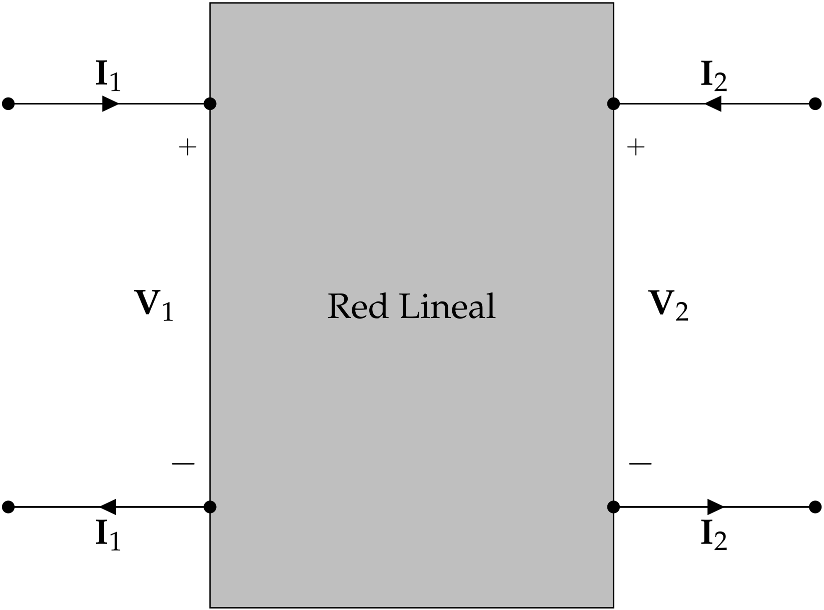
Cuadripolos

Teoría de Circuitos III

Oscar Perpiñán Lamigueiro

Cuadripolo

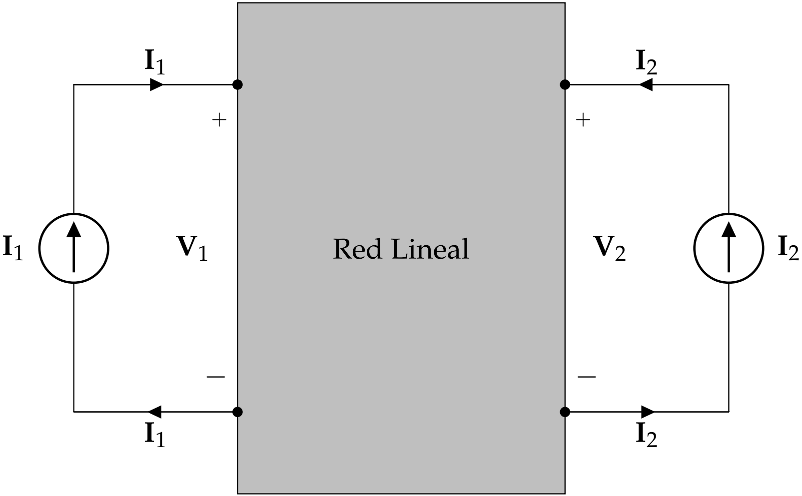


Atención al sentido de las corrientes

Cuadripolos Recíprocos y Simétricos

- Un cuadripolo es **recíproco** si, al intercambiar la posición de las excitaciones, la respuesta en el puerto correspondiente no sufre cambios (teorema de reciprocidad).
- Un cuadripolo lineal (RLC) y **sin fuentes dependientes** es recíproco.
- Un **cuadripolo recíproco es simétrico** si se puede intercambiar la entrada con la salida (simetría física).

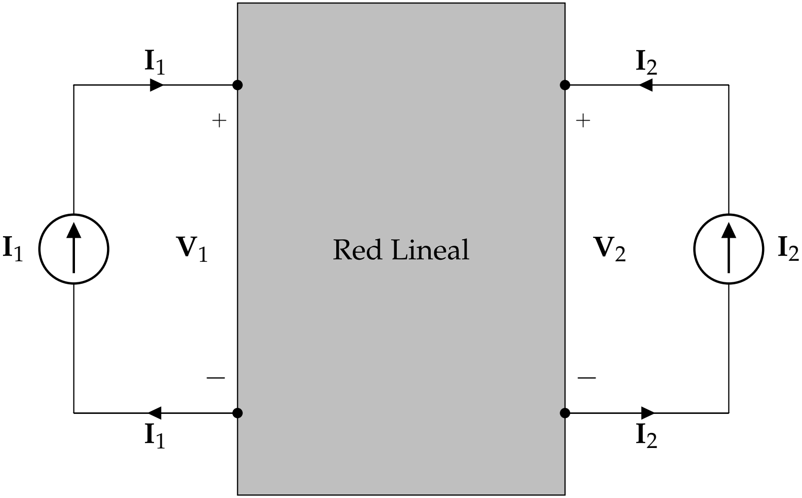
Definición



Mediante teorema de superposición:

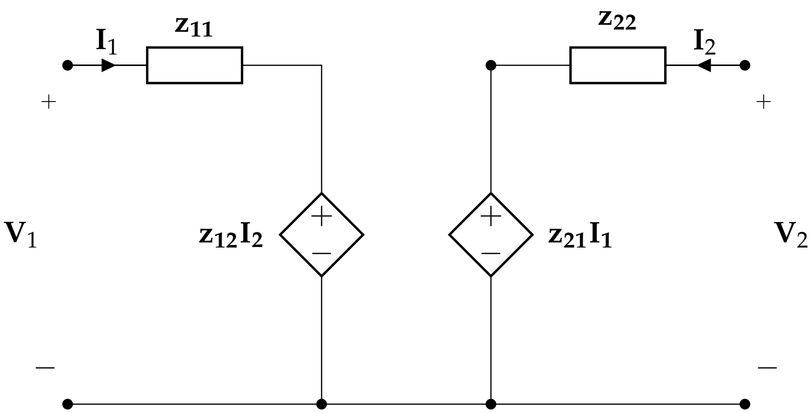
$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{z}_{11}\mathbf{I}_1 + \mathbf{z}_{12}\mathbf{I}_2$$
$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{z}_{21}\mathbf{I}_1 + \mathbf{z}_{22}\mathbf{I}_2$$

Expresión Matricial



$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{11} & \mathbf{z}_{12} \\ \mathbf{z}_{21} & \mathbf{z}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}$$

Circuito Equivalente



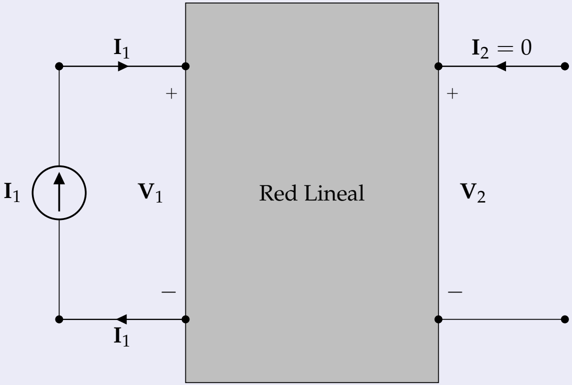
$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{z}_{11}\mathbf{I}_1 + \mathbf{z}_{12}\mathbf{I}_2$$
$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{z}_{21}\mathbf{I}_1 + \mathbf{z}_{22}\mathbf{I}_2$$

Cálculo de parámetros

Salida en abierto

$$\mathbf{z}_{11} = \left.\frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1}\right|_{\mathbf{I}_2=0}$$

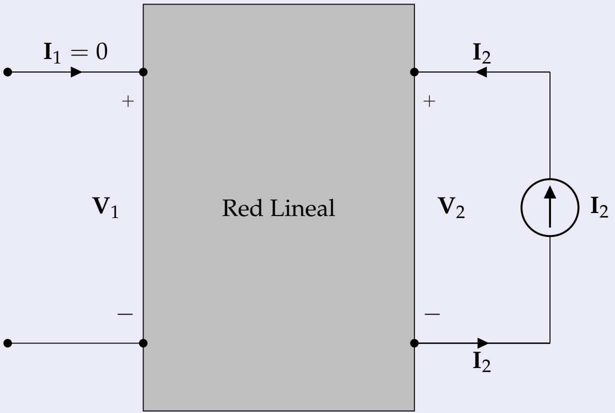
$$\mathbf{z}_{21} = \left.\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{I}_1}\right|_{\mathbf{I}_2=0}$$



$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{11} & \mathbf{z}_{12} \\ \mathbf{z}_{21} & \mathbf{z}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}$$

Cálculo de parámetros

Entrada en abierto



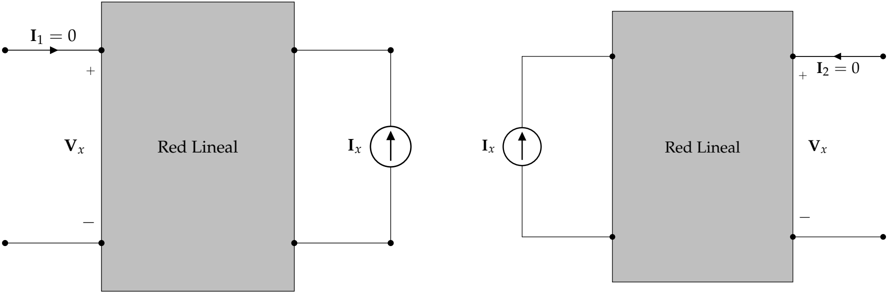
$$\mathbf{z}_{12} = \left.\frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_2}\right|_{\mathbf{I}_1=0}$$

$$\mathbf{z}_{22} = \left.\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{I}_2}\right|_{\mathbf{I}_1=0}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{11} & \mathbf{z}_{12} \\ \mathbf{z}_{21} & \mathbf{z}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}$$

Reciprocidad

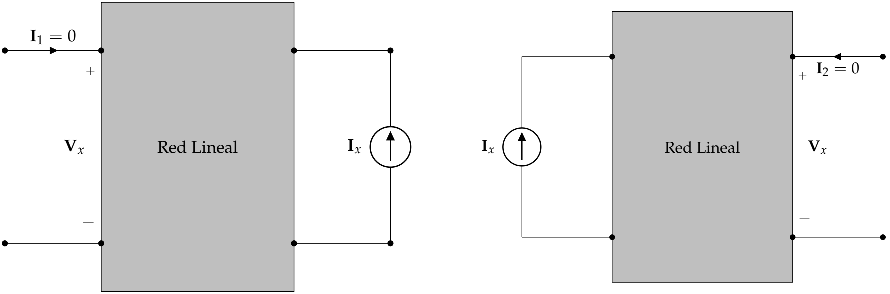
$$\mathbf{V_1}\Big|_{\substack{\mathbf{I_1} = 0 \\ \mathbf{I_2} = \mathbf{I_x}}} = \mathbf{V_2}\Big|_{\substack{\mathbf{I_2} = 0 \\ \mathbf{I_1} = \mathbf{I_x}}}$$



Relación entre parámetros

Las impedancias de transferencia son idénticas

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{V}_x &= \mathbf{z}_{11}0 + \mathbf{z}_{12}\mathbf{I}_x \\ \mathbf{V}_x &= \mathbf{z}_{21}\mathbf{I}_x + \mathbf{z}_{22}0 \end{aligned}\right\} \rightarrow \boxed{\mathbf{z_{12}} = \mathbf{z_{21}}}$$

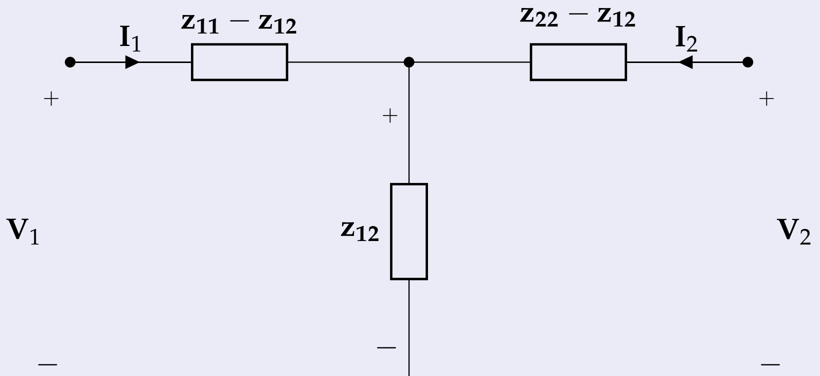


Circuito Equivalente en T

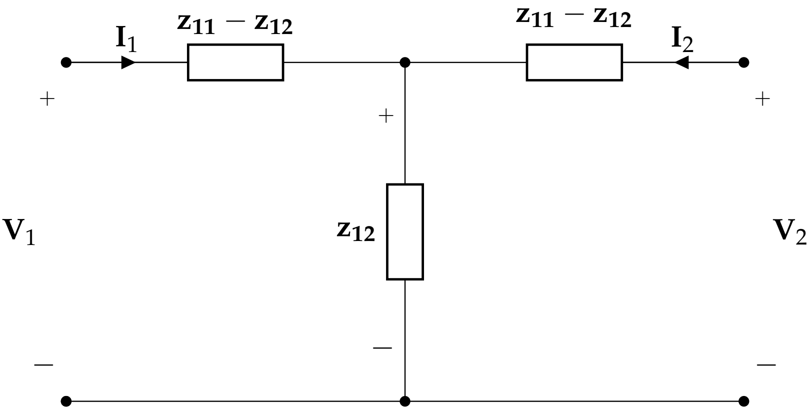
$$\boxed{\mathbf{z_{12}} = \mathbf{z_{21}}} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{11} & \mathbf{z}_{12} \\ \mathbf{z}_{12} & \mathbf{z}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}$$

Ejercicio

Demostrar que un cuadripolo recíproco es equivalente al circuito en T de la figura.



