

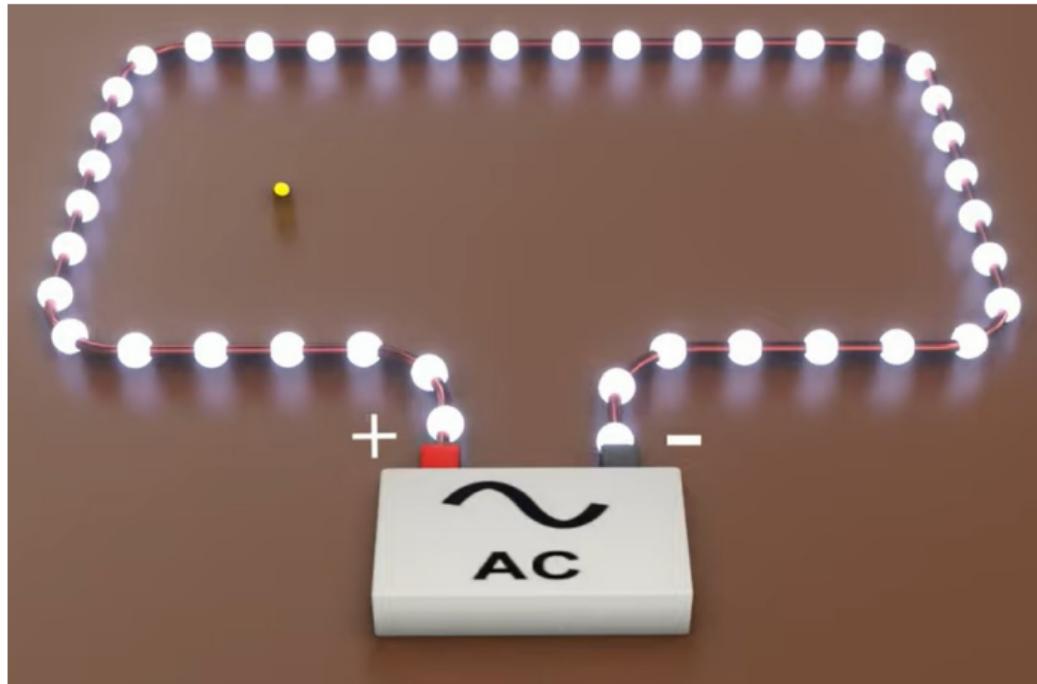
Corriente alterna senoidal

Teoría de Circuitos

Autor: Luis Badesa Bernardo

(basado en las diapositivas de Óscar Perpiñán Lamigueiro)

(clica en la imagen)



- ① Formas de onda**
- ② Onda senoidal**
- ③ Cálculo fasorial**
- ④ Respuesta de elementos pasivos a excitación senoidal**
- ⑤ Potencia en corriente alterna**

Forma de onda

- ▶ La salida de los generadores (de tensión o de corriente) es una función que puede variar con el tiempo
- ▶ La dependencia funcional $u = u(t)$ o $i = i(t)$ se denomina forma de onda
- ▶ En este Tema 2 vamos a centrarnos en **formas de onda periódicas** (su valor se repite a intervalos regulares) y, en concreto, en **señales senoidales**



Formas de onda periódicas

$$y(t) = y(t + T) = y(t + n \cdot T)$$

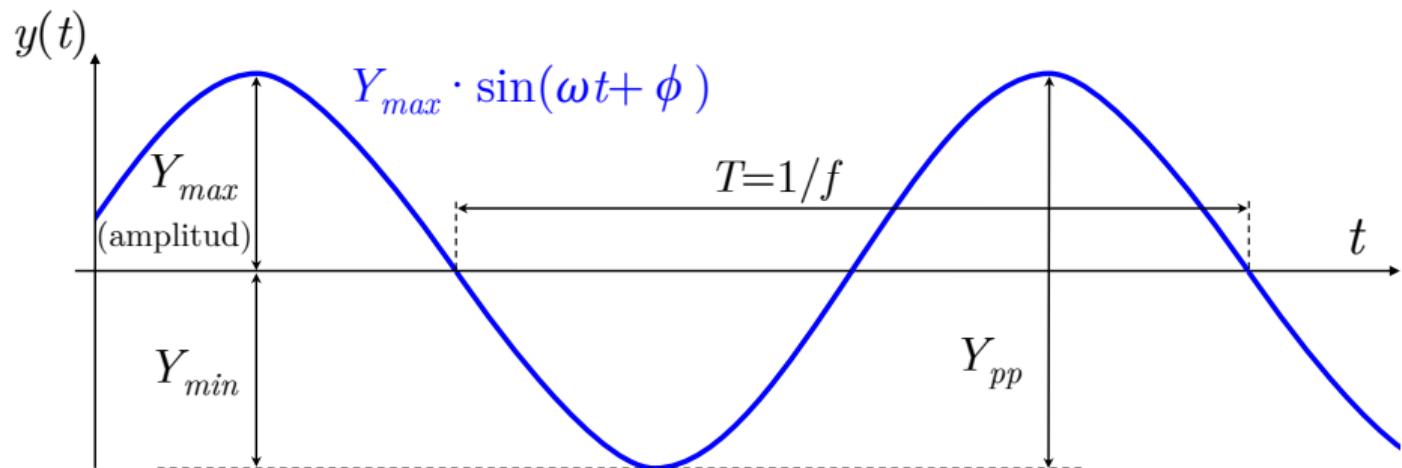
donde $n \in \mathbb{Z}$ (número entero)

- ▶ **Periodo (T)**: intervalo de tiempo a partir del cual se repite la forma de onda [s]
- ▶ **Frecuencia (f)**: número de repeticiones de la onda por unidad de tiempo [Hz]

$$f = \frac{1}{T}$$

Formas de onda periódicas

- Caso particular: **función senoidal** (señal centrada)



Formas de onda periódicas: valores característicos

- **Valor medio (Y_m)**: media aritmética de los valores instantáneos que toma la función en un periodo (o semiperiodo, o cuarto de periodo)

$$Y_m = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} y(t) dt$$

- **Valor eficaz (Y_{ef})**: raíz cuadrada de la media de los cuadrados de los valores que toma la función en un periodo

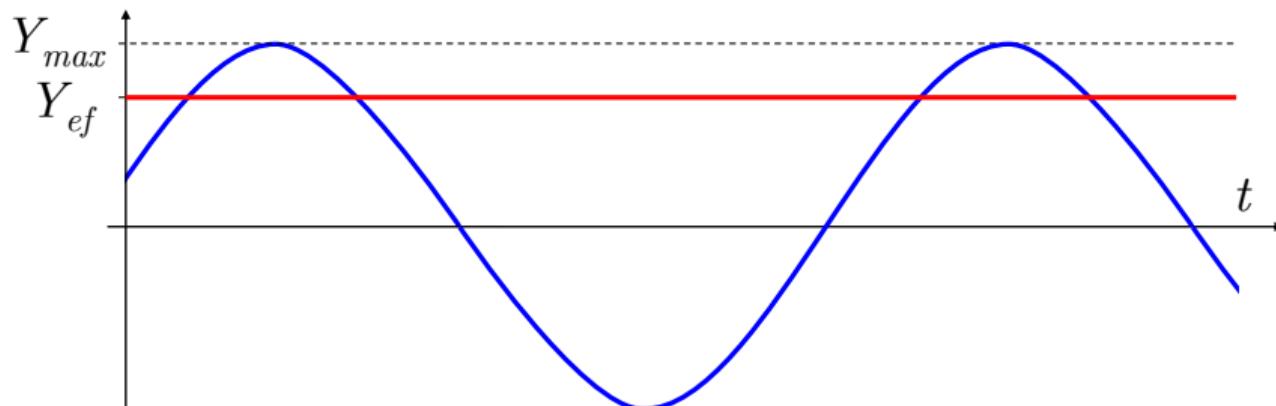
$$Y_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_a^{a+T} y^2(t) dt}$$

También denominado “valor RMS”, del inglés *root mean square*

El valor eficaz es de especial interés en teoría de circuitos para **cálculos relacionados con la potencia**, como veremos más adelante

Formas de onda periódicas: valor eficaz

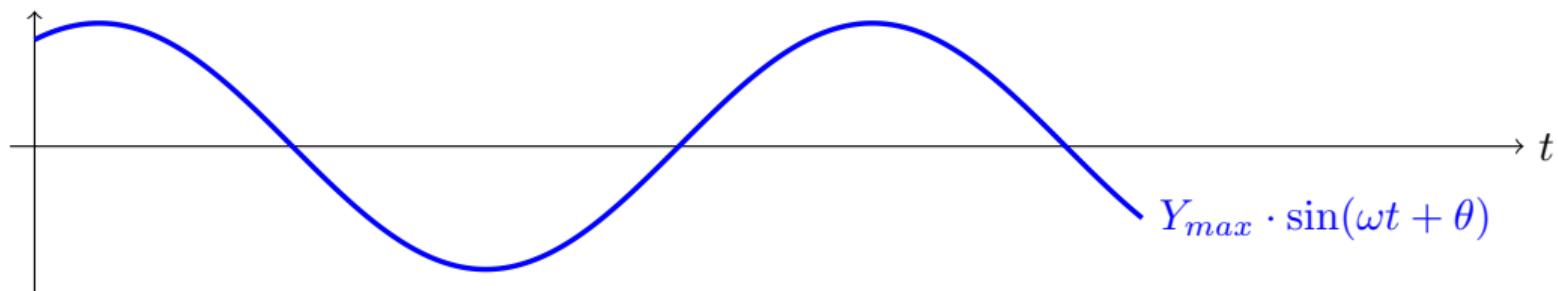
- ▶ Caso particular: valor eficaz de una **onda senoidal**



- ▶ ¿Por qué usamos el valor eficaz en corriente alterna? Porque establece un **paralelismo con la corriente continua**, que nos permitirá simplificar cálculos:
El valor eficaz es igual al valor de una corriente continua constante que, al circular por una determinada resistencia, **produciría la misma dissipación de potencia** que la corriente alterna que estamos considerando

- 1** Formas de onda
- 2** Onda senoidal
- 3** Cálculo fasorial
- 4** Respuesta de elementos pasivos a excitación senoidal
- 5** Potencia en corriente alterna

Onda senoidal, definición



$$y(t) = Y_o \cdot \sin(\omega \cdot t + \theta)$$

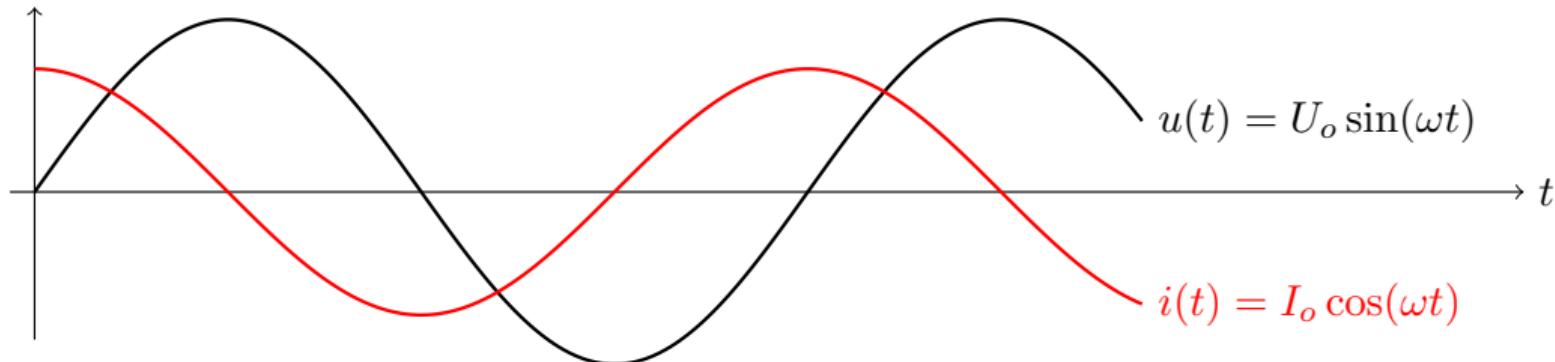
- ▶ Y_{max} o Y_o : valor máximo de la onda
- ▶ T : periodo de la onda (segundos)
- ▶ θ : fase (radianes o grados). También suelen usarse las letras griegas ϕ y φ
- ▶ $\omega = \frac{2\pi}{T}$: pulsación (rad/s)
- ▶ $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T}$: frecuencia (Hz)

Fase



- ▶ Es el argumento de la función senoidal para $t = 0$
- ▶ Tomando una onda como referencia, si la **fase de otra onda es de 0°** , está **en fase** con la de referencia
- ▶ Si la **fase es positiva**, la onda **adelanta** a la referencia
- ▶ Si la **fase es negativa**, la onda **retrasa** a la referencia

Señales en cuadratura



- ▶ Cuando el **desfase entre dos señales es de 90°** ($\theta_I - \theta_U = \pi/2$), se dice que están en **cuadratura**
- ▶ El paso por cero de una señal coincide con el paso por el máximo/mínimo de la otra señal

Valor medio y valor eficaz de una onda senoidal

Valor medio

En un periodo:

$$Y_m = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T Y_o \cdot \sin(\omega \cdot t + \theta) dt = \boxed{0}$$

En un semiperíodo positivo ($\theta = 0^\circ$):

$$Y_m = \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} Y_{max} \cdot \sin(\omega \cdot t) dt = \frac{2 \cdot Y_{max}}{\pi} \approx 0,637 \cdot Y_{max}$$

Valor eficaz

$$Y = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T y^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T [Y_{max} \cdot \sin(\omega \cdot t + \theta)]^2 dt} = \boxed{\frac{Y_{max}}{\sqrt{2}}}$$

Interudio: *Alternating Current ⚡ Direct Current*



- ① Formas de onda**
- ② Onda senoidal**
- ③ Cálculo fasorial**
- ④ Respuesta de elementos pasivos a excitación senoidal**
- ⑤ Potencia en corriente alterna**

