

Corriente alterna sinusoidal

Teoría de Circuitos

Oscar Perpiñán Lamigueiro

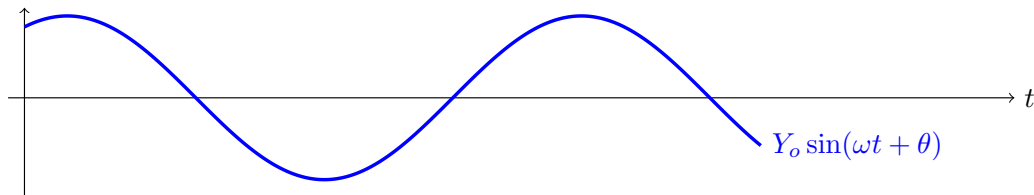
① Conceptos Fundamentales

② Cálculo Fasorial

③ Potencia

④ Compensación de reactiva

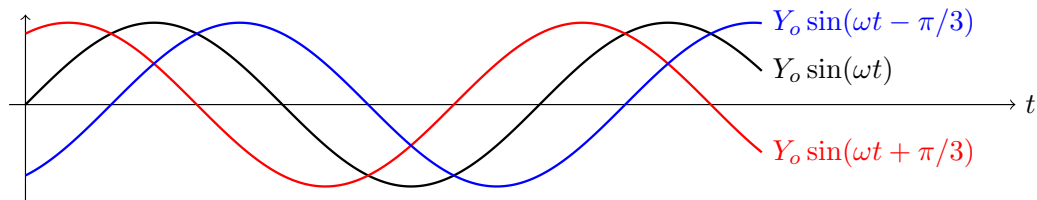
Onda sinusoidal



$$y(t) = Y_o \cdot \sin(\omega \cdot t + \theta)$$

- ▶ Y_o valor máximo de la onda.
- ▶ $\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T}$: pulsación (radianes/segundo)
- ▶ T : periodo de la onda (segundos)
- ▶ $f = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} = \frac{1}{T}$: frecuencia (Hz)

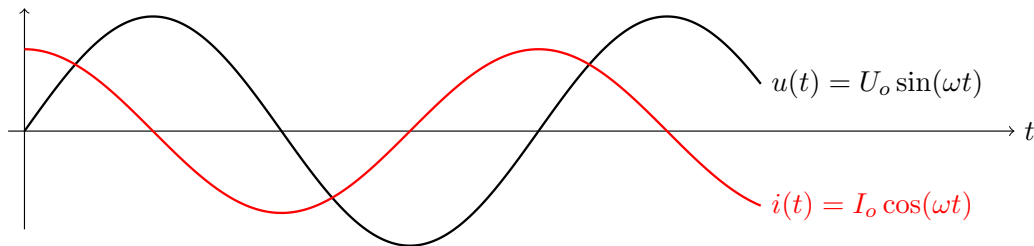
Fase



$$y(t) = Y_o \cdot \sin(\omega \cdot t + \theta)$$

- ▶ θ : fase (radianes o grados)
 - ▶ Es el argumento de la onda para $t=0$
 - ▶ Tomando una onda como referencia, si la fase es 0° , se dice que están en fase con la onda de referencia.
 - ▶ Si la fase es positiva, se dice que la onda adelanta respecto a la referencia.

Señales en Cuadratura



- ▶ Cuando el desfase entre dos señales es de 90° ($\theta_I - \theta_U = \pi/2$), se dice que están en cuadratura.
- ▶ El paso por cero de una señal coincide con el paso por el máximo/mínimo de la otra señal.

Valor medio y valor eficaz

Valor medio

$$Y_m = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt$$

$$Y_m = \frac{1}{T} \int_0^T Y_o \cdot \sin(\omega \cdot t + \theta) dt = 0$$

Valor eficaz

$$Y = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T y^2(t) dt}$$

$$Y = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T (Y_o \cdot \sin(\omega \cdot t + \theta))^2 dt} = \boxed{\frac{Y_o}{\sqrt{2}}}$$

① Conceptos Fundamentales

② Cálculo Fasorial

③ Potencia

④ Compensación de reactiva

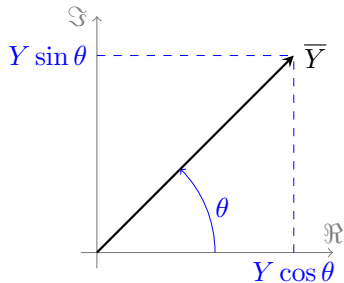
Representación fasorial

- ▶ Un fasor es un **número complejo** que representa una señal sinusoidal para simplificar cálculos.
- ▶ El **módulo** del fasor es el **valor eficaz**. El **argumento** es la **fase**.
- ▶ Descartamos pulsación: No se puede emplear cuando hay frecuencias diferentes en un mismo circuito.

