

Fundamentos. Circuitos de corriente continua

Teoría de Circuitos

Autor: Luis Badesa Bernardo

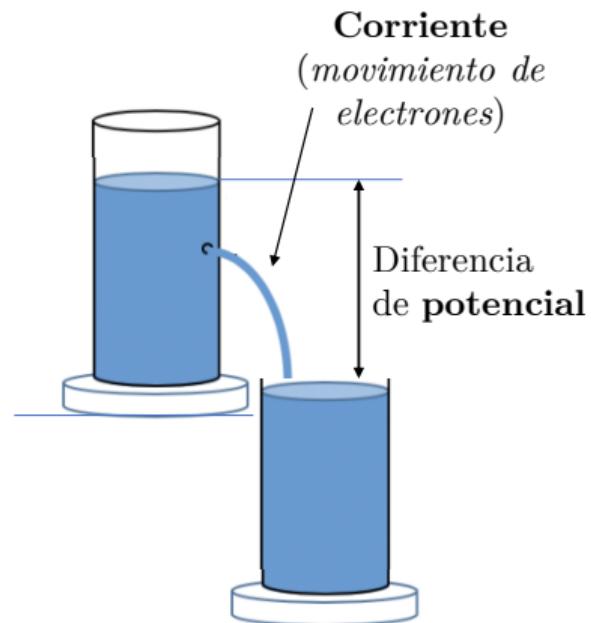
(basado en las diapositivas de Óscar Perpiñán Lamigueiro)

¿Qué es la electricidad?

- ▶ La electricidad es el conjunto de fenómenos físicos relacionados con la **presencia y flujo de cargas eléctricas**
- ▶ Un fenómeno de particular interés es la **corriente eléctrica**: es el movimiento de electrones de los átomos a través de un material conductor (por ejemplo, un cable de cobre)

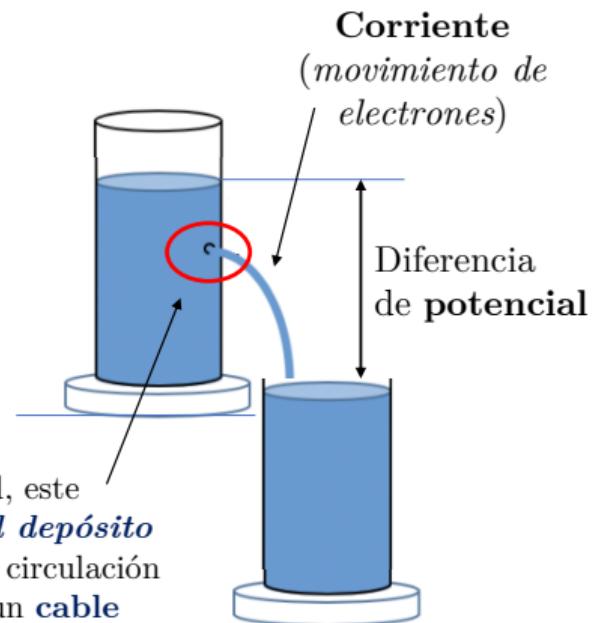
Potencial eléctrico y corriente eléctrica: analogía con la gravedad

- ▶ Las dos magnitudes principales en esta asignatura son la diferencia de **potencial eléctrico** (o *tensión*) y la **corriente eléctrica** (o *intensidad*)
- ▶ Para entender estas magnitudes de forma visual, podemos establecer un **paralelismo con la gravedad**:



Potencial eléctrico y corriente eléctrica: analogía con la gravedad

- ▶ Las dos magnitudes principales en esta asignatura son la diferencia de **potencial eléctrico** (o *tensión*) y la **corriente eléctrica** (o *intensidad*)
- ▶ Para entender estas magnitudes de forma visual, podemos establecer un **paralelismo con la gravedad**:



En electricidad, este **orificio en el depósito** que permite la circulación de agua sería un **cable que forme un circuito cerrado** (que entonces permite la circulación de corriente)

¿Qué aplicaciones tiene esta asignatura?

Los modelos matemáticos que vamos a estudiar en Teoría de Circuitos se usan en:

- ▶ Circuitos de gran tamaño: **sistemas eléctricos de potencia**
- ▶ Circuitos de pequeño tamaño: **circuitos electrónicos**



① Conceptos fundamentales

② Elementos de los circuitos

③ Leyes de Kirchhoff

④ Métodos de análisis

Esta asignatura está dedicada al **análisis de circuitos eléctricos lineales de parámetros concentrados**

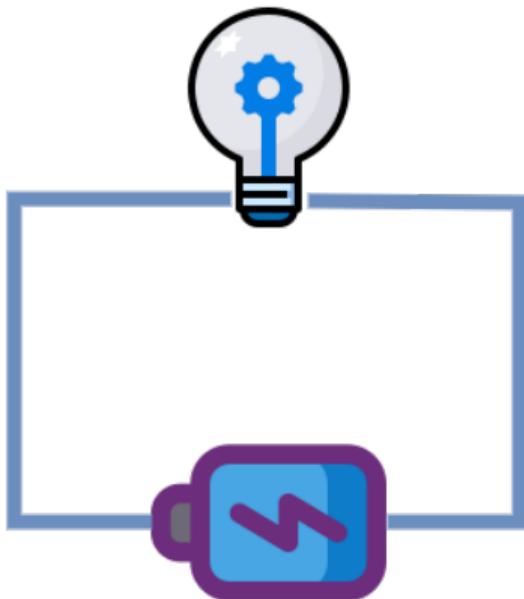
(ahora entenderemos qué significan estos conceptos)

Circuito eléctrico

Un **circuito eléctrico** es un conjunto de componentes eléctricos interconectados que crean un **camino cerrado** por el que puede circular corriente eléctrica

Incluye:

- ▶ **Elementos activos** (generadores): motivan la circulación de corriente
- ▶ **Elementos pasivos** (receptores): transforman o almacenan la energía eléctrica



Análisis vs. diseño

El **análisis** (o resolución) de un circuito eléctrico existente persigue determinar sus condiciones de funcionamiento:

- ① Definir las ecuaciones correspondientes al circuito
- ② Obtener los valores de determinadas variables importantes, a partir de dichas ecuaciones

El **diseño** (o síntesis) de un circuito eléctrico tiene como objetivo definir el circuito eléctrico, es decir, determinar los componentes necesarios y su interconexión, para obtener unas condiciones de funcionamiento

En esta asignatura no vamos a diseñar circuitos, únicamente **los analizaremos**

Sistemas lineales

Todos los circuitos eléctricos que se estudian en esta asignatura se comportan como **sistemas lineales**:

- ▶ $f(x + y) = f(x) + f(y)$

La respuesta f a la suma de dos entradas x e y es igual a la suma de la respuesta individual a cada una de las entradas

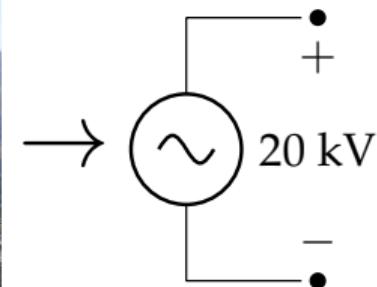
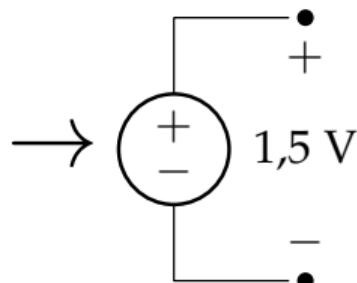
- ▶ $f(k \cdot x) = k \cdot f(x)$

La respuesta a una entrada que está multiplicada por un factor de escala k es igual a multiplicar por este factor a la respuesta a la entrada

Parámetros concentrados

- No nos preocupan las dimensiones espaciales del circuito

Por ejemplo, una pila alcalina y una central nuclear pueden modelarse ambas como fuentes de tensión (la primera de 1,5 V y la segunda de 20 kV)



Parámetros concentrados: ¿cuándo puede aplicarse?

- ▶ El modelo de parámetros concentrados nos permite simplificar las ecuaciones del electromagnetismo de Maxwell (lo que **simplifica mucho los cálculos**)
- ▶ Es aplicable únicamente cuando **las dimensiones del circuito son muy inferiores a la longitud de onda** de la señal que circula por el circuito

Válido en redes eléctricas

- ▶ **Frecuencia:** 50 Hz (en Europa)
- ▶ **Longitud onda:** 6,000 km



No válido en telecomunicaciones

- ▶ **Frecuencia:** 26 GHz (telefonía 5G)
- ▶ **Longitud onda:** 11,5 mm



① Conceptos fundamentales

Variables

② Elementos de los circuitos

③ Leyes de Kirchhoff

④ Métodos de análisis

Variables

Las principales **variables** con las que se trabaja en los circuitos eléctricos son:

- ▶ Corriente eléctrica (o *intensidad*, o *amperaje*)
- ▶ Tensión eléctrica (o *diferencia de potencial*, o *voltaje*)
- ▶ Potencia eléctrica
- ▶ Energía eléctrica

Corriente eléctrica

La **intensidad de la corriente eléctrica** es la variación de la carga $q(t)$ que atraviesa la sección transversal de un conductor por unidad de tiempo:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$



Se produce por el **movimiento de electrones** (de - a +)

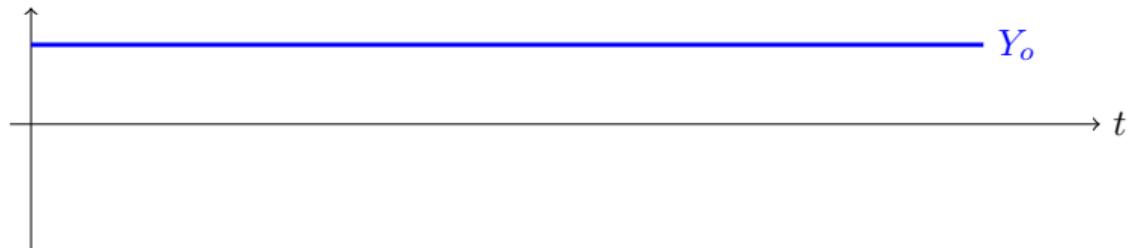
Sin embargo, por razones históricas, el convenio es considerar el **movimiento de cargas positivas** (de + a -)

La **unidad** de la corriente es el **amperio** [A] (culombios/segundo)

Corriente Continua (CC) y Corriente Alterna (CA)

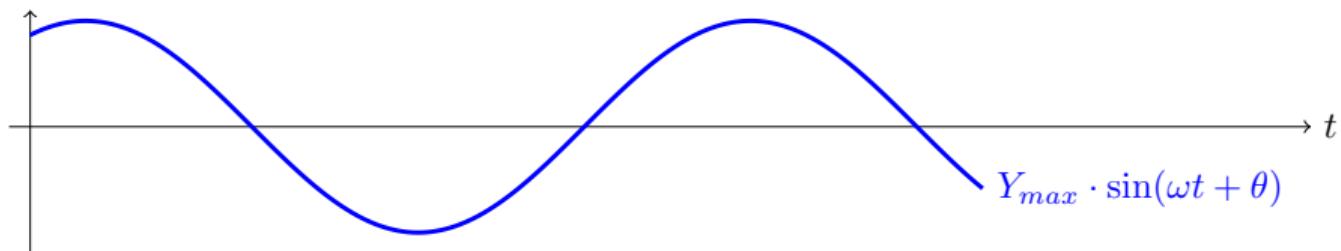
- **Corriente Continua:** siempre en el mismo sentido

