

Introducción al Régimen Transitorio

Teoría de Circuitos

Oscar Perpiñán Lamigueiro

① Conceptos Fundamentales

② Circuitos de Primer Orden

③ Circuitos de Segundo Orden

① Conceptos Fundamentales

¿Qué es el régimen transitorio?

Respuesta de una red lineal

② Circuitos de Primer Orden

③ Circuitos de Segundo Orden

Permanente y Transitorio

Régimen permanente o estacionario

Las tensiones y corrientes de un circuito son constantes (continua) o periódicas (alterna) (circuito estabilizado)

Régimen transitorio

- ▶ Para alcanzar el régimen permanente (o para alternar entre dos regímenes permanentes) el circuito atraviesa el régimen transitorio.
- ▶ Posibles cambios: activación o apagado de fuentes, cambio en las cargas, cambio en el circuito (línea).
- ▶ En general, el estado transitorio es indeseado en sistemas eléctricos, pero provocado en sistemas electrónicos.

Acumulación de Energía

Régimen Permanente

Energía acumulada en **bobinas** y **condensadores**

Régimen Transitorio

- ▶ **Redistribución** y **disipación** de energía acumulada.
- ▶ La redistribución de energía **no** se puede realizar de forma **inmediata**
- ▶ **Duración corta** (μs) pero superior a 0, dependiendo de **relación entre acumulación y disipación** (resistencia).

① Conceptos Fundamentales

¿Qué es el régimen transitorio?

Respuesta de una red lineal

② Circuitos de Primer Orden

③ Circuitos de Segundo Orden

Ecuaciones integro-diferenciales

Al aplicar Kirchhoff a un circuito lineal obtenemos ecuaciones integro-diferenciales.

$$u_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} \Leftrightarrow i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L(t') dt'$$
$$i_C(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} \Leftrightarrow u_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(t') dt'$$

Por ejemplo, la ecuación de un circuito RLC será de la forma:

$$a \cdot \frac{d^2 f(t)}{dt^2} + b \cdot \frac{df(t)}{dt} + c \cdot f(t) = g(t)$$

Respuesta completa de una red lineal

La solución de esta ecuación para $t > 0$ (respuesta completa del circuito lineal al transitorio) tiene dos componentes:

$$f(t) = f_n(t) + f_\infty(t)$$

- ▶ Respuesta **natural** o propia, $f_n(t)$:
 - ▶ Respuesta sin fuentes.
 - ▶ Determinada por la energía almacenada previamente y por la configuración del circuito.
 - ▶ Contiene constantes de integración. Se necesita información del estado del circuito en el instante que da origen al transitorio.
- ▶ Respuesta **forzada** o particular, $f_\infty(t)$:
 - ▶ Determinada por las fuentes existentes en $t > 0$.
 - ▶ Es la respuesta del circuito tras un tiempo suficiente, $t \rightarrow \infty$ (régimen permanente).

Condiciones iniciales

- ▶ El instante del cambio se representa habitualmente con $t = 0$:
 - ▶ $t = 0^-$: tiempo inmediatamente anterior al cambio.
 - ▶ $t = 0^+$: tiempo inmediatamente posterior al cambio.
- ▶ Las **condiciones iniciales** son el estado del circuito en el instante temporal en el que se produce el cambio.
- ▶ Determinan las **constantes de integración** de la respuesta natural.
- ▶ **Se calculan** con las energías almacenadas en bobinas y condensadores en $t = 0^-$.
- ▶ **Se aplican** a la topología del circuito en $t = 0^+$.

Resistencia

No acumula energía: sigue los cambios de forma instantánea.

$$u(t) = Ri(t)$$

Inductancia

La corriente en una bobina no puede variar de forma abrupta (implica tensión infinita).

$$u_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} \leftrightarrow i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L(t') dt'$$

$$\boxed{i_L(0^-) = i_L(0^+)}$$

Capacidad

La tensión en un condensador no puede variar de forma abrupta (implica corriente infinita).

$$i_C(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} \Leftrightarrow u_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(t') dt'$$

$$\boxed{u_C(0^-) = u_C(0^+)}$$

- ① Conceptos Fundamentales
- ② Circuitos de Primer Orden
- ③ Circuitos de Segundo Orden

Definición

- ▶ Circuitos que tienen un **único elemento de acumulación** (o *varios elementos que pueden ser simplificados a un elemento equivalente*) y parte resistiva.
- ▶ **Ecuación diferencial de primer orden**: la respuesta natural es siempre una **exponencial decreciente**.
- ▶ Circuitos típicos:
 - ▶ RL serie
 - ▶ RC paralelo

Respuesta natural y forzada

- ▶ El método de resolución analiza el circuito en tres etapas:
 - ① Cálculo de las **condiciones iniciales**, analizando el circuito en $t < 0$.
 - ② **Respuesta natural**: análisis del circuito *sin fuentes* en $t > 0$ (la energía acumulada en $t < 0$ se disipa en la resistencia).
 - ③ **Respuesta forzada**: análisis del circuito *con fuentes* en $t > 0$ (la respuesta está determinada por la forma de onda de las fuentes).

