Fundamentos. Circuitos de Corriente Continua.

Teoría de Circuitos

Oscar Perpiñán Lamigueiro

Este curso está dedicado al **análisis** de **circuitos eléctricos lineales** de **parámetros concentrados**.

Circuito Eléctrico

Un **circuito eléctrico** es un conjunto de componentes eléctricos interconectados mediante conductores que crean un camino cerrado por el que puede circular corriente eléctrica.

Un circuito eléctrico puede incluir:

- **elementos activos** (generadores), que entregan potencia al circuito
- **elementos pasivos** (receptores), que consumen o almacenan la potencia que circula.

Análisis y Diseño

El **análisis** (o resolución) de un circuito eléctrico existente persigue determinar sus condiciones de funcionamiento:

1. Definir las ecuaciones correspondientes al circuito,
2. Obtener los valores de determinadas variables importantes a partir de dichas ecuaciones.

El **diseño** (o síntesis) de un circuito eléctrico tiene como objetivo definir el circuito eléctrico, es decir, determinar los componentes necesarios y su interconexión, para obtener unas condiciones de funcionamiento.

Sistemas lineales

Todos los circuitos eléctricos que se estudian en este curso se comportan como **sistemas lineales**:

- $f(x+y) = f(x) + f(y)$
  La respuesta f a la suma de dos entradas x e y es igual a la suma de la respuesta individual a cada una de las entradas
- $f(k \cdot x) = k \cdot f(x)$
  La respuesta a una entrada que está multiplicada por un factor de escala k es igual a multiplicar por este factor a la respuesta a la entrada.

La linealidad es una aproximación de la realidad

- Estas propiedades simplifican el tratamiento de los circuitos, y **permiten aplicar técnicas de resolución de ecuaciones lineales**.
- La linealidad es una **aproximación de la realidad** que no puede aplicarse de manera indiscriminada a cualquier componente y en cualquier condición.
- En particular, los **dispositivos electrónicos** como diodos o transistores tienen un **comportamiento** marcadamente **no lineal**, de forma que los circuitos que los contienen no pueden analizarse directamente con las técnicas que aquí se exponen sin realizar previamente aproximaciones de su funcionamiento.

Parámetros concentrados

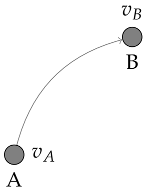
- Los circuitos eléctricos reales ocupan espacio, las máquinas generadoras y los receptores tienen grandes dimensiones, y los cables conductores se extienden a lo largo de longitudes variopintas.
- Sin embargo, el análisis de circuitos no toma en consideración las propiedades espaciales de los circuitos ni de sus componentes, sino que los confina a elementos puntuales con un modelo de **parámetros concentrados**.
- Por ejemplo, un conductor real de 100 m se representará habitualmente como un conductor ideal con una resistencia en su punto medio.

Simplificación de las ecuaciones de Maxwell

- Este tratamiento es una simplificación de las ecuaciones del electromagnetismo de Maxwell
- Es aplicable únicamente cuando las dimensiones del circuito real son inferiores a la longitud de onda de la señal que circula por el circuito.
- Por ejemplo:
  - A la frecuencia de 50 Hz, habitual en sistemas eléctricos industriales, la longitud de onda de la señal es de 6000 km.
  - A la frecuencia de 2,6 GHz, característica de la telefonía 4G, la longitud de onda se reduce a 11,5 cm.

Tensión Eléctrica

El **potencial eléctrico en un punto**, $v(t)$, es la energía potencial que tiene una carga unitaria en ese punto debida al campo eléctrico.



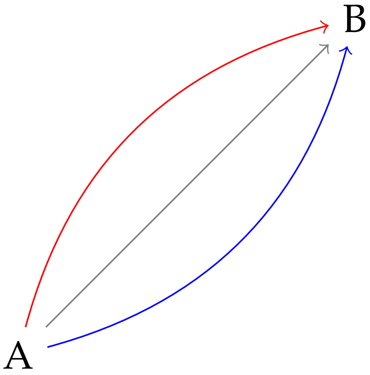
La **tensión o diferencia de potencial entre dos puntos** A y B, $u_{AB}(t)$, es el trabajo realizado por el campo eléctrico al desplazar una carga unitaria entre esos puntos.

$$u_{AB}(t) = v_A(t) - v_B(t) = \frac{dW_e}{dq}$$

La **unidad** de la tensión eléctrica es el **voltio** (V).

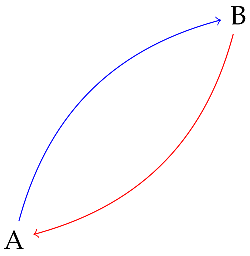
La trayectoria no importa

Dado que el campo eléctrico es **conservativo**, la diferencia de potencial entre A y B **no depende de la trayectoria** seguida para realizar el desplazamiento, sino únicamente del potencial existente en cada uno de los puntos.



El signo depende del sentido

Aunque la trayectoria no sea relevante para el cálculo de la tensión, siempre hay que tener en cuenta el **sentido del desplazamiento**.



Así, si el movimiento se produce desde B hasta A obtenemos el signo contrario al anterior resultado:

$$u_{BA} = v_B - v_A = -u_{AB}$$

Corriente Eléctrica

Se define la **intensidad de la corriente eléctrica** como la variación de la carga $q(t)$ que atraviesa la sección transversal de un conductor por unidad de tiempo:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

La corriente eléctrica se produce por el **movimiento de los electrones libres** que fluyen por el conductor. Sin embargo, por razones históricas, el **convenio** que se se emplea considera como sentido de la corriente el debido al **movimiento de las cargas positivas**.

La **unidad** de la corriente es el **amperio** (A).

Potencia Eléctrica

La **potencia eléctrica** es la variación del trabajo del campo eléctrico por unidad de tiempo:

$$p(t) = \frac{dW_e}{dt}$$

Esta definición genérica puede relacionarse con las anteriores variables:

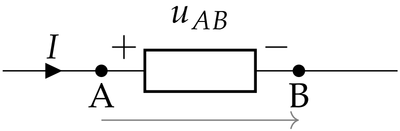
$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{dW_e}{dq} \cdot \frac{dq(t)}{dt} \\ &= v(t) \cdot i(t) \end{aligned}$$

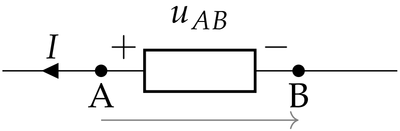
La **unidad** de la potencia eléctrica es el **vatio** (W).

Signo de la potencia eléctrica

Para determinar el **signo de la potencia eléctrica** hay que tener en consideración los signos de las variables de las que depende, la tensión y la corriente.

- Cuando las flechas de ambas variables tienen el **mismo sentido** la potencia eléctrica es **positiva**
- Cuando las flechas tienen **sentidos opuestos** la potencia eléctrica es **negativa**.

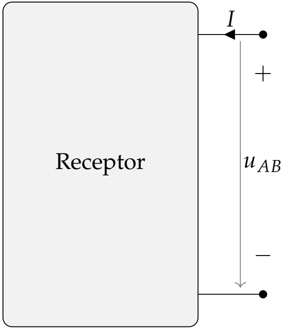


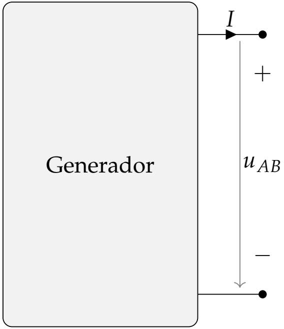


Receptores y Generadores

Es habitual **interpretar** este resultado en términos de potencia absorbida o potencia entregada.

- Un **circuito receptor absorbe potencia** y la corriente *entra* por el terminal de mayor potencial,
- Un **circuito generador entrega potencia** y la corriente *sale* por el terminal de mayor potencial.