Recordatorio de 1LK

- ▶ La **1LK** es el principio de **conservación de la carga** aplicado a los circuitos eléctricos:

La suma de las corrientes que llegan a un nudo es igual a la suma de las que salen

$$\sum_{j=1}^n i_j(t) = 0$$

La conservación de la carga aplica a cada instante, luego 1LK también **aplica en corriente alterna**

Por lo tanto, vamos a sumar corrientes senoidales a menudo en este tema, para lo cual será muy útil el **cálculo fasorial**

Recordatorio de 2LK

- La **2LK** es el principio de **conservación de la energía** aplicado a los circuitos:

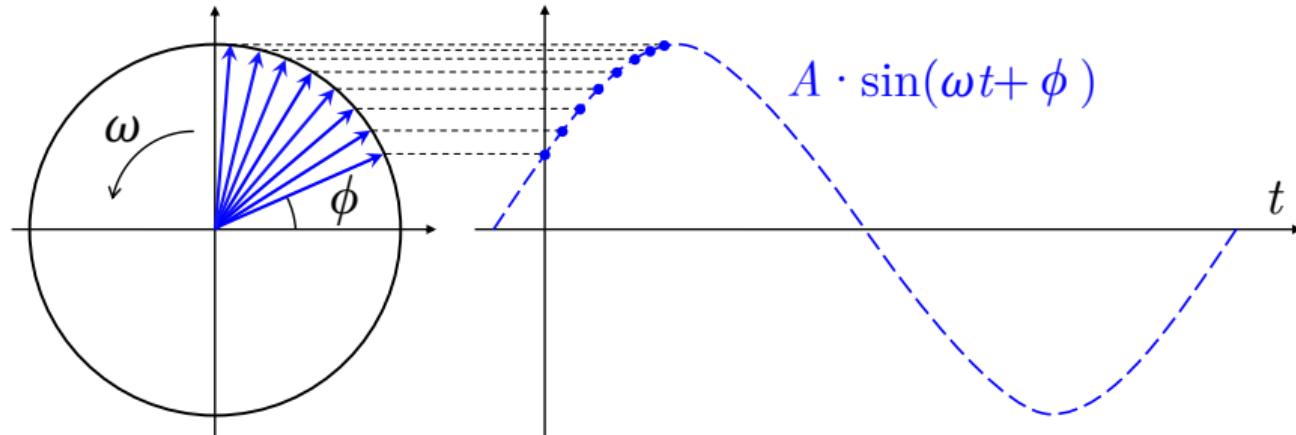
La suma (con signo) de las tensiones a lo largo de un camino cerrado es cero

$$\sum_{j=1}^m u_j(t) = 0$$

La conservación de la energía aplica a cada instante → 2LK también **aplica en corriente alterna**

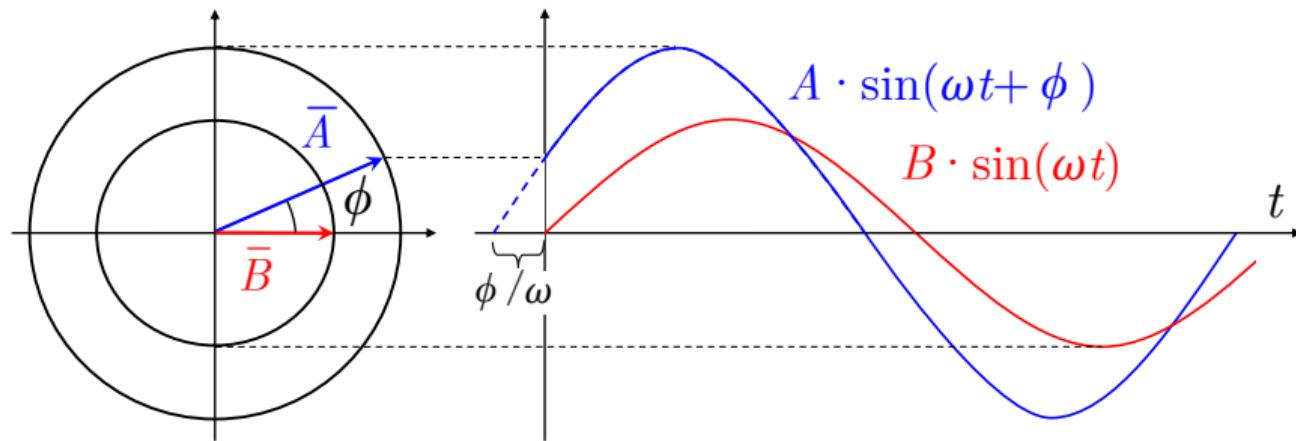
Vamos a sumar tensiones senoidales a menudo en este tema → será muy útil el **cálculo fasorial**

Representación fasorial



- Un **fasor** es un artefacto matemático **útil para simplificar cálculos** con señales senoidales
- El término “fasor” viene del inglés *phasor*, forma corta de *phase vector* (vector de fase)
- Al **rotar en sentido antihorario** con velocidad angular ω , la proyección del fasor sobre el eje vertical es igual al valor de la señal senoidal en cada instante .

Representación fasorial

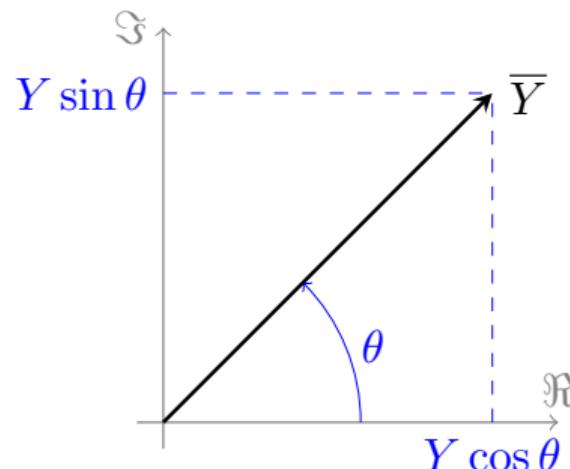


- ▶ Una señal senoidal **se representa mediante un único fasor**
- ▶ Para definir el fasor correspondiente a cada señal, tomamos como origen de fases una de las señales presentes en el circuito (e.g., la tensión en bornes de una fuente)

Representación fasorial

- Un fasor se representa matemáticamente mediante un **número complejo** (**repaso** de complejos y trigonometría):

$$\overline{Y} = \underbrace{Y_{ef} \angle \theta}_{\text{forma polar}} = \underbrace{Y_{ef} \cdot [\cos(\theta) + j \cdot \sin(\theta)]}_{\text{forma binómica}} \stackrel{\text{fórmula de Euler}}{\downarrow} \underbrace{Y_{ef} \cdot e^{j\theta}}_{\text{forma exponencial}}$$



Usamos **j para la constante imaginaria**, en lugar de i , ya que en el análisis de circuitos i se usa para intensidad

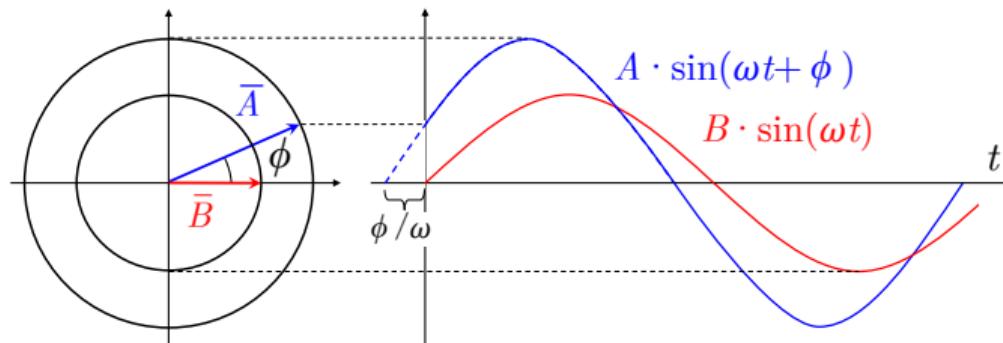
- El **argumento** del fasor es la **fase** de la onda. El **módulo** es el **valor eficaz** de la onda, **NO su amplitud**

Representación fasorial

- El **argumento** del fasor es la **fase** de la onda. El **módulo** es el valor eficaz de la onda, **NO su amplitud**

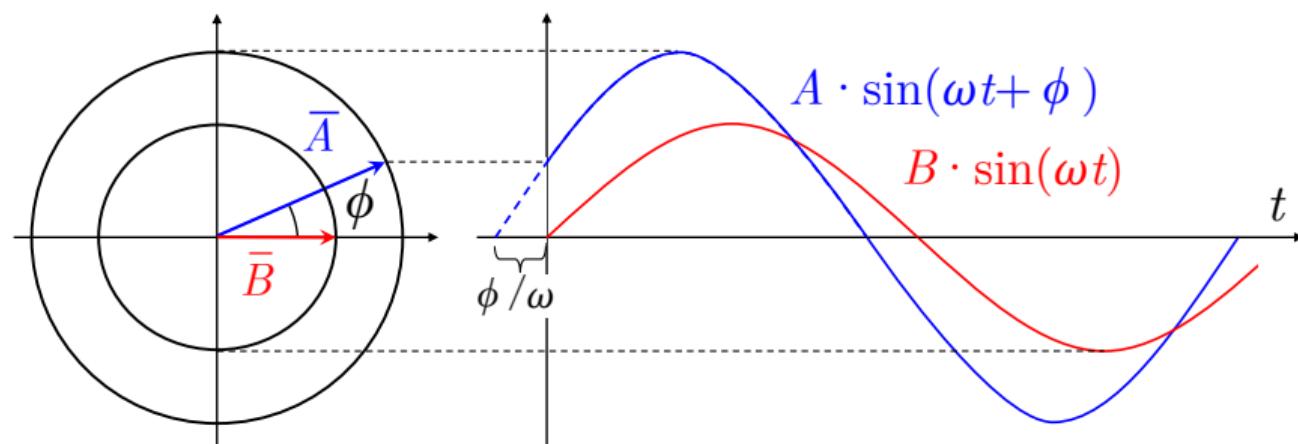
Se toma el valor eficaz por **conveniencia** a la hora de **calcular la potencia producida/consumida** en circuitos de corriente alterna, directamente operando con fasores

Nota: en varios gráficos de estas diapositivas, el módulo de los fasores corresponde a la amplitud de la onda, y no a su valor eficaz
Esto se debe simplemente a claridad en la representación gráfica

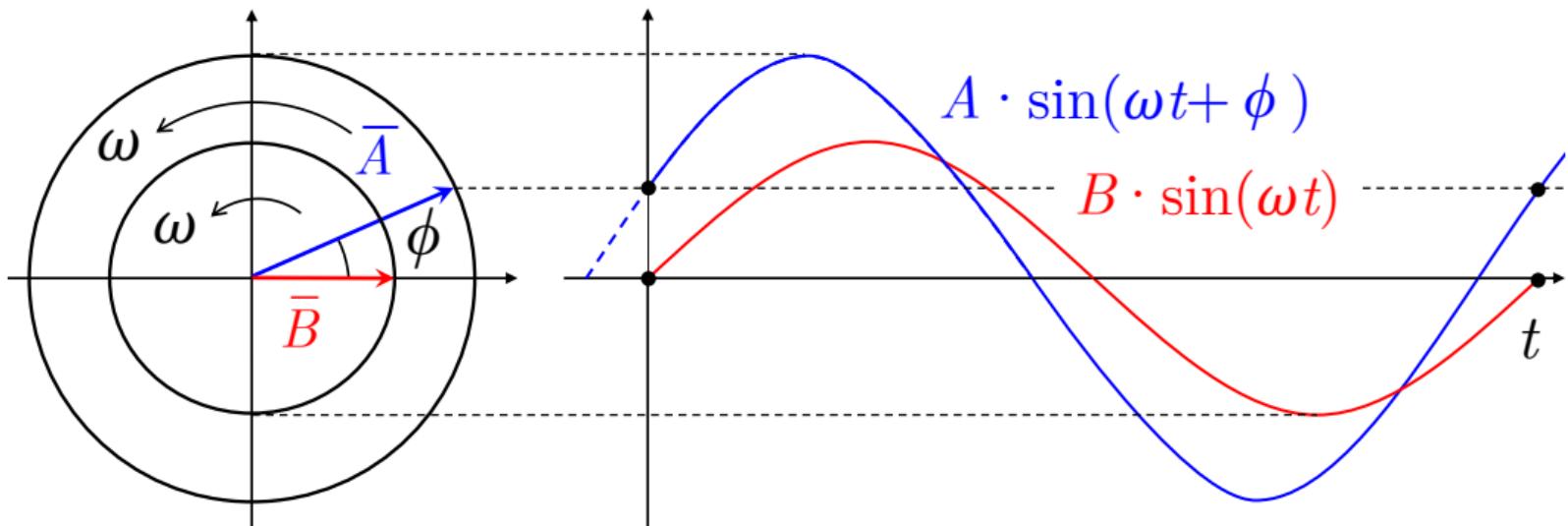


Representación fasorial

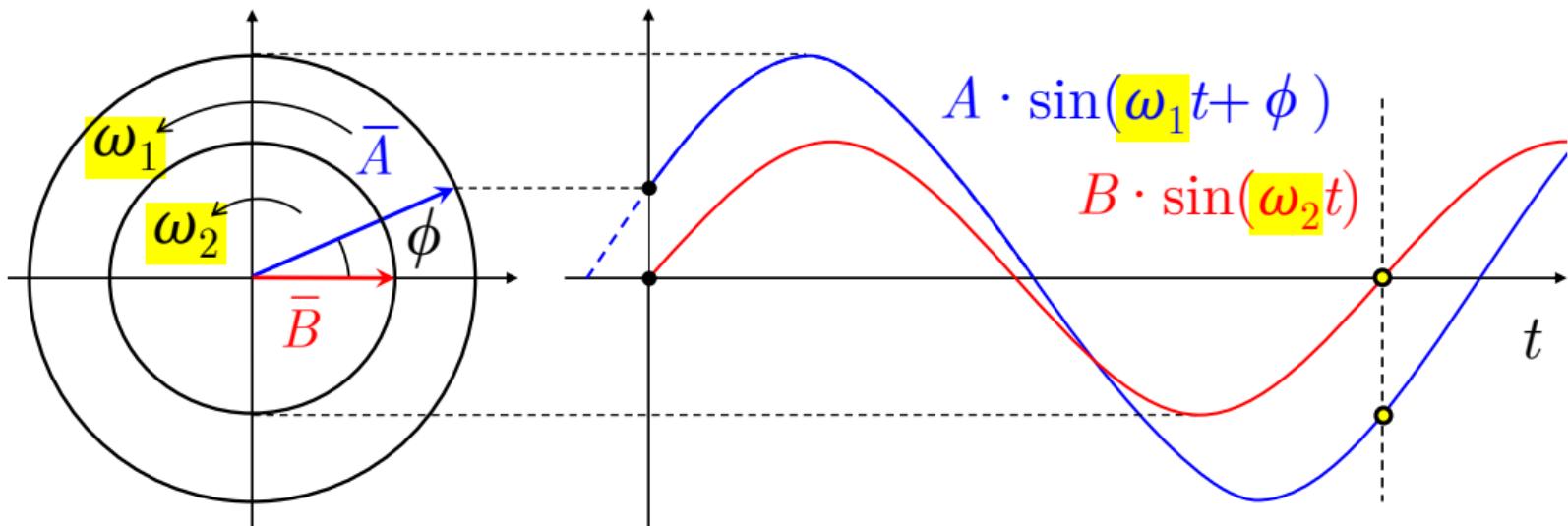
- ▶ Los fasores representan las **relaciones** entre los **valores eficaces** y las **fases** de las distintas señales presentes en el circuito, siempre asumiendo una frecuencia determinada
- ▶ Por lo tanto, las operaciones con fasores solo son **válidas** entre señales de la misma frecuencia



