

Introducción al Régimen Transitorio

Teoría de Circuitos

Oscar Perpiñán Lamigueiro

Mayo 2020

① Conceptos Fundamentales

② Circuitos de Primer Orden

③ Circuitos de Segundo Orden

1 Conceptos Fundamentales

¿Qué es el régimen transitorio?

Condiciones iniciales

2 Circuitos de Primer Orden

3 Circuitos de Segundo Orden

Permanente y Transitorio

Régimen permanente o estacionario

Las tensiones y corrientes de un circuito son constantes (continua) o periódicas (alterna) (circuito estabilizado)

Régimen transitorio

- ▶ Para alcanzar el régimen permanente (o para alternar entre dos regímenes permanentes) el circuito atraviesa el régimen transitorio.
- ▶ Posibles cambios: activación o apagado de fuentes, cambio en las cargas, cambio en el circuito (línea).
- ▶ En general, el estado transitorio es indeseado en sistemas eléctricos, pero provocado en sistemas electrónicos.

Acumulación de Energía

Régimen Permanente

Energía acumulada en bobinas y condensadores

Régimen Estacionario

- ▶ **Redistribución y disipación** de energía acumulada.
- ▶ La redistribución de energía **no** se puede realizar de forma **inmediata**
- ▶ **Duración corta** (μs) pero superior a 0, dependiendo de **relación entre acumulación y disipación** (resistencia).

① Conceptos Fundamentales

¿Qué es el régimen transitorio?

Condiciones iniciales

② Circuitos de Primer Orden

③ Circuitos de Segundo Orden

Respuesta completa de una red lineal

La respuesta completa de una red lineal a un cambio tiene dos componentes:

- ▶ Respuesta **natural** o propia (sin fuentes, determinada únicamente por la configuración del circuito)
- ▶ Respuesta **forzada** o particular (determinada por las fuentes existentes, $t = \infty$).

$$f(t) = f_n(t) + f_{\infty}(t)$$

Condiciones iniciales

- ▶ Las **condiciones iniciales** son el estado del circuito en el instante temporal en el que se produce el cambio.
- ▶ Determinan las constantes de integración de la respuesta natural.
- ▶ El instante del cambio se representa habitualmente con $t = 0$:
 - ▶ $t = 0^-$: la topología del circuito es la anterior al cambio.
 - ▶ $t = 0^+$: la topología del circuito es la posterior al cambio.

Resistencia

$$u(t) = Ri(t)$$

No acumula energía: sigue los cambios de forma instantánea.

Inductancia

$$u(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \leftrightarrow i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u(t') dt'$$

La corriente en una bobina no puede variar de forma abrupta (implica tensión infinita).

$$\boxed{i_L(0^-) = i_L(0^+)}$$

Capacidad

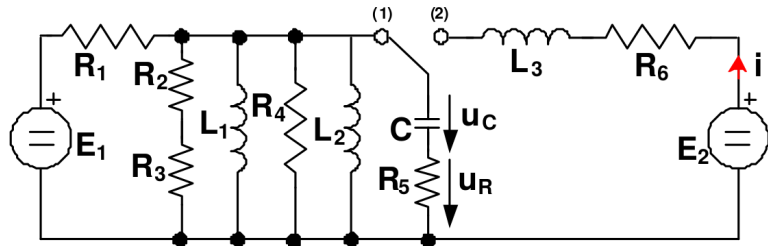
$$i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} \leftrightarrow u(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(t') dt'$$

La tensión en un condensador no puede variar de forma abrupta (implica corriente infinita).

$$u_C(0^-) = u_C(0^+)$$

Ejemplo

El interruptor lleva en la posición (1) desde un tiempo infinito y pasa a la posición (2) en $t = 0$:



- ① Conceptos Fundamentales
- ② Circuitos de Primer Orden
- ③ Circuitos de Segundo Orden

Definición

- ▶ Circuitos que tienen un **único elemento de acumulación** (o *varios elementos que pueden ser simplificados a un elemento equivalente*) y parte resistiva.
- ▶ **Ecuación diferencial de primer orden**: la respuesta natural es siempre una **exponencial decreciente**.
- ▶ Circuitos típicos:
 - ▶ RL serie
 - ▶ RC paralelo

Respuesta natural y forzada

- ▶ El método de resolución analiza el circuito en dos etapas:
 - ▶ Sin fuentes: **respuesta natural** (la energía acumulada en $t < 0$ se disipa en la resistencia).
 - ▶ Con fuentes: **respuesta forzada** (determinada por la forma de onda de las fuentes).