Caso particular, corriente constante ($\frac{d}{dt} = 0$):



- **Corriente Alterna:** sentido cambiante

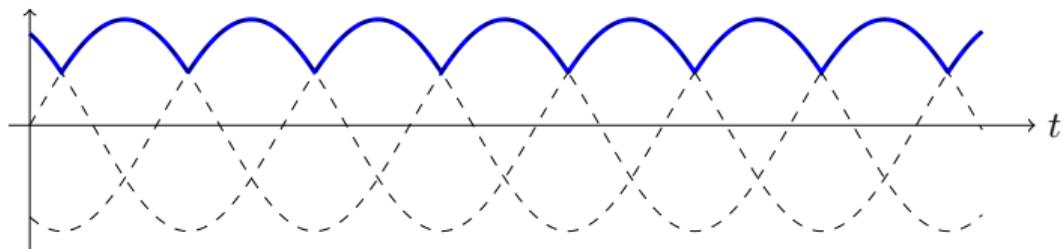
Caso particular, corriente senoidal:



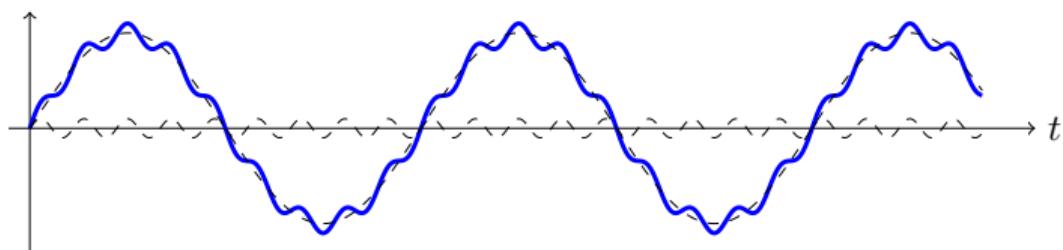
Corriente Continua (CC) y Corriente Alterna (CA)

Otros casos particulares (no estudiados en esta asignatura)

- Corriente **Continua con rizado** (obtenida a partir de alterna trifásica rectificada):



- Corriente **Alterna con harmónicos** (obtenida con un inversor CC-CA):

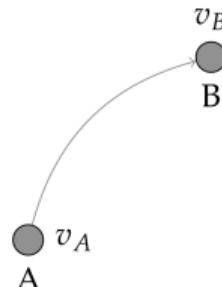


Tensión eléctrica y f.e.m.

El **potencial eléctrico en un punto**, $v(t)$, es la energía potencial que tiene una carga unitaria en ese punto, debida al campo eléctrico

La **tensión o diferencia de potencial entre dos puntos** A y B, $u_{AB}(t)$, es el trabajo realizado por el campo eléctrico al desplazar una carga unitaria entre esos puntos

$$u_{AB}(t) = v_A(t) - v_B(t) = \frac{dW_e}{dq}$$

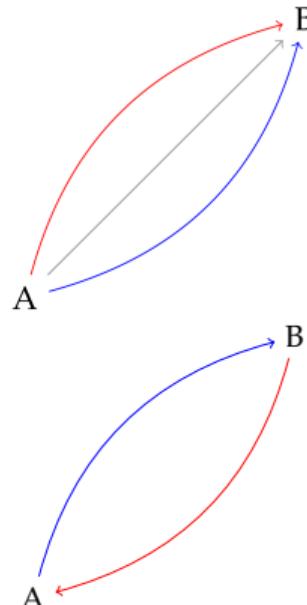


La **fuerza electromotriz** (f.e.m.) es la causa que mantiene a los electrones en movimiento (energía cedida por unidad de carga), y la proporcionan los elementos activos (**generadores**)

La **unidad** tanto de tensión eléctrica como de f.e.m. es el **voltio** [V]

La trayectoria no importa, pero el signo depende del sentido

- ▶ $u_{AB}(t)$ **no depende de la trayectoria** del desplazamiento de los electrones, sino solo del potencial en cada punto → esto implica que el **campo eléctrico es conservativo**
- ▶ Aunque la trayectoria no sea relevante, hay que tener en cuenta el **sentido del desplazamiento**



Si el movimiento se produce desde B hasta A, el signo es contrario al anterior:

$$u_{BA} = v_B - v_A = -u_{AB}$$

Potencia eléctrica

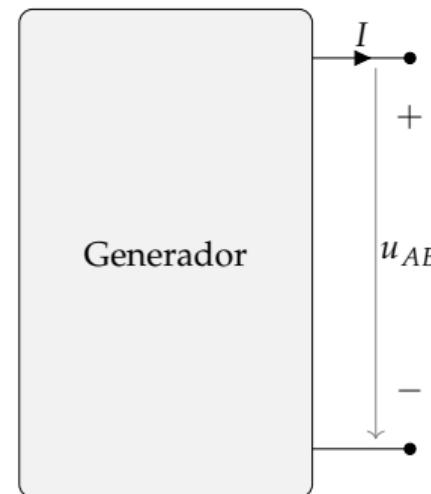
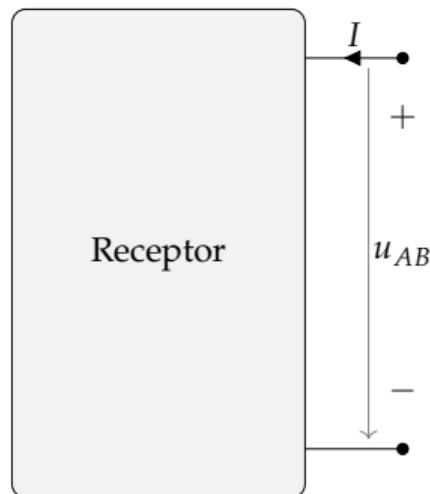
La **potencia eléctrica** es la variación del trabajo del campo eléctrico por unidad de tiempo:

$$p(t) = \frac{dW_e}{dt} = \underbrace{\frac{dW_e}{dq(t)}}_{u(t)} \cdot \underbrace{\frac{dq(t)}{dt}}_{i(t)} = \boxed{u(t) \cdot i(t)}$$

La **unidad** de la potencia eléctrica es el **vatio** [W]

Receptores y generadores

- Un **circuito receptor absorbe potencia** y la corriente *entra* por el terminal de mayor potencial
- Un **circuito generador entrega potencia** y la corriente *sale* por el terminal de mayor potencial



Potencia y energía

Energía: capacidad de un sistema para realizar un trabajo

$$E = P \cdot t$$

Unidades: [J], [Wh], [kWh]

Potencia: trabajo realizado por unidad de tiempo

Unidades: [W], [kW]

① Conceptos fundamentales

② Elementos de los circuitos

③ Leyes de Kirchhoff

④ Métodos de análisis

① Conceptos fundamentales

② Elementos de los circuitos

Elementos pasivos

Elementos activos

③ Leyes de Kirchhoff

④ Métodos de análisis

Elementos pasivos en Teoría de Circuitos

Tres tipos de elementos pasivos en esta asignatura:

- ▶ Resistencias
- ▶ Bobinas
- ▶ Condensadores

Resistencia

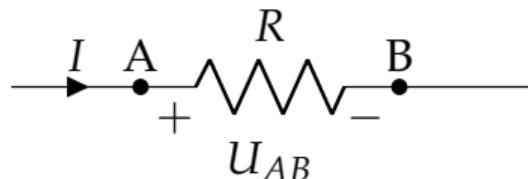
- Elemento que cumple la **Ley de Ohm**:

Una resistencia R provoca una **diferencia de potencial** entre sus terminales **directamente proporcional a la corriente** que la atraviesa

Unidades de resistencia: ohmios $[\Omega]$

$$u(t) = R \cdot i(t)$$

- La tensión es positiva en el terminal por el que entra la corriente:



Resistividad

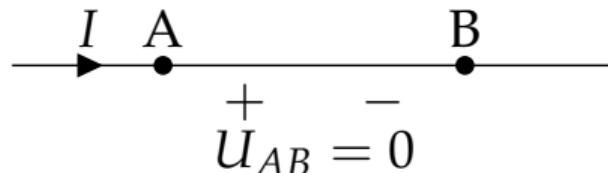
- ▶ El valor de la resistencia depende de la **resistividad del material** (ρ), de la sección (S), y de la longitud (l):

$$R = \rho \cdot \frac{l}{S}$$

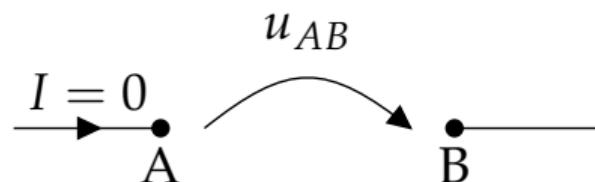
- ▶ La **sección** se expresa en mm^2
- ▶ La **resistividad** depende del material conductor y de la temperatura ambiente:
 - ▶ Cobre a 20°C : $17,24 \text{ m}\Omega \text{ mm}^2 \text{ m}^{-1}$
 - ▶ La resistividad **aumenta con la temperatura**: los átomos del material vibran con mayor virulencia al subir la temperatura, y por tanto dificultan el flujo de electrones a través del material

Cortocircuito y circuito abierto

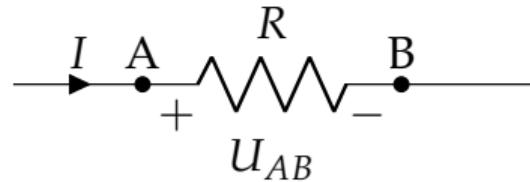
- **Cortocircuito:** resistencia nula (tensión nula)



- **Circuito abierto:** resistencia infinita (corriente nula)



Ley de Joule



- **Ley de Joule:** las resistencias disipan energía eléctrica produciendo **calor**

$$p(t) = R \cdot i^2(t)$$

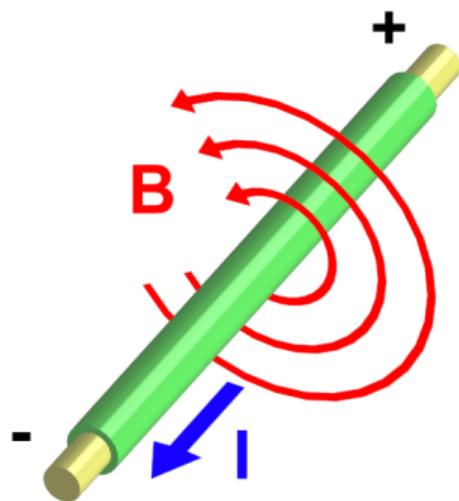
Interludio: aplicaciones del efecto Joule

La empresa Manitoba Hydro, en Canadá, usa picos de corriente controlados para deshielo de líneas de transmisión eléctrica ([clica en la imagen](#)):

