Análisis Clásico de Circuitos de Segundo Orden

Teoría de Circuitos III

Oscar Perpiñán Lamigueiro

Septiembre 2018

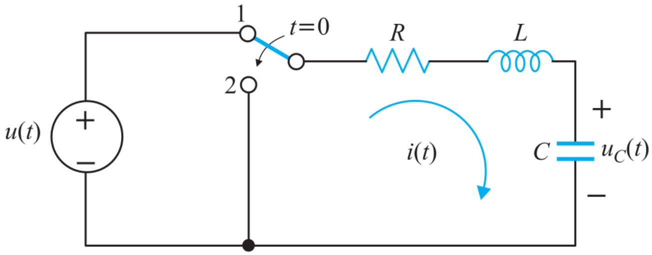
Circuitos de Segundo Orden

- Circuitos que tienen **dos elementos de acumulación** que intercambian energía, y parte resistiva que disipa energía.
- **Ecuación diferencial de segundo orden**: la respuesta natural incluye exponenciales decrecientes y quizás señal sinusoidal.
- Circuitos típicos:
  - RLC serie
  - RLC paralelo

Respuesta natural y forzada

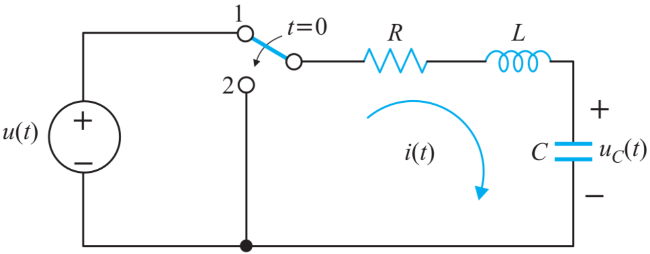
- El método de resolución analiza el circuito en dos etapas:
  - Sin fuentes: **respuesta natural** (la energía acumulada en $t < 0$ se redistribuye).
  - Con fuentes: **respuesta forzada** (determinada por la forma de onda de las fuentes).

Circuito básico



$$Ri(t) + L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(t')\mathrm{d}t' = 0$$

Ecuación diferencial (respuesta natural)



$$L\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}i = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}i = 0$$

Solución

Ecuación característica

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0$$

Solución

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

Solución con parámetros

Ecuación característica

$$s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0$$

$$\alpha = \frac{R}{2L}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\xi = \frac{\alpha}{\omega_0}$$

Solución

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$$i_n(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

Posibles soluciones

$\alpha > \omega, \xi > 1$

- $s_{1,2}$: dos soluciones reales (negativas) distintas
- Circuito **sobreamortiguado**.

$\alpha = \omega, \xi = 1$

- $s_{1,2}$: solución real doble.
- Circuito con **amortiguamiento crítico**.

$\alpha < \omega, \xi < 1$

- $s_{1,2}$: dos soluciones complejas conjugadas
- Circuito **subamortiguado**.

Tipos de Respuesta

- Tipo de respuesta determinado por relación entre R y L, C (disipación y almacenamiento).
- Resistencia crítica ($\alpha = \omega_0$, $\xi = 1$):

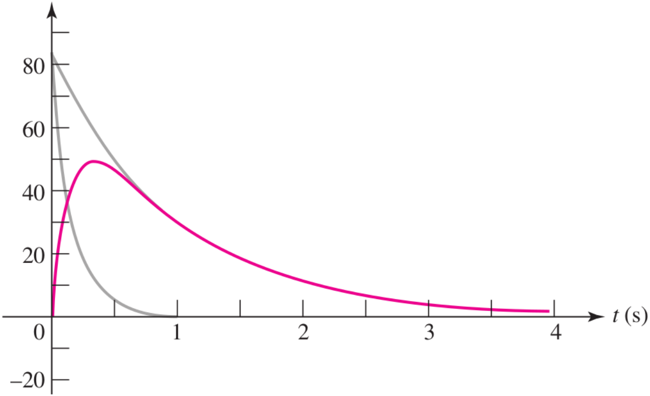
$$R_{cr} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Tipos