① Conceptos Fundamentales

② Circuitos de Primer Orden

Circuito RL serie

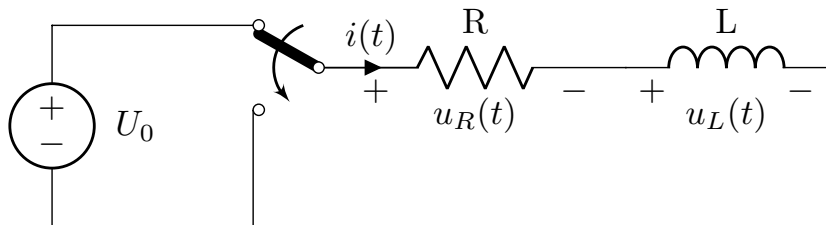
Circuito RC paralelo

Análisis Sistemático

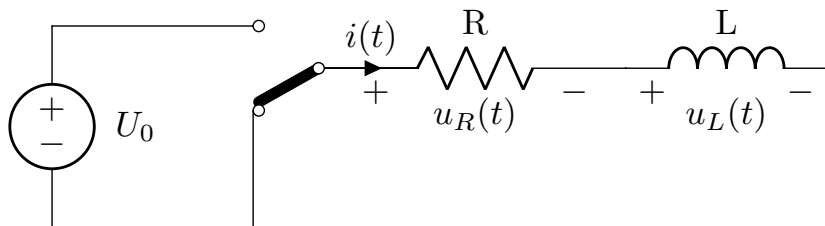
③ Circuitos de Segundo Orden

Circuito básico

- ▶ En $t < 0$ la fuente alimenta el circuito RL (la bobina almacena energía).
- ▶ En $t = 0$ la fuente se desconecta.
- ▶ En $t > 0$ la bobina se descarga en la resistencia.



Respuesta natural



Ecuaciones

$$u_R(t) + u_L(t) = 0$$

$$Ri + L \frac{di}{dt} = 0$$

Solución Genérica

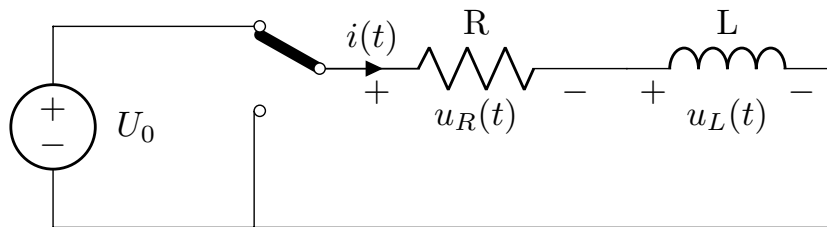
$$i(t) = Ae^{st}$$

Ecuación Característica

$$s + \frac{R}{L} = 0 \Rightarrow s = -\frac{R}{L}$$

Condiciones Iniciales

Analizando circuito para $t < 0 \dots$



\dots obtenemos $i(0^-) = I_0 = \frac{U_0}{R}$

Condiciones Iniciales

Por otra parte, para $t > 0$:

$$i(t) = Ae^{-R/Lt}$$
$$i(0^+) = Ae^0 = A$$

Y dada la condición de continuidad, $i(0^+) = i(0^-)$:

$$A = I_0$$

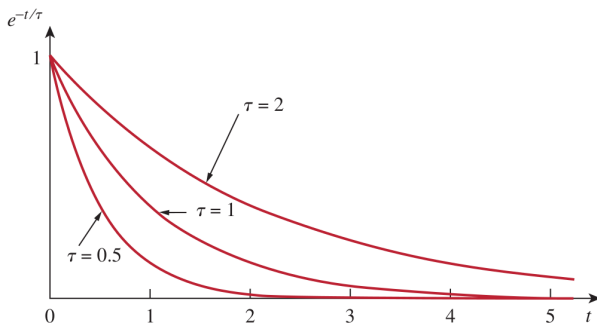
Por tanto, la respuesta natural es:

$$i(t) = I_0 e^{-R/Lt}$$

Constante de tiempo

$$i(t) = I_0 e^{-t/\tau}$$

- ▶ $\tau = \frac{L}{R}$ es la constante de tiempo (unidades [s]).
- ▶ Ratio entre almacenamiento (L) y disipación (R).
- ▶ Valores altos de τ implican decrecimiento lento.
- ▶ La respuesta natural «desaparece» tras $\simeq 5\tau$.



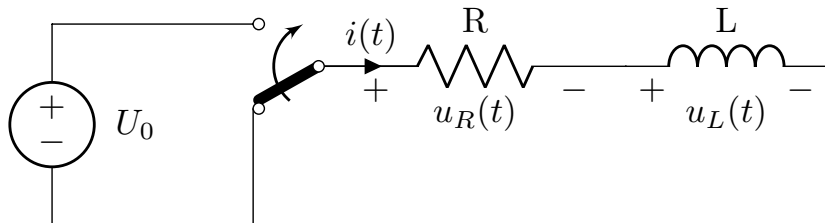
Balance Energético

La energía acumulada en la bobina en $t < 0$ se disipa en la resistencia en $t > 0$

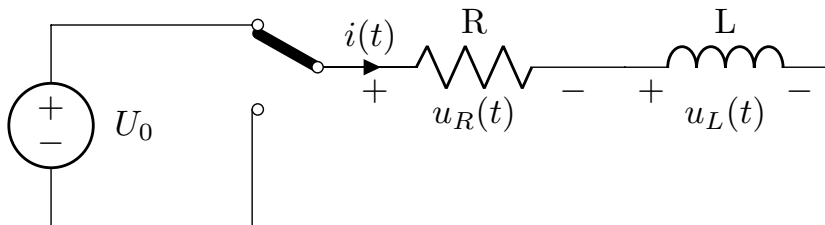
$$\begin{aligned}W_R &= \int_0^{\infty} Ri^2(t)dt = \\&= \int_0^{\infty} R(I_0 e^{-t/\tau})^2 dt = \\&= \frac{1}{2}LI_0^2 = W_L\end{aligned}$$

Respuesta forzada

Cambiamos el funcionamiento del interruptor: en $t > 0$ la fuente alimenta el circuito RL.