① Conceptos Fundamentales

② Circuitos de Primer Orden

Circuito RL serie

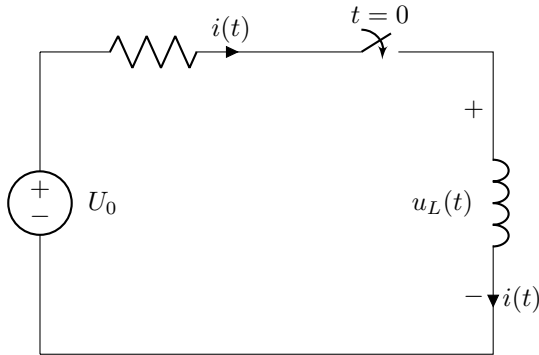
Circuito RC paralelo

Análisis Sistemático

③ Circuitos de Segundo Orden

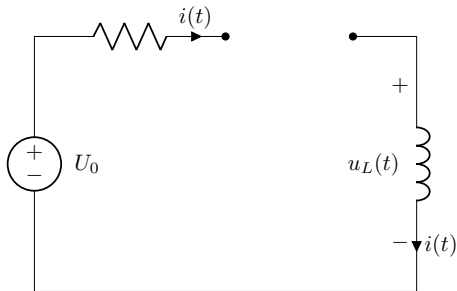
Circuito básico

- ▶ En $t < 0$ la fuente está desconectada.
- ▶ En $t = 0$ la fuente se conecta.
- ▶ En $t > 0$ la fuente alimenta el circuito RL (la bobina almacena energía).



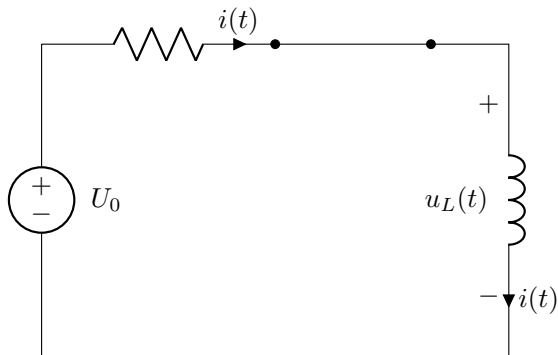
Condiciones Iniciales

Analizando circuito para $t < 0 \dots$



\dots obtenemos $i(0^-) = 0$ (resultado particular de este circuito.)

Circuito en $t > 0$

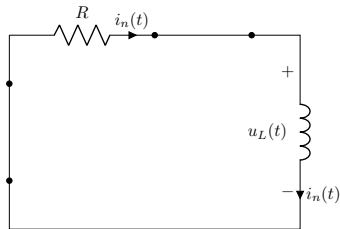


$$u_R(t) + u_L(t) = U_0$$

$$Ri + L \frac{di}{dt} = U_0$$

Respuesta Natural

Apagamos la fuente:



$$u_R(t) + u_L(t) = 0$$

$$Ri_n + L \frac{di_n}{dt} = 0$$

Solución Genérica

$$i_n(t) = Ae^{st}$$

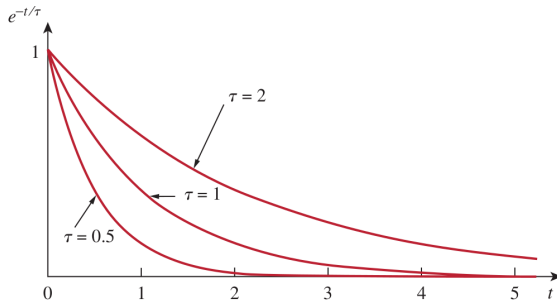
Ecuación Característica

$$s + \frac{R}{L} = 0 \Rightarrow s = -\frac{R}{L}$$

Constante de tiempo

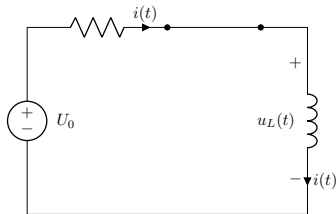
$$i_n(t) = Ae^{-t/\tau}$$

- ▶ $\tau = \frac{L}{R}$ es la constante de tiempo (unidades [s]).
- ▶ Ratio entre almacenamiento (L) y disipación (R).
- ▶ Valores altos de τ implican decrecimiento lento.
- ▶ La respuesta natural «desaparece» tras $\simeq 5\tau$.