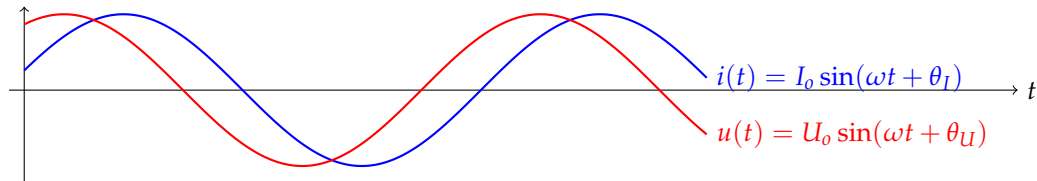
$$\bar{Y} = Y \cdot e^{j\theta}$$

$$\bar{Y} = Y \angle \theta$$

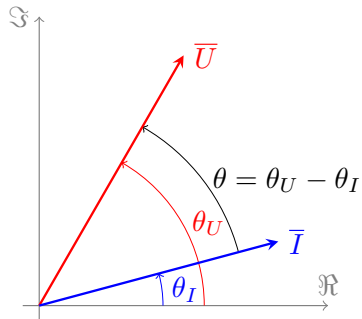
$$\bar{Y} = Y \cdot (\cos(\theta) + j \cdot \sin(\theta))$$



Tensión y corriente en notación fasorial



$$\bar{U} = U/\theta_U$$
$$\bar{I} = I/\theta_I$$

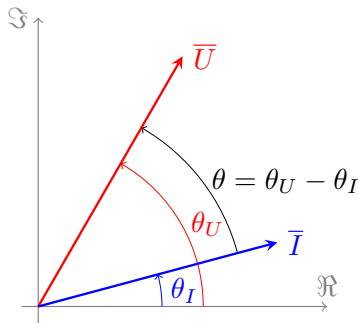


Impedancia: relación entre fasores de tensión y corriente

$$\bar{U} = \bar{Z} \cdot \bar{I}$$

$$\bar{Z} = \frac{\bar{U}}{\bar{I}}$$

$$\bar{Z} = \frac{U}{I} \angle \theta_U - \theta_I \Rightarrow \begin{cases} Z = \frac{U}{I} \\ \theta = \theta_U - \theta_I \end{cases}$$

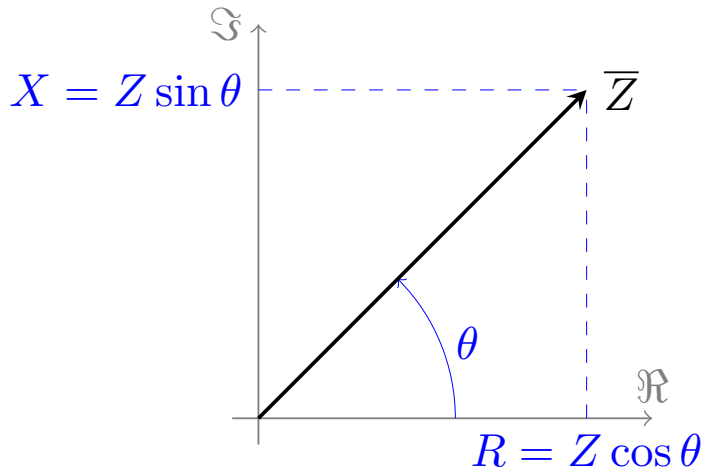


Convenio de origen de fases

$$\theta_U = 0 \Rightarrow \begin{cases} Z = \frac{U}{I} \\ \theta = -\theta_I \end{cases}$$

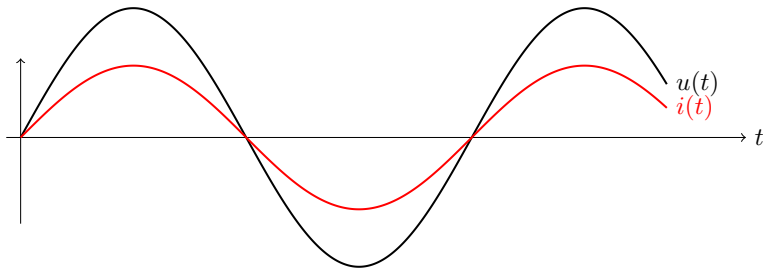
Impedancia Genérica

$$\bar{Z} = R + jX$$



Circuito Resistivo

Un circuito resistivo no desfasa (**tensión y corriente en fase**).

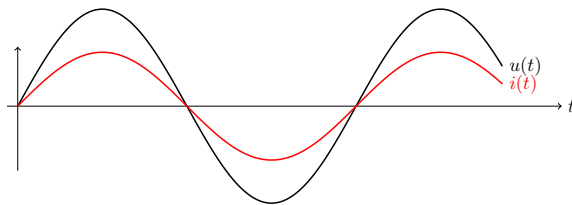


$$i(t) = I_o \cdot \sin(\omega t + \theta_I)$$

$$\begin{aligned} u(t) &= R \cdot i(t) = \\ &= RI_o \cdot \sin(\omega t + \theta_I + 0) = \\ &= U_o \cdot \sin(\omega t + \theta_I + 0) \end{aligned}$$

Circuito Resistivo

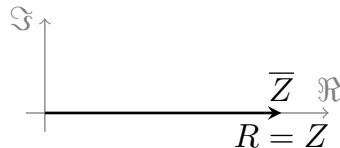
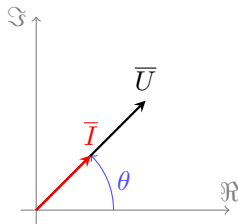
Un circuito resistivo no desfasa (**tensión y corriente en fase**).



$$Z = \frac{U}{I} = R$$

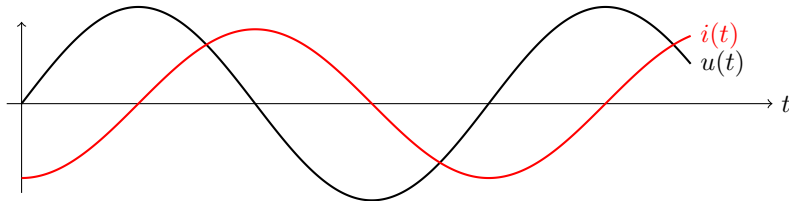
$$\theta = \theta_U - \theta_I = 0$$

$$\boxed{\bar{Z}_R = R \angle 0}$$



Circuito Inductivo puro

Un circuito inductivo puro genera **señales en cuadratura** y **retrasa la corriente**.