Potencia y Energía

Energía es la capacidad para realizar un trabajo.
Unidades Wh, kWh
1 kWh = 3.6 MJ

Potencia es la cantidad de trabajo efectuado *por unidad de tiempo*.
Unidades W, kW

Rendimiento/Eficiencia

Cuadripolo (entrada/salida)

$$\eta = \frac{P_{salida}}{P_{entrada}}$$

Receptor

$$\eta_m = \frac{P_{util}}{P_{absorbida}}$$

Generador

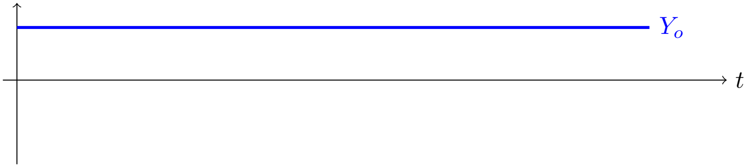
$$\eta_g = \frac{P_{entregada}}{P_{producida}}$$

Cualquier máquina tiene pérdidas:

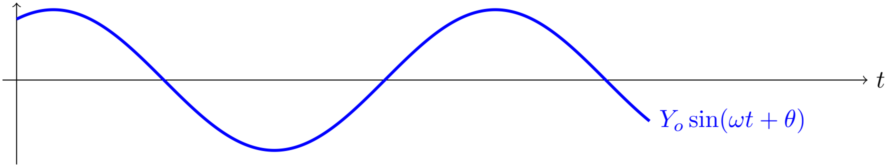
$$\boxed{\eta < 1}$$

Corriente Continua y Corriente Alterna

- Corriente Continua ($\frac{d}{dt} = 0$)



- Corriente Alterna ($\frac{d}{dt} \neq 0$)

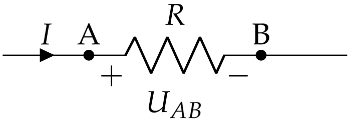


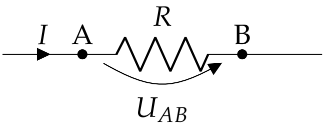
Resistencia

- **Ley de Ohm**: una resistencia provoca una **diferencia de potencial** entre sus terminales **directamente proporcional** a su corriente: **resistencia** (Ohmios, [Ω])

$$u(t) = R \cdot i(t)$$

- **Criterio de Signos**: la tensión es positiva en el terminal por el que entra la corriente (las flechas de tensión y corriente tienen el mismo sentido).





Resistividad

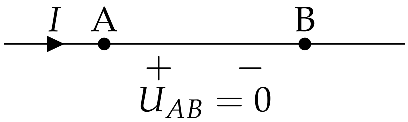
- El valor de la resistencia depende de la **resistividad del material** (ρ), de la **sección** (S), y de la longitud (l):

$$R = \rho \cdot \frac{l}{S}$$

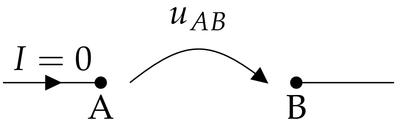
- La **sección** se expresa en mm^2.
- La **resistividad** depende del material conductor y de la temperatura ambiente:
  - Cobre a 20ºC: $17{,}24\,\mathrm{m}\Omega\,\mathrm{mm}^2\,\mathrm{m}^{-1}$.

Cortocircuito y Circuito Abierto

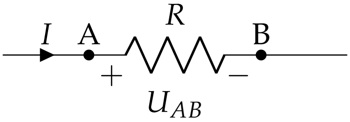
- Cortocircuito: resistencia nula (tensión nula)



- Circuito abierto: resistencia infinita (corriente nula).



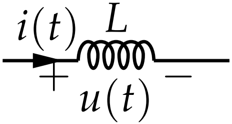
Ley de Joule



- **Ley de Joule**: una resistencia disipa energía eléctrica produciendo **calor**.

$$p(t) = R \cdot i^2(t)$$

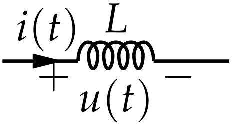
Bobina o inductancia



- Cuando una corriente oscilante atraviesa un conductor arrollado alrededor de un núcleo, se produce una **tensión inducida que se opone a esta corriente** (ley de Faraday y Lenz)
- La tensión en sus terminales es directamente proporcional al cambio de la corriente: coeficiente de autoinducción o **inductancia** (Henrios [H]).

$$u_L(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

Bobina o inductancia



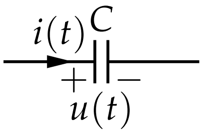
- Almacena **energía magnética**.

$$E_L(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau) \cdot i(\tau) d\tau = \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2(t)$$

- En circuitos de corriente continua es un cortocircuito.

$$\frac{di(t)}{dt} = 0 \Rightarrow U_L = 0$$

Condensador



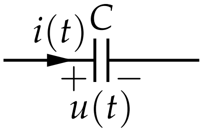
- Un **condensador** está formado por dos placas metálicas separadas por una capa dieléctrica. Al aplicar tensión se produce una **separación de cargas opuestas** que se **acumulan** en cada placa.
- La **carga acumulada** en un instante es **proporcional** a la **diferencia de potencial** en ese instante: **capacidad** (Faradios [F]).

$$q(t) = C \cdot u(t)$$

- En el proceso de carga se produce una corriente eléctrica entre las dos placas.

$$i_C(t) = \frac{dq(t)}{d(t)} = C\frac{du(t)}{dt}$$

Condensador



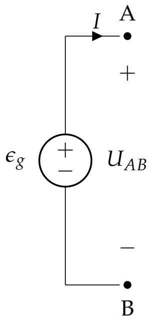
- Un condensador almacena **energía eléctrica**

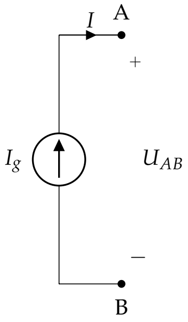
$$E_c(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau) \cdot i(\tau) d\tau = \frac{1}{2} \cdot C \cdot u^2(t)$$

- En un circuito de corriente continua se comporta como un circuito abierto.

$$\frac{du(t)}{dt} = 0 \Rightarrow I_c = 0$$

Generadores de Tensión y Corriente



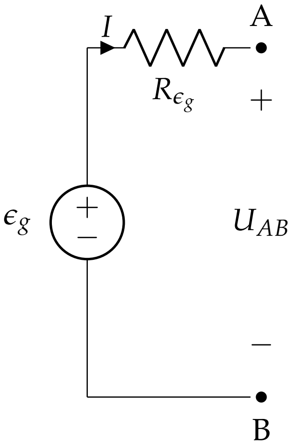


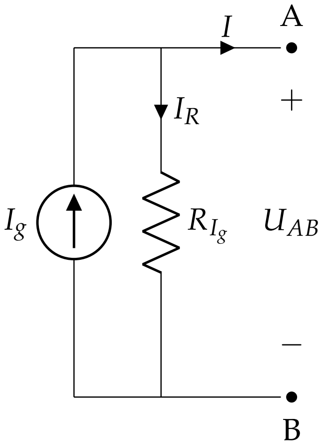
Un **generador de tensión ideal** impone la tensión a la salida (*la corriente depende del circuito*). Se caracteriza por su **fuerza electromotriz** (voltios [V]).

Un **generador de corriente ideal** impone la corriente a la salida (*la tensión depende del circuito*). Se caracteriza por su corriente de generador.