- $R > R_{cr}$, $\alpha > \omega$, $\xi > 1$: **sobreamortiguado**
- $R = R_{cr}$, $\alpha = \omega$, $\xi = 1$: **amortiguamiento crítico**
- $R < R_{cr}$, $\alpha < \omega$, $\xi < 1$: **subamortiguado**

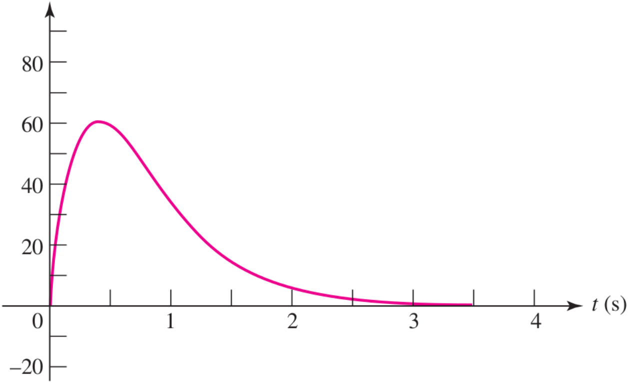
Circuito Sobreamortiguado ($\alpha > \omega_0$)

$$i_n(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$



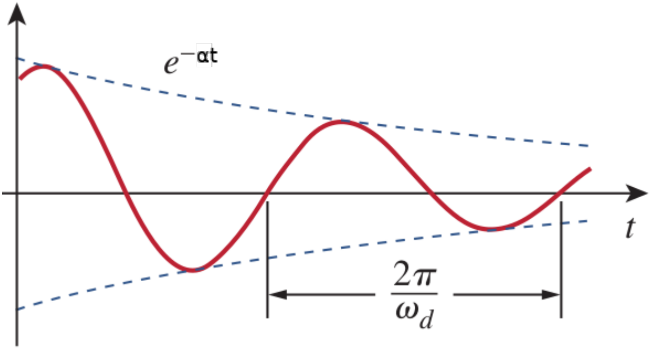
Amortiguamiento Crítico ($\alpha = \omega_0$)

$$i_n(t) = (A_1 + A_2 t)e^{st}$$



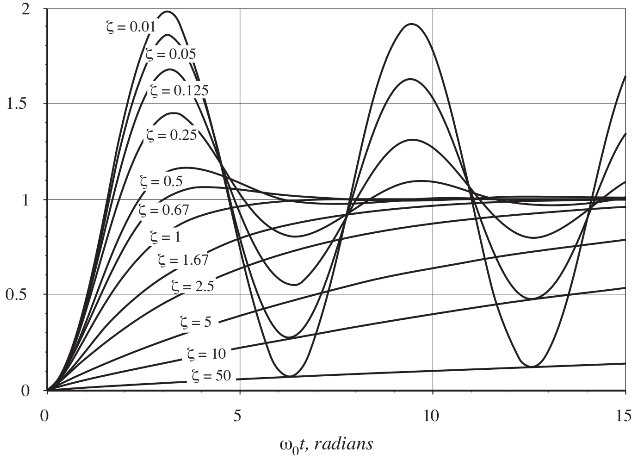
Circuito Subamortiguado ($\alpha < \omega$)

