

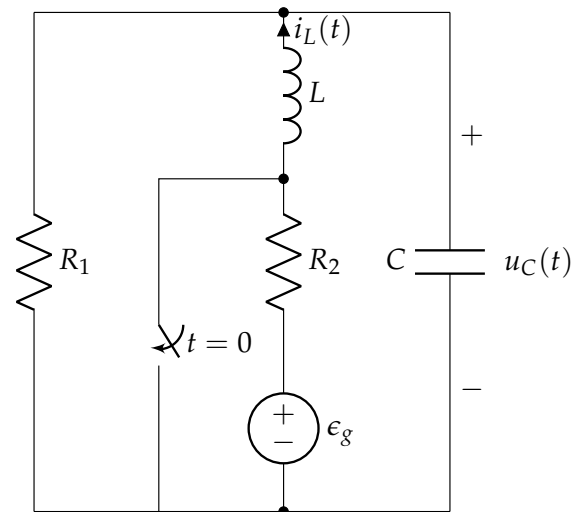
## Ejercicio 14 de la colección de problemas

### Enunciado:

En el circuito de la figura, calcular la tensión  $u_C(t)$  para  $t > 0$

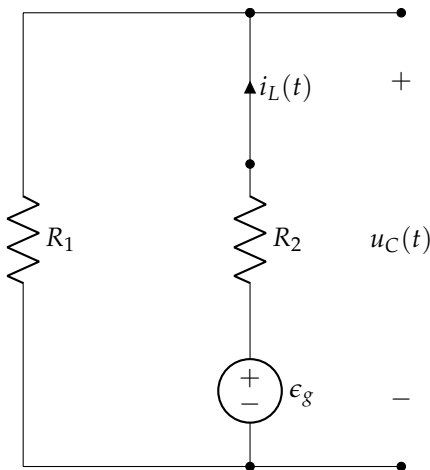
Datos:

$$\begin{aligned}\epsilon_g &= 4 \text{ V} \\ R_1 &= 2 \Omega \\ R_2 &= 2 \Omega \\ L &= 1 \text{ H} \\ C &= 0,25 \text{ F}\end{aligned}$$



### Solución:

Calculamos las condiciones iniciales ( $t = 0^-$ ). Dibujamos el circuito para  $t < 0$  y obtenemos:

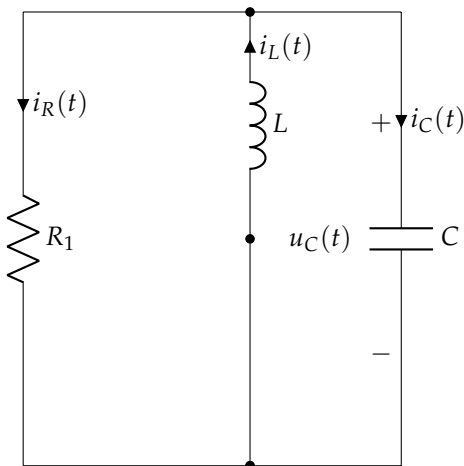


$$i_L(t) = \frac{\epsilon_g}{R_1 + R_2} = 1 \text{ A}$$

$$u_C(t) = R_1 \cdot i_L(t) = 2 \text{ V}$$

Por tanto,  $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 2 \text{ V}$  y  $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 1 \text{ A}$

A continuación dibujamos el circuito para  $t > 0$ , para obtener la respuesta natural y la respuesta forzada. En el circuito resultante no hay fuentes, por lo que no habrá respuesta forzada.



