TEORÍA DE CIRCUITOS III :: Prueba BT1

4 de Octubre de 2018

Los resultados se publicarán el día 8 de octubre.

La revisión del examen se realizará en horario de tutoría los días 9, 10 y 11 de octubre.

En el circuito de la figura el interruptor ha estado cerrado durante un tiempo elevado, y en $t = 0$ se abre. En estas condiciones se debe determinar:

1. **(1p.)** Tipo de transitorio presente en el circuito.
2. **(1p.)** Condiciones iniciales de las siguientes variables del circuito: $u_C(0^+)$, $i_L(0^+)$, $i_C(0^+)$, $u_{L1}(0^+)$.
3. **(1p.)** Valores en régimen permanente de las siguientes variables del circuito: $u_C(\infty)$, $i_L(\infty)$, $i_C(\infty)$, $u_{L1}(\infty)$.
4. **(6p.)** Expresiones de la corriente $i_L(t)$ y de la tensión $u_C(t)$ para $t > 0$.
5. **(1p.)** Duración aproximada del transitorio. Si el tipo de transitorio produce oscilaciones, compare el período de la oscilación con la duración del transitorio.

Datos:

$E_g = 500\,\mathrm{V}$

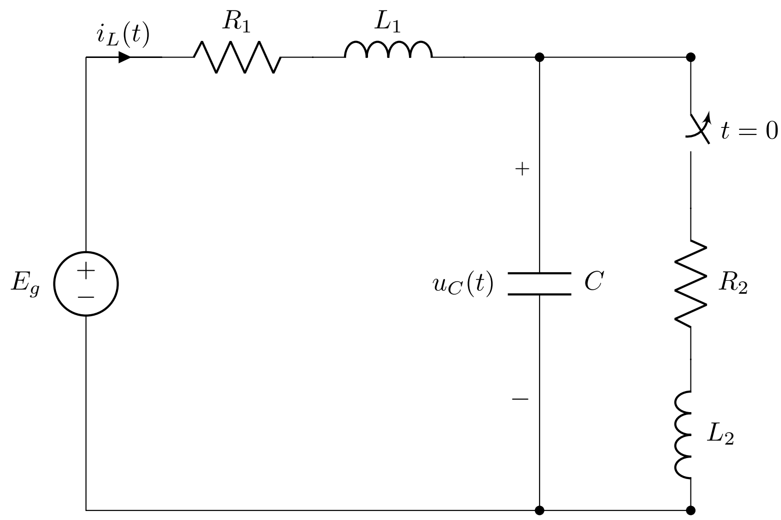
$R_1 = 375\,\Omega$

$R_2 = 125\,\Omega$

$L_1 = 40\,\mathrm{mH}$

$L_2 = 40\,\mathrm{mH}$

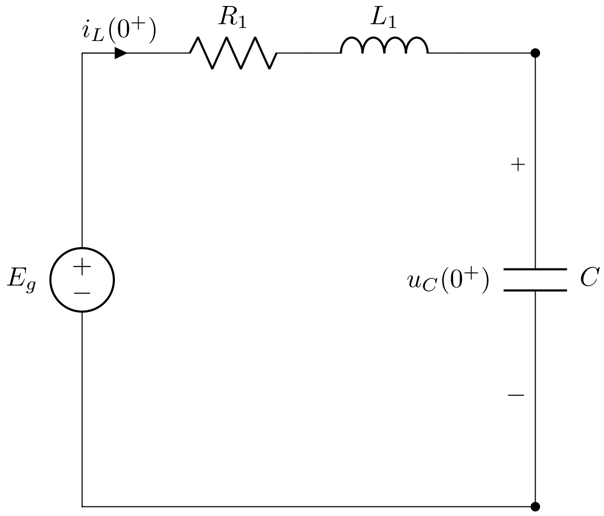
$C = 1\,\mu\mathrm{F}$



Solución

1. Tipo de transitorio

   La siguiente figura representa el circuito para $t > 0$.

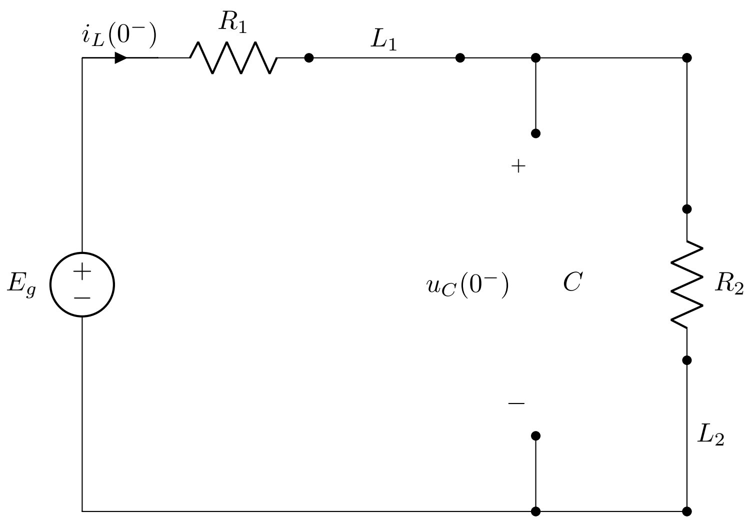
   Al apagar las fuentes en este circuito es evidente que se trata de un RLC serie. Por tanto podemos calcular:

