

Análisis del Transitorio con la Transformada de Laplace

Teoría de Circuitos III

Oscar Perpiñán Lamigueiro

① Introducción

② Transformada de Laplace

③ Aplicación a Circuitos Eléctricos

④ Diagramas Polos y Ceros

⑤ Ejercicios Recomendados

Motivación

- ▶ La resolución directa de las ecuaciones diferenciales (análisis clásico) exige esfuerzo y no se puede sistematizar fácilmente.
- ▶ La transformada de Laplace convierte las ecuaciones integrodiferenciales en **ecuaciones algebraicas** basadas en una variable compleja:

$$\mathbf{s} = \sigma + j\omega$$

- ▶ Todos los **métodos de análisis** de circuitos son **aplicables** de forma directa.
- ▶ Las **condiciones iniciales** del circuito quedan incorporadas automáticamente en las ecuaciones.

- ① Introducción
- ② Transformada de Laplace
- ③ Aplicación a Circuitos Eléctricos
- ④ Diagramas Polos y Ceros
- ⑤ Ejercicios Recomendados

Definición

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \mathbf{F}(\mathbf{s})$$

$$\mathbf{s} = \sigma + j\omega$$

Motivación: transformada de derivadas e integrales

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = \mathbf{s}\mathbf{F}(\mathbf{s}) - f(0^-)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right\} = \mathbf{s}^2\mathbf{F}(\mathbf{s}) - \mathbf{s}f(0^-) - \left.\frac{d}{dt}f\right|_{0^-}$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_{0^-}^t f(x)dt\right\} = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{s})}{\mathbf{s}} + \frac{1}{\mathbf{s}} \int_{-\infty}^{0^-} f(t)dt$$

Ejemplo: ecuación de un RLC serie

Ecuación diferencial

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0$$

Transformada de Laplace (sin condiciones iniciales)

$$s^2 \mathbf{I}(s) + \frac{R}{L} s \mathbf{I}(s) + \frac{1}{LC} \mathbf{I}(s) = 0$$

Ecuación característica

$$s^2 + \frac{R}{L} s + \frac{1}{LC} = 0$$

Propiedades básicas

Linealidad

$$\mathcal{L}\{f_1(t) + f_2(t)\} = \mathbf{F}_1(\mathbf{s}) + \mathbf{F}_2(\mathbf{s})$$

$$\mathcal{L}\{k \cdot f(t)\} = k \cdot \mathbf{F}(\mathbf{s})$$

Desplazamiento temporal

$$\mathcal{L}\{f(t - \alpha)\} = e^{-\alpha \mathbf{s}} \mathbf{F}(\mathbf{s})$$

Desplazamiento en frecuencia

$$\mathcal{L}\{e^{-\alpha t} f(t)\} = \mathbf{F}(\mathbf{s} + \alpha)$$

Teoremas de valor inicial y final

- Útiles para comprobar una transformada o una transformada inversa.

Valor inicial

$$f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

Valor final

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

Transformadas importantes

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{\mathbf{s}}$$

$$\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{\mathbf{s}^2}$$

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = \frac{\omega}{\mathbf{s}^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}\{e^{-\alpha t}\} = \frac{1}{\mathbf{s} + \alpha}$$

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{\mathbf{s}^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} = \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{s}^2 + \omega^2}$$

Transformada Inversa

Expresamos la transformada como una fracción de polinomios:

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = K \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}$$

- ▶ Las raíces de $N(s)$ son los **ceros** de la transformada, z_i .
- ▶ Las raíces de $D(s)$ son los **polos** de la transformada, p_i .

Para obtener la transformada inversa diferenciamos tres casos (o una combinación):

- ▶ Polos reales únicos
- ▶ Polos reales repetidos
- ▶ Polos conjugados.