Generador Real

Los generadores reales tienen pérdidas que se modelan con una resistencia en **serie** (generador de tensión) o en **paralelo** (generador de corriente)





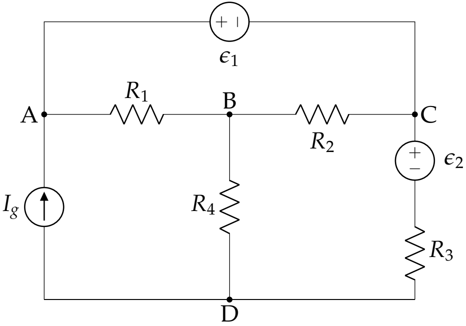
Nudo, rama, malla

Nudo unión de **3** o más conductores.

Rama elementos conectados entre dos nudos consecutivos.

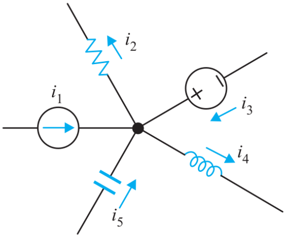
Lazo conjunto de ramas que forman un camino cerrado.

Malla lazo que no contiene ningún otro en su interior.



Ley de Kirchhoff de las Corrientes (LKC)

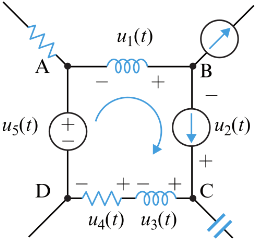
- La **LKC** es el principio de conservación de la carga aplicado a los circuitos eléctricos.
- **LKC**: la suma de las corrientes que llegan a un nudo es igual a la suma de las que salen.
  - Las lineas de corriente son cerradas (o solenoidales).



$$i_1(t) - i_2(t) + i_3(t) - i_4(t) + i_5(t) = 0$$

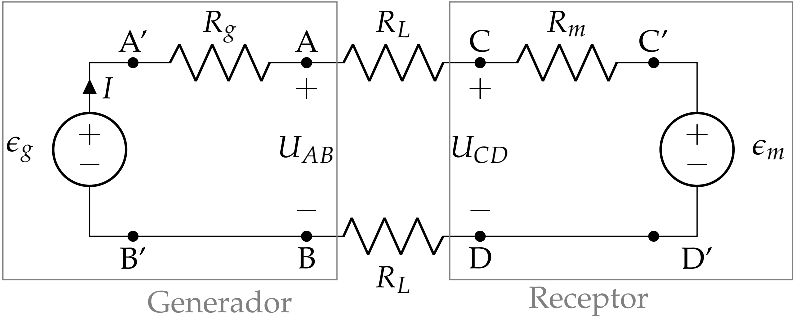
Ley de Kirchhoff de los Voltajes (LKV)

- La **LKV** es el principio de conservación de la energía aplicado a los circuitos eléctricos.
- **LKV**: la suma (con signo) de las tensiones a lo largo de un camino cerrado (circuito) es cero.
  - La energía producida por un generador es consumida por los receptores del circuito para producir trabajo (mecánico, químico, etc.) o calor.



$$u_3(t) + u_4(t) - u_5(t) - u_1(t) - u_2(t) = 0$$

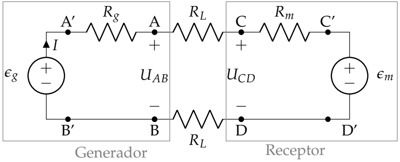
Balance de Tensiones



$$U_{A'A} + U_{AC} + U_{CC'} + U_{C'D'} + U_{D'D} + U_{DB} + U_{BB'} + U_{B'A'} = 0$$

$$U_{AB} = U_{AA'} + U_{A'B'} + U_{B'B}$$
$$U_{CD} = U_{CC'} + U_{C'D'} + U_{DD'}$$

Balance de Tensiones

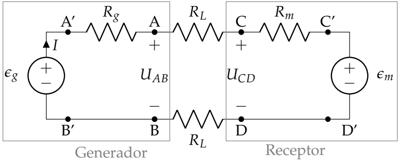


$$U_{A'A} + U_{AC} + U_{CC'} + U_{C'D'} + U_{D'D} + U_{DB} + U_{BB'} + U_{B'A'} = 0$$

$$U_{A'A} = I \cdot R_g$$
$$U_{AC} = I \cdot R_L$$
$$U_{CC'} = I \cdot R_m$$
$$U_{C'D'} = \epsilon_m$$
$$U_{D'D} = 0 = U_{BB'}$$
$$U_{DB} = I \cdot R_L$$
$$U_{B'A'} = -\epsilon_g$$

$$\boxed{I \cdot (R_g + 2 \cdot R_L + R_m) + \epsilon_m = \epsilon_g}$$

Generador y Receptor



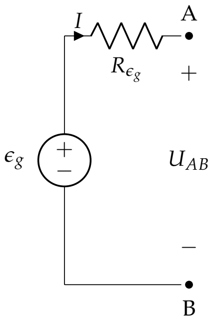
$$U_{A'A} = I \cdot R_g$$
$$U_{AC} = I \cdot R_L$$
$$U_{CC'} = I \cdot R_m$$
$$U_{C'D'} = \epsilon_m$$
$$U_{D'D} = 0 = U_{BB'}$$
$$U_{DB} = I \cdot R_L$$
$$U_{B'A'} = -\epsilon_g$$

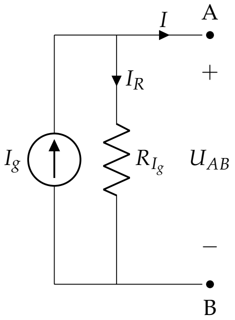
$$U_{AB} = U_{AA'} + U_{A'B'} + U_{B'B}$$
$$\boxed{U_{AB} = \epsilon_g - I \cdot R_g}$$

$$U_{CD} = U_{CC'} + U_{C'D'} + U_{DD'}$$
$$\boxed{U_{CD} = \epsilon_m + I \cdot R_m}$$

Ecuación del generador

Los generadores reales tienen pérdidas que se modelan con una resistencia en **serie** (generador de tensión) o en **paralelo** (generador de corriente)



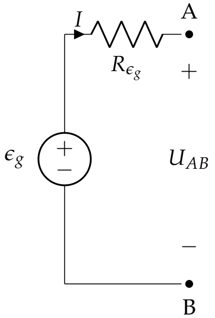


$$U_{AB} = \epsilon_g - R_{\epsilon_g} \cdot I$$

$$I = I_g - \frac{U_{AB}}{R_{I_g}}$$

Equivalencia de Fuentes

Sólo es posible establecer equivalencia entre **fuentes reales**.

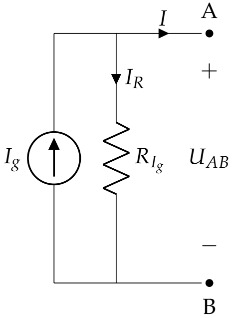


$$U_{AB} = \epsilon_g - R_{\epsilon_g} \cdot I$$

$$R_g = R_{\epsilon_g} = R_{I_g}$$

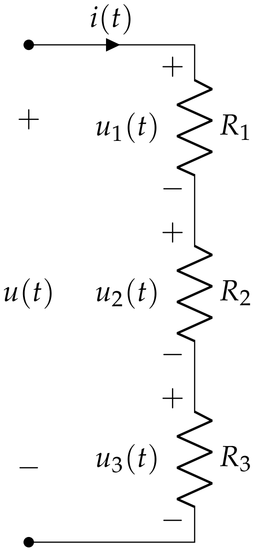
$$\epsilon_g = R_g \cdot I_g$$

$$I_g = \frac{\epsilon_g}{R_g}$$



$$I = I_g - \frac{U_{AB}}{R_{I_g}}$$

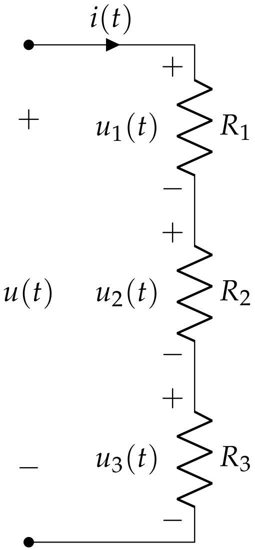
Conexión en serie



Un conjunto de elementos están asociados en serie cuando circula la misma corriente por todos ellos.