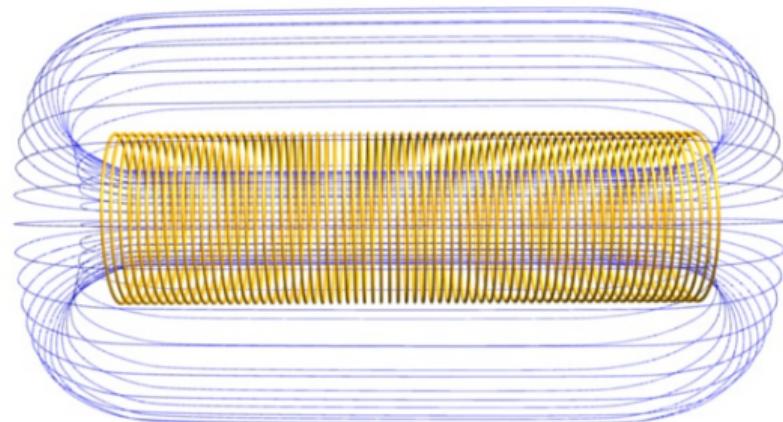


Bobina o inductancia

Cualquier **corriente** (ya sea constante o variable) **crea un campo magnético** a su alrededor (ley de Ampère)

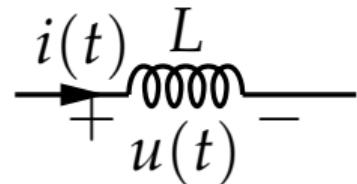


Un **conductor arrollado** crea un campo magnético más intenso: **electroimán**



Bobina o inductancia

Bobina: conductor arrollado alrededor de un núcleo

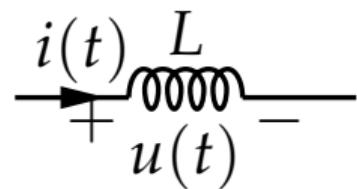


Cuando una corriente oscilante atraviesa una bobina, se produce una **tensión inducida que se opone a dicha corriente** (ley de Faraday-Lenz)

- La tensión inducida es directamente **proporcional al cambio de la corriente**: la constante de proporcionalidad es el coeficiente de autoinducción o **inductancia** ' L ' (unidades: henrios [H])

$$u_L(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

Bobina o inductancia



- Almacena **energía magnética**:

$$E_L(t) = \int_{-\infty}^t u(\tau) \cdot i(\tau) \, d\tau = \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2(t)$$

- En circuitos de CC es un **cortocircuito**:

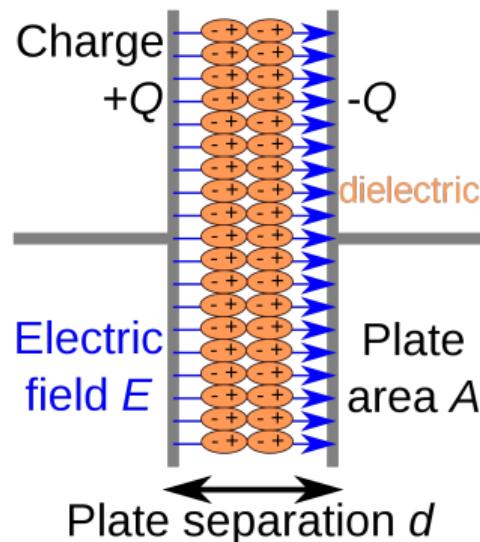
$$\frac{di(t)}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad U_L = 0$$

Condensador

Material **dieléctrico**:

- Aislante eléctrico (material con baja conductividad), pero con una propiedad particular: sus **moléculas se polarizan** en presencia de un campo eléctrico

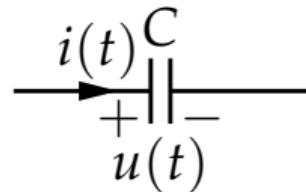
Ejemplos de dieléctricos: aire, vidrio, papel



Condensador

Condensador: dos placas metálicas separadas por un material dieléctrico

Al aplicar tensión se produce una **separación de cargas opuestas** que se **acumulan** en cada placa



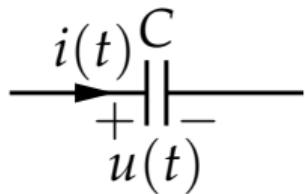
La **carga acumulada** en un instante es **proporcional** a la **diferencia de potencial** en ese instante: la constante de proporcionalidad es la **capacidad** (unidades: faradios [F])

$$q(t) = C \cdot u(t)$$

- En el proceso de carga se produce una corriente eléctrica entre las dos placas:

$$i_C(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \boxed{C \cdot \frac{du(t)}{dt}}$$

Condensador



- Un condensador almacena **energía eléctrica**:

$$E_c(t) = \int_{-\infty}^t u(\tau) \cdot i(\tau) d\tau = \boxed{\frac{1}{2} \cdot C \cdot u^2(t)}$$

- En un circuito de corriente continua se comporta como un **circuito abierto**:

$$\frac{du(t)}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad I_c = 0$$

.

① Conceptos fundamentales

② Elementos de los circuitos

Elementos pasivos

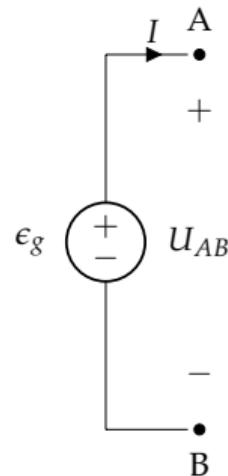
Elementos activos

③ Leyes de Kirchhoff

④ Métodos de análisis

Generadores de tensión

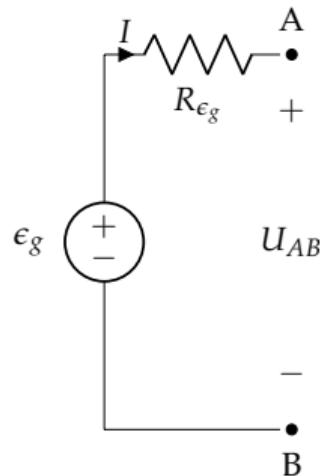
Proporcionan una diferencia de potencial U entre sus bornes de salida



Ideal:

impone tensión a la salida
(la corriente depende del circuito)

$$u_{AB} = \epsilon_g$$



Real:

con pérdidas, modeladas
mediante una resistencia **en serie**

$$u_{AB} < \epsilon_g$$

Se caracterizan
por su **fuerza
electromotriz** ϵ_g
(voltios [V])

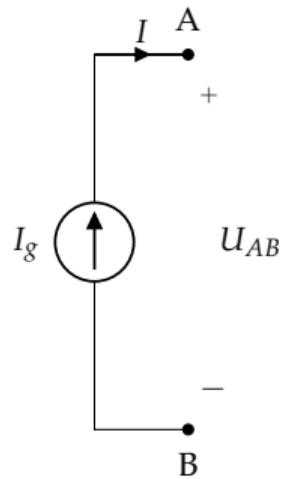
$$\epsilon_g = U_{AB} + R_{\epsilon_g} \cdot I$$

$$P_g = \epsilon_g \cdot I$$

(estas expresiones se
entenderán mejor
cuando veamos las
leyes de Kirchhoff)

Generadores de corriente

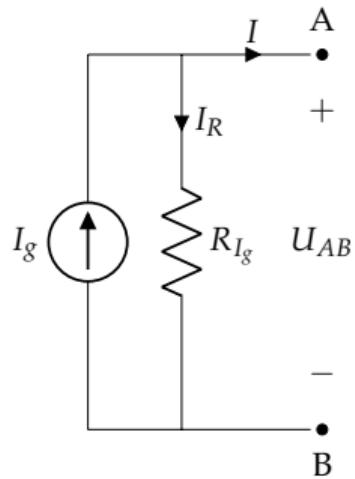
Proporcionan una corriente I



Ideal:

impone corriente a la salida
(la tensión depende del circuito)

$$I = I_g$$



Real: con pérdidas,
modeladas mediante una
resistencia **en paralelo**

$$I < I_g$$

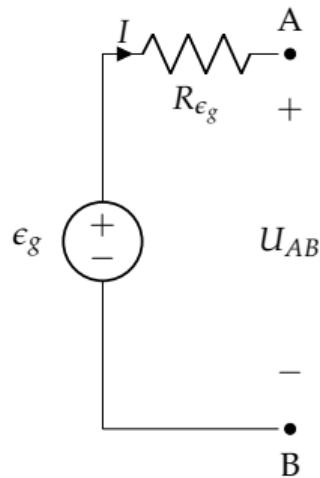
Se caracterizan
por su **corriente**
de generador I_g
(amperios [A])

$$I_g = I + \frac{U_{AB}}{R_{I_g}}$$

$$P_g = U_{AB} \cdot I_g$$

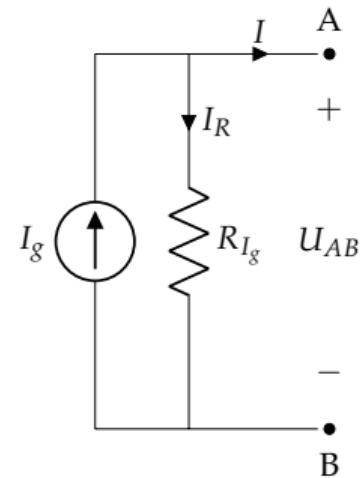
(estas expresiones se
entenderán mejor
cuando veamos las
leyes de Kirchhoff)

Equivalencia de fuentes



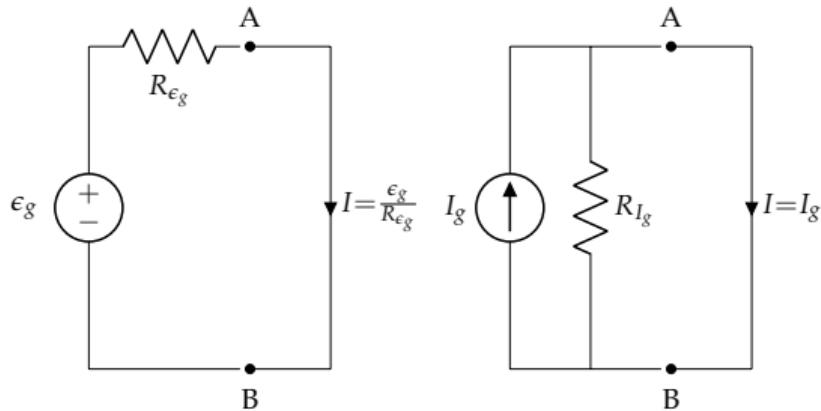
- ▶ Dos fuentes son equivalentes cuando suministran el mismo valor de tensión y corriente a un **circuito externo**, para cualquier circuito

- ▶ Sólo es posible establecer equivalencia entre **fuentes reales**

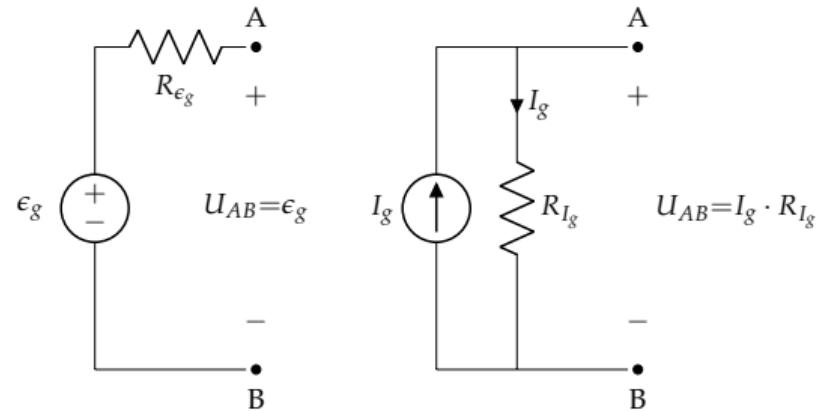


Equivalencia de fuentes

La **corriente en cortocircuito**
debe ser la misma:



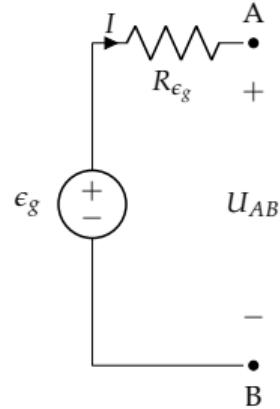
Y la **tensión en circuito abierto**
debe ser la misma:



$$I_{sc} = I_g = \frac{\epsilon_g}{R_{\epsilon_g}}, \quad U_{oc} = \epsilon_g = I_g \cdot R_{I_g} \quad \rightarrow \quad \boxed{R_{\epsilon_g} = R_{I_g}}$$

(SC \equiv short circuit, OC \equiv open circuit)

Equivalencia de fuentes



La salida de tensión de una fuente de tensión es:

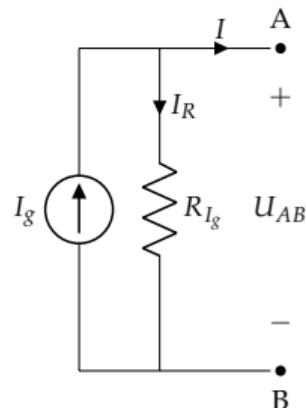
$$U_{AB} = \epsilon_g - R_{\epsilon_g} \cdot I$$

Y de una fuente de corriente:

$$I = I_g - \frac{U_{AB}}{R_{I_g}} \rightarrow U_{AB} = R_{I_g} \cdot I_g - R_{I_g} \cdot I$$

Las **fuentes son equivalentes cuando** las ecuaciones coinciden para cualquier combinación (U_{AB}, I):

$$R_g = R_{\epsilon_g} = R_{I_g} \quad (\text{resultado de la diapositiva anterior})$$



$$\epsilon_g = R_g \cdot I_g \Leftrightarrow I_g = \frac{\epsilon_g}{R_g}$$

Eficiencia

Cociente entre la potencia de salida y la potencia de entrada:

- **Receptor** (generalmente, motor):

$$\eta_m = \frac{P_{\text{útil}}}{P_{\text{absorbida}}}$$

- **Generador:**

$$\eta_g = \frac{P_{\text{entregada}}}{P_{\text{producida}}}$$

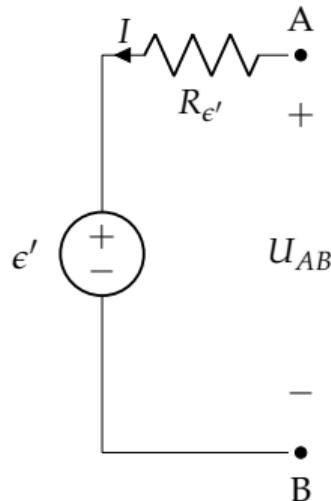
Cualquier máquina tiene pérdidas (por disipación de energía en forma de calor):

$$\boxed{\eta < 1}$$

Balance de potencias

► Ejemplo: motor

Caracterizado por su **fuerza contraelectromotriz** (f.c.e.m., ϵ'): energía por unidad de carga, que transforma en otro tipo de energía (mecánica, química, etc.)



$$P_{\text{útil}} = P_{\text{absorbida}} - P_{\text{pérdidas}}$$

$$P_{\text{útil}} = \epsilon' \cdot I$$

$$P_{\text{pérdidas}} = R_{\epsilon'} \cdot I^2 \quad (\text{ley de Joule})$$

$$P_{\text{absorbida}} = U_{AB} \cdot I$$

Dado que $U_{AB} > \epsilon'$, $\eta_m < 1$:

Real (con pérdidas)

$$U_{AB} > \epsilon'$$

$$\eta_m = \frac{P_{\text{útil}}}{P_{\text{absorbida}}} = \frac{\epsilon' \cdot I}{U_{AB} \cdot I} < 1$$

① Conceptos fundamentales

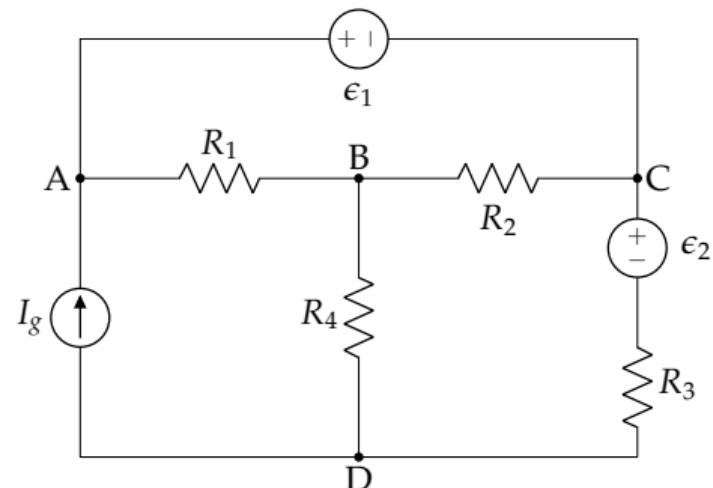
② Elementos de los circuitos

③ Leyes de Kirchhoff

④ Métodos de análisis

Definiciones

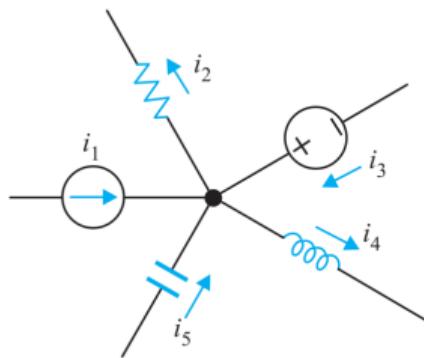
- Nudo** unión de **3** o más conductores (en la figura, los puntos A, B, C y D)
- Rama** elementos conectados entre dos nudos consecutivos
(A-B, A-C, A-D, B-C, B-D y C-D)
- Lazo** conjunto de ramas que forman un camino cerrado
(ACDA, ACBDA, ACDBA, ABCDA, ABCA, ABDA, BCDB)
- Malla** lazo que no contiene ningún otro en su interior (ABCA, ABDA, BCDB)



Primera Ley de Kirchhoff (1LK)

- La **1LK** es el principio de **conservación de la carga** aplicado a los circuitos eléctricos:
La suma de las corrientes que llegan a un nudo es igual a la suma de las que salen

$$\sum_{j=1}^n i_j(t) = 0$$

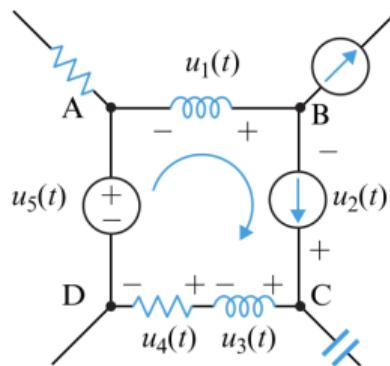


$$i_1(t) - i_2(t) + i_3(t) - i_4(t) + i_5(t) = 0$$

Segunda Ley de Kirchhoff (2LK)

- La **2LK** es el principio de **conservación de la energía** aplicado a los circuitos:
La suma (con signo) de las tensiones a lo largo de un camino cerrado es cero

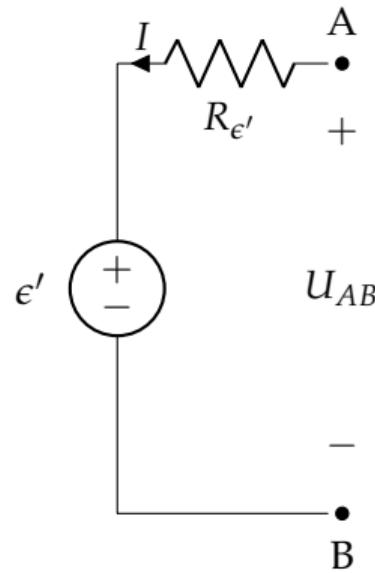
$$\sum_{j=1}^m u_j(t) = 0$$



$$-u_1(t) - u_2(t) + u_3(t) + u_4(t) - u_5(t) = 0$$

2LK a partir de balance de potencias

- Ejemplo: **motor real** (con pérdidas)



$$P_{\text{útil}} = P_{\text{absorbida}} - P_{\text{pérdidas}}$$

$$P_{\text{útil}} = \epsilon' \cdot I$$

$$P_{\text{pérdidas}} = R_{\epsilon'} \cdot I^2 \quad (\text{ley de Joule})$$

$$P_{\text{absorbida}} = U_{AB} \cdot I$$

Dividiendo en ambos lados por I , se obtiene 2LK:

$$U_{AB} = \epsilon' + R_{\epsilon'} \cdot I$$

Ejercicio

Un generador cuya *fem* es de 120 V y resistencia de $0,2\ \Omega$, da una corriente de 20 A a un motor situado a 300 m de distancia y de resistencia $0,5\ \Omega$

La línea que los conecta es de cobre, de resistividad $17,24\ \text{m}\Omega\ \text{mm}^2\ \text{m}^{-1}$

Sabiendo que el motor absorbe 10,2 kWh en 5 h, se debe hallar:

- ① La fuerza contraelectromotriz (*fcem*) del motor
- ② La sección de los conductores de la línea
- ③ Los rendimientos de: motor, generador, línea y rendimiento total
- ④ El balance general de potencias

Solución: aquí

① Conceptos fundamentales

② Elementos de los circuitos

③ Leyes de Kirchhoff

Asociación de elementos

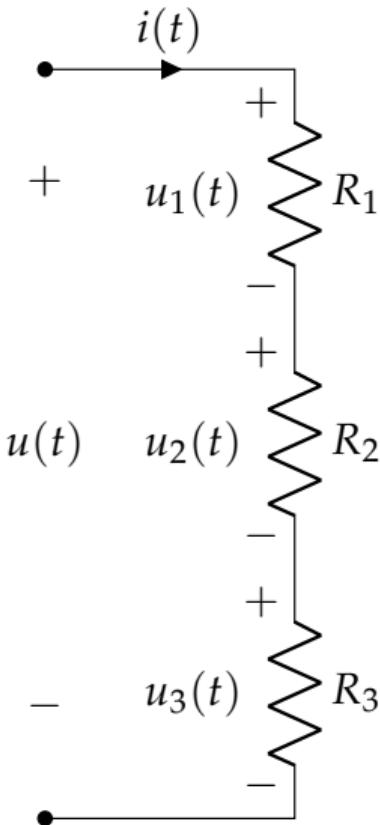
④ Métodos de análisis

Asociación de elementos

Las principales formas de asociar elementos en un circuito son:

- ▶ **Serie:** *final* de un elemento conectado con *principio* del siguiente → **misma corriente**
- ▶ **Paralelo:** todos los principios conectados en un punto, todos los finales en otro → **misma diferencia de potencial**
- ▶ **Mixto:** combinación de serie y paralelo
- ▶ **Estrella - Triángulo:** conexión de cargas trifásicas

Conexión en serie



Un conjunto de elementos están asociados en serie cuando circula la **misma corriente** por todos ellos:

$$u_1(t) = R_1 \cdot i(t)$$

$$u_2(t) = R_2 \cdot i(t)$$

$$u_3(t) = R_3 \cdot i(t)$$

Aplicando **2LK**:

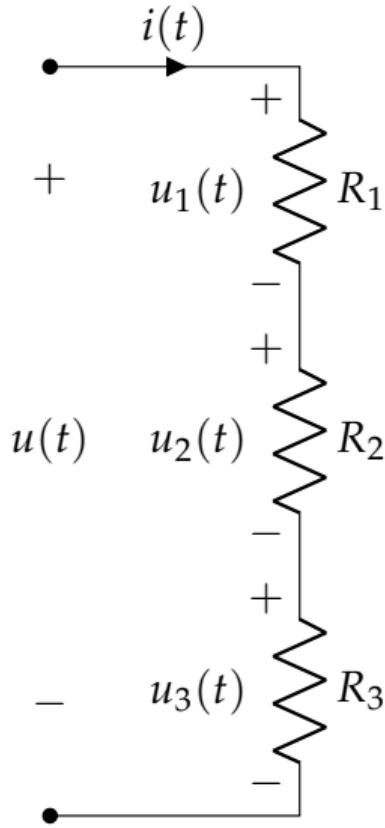
$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) + u_3(t)$$

$$u(t) = i(t) \cdot (R_1 + R_2 + R_3)$$

Definimos la **resistencia equivalente** de la conexión serie:

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^n R_i \quad \text{dado que } u(t) = R_{eq} \cdot i(t)$$

Conexión en serie: divisor de tensión



De las ecuaciones anteriores tenemos:

$$i(t) = \frac{u(t)}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$u_3(t) = R_3 \cdot i(t)$$

Por tanto, la **tensión parcial** $u_3(t)$ se puede expresar en función de la tensión total $u(t)$:

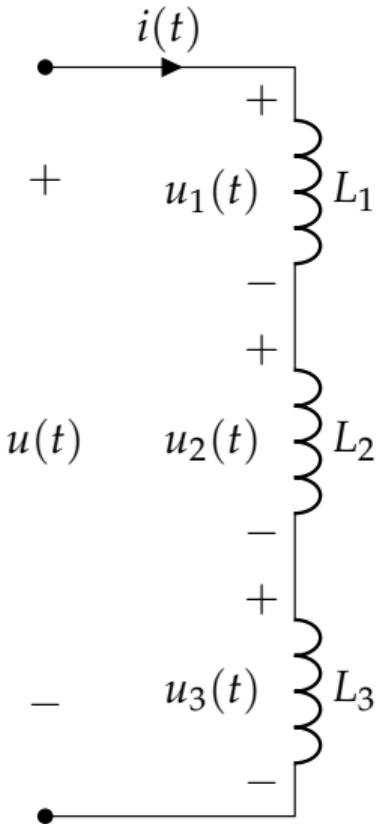
$$u_3(t) = u(t) \cdot \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

En general, para cualquiera de las resistencias, R_i :

$$u_i(t) = u(t) \cdot \frac{R_i}{R_{eq}}$$

(expresión útil para agilizar la resolución de algunos ejercicios)

Conexión en serie de bobinas



Mismos pasos que en el caso de las resistencias:

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) + u_3(t)$$

$$u_1(t) = L_1 \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

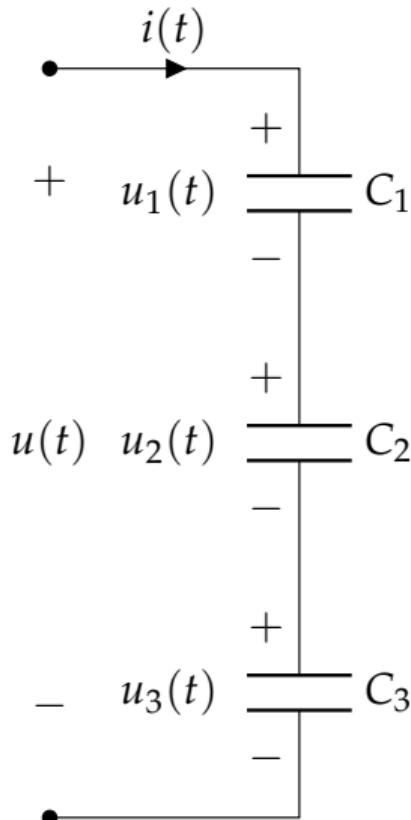
$$u_2(t) = L_2 \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

$$u_3(t) = L_3 \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

$$u(t) = \frac{di(t)}{dt} \cdot (L_1 + L_2 + L_3)$$

$$L_{eq} = \sum_{i=1}^n L_i \quad \text{dado que } u(t) = L_{eq} \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

Conexión en serie de condensadores



$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) + u_3(t)$$

$$i(t) = C_1 \cdot \frac{du_1(t)}{dt} = C_2 \cdot \frac{du_2(t)}{dt} = C_3 \cdot \frac{du_3(t)}{dt}$$

$$u_1(t) = \frac{1}{C_1} \cdot \int_0^t i(\tau) d\tau$$

$$u_2(t) = \frac{1}{C_2} \cdot \int_0^t i(\tau) d\tau$$

$$u_3(t) = \frac{1}{C_3} \cdot \int_0^t i(\tau) d\tau$$

$$u(t) = \int_0^t i(\tau) d\tau \cdot \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right)$$

$$\boxed{\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}}$$
 dado que $i(t) = C_{eq} \cdot \frac{du(t)}{dt}$

Conexión en serie de generadores

Generadores de tensión

- Pueden conectarse en serie **sin restricción** (tanto generadores ideales como reales)

$$\epsilon_T = \sum_{i=1}^N \epsilon_i$$

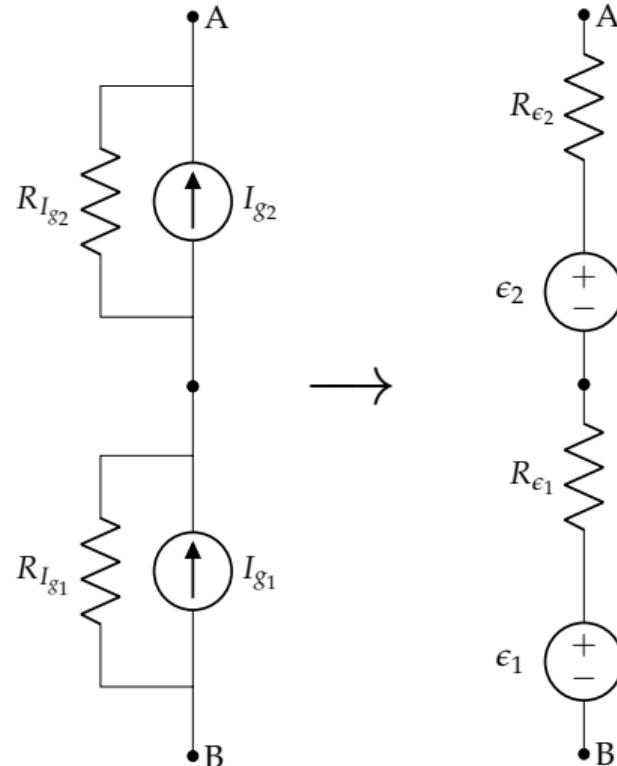
$$R_{\epsilon_T} = \sum_{i=1}^N R_{\epsilon_i}$$

Generadores de corriente

- **Ideal:** todas las fuentes **deben ser idénticas** (valor y sentido)
- **Real:** sin restricción
 - Transformación a fuentes de tensión para obtener la **fuente equivalente**

Ejemplo: fuentes de corriente reales en serie

Se transforman primero cada una de las fuentes de corriente en fuentes de tensión:



Donde:

$$\epsilon_1 = I_{g1} \cdot R_{I_{g1}}$$

$$\epsilon_2 = I_{g2} \cdot R_{I_{g2}}$$

$$R_{\epsilon_1} = R_{I_{g1}}$$

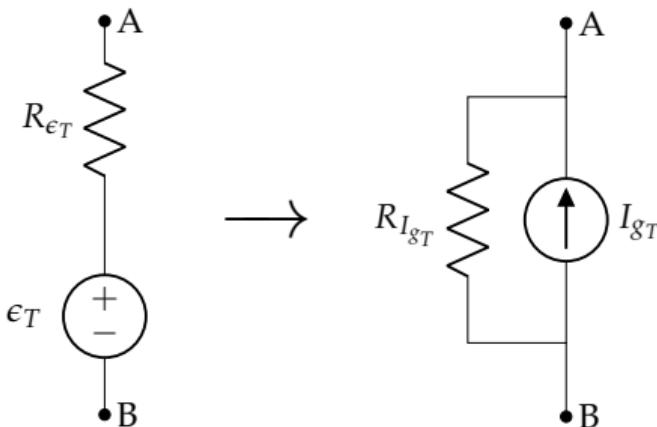
$$R_{\epsilon_2} = R_{I_{g2}}$$

(continúa en la siguiente diapositiva)

Ejemplo: fuentes de corriente reales en serie (continuación)

Las fuentes de tensión en serie se asocian en una fuente equivalente, y esta se transforma de vuelta en una fuente de corriente:

Donde:



$$\epsilon_T = \epsilon_1 + \epsilon_2 = I_{g1} \cdot R_{Ig1} + I_{g2} \cdot R_{Ig2}$$

$$R_{\epsilon_T} = R_{\epsilon_1} + R_{\epsilon_2} = R_{Ig1} + R_{Ig2}$$

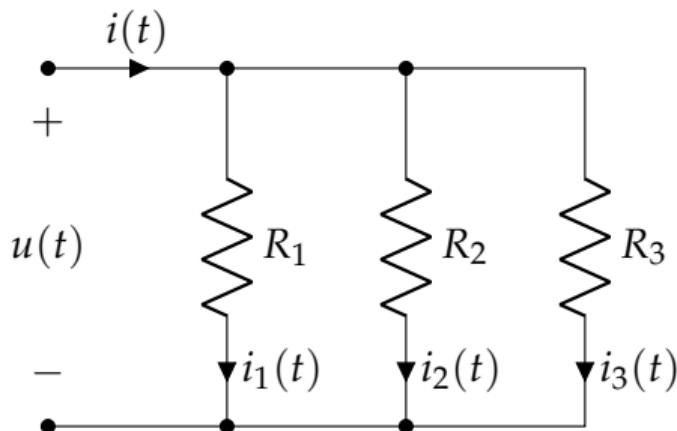
Y finalmente:

$$I_{gT} = \frac{\epsilon_T}{R_{IgT}} = \frac{I_{g1} \cdot R_{Ig1} + I_{g2} \cdot R_{Ig2}}{R_{Ig1} + R_{Ig2}}$$

$$R_{IgT} = R_{\epsilon_T} = R_{Ig1} + R_{Ig2}$$

Conexión en paralelo

Un conjunto de elementos están asociados en paralelo cuando están sometidos a la **misma tensión**:



$$i_1(t) = u(t)/R_1$$

$$i_2(t) = u(t)/R_2$$

$$i_3(t) = u(t)/R_3$$

Aplicando **1LK**:

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) + i_3(t)$$

$$i(t) = u(t) \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)$$

Definimos la **resistencia equivalente** del paralelo:

$$\boxed{\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}} \quad \text{dado que } u(t) = R_{eq} \cdot i(t)$$

Conexión en paralelo: caso particular de dos resistencias

En el caso concreto de **dos resistencias en paralelo**, la expresión es:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$R_{eq} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

(conveniente recordarla para agilizar la resolución de algunos ejercicios)

Para ' N ' **resistencias iguales** asociadas en paralelo, cada una de valor ' R :

$$R_{eq} = \frac{R}{N}$$

Conductancia

Para **simplificar las operaciones** en conexiones en paralelo, es conveniente utilizar el inverso de la resistencia, la **conductancia** G :

$$G = \frac{1}{R}$$

Así, en lugar de...