Importante: el cálculo fasorial es válido para señales de igual ω



...pero NO para señales de distinta frecuencia ($\omega_1 \neq \omega_2$)



Cálculo fasorial: propiedades de la función senoidal

Las razones por las que podemos usar cálculo fasorial para **simplificar operaciones entre señales senoidales** son dos propiedades importantes de la función senoidal:

►
$$A_1 \cdot \sin(\omega t + \theta_1) + A_2 \cdot \sin(\omega t + \theta_2) = A_3 \cdot \sin(\omega t + \theta_3)$$

Para sumar señales senoidales, podemos simplemente **sumar sus fasores correspondientes** (recuerda que 1LK y 2LK implican sumas)

►
$$\frac{d^n \sin(\omega t + \theta_1)}{dt^n} = C_2 \sin(\omega t + \theta_2) , \quad \int \cdots \int \sin(\omega t + \theta_1) dt \cdots dt = C_3 \sin(\omega t + \theta_3) + k$$

Las **tensiones** y **corrientes** en **bobinas** y **condensadores** (cuyas ecuaciones de definición contienen derivadas e integrales de estas magnitudes), pueden expresarse mediante **fasores**

Operaciones con fasores

Suma gráfica de dos fasores \bar{Y}_1 e \bar{Y}_2 , y sus correspondientes señales temporales:
(clica en la imagen)

Operaciones con fasores

- Un fasor **captura la información clave** de una **onda senoidal** para los propósitos del análisis de circuitos:
 - Su valor eficaz
 - Y su fase
- Nos permite **operar** con ondas **senoidales** como si fueran **números complejos**

$$\bar{Y}_1 = \underbrace{Y_{ef_1} \cos(\theta_1)}_{a_1} + j \underbrace{Y_{ef_1} \sin(\theta_1)}_{b_1} = Y_{ef_1} \angle \theta_1$$

$$\bar{Y}_2 = \underbrace{Y_{ef_2} \cos(\theta_2)}_{a_2} + j \underbrace{Y_{ef_2} \sin(\theta_2)}_{b_2} = Y_{ef_2} \angle \theta_2$$

Operaciones con fasores

$$\bar{Y}_1 = \underbrace{Y_{ef_1} \cos(\theta_1)}_{a_1} + j \underbrace{Y_{ef_1} \sin(\theta_1)}_{b_1} = Y_{ef_1} \angle \theta_1$$

$$\bar{Y}_2 = \underbrace{Y_{ef_2} \cos(\theta_2)}_{a_2} + j \underbrace{Y_{ef_2} \sin(\theta_2)}_{b_2} = Y_{ef_2} \angle \theta_2$$

Forma binómica

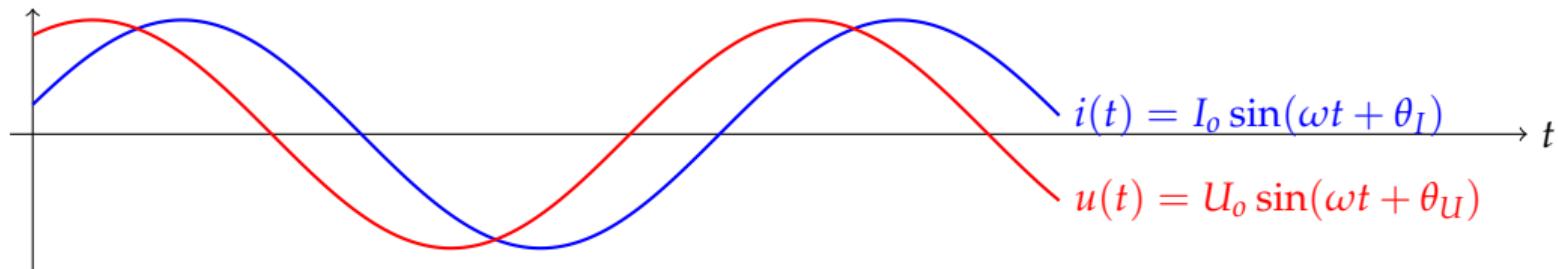
- ▶ Suma: $\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$
- ▶ Resta: $\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2 = (a_1 - a_2) + j(b_1 - b_2)$

Forma polar

- ▶ Multiplicación: $\bar{Y}_1 \cdot \bar{Y}_2 = (Y_{ef_1} \cdot Y_{ef_2}) \angle \theta_1 + \theta_2$
- ▶ División: $\frac{\bar{Y}_1}{\bar{Y}_2} = \frac{Y_{ef_1}}{Y_{ef_2}} \angle \theta_1 - \theta_2$

- ① Formas de onda
- ② Onda senoidal
- ③ Cálculo fasorial
- ④ Respuesta de elementos pasivos a excitación senoidal
- ⑤ Potencia en corriente alterna

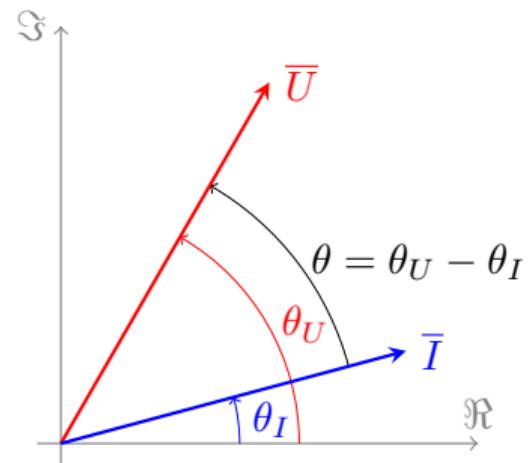
Impedancia: relación entre fasores de tensión y corriente



$$\bar{U} = \bar{Z} \cdot \bar{I} \quad (\text{equiv. a ley de Ohm})$$

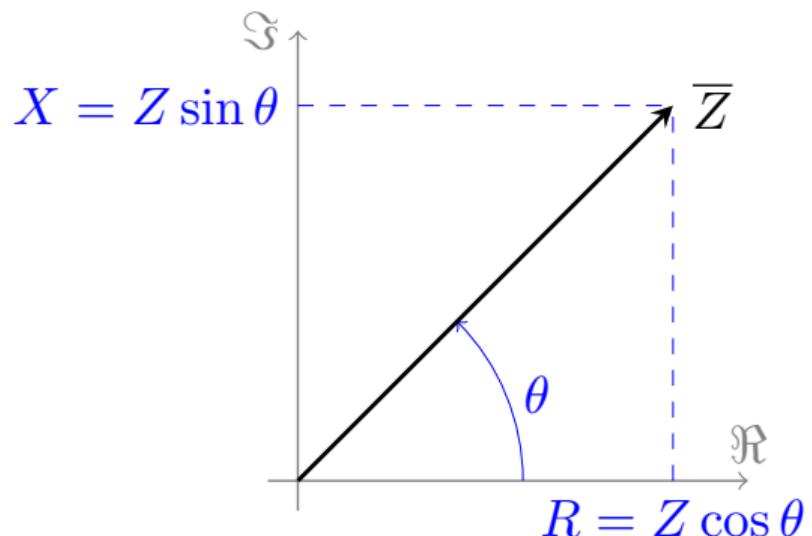
$$\bar{Z} = \frac{\bar{U}}{\bar{I}}$$

$$\boxed{\bar{Z} = \frac{U}{I} / \underline{\theta_U - \theta_I} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} Z = \frac{U}{I} \\ \theta = \theta_U - \theta_I \end{cases}}$$



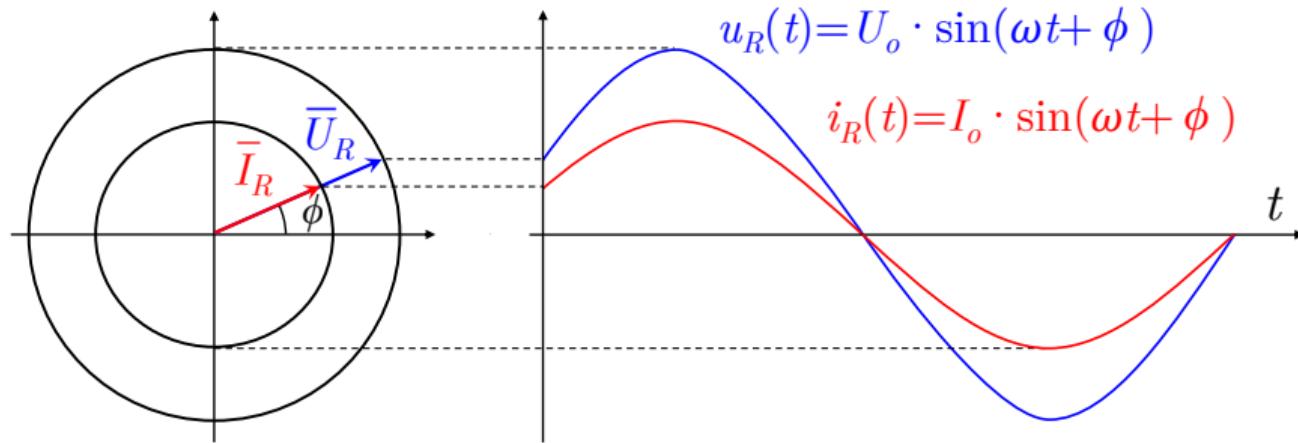
Impedancia genérica

$$\bar{Z} = Z \cdot \cos(\theta) + j Z \cdot \sin(\theta) = \underbrace{R}_{\text{resistencia}} + j \underbrace{X}_{\text{reactancia}}$$



Circuito resistivo

Un circuito resistivo no introduce desfase entre señales (**tensión y corriente en fase**)



ley de Ohm

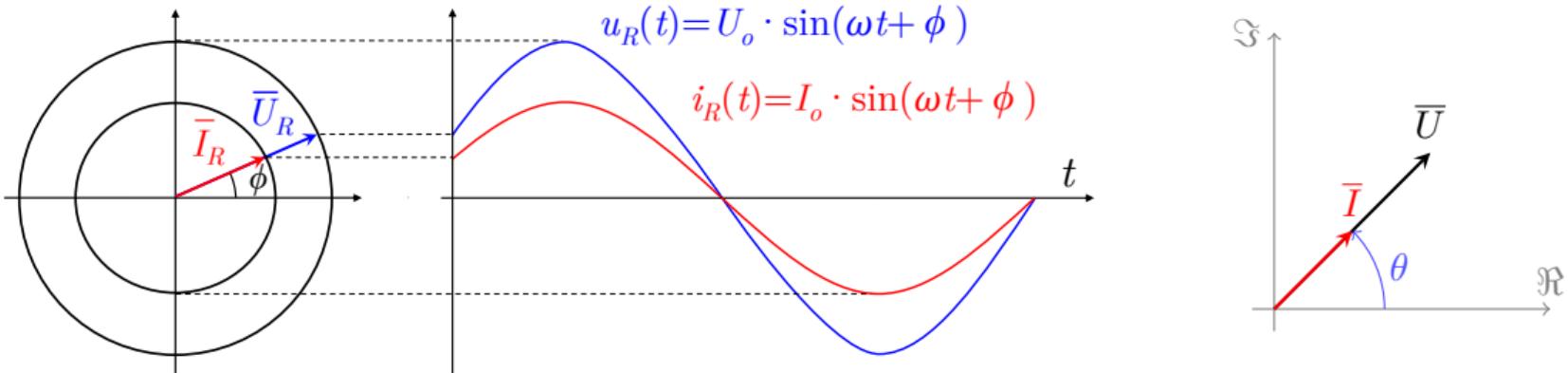
$$i(t) = I\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \theta_I)$$

$$\downarrow$$
$$u(t) = R \cdot i(t) = R \cdot I\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \theta_I) = U\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \theta_I)$$

(a partir de ahora, la notación U e I se refiere directamente a **valores eficaces**)

Circuito resistivo

Un circuito resistivo no introduce desfase entre señales (**tensión y corriente en fase**)



$$\bar{Z}_R = \frac{\bar{U}_R}{\bar{I}_R} = \frac{U}{I} \angle \theta_U - \theta_I = R \angle 0^\circ \quad \rightarrow \quad \boxed{\bar{Z}_R = R + j0 = R}$$