$$i_n(t) = (B_1 \cos(\omega_d t) + B_2 \sin(\omega_d t))e^{-\alpha t}$$

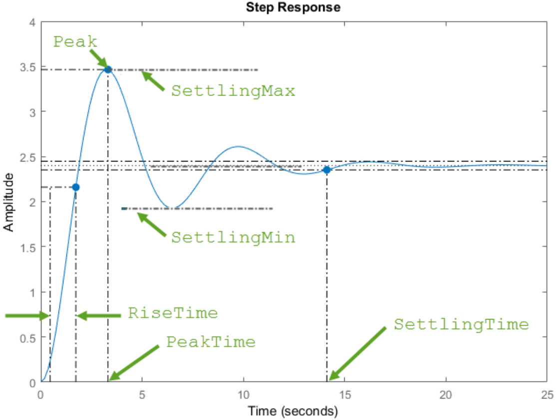


$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

Comparación



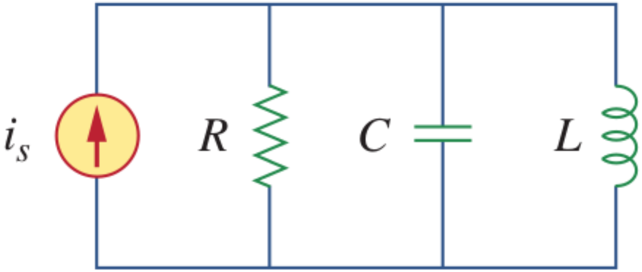
Valores Importantes



Valores Importantes

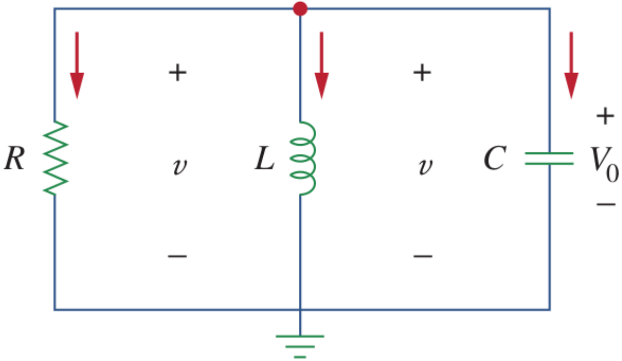
- **Tiempo de Subida**: tiempo para subir de 10% al 90% del valor en régimen permanente.
- **Tiempo de Establecimiento**: tiempo para que la diferencia entre la respuesta y el régimen permanente permanezca dentro de una banda del 1%.
- **Valor máximo** y **Tiempo del Valor Máximo**.
- **Sobretensión** o **Sobrecorriente**: porcentaje del valor máximo respecto del régimen permanente.

Circuito básico



$$Gu(t) + C\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} u(t')\mathrm{d}t' = i_s(t)$$

Ecuación diferencial (respuesta natural)



$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{G}{C}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}u = 0$$

Solución

Ecuación característica

$$s^2 + \frac{G}{C}s + \frac{1}{LC} = 0$$

Solución

$$s_{1,2} = -\frac{G}{2C} \pm \sqrt{\left(\frac{G}{2C}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

Solución con parámetros

Ecuación característica

$$s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0$$

$$\alpha = \frac{G}{2C}$$
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$
$$\xi = \frac{\alpha}{\omega_0}$$

Solución

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$$u_n(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

Tipos de Respuesta

- Tipo de respuesta determinado por relación entre G y L, C (disipación y almacenamiento).
- Conductancia crítica ($\alpha = \omega_0, \xi = 1$):

$$G_{cr} = 2\sqrt{\frac{C}{L}}$$

Tipos

- $G > G_{cr}, \alpha > \omega, \xi > 1$: **sobreamortiguado**
- $G = G_{cr}, \alpha = \omega, \xi = 1$: **amortiguamiento crítico**
- $G < G_{cr}, \alpha < \omega, \xi < 1$: **subamortiguado**

Tipos de Respuesta

- Circuito Sobreamortiguado ($\alpha > \omega_0$)

$$u_n(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

- Amortiguamiento Crítico ($\alpha = \omega_0$)

$$u_n(t) = (A_1 + A_2 t) e^{st}$$

- Circuito Subamortiguado ($\alpha < \omega$)

$$u_n(t) = (B_1 \cos(\omega_d t) + B_2 \sin(\omega_d t)) e^{-\alpha t}$$

Condiciones Iniciales

Dos constantes a determinar

Son necesarias dos tipos de condiciones iniciales:

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) \qquad i_L(0^+) = i_L(0^-)$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0^+} = \frac{1}{C} i_C(0^+) \qquad \left(\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0^+} = \frac{1}{L} u_L(0^+)$$