Cuadripolo Simétrico



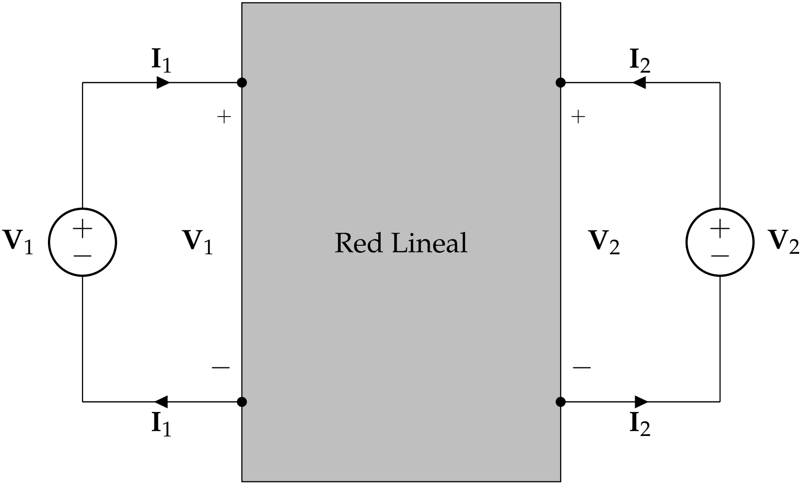
$$\boxed{\mathbf{z_{11}} = \mathbf{z_{22}}} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{11} & \mathbf{z}_{12} \\ \mathbf{z}_{12} & \mathbf{z}_{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}$$

No siempre hay parámetros Z

¿Cuáles son los parámetros Z . . .

- de un transformador ideal?
- de una impedancia serie?

Definición

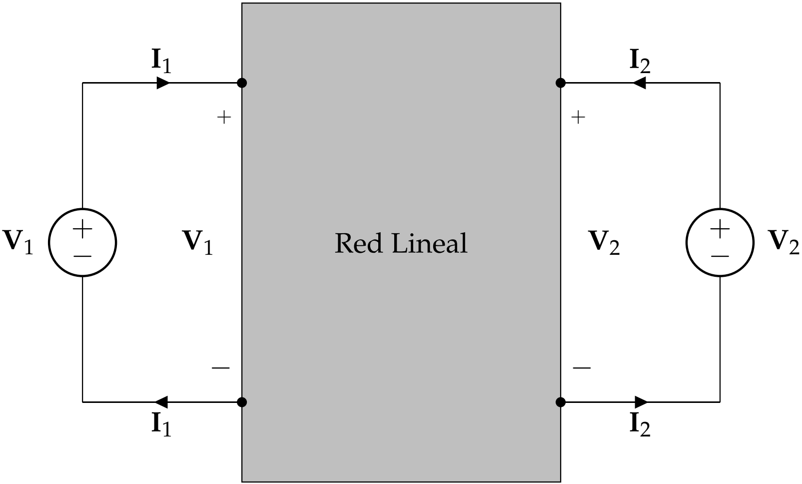


Mediante teorema de superposición:

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{y}_{11}\mathbf{V}_1 + \mathbf{y}_{12}\mathbf{V}_2$$
$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{y}_{21}\mathbf{V}_1 + \mathbf{y}_{22}\mathbf{V}_2$$

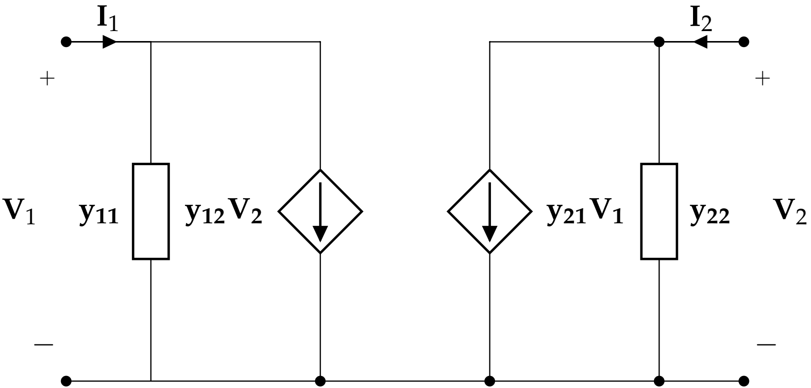
Las variables independientes (*generadores*) son $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{V}_2$

Expresión Matricial



$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{11} & \mathbf{y}_{12} \\ \mathbf{y}_{21} & \mathbf{y}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix}$$

Circuito Equivalente



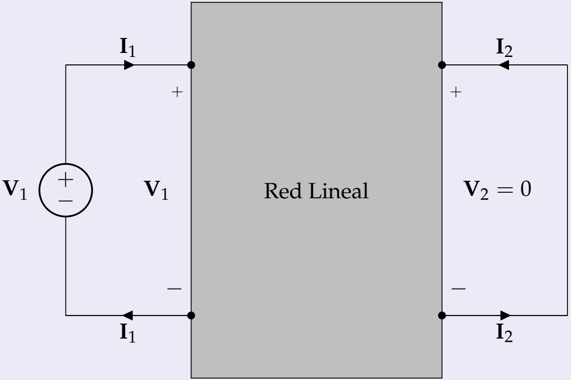
$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{y}_{11}\mathbf{V}_1 + \mathbf{y}_{12}\mathbf{V}_2$$
$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{y}_{21}\mathbf{V}_1 + \mathbf{y}_{22}\mathbf{V}_2$$

Cálculo de parámetros

Salida en cortocircuito

$$\mathbf{y}_{11} = \left.\frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{V}_1}\right|_{\mathbf{V}_2=0}$$

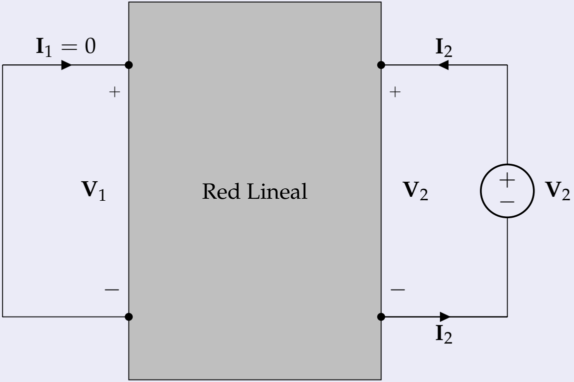
$$\mathbf{y}_{21} = \left.\frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{V}_1}\right|_{\mathbf{V}_2=0}$$



$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{11} & \mathbf{y}_{12} \\ \mathbf{y}_{21} & \mathbf{y}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix}$$

Cálculo de parámetros

Entrada en cortocircuito



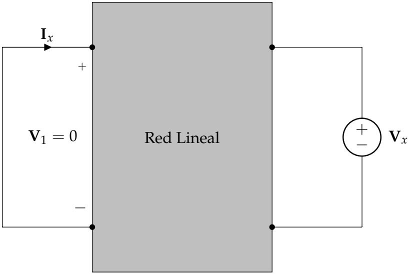
$$\mathbf{y}_{12} = \left.\frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{V}_2}\right|_{\mathbf{V}_1=0}$$

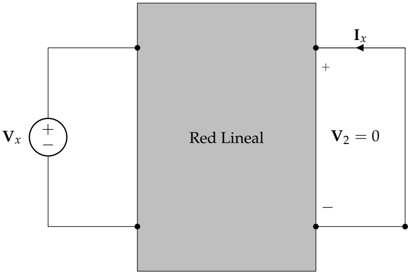
$$\mathbf{y}_{22} = \left.\frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{V}_2}\right|_{\mathbf{V}_1=0}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{11} & \mathbf{y}_{12} \\ \mathbf{y}_{21} & \mathbf{y}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix}$$

Reciprocidad

$$\mathbf{I_1}\Big|_{\substack{\mathbf{V_1}=0 \\ \mathbf{V_2}=\mathbf{V_x}}} = \mathbf{I_2}\Big|_{\substack{\mathbf{V_2}=0 \\ \mathbf{V_1}=\mathbf{V_x}}}$$

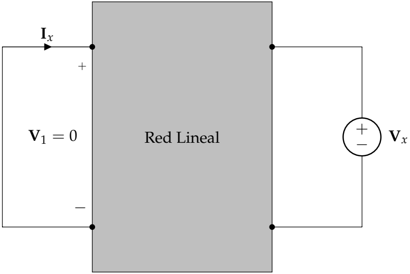


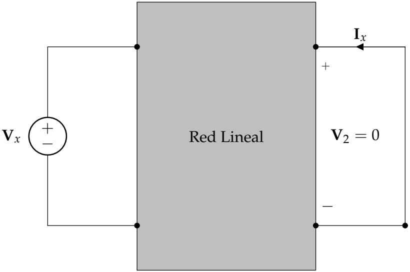


Relación entre parámetros

Las admitancias de transferencia son idénticas

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{I}_x &= \mathbf{y}_{11}0 + \mathbf{y}_{12}\mathbf{V}_x \\ \mathbf{I}_x &= \mathbf{y}_{21}\mathbf{V}_x + \mathbf{y}_{22}0 \end{aligned}\right\} \rightarrow \boxed{\mathbf{y_{12}} = \mathbf{y_{21}}}$$



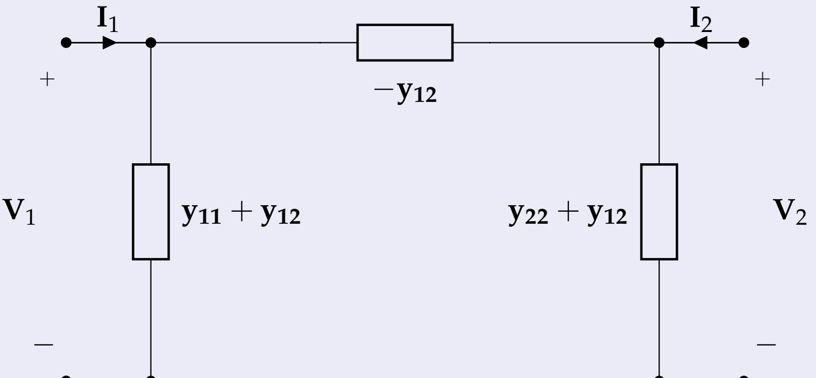


Circuito Equivalente en π

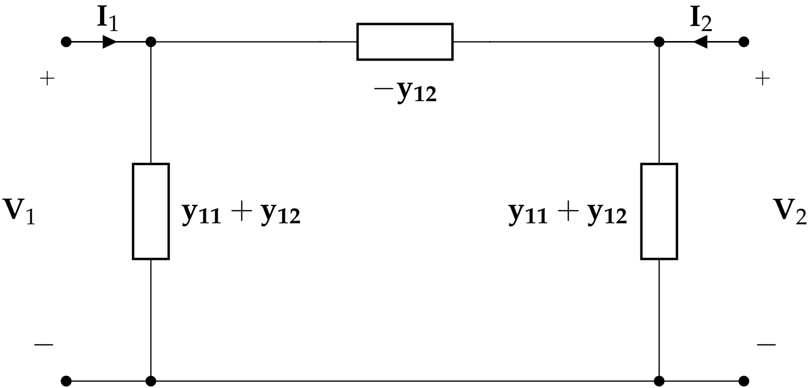
$$\boxed{\mathbf{y_{12}} = \mathbf{y_{21}}} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{11} & \mathbf{y}_{12} \\ \mathbf{y}_{12} & \mathbf{y}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix}$$

Ejercicio

Demostrar que un cuadripolo recíproco es equivalente al circuito en π de la figura.



Cuadripolo Simétrico



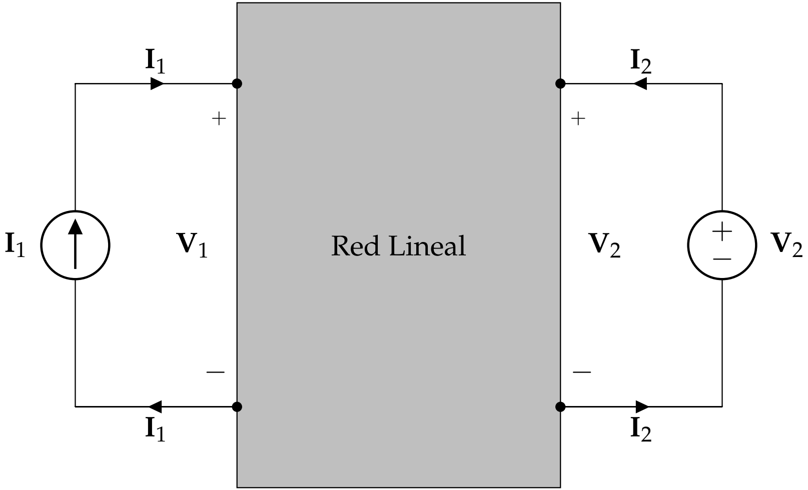
$$\boxed{\mathbf{y_{11}} = \mathbf{y_{22}}} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{11} & \mathbf{y}_{12} \\ \mathbf{y}_{12} & \mathbf{y}_{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix}$$

No siempre hay parámetros Y

¿Cuáles son los parámetros Y …

- de un transformador ideal?
- de una impedancia paralelo?