Carga y descarga de una bobina

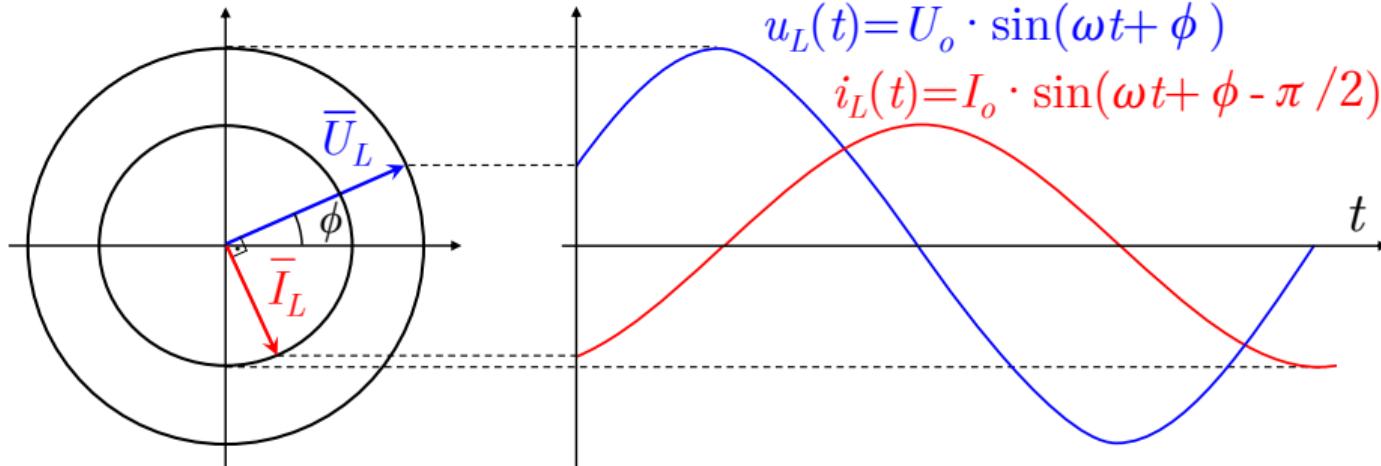
- La bobina **almacena** energía magnética cuando circula por ella una corriente

$$E_L = \frac{1}{2} \cdot L \cdot i_L^2(t)$$

Cuando el módulo de la corriente que circula por la bobina disminuye, **devuelve su energía almacenada** al circuito **(clica en la imagen)**

Circuito inductivo puro

Un circuito inductivo puro genera **señales en cuadratura** y retrasa la corriente.



ley de
Faraday

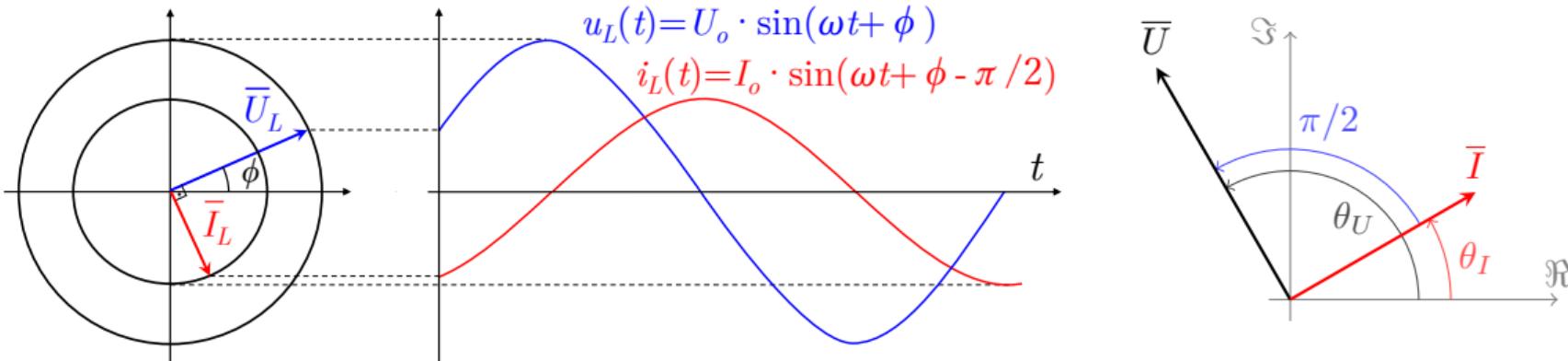
$$i(t) = I \sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \theta_I)$$

$$u(t) \stackrel{\downarrow}{=} L \cdot \frac{di(t)}{dt} = \omega L \cdot I \sqrt{2} \cdot \cos(\omega t + \theta_I) = U \sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \theta_I + \pi/2)$$

La bobina se carga cuando
 $\frac{d|i_L|}{dt} > 0$, y descarga cuando $\frac{d|i_L|}{dt} < 0$

Circuito inductivo puro

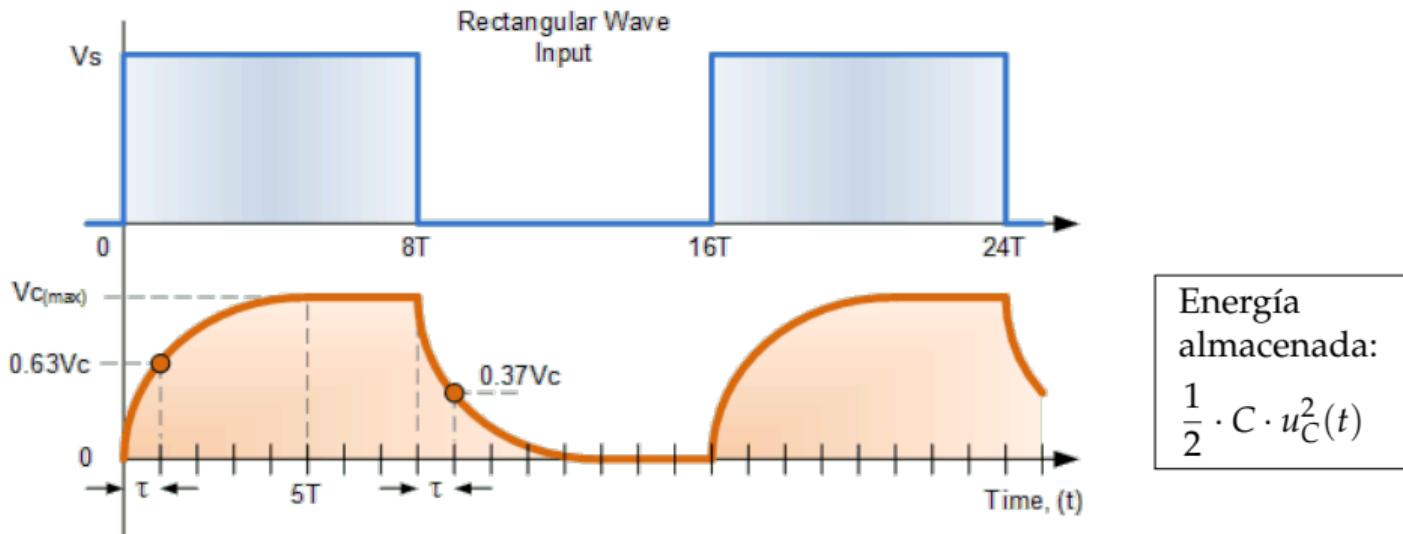
Un circuito inductivo puro genera **señales en cuadratura** y retrasa la corriente



$$\bar{Z}_L = \frac{\bar{U}_L}{\bar{I}_L} = \frac{U}{I} / \underline{\theta_U - \theta_I} = \underline{\omega L / 90^\circ} \quad \rightarrow \quad \boxed{\bar{Z}_L = j\omega L = \underline{\omega L / 90^\circ}}$$

Carga y descarga de un condensador

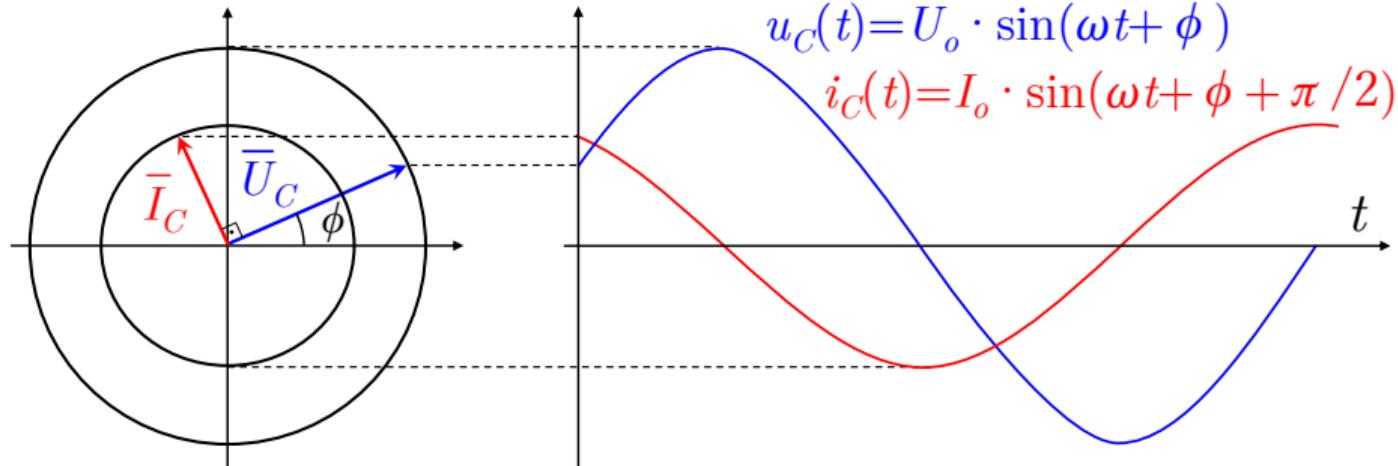
- ▶ Si se excita un condensador con pulsos rectangulares de tensión, se **almacena energía eléctrica**, que luego se **devuelve al circuito** en los semiciclos sin excitación



- ▶ Con **excitación alterna senoidal**, el condensador también se carga y descarga
 - ▶ Sin embargo, la tensión en el condensador nunca llega a estabilizarse, porque la excitación senoidal cambia todo el rato (siguiente diapositiva)

Circuito capacitivo puro

Un circuito capacitivo puro genera **señales en cuadratura** y adelanta la corriente.



definición
de condensador

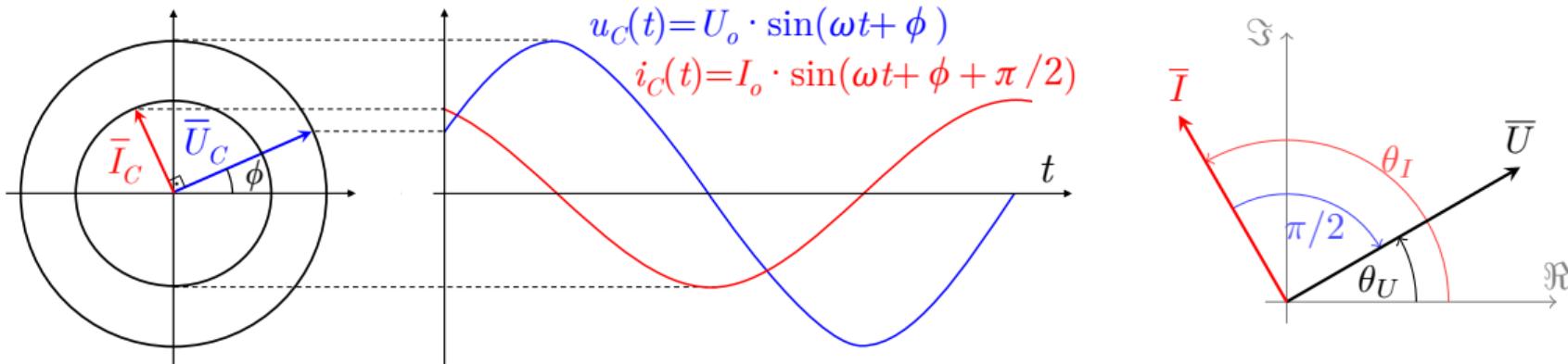
$$i(t) = I \sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \theta_I)$$

El condensador se carga cuando $\frac{d|u_C|}{dt} > 0$, y descarga cuando $\frac{d|u_C|}{dt} < 0$

$$u(t) \stackrel{\downarrow}{=} \frac{1}{C} \cdot \int_{-\infty}^t i(\tau) \cdot d\tau = \frac{I}{\omega C} \sqrt{2} \cdot [-\cos(\omega t + \theta_I)] = U \sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \theta_I - \pi/2)$$

Circuito capacitivo puro

Un circuito capacitivo puro genera **señales en cuadratura** y adelanta la corriente



$$\bar{Z}_C = \frac{\bar{U}_C}{\bar{I}_C} = \frac{U}{I} / \underline{\theta_U - \theta_I} = \frac{1}{\omega C} / \underline{-90^\circ} \quad \rightarrow$$

$$\boxed{\bar{Z}_C = \frac{-j}{\omega C} = \frac{1}{\omega C} / \underline{-90^\circ}}$$

