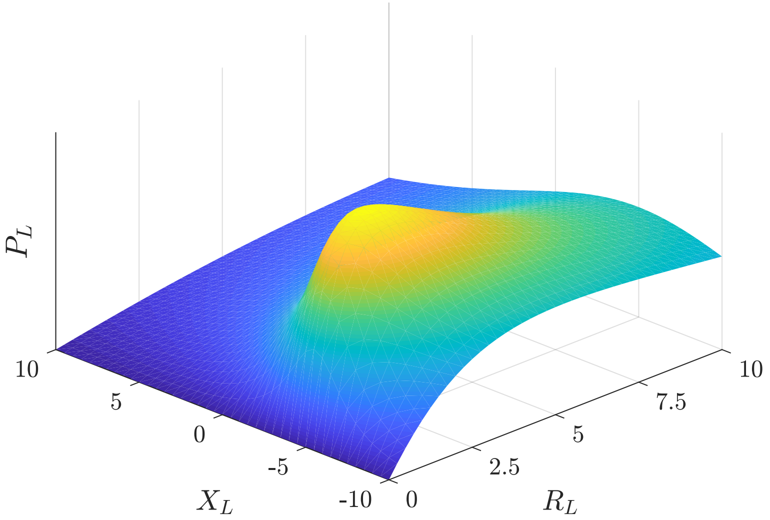
$$\boxed{P_L = \frac{\epsilon_{th}^2}{|\overline{Z}_{th} + \overline{Z}_L|^2} \cdot R_L}$$

Las condiciones de máximo son:

$$\boxed{\frac{\partial P_L}{\partial X_L} = 0\,, \qquad \frac{\partial P_L}{\partial R_L} = 0}$$

Máxima transferencia de potencia: ejemplo gráfico

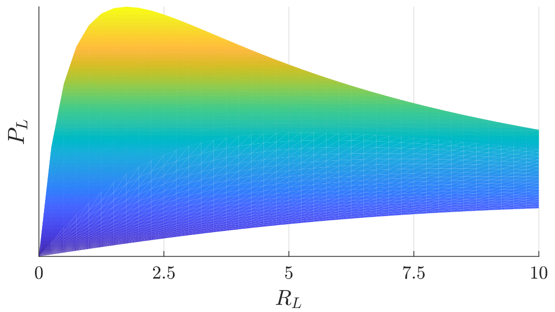
Ejemplo para $R_{th} = 1{,}25\,\Omega$ y $X_{th} = 5\,\Omega$:

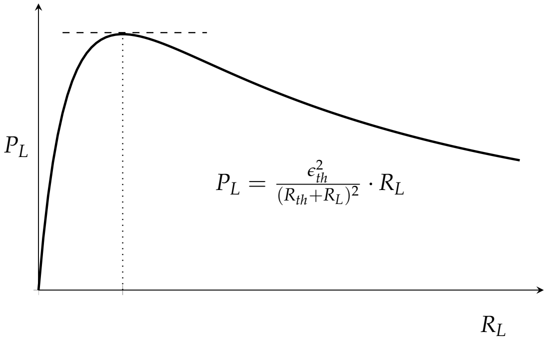


Máxima transferencia de potencia: ejemplo gráfico

Ejemplo para $R_{th} = 1{,}25\,\Omega$ y $X_{th} = 5\,\Omega$:

Si tomamos la **vista perpendicular al eje de 'R_L'**, tenemos una gráfica cuyo límite superior es la curva que vimos en el tema 1:





Máxima transferencia de potencia: reactancia

A partir de la expresión de potencia en la carga…

$$P_L = \frac{\epsilon_{th}^2}{|\overline{Z}_{th} + \overline{Z}_L|^2} \cdot R_L$$

…calculamos la derivada parcial respecto de la reactancia:

$$\frac{\partial P_L}{\partial X_L} \overset{\substack{\text{regla de}\\ \text{la cadena}\\ \downarrow}}{=} \epsilon_{th}^2 \cdot R_L \cdot \left[\frac{-1}{\left[(R_L + R_{th})^2 + (X_L + X_{th})^2\right]^2} \cdot 2 \cdot (X_L + X_{th}) \right]$$

Aplicamos la **condición de máximo** y obtenemos un resultado parcial:

$$\frac{\partial P_L}{\partial X_L} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{X_L = -X_{th}}$$

Máxima transferencia de potencia: resistencia

Simplificamos la expresión de la potencia teniendo en cuenta el resultado anterior ($X_L = -X_{th}$):

$$P_L = \frac{\epsilon_{th}^2}{(R_{th} + R_L)^2} \cdot R_L$$

Calculamos la derivada parcial respecto de la resistencia:

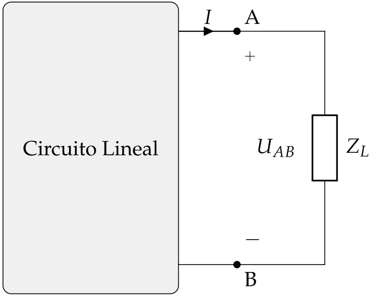
$$\frac{\partial P_L}{\partial R_L} \overset{\substack{\text{derivada de} \\ \text{un producto} \\ \downarrow}}{=} \epsilon_{th}^2 \cdot \left[\frac{1}{(R_L + R_{th})^2} - 2 \cdot \frac{R_L}{(R_L + R_{th})^3} \right] = \frac{\epsilon_{th}^2 \cdot (R_{th} - R_L)}{(R_L + R_{th})^3}$$

Nuevamente, aplicamos la **condición de máximo** y obtenemos la resistencia:

$$\frac{\partial P_L}{\partial R_L} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_L = R_{th}}$$

Impedancia de carga (o impedancias "adaptadas")

Dado un circuito lineal (del que podemos calcular su equivalente de Thévenin)…

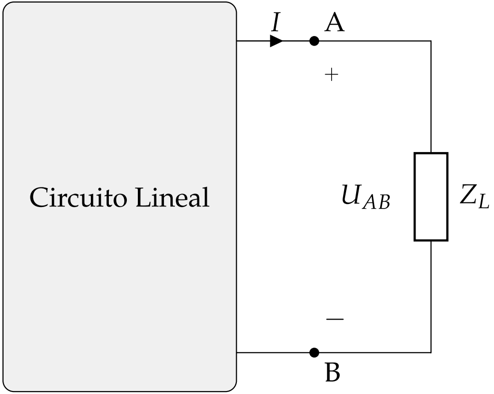


…la **impedancia de carga** que hay que conectar entre sus terminales AB para obtener la máxima potencia disponible es:

$$\boxed{\overline{Z}_L = \overline{Z}_{th}^{*} = R_{th} - \mathrm{j}\, X_{th}}$$

Máxima potencia disponible

La **máxima potencia** que puede entregarse a la carga es:



$$\left.\begin{aligned} \overline{Z}_L &= \overline{Z}_{th}^* \\ P_L &= \frac{\epsilon_{th}^2}{|\overline{Z}_{th} + \overline{Z}_L|^2} \cdot R_L \end{aligned}\right\} \rightarrow \boxed{P_L = \frac{\epsilon_{th}^2}{4 \cdot R_{th}}}$$

Importante

Esta expresión es **válida únicamente** para calcular la **máxima transferencia** de potencia

(no aplica para calcular la potencia disipada por una impedancia genérica $\overline{Z}_L$, únicamente aplica para $\overline{Z}_L = \overline{Z}_{th}^*$)