$$u_1(t) = R_1 \cdot i(t)$$
$$u_2(t) = R_2 \cdot i(t)$$
$$u_3(t) = R_3 \cdot i(t)$$

Conexión en serie



Aplicando LKV:

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) + u_3(t)$$

Sacando $i(t)$ como factor común:

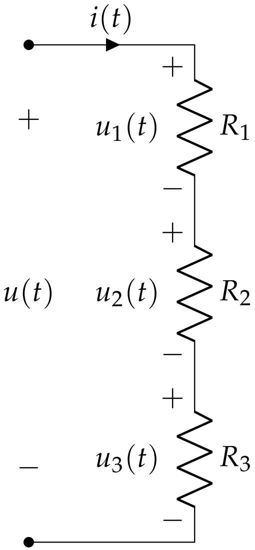
$$u(t) = i(t) \cdot (R_1 + R_2 + R_3)$$

Definimos la resistencia equivalente de la conexión serie:

$$\boxed{R_s = \sum_{i=1}^{n} R_i}$$

$$u(t) = R_s \cdot i(t)$$

Divisor de Tensión



De las ecuaciones anteriores tenemos:

$$i(t) = \frac{u(t)}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$u_3(t) = R_3 \cdot i(t)$$

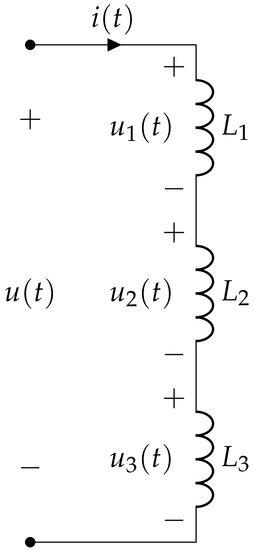
Por tanto, la tensión parcial $u_3(t)$ se puede expresar en función de la tensión total $u(t)$:

$$u_3(t) = u(t) \cdot \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

En general:

$$\boxed{u_o(t) = u(t) \cdot \frac{R_o}{R_s}}$$

Conexión en serie de inductancias

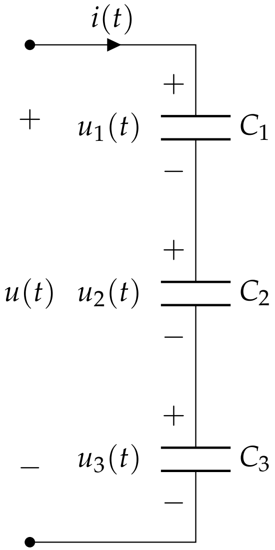


$$u_1(t) = L_1 \cdot \frac{di(t)}{dt}$$
$$u_2(t) = L_2 \cdot \frac{di(t)}{dt}$$
$$u_3(t) = L_3 \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

$$\boxed{L_s = \sum_{i=1}^{n} L_i}$$

$$u(t) = L_s \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

Conexión en serie de condensadores



$$i(t) = C_1 \cdot \frac{du_1(t)}{dt}$$

$$i(t) = C_2 \cdot \frac{du_2(t)}{dt}$$

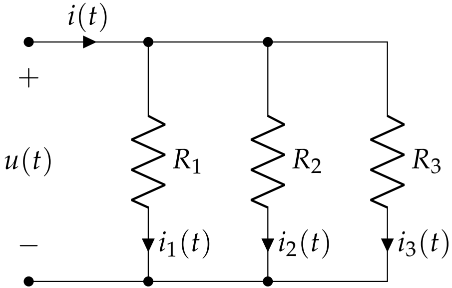
$$i(t) = C_3 \cdot \frac{du_3(t)}{dt}$$

$$\boxed{\frac{1}{C_s} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}}$$

$$i(t) = C_s \cdot \frac{du(t)}{dt}$$

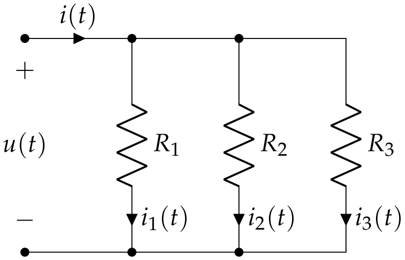
Conexión en paralelo

Un conjunto de elementos están asociados en paralelo cuando están sometidos a la misma diferencia de potencial.



$$i_1(t) = u(t)/R_1$$
$$i_2(t) = u(t)/R_2$$
$$i_3(t) = u(t)/R_3$$

Conexión en paralelo



Aplicando LKC:

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) + i_3(t)$$

Sacando $u(t)$ como factor común:

$$i(t) = u(t) \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)$$

Definimos la resistencia equivalente de la conexión paralelo:

$$\boxed{\frac{1}{R_p} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}}$$

$$u(t) = R_p \cdot i(t)$$

Dos resistencias en paralelo

En el caso concreto de **dos** resistencias en paralelo ...

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

... la expresión es:

$$\boxed{R_p = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}}$$

Conductancia

Para facilitar las operaciones es conveniente utilizar el inverso de la resistencia:

$$G = \frac{1}{R}$$

Así, en lugar de…

$$\frac{1}{R_p} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}$$

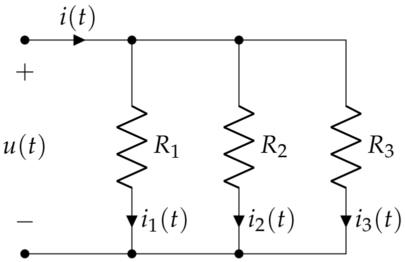
$$u(t) = R_p \cdot i(t)$$

… podemos escribir:

$$\boxed{G_p = \sum_{i=1}^{n} G_i}$$

$$i(t) = G_p \cdot u(t)$$

Divisor de corriente



De las ecuaciones anteriores tenemos (usando conductancia):

$$u(t) = \frac{i(t)}{G_1 + G_2 + G_3}$$

$$i_3(t) = G_3 \cdot u(t)$$

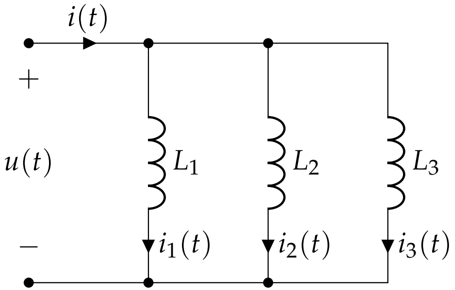
Por tanto, la corriente parcial $i_3(t)$ se puede expresar en función de la corriente total $i(t)$:

$$i_3(t) = i(t) \cdot \frac{G_3}{G_1 + G_2 + G_3}$$

En general:

$$\boxed{i_o(t) = i(t) \cdot \frac{G_o}{G_p}}$$

Conexión en paralelo de inductancias



$$u(t) = L_1 \cdot \frac{di_1(t)}{dt}$$

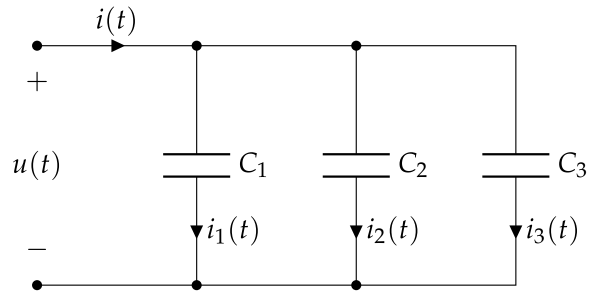
$$u(t) = L_2 \cdot \frac{di_2(t)}{dt}$$

$$u(t) = L_3 \cdot \frac{di_3(t)}{dt}$$

$$\boxed{\frac{1}{L_p} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{L_i}}$$