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}$$

$$u(t) = R_{eq} \cdot i(t)$$

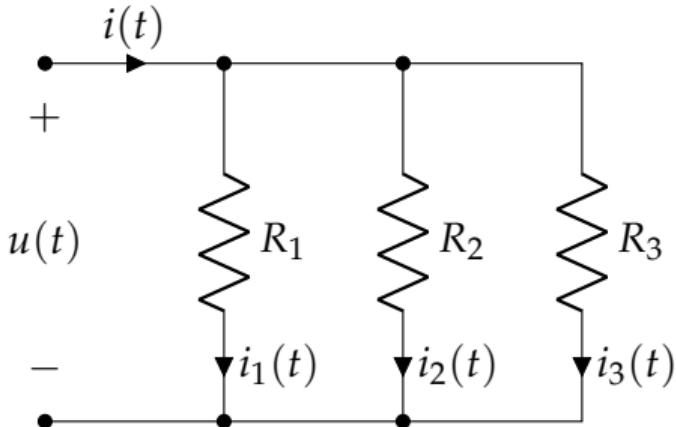
...se puede escribir:

$$G_{eq} = \sum_{i=1}^n G_i$$

y usar $\underbrace{i(t) = G_{eq} \cdot u(t)}_{\text{ley de Ohm}}$

Conexión en paralelo: divisor de corriente

De las ecuaciones anteriores tenemos:



$$u(t) = \frac{i(t)}{G_1 + G_2 + G_3} \quad i_3(t) = G_3 \cdot u(t)$$

Por tanto, la **corriente parcial** $i_3(t)$ se puede expresar en función de la corriente total $i(t)$:

$$i_3(t) = i(t) \cdot \frac{G_3}{G_1 + G_2 + G_3}$$

En general, para cualquiera de las conductancias, G_j :

$$i_j(t) = i(t) \cdot \frac{G_j}{G_{eq}} = i(t) \cdot \frac{R_{eq}}{R_j}$$

(expresión útil para agilizar la resolución de ejercicios)

Divisor de corriente: caso particular de dos resistencias

En el caso concreto de **dos resistencias en paralelo**, la expresión es:

$$i_1(t) = i(t) \cdot \frac{G_1}{G_1 + G_2} = i(t) \cdot \frac{R_1 \parallel R_2}{R_1} = i(t) \cdot \frac{\cancel{R_1} \cdot R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1}{\cancel{R_1}}$$

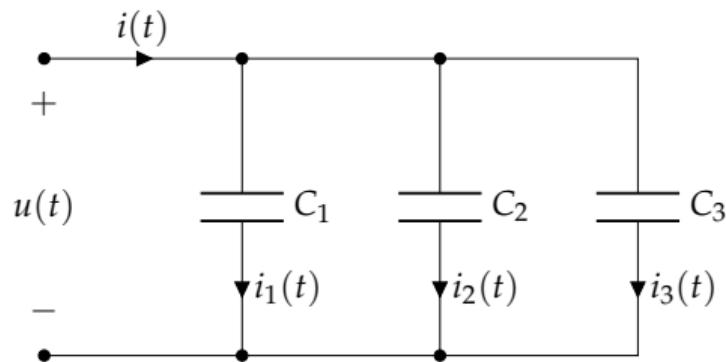
$$i_1(t) = i(t) \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Para ' N ' **resistencias iguales** asociadas en paralelo:

$$i_j(t) = \frac{i(t)}{N}$$

Conexión en paralelo de condensadores

Mismos pasos que en el caso de las resistencias:



$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) + i_3(t)$$

$$i_1(t) = C_1 \cdot \frac{du(t)}{dt}$$

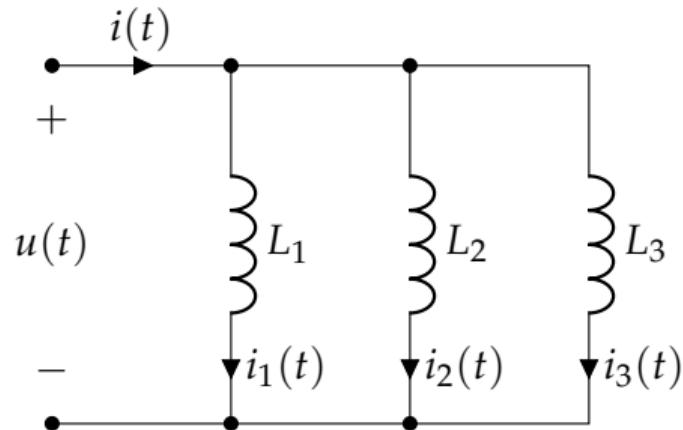
$$i_2(t) = C_2 \cdot \frac{du(t)}{dt}$$

$$i_3(t) = C_3 \cdot \frac{du(t)}{dt}$$

$$i(t) = \frac{du(t)}{dt} \cdot (C_1 + C_2 + C_3)$$

$$C_{eq} = \sum_{i=1}^n C_i \quad \text{dado que } i(t) = C_{eq} \cdot \frac{du(t)}{dt}$$

Conexión en paralelo de bobinas



$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) + i_3(t)$$

$$u(t) = L_1 \cdot \frac{di_1(t)}{dt} = L_2 \cdot \frac{di_2(t)}{dt} = L_3 \cdot \frac{di_3(t)}{dt}$$

$$i_1(t) = \frac{1}{L_1} \cdot \int_0^t u(\tau) d\tau$$

$$i_2(t) = \frac{1}{L_2} \cdot \int_0^t u(\tau) d\tau$$

$$i_3(t) = \frac{1}{L_3} \cdot \int_0^t u(\tau) d\tau$$

$$i(t) = \int_0^t u(\tau) d\tau \cdot \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} \right)$$

$$\boxed{\frac{1}{L_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{L_i}}$$
 dado que $u(t) = L_{eq} \cdot \frac{di(t)}{dt}$

Conexión en paralelo de generadores

Generadores de tensión

- ▶ **Ideal:** todas las fuentes **deben ser idénticas** (valor y polaridad)
- ▶ **Real:** sin restricción
 - ▶ Transformación a fuentes de corriente para obtener la **fuente equivalente**

Generadores de corriente

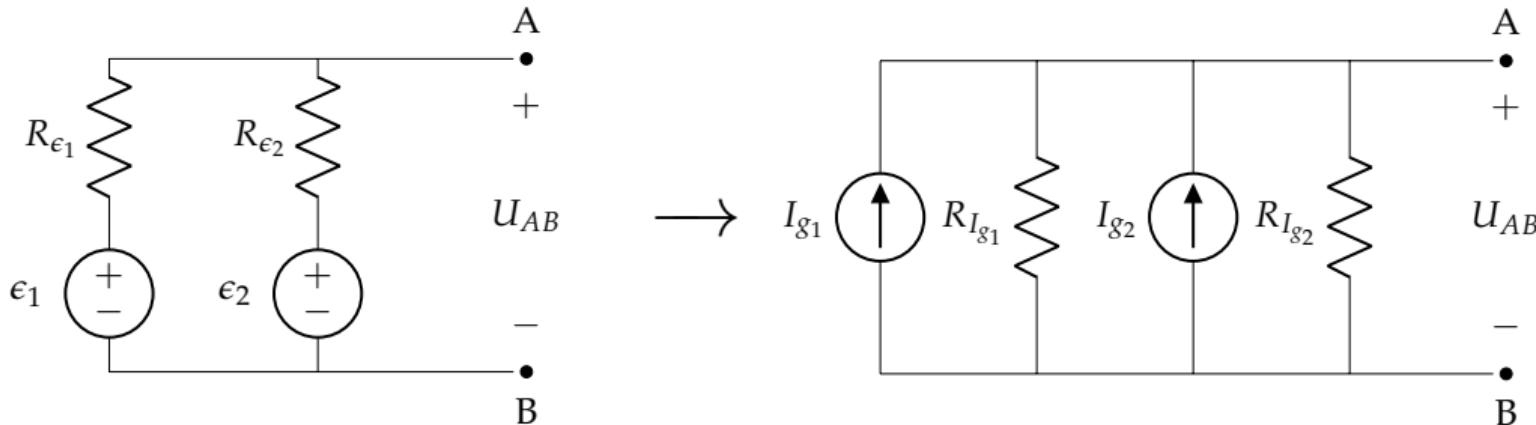
- ▶ Pueden conectarse en paralelo **sin restricción**

$$I_{gT} = \sum_{i=1}^N I_{gi}$$

$$G_{gT} = \sum_{i=1}^N G_{gi}$$

Ejemplo: fuentes de tensión reales en paralelo

Se transforman primero cada una de las fuentes de tensión en fuentes de corriente:



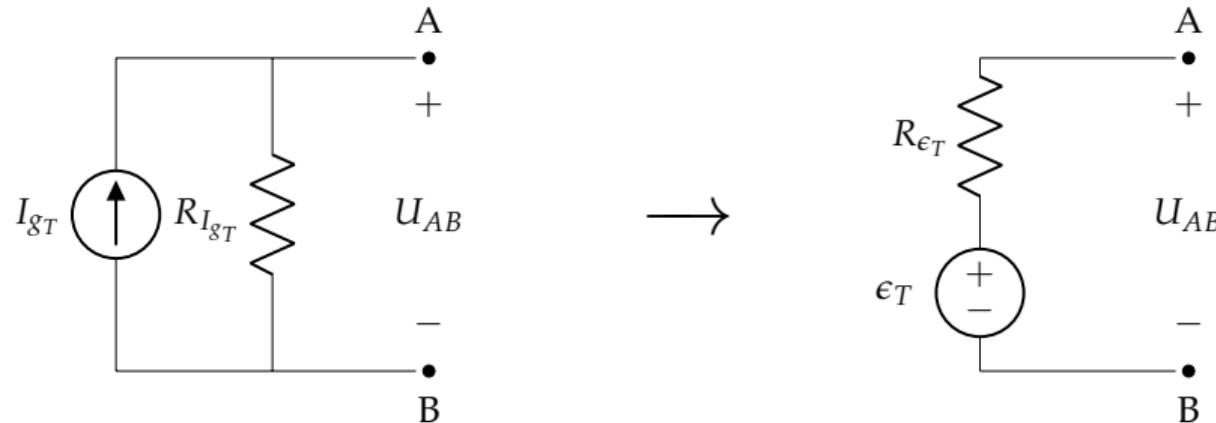
Donde:

$$I_{g1} = \frac{\epsilon_1}{R_{\epsilon_1}} \quad I_{g2} = \frac{\epsilon_2}{R_{\epsilon_2}} \quad R_{I_{g1}} = R_{\epsilon_1} \quad R_{I_{g2}} = R_{\epsilon_2}$$

(continúa en la siguiente diapositiva)

Ejemplo: fuentes de tensión reales en paralelo (continuación)

Las fuentes de corriente en paralelo se asocian en una fuente equivalente, y esta se transforma de vuelta en una fuente de tensión:



$$I_{gT} = I_{g1} + I_{g2} = \frac{\epsilon_1}{R_{\epsilon_1}} + \frac{\epsilon_2}{R_{\epsilon_2}}$$

$$R_{I_{gT}} = R_{I_{g1}} \parallel R_{I_{g2}} = R_{\epsilon_1} \parallel R_{\epsilon_2}$$