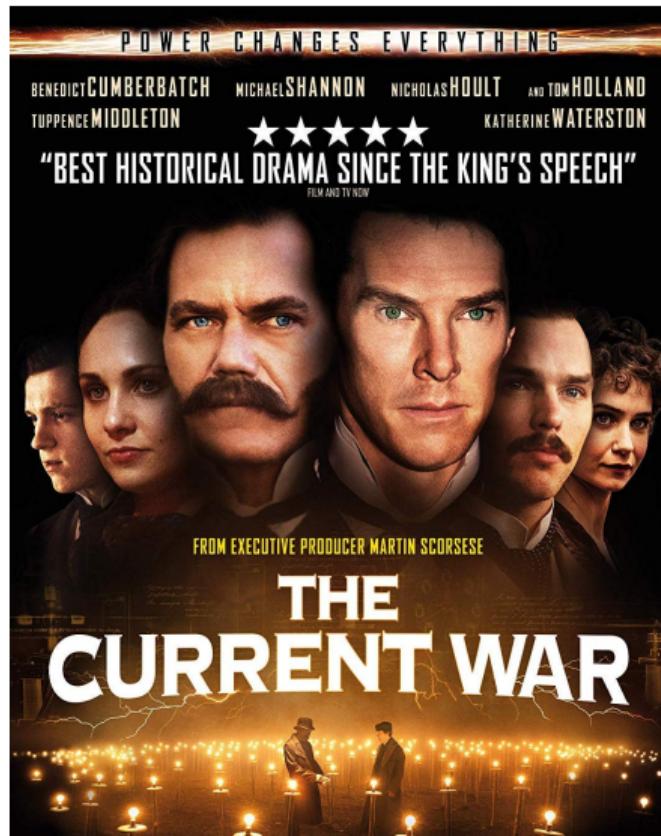
Resumen

Elemento	Impedancia	Módulo	Ángulo
Resistencia	R	R	0°
Bobina ideal	$j\omega L$	ωL	90°
Condensador	$1/(j\omega C)$	$1/(\omega C)$	-90°

- ▶ La impedancia de una **bobina ideal** $X_L = \omega L$ se denomina “reactancia inductiva”
- ▶ La impedancia de un **condensador** $X_C = \frac{1}{\omega C}$ se denomina “reactancia capacitiva”

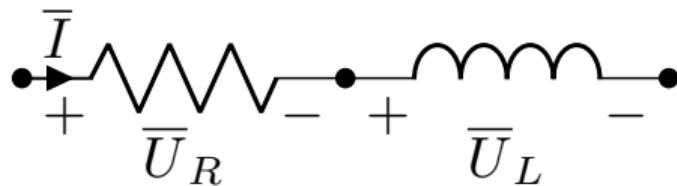
Interludio: película relacionada con la asignatura

La guerra de las corrientes, 2017



Circuito RL (inductivo con pérdidas)

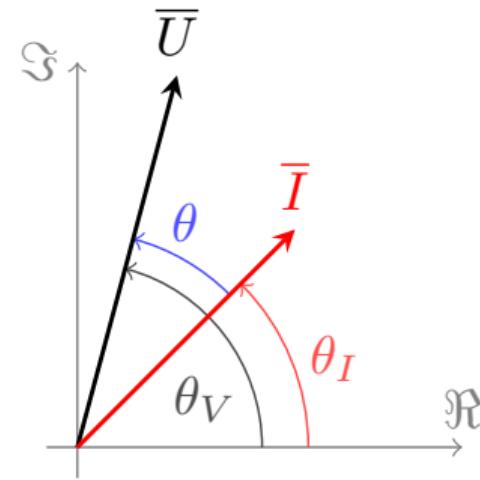
Recordatorio: por elementos asociados en **serie**, circula la **misma corriente**



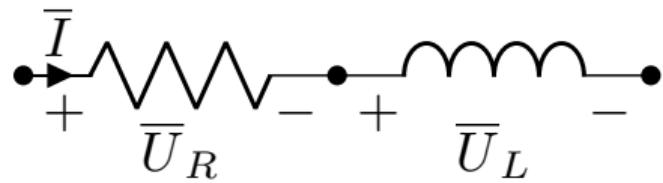
$$\bar{U}_{\text{Tot}} \stackrel{2\text{LK}}{\downarrow} = \bar{U}_R + \bar{U}_L \quad \leftarrow$$

Importante: sumar módulos en lugar de fasores es un **error grave**

$$= R \cdot \bar{I} + \underbrace{j\omega L}_{j\omega L} \cdot \bar{I} = \underbrace{(R + j\omega L)}_{\bar{Z}_{eq}} \bar{I}$$

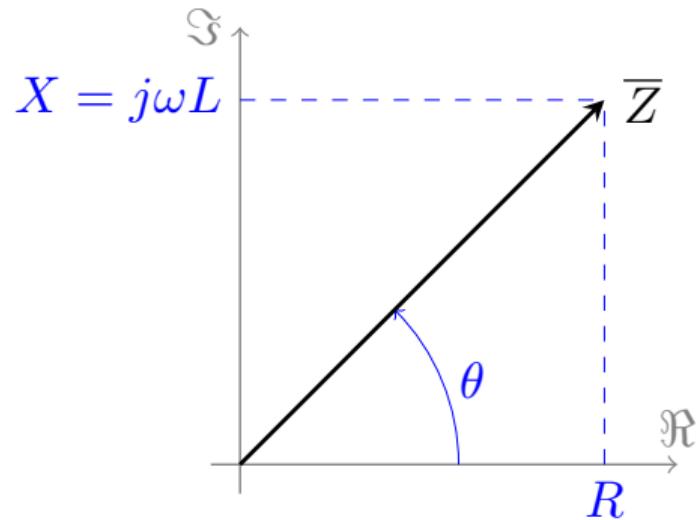


Circuito RL (inductivo con pérdidas)

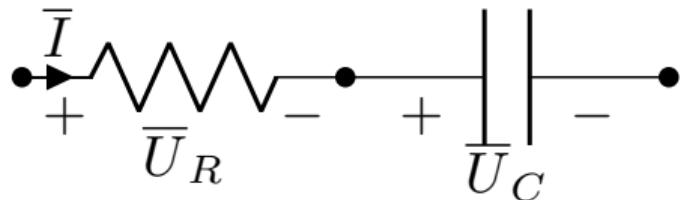


$$\bar{Z}_{eq} = R + j\omega L \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta > 0}$$

$$\bar{Z}_{eq} \begin{cases} |Z_{eq}| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \\ \theta = \text{atan}\left(\frac{\omega L}{R}\right) \end{cases}$$



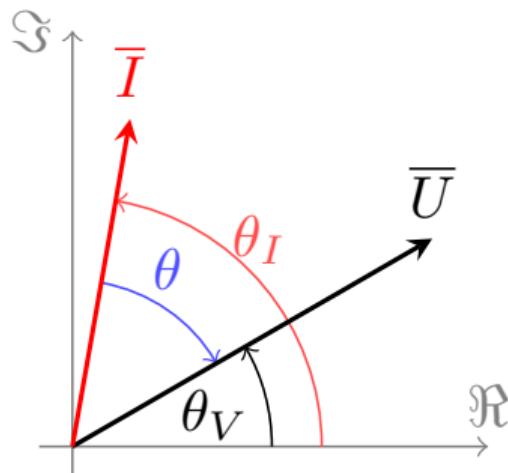
Circuito RC (capacitivo con pérdidas)



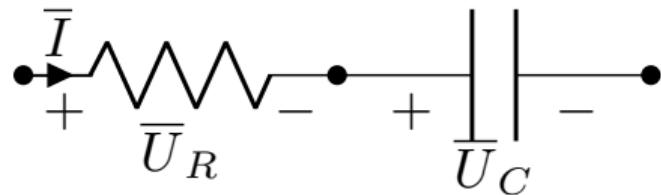
$$\overline{U}_{\text{Tot}} \stackrel{2\text{LK}}{\downarrow} = \overline{U}_R + \overline{U}_C \quad \leftarrow$$

Importante: sumar módulos en lugar de fasores es un **error grave**

$$= R \cdot \bar{I} + \underbrace{\bar{X}_C \cdot \bar{I}}_{\frac{1}{j\omega C}} = \left(\underbrace{R - j \frac{1}{\omega C}}_{\bar{Z}_{eq}} \right) \bar{I}$$

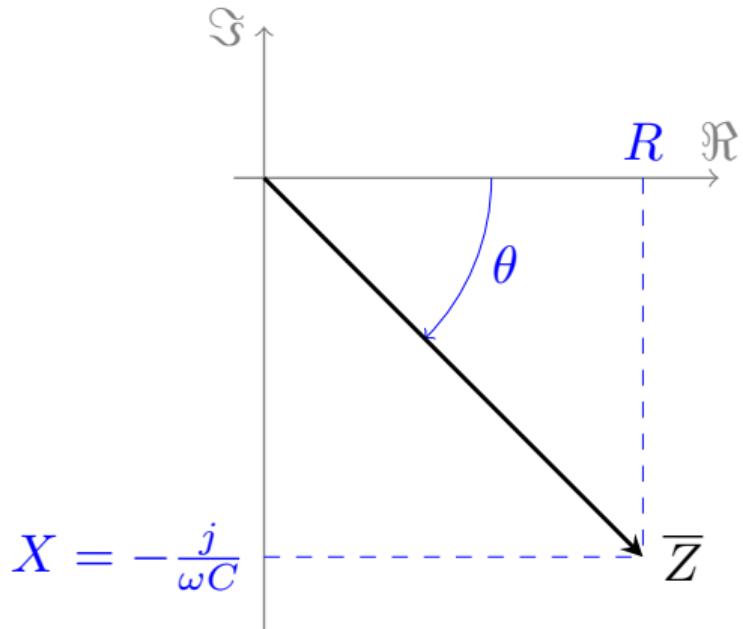


Circuito RC (capacitivo con pérdidas)



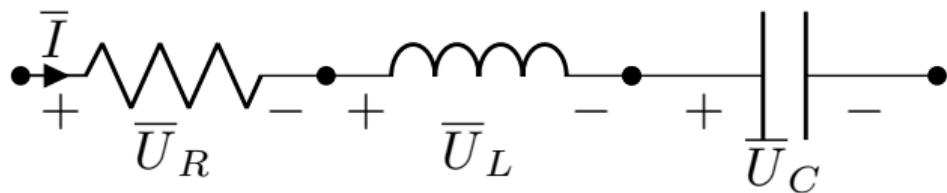
$$\bar{Z}_{eq} = R - j \frac{1}{\omega C} \Rightarrow \boxed{\theta < 0}$$

$$\bar{Z}_{eq} \begin{cases} |Z_{eq}| = \sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}} \\ \theta = \text{atan} \left(\frac{-\frac{1}{\omega C}}{R} \right) \end{cases}$$

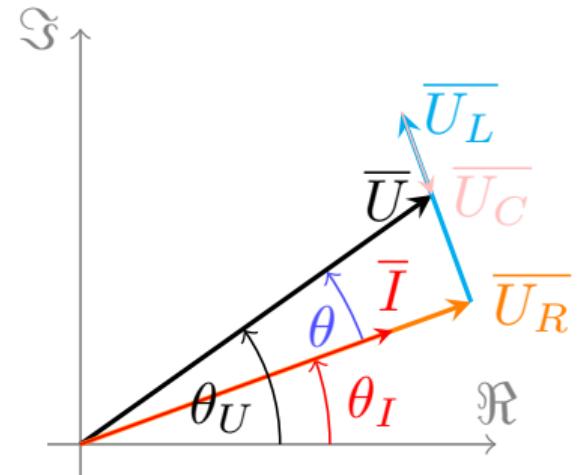


$$X = -\frac{j}{\omega C}$$

Circuito RLC serie

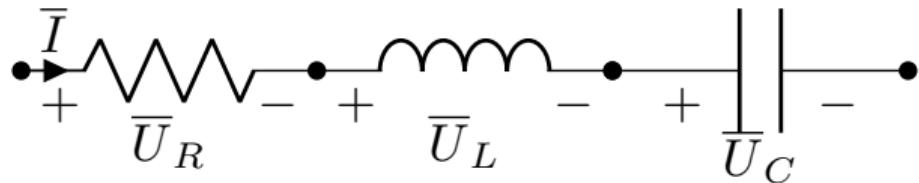


$$\overline{U} \stackrel{2LK}{=} \overline{U}_R + \overline{U}_L + \overline{U}_C = \underbrace{\left(R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C} \right)}_{Z_{eq}} \bar{I}$$



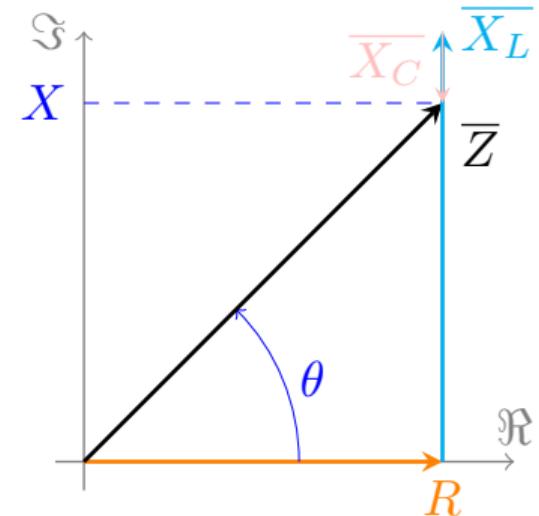
(ejemplo, en el que $X_L > X_C$)

Circuito RLC serie



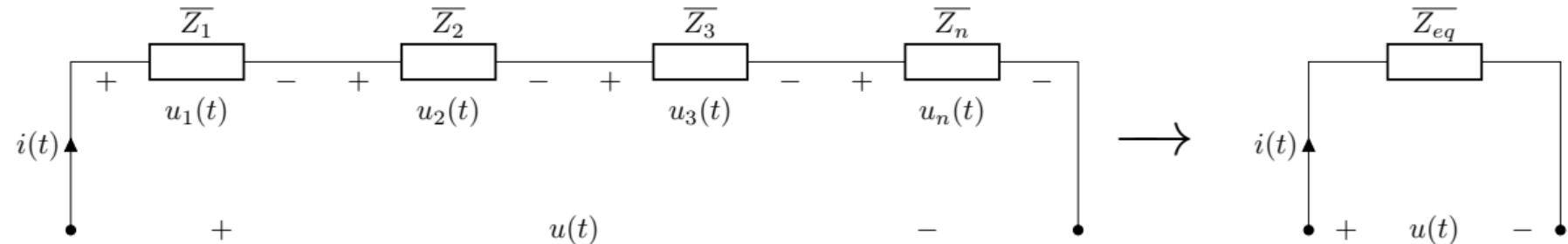
$$\bar{Z}_{eq} = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$$

- $\theta > 0 \Rightarrow \omega L > \frac{1}{\omega C}$: carácter **inductivo**
- $\theta < 0 \Rightarrow \omega L < \frac{1}{\omega C}$: carácter **capacitivo**
- $\theta = 0 \Rightarrow \omega L = \frac{1}{\omega C}$: carácter **resistivo (resonancia)**



