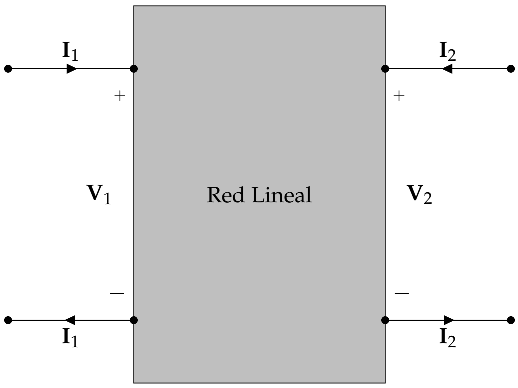
Caracterización de cuadripolos
Laboratorio de Teoría de Circuitos III

Oscar Perpiñán y Luis Badesa

20 de noviembre de 2023

1. Definición de cuadripolo

Un cuadripolo es un conjunto de elementos eléctricos interconectados con cuatro bornes de acceso, agrupados en dos puertos, uno de entrada y otro de salida. Un cuadripolo se emplea para modelar equipos de transmisión, filtros, o líneas de transporte de energía eléctrica, usando un rectángulo como representación para indicar que la estructura interna no es relevante. El comportamiento del cuadripolo se determina a través de las relaciones entre las tensiones y corrientes en los puertos.



Las relaciones pueden expresarse de forma diversa, dando lugar a diferentes familias de parámetros. En este documento distinguiremos cuatro familias:

- Parámetros impedancia: las tensiones se expresan en función de las corrientes.
- Parámetros admitancia: las corrientes se expresan en función de las tensiones.
- Parámetros híbridos: la tensión de entrada y la corriente de salida se expresan en función de la tensión de salida y la corriente de entrada.
- Parámetros híbridos inversos: la corriente de entrada y la tensión de salida se expresan en función de la tensión de entrada y la corriente de salida.

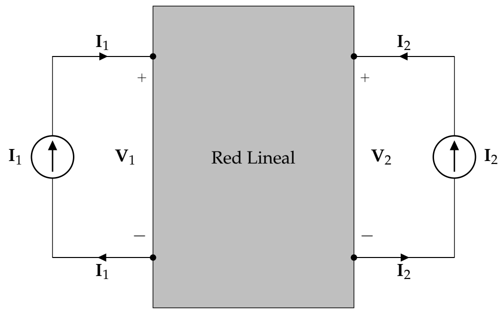
En estas relaciones es importante prestar atención al sentido de las corrientes que se muestra en la figura.

Las ecuaciones que se recogen a continuación emplean una nomenclatura genérica válida tanto para Laplace como para fasores, empleando el resaltado en negrita para tensiones, corrientes e impedancias. Los parámetros del cuadripolo se muestran en minúsculas, y las impedancias del circuito en mayúsculas.

2. Caracterización de Cuadripolos

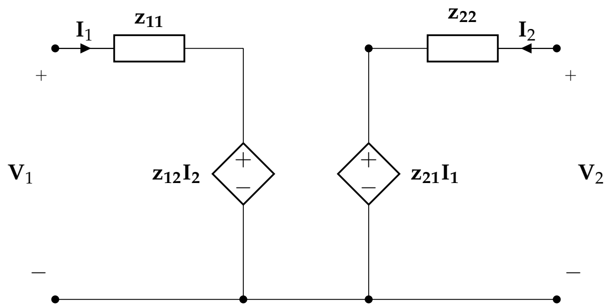
2.1. Parámetros de Impedancia

Definición y circuito equivalente

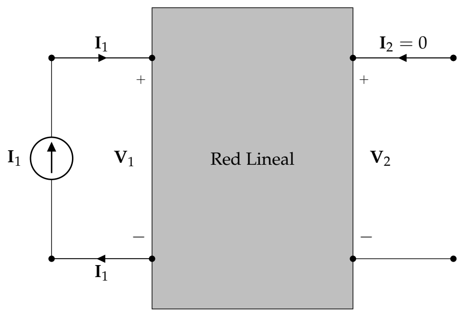


$$\mathbf{U}_1 = \mathbf{z}_{11}\mathbf{I}_1 + \mathbf{z}_{12}\mathbf{I}_2$$
$$\mathbf{U}_2 = \mathbf{z}_{21}\mathbf{I}_1 + \mathbf{z}_{22}\mathbf{I}_2$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{11} & \mathbf{z}_{12} \\ \mathbf{z}_{21} & \mathbf{z}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}$$