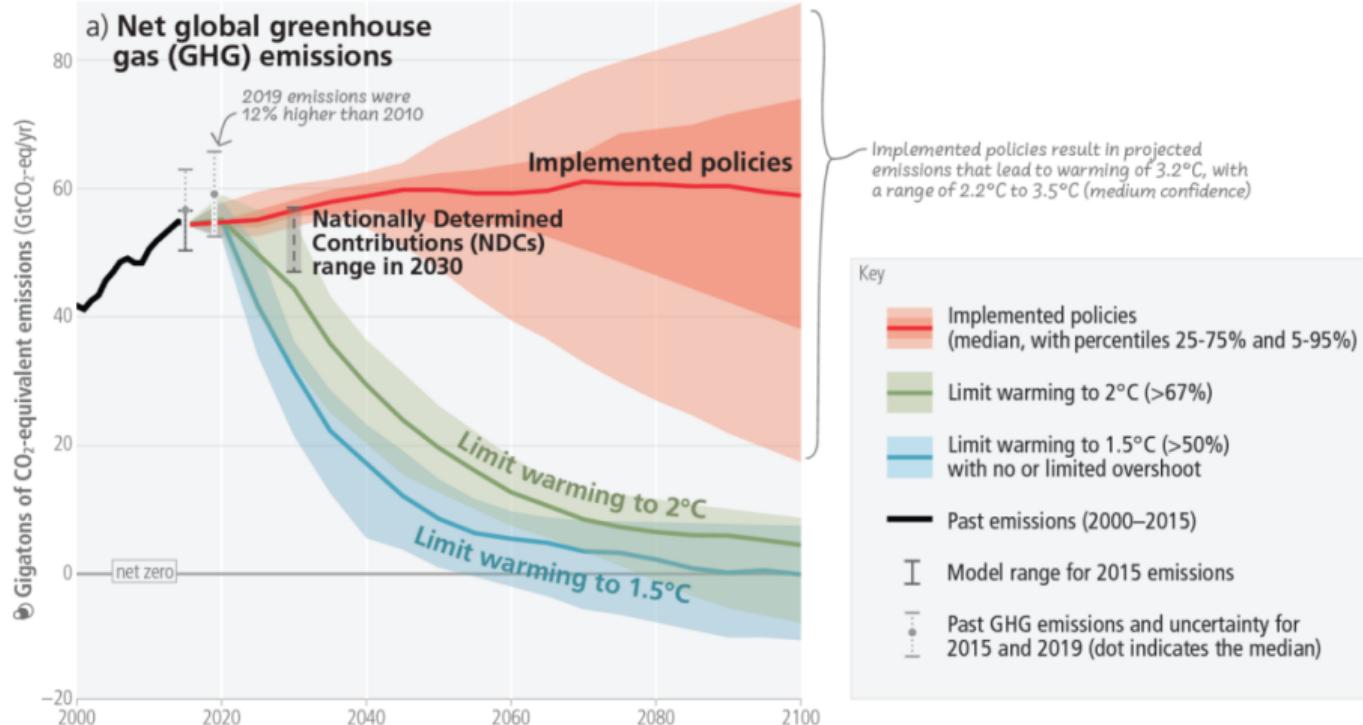
$$\epsilon_T = R_{\epsilon_T} \cdot I_{gT} = \frac{\epsilon_1 \cdot R_{\epsilon_2} + \epsilon_2 \cdot R_{\epsilon_1}}{R_{\epsilon_1} + R_{\epsilon_2}}$$

$$R_{\epsilon_T} = R_{I_{gT}} = R_{\epsilon_1} \parallel R_{\epsilon_2}$$

Interludio: escenarios climáticos

Limiting warming to 1.5°C and 2°C involves rapid, deep and in most cases immediate greenhouse gas emission reductions

Net zero CO₂ and net zero GHG emissions can be achieved through strong reductions across all sectors



¿Cómo te va a afectar a ti?

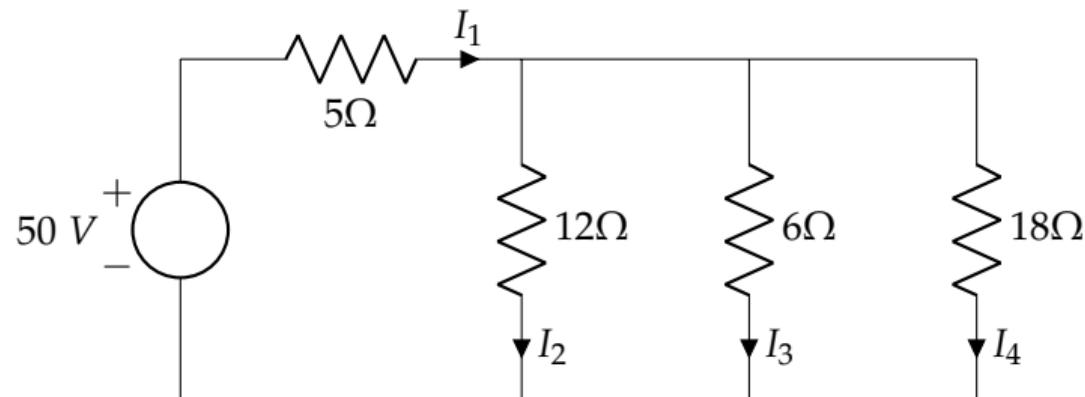
Mira esto

Fuente:
“Synthesis report of the IPCC sixth assessment report (AR6)”, 2023

Conexión mixta

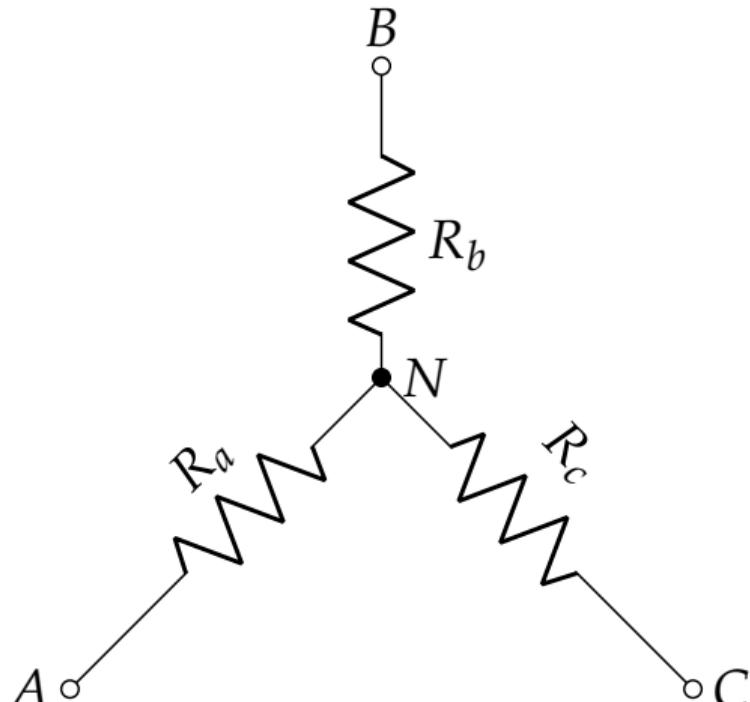
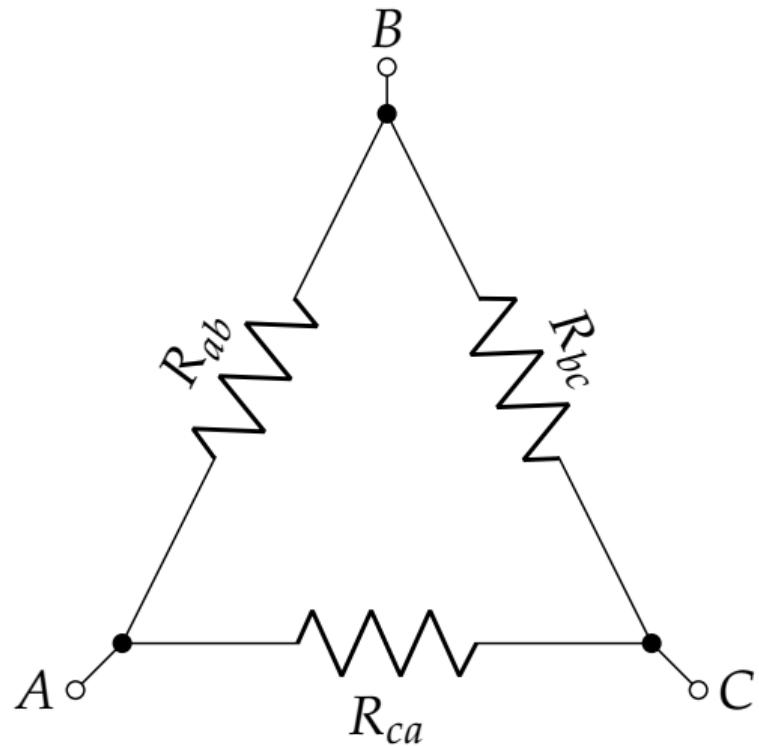
Ejemplo

Calcular la corriente que aporta la fuente de tensión del siguiente circuito:



Solución: 6,04 A

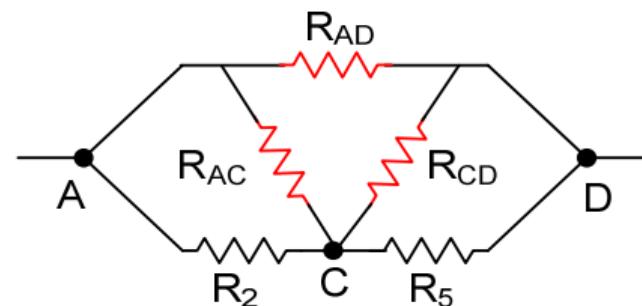
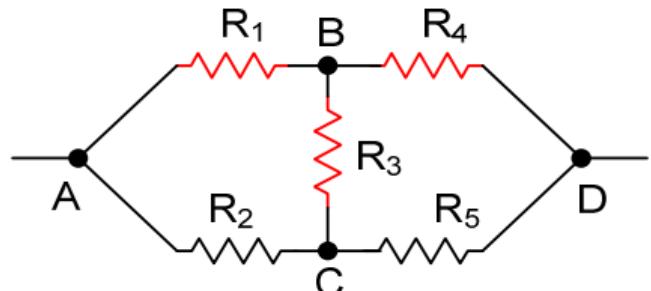
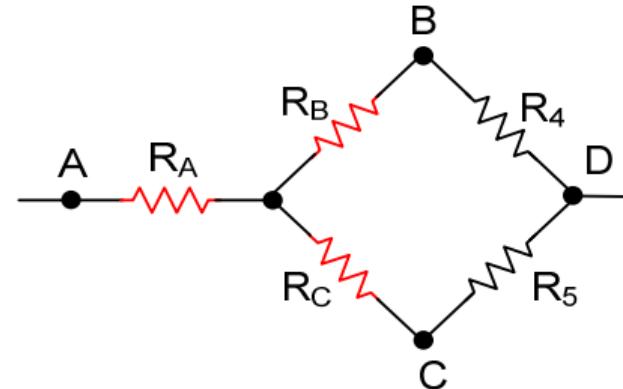
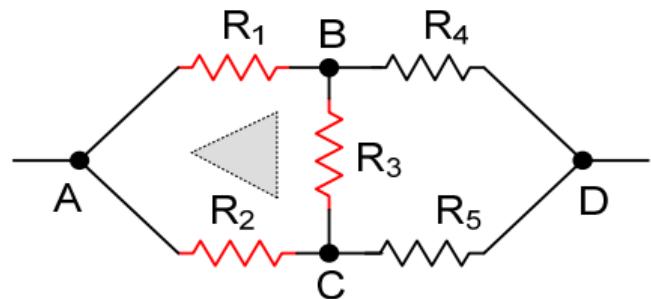
Conexión estrella - triángulo