(ejemplo, en el que $X_L > X_C$)

Circuito serie general



2LK

$$\overline{U} \stackrel{\downarrow}{=} \overline{U}_1 + \overline{U}_2 + \dots + \overline{U}_n = \bar{I} \cdot (\overline{Z}_1 + \overline{Z}_2 + \dots + \overline{Z}_n) = \bar{I} \cdot \overline{Z}_{eq}$$

$$\overline{Z}_{eq} = \overline{Z}_1 + \overline{Z}_2 + \dots + \overline{Z}_n \implies \boxed{\overline{Z}_{eq} = \sum_{i=1}^n \overline{Z}_i}$$

Ejercicio

Un circuito serie formado por $R = 10 \Omega$, $L = 20 \text{ mH}$ y $C = 100 \mu\text{F}$ es alimentado con una tensión $u(t) = 200 \cdot \sin\left(1000t + \frac{\pi}{4}\right) \text{ V}$

Calcular \bar{I} , $u_R(t)$, $u_L(t)$ y $u_C(t)$, y dibujar el diagrama fasorial de tensiones y corrientes

Solución: $\bar{I} = 10/0^\circ \text{ A}$

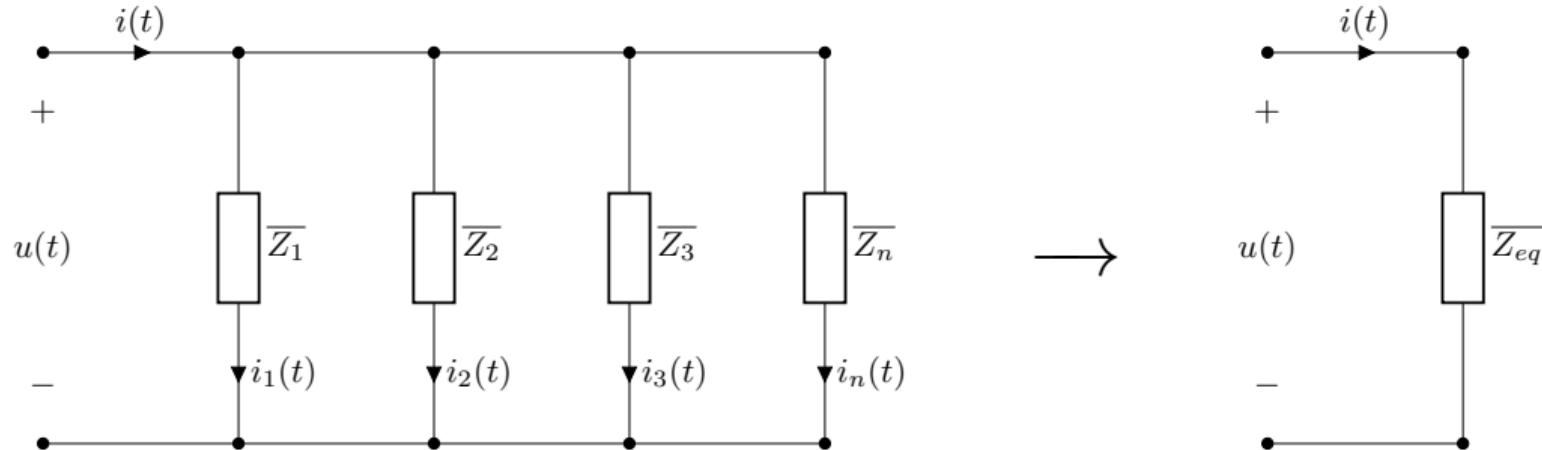
$$u_R(t) = 100\sqrt{2} \cdot \sin(1000t) \text{ V}$$

$$u_L(t) = 200\sqrt{2} \cdot \sin\left(1000t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ V}$$

$$u_C(t) = 100\sqrt{2} \cdot \sin\left(1000t - \frac{\pi}{2}\right) \text{ V}$$

Circuito paralelo general

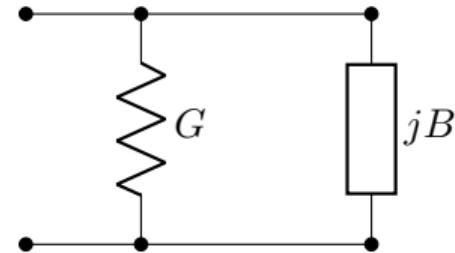
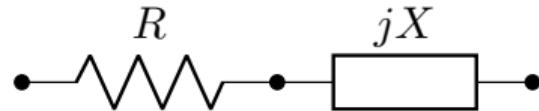
Recordatorio: los elementos asociados en **paralelo** están sometidos a la **misma tensión**



$$\bar{I} = \underbrace{\bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \dots + \bar{I}_n}_{\uparrow} = \bar{U} \cdot \left(\frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_2} + \dots + \frac{1}{\bar{Z}_n} \right) = \frac{\bar{U}}{\bar{Z}_{eq}}$$

$$1\text{LK} \quad \frac{1}{\bar{Z}_{eq}} = \frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_2} + \dots + \frac{1}{\bar{Z}_n} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{\bar{Z}_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\bar{Z}_i}}$$

Impedancia y admitancia



$$\bar{U} = \bar{Z} \cdot \bar{I}$$

$$\bar{Z} = R + jX$$

$$\bar{I} = \bar{Y} \cdot \bar{U}$$

$$\bar{Y} = G + jB$$

$$\boxed{\bar{Y} = \frac{1}{\bar{Z}} \rightarrow \begin{cases} |\bar{Y}| = \frac{1}{|\bar{Z}|} \\ \theta_Y = -\theta_Z \end{cases}}$$

Admitancia: facilidad que ofrece un circuito al paso de la corriente alterna

- ① Formas de onda**
- ② Onda senoidal**
- ③ Cálculo fasorial**
- ④ Respuesta de elementos pasivos a excitación senoidal**
- ⑤ Potencia en corriente alterna**

Potencia en CA, expresión general

Tomemos la tensión como referencia de fases

Sin pérdida de generalidad, asumamos que el ángulo de la impedancia equivalente de un circuito es $\theta > 0$ (circuito **inductivo**): la corriente está retrasada respecto de la tensión

$$\begin{cases} u(t) = U_o \cos(\omega t) \\ i(t) = I_o \cos(\omega t - \theta) \quad (\text{circuito en retrazo}) \end{cases}$$

$$p(t) = u(t) \cdot i(t)$$

Potencia en CA, expresión general

conveniente reformular
producto de cosenos

$$\begin{aligned} p(t) &= \underbrace{U_o \cos(\omega t)}_{u(t)} \cdot \underbrace{I_o \cos(\omega t - \theta)}_{i(t)} = \underbrace{U_o \cdot I_o}_{\text{amplitud}} \cdot \cos(\omega t) \cdot \cos(\omega t - \theta) \stackrel{\downarrow}{=} \\ &= \frac{1}{2} \cdot U_o \cdot I_o \cdot [\cos(2\omega t - \theta) + \cos(\theta)] = \frac{U_o}{\sqrt{2}} \frac{I_o}{\sqrt{2}} \cdot [\cos(2\omega t - \theta) + \cos(\theta)] \\ &= \underbrace{U \cdot I}_{\substack{\text{valor} \\ \text{eficaz}}} \cdot [\cos(2\omega t - \theta) + \cos(\theta)] = \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \cos(\alpha - \beta) \\ &= U \cdot I \cdot [\cos(2\omega t) \cos(\theta) + \sin(2\omega t) \sin(\theta) + \cos(\theta)] \end{aligned}$$

$$p(t) = U \cdot I \cos(\theta) + U \cdot I \cos(\theta) \cos(2\omega t) + U \cdot I \sin(\theta) \sin(2\omega t)$$

Potencia en CA: potencia activa y potencia reactiva

En la expresión anterior, definimos dos términos:

potencia activa 'P' y potencia reactiva 'Q'

$$p(t) = U \cdot I \cos(\theta) + U \cdot I \cos(\theta) \cos(2\omega t) + U \cdot I \sin(\theta) \sin(2\omega t)$$

$$P = U \cdot I \cos \theta \quad Q = U \cdot I \sin \theta$$

$$p(t) = P \cdot [1 + \cos(2\omega t)] + Q \cdot \sin(2\omega t)$$

Pero, ¿qué significa que la potencia sea *activa* o *reactiva*? → Siguiente diapositiva

Potencia en CA: potencia disipada y potencia entretenida

Dado que $p(t)$ varía en el tiempo, sus **efectos netos** en el circuito tras cada ciclo pueden calcularse con el **valor medio** en un periodo:

$$P_m = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \left[P \int_0^T dt + P \int_0^T \cos(2\omega t) dt + Q \int_0^T \sin(2\omega t) dt \right] = \boxed{P}$$

- $P = UI \cos(\theta)$ es la **potencia neta que se disipa en la carga**, dado que el resto de la potencia $p(t)$ es fluctuante
(Unidades de P : W)
- $Q = UI \sin(\theta)$ es **potencia únicamente entretenida**, ya que es potencia almacenada y sucesivamente devuelta por las bobinas y condensadores (para los que $\sin(\theta) \neq 0$)
(Unidades de Q : var)

Potencia en CA, circuito resistivo

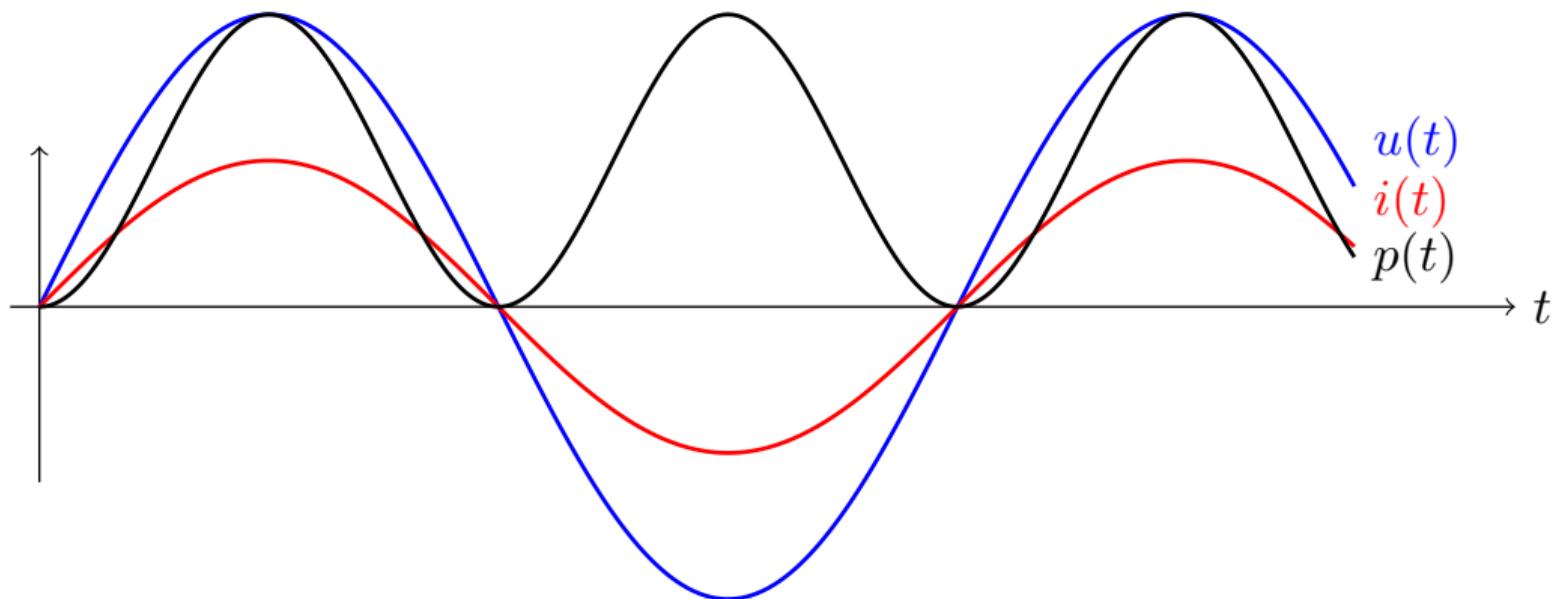
$$P = UI \underbrace{\cos \theta}_{=1} \quad Q = UI \sin \theta \rightarrow 0$$

$$p(t) = P \cdot [1 + \cos(2\omega t)] + Q \cdot \sin(2\omega t)$$

$$\bar{Z}_R = R \underline{/0^\circ} \rightarrow \theta = 0 \rightarrow \begin{cases} P = UI = \frac{U^2}{R} = I^2 R \\ Q = 0 \end{cases}$$

$$p(t) = P \cdot [1 + \cos(2\omega t)]$$

Potencia en CA, circuito resistivo



- ▶ Fluctúa al **doble de frecuencia** que la tensión y corriente
- ▶ Es siempre **positiva**
- ▶ Su **valor medio** es $P = UI \cos \theta = UI$