Respuesta forzada

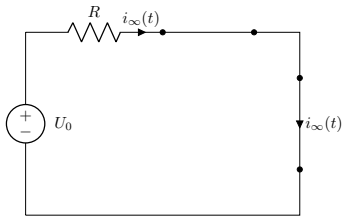
Volvemos a activar la fuente:



$$u_R(t) + u_L(t) = u(t) \rightarrow Ri + L \frac{di}{dt} = U_0$$

Respuesta forzada

Para la solución particular, i_∞ , se propone una función análoga a la excitación (analizando circuito para $t \rightarrow \infty$):



$$i_\infty(t) = U_0/R$$

Respuesta completa

$$i(t) = i_n(t) + i_\infty(t) \rightarrow \begin{cases} i_n(t) = Ae^{st} \\ i_\infty(t) = U_0/R \end{cases}$$

Para determinar el valor de la constante de integración particularizamos en $t = 0$:

$$i(0^+) = A + U_0/R \rightarrow A = i(0^+) - i_\infty(0^+)$$

Teniendo en cuenta la condición de continuidad, $i(0^+) = i(0^-) = 0$, obtenemos:

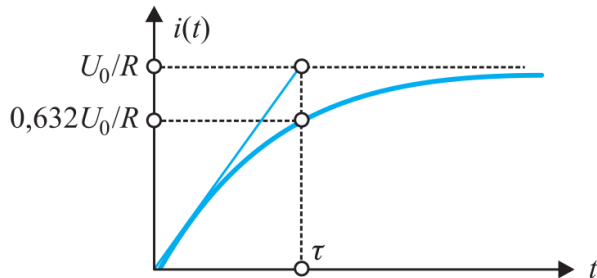
$$A = 0 - U_0/R$$

La solución completa es (*en este circuito de ejemplo*):

$$i(t) = \frac{U_0}{R} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Respuesta completa

$$i(t) = \frac{U_0}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

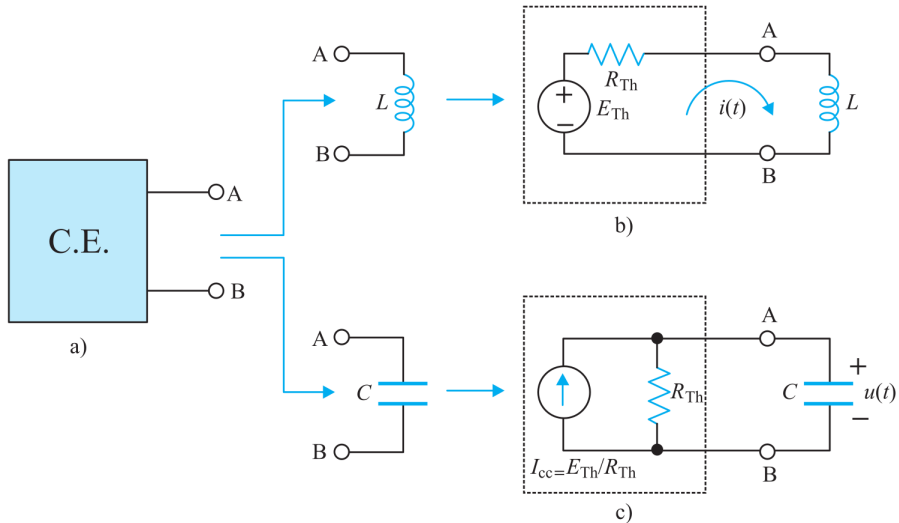


Expresión general de la respuesta completa

$$i(t) = [i(0^+) - i_\infty(0^+)] e^{-t/\tau} + i_\infty(t)$$

- ▶ $i(0^+)$: corriente en la bobina, condiciones iniciales, $i(0^-) = i(0^+)$.
- ▶ $i_\infty(t)$: corriente en la bobina en régimen permanente para $t > 0$.
- ▶ $i_\infty(0^+)$: corriente en la bobina en régimen permanente particularizada en $t = 0$.

Equivalente de Thévenin



① Conceptos Fundamentales

② Circuitos de Primer Orden

Circuito RL serie

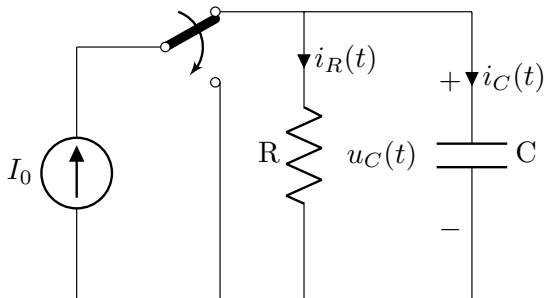
Circuito RC paralelo

Análisis Sistemático

③ Circuitos de Segundo Orden

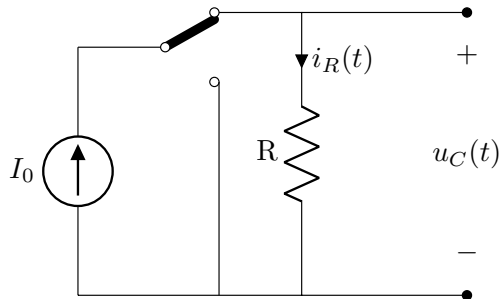
Circuito básico

- ▶ En $t < 0$ la fuente alimenta el circuito RC (el condensador se carga).
- ▶ En $t = 0$ se desconecta la fuente
- ▶ En $t > 0$ el condensador comienza a descargarse en la resistencia.