Respuesta forzada



Las ecuaciones son ahora:

$$u_R(t) + u_L(t) = u(t) \rightarrow Ri + L \frac{di}{dt} = U_0$$

Para la solución particular, i_∞ , se propone una función análoga a la excitación (analizando circuito para $t > 0$)

$$i(t) = i_n(t) + i_\infty(t)$$

$$i_n(t) = Ae^{st}$$

$$i_\infty(t) = U_0/R$$

Condiciones iniciales

Particularizamos las ecuaciones en $t = 0^+$:

$$i(0^+) = i_n(0^+) + i_\infty(0^+)$$

$$i(0^+) = A + i_\infty(0^+)$$

$$A = i(0^+) - i_\infty(0^+)$$

Respuesta completa (ejemplo)

$$i(t) = i_n(t) + i_\infty(t)$$

$$i_n(t) = Ae^{st}$$

$$i_\infty(t) = U_0/R$$

$$A = i(0^+) - i_\infty(0^+)$$

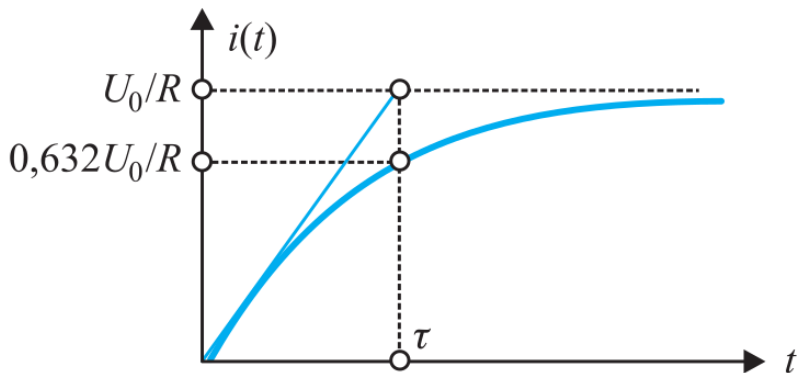
Suponiendo que la bobina está inicialmente descargada, $i(0^-) = 0$, y teniendo en cuenta la condición de continuidad, $i(0^+) = i(0^-) = 0$, obtenemos $A = 0 - U_0/R$.

La solución completa es:

$$i(t) = \frac{U_0}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Respuesta completa

$$i(t) = \frac{U_0}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

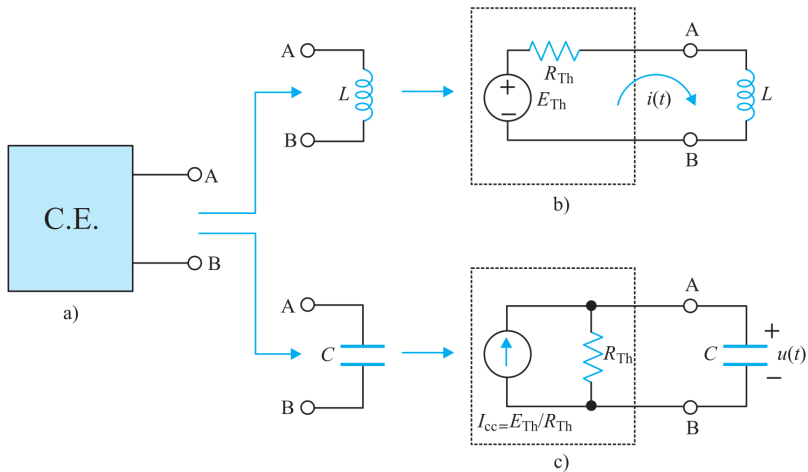


Expresión general de la respuesta completa

$$i(t) = [i(0^+) - i_\infty(0^+)] e^{-t/\tau} + i_\infty(t)$$

- ▶ $i(0^+)$: corriente en la bobina, condiciones iniciales, $i(0^-) = i(0^+)$.
- ▶ $i_\infty(t)$: corriente en la bobina en régimen permanente para $t > 0$.
- ▶ $i_\infty(0^+)$: corriente en la bobina en régimen permanente particularizada en $t = 0$.

Equivalente de Thévenin



① Conceptos Fundamentales

② Circuitos de Primer Orden

Circuito RL serie

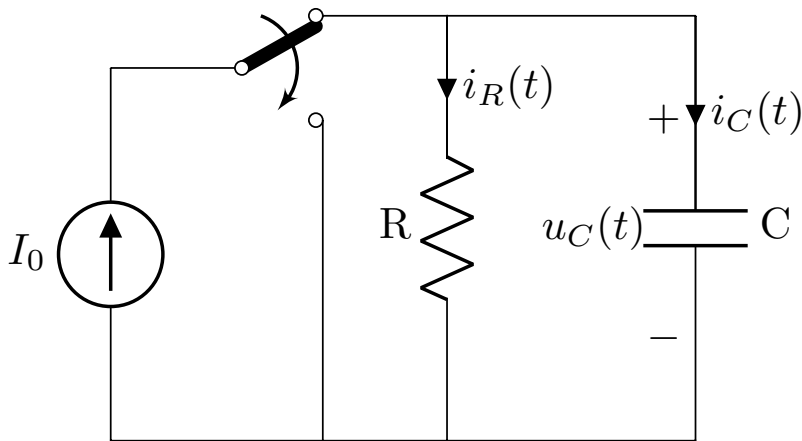
Circuito RC paralelo

Análisis Sistemático

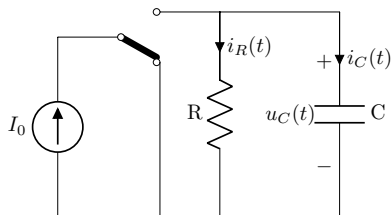
③ Circuitos de Segundo Orden

Circuito básico

- ▶ En $t < 0$ la fuente alimenta el circuito RC (el condensador se carga).
- ▶ En $t = 0$ se desconecta la fuente (el condensador comienza a descargarse en la resistencia).