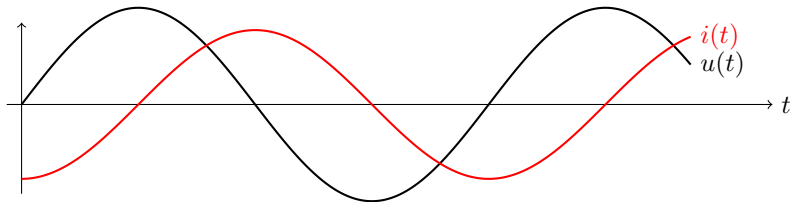


$$i(t) = I_o \cdot \sin(\omega t + \theta_I)$$

$$\begin{aligned} u(t) &= L \cdot \frac{di(t)}{dt} = \\ &= \omega L I_o \cdot \sin(\omega t + \theta_I + \pi/2) = \\ &= U_o \cdot \sin(\omega t + \theta_I + \pi/2) \end{aligned}$$

Circuito Inductivo puro

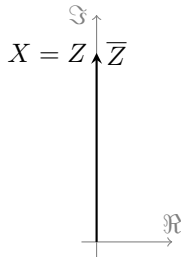
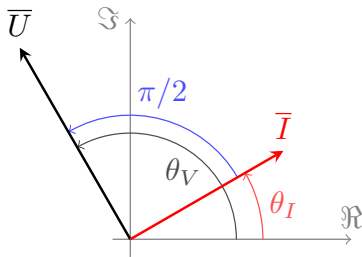
Un circuito inductivo puro genera **señales en cuadratura** y **retrasa la corriente**.



$$Z = \frac{U}{I} = \omega L$$

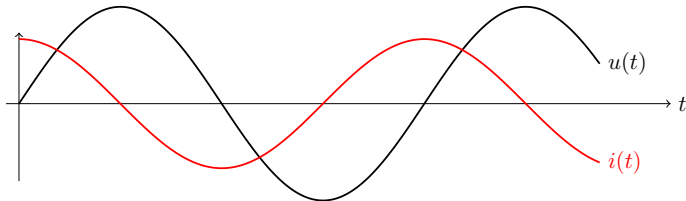
$$\theta = \theta_U - \theta_I = \pi/2$$

$$\boxed{\bar{Z}_L = j\omega L = \omega L \angle 90^\circ}$$



Circuito Capacitivo puro

Un circuito capacitivo puro genera **señales en cuadratura** y **adelanta la corriente**.

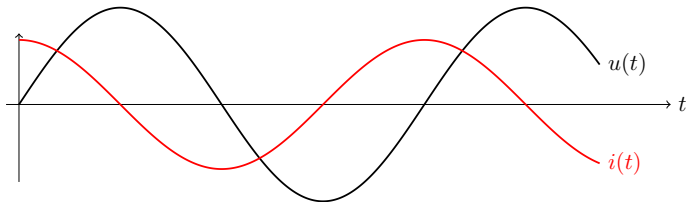


$$i(t) = I_o \cdot \sin(\omega t + \theta_I)$$

$$\begin{aligned} u(t) &= 1/C \cdot \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{\omega C} I_o \cdot \sin(\omega t + \theta_I - \pi/2) = \\ &= U_o \cdot \sin(\omega t + \theta_I - \pi/2) \end{aligned}$$

Circuito Capacitivo puro

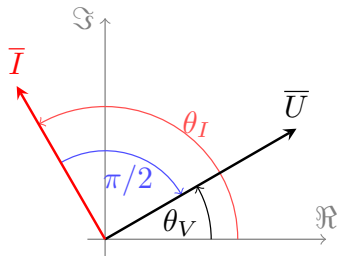
Un circuito capacitivo puro genera **señales en cuadratura** y **adelanta la corriente**.



$$Z = \frac{U}{I} = \frac{1}{\omega C}$$

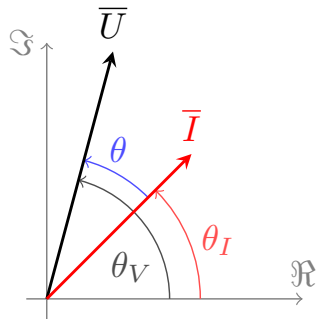
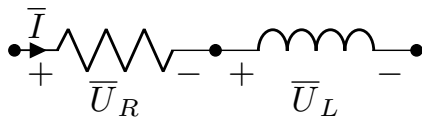
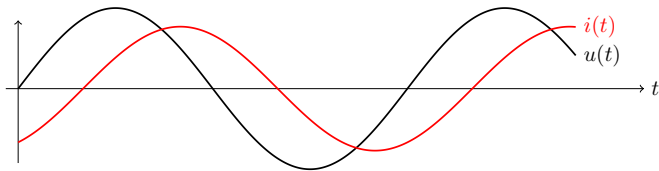
$$\theta = \theta_U - \theta_I = -\pi/2$$

$$\bar{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{\omega C} \angle -90^\circ$$

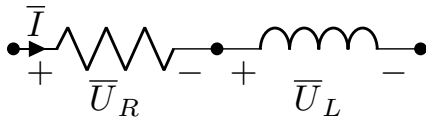


A phasor diagram showing the relationship between impedance Z and its complex conjugate \bar{Z} . The horizontal axis is the real axis (\Re) and the vertical axis is the imaginary axis (\Im). A vector $X = Z$ points downwards along the negative imaginary axis, and a vector \bar{Z} points upwards along the positive imaginary axis.