Medida

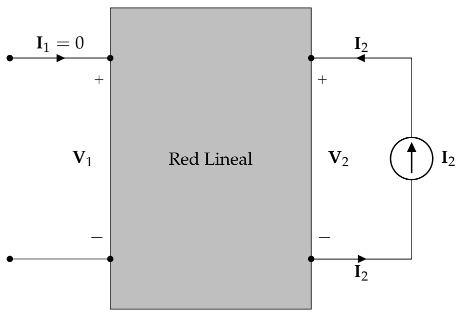


$$\mathbf{z}_{11} = \left.\frac{\mathbf{U}_1}{\mathbf{I}_1}\right|_{\mathbf{I}_2=0}$$
$$\mathbf{z}_{21} = \left.\frac{\mathbf{U}_2}{\mathbf{I}_1}\right|_{\mathbf{I}_2=0}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \color{blue}{\mathbf{z}_{11}} & \mathbf{z}_{12} \\ \color{blue}{\mathbf{z}_{21}} & \mathbf{z}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \color{blue}{\mathbf{I}_1} \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}$$

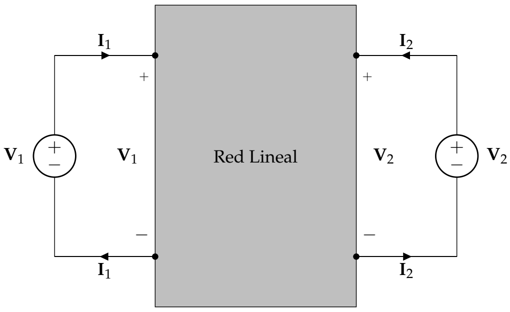
$$\mathbf{z}_{12} = \left.\frac{\mathbf{U}_1}{\mathbf{I}_2}\right|_{\mathbf{I}_1=0}$$
$$\mathbf{z}_{22} = \left.\frac{\mathbf{U}_2}{\mathbf{I}_2}\right|_{\mathbf{I}_1=0}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{11} & \color{blue}{\mathbf{z}_{12}} \\ \mathbf{z}_{21} & \color{blue}{\mathbf{z}_{22}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \color{blue}{\mathbf{I}_2} \end{bmatrix}$$



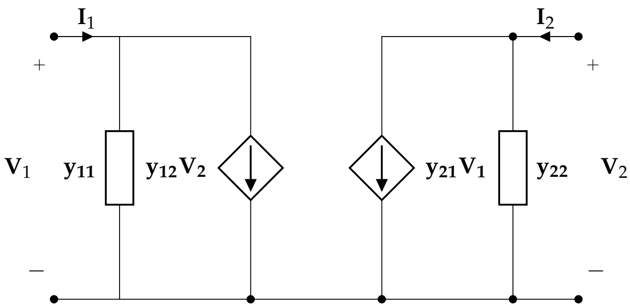
2.2. Parámetros de Admitancia

Definición y circuito equivalente

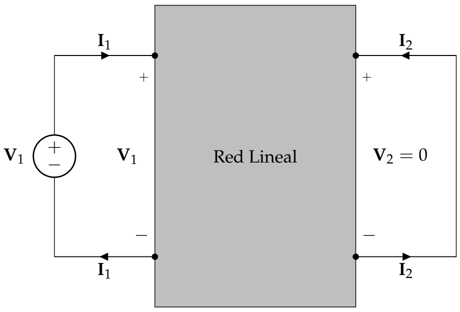


$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{y}_{11}\mathbf{U}_1 + \mathbf{y}_{12}\mathbf{U}_2$$
$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{y}_{21}\mathbf{U}_1 + \mathbf{y}_{22}\mathbf{U}_2$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{11} & \mathbf{y}_{12} \\ \mathbf{y}_{21} & \mathbf{y}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \end{bmatrix}$$