Planteamos la ec. diferencial del circuito usando 1LK:

$$i_C(t) + i_R(t) = i_L(t)$$

$$C \frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + \frac{1}{R_1} \cdot \frac{d u_C(t)}{dt} - \frac{1}{L} [-u_C(t)] = 0$$

Luego la ec. característica es:

$$\begin{aligned}s^2 + \frac{1}{R_1 \cdot C} \cdot s + \frac{1}{L \cdot C} &= 0 \\ s^2 + 2 \cdot s + 4 &= 0\end{aligned}$$

Cuyas soluciones son:

$$s_1 = -1 + j1,73 \text{ s}^{-1}, \quad s_2 = -1 - j1,73 \text{ s}^{-1}$$

Escribiendo la forma estándar de la ec. característica, determinamos el valor de los parámetros  $\xi$  y  $\omega_n$ :

$$s^2 + 2\xi\omega_n \cdot s + \omega_n^2 = 0$$

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} = 2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \quad \xi = \frac{1}{2\omega_n} \cdot \frac{1}{R_1 \cdot C} = 0,5$$

Dado que  $\xi < 1$ , se trata de un transitorio subamortiguado, resultado coherente con el tipo de soluciones que se han obtenido para  $s_1$  y  $s_2$  (soluciones complejas conjugadas, que corresponde a un circuito subamortiguado).

La respuesta natural del circuito es por tanto:

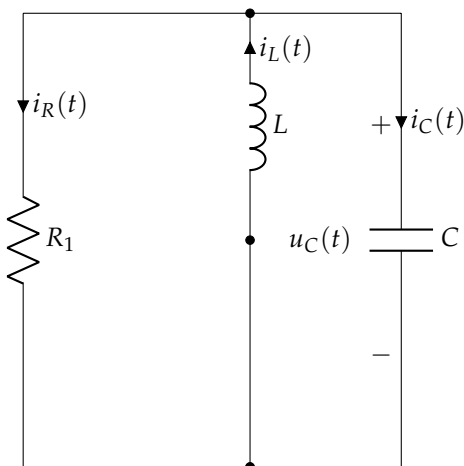
$$u_C(t) = e^{-\alpha \cdot t} \cdot [B_1 \cdot \sin(\omega t) + B_2 \cdot \cos(\omega t)]$$

Donde los parámetros de la senoidal atenuada se calculan como (recordad estas expresiones):

$$\boxed{\alpha = \omega_n \cdot \xi} = 1 \text{ s}^{-1} \quad \boxed{\omega = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} = \sqrt{3} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

(se omite la deducción de estas expresiones, para más detalles, ver [Fraile Mora](#) edición 2012, págs. 427-428 y 431)

Para determinar las constantes de integración  $B_1$  y  $B_2$  recurrimos a las condiciones iniciales:



$$i_C(0^+) + i_R(0^+) = i_L(0^+)$$

$$i_R(0^+) = \frac{u_C(0^+)}{R_1} = 1 \text{ A}$$

$$i_C(0^+) = 1 - 1 = 0 \text{ A}$$

Por tanto:

$$u_C(0^+) = 2 \text{ V}, \quad \left. \frac{du_C(t)}{dt} \right|_{t=0^+} = \frac{1}{C} \cdot i_C(0^+) = 0 \frac{\text{V}}{\text{s}}$$

Con estos resultados, particularizamos la ecuación de  $u_C(t)$  para  $t = 0$  y así planteamos las ecuaciones para obtener  $B_1$  y  $B_2$ :

$$u_C(0^+) = \boxed{B_2 = 2 \text{ V}}$$

$$\left. \frac{du_C(t)}{dt} \right|_{t=0^+} = \left[ -e^{-t} \cdot [B_1 \sin(\sqrt{3}t) + 2 \cos(\sqrt{3}t)] + e^{-t} \cdot [B_1 \sqrt{3} \cos(\sqrt{3}t) - 2\sqrt{3} \sin(\sqrt{3}t)] \right]_{t=0^+} = 0 \rightarrow \boxed{B_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ V}}$$

Finalmente:

$$\boxed{u_C(t) = e^{-t} \cdot \left[ \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin(\sqrt{3}t) + 2 \cos(\sqrt{3}t) \right] \text{ V}}$$