Circuito RL (inductivo con pérdidas)



Circuito RL (inductivo con pérdidas)

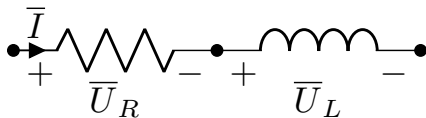


$$\bar{U}_R = R\bar{I}$$

$$\bar{U}_L = j\omega L\bar{I}$$

$$\begin{aligned}\bar{U} &= \bar{U}_R + \bar{U}_L = \\ &= (R + j\omega L)\bar{I}\end{aligned}$$

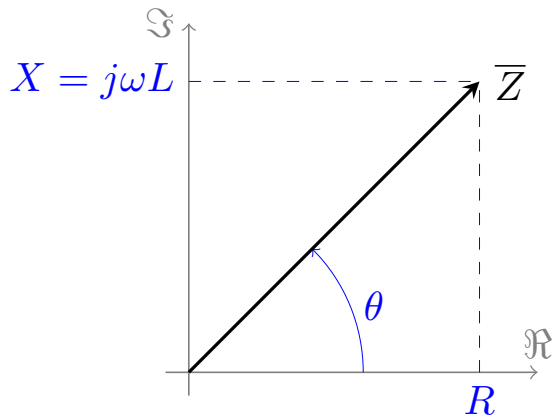
Circuito RL (inductivo con pérdidas)



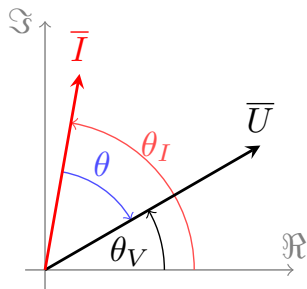
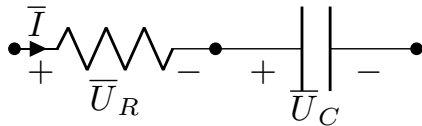
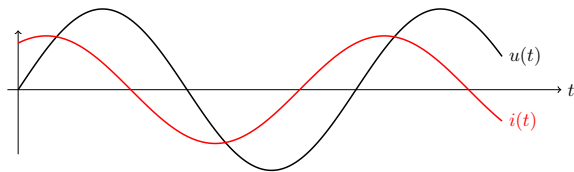
$$\bar{Z} = R + j\omega L \Rightarrow \boxed{\theta > 0}$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$

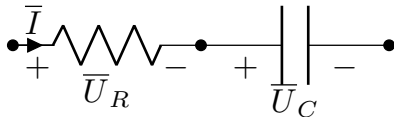
$$\theta = \text{atan} \frac{\omega L}{R}$$



Circuito RC (capacitivo con pérdidas)



Circuito RC (capacitivo con pérdidas)

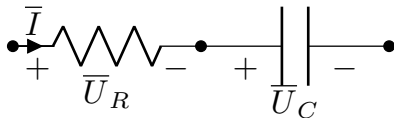


$$\bar{U}_R = R\bar{I}$$

$$\bar{U}_C = -j\frac{1}{\omega C}\bar{I}$$

$$\begin{aligned}\bar{U} &= \bar{U}_R + \bar{U}_C = \\ &= (R - j\frac{1}{\omega C})\bar{I}\end{aligned}$$

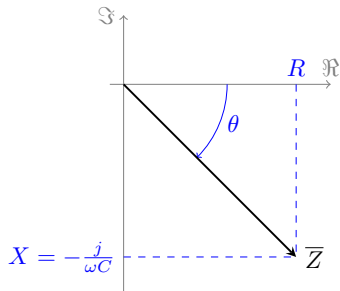
Circuito RC (capacitivo con pérdidas)



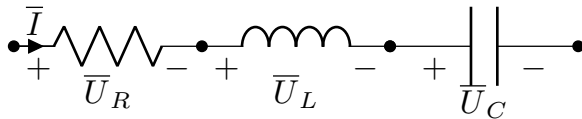
$$\bar{Z} = R - \frac{j}{\omega C} \Rightarrow \boxed{\theta < 0}$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}$$

$$\theta = -\text{atan} \frac{1}{\omega RC}$$



Circuito RLC serie



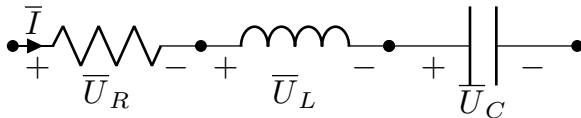
$$\bar{U}_R = R\bar{I}$$

$$\bar{U}_L = j\omega L\bar{I}$$

$$\bar{U}_C = -j\frac{1}{\omega C}\bar{I}$$

$$\begin{aligned}\bar{U} &= \bar{U}_R + \bar{U}_L + \bar{U}_C = \\ &= \left(R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \right) \bar{I}\end{aligned}$$

Circuito RLC serie



$$\bar{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$\theta = \operatorname{atan}\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

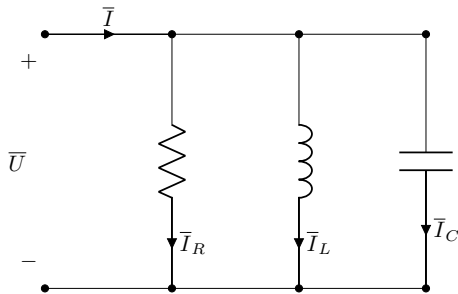
▶ $\theta > 0 \Rightarrow \omega L > \frac{1}{\omega C}$: inductivo