$$u(t) = L_p \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

Conexión en paralelo de condensadores



$$i_1(t) = C_1 \cdot \frac{du(t)}{dt}$$

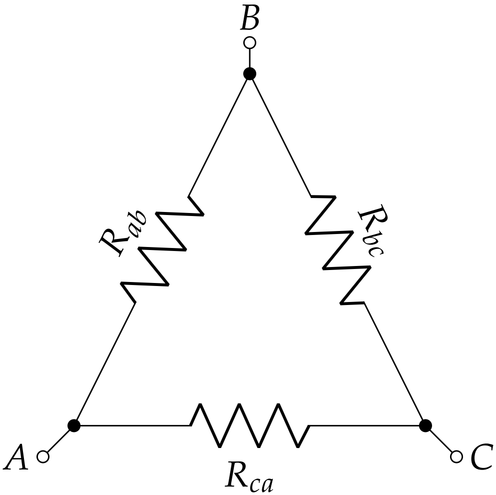
$$i_2(t) = C_2 \cdot \frac{du(t)}{dt}$$

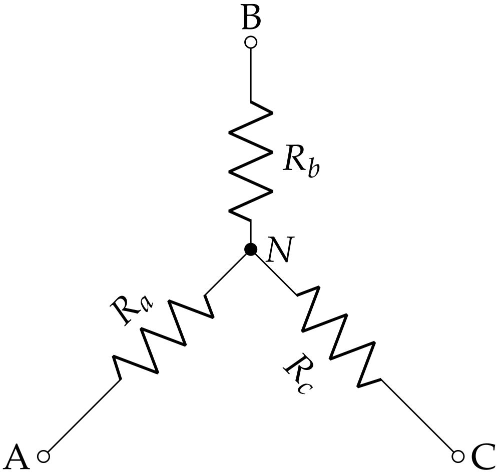
$$i_3(t) = C_3 \cdot \frac{du(t)}{dt}$$

$$\boxed{C_p = \sum_{i=1}^{n} C_i}$$

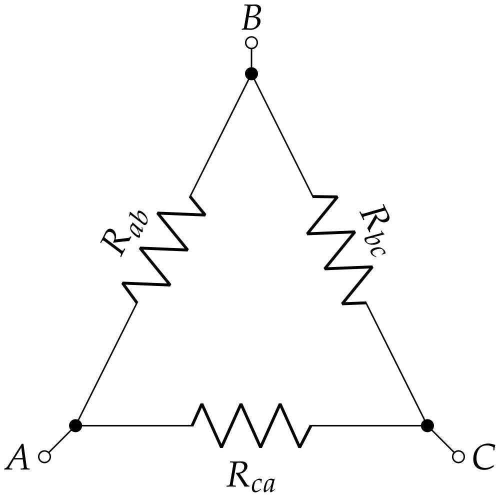
$$i(t) = C_p \cdot \frac{du(t)}{dt}$$

Conexión Estrella - Triángulo





Conexión Estrella - Triángulo

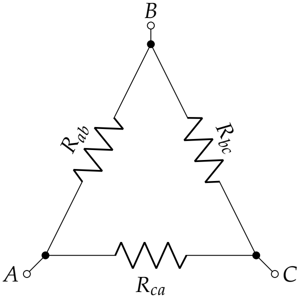


$$R_{AB} = \frac{R_{ab} \cdot (R_{bc} + R_{ca})}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}$$

$$R_{BC} = \frac{R_{bc} \cdot (R_{ab} + R_{ca})}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}$$

$$R_{CA} = \frac{R_{ca} \cdot (R_{ab} + R_{bc})}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}$$

Conexión Estrella - Triángulo

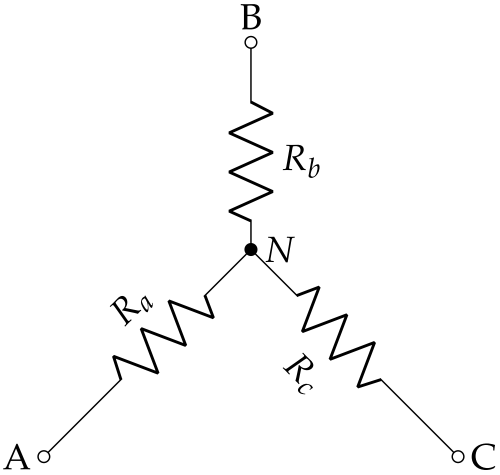


$$R_{AB} = \frac{R_{ab} \cdot R_{bc}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}} + \frac{R_{ab} \cdot R_{ca}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}$$

$$R_{BC} = \frac{R_{bc} \cdot R_{ab}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}} + \frac{R_{bc} \cdot R_{ca}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}$$

$$R_{CA} = \frac{R_{ca} \cdot R_{ab}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}} + \frac{R_{ca} \cdot R_{bc}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}$$

Conexión Estrella - Triángulo



$$R_{AB} = R_a + R_b$$

$$R_{BC} = R_b + R_c$$

$$R_{CA} = R_c + R_a$$

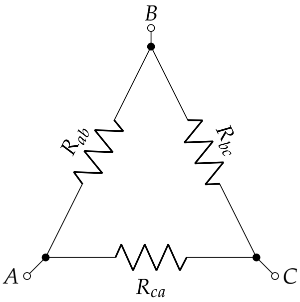
Conexión Estrella - Triángulo

$$\frac{R_{ab} \cdot R_{bc}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}} + \frac{R_{ab} \cdot R_{ca}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}} = R_a + R_b$$

$$\frac{R_{ab} \cdot R_{bc}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}} + \frac{R_{bc} \cdot R_{ca}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}} = R_b + R_c$$

$$\frac{R_{ab} \cdot R_{ca}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}} + \frac{R_{bc} \cdot R_{ca}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}} = R_c + R_a$$

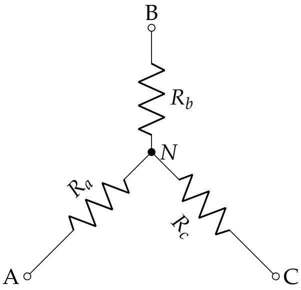
Conversión de Triángulo a Estrella



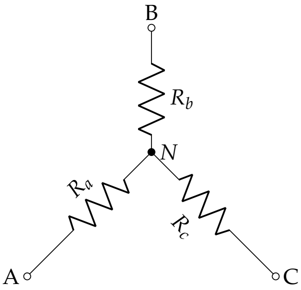
$$R_a = \frac{R_{ab} \cdot R_{ca}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}$$

$$R_b = \frac{R_{ab} \cdot R_{bc}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}$$

$$R_c = \frac{R_{bc} \cdot R_{ca}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}$$