Transformada Inversa

Polos reales únicos

Reescribimos la transformada como suma de fracciones (descomposición en fracciones parciales):

$$\mathbf{F}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{N}(\mathbf{s})}{\mathbf{D}(\mathbf{s})} = \frac{K_1}{\mathbf{s} - p_1} + \frac{K_2}{\mathbf{s} - p_2} + \dots + \frac{K_n}{\mathbf{s} - p_n}$$

$$K_i = [(\mathbf{s} - p_i)\mathbf{F}(\mathbf{s})]_{\mathbf{s}=p_i}$$

$$f(t) = K_1 e^{p_1 t} + K_2 e^{p_2 t} + \dots + K_n e^{p_n t}$$

Ejemplo 15.9 AS

$$\mathbf{F}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{s}^2 + 12}{\mathbf{s}(\mathbf{s} + 2)(\mathbf{s} + 3)}$$

Transformada Inversa

Polos reales repetidos

Nuevamente descomposición de fracciones parciales, y calculamos coeficientes K_i con el método algebraico (véase ejemplo 15.9 de AS)

$$\mathbf{F}(\mathbf{s}) = \frac{K_1}{\mathbf{s} - p_1} + \frac{K_2}{(\mathbf{s} - p_1)^2} + \frac{K_3}{(\mathbf{s} - p_1)^3} + \dots + \frac{K_n}{(\mathbf{s} - p_1)^n}$$

$$f(t) = K_1 e^{p_1 t} + K_2 t e^{p_1 t} + K_3 t^2 e^{p_1 t} + \dots + K_n t^{n-1} e^{p_1 t}$$

Ejemplo 15.10 AS

$$\mathbf{F}(\mathbf{s}) = \frac{10\mathbf{s}^2 + 4}{\mathbf{s}(\mathbf{s} + 1)(\mathbf{s} + 2)^2}$$

Transformada Inversa

Polos complejos conjugados

Nuevamente calculamos con el método algebraico, y terminamos «completando cuadrados».

$$F(s) = \frac{N(s)}{s^2 + as + b} = \frac{A(s + \alpha) + B\omega}{(s^2 + 2\alpha s + \alpha^2) + \omega^2}$$

$$F(s) = \frac{A(s + \alpha)}{(s + \alpha)^2 + \omega^2} + \frac{B\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$$

$$f(t) = Ae^{-\alpha t} \cos(\omega t) + Be^{-\alpha t} \sin(\omega t)$$

Ejemplo 15.11 AS

$$F(s) = \frac{20}{(s + 3)(s^2 + 8s + 25)}$$

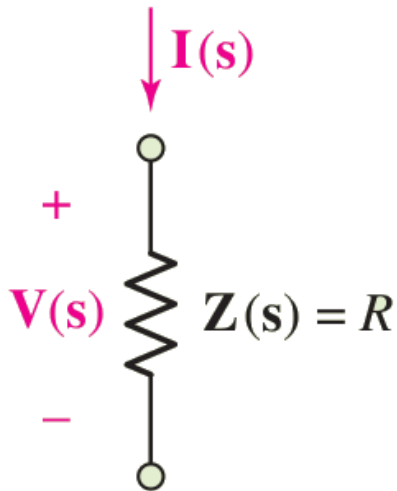
- ① Introducción
- ② Transformada de Laplace
- ③ **Aplicación a Circuitos Eléctricos**
- ④ Diagramas Polos y Ceros
- ⑤ Ejercicios Recomendados

Resistencia

$$v(t) = Ri(t)$$

$$\mathbf{U}(\mathbf{s}) = R\mathbf{I}(\mathbf{s})$$

$$\mathbf{Z}_R(\mathbf{s}) = R$$



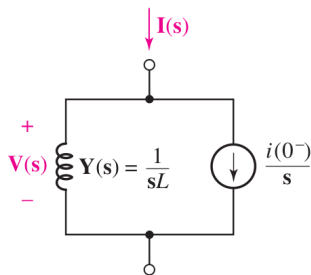
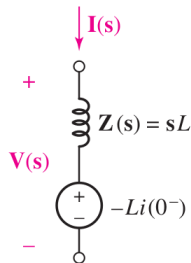
Bobina

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

$$\mathbf{U}(\mathbf{s}) = \mathbf{s}L\mathbf{I}(\mathbf{s}) - Li(0^-)$$

$$\mathbf{I}(\mathbf{s}) = \frac{1}{\mathbf{s}L}\mathbf{U}(\mathbf{s}) + \frac{i(0^-)}{\mathbf{s}}$$

$$\mathbf{Z}_L(\mathbf{s}) = \mathbf{s}L$$



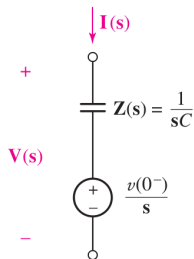
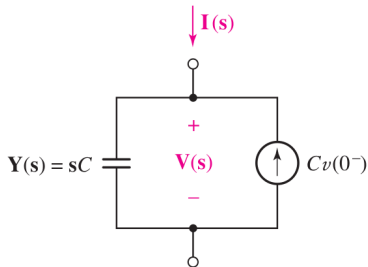
Condensador