▶ $\theta < 0 \Rightarrow \omega L < \frac{1}{\omega C}$: capacitivo

▶ $\theta = 0 \Rightarrow \omega L = \frac{1}{\omega C}$: resistivo (resonancia)

$$u(t) = Z \cdot I_o \sin(\omega t + \theta_I + \theta)$$

Circuito RLC paralelo



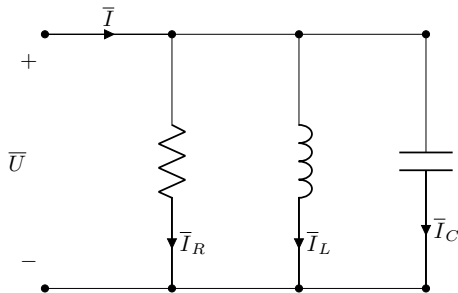
$$\bar{I}_R = 1/R \cdot \bar{U}$$

$$\bar{I}_L = -j \frac{1}{\omega L} \cdot \bar{U}$$

$$\bar{I}_C = j\omega C \cdot \bar{U}$$

$$\begin{aligned}\bar{I} &= \bar{I}_R + \bar{I}_L + \bar{I}_C = \\ &= \left(\frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \right) \bar{U}\end{aligned}$$

Circuito RLC paralelo

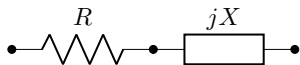


$$\bar{Y} = \frac{\bar{I}}{\bar{U}} = 1/R + j(\omega C - \frac{1}{\omega L})$$

$$|Y| = \sqrt{1/R^2 + (\omega C - \frac{1}{\omega L})^2}$$

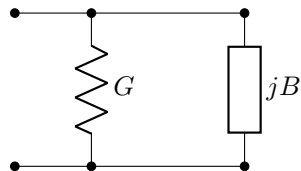
$$\theta_Y = \text{atan} \left(R \cdot (\omega C - \frac{1}{\omega L}) \right)$$

Impedancia y Admitancia



$$\bar{U} = \bar{Z} \cdot \bar{I}$$

$$\bar{Z} = R + jX$$

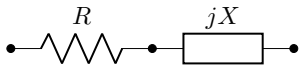


$$\bar{I} = \bar{Y} \cdot \bar{U}$$

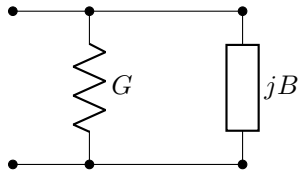
$$\bar{Y} = G + jB$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{\bar{Z}} \rightarrow \begin{cases} |Y| = \frac{1}{|Z|} \\ \theta_Y = -\theta_Z = -\theta \end{cases}$$

Impedancia y Admitancia



$$\bar{Z} = \frac{1}{G + jB} \rightarrow \begin{cases} R = \frac{G}{G^2 + B^2} \\ X = -j \frac{B}{G^2 + B^2} \end{cases}$$



$$\bar{Y} = \frac{1}{R + jX} \rightarrow \begin{cases} G = \frac{R}{R^2 + X^2} \\ B = -j \frac{X}{R^2 + X^2} \end{cases}$$

① Conceptos Fundamentales

② Cálculo Fasorial

③ Potencia

④ Compensación de reactiva

Expresión general

Sea la tensión referencia de fases. Si $\theta > 0$ (inductivo) la corriente está retrasada respecto de la tensión (*circuito en retraso*).

$$u(t) = U_o \cos \omega t$$

$$i(t) = I_o \cos(\omega t - \theta)$$

$$p(t) = u(t) \cdot i(t)$$

Expresión general

$$\begin{aligned} p(t) &= U_o I_o \cdot \cos(\omega t) \cdot \cos(\omega t - \theta) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot U_o I_o \cdot (\cos(2\omega t - \theta) + \cos(\theta)) \\ &= UI \cdot (\cos(2\omega t - \theta) + \cos(\theta)) = \\ &= UI \cdot (\cos(2\omega t) \cos(\theta) + \sin(2\omega t) \sin(\theta) + \cos(\theta)) \end{aligned}$$

$$p(t) = UI \cos(\theta) + UI \cos(\theta) \cos(2\omega t) + UI \sin(\theta) \sin(2\omega t)$$

Expresión general

$$p(t) = UI \cos(\theta) + UI \cos(\theta) \cos(2\omega t) + UI \sin(\theta) \sin(2\omega t)$$

$$P = UI \cos \theta \quad Q = UI \sin \theta$$

$$p(t) = P \cdot (1 + \cos(2\omega t)) + Q \cdot \sin(2\omega t)$$

Circuito Resistivo

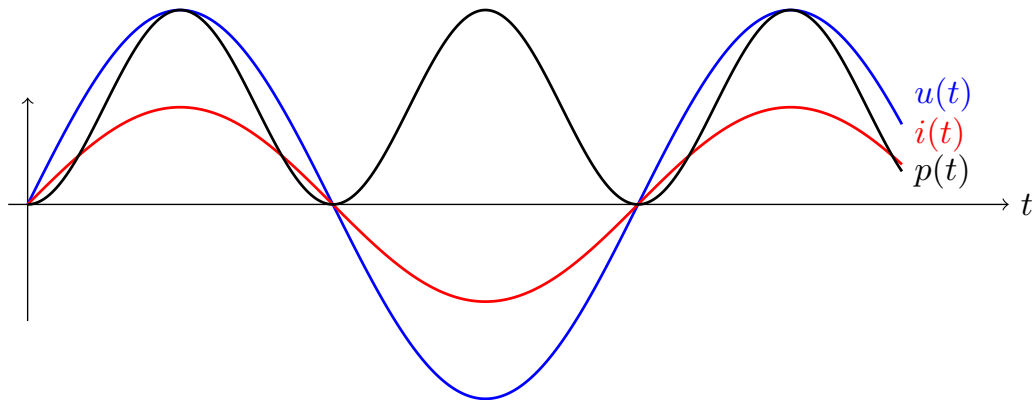
$$P = UI \cos \theta \quad Q = UI \sin \theta$$