Medida

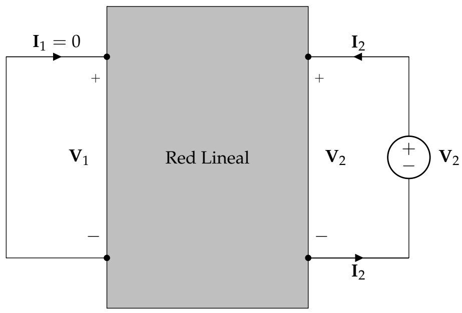


$$\mathbf{y}_{11} = \left.\frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{U}_1}\right|_{\mathbf{U}_2=0}$$
$$\mathbf{y}_{21} = \left.\frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{U}_1}\right|_{\mathbf{U}_2=0}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{11} & \mathbf{y}_{12} \\ \mathbf{y}_{21} & \mathbf{y}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \end{bmatrix}$$

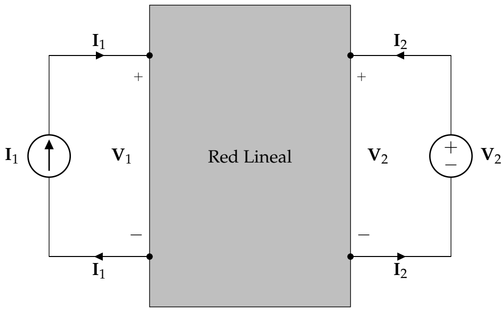
$$\mathbf{y}_{12} = \left.\frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{U}_2}\right|_{\mathbf{U}_1=0}$$
$$\mathbf{y}_{22} = \left.\frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{U}_2}\right|_{\mathbf{U}_1=0}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{11} & \mathbf{y}_{12} \\ \mathbf{y}_{21} & \mathbf{y}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \end{bmatrix}$$



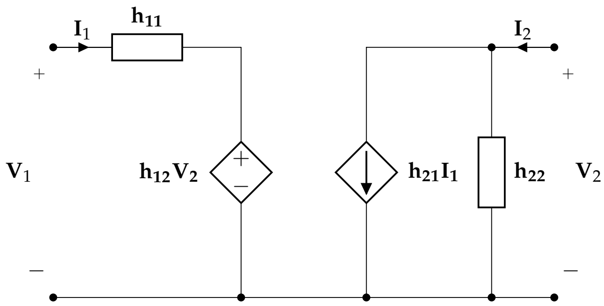
2.3. Parámetros Híbridos

Definición y circuito equivalente

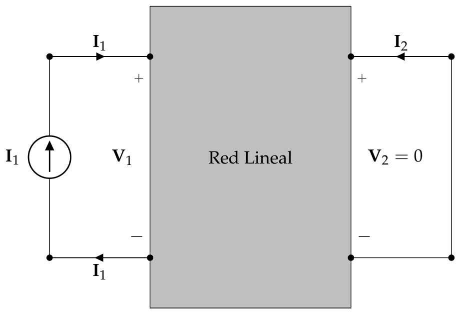


$$U_1 = h_{11} I_1 + h_{12} U_2$$
$$I_2 = h_{21} I_1 + h_{22} U_2$$

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$



Medida

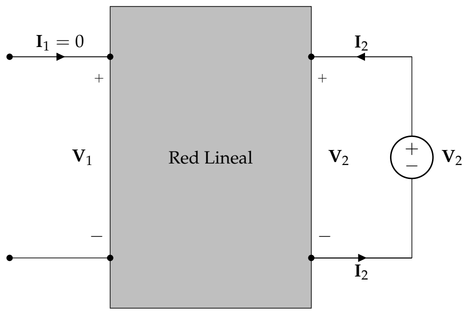


$$h_{11} = \left.\frac{U_1}{I_1}\right|_{U_2=0}$$
$$h_{21} = \left.\frac{I_2}{I_1}\right|_{U_2=0}$$