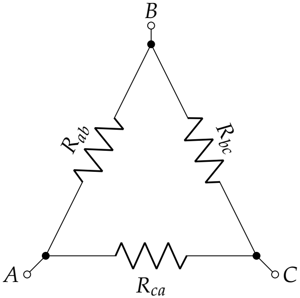
Conversión de Estrella a Triángulo

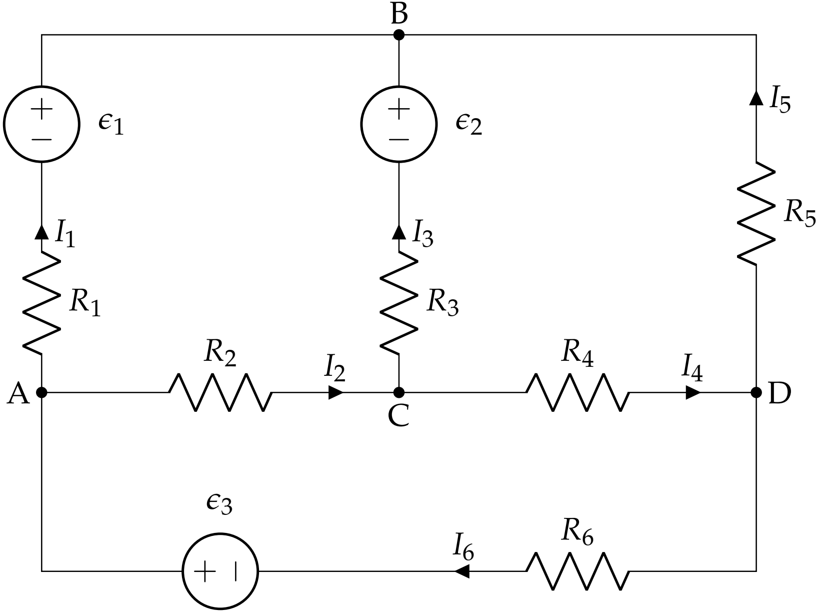


$$G_{ab} = \frac{G_a \cdot G_b}{G_a + G_b + G_c}$$

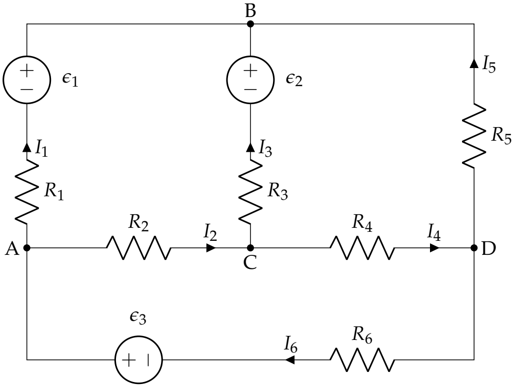
$$G_{bc} = \frac{G_b \cdot G_c}{G_a + G_b + G_c}$$

$$G_{ca} = \frac{G_c \cdot G_a}{G_a + G_b + G_c}$$




B
ϵ_1
ϵ_2
I_5
R_5
I_1
I_3
R_1
R_3
R_2
I_2
R_4
I_4
A
C
D
ϵ_3
R_6
I_6

Aplicamos LKC



Nudo A:

$$I_6 = I_1 + I_2$$

Nudo B:

$$I_1 + I_3 + I_5 = 0$$

Nudo C:

$$I_2 = I_3 + I_4$$

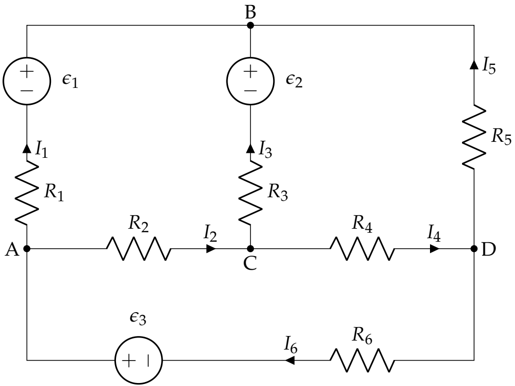
Nudo D:

$$I_4 = I_5 + I_6$$

No son ecuaciones linealmente independientes:

$$C = A + B + D$$

Aplicamos LKV



Malla ABCA

$$I_1 \cdot R_1 - \epsilon_1 + \epsilon_2 - I_3 \cdot R_3 - I_2 \cdot R_2 = 0$$

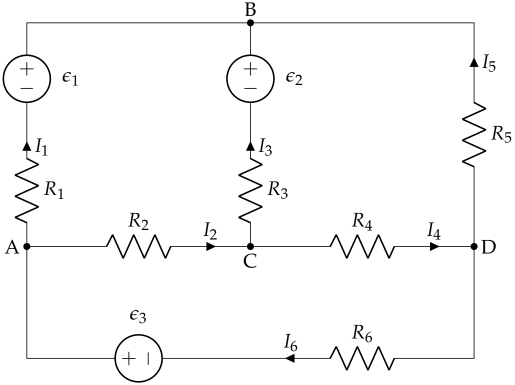
Malla BDCB

$$-I_5 \cdot R_5 - I_4 \cdot R_4 + I_3 \cdot R_3 - \epsilon_2 = 0$$

Malla ACDA

$$I_2 \cdot R_2 + I_4 \cdot R_4 + I_6 \cdot R_6 - \epsilon_3 = 0$$

Combinamos las ecuaciones



$$
\begin{aligned}
-I_1 - I_2 + I_6 &= 0 \\
I_1 + I_3 + I_5 &= 0 \\
I_4 - I_5 - I_6 &= 0 \\
I_1 \cdot R_1 - I_2 \cdot R_2 - I_3 \cdot R_3 &= \epsilon_1 - \epsilon_2 \\
I_3 \cdot R_3 - I_4 \cdot R_4 - I_5 \cdot R_5 &= \epsilon_2 \\
I_2 \cdot R_2 + I_4 \cdot R_4 + I_6 \cdot R_6 &= \epsilon_3
\end{aligned}
$$

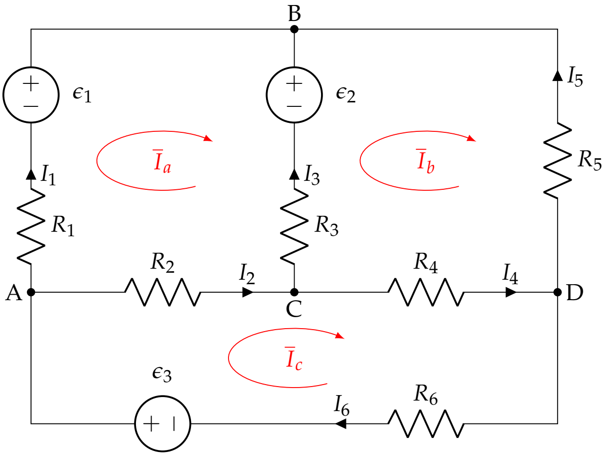
Y las expresamos en forma matricial

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ R_1 & -R_2 & -R_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & -R_4 & -R_5 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & R_4 & 0 & R_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \epsilon_1 - \epsilon_2 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{bmatrix}$$

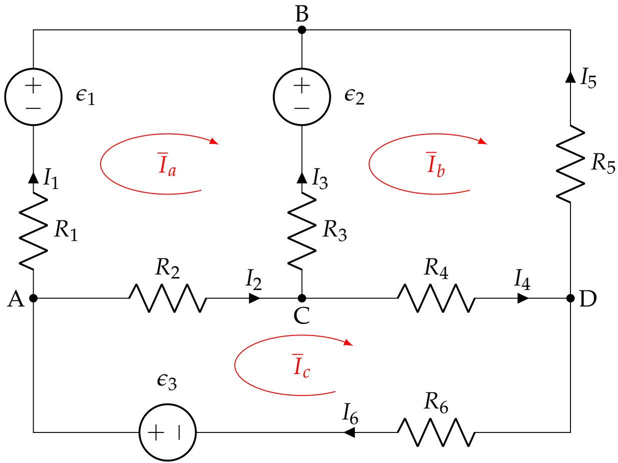
Resolver el circuito implica resolver un sistema lineal de 6 ecuaciones, en el que las incógnitas son las corrientes de cada rama.

Método de las mallas

El método de las mallas simplifica el sistema de ecuaciones necesario mediante unas corrientes *virtuales* denominadas **corrientes de malla**, aprovechando las relaciones entre corrientes de la LKC.