Respuesta natural



Ecuaciones

$$i_R(t) + i_C(t) = 0$$

$$Gu + C \frac{du}{dt} = 0$$

Solución Genérica

$$u(t) = Ae^{st}$$

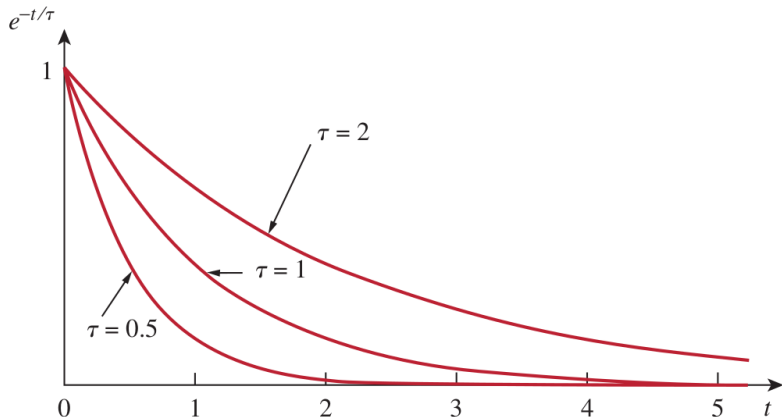
Respuesta natural

$$u(t) = U_0 e^{-G/Ct}$$

Constante de tiempo

- ▶ $\tau = \frac{C}{G}$ es la constante de tiempo (unidades [s]).
- ▶ Ratio entre almacenamiento (C) y disipación (G).

$$u(t) = U_0 e^{-t/\tau}$$



Balance Energético

La energía acumulada en el condensador en $t < 0$ se disipa en la resistencia (conductancia) en $t > 0$

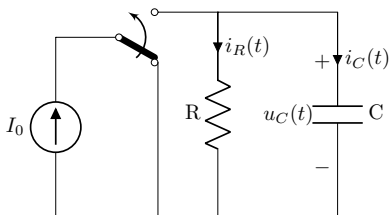
$$W_G = \int_0^{\infty} Gu^2(t)dt = \frac{1}{2}CU_0^2 = W_C$$

Expresión general de la respuesta completa

$$u(t) = [u(0^+) - u_\infty(0^+)] e^{-t/\tau} + u_\infty(t)$$

- ▶ $u(0^+)$: tensión en el condensador, condiciones iniciales, $u(0^-) = u(0^+)$.
- ▶ $u_\infty(t)$: tensión en el condensador en régimen permanente para $t > 0$.
- ▶ $u_\infty(0^+)$: tensión en el condensador en régimen permanente particularizada en $t = 0$.

Ejemplo con respuesta forzada



$$u(t) = [u(0^+) - u_\infty(0^+)] e^{-t/\tau} + u_\infty(t)$$

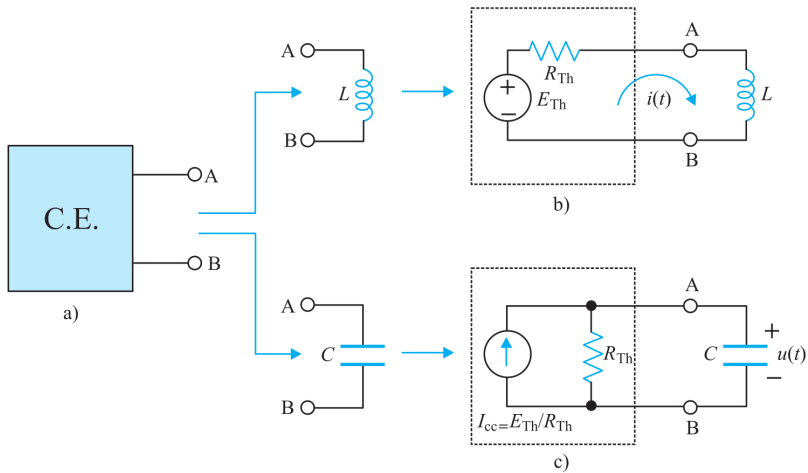
Suponiendo que el condensador está inicialmente descargado:

$$u(0^+) = u(0^-) = 0$$

$$u_\infty(0^+) = I_0 / G$$

$$u(t) = \frac{I_0}{G} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Equivalente de Norton