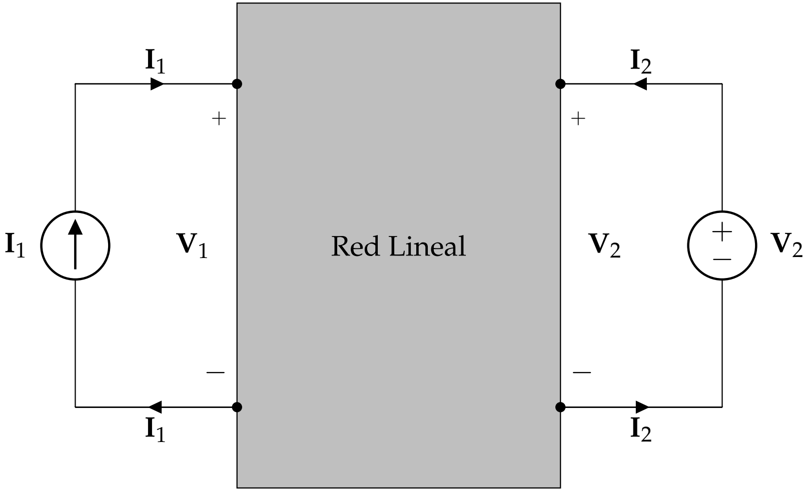
Definición



Mediante teorema de superposición:

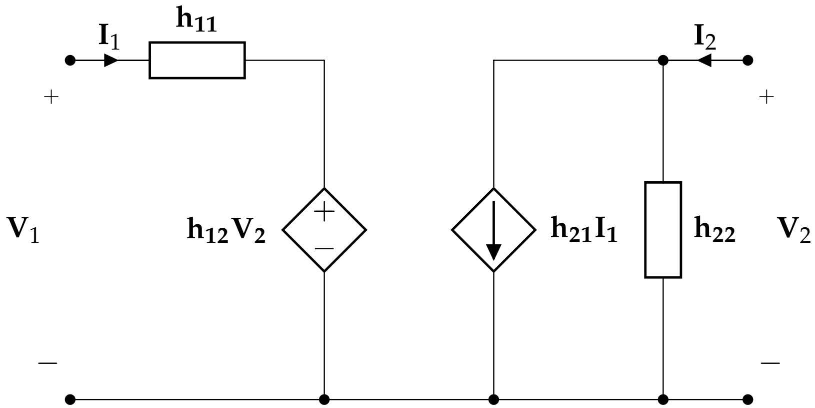
$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{h}_{11}\mathbf{I}_1 + \mathbf{h}_{12}\mathbf{V}_2$$
$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{h}_{21}\mathbf{I}_1 + \mathbf{h}_{22}\mathbf{V}_2$$

Expresión Matricial



$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{11} & \mathbf{h}_{12} \\ \mathbf{h}_{21} & \mathbf{h}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix}$$

Circuito Equivalente



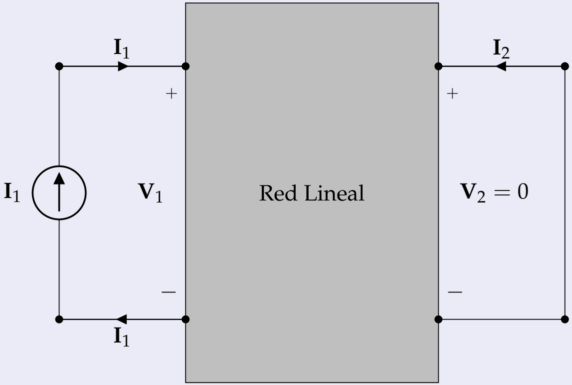
$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{h}_{11}\mathbf{I}_1 + \mathbf{h}_{12}\mathbf{V}_2$$
$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{h}_{21}\mathbf{I}_1 + \mathbf{h}_{22}\mathbf{V}_2$$

Cálculo de parámetros

Salida en cortocircuito

$$\mathbf{h}_{11} = \left.\frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1}\right|_{\mathbf{V}_2=0}$$

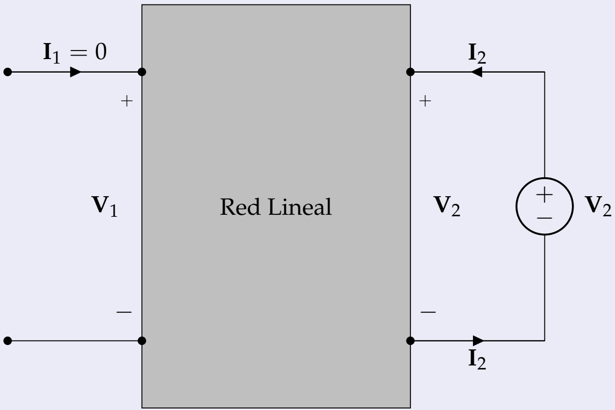
$$\mathbf{h}_{21} = \left.\frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1}\right|_{\mathbf{V}_2=0}$$



$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{11} & \mathbf{h}_{12} \\ \mathbf{h}_{21} & \mathbf{h}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix}$$

Cálculo de parámetros

Entrada en abierto

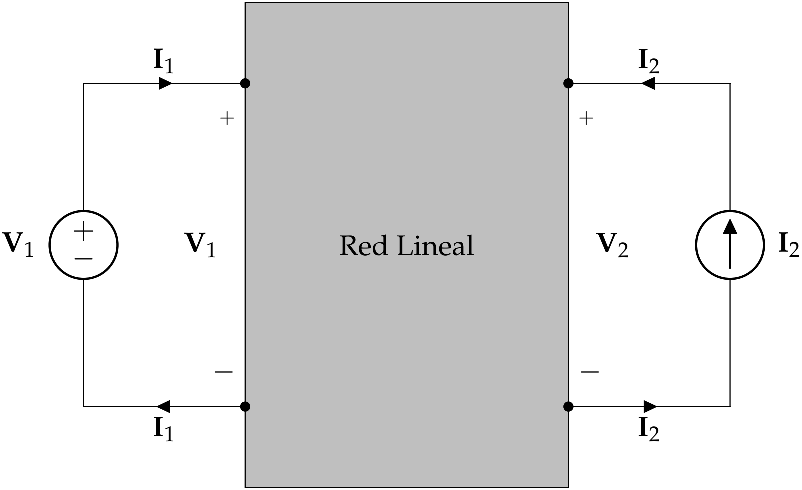


$$\mathbf{h}_{12} = \left.\frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{V}_2}\right|_{\mathbf{I}_1=0}$$

$$\mathbf{h}_{22} = \left.\frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{V}_2}\right|_{\mathbf{I}_1=0}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{11} & \mathbf{h}_{12} \\ \mathbf{h}_{21} & \mathbf{h}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix}$$

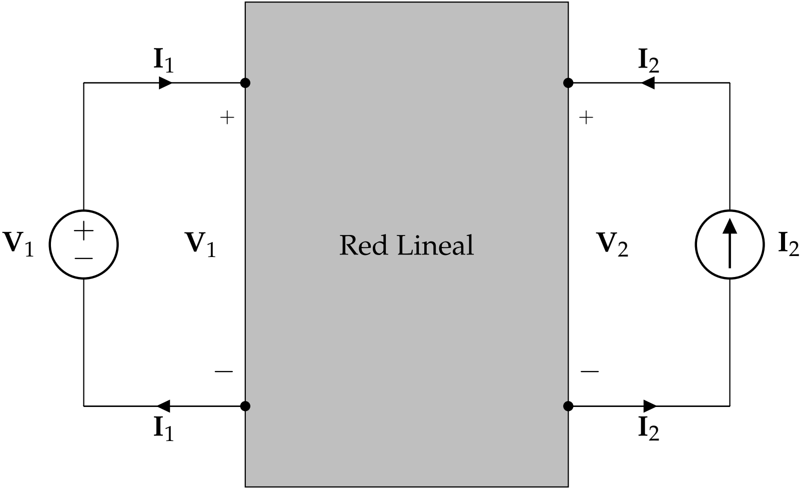
Definición



Mediante teorema de superposición:

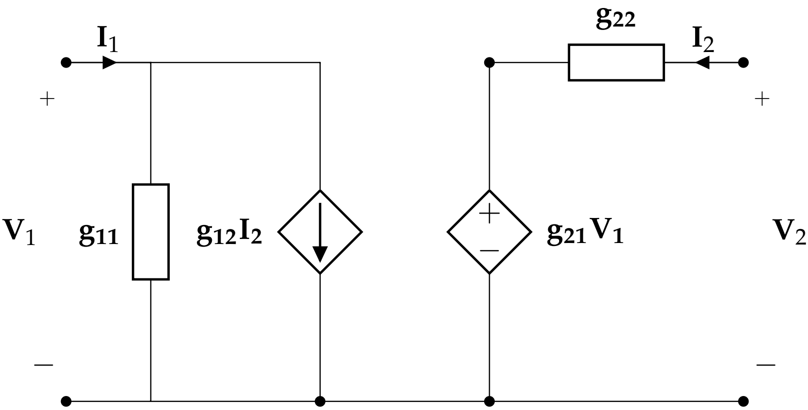
$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{g}_{11}\mathbf{V}_1 + \mathbf{g}_{12}\mathbf{I}_2$$
$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{g}_{21}\mathbf{V}_1 + \mathbf{g}_{22}\mathbf{I}_2$$

Expresión Matricial



$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{11} & \mathbf{g}_{12} \\ \mathbf{g}_{21} & \mathbf{g}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}$$

Circuito Equivalente



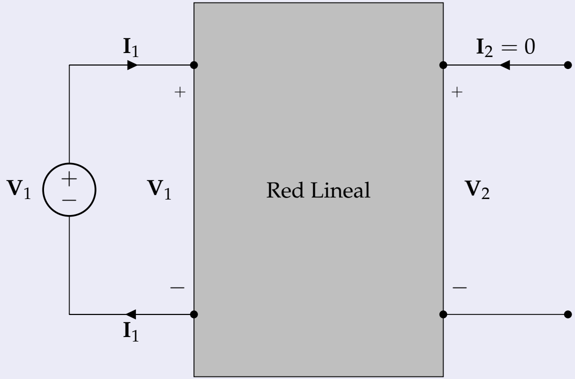
$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{g}_{11}\mathbf{V}_1 + \mathbf{g}_{12}\mathbf{I}_2$$
$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{g}_{21}\mathbf{V}_1 + \mathbf{g}_{22}\mathbf{I}_2$$

Cálculo de parámetros

Salida en abierto

$$\mathbf{g}_{11} = \left.\frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{V}_1}\right|_{\mathbf{I}_2=0}$$

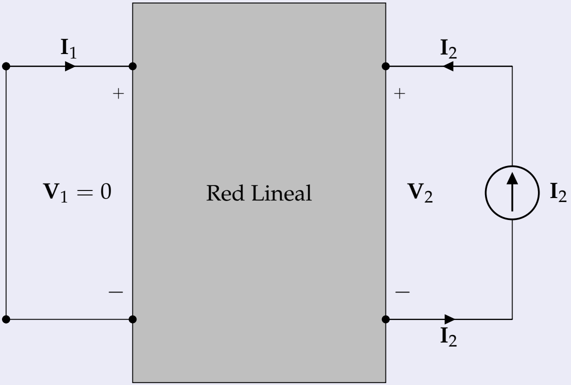
$$\mathbf{g}_{21} = \left.\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1}\right|_{\mathbf{I}_2=0}$$



$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{11} & \mathbf{g}_{12} \\ \mathbf{g}_{21} & \mathbf{g}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}$$

Cálculo de parámetros

Entrada en cortocircuito

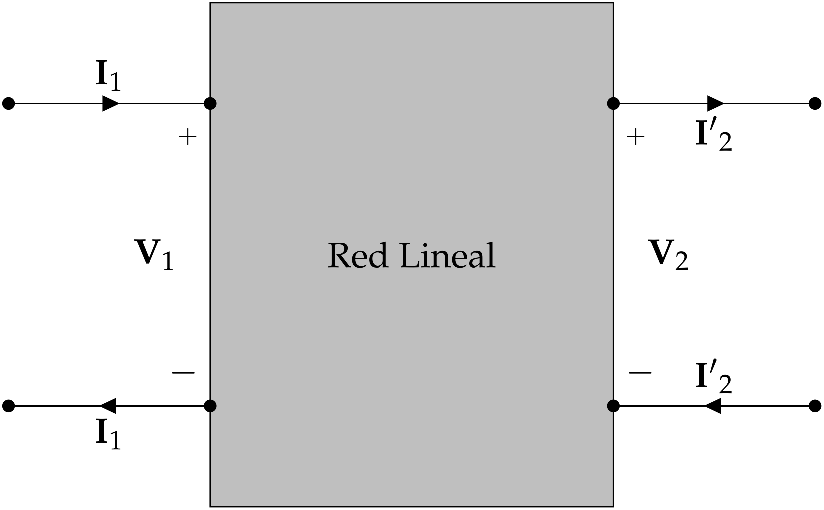


$$\mathbf{g}_{12} = \left.\frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{I}_2}\right|_{\mathbf{V}_1=0}$$

$$\mathbf{g}_{22} = \left.\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{I}_2}\right|_{\mathbf{V}_1=0}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{11} & \mathbf{g}_{12} \\ \mathbf{g}_{21} & \mathbf{g}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}$$