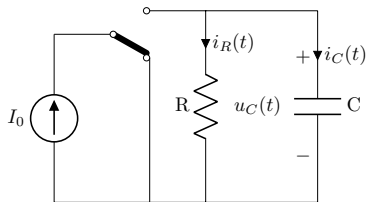
Condiciones iniciales

Analizamos el circuito en $t < 0$:



$$u_c(0^-) = R \cdot I_0$$

Respuesta natural



Ecuaciones

$$i_R(t) + i_C(t) = 0$$

$$Gu_n + C \frac{du_n}{dt} = 0$$

Solución Genérica

$$u_n(t) = Ae^{st}$$

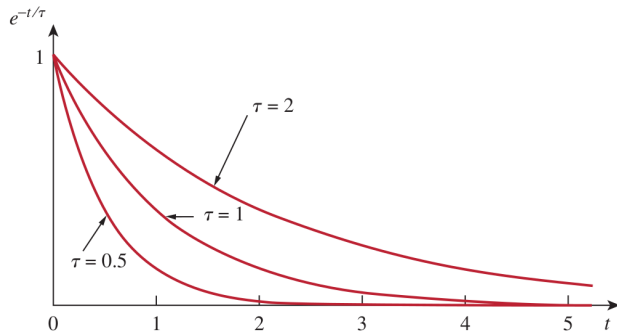
Respuesta natural

$$u_n(t) = U_0 e^{-G/Ct}$$

Constante de tiempo

- ▶ $\tau = \frac{C}{G}$ es la constante de tiempo (unidades [s]).
- ▶ Ratio entre almacenamiento (C) y disipación (G).

$$u_n(t) = U_0 e^{-t/\tau}$$



Balance Energético

La energía disipada en la resistencia (conductancia) en $t > 0$ es la energía que ha acumulado el condensador en $t < 0$:

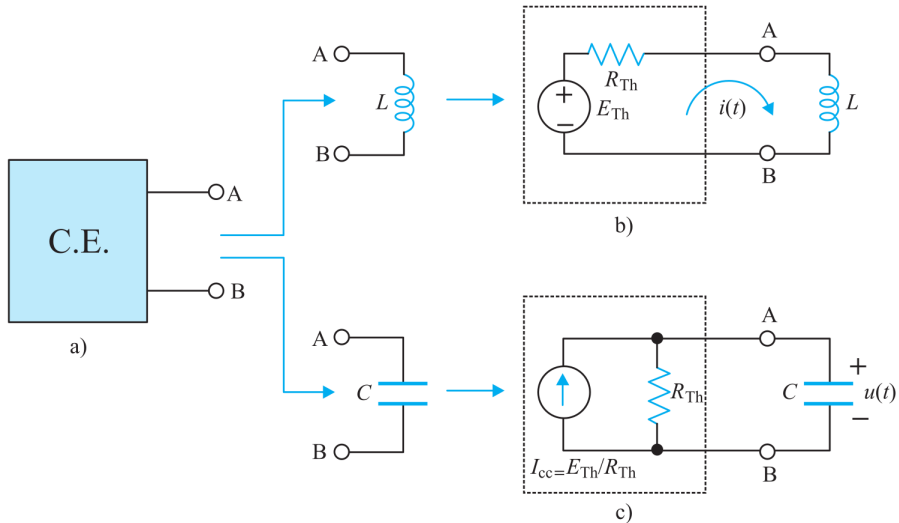
$$\begin{aligned}W_G &= \int_0^{\infty} Gu^2(t)dt = \\&= \int_0^{\infty} G(U_0 e^{-t/\tau})^2 dt = \\&= GU_0^2 \int_0^{\infty} e^{\frac{-2R}{C}t} dt \\&= \frac{1}{2}CU_0^2 = W_C\end{aligned}$$

Expresión general de la respuesta completa

$$u(t) = [u(0^+) - u_\infty(0^+)] e^{-t/\tau} + u_\infty(t)$$

- ▶ $u(0^+)$: tensión en el condensador, condiciones iniciales, $u(0^-) = u(0^+)$.
- ▶ $u_\infty(t)$: tensión en el condensador en régimen permanente para $t > 0$.
- ▶ $u_\infty(0^+)$: tensión en el condensador en régimen permanente particularizada en $t = 0$.