① Conceptos Fundamentales

② Circuitos de Primer Orden

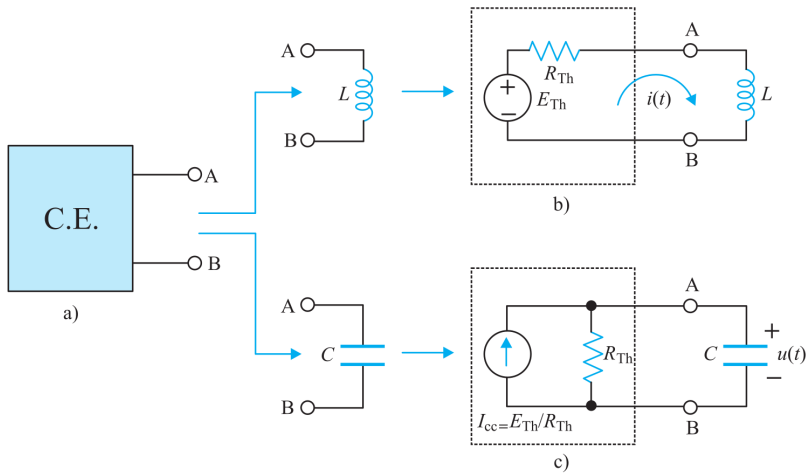
Circuito RL serie

Circuito RC paralelo

Análisis Sistemático

③ Circuitos de Segundo Orden

Equivalente de Thévenin/Norton



Procedimiento General

- ▶ Dibujar el circuito para $t < 0$.
 - ▶ Determinar variables en régimen permanente, $u_c(t)$, $i_L(t)$.
 - ▶ Particularizar para $t = 0$, obteniendo $u_c(0^-)$ o $i_L(0^-)$.
 - ▶ Continuidad: $u_c(0^+) = u_c(0^-)$, $i_L(0^+) = i_L(0^-)$.
- ▶ Dibujar el circuito para $t > 0$.
 - ▶ Calcular el equivalente de Thevenin (Norton) visto por el elemento de acumulación.
 - ▶ La constante de tiempo de la respuesta natural es $\tau = \frac{L}{R_{th}}$ o $\tau = \frac{C}{G_{th}}$.
 - ▶ Calcular las variables $i_L(t)$ o $u_c(t)$ en régimen permanente, obteniendo $i_\infty(t)$ o $u_\infty(t)$.
- ▶ Obtener respuesta completa:

$$i_L(t) = (i_L(0^+) - i_\infty(0^+)) e^{-t/\tau} + i_\infty(t)$$

$$u_C(t) = (u_C(0^+) - u_\infty(0^+)) e^{-t/\tau} + u_\infty(t)$$

- ① Conceptos Fundamentales
- ② Circuitos de Primer Orden
- ③ Circuitos de Segundo Orden

Introducción

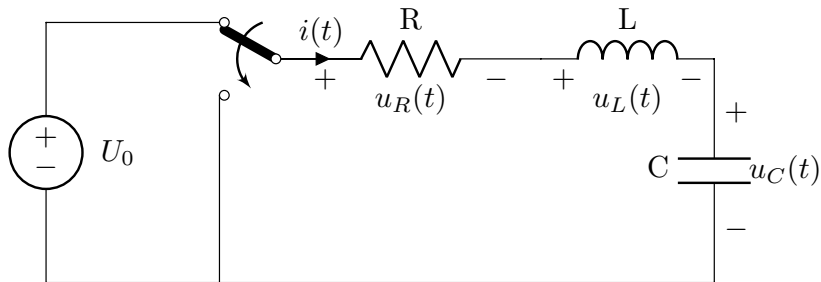
- ▶ Circuitos que tienen **dos elementos de acumulación** que intercambian energía, y parte resistiva que disipa energía.
- ▶ **Ecuación diferencial de segundo orden**: la respuesta natural incluye exponenciales decrecientes y quizás señal sinusoidal.
- ▶ Circuitos típicos:
 - ▶ RLC serie
 - ▶ RLC paralelo

Respuesta natural y forzada

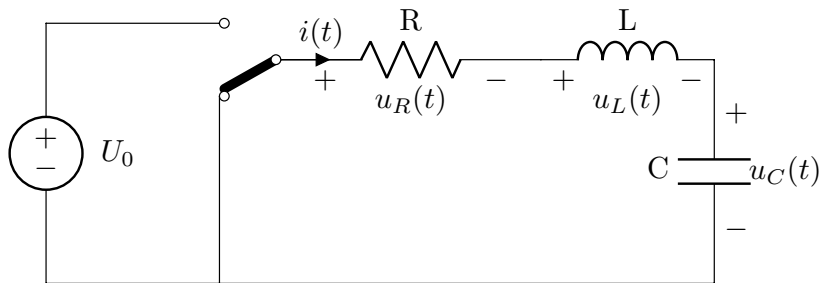
- ▶ El método de resolución analiza el circuito en dos etapas:
 - ▶ Sin fuentes: **respuesta natural** (la energía acumulada en $t < 0$ se redistribuye).
 - ▶ Con fuentes: **respuesta forzada** (determinada por la forma de onda de las fuentes).