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$

$$\mathbf{I(s)} = sC\mathbf{U(s)} - Cv(0^-)$$

$$\mathbf{U(s)} = \frac{1}{sC}\mathbf{I(s)} + \frac{v(0^-)}{s}$$

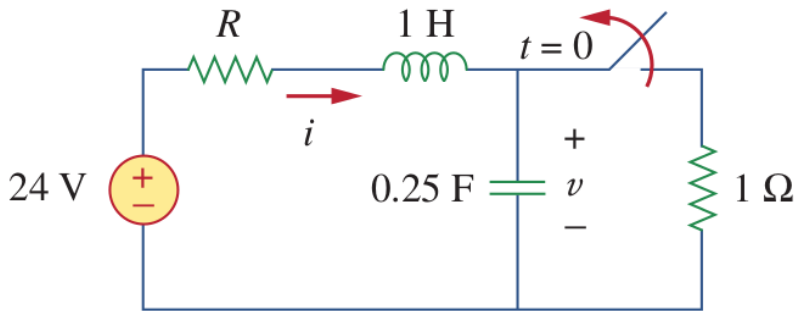
$$\mathbf{Z_C(s)} = \frac{1}{sC}$$



Procedimiento

- ❶ Determinar las **condiciones iniciales** en los elementos que almacenan energía: $i_L(0^-)$, $u_C(0^-)$.
- ❷ **Transformar** el circuito **al dominio de Laplace**:
 - ▶ Resistencia por $Z_R(s) = R$.
 - ▶ Bobina por $Z_L(s) = sL$ en serie con fuente de tensión de polaridad negativa.
 - ▶ Condensador por $Z_C(s) = \frac{1}{sC}$ en serie con fuente de tensión.
 - ▶ Generadores por su transformada de Laplace.
- ❸ **Resolver el circuito** con el método que corresponda (mallas, nudos, transformación de fuentes, etc.).
- ❹ Determinar **transformada inversa** de la respuesta (conviene comprobar resultado con teoremas valor inicial y final).

Ejemplo 8.7 AS (resuelto con análisis clásico)

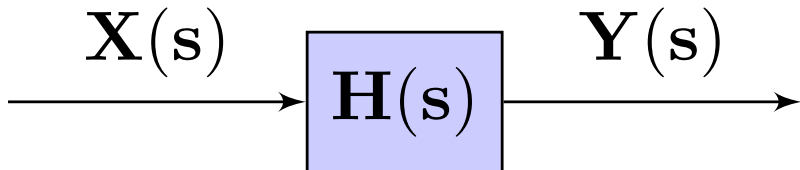


$$i_L(t) = \frac{4}{3} \left(4e^{-t} - e^{-4t} \right)$$

$$u_C(t) = 24 + \frac{4}{3} \left(-16e^{-t} + e^{-4t} \right)$$

- ① Introducción
- ② Transformada de Laplace
- ③ Aplicación a Circuitos Eléctricos
- ④ Diagramas Polos y Ceros
- ⑤ Ejercicios Recomendados

Función de Transferencia



$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = K \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}$$

Polos y Ceros

Ceros

- ▶ $z_1 \dots z_m$ son los ceros de $\mathbf{H}(\mathbf{s})$

$$\lim_{\mathbf{s} \rightarrow z_i} \mathbf{H}(\mathbf{s}) = 0$$

- ▶ Salida $\mathbf{Y}(\mathbf{s})$ nula

$$\mathbf{Y}(z_i) = \mathbf{H}(z_i) \cdot \mathbf{X}(z_i) = 0$$

Polos y Ceros

Polos

- ▶ $p_1 \dots p_n$ son los polos de $\mathbf{H}(s)$

$$\lim_{s \rightarrow p_i} \mathbf{H}(s) = \infty$$

- ▶ Salida $\mathbf{Y}(s)$ no nula para entrada $\mathbf{X}(s)$ nula

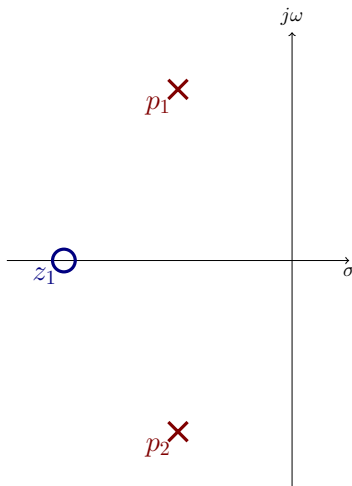
$$\mathbf{Y}(p_i) = \mathbf{H}(p_i) \cdot \mathbf{X}(p_i) \neq 0$$