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \color{blue}{h_{11}} & h_{12} \\ \color{blue}{h_{21}} & h_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \color{blue}{I_1} \\ U_2 \end{bmatrix}$$

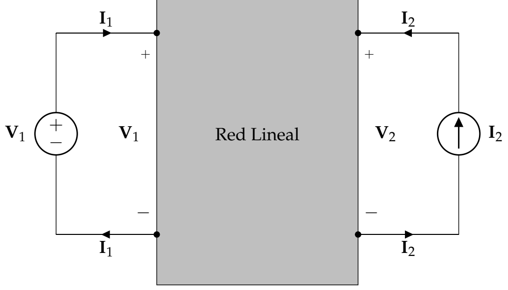
$$h_{12} = \left.\frac{U_1}{U_2}\right|_{I_1=0}$$
$$h_{22} = \left.\frac{I_2}{U_2}\right|_{I_1=0}$$

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & \color{blue}{h_{12}} \\ h_{21} & \color{blue}{h_{22}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ \color{blue}{U_2} \end{bmatrix}$$



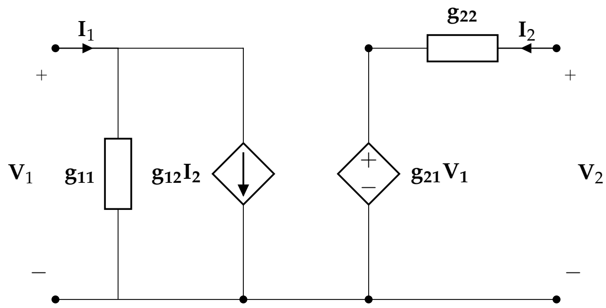
2.4. Parámetros Híbridos Inversos

Definición y circuito equivalente

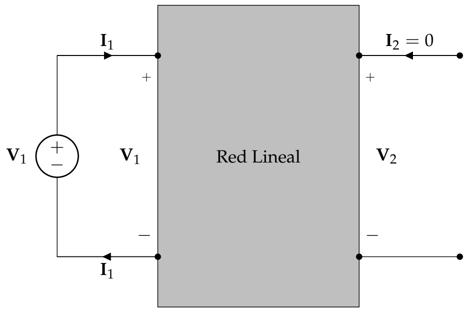


$$I_1 = g_{11}U_1 + g_{12}I_2$$
$$U_2 = g_{21}U_1 + g_{22}I_2$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$



Medida

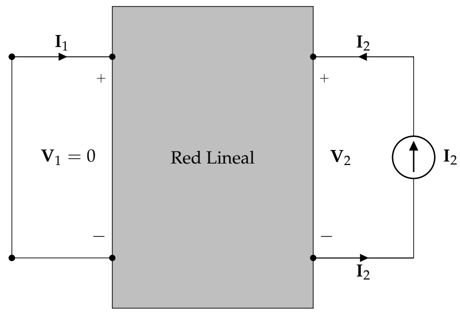


$$g_{11} = \left.\frac{I_1}{U_1}\right|_{I_2=0}$$
$$g_{21} = \left.\frac{U_2}{U_1}\right|_{I_2=0}$$

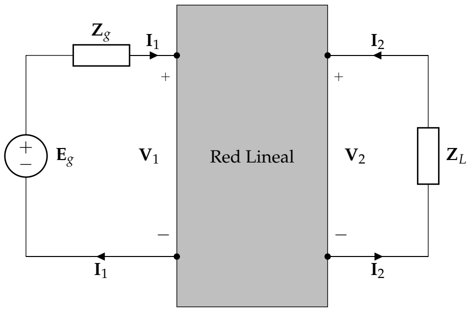
$$\begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \textcolor{blue}{g_{11}} & g_{12} \\ \textcolor{blue}{g_{21}} & g_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \textcolor{blue}{U_1} \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$$g_{12} = \left.\frac{I_1}{I_2}\right|_{U_1=0}$$
$$g_{22} = \left.\frac{U_2}{I_2}\right|_{U_1=0}$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & \textcolor{blue}{g_{12}} \\ g_{21} & \textcolor{blue}{g_{22}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ \textcolor{blue}{I_2} \end{bmatrix}$$