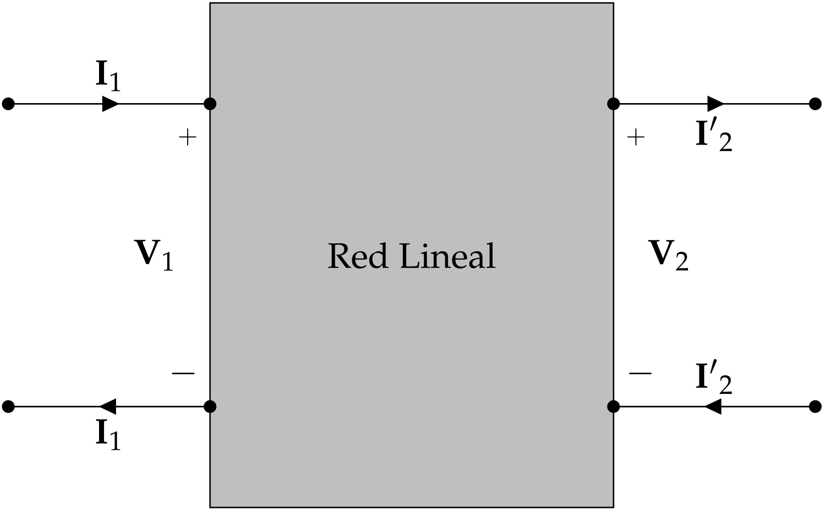
Definición



$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{A}\mathbf{V}_2 + \mathbf{B}\mathbf{I'}_2$$
$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{C}\mathbf{V}_2 + \mathbf{D}\mathbf{I'}_2$$

Atención al sentido de la corriente $\mathbf{I'}_2$ ($\mathbf{I'}_2 = -\mathbf{I}_2$)

Expresión Matricial



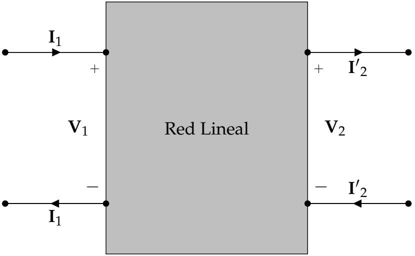
$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{I'}_2 \end{bmatrix}$$

Cálculo de parámetros

Se debe medir el inverso de cada parámetro, dado que la magnitud a medir y la excitación pertenecen al mismo puerto.

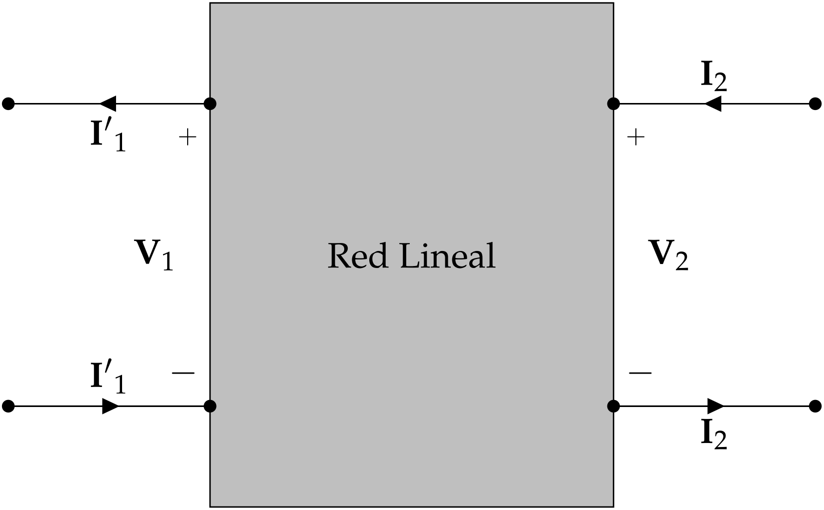
$$\frac{1}{\mathbf{A}} = \left.\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1}\right|_{\mathbf{I}_2=0} \qquad \frac{1}{\mathbf{B}} = \left.\frac{\mathbf{I'}_2}{\mathbf{V}_1}\right|_{\mathbf{V}_2=0}$$

$$\frac{1}{\mathbf{C}} = \left.\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{I}_1}\right|_{\mathbf{I}_2=0} \qquad \frac{1}{\mathbf{D}} = \left.\frac{\mathbf{I'}_2}{\mathbf{I}_1}\right|_{\mathbf{V}_2=0}$$



$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{A}\mathbf{V}_2 + \mathbf{B}\mathbf{I'}_2$$
$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{C}\mathbf{V}_2 + \mathbf{D}\mathbf{I'}_2$$

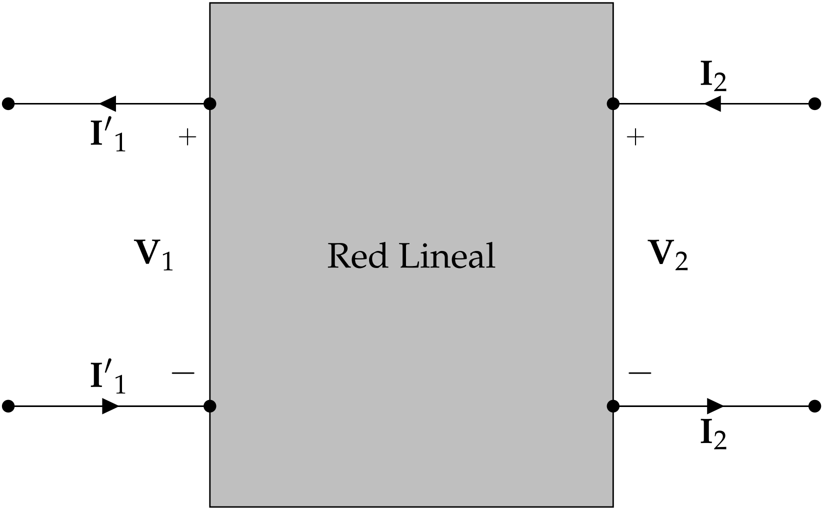
Definición



$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{a}\mathbf{V}_1 + \mathbf{b}\mathbf{I'}_1$$
$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{c}\mathbf{V}_1 + \mathbf{d}\mathbf{I'}_1$$

Atención al sentido de la corriente $\mathbf{I'}_1$ ($\mathbf{I'}_1 = -\mathbf{I}_1$)

Expresión Matricial



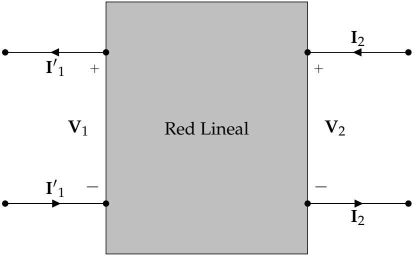
$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{I'}_1 \end{bmatrix}$$

Cálculo de parámetros

Se debe medir el inverso de cada parámetro, dado que la magnitud a medir y la excitación pertenecen al mismo puerto.

$$\frac{1}{\mathbf{a}} = \left.\frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{V}_2}\right|_{\mathbf{I}_1=0} \quad \frac{1}{\mathbf{b}} = \left.\frac{\mathbf{I'}_1}{\mathbf{V}_2}\right|_{\mathbf{V}_1=0}$$

$$\frac{1}{\mathbf{c}} = \left.\frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_2}\right|_{\mathbf{I}_1=0} \quad \frac{1}{\mathbf{d}} = \left.\frac{\mathbf{I'}_1}{\mathbf{I}_2}\right|_{\mathbf{V}_1=0}$$



$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{a}\mathbf{V}_1 + \mathbf{b}\mathbf{I'}_1$$
$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{c}\mathbf{V}_1 + \mathbf{d}\mathbf{I'}_1$$

Impedancia y Admitancia

$$\left.\begin{array}{l} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{11} & \mathbf{z}_{12} \\ \mathbf{z}_{21} & \mathbf{z}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \\ \\ \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{11} & \mathbf{y}_{12} \\ \mathbf{y}_{21} & \mathbf{y}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{[\mathbf{Z}] = [\mathbf{Y}]^{-1}}$$

Híbridos

$$\left.\begin{array}{l}\left[\begin{array}{c}\mathbf{V}_1\\ \mathbf{I}_2\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}\mathbf{h}_{11} & \mathbf{h}_{12}\\ \mathbf{h}_{21} & \mathbf{h}_{22}\end{array}\right]\cdot\left[\begin{array}{c}\mathbf{I}_1\\ \mathbf{V}_2\end{array}\right]\\[2em] \left[\begin{array}{c}\mathbf{I}_1\\ \mathbf{V}_2\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}\mathbf{g}_{11} & \mathbf{g}_{12}\\ \mathbf{g}_{21} & \mathbf{g}_{22}\end{array}\right]\cdot\left[\begin{array}{c}\mathbf{V}_1\\ \mathbf{I}_2\end{array}\right]\end{array}\right\}\rightarrow\boxed{[\mathbf{H}]=[\mathbf{G}]^{-1}}$$

Transmisión

$$\left.\begin{array}{l}\begin{bmatrix}\mathbf{V}_1\\ \mathbf{I}_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}&\mathbf{B}\\ \mathbf{C}&\mathbf{D}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\mathbf{V}_2\\ \mathbf{I'}_2\end{bmatrix}\\[2em] \begin{bmatrix}\mathbf{V}_2\\ \mathbf{I}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{a}&\mathbf{b}\\ \mathbf{c}&\mathbf{d}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\mathbf{V}_1\\ \mathbf{I'}_1\end{bmatrix}\end{array}\right\}\rightarrow\boxed{[\mathbf{T}]\neq[\mathbf{t}]^{-1}}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix}\mathbf{A}&\mathbf{B}\\ \mathbf{C}&\mathbf{D}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{a}&-\mathbf{b}\\ -\mathbf{c}&\mathbf{d}\end{bmatrix}^{-1}}$$