- ▶ Raíces de la ecuación característica: **exponentes de la respuesta natural**

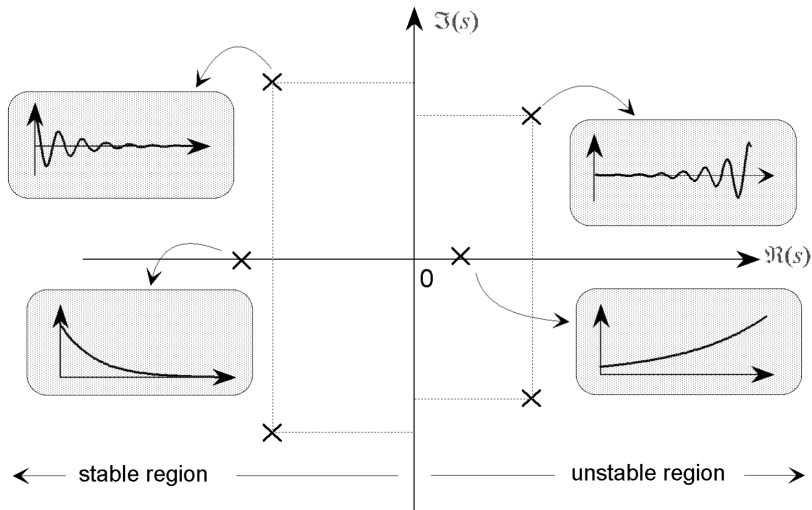
$$y_n(t) = \sum_{i=1}^n A_i e^{p_i t}$$

Ejemplo Diagrama Polos y Ceros

$$H(s) = \frac{s - z_1}{(s - p_1) \cdot (s - p_2)}$$

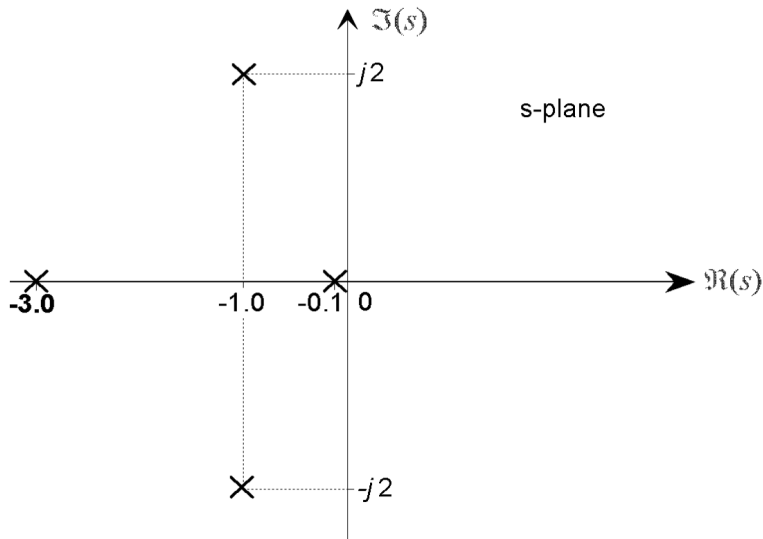


Significado Diagrama Polos y Ceros



Ejemplo Polos y Respuesta Natural

$$y_n(t) = A_1 e^{-3t} + A_2 e^{-0.1t} + A_3 e^{-t} \sin(2t + \theta)$$



- ① Introducción
- ② Transformada de Laplace
- ③ Aplicación a Circuitos Eléctricos
- ④ Diagramas Polos y Ceros
- ⑤ Ejercicios Recomendados

Ejercicios

- ▶ AS: ejemplos 16.1, 16.3, 16.4, 16.6
- ▶ FM: ejemplos de aplicación 4.12, 4.13, 4.14 y 4.15
- ▶ HKD: ejemplo 15.4