Potencia en CA, circuito inductivo puro

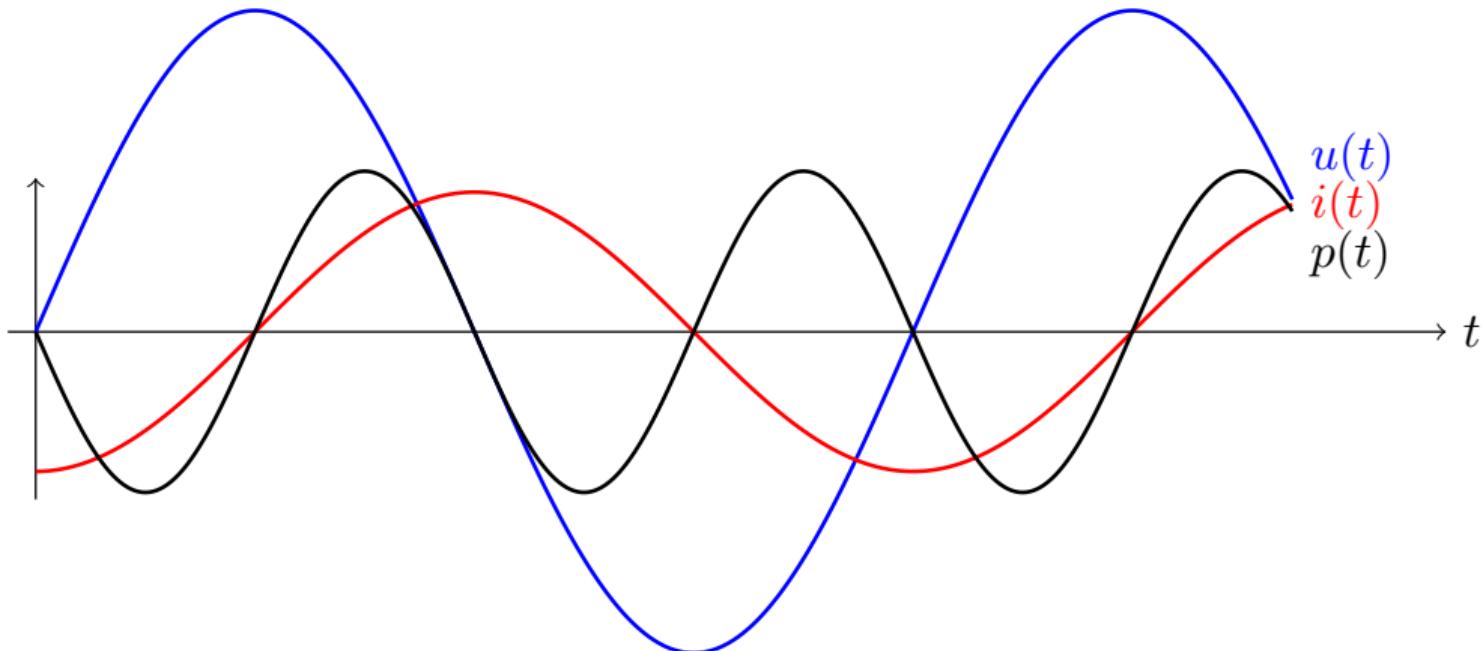
$$P = UI \cos \theta \xrightarrow{\theta=0} 0 \quad Q = UI \underbrace{\sin \theta}_{=1}$$

$$p(t) = P \cdot [1 + \cos(2\omega t)] + Q \cdot \sin(2\omega t)$$

$$\bar{Z}_L = \underline{\omega L / 90^\circ} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow \begin{cases} P = 0 \\ Q = UI = \frac{U^2}{\omega L} = I^2 \omega L \end{cases}$$

$$p(t) = Q \cdot \sin(2\omega t)$$

Potencia en CA, circuito inductivo puro



- ▶ Fluctúa al **doble de frecuencia** que la tensión y corriente
- ▶ Pasa por los ceros de tensión y corriente
- ▶ Su valor medio es **nulo**

Potencia en CA, circuito capacitivo puro

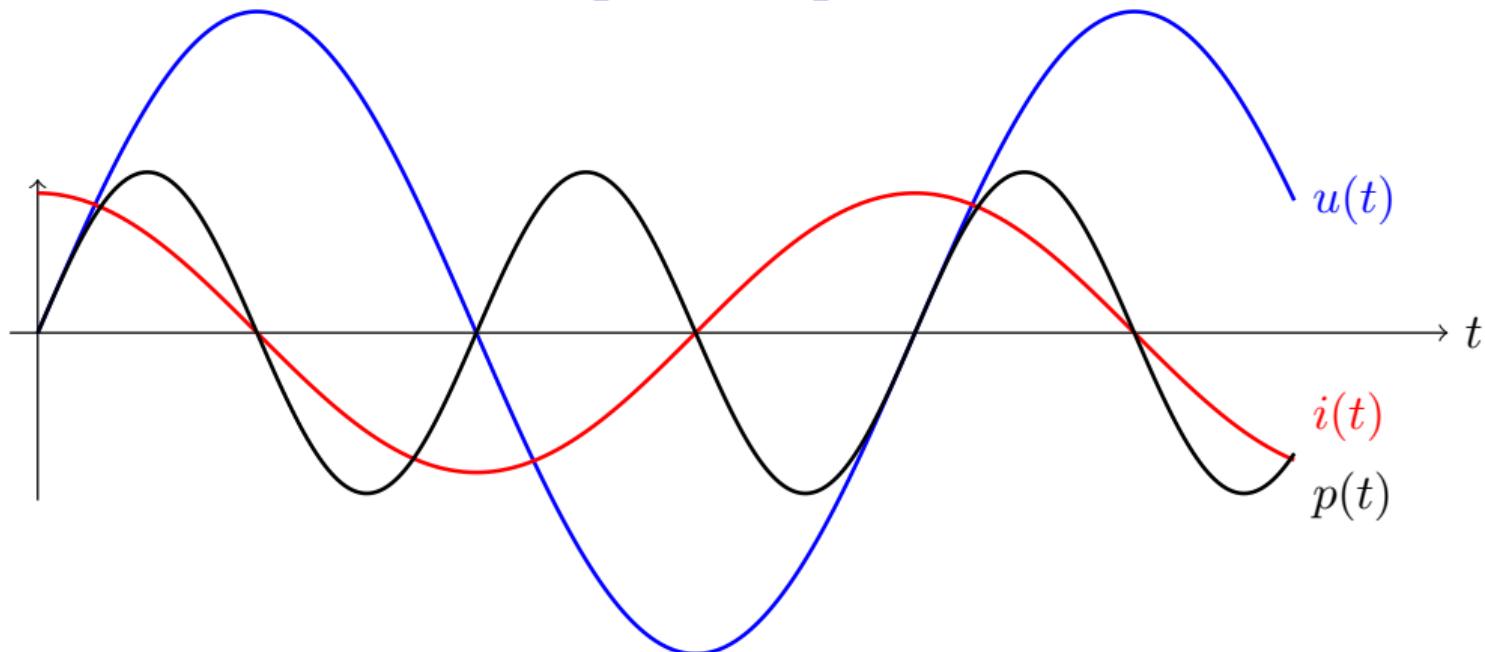
$$P = UI \cos \theta \xrightarrow{\theta=0} 0 \quad Q = UI \underbrace{\sin \theta}_{=-1}$$

$$p(t) = P \cdot [1 + \cos(2\omega t)] + Q \cdot \sin(2\omega t)$$

$$\bar{Z}_C = \frac{1}{\omega C} \angle -90^\circ \rightarrow \theta = -\frac{\pi}{2} \rightarrow \begin{cases} P = 0 \\ Q = -UI = -U^2\omega C = -\frac{I^2}{\omega C} \end{cases}$$

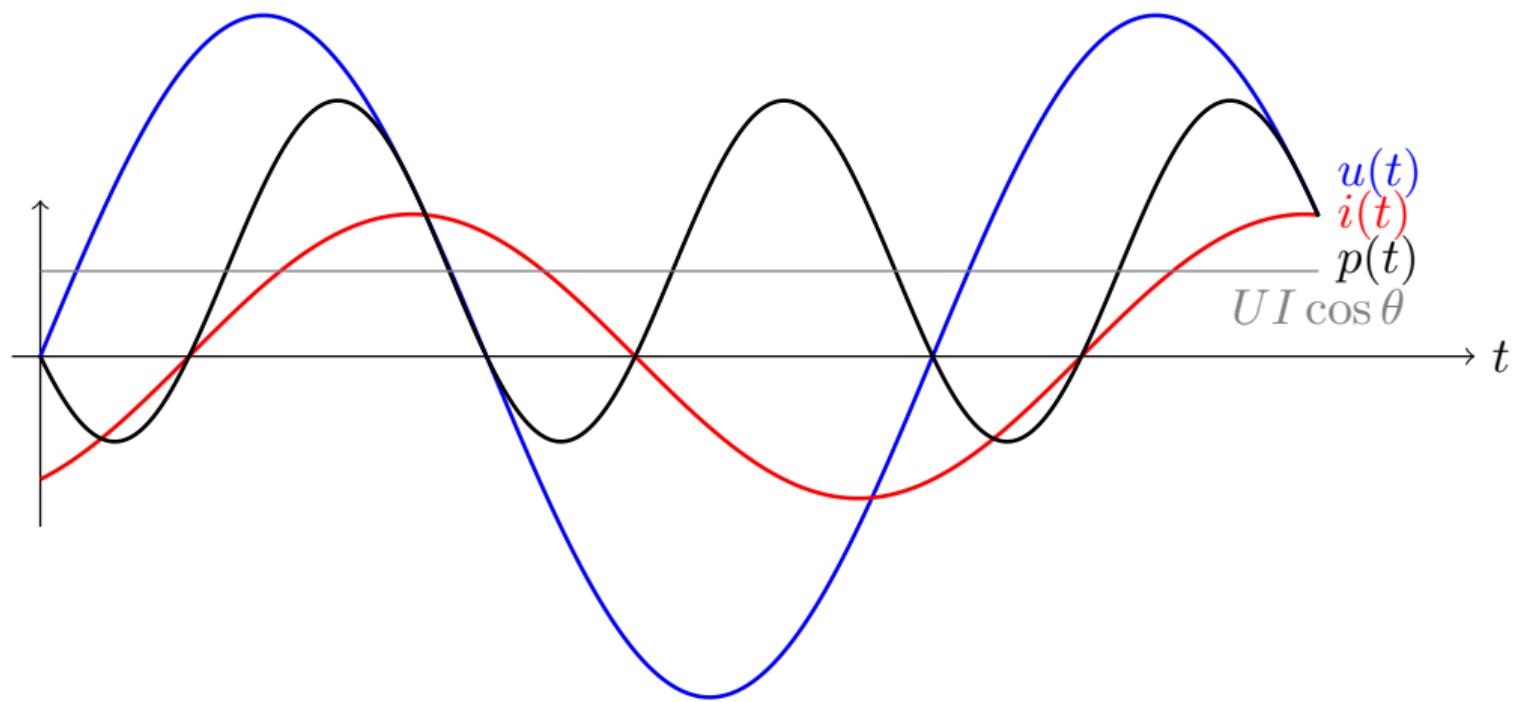
$$p(t) = Q \cdot \sin(2\omega t)$$

Potencia en CA, circuito capacitivo puro



- ▶ Fluctúa al **doble de frecuencia** que la tensión y corriente
- ▶ Pasa por los ceros de tensión y corriente
- ▶ Su valor medio es **nulo**

Potencia en CA, circuito inductivo con pérdidas (RL)



Interludio: pasado y presente de los sistemas eléctricos

Ms. Edith Clarke,
General Electric



Prof. Gabriela Hug,
ETH Zurich



Dr Vera Silva,
General Electric



Triángulo de potencias

- ▶ Potencia **activa** [unidades: W]

$$P = U \cdot I \cdot \cos(\theta) = R \cdot I^2$$

- ▶ Potencia **reactiva** [unidades: var]

$$Q = U \cdot I \cdot \sin(\theta) = X \cdot I^2$$

- ▶ Potencia **aparente** [unidades: VA]

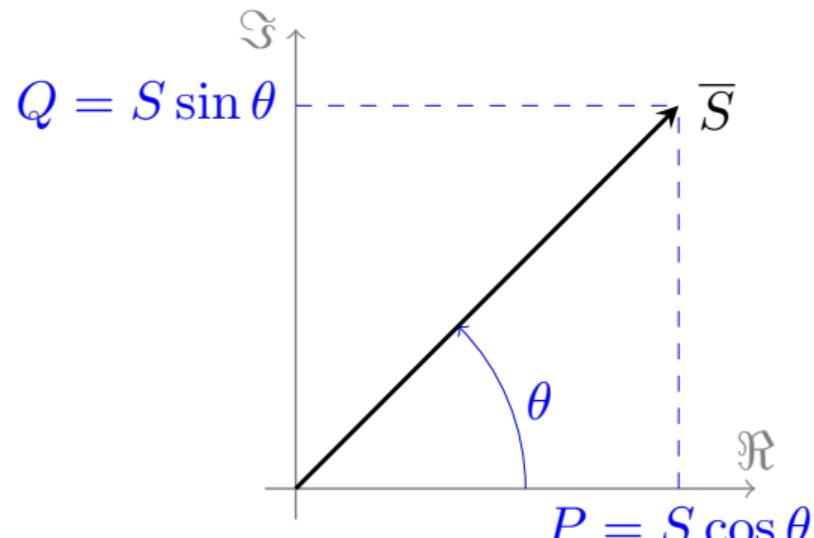
$$\bar{S} = P + jQ = \bar{U} \cdot \bar{I}^*$$

Demostración de la expresión para \bar{S} :

$$\bar{U} = U/\underline{0}$$

$$\bar{I} = I/\underline{-\theta} \quad (\text{circuito en retraso})$$

$$\begin{aligned}\bar{U} \cdot \bar{I}^* &= U/\underline{0} \cdot I/\underline{\theta} = UI/\underline{\theta} = \\ &= UI(\cos \theta + j \sin \theta) = P + jQ\end{aligned}$$



$$S = U \cdot I$$

$$\theta_S = \theta_Z = \theta$$

Triángulo de potencias

- ▶ Potencia **activa** [unidades: W]

$$P = U \cdot I \cdot \cos(\theta) = R \cdot I^2$$

- ▶ Potencia **reactiva** [unidades: var]

$$Q = U \cdot I \cdot \sin(\theta) = X \cdot I^2$$

- ▶ Potencia **aparente** [unidades: VA]