	$\mathbf{z}$		$\mathbf{y}$		$\mathbf{h}$		$\mathbf{g}$		$\mathbf{T}$	
$\mathbf{z}$	$\mathbf{z}_{11}$	$\mathbf{z}_{12}$	$\frac{\mathbf{y}_{22}}{\Delta_y}$	$-\frac{\mathbf{y}_{12}}{\Delta_y}$	$\frac{\Delta_h}{\mathbf{h}_{22}}$	$\frac{\mathbf{h}_{12}}{\mathbf{h}_{22}}$	$\frac{1}{\mathbf{g}_{11}}$	$-\frac{\mathbf{g}_{12}}{\mathbf{g}_{11}}$	$\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{C}}$	$\frac{\Delta_T}{\mathbf{C}}$
	$\mathbf{z}_{21}$	$\mathbf{z}_{22}$	$-\frac{\mathbf{y}_{21}}{\Delta_y}$	$\frac{\mathbf{y}_{11}}{\Delta_y}$	$-\frac{\mathbf{h}_{21}}{\mathbf{h}_{22}}$	$\frac{1}{\mathbf{h}_{22}}$	$\frac{\mathbf{g}_{21}}{\mathbf{g}_{11}}$	$\frac{\Delta_g}{\mathbf{g}_{11}}$	$\frac{1}{\mathbf{C}}$	$\frac{\mathbf{D}}{\mathbf{C}}$
$\mathbf{y}$	$\frac{\mathbf{z}_{22}}{\Delta_z}$	$-\frac{\mathbf{z}_{12}}{\Delta_z}$	$\mathbf{y}_{11}$	$\mathbf{y}_{12}$	$\frac{1}{\mathbf{h}_{11}}$	$-\frac{\mathbf{h}_{12}}{\mathbf{h}_{11}}$	$\frac{\Delta_g}{\mathbf{g}_{22}}$	$\frac{\mathbf{g}_{12}}{\mathbf{g}_{22}}$	$\frac{\mathbf{D}}{\mathbf{B}}$	$-\frac{\Delta_T}{\mathbf{B}}$
	$-\frac{\mathbf{z}_{21}}{\Delta_z}$	$\frac{\mathbf{z}_{11}}{\Delta_z}$	$\mathbf{y}_{21}$	$\mathbf{y}_{22}$	$\frac{\mathbf{h}_{21}}{\mathbf{h}_{11}}$	$\frac{\Delta_h}{\mathbf{h}_{11}}$	$-\frac{\mathbf{g}_{21}}{\mathbf{g}_{22}}$	$\frac{1}{\mathbf{g}_{22}}$	$-\frac{1}{\mathbf{B}}$	$\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}}$
$\mathbf{h}$	$\frac{\Delta_z}{\mathbf{z}_{22}}$	$\frac{\mathbf{z}_{12}}{\mathbf{z}_{22}}$	$\frac{1}{\mathbf{y}_{11}}$	$-\frac{\mathbf{y}_{12}}{\mathbf{y}_{11}}$	$\mathbf{h}_{11}$	$\mathbf{h}_{12}$	$\frac{\mathbf{g}_{22}}{\Delta_g}$	$-\frac{\mathbf{g}_{12}}{\Delta_g}$	$\frac{\mathbf{B}}{\mathbf{D}}$	$\frac{\Delta_T}{\mathbf{D}}$
	$-\frac{\mathbf{z}_{21}}{\mathbf{z}_{22}}$	$\frac{1}{\mathbf{z}_{22}}$	$\frac{\mathbf{y}_{21}}{\mathbf{y}_{11}}$	$\frac{\Delta_y}{\mathbf{y}_{11}}$	$\mathbf{h}_{21}$	$\mathbf{h}_{22}$	$-\frac{\mathbf{g}_{21}}{\Delta_g}$	$\frac{\mathbf{g}_{11}}{\Delta_g}$	$-\frac{1}{\mathbf{D}}$	$\frac{\mathbf{C}}{\mathbf{D}}$
$\mathbf{g}$	$\frac{1}{\mathbf{z}_{11}}$	$-\frac{\mathbf{z}_{12}}{\mathbf{z}_{11}}$	$\frac{\Delta_y}{\mathbf{y}_{22}}$	$\frac{\mathbf{y}_{12}}{\mathbf{y}_{22}}$	$\frac{\mathbf{h}_{22}}{\Delta_h}$	$-\frac{\mathbf{h}_{12}}{\Delta_h}$	$\mathbf{g}_{11}$	$\mathbf{g}_{12}$	$\frac{\mathbf{C}}{\mathbf{A}}$	$-\frac{\Delta_T}{\mathbf{A}}$
	$\frac{\mathbf{z}_{21}}{\mathbf{z}_{11}}$	$\frac{\Delta_z}{\mathbf{z}_{11}}$	$-\frac{\mathbf{y}_{21}}{\mathbf{y}_{22}}$	$\frac{1}{\mathbf{y}_{22}}$	$-\frac{\mathbf{h}_{21}}{\Delta_h}$	$\frac{\mathbf{h}_{11}}{\Delta_h}$	$\mathbf{g}_{21}$	$\mathbf{g}_{22}$	$\frac{1}{\mathbf{A}}$	$\frac{\mathbf{B}}{\mathbf{A}}$
$\mathbf{T}$	$\frac{\mathbf{z}_{11}}{\mathbf{z}_{21}}$	$\frac{\Delta_z}{\mathbf{z}_{21}}$	$-\frac{\mathbf{y}_{22}}{\mathbf{y}_{21}}$	$-\frac{1}{\mathbf{y}_{21}}$	$-\frac{\Delta_h}{\mathbf{h}_{21}}$	$-\frac{\mathbf{h}_{11}}{\mathbf{h}_{21}}$	$\frac{1}{\mathbf{g}_{21}}$	$\frac{\mathbf{g}_{22}}{\mathbf{g}_{21}}$	$\mathbf{A}$	$\mathbf{B}$
	$\frac{1}{\mathbf{z}_{21}}$	$\frac{\mathbf{z}_{22}}{\mathbf{z}_{21}}$	$-\frac{\Delta_y}{\mathbf{y}_{21}}$	$-\frac{\mathbf{y}_{11}}{\mathbf{y}_{21}}$	$-\frac{\mathbf{h}_{22}}{\mathbf{h}_{21}}$	$-\frac{1}{\mathbf{h}_{21}}$	$\frac{\mathbf{g}_{11}}{\mathbf{g}_{21}}$	$\frac{\Delta_g}{\mathbf{g}_{21}}$	$\mathbf{C}$	$\mathbf{D}$
$\mathbf{t}$	$\frac{\mathbf{z}_{22}}{\mathbf{z}_{12}}$	$\frac{\Delta_z}{\mathbf{z}_{12}}$	$-\frac{\mathbf{y}_{11}}{\mathbf{y}_{12}}$	$-\frac{1}{\mathbf{y}_{12}}$	$\frac{1}{\mathbf{h}_{12}}$	$\frac{\mathbf{h}_{11}}{\mathbf{h}_{12}}$	$-\frac{\Delta_g}{\mathbf{g}_{12}}$	$-\frac{\mathbf{g}_{22}}{\mathbf{g}_{12}}$	$\frac{\mathbf{D}}{\Delta_T}$	$\frac{\mathbf{B}}{\Delta_T}$
	1	$\mathbf{z}_{11}$	Δ_y	$\mathbf{y}_{22}$	$\mathbf{h}_{22}$	Δ_h	$\mathbf{g}_{11}$	1	$\mathbf{C}$	$\mathbf{A}$

Reciprocidad

A partir de las relaciones ya obtenidas para impedancia y admitancia, utilizando la tabla anterior obtenemos la relación para parámetros híbridos y de transmisión:

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{z_{12}} = \mathbf{z_{21}} \\ \mathbf{y_{12}} = \mathbf{y_{21}}\end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l}\mathbf{h_{12}} = -\mathbf{h_{21}} \\ \mathbf{g_{12}} = -\mathbf{g_{21}} \\ \mathbf{AD} - \mathbf{BC} = 1 \\ \mathbf{ad} - \mathbf{bc} = 1\end{array}\right.$$

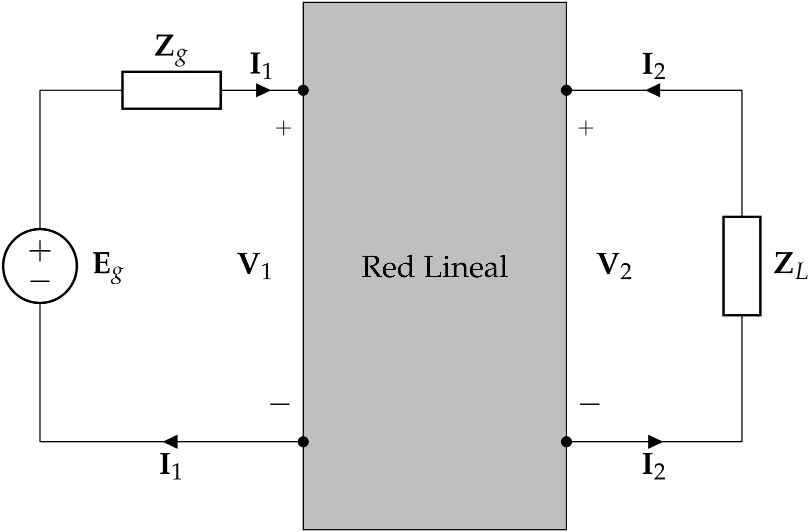
Simetría

A partir de las relaciones ya obtenidas para impedancia y admitancia, utilizando la tabla anterior obtenemos la relación para parámetros híbridos y de transmisión:

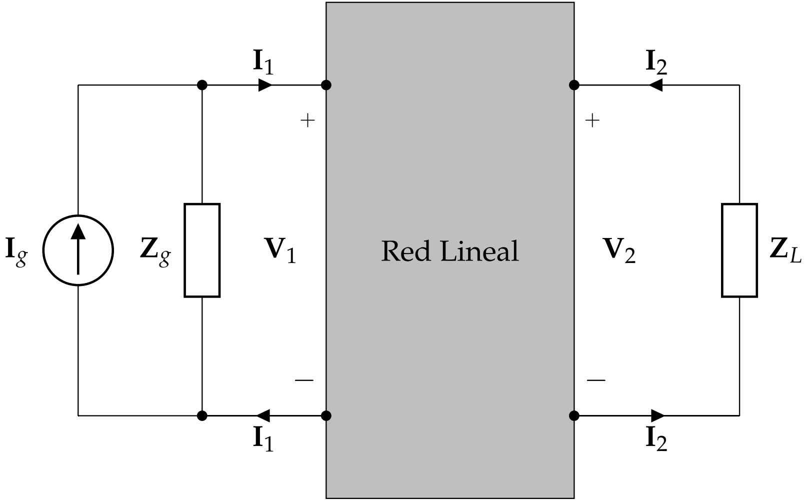
$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{z_{11}} = \mathbf{z_{22}} \\ \mathbf{y_{11}} = \mathbf{y_{22}} \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \mathbf{h_{11}} \cdot \mathbf{h_{22}} - \mathbf{h_{12}}^2 = 1 \\ \mathbf{g_{11}} \cdot \mathbf{g_{22}} - \mathbf{g_{12}}^2 = 1 \\ \mathbf{A} = \mathbf{D} \\ \mathbf{a} = \mathbf{d} \end{array}\right.$$

Además:

$$\boxed{[\mathbf{T}] = [\mathbf{t}]}$$

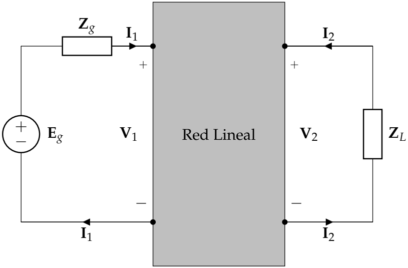


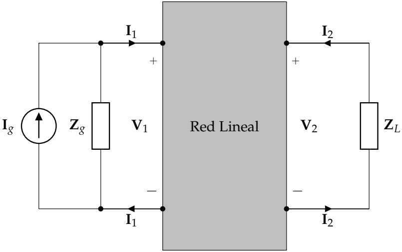
$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{E}_g - \mathbf{Z}_g \cdot \mathbf{I}_1$$
$$\mathbf{V}_2 = -\mathbf{Z}_L \cdot \mathbf{I}_2$$



$$\mathbf{V}_1 = (\mathbf{I}_g - \mathbf{I}_1) \cdot \mathbf{Z}_g$$
$$\mathbf{V}_2 = -\mathbf{Z}_L \cdot \mathbf{I}_2$$

Ganancia





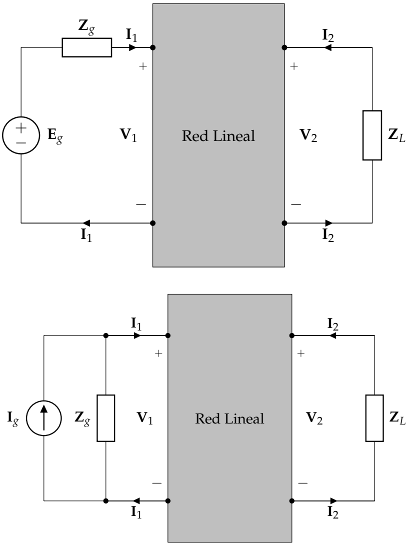
- Ganancia de Tensión

$$\mathbf{A}_V = \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{E}_g}$$

- Ganancia de Corriente

$$\mathbf{A}_I = \frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_g}$$

Impedancia



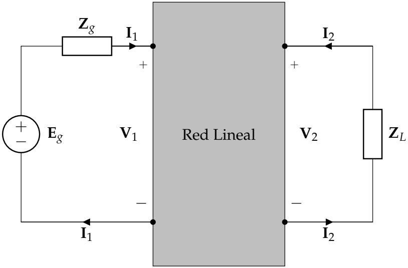
- Impedancia de Entrada

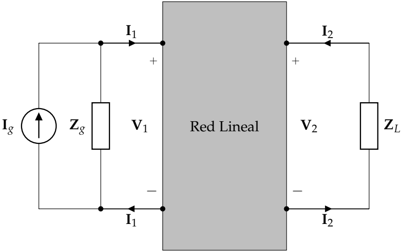
$$\mathbf{Z}_i = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1}$$

- Impedancia de Salida

$$\mathbf{Z}_o = \left.\frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{I}_2}\right|_{\mathbf{E}_g=0}$$

Transferencia





- Transadmitancia directa

$$\mathbf{Y}_f = \frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{E}_g}$$

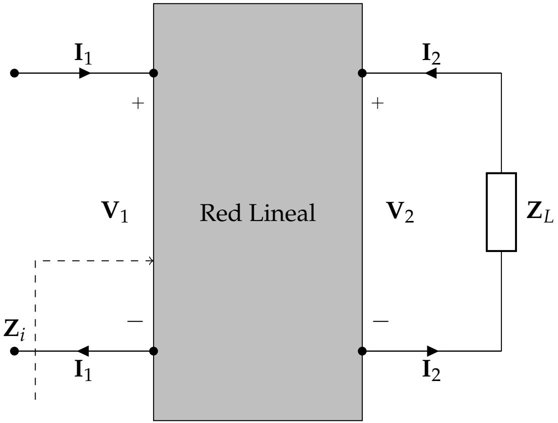
- Transimpedancia directa

$$\mathbf{Z}_f = \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{I}_g}$$

Ejercicio de Cálculo (1)

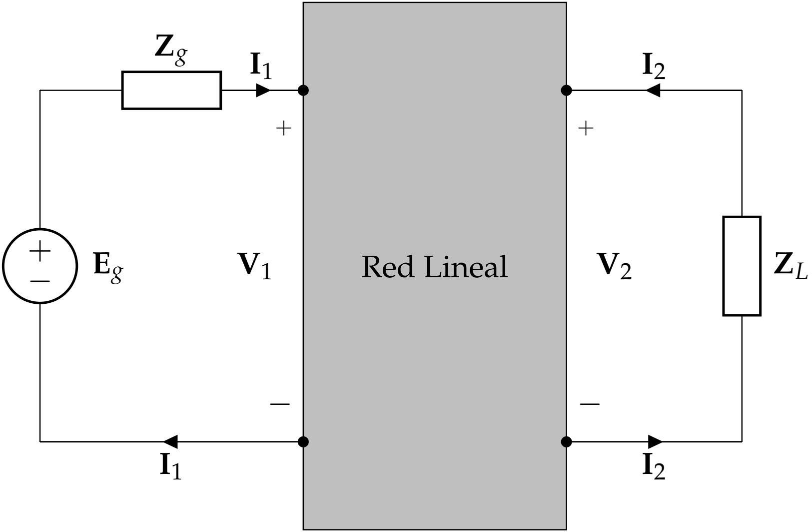
Demuestra que la impedancia de entrada del circuito a la derecha de la fuente real expresada con parámetros de transmisión es:

$$\mathbf{Z}_i = \frac{\mathbf{A}\mathbf{Z}_L + \mathbf{B}}{\mathbf{C}\mathbf{Z}_L + \mathbf{D}}$$



Ejercicio de Cálculo (2)

¿Qué impedancia de carga $\mathbf{Z}_L$ hay que conectar a la salida del cuadripolo para obtener la máxima transferencia de potencia?