$$p(t) = P \cdot (1 + \cos(2\omega t)) + Q \cdot \sin(2\omega t)$$

$$\theta = 0 \rightarrow \begin{cases} P = UI = U^2/R = I^2R \\ Q = 0 \end{cases}$$

$$p(t) = P \cdot (1 + \cos(2\omega t))$$

Circuito Resistivo



- ▶ Fluctúa al doble de frecuencia.
- ▶ Es siempre positiva.

Circuito Inductivo puro

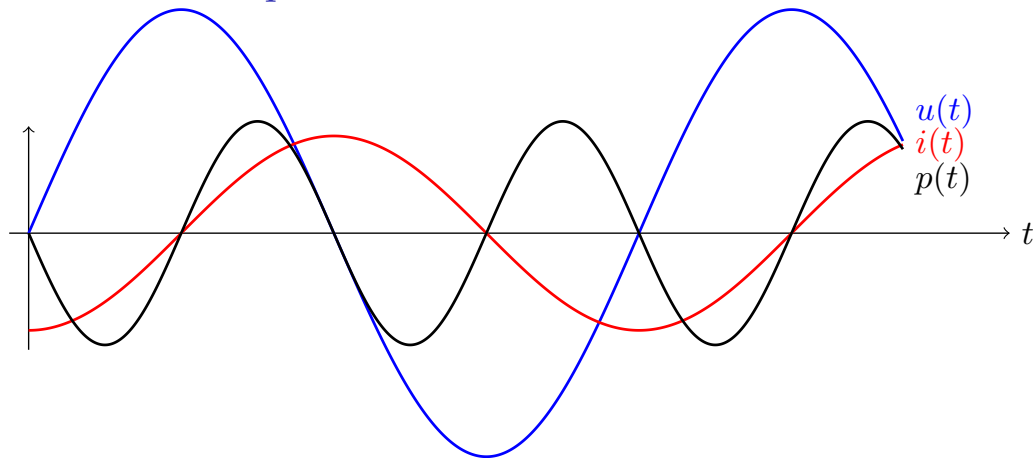
$$P = UI \cos \theta \quad Q = UI \sin \theta$$

$$p(t) = P \cdot (1 + \cos(2\omega t)) + Q \cdot \sin(2\omega t)$$

$$\theta = \pi/2 \rightarrow \begin{cases} P = 0 \\ Q = UI = \frac{U^2}{\omega L} = I^2 \omega L \end{cases}$$

$$p(t) = Q \cdot \sin(2\omega t)$$

Circuito Inductivo puro



- Fluctúa al doble de frecuencia.
- Pasa por los ceros de tensión y corriente.
- Su valor medio es nulo.

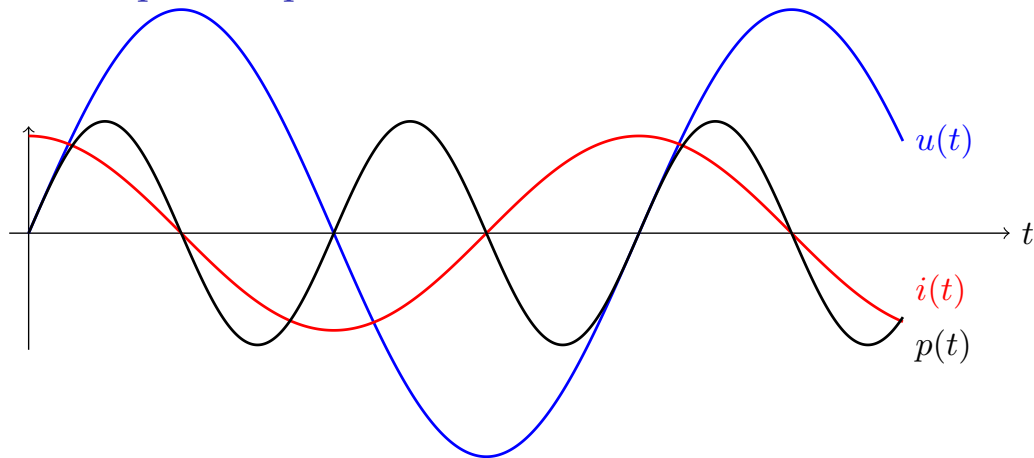
Circuito Capacitivo puro

$$P = UI \cos \theta \quad Q = UI \sin \theta$$

$$p(t) = P \cdot (1 + \cos(2\omega t)) + Q \cdot \sin(2\omega t)$$

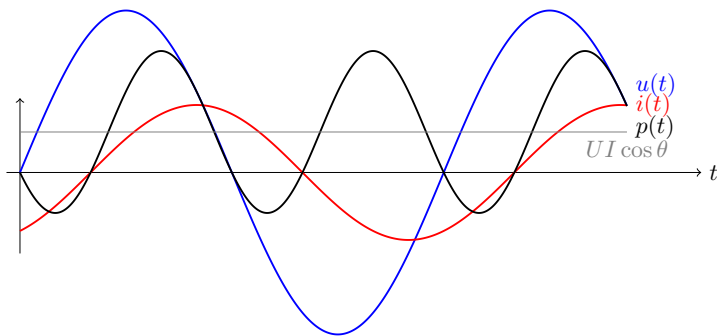
$$\theta = -\pi/2 \rightarrow \begin{cases} P = 0 \\ Q = -UI = -U^2\omega C = -\frac{I^2}{\omega C} \end{cases}$$
$$p(t) = Q \cdot \sin(2\omega t)$$

Circuito Capacitivo puro



- Fluctúa al doble de frecuencia.
- Pasa por los ceros de tensión y corriente.
- Su valor medio es nulo.