- ① Conceptos Fundamentales
- ② Circuitos de Primer Orden
- ③ Circuitos de Segundo Orden
 - Circuito RLC serie
 - Circuito RLC paralelo

Circuito básico



Respuesta natural ($t > 0$)



$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(t') dt' = 0$$

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0}$$

Solución

Ecuación diferencial

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0$$

$$i_n(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

Ecuación característica

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0$$

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

Parámetros

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0$$

$$s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0$$

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$$i_n(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

$$\alpha = \frac{R}{2L}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

$$\zeta = \frac{\alpha}{\omega_0}$$

- ▶ α : coeficiente de amortiguamiento exponencial
- ▶ ω_0 : pulsación natural no amortiguada
- ▶ ω_d : pulsación natural amortiguada
- ▶ ζ : factor de amortiguamiento

Posibles soluciones

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$$\alpha > \omega_0, \zeta > 1$$

- ▶ $s_{1,2}$: dos soluciones reales (negativas) distintas
- ▶ Circuito **sobreamortiguado**.

$$\alpha = \omega_0, \zeta = 1$$

- ▶ $s_{1,2}$: solución real doble.
- ▶ Circuito con **amortiguamiento crítico**.

$$\alpha < \omega_0, \zeta < 1$$

- ▶ $s_{1,2}$: dos soluciones complejas conjugadas
- ▶ Circuito **subamortiguado**.

Tipos de Respuesta

- ▶ Tipo de respuesta determinado por relación entre R y L, C (disipación y almacenamiento).
- ▶ Resistencia crítica ($\alpha = \omega_0, \zeta = 1$):

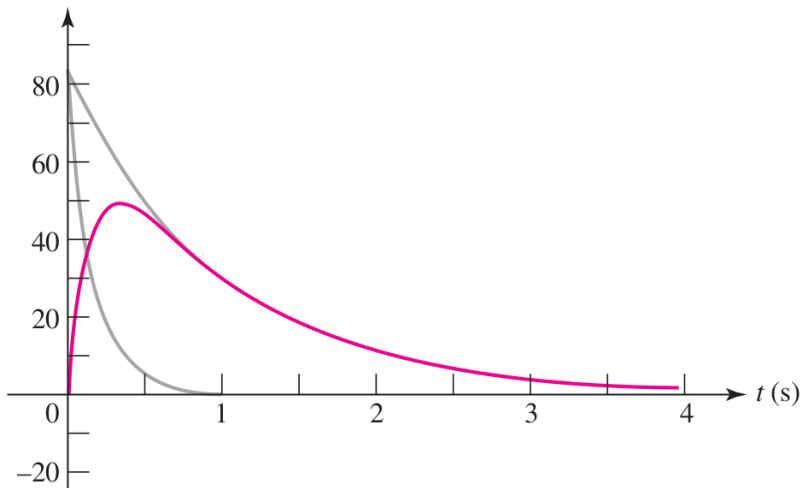
$$R_{cr} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Tipos

- ▶ $R > R_{cr}, \alpha > \omega, \zeta > 1$: **sobreamortiguado**
- ▶ $R = R_{cr}, \alpha = \omega, \zeta = 1$: **amortiguamiento crítico**
- ▶ $R < R_{cr}, \alpha < \omega, \zeta < 1$: **subamortiguado**

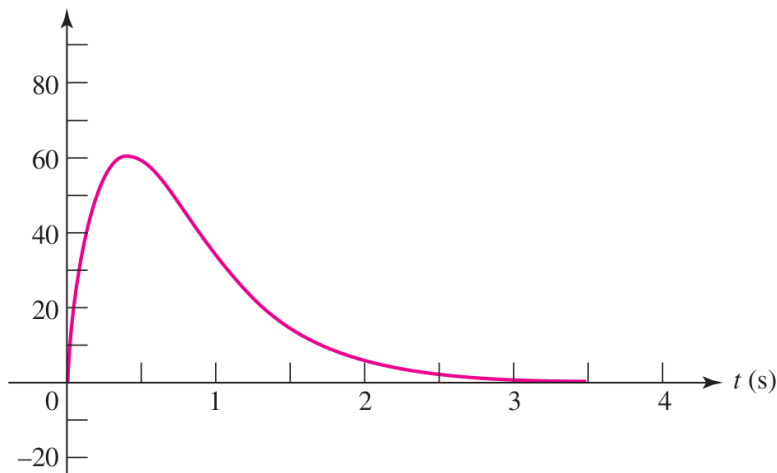
Circuito Sobreamortiguado ($\alpha > \omega_0$)

$$i_n(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$



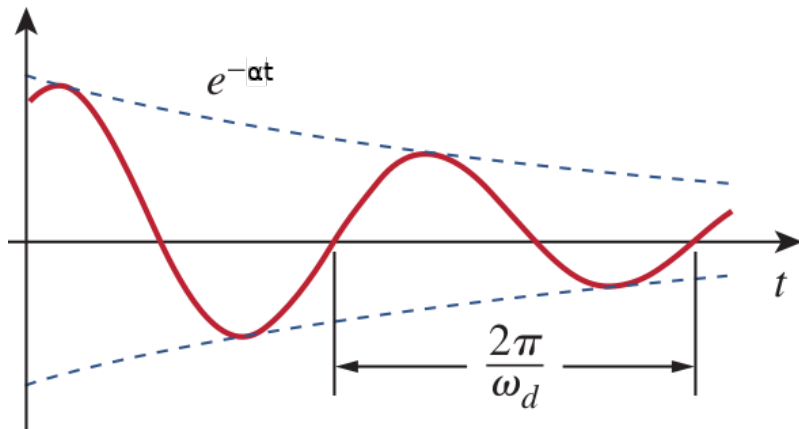
Amortiguamiento Crítico ($\alpha = \omega_0$)