Equivalente de Norton



① Conceptos Fundamentales

② Circuitos de Primer Orden

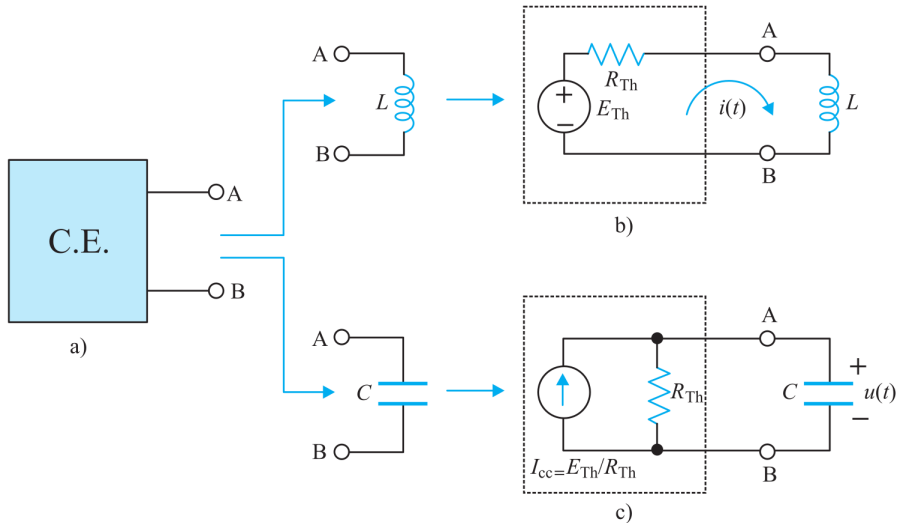
Circuito RL serie

Circuito RC paralelo

Análisis Sistemático

③ Circuitos de Segundo Orden

Equivalente de Thévenin/Norton



Procedimiento General

- ▶ Dibujar el circuito para $t < 0$.
 - ▶ Determinar variables en régimen permanente, $u_c(t)$, $i_L(t)$.
 - ▶ Particularizar para $t = 0$, obteniendo $u_c(0^-)$ o $i_L(0^-)$.
 - ▶ Continuidad: $u_c(0^+) = u_c(0^-)$, $i_L(0^+) = i_L(0^-)$.
- ▶ Dibujar el circuito para $t > 0$.
 - ▶ Calcular el equivalente de Thevenin (Norton) visto por el elemento de acumulación.
 - ▶ La constante de tiempo de la respuesta natural es $\tau = \frac{L}{R_{th}}$ o $\tau = \frac{C}{G_{th}}$.
 - ▶ Calcular las variables $i_L(t)$ o $u_c(t)$ en régimen permanente, obteniendo $i_\infty(t)$ o $u_\infty(t)$.
- ▶ Obtener respuesta completa:

$$i_L(t) = (i_L(0^+) - i_\infty(0^+)) e^{-t/\tau} + i_\infty(t)$$
$$u_C(t) = (u_C(0^+) - u_\infty(0^+)) e^{-t/\tau} + u_\infty(t)$$

- ① Conceptos Fundamentales
- ② Circuitos de Primer Orden
- ③ Circuitos de Segundo Orden

Introducción

- ▶ Circuitos que tienen **dos elementos de acumulación** que intercambian energía, y parte resistiva que disipa energía.
- ▶ **Ecuación diferencial de segundo orden**: la respuesta natural incluye exponenciales decrecientes y quizás señal sinusoidal.
- ▶ Circuitos típicos:
 - ▶ RLC serie
 - ▶ RLC paralelo

Respuesta natural y forzada

- ▶ El método de resolución analiza el circuito en dos etapas:
 - ▶ Sin fuentes: **respuesta natural** (la energía acumulada en $t < 0$ se redistribuye).
 - ▶ Con fuentes: **respuesta forzada** (determinada por la forma de onda de las fuentes).