Derivadas en el origen

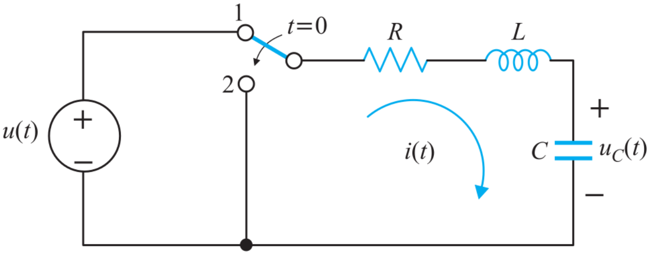
Para obtener valores de las derivadas en el origen hay que resolver el circuito en $t = 0^+$ empleando las condiciones de continuidad.

Circuitos Equivalentes

ELEMENTO	Circuito equivalente inicial ($t=0^+$)		Circuito equivalente final (solo con c.c.) $t=\infty$
	CARGADO	DESCARGADO	
R	R	R	R
L, i_L	$i_L(0^+)=i_L(0^-)$	$i_L(0^+)=0$	Cortocircuito
C, $+\ u_C\ -$	$u_C(0^+)=u_C(0^-)$, $+\ -$	$u_C(0^+)=0$	Circuito abierto

- Sustituir fuentes de tensión $u_g(t)$ por $u_g(0^+)$.
- Sustituir fuentes de corriente $i_g(t)$ por $i_g(0^+)$.
- Sustituir bobinas por fuentes de corriente $i_L(0^+)$.
- Sustituir condensadores por fuentes de tensión $u_C(0^+)$.
- Calcular tensiones y corrientes en circuito.

Derivadas en $t = 0^+$: ejemplo RLC serie

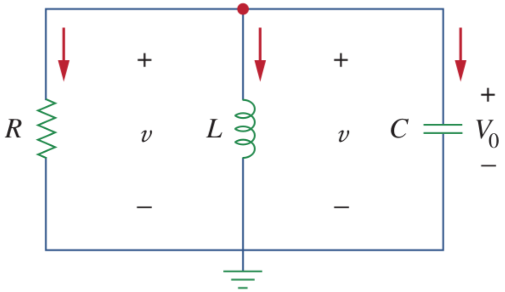


$$\left(\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0^+} = \frac{1}{L} u_L(0^+) = -\frac{1}{L}\left(R i_L(0^+) + u_c(0^+)\right)$$

$$u_L(0^+) = -u_R(0^+) - u_c(0^+)$$

$$u_R(0^+) = R i_L(0^+)$$

Derivadas en $t = 0^+$: ejemplo RLC paralelo



$$\left(\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0^+} = \frac{1}{C} i_C(0^+) = -\frac{1}{C}\left(\frac{1}{R} u_C(0^+) + i_L(0^+)\right)$$

$$i_C(0^+) = -i_R(0^+) - i_L(0^+)$$

$$i_R(0^+) = \frac{1}{R} u_C(0^+)$$

Respuesta Completa

Las condiciones iniciales deben evaluarse teniendo en cuenta la respuesta forzada (si existe).

$$f(0^+) = f_n(0^+) + f_\infty(0^+)$$
$$\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0^+} = \left(\frac{\mathrm{d}f_n}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0^+} + \left(\frac{\mathrm{d}f_\infty}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0^+}$$

Ejemplo

Circuito RLC paralelo sobreamortiguado con generador de corriente DC funcionando en $t > 0$.

Respuesta Completa

$$u_c(t) = U_\infty + A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

Condiciones Iniciales

$$\begin{aligned} u_c(0^+) &= U_\infty + A_1 + A_2 \\ \left(\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0^+} &= 0 + A_1 s_1 + A_2 s_2 \end{aligned}$$

Ejercicios

- AS: Ejemplos 8.5, 8.7, 8.8 y 8.9
- HKD: Ejemplos 9.3, 9.7, 9.8, y 9.9 + 9.10
- FM: Ejemplos de aplicación 4.9 y 4.10