Relaciones entre las corrientes de rama y malla



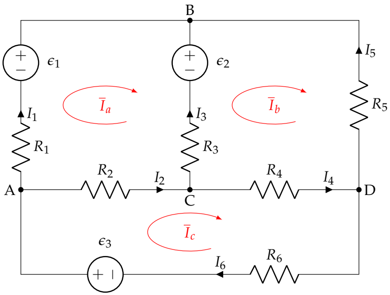
Ramas externas:

$$I_1 = I_a$$
$$I_5 = -I_b$$
$$I_6 = I_c$$

Ramas internas:

$$I_2 = I_c - I_a$$
$$I_3 = I_b - I_a$$
$$I_4 = I_c - I_b$$

Ecuaciones de malla



Malla ABCA

$$I_a \cdot R_1 - \epsilon_1 + \epsilon_2 + (I_a - I_b) \cdot R_3 + (I_a - I_c) \cdot R_2 = 0$$

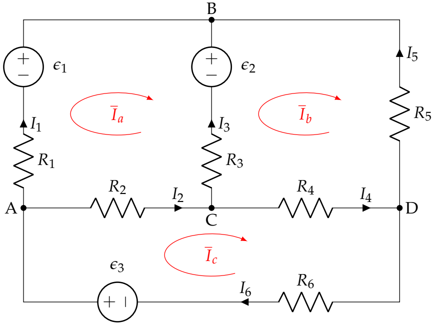
Malla BDCB

$$I_b \cdot R_5 + (I_b - I_c) \cdot R_4 + (I_b - I_a) \cdot R_3 - \epsilon_2 = 0$$

Malla ACDA

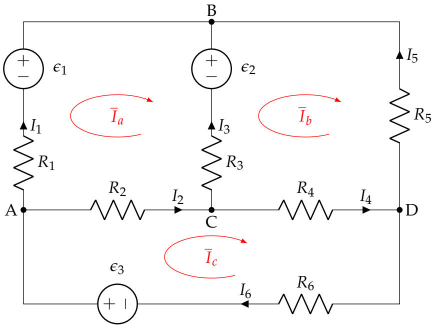
$$(I_c - I_a) \cdot R_2 + (I_c - I_b) \cdot R_4 + I_c \cdot R_6 - \epsilon_3 = 0$$

Reagrupamos corrientes en las ecuaciones



$$
\begin{aligned}
I_a \cdot (R_1 + R_3 + R_2) - I_b \cdot R_3 - I_c \cdot R_2 &= \epsilon_1 - \epsilon_2 \\
-I_a \cdot R_3 + I_b \cdot (R_5 + R_4 + R_3) - I_c \cdot R_4 &= \epsilon_2 \\
-I_a \cdot R_2 - I_b \cdot R_4 + I_c \cdot (R_2 + R_4 + R_6) &= \epsilon_3
\end{aligned}
$$

Y lo expresamos en forma matricial



$$\begin{bmatrix} (R_1 + R_3 + R_2) & -R_3 & -R_2 \\ -R_3 & (R_5 + R_4 + R_3) & -R_4 \\ -R_2 & -R_4 & (R_2 + R_4 + R_6) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 - \epsilon_2 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{bmatrix}$$

Ecuación General

$$\begin{bmatrix} \sum R_{aa} & -\sum R_{ab} & -\sum R_{ca} \\ -\sum R_{ab} & \sum R_{bb} & -\sum R_{bc} \\ -\sum R_{ca} & -\sum R_{bc} & \sum R_{cc} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum \epsilon_a \\ \sum \epsilon_b \\ \sum \epsilon_c \end{bmatrix}$$

$\sum R_{aa}$ suma de las resistencias incluidas en la malla de I_a.

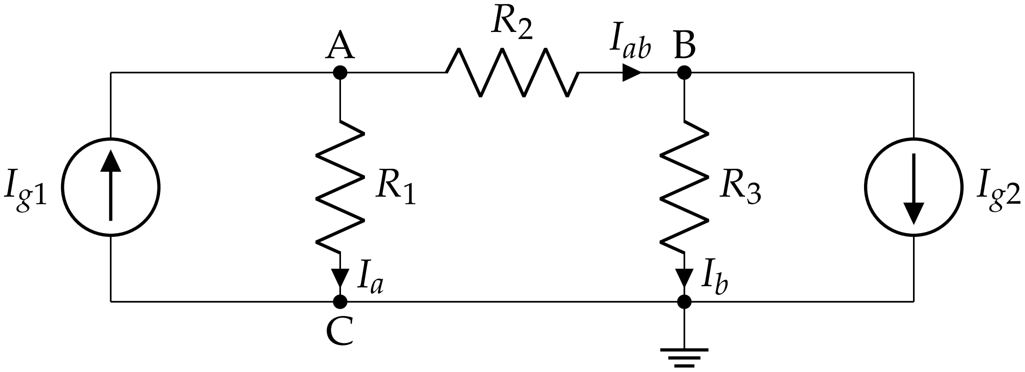
$\sum R_{ab}$ suma de las resistencias incluidas en las ramas compartidas por las mallas de I_a e I_b.

$\sum \epsilon_a$ suma algebraica de las fuerzas electromotrices de los generadores de la malla de I_a. Su signo es positivo si contribuyen al giro de la corriente.

Procedimiento

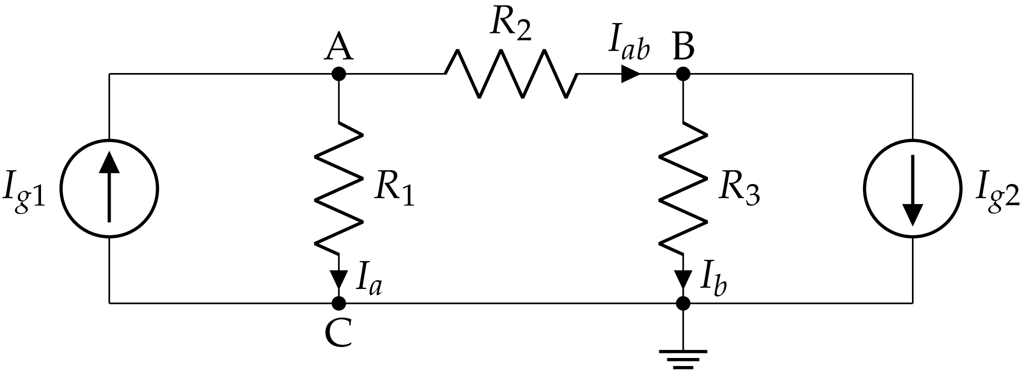
1. Identificar las corrientes de rama.
2. Asignar un sentido a las corrientes de malla.
3. Relacionar corrientes de rama con corrientes de malla.
4. Escribir ecuación de mallas.
5. Resolver la ecuación, obteniendo las corrientes de malla.
6. Obtener las corrientes de rama con las relaciones del punto 3.

Importante: todos los generadores deben ser fuentes de tensión.