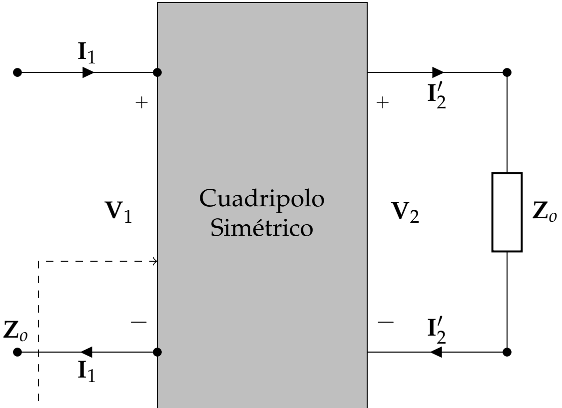


Impedancia Característica

Para un cuadripolo **recíproco** y **simétrico** se definen los parámetros imagen:

- **Impedancia característica**, $\mathbf{Z}_o$: impedancia que, conectada en una puerta, hace que desde la otra puerta se vea la misma impedancia.

$$\mathbf{Z}_o = \frac{\mathbf{U}_1}{\mathbf{I}_1}$$



$$\mathbf{Z}_o = \frac{\mathbf{A}\mathbf{Z}_o + \mathbf{B}}{\mathbf{C}\mathbf{Z}_o + \mathbf{D}}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} \rightarrow \boxed{\mathbf{Z}_o = \pm\sqrt{\frac{\mathbf{B}}{\mathbf{C}}}}$$

Impedancia Característica

Atención

La ecuación proporciona dos soluciones, una de las cuáles implicará una impedancia no viable (*resistencia negativa*).

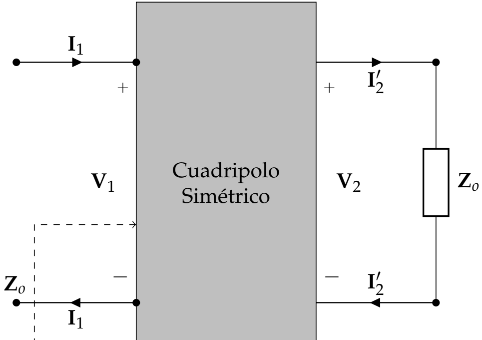
$$\boxed{\mathbf{Z}_0 = \pm\sqrt{\frac{\mathbf{B}}{\mathbf{C}}}}$$

Función de Propagación

Para un cuadripolo **recíproco** y **simétrico** se definen los parámetros imagen:

- **Función de propagación**, γ: relacionada con el cociente de potencias en las puertas del cuadripolo cuando una de ellas está cargada con $\mathbf{Z}_o$

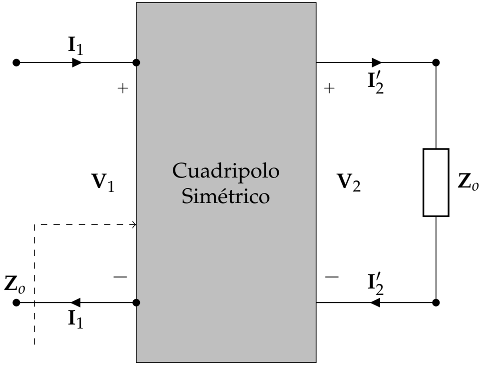
$$\exp(2\gamma) = \frac{\mathbf{U}_1\mathbf{I}_1}{\mathbf{U}_2\mathbf{I}_2'}$$



$$\mathbf{U}_1 = \mathbf{I}_1\mathbf{Z}_o$$
$$\mathbf{U}_2 = \mathbf{I}_2'\mathbf{Z}_o$$

$$\boxed{\exp(\gamma) = \frac{\mathbf{U}_1}{\mathbf{U}_2} = \frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{I}_2'}}$$

Relación entre $\mathbf{Z}_o$ y γ



$$\exp(\gamma) = \frac{\mathbf{U}_1}{\mathbf{U}_2} = \frac{\mathbf{A}\mathbf{U}_2 + \mathbf{B}\mathbf{I}_2'}{\mathbf{U}_2} = \mathbf{A} + \mathbf{B}\frac{\mathbf{I}_2'}{\mathbf{U_2}}$$

$$\boxed{\exp(\gamma) = \mathbf{A} + \frac{\mathbf{B}}{\mathbf{Z}_o}}$$

Relación entre $\mathbf{Z}_o$ y γ

Teniendo en cuenta la expresión de $\mathbf{Z}_o$:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{Z}_o = \pm\sqrt{\frac{\mathbf{B}}{\mathbf{C}}} \\ \exp(\gamma) = \mathbf{A} + \frac{\mathbf{B}}{\mathbf{Z}_o} \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{\exp(\gamma) = \mathbf{A} \pm \sqrt{\mathbf{BC}}}$$

Además, teniendo en cuenta la relación de un cuadripolo recíproco y simétrico:

$$\mathbf{A}^2 - \mathbf{BC} = 1 \rightarrow \boxed{\exp(\gamma) = \mathbf{A} \pm \sqrt{\mathbf{A}^2 - 1}}$$

Atención al signo que acompaña a las raíces cuadradas. Se debe elegir de forma que la parte real de γ sea acorde al cuadripolo.

Transmisión a partir de Imagen

$$\mathbf{A}^2 - \mathbf{BC} = 1$$

$$e^{\gamma} = \mathbf{A} + \sqrt{\mathbf{A}^2 - 1}$$

$$\mathbf{Z}_o = \sqrt{\frac{\mathbf{B}}{\mathbf{C}}}$$

$$\cosh(\gamma) = \frac{e^{\gamma} + e^{-\gamma}}{2}$$

$$\sinh(\gamma) = \frac{e^{\gamma} - e^{-\gamma}}{2}$$

$$\cosh^2(\gamma) - \sinh^2(\gamma) = 1$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \mathbf{A} = \cosh(\gamma) & \mathbf{B} = \mathbf{Z}_o \sinh(\gamma) \\ \mathbf{C} = \sinh(\gamma)/\mathbf{Z}_o & \mathbf{D} = \cosh(\gamma) \end{array}}$$

Régimen Permanente Sinusoidal

Cuando el circuito funciona en régimen permanente sinusoidal:

- La función de propagación es un número complejo denominado constante de propagación.

$$\overline{\gamma} = \alpha + j\beta$$

- Las tensiones y corrientes son fasores

$$\exp(\overline{\gamma}) = \exp(\alpha) \cdot \exp(j\beta) = \frac{\overline{U}_1}{\overline{U}_2} = \frac{\bar{I}_1}{\bar{I}'_2}$$

Régimen Permanente Sinusoidal

- **Constante de Atenuación** (cuando $\alpha > 1$ el cuadripolo atenúa la salida respecto de la entrada)

$$\exp(\alpha) = \frac{U_1}{U_2} = \frac{I_1}{I_2}$$

- **Constante de Fase** (desfase entre puertos)

$$\beta = \theta_{\overline{U}_1} - \theta_{\overline{U}_2} = \theta_{\bar{I}_1} - \theta_{\bar{I}_2'}$$

Atenuación de Potencia

Cuando está conectada la impedancia característica, las potencias activas en los puertos se expresan:

$$P_1 = U_1 I_1 \cos(\theta_o)$$
$$P_2 = U_2 I_2 \cos(\theta_o)$$

donde θ_o es el ángulo de la impedancia $\overline{Z}_o$.
Por tanto, la relación de potencias activas es:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{U_1 I_1}{U_2 I_2}$$

Teniendo en cuenta la expresión de la constante de atenuación, esta relación es:

$$\exp(\alpha) = \frac{U_1}{U_2} = \frac{I_1}{I_2} \rightarrow \boxed{\exp(2\alpha) = \frac{U_1 I_1}{U_2 I_1} = \frac{P_1}{P_2}}$$

Conexiones

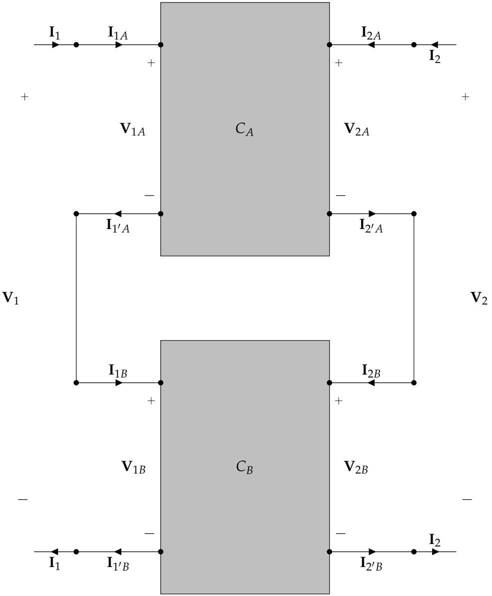
Definición

- **Serie**: misma corriente, suma de tensiones
- **Paralelo**: misma tensión, suma de corrientes

Catálogo

- Serie-Serie: **parámetros impedancia**
- Paralelo-Paralelo: **parámetros admitancia**
- Serie-Paralelo: **parámetros híbridos**
- Paralelo-Serie: **parámetros híbridos inversos**
- Cascada: **parámetros transmisión/imagen**

Conexión



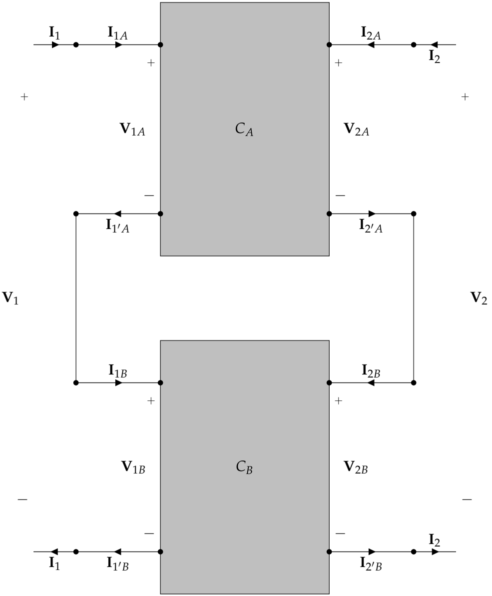
Tensiones

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_{1A} + \mathbf{V}_{1B}$$
$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_{2A} + \mathbf{V}_{2B}$$

Condición de Puerto

$$\mathbf{I}_{1A} = \mathbf{I}_{1'A}$$
$$\mathbf{I}_{1B} = \mathbf{I}_{1'B}$$
$$\mathbf{I}_{2A} = \mathbf{I}_{2'A}$$
$$\mathbf{I}_{2B} = \mathbf{I}_{2'B}$$

Cuadripolo Equivalente



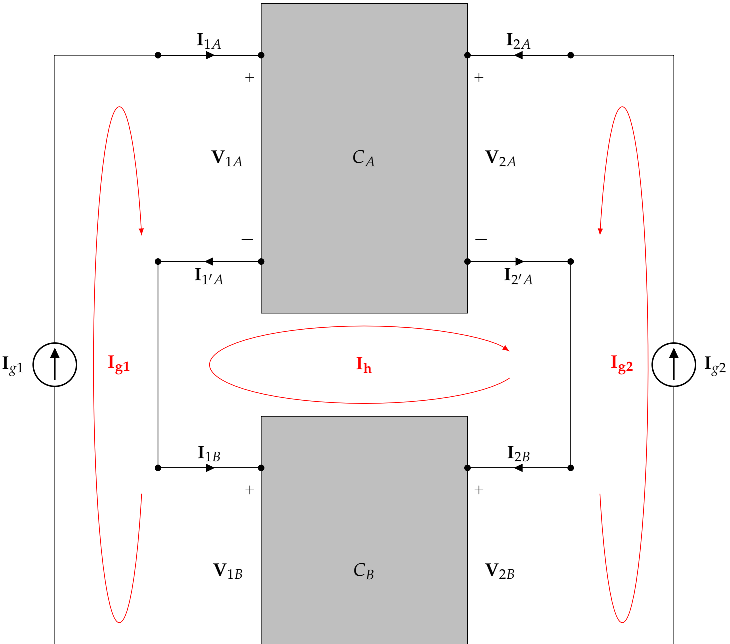
Parámetros Impedancia

$$[\mathbf{V}_A] = [\mathbf{Z}_A] \cdot [\mathbf{I}_A]$$
$$[\mathbf{V}_B] = [\mathbf{Z}_B] \cdot [\mathbf{I}_B]$$