① Conceptos Fundamentales

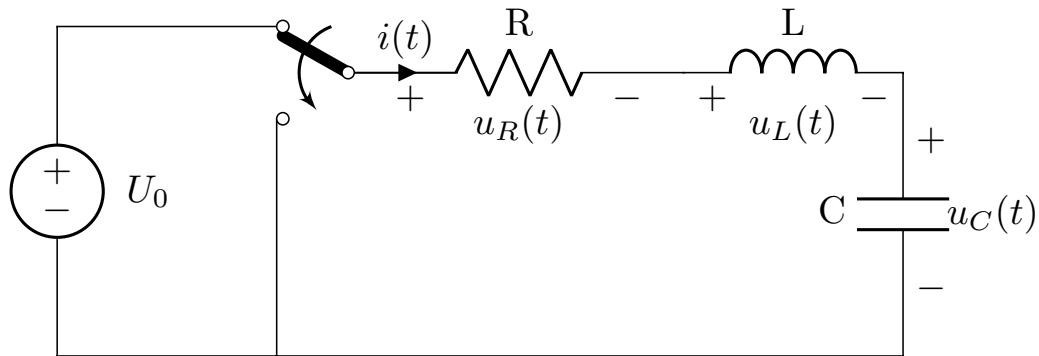
② Circuitos de Primer Orden

③ Circuitos de Segundo Orden

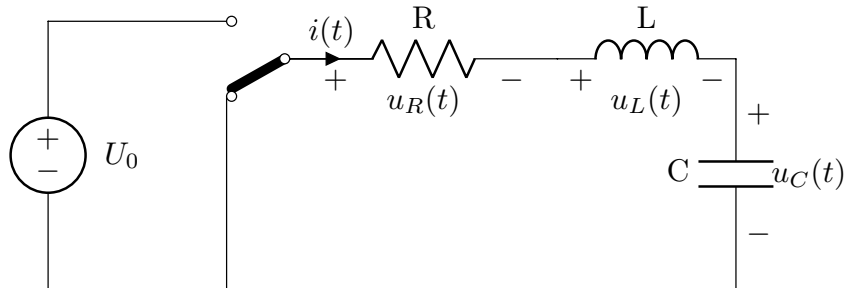
Circuito RLC serie

Circuito RLC paralelo

Circuito básico



Respuesta natural ($t > 0$)



$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(t') dt' = 0$$

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0}$$

Solución

Ecuación diferencial

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0$$

$$i_n(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

Ecuación característica

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0$$

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

Parámetros

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0$$

$$s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0$$

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$$i_n(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

$$\alpha = \frac{R}{2L}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

$$\zeta = \frac{\alpha}{\omega_0}$$

- ▶ α : coeficiente de amortiguamiento exponencial
- ▶ ω_0 : pulsación natural no amortiguada
- ▶ ω_d : pulsación natural amortiguada
- ▶ ζ : factor de amortiguamiento

Posibles soluciones

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$$\alpha > \omega_0, \zeta > 1$$

- ▶ $s_{1,2}$: dos soluciones reales (negativas) distintas
- ▶ Circuito **sobreamortiguado**.

$$\alpha = \omega_0, \zeta = 1$$

- ▶ $s_{1,2}$: solución real doble.
- ▶ Circuito con **amortiguamiento crítico**.

$$\alpha < \omega_0, \zeta < 1$$

- ▶ $s_{1,2}$: dos soluciones complejas conjugadas
- ▶ Circuito **subamortiguado**.

Tipos de Respuesta

- ▶ Tipo de respuesta determinado por relación entre R y L, C (disipación y almacenamiento).
- ▶ Resistencia crítica ($\alpha = \omega_0, \xi = 1$):

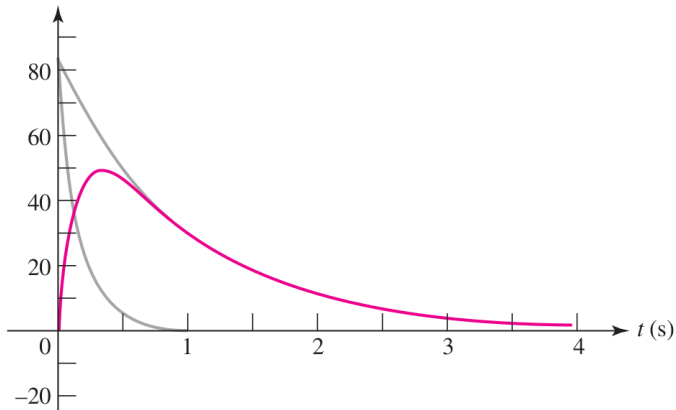
$$R_{cr} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Tipos

- ▶ $R > R_{cr}, \alpha > \omega_0, \xi > 1$: **sobreamortiguado**
- ▶ $R = R_{cr}, \alpha = \omega_0, \xi = 1$: **amortiguamiento crítico**
- ▶ $R < R_{cr}, \alpha < \omega_0, \xi < 1$: **subamortiguado**

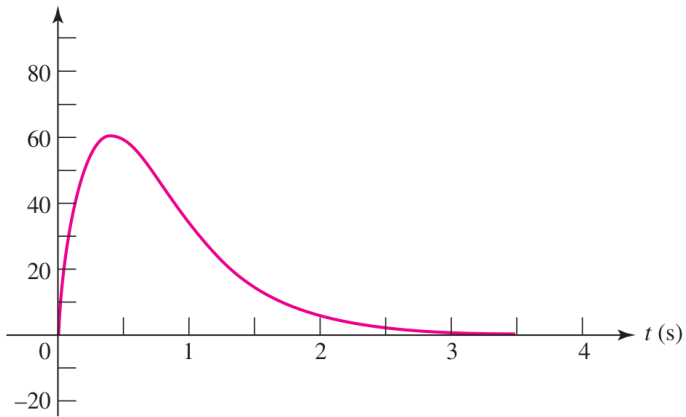
Circuito Sobreamortiguado ($\alpha > \omega_0$)