3. Impedancia de carga



$$\mathbf{U}_1 = \mathbf{E}_g - \mathbf{Z}_g \cdot \mathbf{I}_1$$
$$\mathbf{U}_2 = -\mathbf{Z}_L \cdot \mathbf{I}_2$$

Para obtener la máxima potencia en la salida del cuadripolo, la impedancia de carga $\mathbf{Z}_L$ deberá ser igual al conjugado de la impedancia de salida del cuadripolo, $\mathbf{Z}_L = \mathbf{Z}_o^*$, definida como:

$$\mathbf{Z}_o = \left. \frac{\mathbf{U}_2}{\mathbf{I}_2} \right|_{\mathbf{E}_g = 0}$$

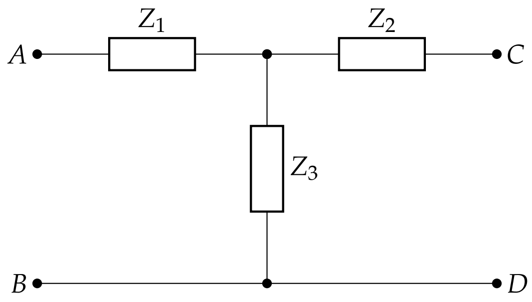
Esta impedancia puede calcularse con cualquiera de las familias de parámetros anteriores. Por ejemplo, con los parámetros impedancia tendremos las siguientes ecuaciones:

$$\mathbf{U}_1 = -\mathbf{Z}_g \cdot \mathbf{I}_1$$
$$\mathbf{U}_1 = \mathbf{z}_{11}\mathbf{I}_1 + \mathbf{z}_{12}\mathbf{I}_2$$
$$\mathbf{U}_2 = \mathbf{z}_{21}\mathbf{I}_1 + \mathbf{z}_{22}\mathbf{I}_2$$

Sustituyendo la primera ecuación en la segunda, y ésta a su vez en la tercera obtenemos:

$$\mathbf{Z}_o = \mathbf{z}_{22} - \frac{\mathbf{z}_{12} \cdot \mathbf{z}_{21}}{\mathbf{Z}_g + \mathbf{z}_{11}}$$

4. Ejemplo: red en T



Parámetros impedancia

$$\begin{aligned}\mathbf{z}_{11} &= \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_3\\ \mathbf{z}_{12} &= \mathbf{Z}_3\\ \mathbf{z}_{21} &= \mathbf{Z}_3\\ \mathbf{z}_{22} &= \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3\end{aligned}$$

Parámetros admitancia

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_{11} &= \frac{\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3}\\ \mathbf{y}_{12} &= \frac{-\mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3}\\ \mathbf{y}_{21} &= \frac{-\mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3}\\ \mathbf{y}_{22} &= \frac{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3}\end{aligned}$$

Parámetros híbridos

$$\begin{aligned}\mathbf{h}_{11} &= \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3}\\ \mathbf{h}_{12} &= \frac{\mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3}\\ \mathbf{h}_{21} &= \frac{-\mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3}\\ \mathbf{h}_{22} &= \frac{1}{\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3}\end{aligned}$$

Parámetros híbridos inversos

$$\begin{aligned}\mathbf{g}_{11} &= \frac{1}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_3}\\ \mathbf{g}_{12} &= \frac{-\mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_3}\\ \mathbf{g}_{21} &= \frac{\mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_3}\\ \mathbf{g}_{22} &= \frac{\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_3 + \mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_3}\end{aligned}$$