Cuadripolo Equivalente

$$\boxed{[\mathbf{Z}] = [\mathbf{Z}_A] + [\mathbf{Z}_B]}$$

Interacción



- Entrad

$$\mathbf{I}_{1A} = \mathbf{I}_{g}$$
$$\mathbf{I}_{1'A} = \mathbf{I}_{g}$$

- Salida

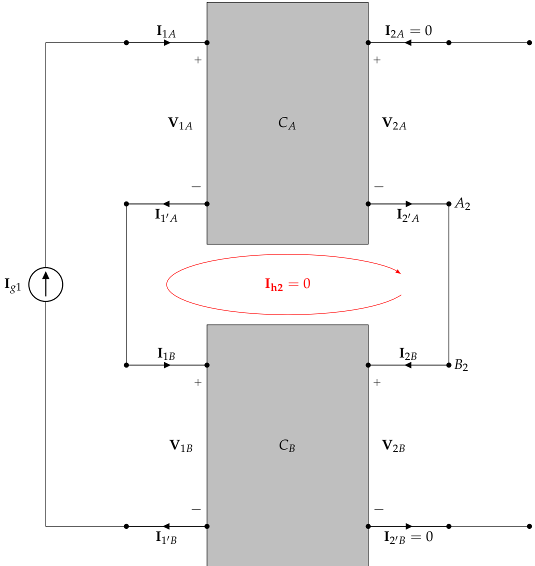
$$\mathbf{I}_{2A} = \mathbf{I}_{g}$$
$$\mathbf{I}_{2'A} = \mathbf{I}_{g}$$

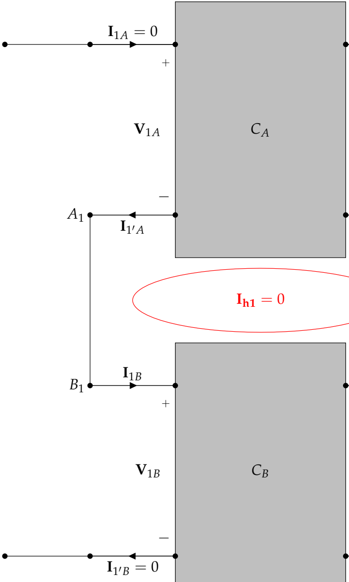
- Condic
  Puerto

$$\boxed{\mathbf{I}_h =}$$

Interacción

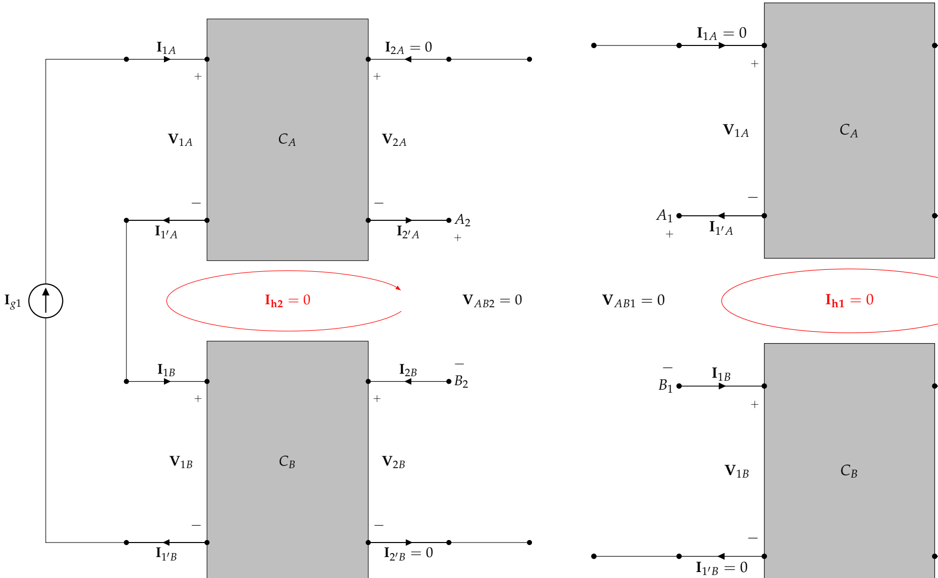
Si no hay interacción, al aplicar superposición la corriente de circulación debe ser nula **en ambos casos**.



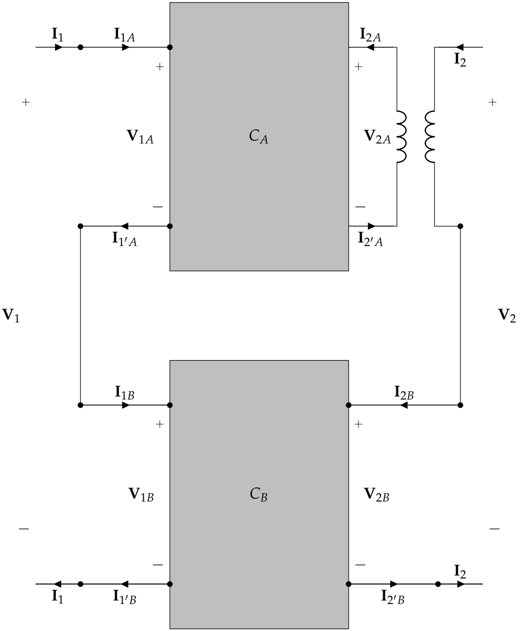


Test de Brune

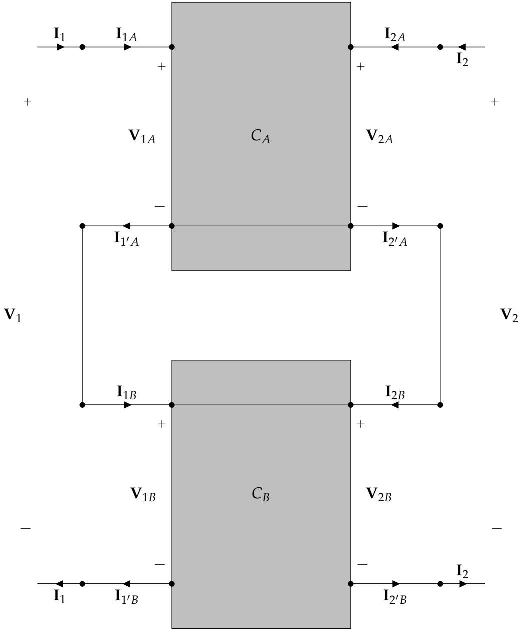
Aplicando superposición desconectamos los cuadripolos: **si no hay interacción, no habrá cambio de tensión**.



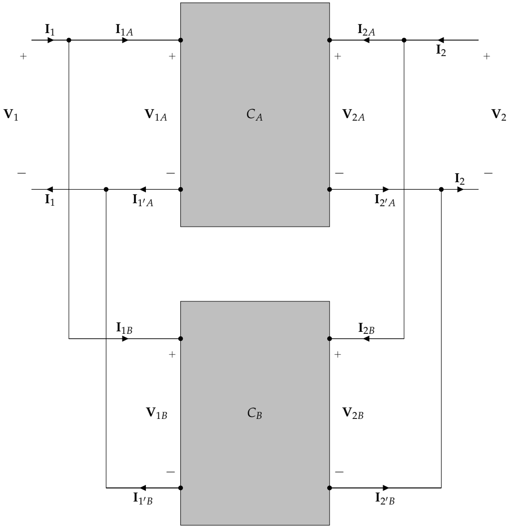
Métodos para evitar interacción



Métodos para evitar interacción



Conexión



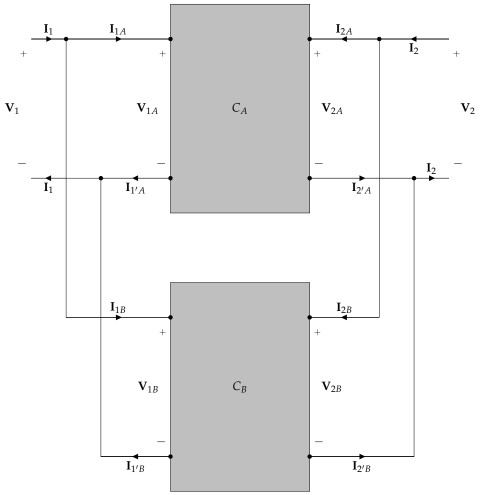
Corrientes

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_{1A} + \mathbf{I}_{1B}$$
$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_{2A} + \mathbf{I}_{2B}$$

Condición de Puerto

$$\mathbf{I}_{1A} = \mathbf{I}_{1'A}$$
$$\mathbf{I}_{1B} = \mathbf{I}_{1'B}$$
$$\mathbf{I}_{2A} = \mathbf{I}_{2'A}$$
$$\mathbf{I}_{2B} = \mathbf{I}_{2'B}$$

Cuadripolo Equivalente



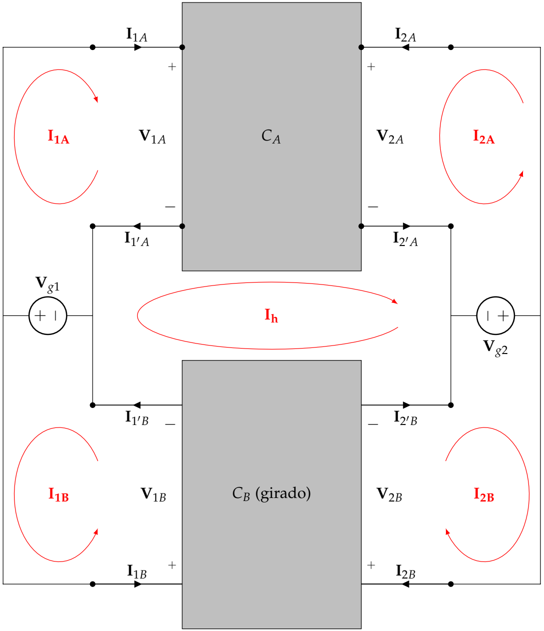
Parámetros Admitancia

$$[\mathbf{I}_A] = [\mathbf{Y}_A] \cdot [\mathbf{V}_A]$$
$$[\mathbf{I}_B] = [\mathbf{Y}_B] \cdot [\mathbf{V}_B]$$

Cuadripolo Equivalente

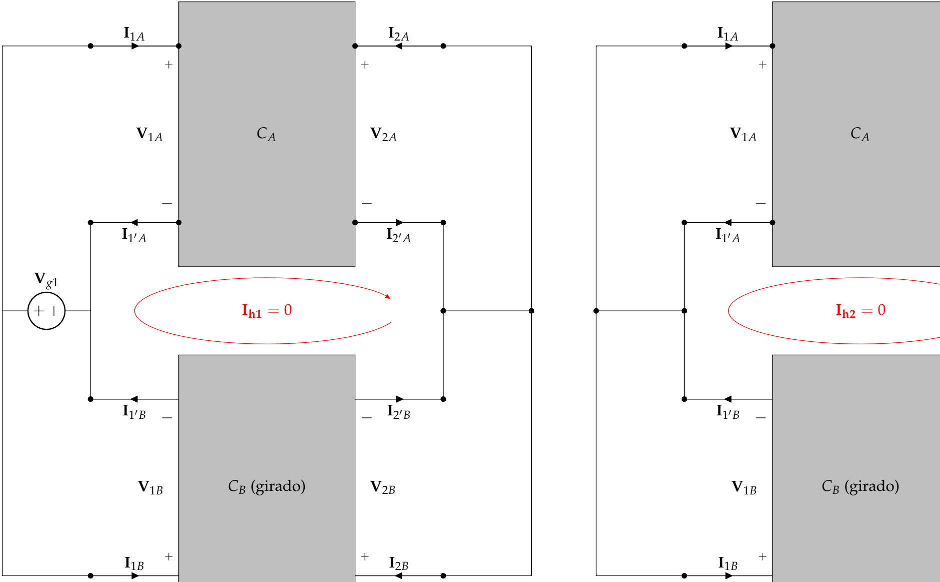
$$\boxed{[\mathbf{Y}] = [\mathbf{Y}_A] + [\mathbf{Y}_B]}$$

Interacción



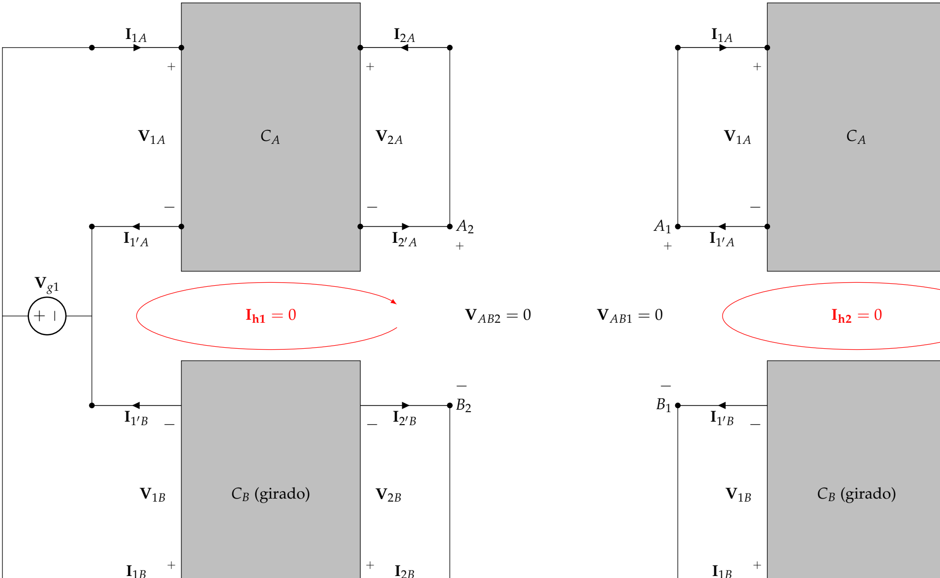
Interacción

Si no hay interacción, al aplicar superposición la corriente de circulación debe ser nula **en ambos casos**.