$$i_n(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$



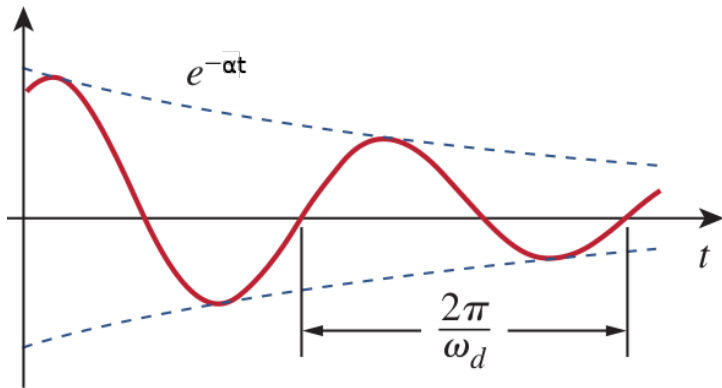
Amortiguamiento Crítico ($\alpha = \omega_0$)

$$i_n(t) = (A_1 + A_2 t)e^{st}$$



Circuito Subamortiguado ($\alpha < \omega$)

$$i_n(t) = (B_1 \cos(\omega_d t) + B_2 \sin(\omega_d t))e^{-\alpha t}$$



Condiciones Iniciales

Dos constantes a determinar

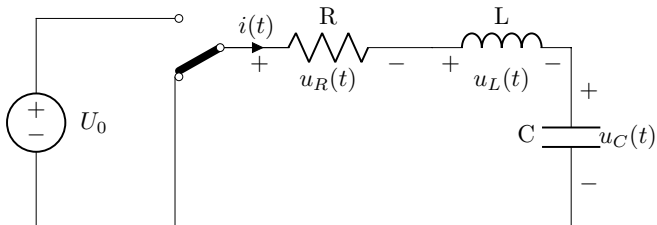
Son necesarias dos tipos de condiciones iniciales:

$$i_L(0^+) = i_L(0^-)$$
$$u_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} \longrightarrow \left(\frac{di_L(t)}{dt} \right)_{t=0^+} = \frac{1}{L} u_L(0^+)$$

Derivadas en el origen

Para obtener valores de las derivadas en el origen hay que resolver el circuito en $t = 0^+$ empleando las condiciones de continuidad.

Derivadas en $t = 0^+$



$$\left(\frac{di_L(t)}{dt} \right)_{t=0^+} = \frac{1}{L} u_L(0^+)$$

$$u_L(0^+) = -u_R(0^+) - u_c(0^+)$$

$$u_R(0^+) = Ri_L(0^+)$$

$$\boxed{\left(\frac{di_L(t)}{dt} \right)_{t=0^+} = -\frac{1}{L} (Ri_L(0^+) + u_c(0^+))}$$

Respuesta Completa

Las condiciones iniciales deben evaluarse teniendo en cuenta la respuesta forzada (si existe).

$$i_L(0^+) = i_n(0^+) + i_\infty(0^+) \\ \left(\frac{di_L}{dt} \right)_{t=0^+} = \left(\frac{di_n}{dt} \right)_{t=0^+} + \left(\frac{di_\infty}{dt} \right)_{t=0^+}$$

Ejemplo de Respuesta Completa

Circuito RLC serie sobreamortiguado con generador de tensión DC funcionando en $t > 0$.

Respuesta Completa

$$i_L(t) = I_\infty + A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

Condiciones Iniciales

$$\begin{aligned} i_L(0^+) &= I_\infty + A_1 + A_2 \\ \left(\frac{di_L(t)}{dt} \right)_{t=0^+} &= 0 + A_1 s_1 + A_2 s_2 \end{aligned}$$

① Conceptos Fundamentales

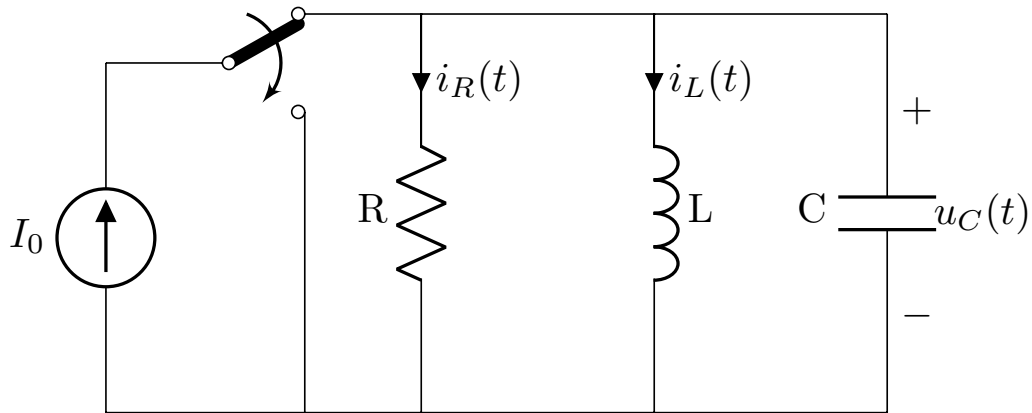
② Circuitos de Primer Orden

③ Circuitos de Segundo Orden

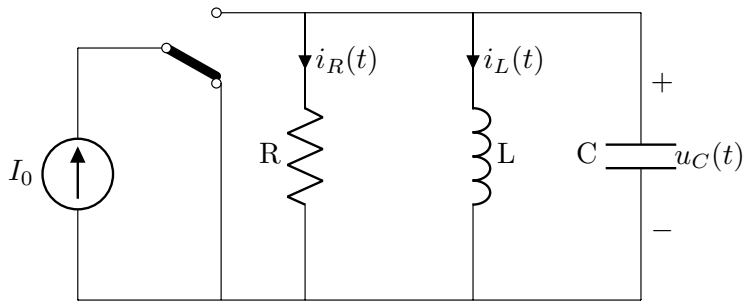
Circuito RLC serie

Circuito RLC paralelo

Circuito básico



Respuesta natural ($t > 0$)