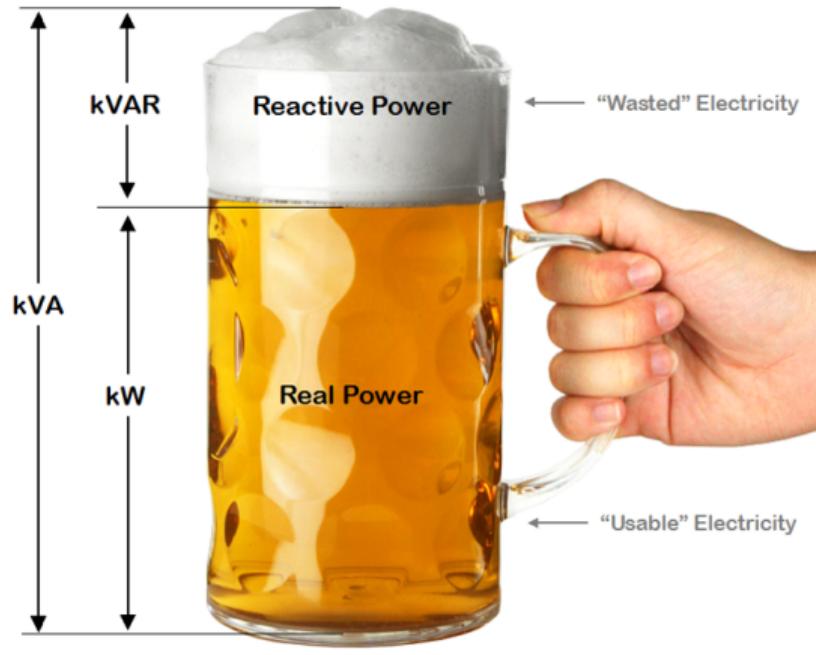
$$\bar{S} = P + jQ = \bar{U} \cdot \bar{I}^*$$

Demostración de la expresión para \bar{S} :

$$\bar{U} = U/\underline{0}$$

$$\bar{I} = I/\underline{-\theta} \quad (\text{circuito en retraso})$$

$$\begin{aligned}\bar{U} \cdot \bar{I}^* &= U/\underline{0} \cdot I/\underline{\theta} = UI/\underline{\theta} = \\ &= UI(\cos \theta + j \sin \theta) = P + jQ\end{aligned}$$



Potencia en elementos: resistencia

$$\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} P_R = R I^2 \\ Q_R = 0 \\ S_R = P_R \end{cases}$$

- ▶ Consume potencia activa
- ▶ No “consume” potencia reactiva

Potencia en elementos: inductancia

$$\theta = \pi/2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} P_L = 0 \\ Q_L = \omega L I^2 \\ \bar{S}_L = \omega L I^2 / \pi/2 \end{cases}$$

- ▶ No consume potencia activa
- ▶ “Consumo” potencia reactiva ($Q > 0$)
 - ▶ **Nota:** la potencia reactiva es potencia *entretenida*, no es potencia que se consuma
Pero, dado el convenio de signos, decimos que **las bobinas “consumen” Q** y **los condensadores “generan” Q** (ya que almacenan y devuelven energía al circuito en semiciclos opuestos)

Potencia en elementos: condensador

$$\theta = -\pi/2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} P_L = 0 \\ Q_C = -\omega C U^2 \\ \bar{S}_C = \omega C U^2 / -\pi/2 \end{cases}$$

- ▶ No consume potencia activa
- ▶ “Genera” potencia reactiva ($Q < 0$)
 - ▶ **Nota:** la potencia reactiva es potencia *entretenida*, no es potencia que se consuma
Pero, dado el convenio de signos, decimos que **las bobinas “consumen” Q** y **los condensadores “generan” Q** (ya que almacenan y devuelven energía al circuito en semiciclos opuestos)

Teorema de Boucherot

En un circuito con múltiples elementos, la potencia aparente total es la **suma de las potencias aparentes individuales**

(la potencia activa/reactiva total es la **suma de las potencias activas/reactivas individuales**)

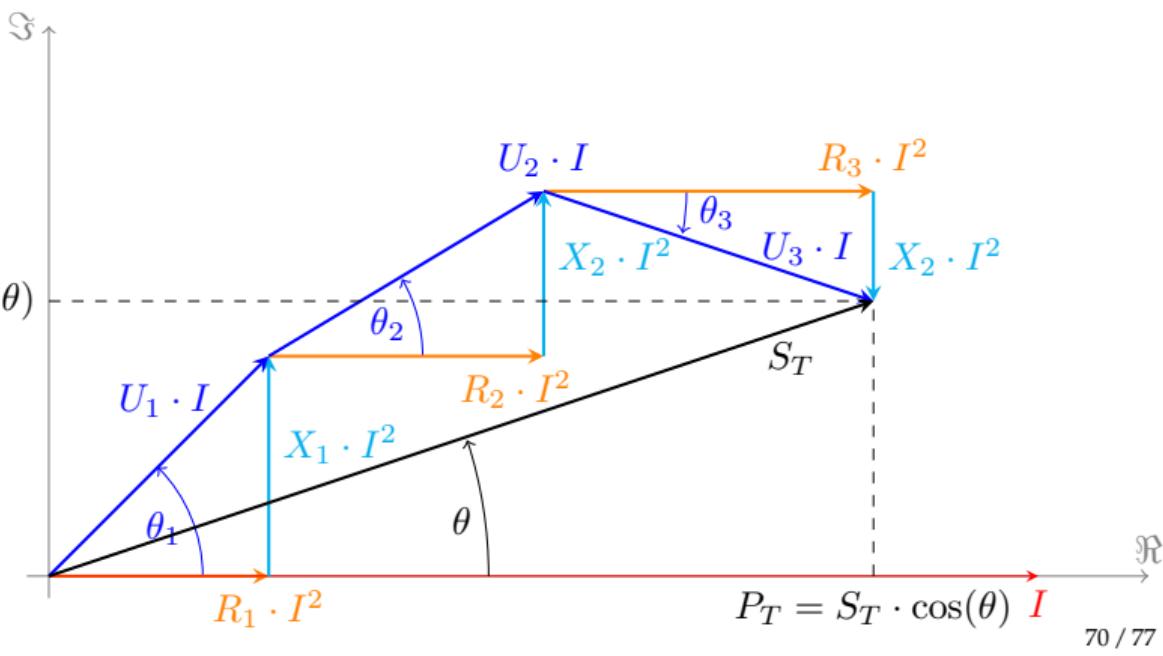
$$P_T + jQ_T = \sum_{i=1}^n (P_i + jQ_i)$$

$$\bar{S}_T = \sum_{i=1}^n \bar{S}_i$$

$$Q_T = S_T \cdot \sin(\theta)$$

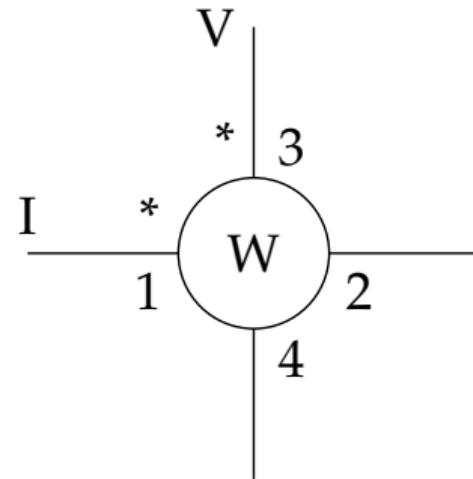
$$P_T = \sum_{i=1}^n P_i$$

$$Q_T = \sum_{i=1}^n Q_i$$



$$P_T = S_T \cdot \cos(\theta)$$

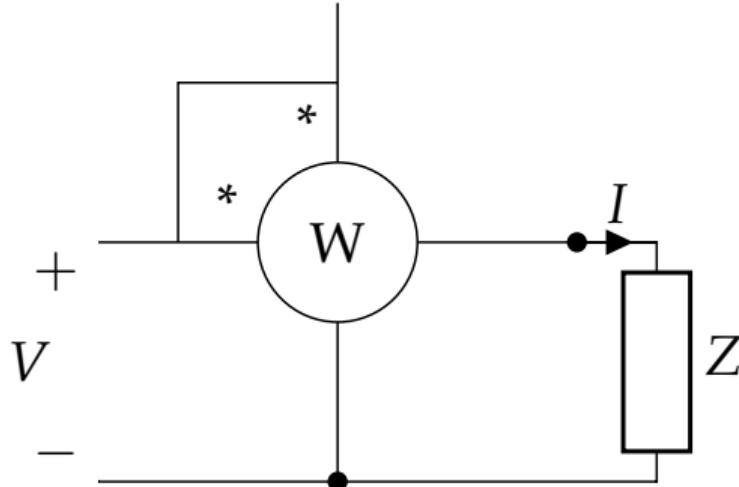
Medida de potencia: vatímetro



Equipo de medida de **4 terminales** (un par para tensión, un par para corriente)

$$W = \underbrace{\bar{I}_{1,2} \bullet \bar{U}_{3,4}}_{\text{producto escalar}} = I_{1,2} \cdot U_{3,4} \cdot \cos(\widehat{\bar{I}_{1,2}}, \widehat{\bar{U}_{3,4}})$$

Medida de potencia



Habitualmente se emplea con 3 terminales, **cortocircuitando** terminales con *

$$W = |\bar{V}| \cdot |\bar{I}| \cdot \cos(\theta_V - \theta_I) = P_Z$$

- ① Formas de onda
- ② Onda senoidal
- ③ Cálculo fasorial
- ④ Respuesta de elementos pasivos a excitación senoidal
- ⑤ Potencia en corriente alterna
Factor de potencia: importancia y mejora

Factor de potencia

El factor de potencia (*f.d.p.*), $\cos(\theta)$, representa la aportación de potencia activa dentro de la potencia aparente:

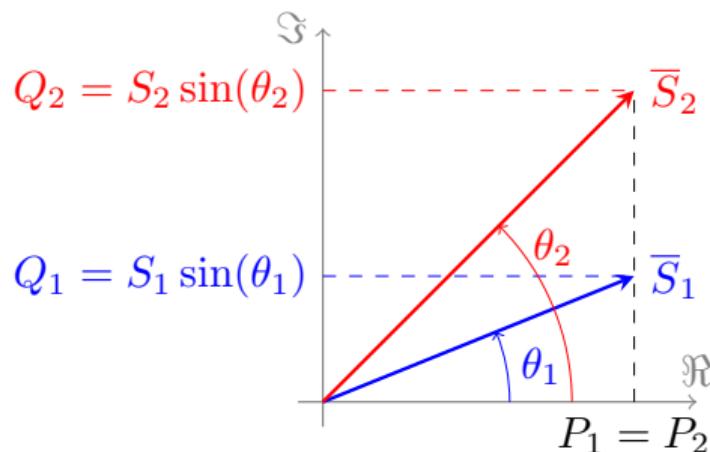
$$\cos(\theta) = \frac{P}{S}$$

Se dice que:

- ▶ *fdp en retraso* cuando el circuito tiene carácter inductivo (la intensidad va retrasada respecto a la tensión)
- ▶ *fdp en adelanto* cuando el circuito tiene carácter capacitivo (la intensidad va adelantada respecto a la tensión)

Factor de potencia: importancia y mejora

Consideremos dos sistemas con **misma tensión y potencia activa**, y factores de potencia $\cos \theta_2 < \cos \theta_1$ ($Q_2 > Q_1$)



- ▶ El sistema 2 requiere **mayor potencia aparente** (generador mayor) para alimentar la misma potencia activa:

$$\left(\frac{P}{\cos \theta_1} = S_1 \right) < \left(S_2 = \frac{P}{\cos \theta_2} \right)$$

- ▶ El sistema 2 requiere **mayor sección de cable** para transportar la misma potencia activa:

$$\left(\frac{P}{U \cos \theta_1} = I_1 \right) < \left(I_2 = \frac{P}{U \cos \theta_2} \right)$$

“Generación” local de reactiva

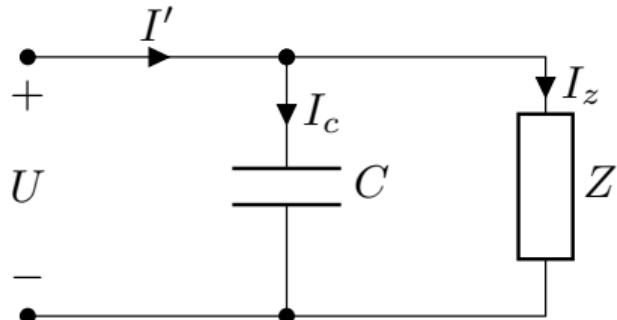
- ▶ Comúnmente, el factor de potencia es **inductivo** (máquinas eléctricas industriales)
- ▶ La red debe suministrar potencia reactiva inductiva (influye en secciones de líneas y tamaños de generadores → **mayor coste**)
- ▶ Es necesario mejorar **localmente** el factor de potencia

Solución común: utilizar **bancos de condensadores** como suministradores de Q

Cálculo de la capacidad para compensación de reactiva

Consideremos una carga de potencia activa P_z , potencia reactiva Q_z , y $\text{fdp} = \cos \theta$

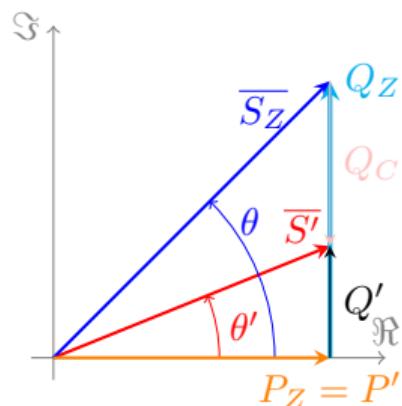
Se desea **mejorar el factor de potencia** a $\cos \theta' > \cos \theta$, manteniendo la potencia P_z



$$P' = P_z$$

$$Q' = Q_c + Q_z \quad (Q' < Q_z)$$

$$\bar{I}' = \bar{I}_c + \bar{I}_z \quad (I' < I_z)$$



$$Q_z = P_z \tan \theta$$

$$Q' = P_z \tan \theta'$$

$$|Q_c| = Q_z - Q' = P_z(\tan \theta - \tan \theta')$$

$$|Q_c| = \underbrace{X_c \cdot I_c^2}_{= \frac{1}{\omega C}} = \omega C U^2 \rightarrow C = \boxed{\frac{P_z(\tan \theta - \tan \theta')}{\omega U^2}}$$