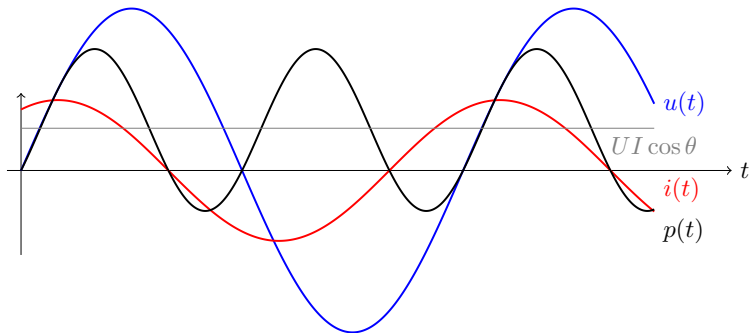
Circuito Inductivo con pérdidas



$$p(t) = P \cdot (1 + \cos(2\omega t)) + Q \cdot \sin(2\omega t)$$

Valor medio positivo, $P = UI \cos \theta$

Circuito Capacitivo con pérdidas



$$p(t) = P \cdot (1 + \cos(2\omega t)) + Q \cdot \sin(2\omega t)$$

Valor medio positivo, $P = UI \cos \theta$

Triângulo de Potências

► Potencia Activa [W]

$$P = U \cdot I \cdot \cos(\theta) = R \cdot I^2$$

► Potencia Reactiva [VA_r]

$$Q = U \cdot I \cdot \sin(\theta) = X \cdot I^2$$

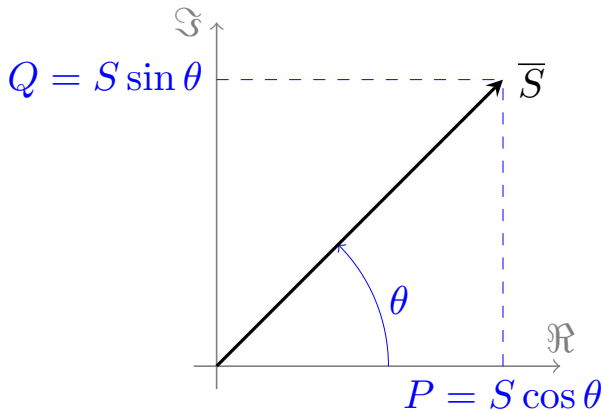
► Potencia Aparente [VA]

$$\bar{S} = P + jQ = \bar{U} \cdot \bar{I}^*$$

$$\bar{U} = U \angle 0$$

$$\bar{I} = I \angle -\theta$$

$$\begin{aligned}\bar{U}\bar{I}^* &= U \angle 0 \cdot I \angle \theta = UI \angle \theta \\ &= UI(\cos \theta + j \sin \theta) = \\ &= P + jQ\end{aligned}$$



$$|S| = U \cdot I$$

$$\theta_S = \theta_Z = \theta$$

Potencia de elementos: Resistencia

$$\theta = 0 \Rightarrow \begin{cases} P_R = RI^2 \\ Q_R = 0 \\ S_R = P_R \end{cases}$$

- ▶ Consume potencia activa
- ▶ No consume potencia reactiva

Potencia de elementos: Inductancia

$$\theta = \pi/2 \Rightarrow \begin{cases} P_L = 0 \\ Q_L = \omega LI^2 \\ \bar{S}_L = \omega LI^2 / \underline{\pi/2} \end{cases}$$

- ▶ No consume potencia activa
- ▶ Consume potencia reactiva ($Q > 0$)

Potencia de elementos: Condensador

$$\theta = -\pi/2 \Rightarrow \begin{cases} P_L = 0 \\ Q_C = -\omega C U^2 \\ \bar{S}_C = \omega C U^2 \underline{-\pi/2} \end{cases}$$

- ▶ No consume potencia activa
- ▶ Genera potencia reactiva ($Q < 0$)

Teorema de Boucherot

- ▶ En un circuito con múltiples elementos, la potencia aparente total es la suma de las potencias aparentes individuales.

$$\bar{S} = \sum_{i=1}^n \bar{S}_i$$

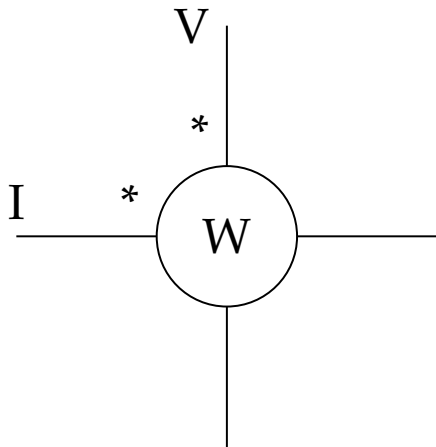
$$P + jQ = \sum_{i=1}^n (P_i + jQ_i)$$

- ▶ La potencia activa (reactiva) total es la suma de las potencias activas (reactivas) individuales.

