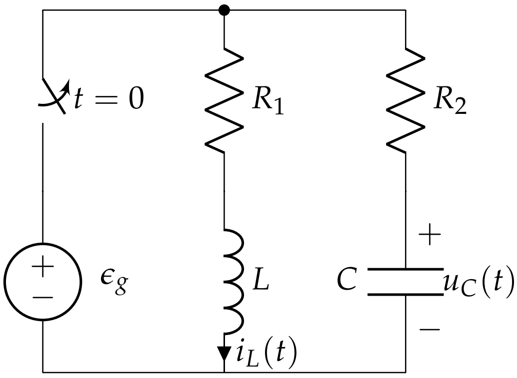
Ejercicio 13 de la colección de problemas

Enunciado:

El circuito de la figura ha alcanzado el régimen permanente con el interruptor cerrado

El interruptor se abre en $t = 0$

Calcula las expresiones de la tensión en bornes del condensador y de la corriente por la bobina para $t > 0$

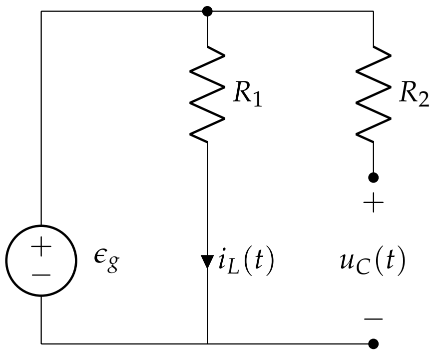


Datos:

$$\epsilon_g = 10\,\mathrm{V}$$
$$R_1 = 10\,\Omega$$
$$R_2 = 5\,\Omega$$
$$L = 2{,}5\,\mathrm{H}$$
$$C = 0{,}2\,\mathrm{F}$$

Solución:

Calculamos las condiciones iniciales ($t = 0^-$). Dibujamos el circuito para $t < 0$ y obtenemos:

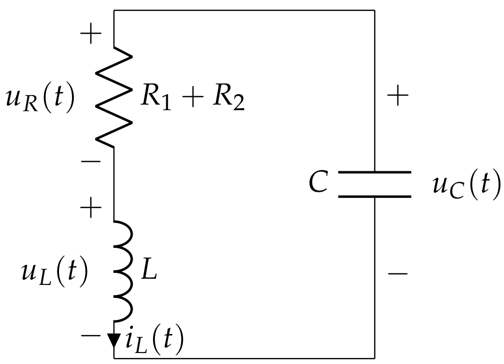


$$u_C(t) = 10\,\mathrm{V}$$
$$i_L(t) = \frac{\epsilon_g}{R_1} = 1\,\mathrm{A}$$

Por tanto, $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 10\,\mathrm{V}$ y $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 1\,\mathrm{A}$

A continuación dibujamos el circuito para $t > 0$, para obtener la respuesta natural y la respuesta forzada.

En el circuito resultante no hay fuentes, por lo que no habrá respuesta forzada.



Planteamos la ec. diferencial del circuito usando 2LK:

$$u_L(t) + u_R(t) - u_C(t) = 0$$
$$L\,\frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + (R_1 + R_2)\,\frac{d\,i_L(t)}{dt} - \frac{1}{C}\,[-i_L(t)] = 0$$

Luego la ec. característica es:

$$s^2 + \frac{R_1 + R_2}{L} \cdot s + \frac{1}{L \cdot C} = 0$$
$$s^2 + 6 \cdot s + 2 = 0$$

Cuyas soluciones son:

$$s_1 \;=\; -0{,}354\,\mathrm{s}^{-1}\,, \qquad s_2 \;=\; -5{,}645\,\mathrm{s}^{-1}$$

Escribiendo la forma estándar de la ec. característica, determinamos el valor de los parámetros ξ y ω_n:

$$s^2 \,+\, 2\,\xi\,\omega_n \cdot s \,+\, \omega_n^2 \;=\; 0$$

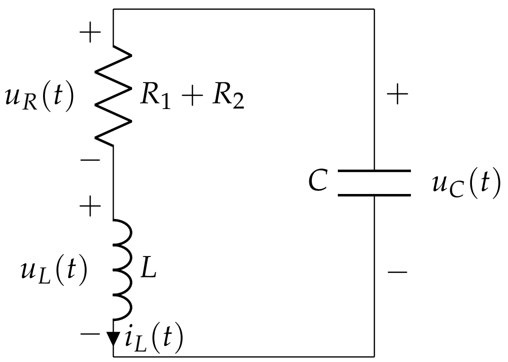
$$\omega_n \;=\; \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \;=\; \sqrt{2}\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\,, \qquad \xi \;=\; \frac{1}{2\,\omega_n} \cdot \frac{R_1 + R_2}{L} \;=\; \frac{3}{2}\sqrt{2} \;=\; 2{,}12$$

Dado que $\xi > 1$, se trata de un transitorio sobreamortiguado, resultado coherente con el tipo de soluciones que se han obtenido para s_1 y s_2 (soluciones reales distintas, que corresponde a un circuito sobreamortiguado).

La respuesta natural del circuito es por tanto:

$$i_L(t) \;=\; K_1 \cdot e^{-0{,}354 \cdot t} + K_2 \cdot e^{-5{,}645 \cdot t}$$

Para determinar las constantes de integración K_1 y K_2 recurrimos a las condiciones iniciales:



$$u_R(t) + u_L(t) = u_C(t)$$

$$u_L(0^+) = u_C(0^+) - u_R(0^+)$$

$$u_R(0^+) = (R_1 + R_2) \cdot i_L(0^+) = 15\,\mathrm{V}$$

$$u_L(0^+) = 10 - 15 = -5\,\mathrm{V}$$

Por tanto:

$$i_L(0^+) = 1\,\mathrm{A}\,, \qquad \left.\frac{d\,i_L(t)}{dt}\right|_{t=0^+} = \frac{1}{L} \cdot u_L(0^+) = -2\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{s}}$$

Particularizamos la ec. de $i_L(t)$ para $t = 0$, obteniendo las ecs. necesarias para obtener K_1 y K_2:

$$i_L(0^+) = K_1 + K_2 = 1$$

$$\left.\frac{di_L(t)}{dt}\right|_{t=0^+} = K_1 \cdot s_1 + K_2 \cdot s_2 = -2$$

Resolviendo el sistema de 2 ecs. con 2 incógnitas:

$$K_1 = 0{,}689\,, \qquad K_2 = 0{,}311$$

Finalmente:

$$i_L(t) \;=\; \boxed{0{,}689 \cdot e^{-0{,}354 \cdot t} + 0{,}311 \cdot e^{-5{,}645 \cdot t}\ \mathrm{A}}$$

Para obtener la tensión en el condensador, recurrimos a la 2LK:

$$\begin{aligned} u_C(t) \;&=\; u_R(t) \,+\, u_L(t) \;= \\ &=\; (R_1 + R_2) \cdot i_L(t) \,+\, L\,\frac{d\,i_L(t)}{dt} \;=\; \boxed{9{,}728 \cdot e^{-0{,}354 \cdot t} \,+\, 0{,}275 \cdot e^{-5{,}645 \cdot t}\ \mathrm{V}} \end{aligned}$$