R_2
A
I_{ab}
B
I_{g1}
R_1
R_3
I_{g2}
I_a
I_b
C

Aplicamos LKC



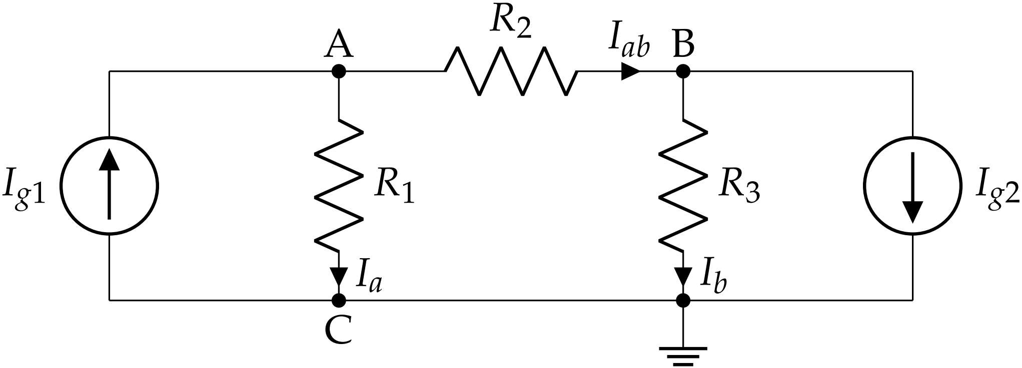
Nudo A

$$I_{g1} - I_a - I_{ab} = 0$$

Nudo B

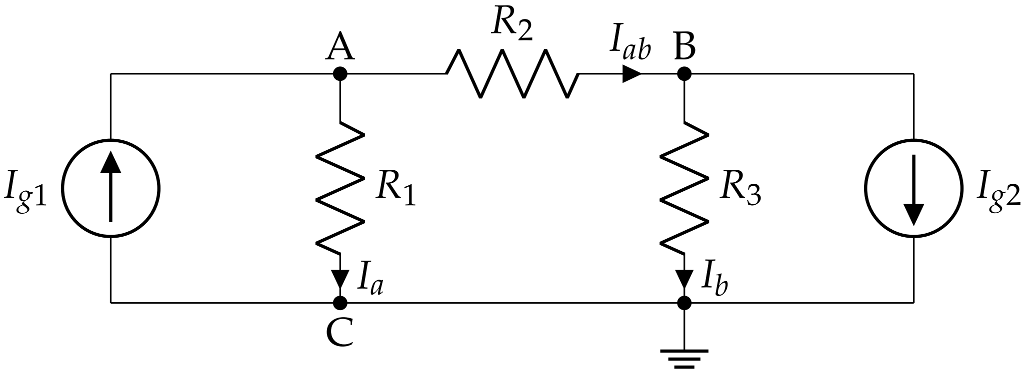
$$I_{ab} - I_{g2} - I_b = 0$$

Tensiones en las resistencias



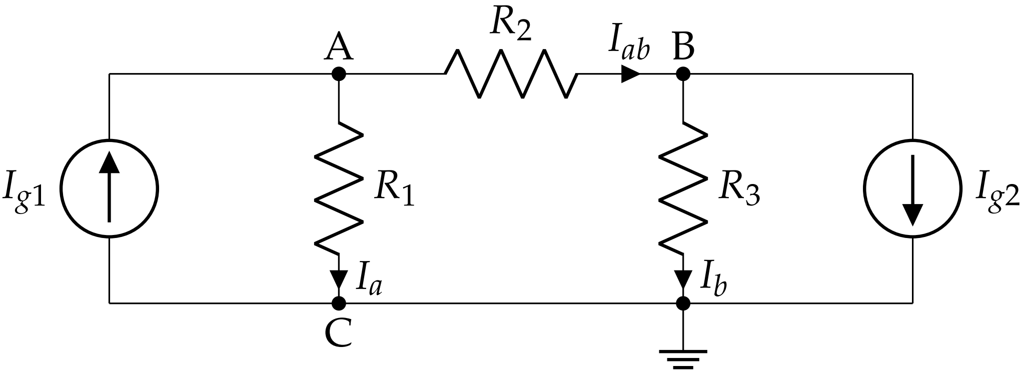
$$V_A = I_a \cdot R_1$$
$$V_B = I_b \cdot R_3$$
$$V_{AB} = I_{ab} \cdot R_2$$

Despejamos las corrientes



$$I_a = V_A \cdot G_1$$
$$I_b = V_B \cdot G_3$$
$$I_{ab} = (V_A - V_B) \cdot G_2$$

Combinamos las ecuaciones



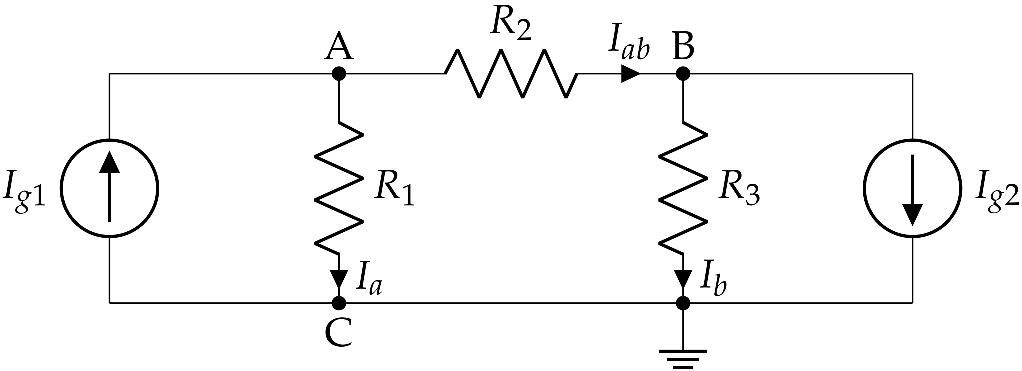
Nudo A

$$I_{g1} - V_A \cdot G_1 - (V_A - V_B) \cdot G_2 = 0$$

Nudo B

$$(V_A - V_B) \cdot G_2 - I_{g2} - V_B \cdot G_3 = 0$$

Reorganizamos las ecuaciones



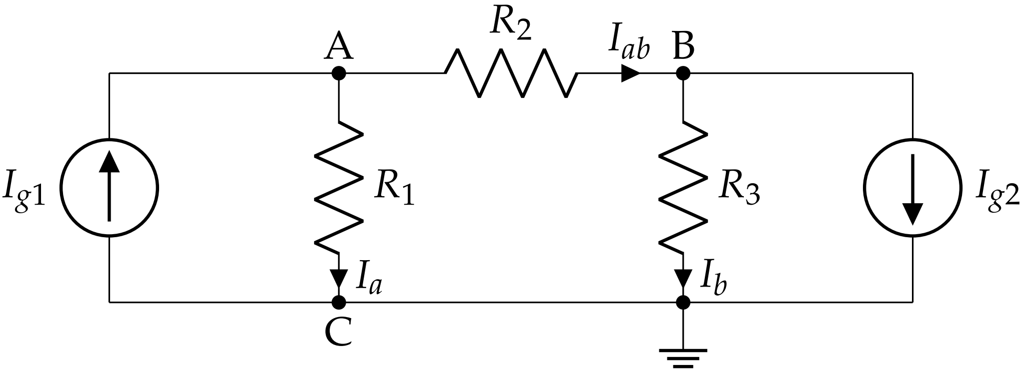
Nudo A

$$I_{g1} = V_A \cdot (G_1 + G_2) - V_B \cdot G_2$$

Nudo B

$$-I_{g2} = -V_A \cdot G_2 + V_B \cdot (G_2 + G_3)$$

Expresión matricial



$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 \\ -G_2 & G_2 + G_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{g1} \\ -I_{g2} \end{bmatrix}$$

Ecuación general

$$\begin{bmatrix} \sum G_A & -\sum G_{AB} & -\sum G_{AC} \\ -\sum G_{AB} & \sum G_B & -\sum G_{BC} \\ -\sum G_{AC} & -\sum G_{BC} & \sum G_C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum I_{gA} \\ \sum I_{gB} \\ \sum I_{gC} \end{bmatrix}$$

$\sum G_A$ Suma de las conductancias conectadas al nudo A.

$\sum G_{AB}$ Suma de las conductancias conectadas entre los nudos A y B.

$\sum I_{gA}$ Suma algebraica de las corrientes de los generadores conectados en el nudo A. El signo es positivo si el generador inyecta corriente en el nudo.

Importante: todos los generadores deben ser fuentes de corriente.