   $$\alpha = \frac{R}{2L} = 4687{,}5\,\mathrm{s}^{-1}$$
   $$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 5000\,\mathrm{rad\,s}^{-1}$$

   Dado que $\alpha < \omega_0$, el transitorio es subamortiguado.

2. Condiciones iniciales

   La siguiente figura representa el circuito para $t < 0$ en régimen permanente, con las variables particularizadas para $t = 0^-$.

En este circuito, teniendo en cuenta las condiciones de continuidad, se puede deducir que:

$$\begin{aligned} i_L(0^+) &= i_L(0^-) = 1\,\text{A} \\ u_C(0^+) &= u_C(0^-) = 125\,\text{V} \end{aligned}$$

Además,

$$E_g = u_R(0^+) + u_L(0^+) + u_C(0^+)$$

Por tanto,

$$u_L(0^+) = E_g - Ri_L(0^+) - u_C(0^+) = 0\,\text{V}$$

Finalmente, es evidente que $i_c(0^+) = i_L(0^+) = 1\,\text{A}$.

3. Valores en régimen permanente.

   El circuito en régimen permanente está abierto debido al condensador. Por tanto,

$$\begin{aligned} u_c(\infty) &= 500\,\text{V} \\ u_L(\infty) &= 0\,\text{V} \\ i_c(\infty) &= 0\,\text{A} \\ i_L(\infty) &= 0\,\text{A} \end{aligned}$$

4. Expresiones de corriente y tensión

   La expresión genérica de la corriente es:

$$i_L(t) = i(\infty) + e^{-\alpha t}\left(A_1 \sin(\omega_d t) + A_2 \cos(\omega_d t)\right)$$

siendo $\omega_d = \sqrt{\omega_o^2 - \alpha^2} = 1739{,}9\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$.

Teniendo en cuenta las condiciones iniciales y el valor en régimen permanente obtenemos:

$$\begin{aligned} i_L(0^+) &= 1 = A_2 \\ \left(\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}\right)_{0^+} &= \frac{1}{L}u_L(0^+) = 0 = -\alpha A_2 + A_1\omega_d \end{aligned}$$

La solución de este sistema es:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\alpha}{\omega_d} = 2{,}69 \\ A_2 &= 1 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
i_L(t) &= e^{-\alpha t}\left(\frac{\alpha}{\omega_d}\sin(\omega_d t) + \cos(\omega_d t)\right) \\
i_L(t) &= e^{-4687{,}5t}\left(2{,}69\sin(1739{,}9t) + \cos(1739{,}9t)\right)
\end{aligned}$$

A partir de esta expresión podemos calcular la correspondiente a la tensión en el condensador teniendo en cuenta que:

$$u_c(t) = E_g - Ri(t) - L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

Realizando la operación indicada obtenemos:

$$u_C(t) = 500 - e^{-4687{,}5t}\left(435{,}9\sin(1739{,}9t) + 375\cos(1739{,}9t)\right)$$

Este resultado se puede comprobar mediante las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned}
u_C(0^+) &= 125 \\
\left(\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}\right)_{0^+} &= \frac{1}{C} i_C(0^+) = 10^6
\end{aligned}$$

5. Duración del transitorio

   La duración del transitorio viene determinada por el factor que acompaña al tiempo en la exponencial, $\alpha = 4687{,}5\,\mathrm{s}^{-1}$. Usando la regla de 5τ, siendo $\tau = 1/\alpha = 213{,}3\,\mu\mathrm{s}$, podemos asumir que el transitorio se extinguirá al cabo de aproximadamente 1 ms.

   Al tratarse de un transitorio subamortiguado, presenta oscilaciones tal y como queda de manifiesto en las expresiones de la corriente y tensión. El período de estas oscilaciones se calcula a partir de la pulsación amortiguada:

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = 3{,}61\,\mathrm{ms}$$

   Este valor, claramente superior a la duración del transitorio, implica que la oscilación no completará ni siquiera un ciclo (el transitorio se extinguirá alrededor de $T_d/4$).