$$i_n(t) = (A_1 + A_2 t)e^{st}$$

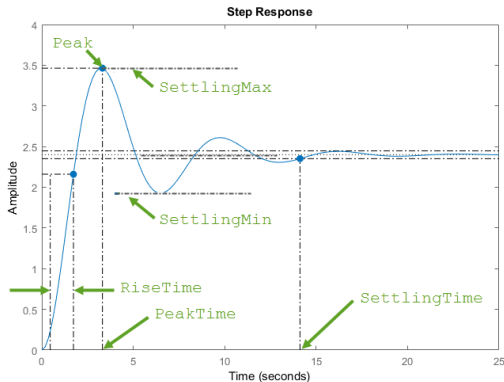


Circuito Subamortiguado ($\alpha < \omega$)

$$i_n(t) = (B_1 \cos(\omega_d t) + B_2 \sin(\omega_d t))e^{-\alpha t}$$

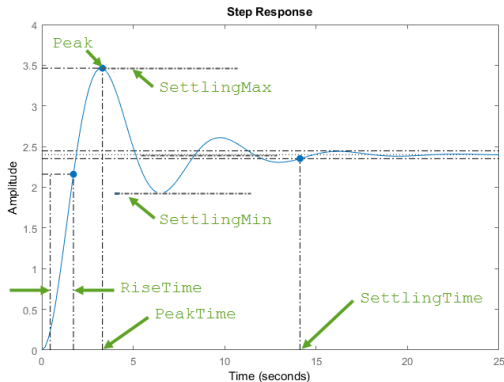


Valores Importantes



- ▶ **Tiempo de Subida:** tiempo para subir de 10% al 90% del valor en régimen permanente.
- ▶ **Tiempo de Establecimiento:** tiempo para que la diferencia entre la respuesta y el régimen permanente permanezca dentro de una banda del 1%.

Valores Importantes



- **Valor máximo y Tiempo del Valor Máximo.**
- **Sobretensión:** porcentaje del valor máximo respecto del régimen permanente.

Condiciones Iniciales

Dos constantes a determinar

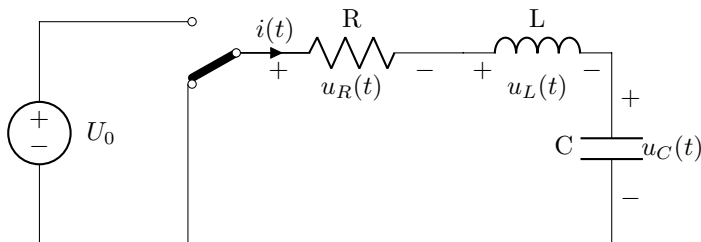
Son necesarias dos tipos de condiciones iniciales:

$$i_L(0^+) = i_L(0^-)$$
$$u_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} \longrightarrow \left. \frac{di_L(t)}{dt} \right|_{t=0^+} = \frac{1}{L} u_L(0^+)$$

Derivadas en el origen

Para obtener valores de las derivadas en el origen hay que resolver el circuito en $t = 0^+$ empleando las condiciones de continuidad.

Derivadas en $t = 0^+$



$$\left. \frac{di_L(t)}{dt} \right|_{t=0^+} = \frac{1}{L} u_L(0^+)$$

$$u_L(0^+) = -u_R(0^+) - u_c(0^+)$$

$$u_R(0^+) = R i_L(0^+)$$

$$\boxed{\left. \frac{di_L(t)}{dt} \right|_{t=0^+} = -\frac{1}{L} (R i_L(0^+) + u_c(0^+))}$$

Respuesta Completa

Las condiciones iniciales deben evaluarse teniendo en cuenta la respuesta forzada (si existe).

$$i_L(0^+) = i_n(0^+) + i_\infty(0^+) \\ \left. \frac{di_L}{dt} \right|_{t=0^+} = \left. \frac{di_n}{dt} \right|_{t=0^+} + \left. \frac{di_\infty}{dt} \right|_{t=0^+}$$

Ejemplo de Respuesta Completa

Circuito RLC serie sobreamortiguado con generador de tensión DC funcionando en $t > 0$.

Respuesta Completa

$$i_L(t) = I_\infty + A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

Condiciones Iniciales

$$\begin{aligned} i_L(0^+) &= I_\infty + A_1 + A_2 \\ \left. \frac{di_L(t)}{dt} \right|_{t=0^+} &= 0 + A_1 s_1 + A_2 s_2 \end{aligned}$$