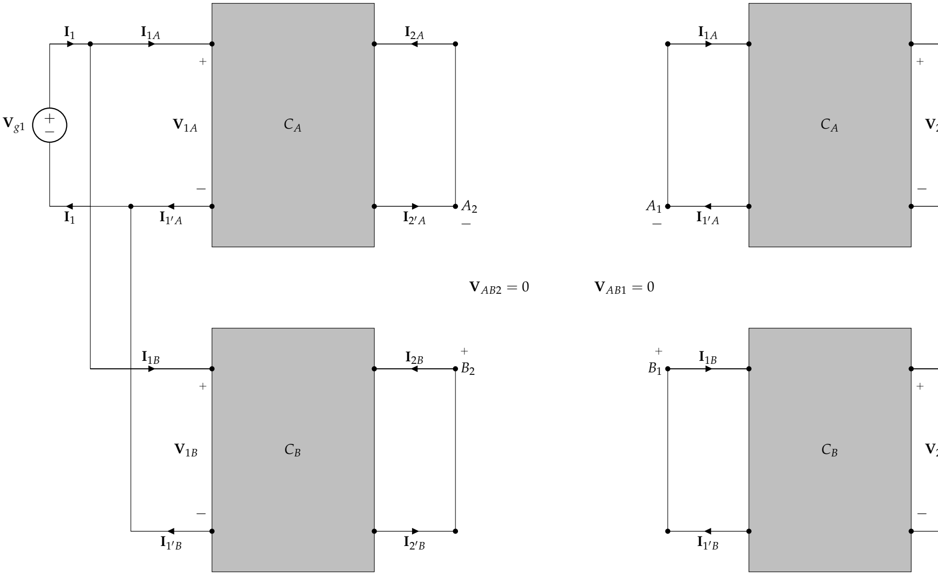
Test de Brune

Aplicando superposición desconectamos los cuadripolos: **si no hay interacción, no habrá cambio de tensión**.

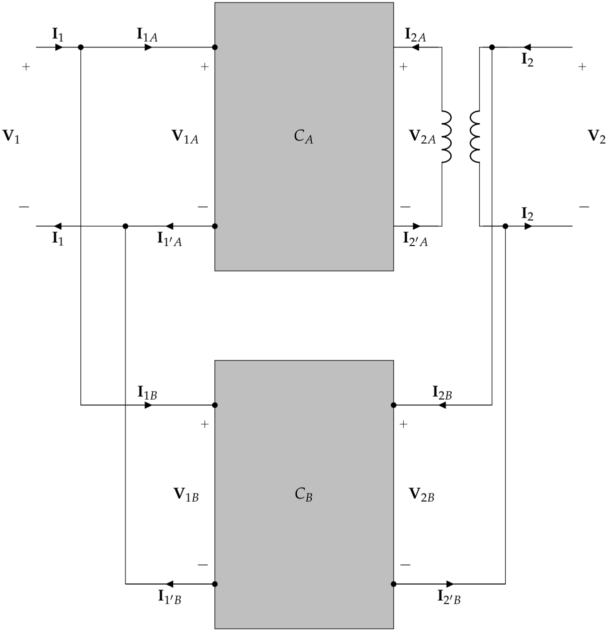


Test de Brune

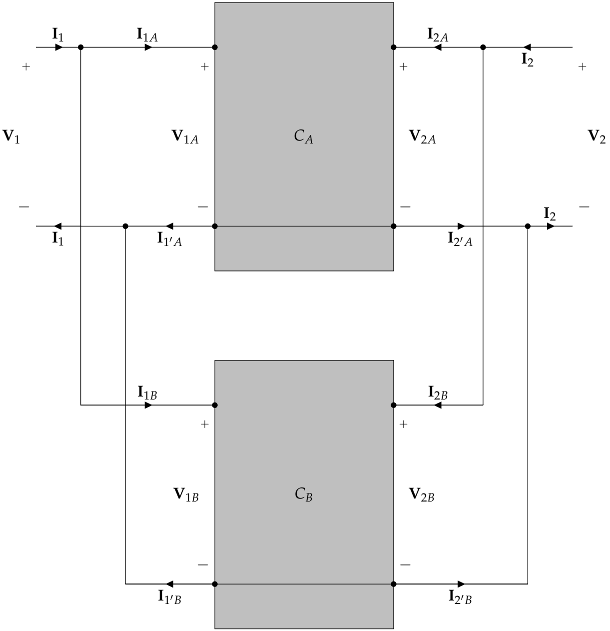
Aplicando superposición desconectamos los cuadripolos: **si no hay interacción, no habrá cambio de tensión**.



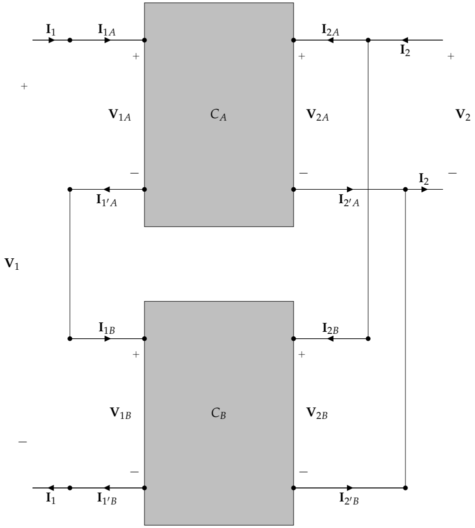
Métodos para evitar interacción



Métodos para evitar interacción



Conexión



Relaciones

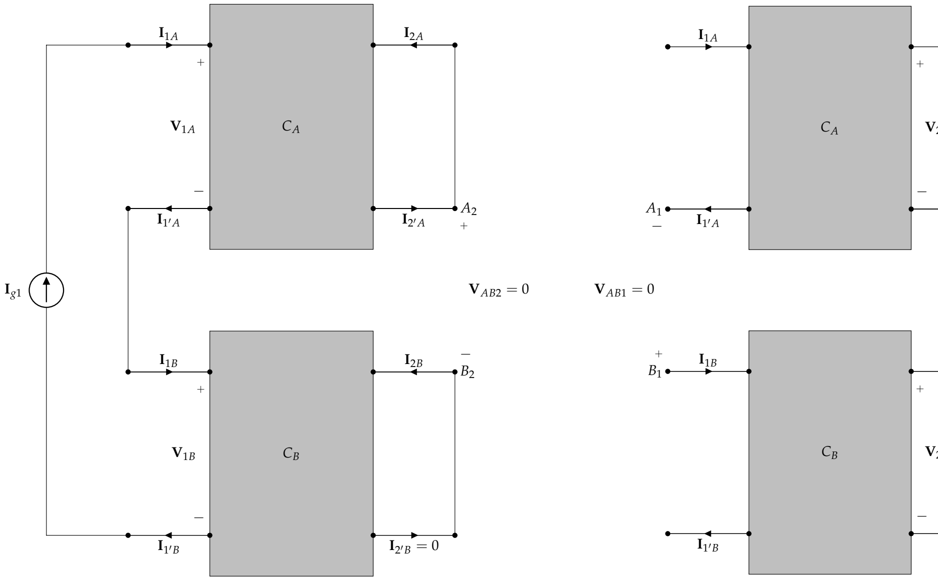
$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_{1A} + \mathbf{V}_{1B}$$
$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_{2A} + \mathbf{I}_{2B}$$

Cuadripolo Equivalente

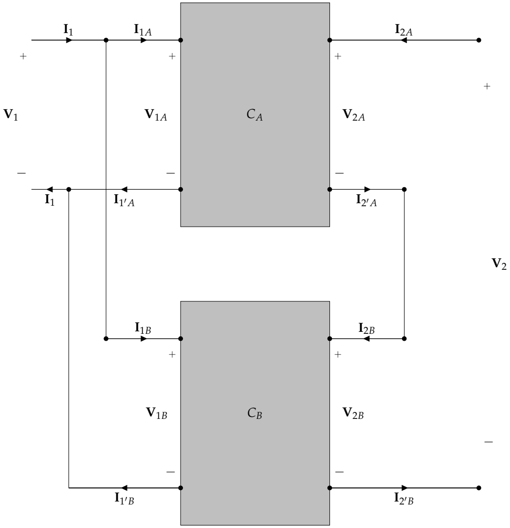
$$\boxed{[\mathbf{H}] = [\mathbf{H}_A] + [\mathbf{H}_B]}$$

Test de Brune

Aplicando superposición desconectamos los cuadripolos: **si no hay interacción, no habrá cambio de tensión**.



Conexión



Relaciones

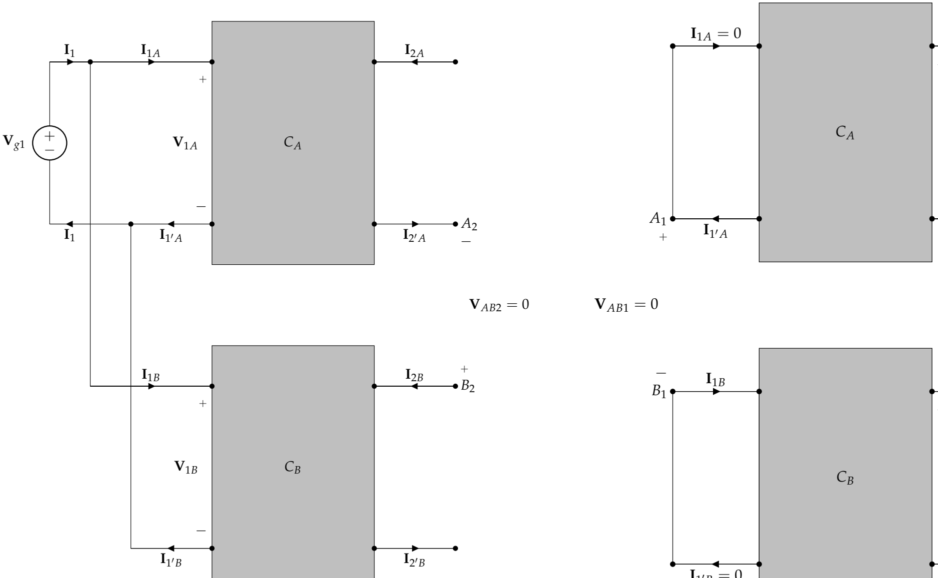
$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_{1A} + \mathbf{I}_{1B}$$
$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_{2A} + \mathbf{V}_{2B}$$

Cuadripolo Equivalente

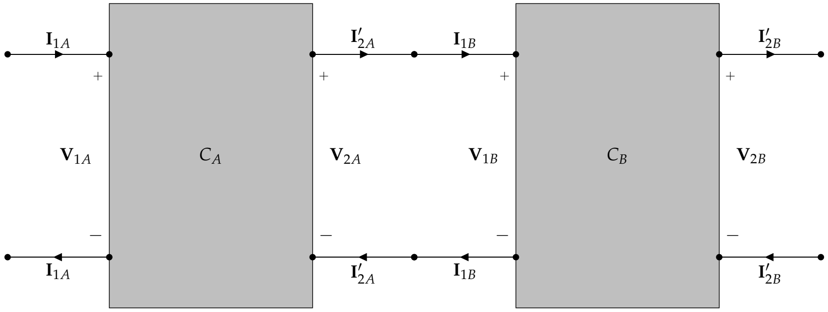
$$\boxed{[\mathbf{G}] = [\mathbf{G}_A] + [\mathbf{G}_B]}$$

Test de Brune

Aplicando superposición desconectamos los cuadripolos: **si no hay interacción, no habrá cambio de tensión**.



Conexión



$$\mathbf{V}_{2A} = \mathbf{V}_{1B}$$
$$\mathbf{I}'_{2A} = \mathbf{I}_{1B}$$

$$\boxed{[\mathbf{T}] = [\mathbf{T}_A] \cdot [\mathbf{T}_B]}$$