$$P = \sum_{i=1}^n P_i$$

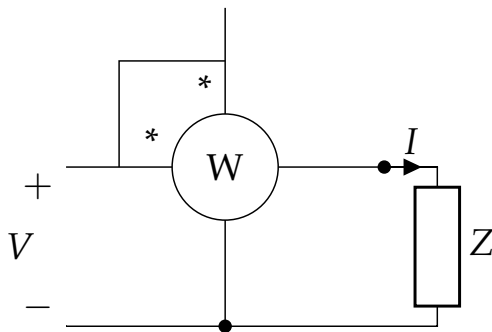
$$Q = \sum_{i=1}^n Q_i$$

Medida de potencia



Vatímetro: equipo de medida de 4 terminales (1 par para tensión, 1 par para corriente)

Medida de potencia



Habitualmente se emplea con 3 terminales cortocircuitando terminales con *.

$$W = |V||I| \cos(\theta_V - \theta_I) = P_Z$$

① Conceptos Fundamentales

② Cálculo Fasorial

③ Potencia

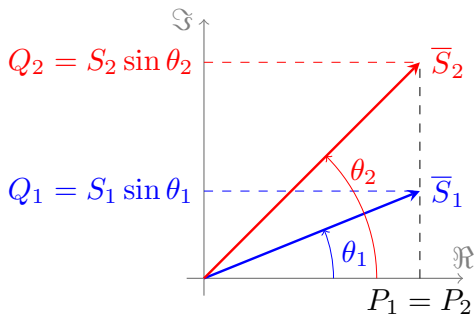
④ Compensación de reactiva

Factor de potencia

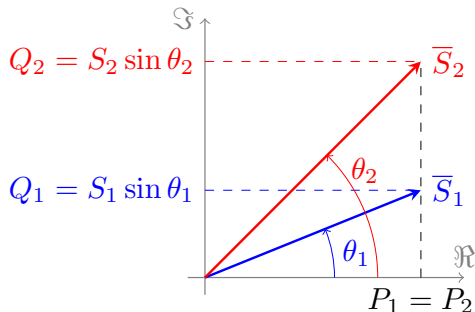
El factor de potencia, $\cos(\theta)$, representa la aportación de potencia activa dentro de la potencia aparente.

$$P = S \cos \theta$$

Sean dos sistemas con **misma tensión y potencia activa**, y factores de potencia $\cos \theta_2 < \cos \theta_1$ ($Q_2 > Q_1$)



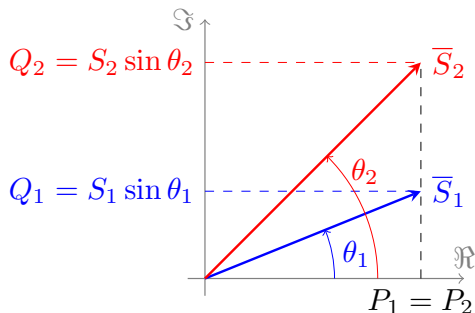
Potencia Aparente



El sistema 2 requiere **mayor potencia aparente** (generador mayor) para alimentar la misma potencia activa.

$$\left(\frac{P}{\cos \theta_1} = S_1 \right) < \left(S_2 = \frac{P}{\cos \theta_2} \right)$$

Sección de Conductores



El sistema 2 requiere **mayor sección** de cable para transportar la misma potencia activa.

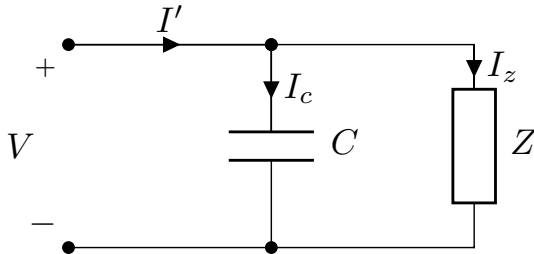
$$\left(\frac{P}{U \cos \theta_1} = I_1 \right) < \left(I_2 = \frac{P}{U \cos \theta_2} \right)$$

Generación Local de Reactiva

- ▶ Comúnmente, el factor de potencia es **inductivo** (máquinas eléctricas industriales).
- ▶ La red debe suministrar potencia reactiva inductiva (influye en secciones de líneas y tamaños de generadores)
- ▶ Es necesario mejorar **localmente** el factor de potencia. Solución común: utilizar **bancos de condensadores** como suministradores de potencia reactiva.

Compensación de Reactiva con Condensadores

Sea una carga de potencia activa P_z , potencia reactiva Q_z , factor de potencia $\cos \theta$. Se desea **mejorar el factor de potencia** a $\cos \theta' > \cos \theta$.

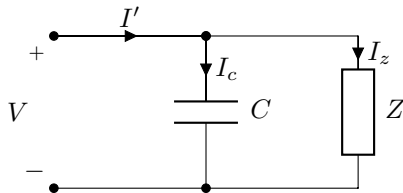


$$P' = P_z$$

$$Q' = Q_c + Q_z \quad (Q' < Q_z)$$

$$\bar{I}' = \bar{I}_c + \bar{I}_z \quad (I' < I_z)$$

Cálculo de la Capacidad



$$Q_z = P_z \tan \theta$$

$$Q' = P_z \tan \theta'$$

$$|Q_c| = Q_z - Q' = P_z (\tan \theta - \tan \theta')$$

$$|Q_c| = \omega C U^2 \rightarrow \boxed{C = \frac{P_z (\tan \theta - \tan \theta')}{\omega U^2}}$$