① Conceptos Fundamentales

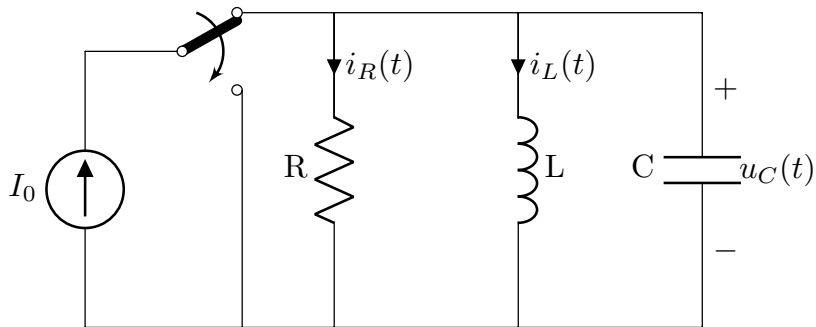
② Circuitos de Primer Orden

③ Circuitos de Segundo Orden

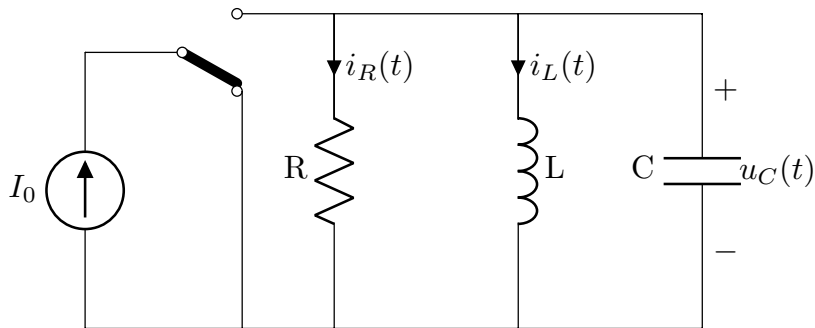
Circuito RLC serie

Circuito RLC paralelo

Circuito básico



Respuesta natural ($t > 0$)



$$Gu(t) + C \frac{du(t)}{dt} + \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u(t') dt' = 0$$

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{G}{C} \frac{du}{dt} + \frac{1}{LC} u = 0$$

Solución

Ecuación diferencial

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{G}{C} \frac{du}{dt} + \frac{1}{LC}u = 0$$

$$u_n(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

Ecuación característica

$$s^2 + \frac{G}{C}s + \frac{1}{LC} = 0$$

$$s_{1,2} = -\frac{G}{2C} \pm \sqrt{\left(\frac{G}{2C}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

Parámetros

Ecuación característica

$$s^2 + \frac{G}{C}s + \frac{1}{LC} = 0$$

$$s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0$$

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$$u_n(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

$$\alpha = \frac{G}{2C}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

$$\xi = \frac{\alpha}{\omega_0}$$

Tipos de Respuesta

- ▶ Tipo de respuesta determinado por relación entre G y L, C (disipación y almacenamiento).
- ▶ Conductancia crítica ($\alpha = \omega_0, \zeta = 1$):

$$G_{cr} = 2\sqrt{\frac{C}{L}}$$

Tipos

- ▶ $G > G_{cr}, \alpha > \omega, \zeta > 1$: **sobreamortiguado**
- ▶ $G = G_{cr}, \alpha = \omega, \zeta = 1$: **amortiguamiento crítico**
- ▶ $G < G_{cr}, \alpha < \omega, \zeta < 1$: **subamortiguado**

Tipos de Respuesta

- Circuito Sobreamortiguado ($\alpha > \omega_0$)

$$u_n(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

- Amortiguamiento Crítico ($\alpha = \omega_0$)

$$u_n(t) = (A_1 + A_2 t) e^{s t}$$

- Circuito Subamortiguado ($\alpha < \omega$)

$$u_n(t) = (B_1 \cos(\omega_d t) + B_2 \sin(\omega_d t)) e^{-\alpha t}$$

Condiciones Iniciales

Dos constantes a determinar

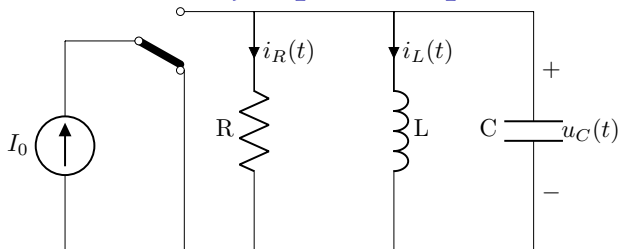
Son necesarias dos tipos de condiciones iniciales:

$$u_C(0^+) = u_C(0^-)$$
$$i_C(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} \longrightarrow \left. \frac{du_C(t)}{dt} \right|_{t=0^+} = \frac{1}{C} i_C(0^+)$$

Derivadas en el origen

Para obtener valores de las derivadas en el origen hay que resolver el circuito en $t = 0^+$ empleando las condiciones de continuidad.

Derivadas en $t = 0^+$: ejemplo RLC paralelo



$$\left. \frac{du_C(t)}{dt} \right|_{t=0^+} = \frac{1}{C} i_C(0^+)$$

$$i_C(0^+) = -i_R(0^+) - i_L(0^+)$$

$$i_R(0^+) = \frac{1}{R} u_C(0^+)$$

$$\boxed{\left. \frac{du_C(t)}{dt} \right|_{t=0^+} = -\frac{1}{C} \left(\frac{1}{R} u_C(0^+) + i_L(0^+) \right)}$$

Respuesta Completa

Las condiciones iniciales deben evaluarse teniendo en cuenta la respuesta forzada (si existe).

$$u_C(0^+) = u_n(0^+) + u_\infty(0^+)$$
$$\left. \frac{du_C(t)}{dt} \right|_{t=0^+} = \left. \frac{du_n(t)}{dt} \right|_{t=0^+} + \left. \frac{du_\infty(t)}{dt} \right|_{t=0^+}$$

Ejemplo de Respuesta Completa

Circuito RLC paralelo sobreamortiguado con generador de corriente DC funcionando en $t > 0$.

Respuesta Completa

$$u_c(t) = U_\infty + A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

Condiciones Iniciales

$$\begin{aligned} u_c(0^+) &= U_\infty + A_1 + A_2 \\ \left. \frac{du_c(t)}{dt} \right|_{t=0^+} &= 0 + A_1 s_1 + A_2 s_2 \end{aligned}$$