$$Gu(t) + C \frac{du(t)}{dt} + \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u(t') dt' = 0$$

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{G}{C} \frac{du}{dt} + \frac{1}{LC} u = 0$$

Solución

Ecuación diferencial

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{G}{C} \frac{du}{dt} + \frac{1}{LC}u = 0$$

$$u_n(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

Ecuación característica

$$s^2 + \frac{G}{C}s + \frac{1}{LC} = 0$$

$$s_{1,2} = -\frac{G}{2C} \pm \sqrt{\left(\frac{G}{2C}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

Parámetros

Ecuación característica

$$s^2 + \frac{G}{C}s + \frac{1}{LC} = 0$$

$$s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0$$

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$$u_n(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

$$\alpha = \frac{G}{2C}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

$$\zeta = \frac{\alpha}{\omega_0}$$

Tipos de Respuesta

- ▶ Tipo de respuesta determinado por relación entre G y L, C (disipación y almacenamiento).
- ▶ Conductancia crítica ($\alpha = \omega_0, \zeta = 1$):

$$G_{cr} = 2\sqrt{\frac{C}{L}}$$

Tipos

- ▶ $G > G_{cr}, \alpha > \omega_0, \zeta > 1$: **sobreamortiguado**
- ▶ $G = G_{cr}, \alpha = \omega_0, \zeta = 1$: **amortiguamiento crítico**
- ▶ $G < G_{cr}, \alpha < \omega_0, \zeta < 1$: **subamortiguado**

Tipos de Respuesta

- Circuito Sobreamortiguado ($\alpha > \omega_0$)

$$u_n(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

- Amortiguamiento Crítico ($\alpha = \omega_0$)

$$u_n(t) = (A_1 + A_2 t) e^{st}$$

- Circuito Subamortiguado ($\alpha < \omega$)

$$u_n(t) = (B_1 \cos(\omega_d t) + B_2 \sin(\omega_d t)) e^{-\alpha t}$$

Condiciones Iniciales

Dos constantes a determinar

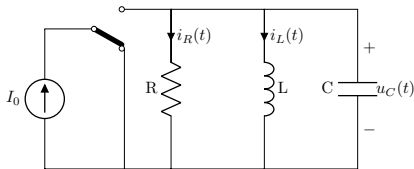
Son necesarias dos tipos de condiciones iniciales:

$$u_C(0^+) = u_C(0^-)$$
$$i_C(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} \longrightarrow \left(\frac{du_C(t)}{dt} \right)_{t=0^+} = \frac{1}{C} i_C(0^+)$$

Derivadas en el origen

Para obtener valores de las derivadas en el origen hay que resolver el circuito en $t = 0^+$ empleando las condiciones de continuidad.

Derivadas en $t = 0^+$: ejemplo RLC paralelo



$$\left(\frac{du_C(t)}{dt} \right)_{t=0^+} = \frac{1}{C} i_C(0^+)$$

$$i_C(0^+) = -i_R(0^+) - i_L(0^+)$$

$$i_R(0^+) = \frac{1}{R} u_C(0^+)$$

$$\boxed{\left(\frac{du_C(t)}{dt} \right)_{t=0^+} = -\frac{1}{C} \left(\frac{1}{R} u_C(0^+) + i_L(0^+) \right)}$$

Respuesta Completa

Las condiciones iniciales deben evaluarse teniendo en cuenta la respuesta forzada (si existe).

$$u_C(0^+) = u_n(0^+) + u_\infty(0^+) \\ \left(\frac{du_C(t)}{dt} \right)_{t=0^+} = \left(\frac{du_n(t)}{dt} \right)_{t=0^+} + \left(\frac{du_\infty(t)}{dt} \right)_{t=0^+}$$

Ejemplo de Respuesta Completa

Circuito RLC paralelo sobreamortiguado con generador de corriente DC funcionando en $t > 0$.

Respuesta Completa

$$u_c(t) = U_\infty + A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

Condiciones Iniciales

$$\begin{aligned} u_c(0^+) &= U_\infty + A_1 + A_2 \\ \left(\frac{du_c(t)}{dt} \right)_{t=0^+} &= 0 + A_1 s_1 + A_2 s_2 \end{aligned}$$