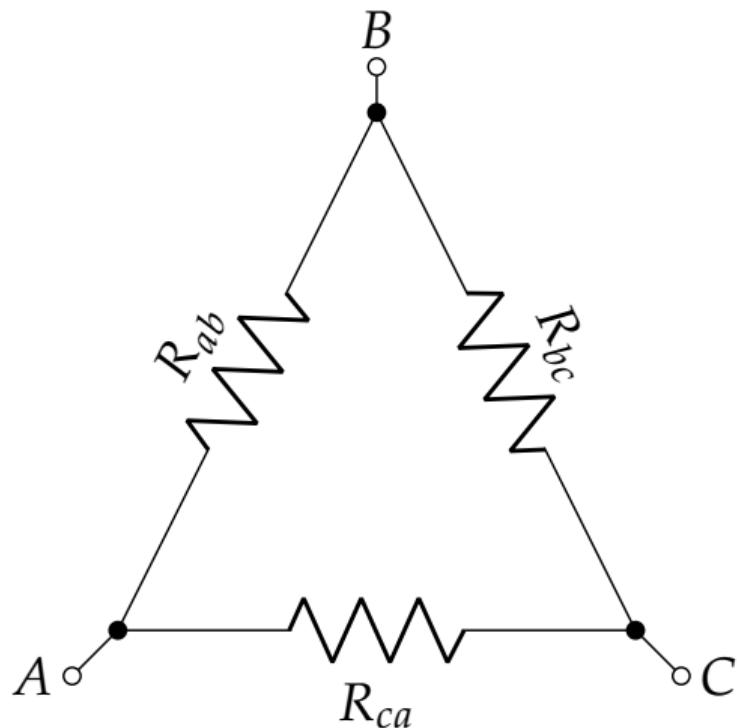
Conexión estrella - triángulo

Existen acoplamientos que no se simplifican mediante reducciones “serie” o “paralelo”

Son necesarias **otras transformaciones**:



Conexión triángulo



La resistencia **vista entre los terminales** A y B es la asociación paralelo de R_{ab} con el serie de R_{bc} y R_{ca} :

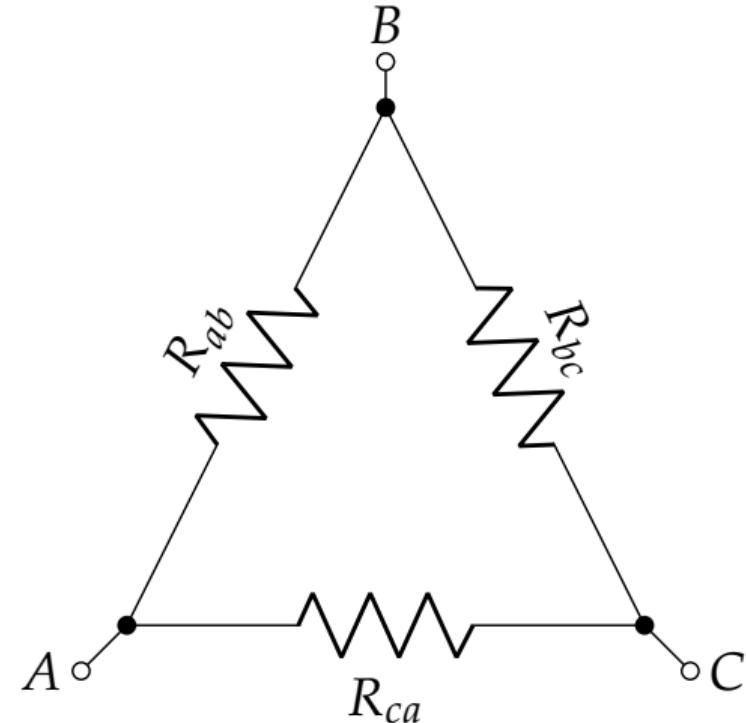
$$R_{AB} = \frac{R_{ab} \cdot (R_{bc} + R_{ca})}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}$$

De la misma forma, para los terminales B-C y C-A:

$$R_{BC} = \frac{R_{bc} \cdot (R_{ab} + R_{ca})}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}$$

$$R_{CA} = \frac{R_{ca} \cdot (R_{ab} + R_{bc})}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}$$

Conexión triángulo



Desarrollando los productos:

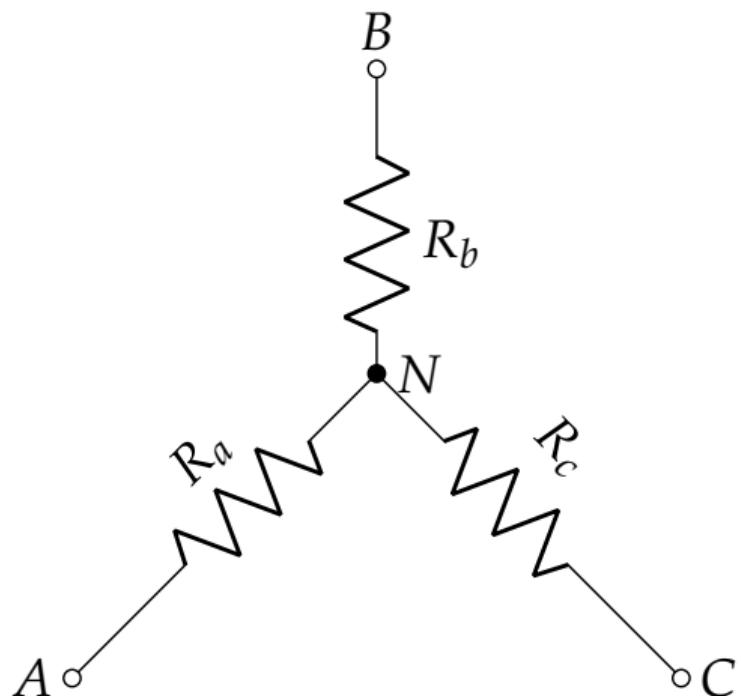
$$R_{AB} = \frac{R_{ab} \cdot R_{bc}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}} + \frac{R_{ab} \cdot R_{ca}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}$$

$$R_{BC} = \frac{R_{bc} \cdot R_{ab}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}} + \frac{R_{bc} \cdot R_{ca}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}$$

$$R_{CA} = \frac{R_{ca} \cdot R_{ab}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}} + \frac{R_{ca} \cdot R_{bc}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}$$

(en un momento veremos para qué
son útiles estas expresiones)

Conexión estrella



La resistencia **vista entre los terminales** A y B es simplemente la asociación serie de R_a y R_b :

$$R_{AB} = R_a + R_b$$

De la misma forma, para los terminales B-C y C-A:

$$R_{BC} = R_b + R_c$$

$$R_{CA} = R_c + R_a$$

Conexión triángulo - estrella: equivalencia

Combinando las expresiones de las dos diapositivas anteriores:

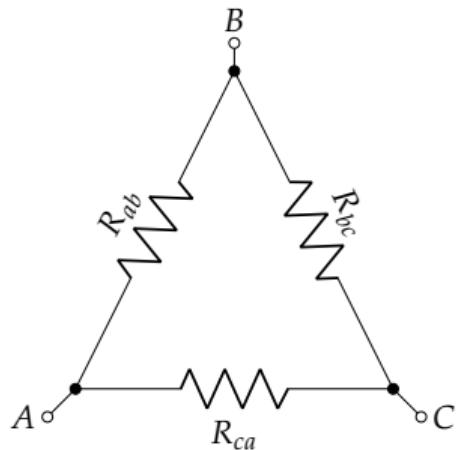
$$\frac{R_{ab} \cdot R_{bc}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}} + \frac{R_{ab} \cdot R_{ca}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}} = R_a + R_b$$

$$\frac{R_{ab} \cdot R_{bc}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}} + \frac{R_{bc} \cdot R_{ca}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}} = R_b + R_c$$

$$\frac{R_{ab} \cdot R_{ca}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}} + \frac{R_{bc} \cdot R_{ca}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}} = R_c + R_a$$

Para **convertir de triángulo a estrella**: la expresión, por ejemplo, para R_a , se obtiene combinando la primera ecuación, menos la segunda, más la tercera (siguiente diapositiva)

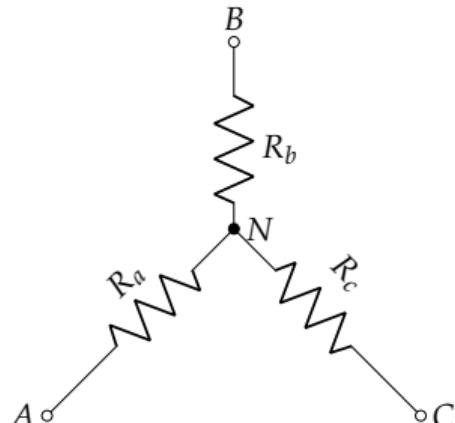
Conversión de triángulo a estrella



$$R_a = \frac{R_{ab} \cdot R_{ca}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}$$

$$R_b = \frac{R_{ab} \cdot R_{bc}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}$$

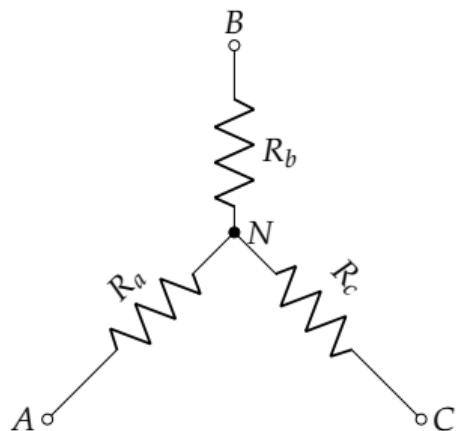
$$R_c = \frac{R_{bc} \cdot R_{ca}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}$$



Regla mnemotécnica:

la expresión para R_a tiene en el numerador el producto de las 2 resistencias conectadas al terminal A

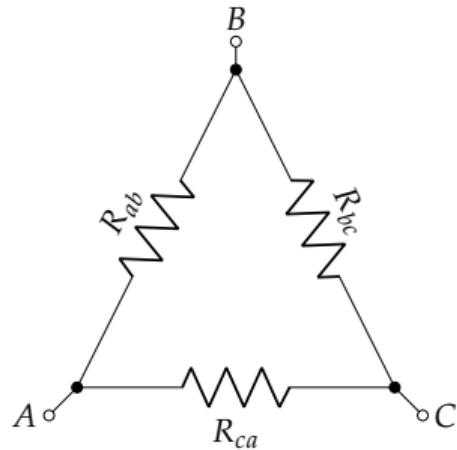
Conversión de estrella a triángulo



$$G_{ab} = \frac{G_a \cdot G_b}{G_a + G_b + G_c}$$

$$G_{bc} = \frac{G_b \cdot G_c}{G_a + G_b + G_c}$$

$$G_{ca} = \frac{G_c \cdot G_a}{G_a + G_b + G_c}$$



(si os interesa la demostración,
está [aquí](#))

Conexión estrella - triángulo, caso particular

En el caso concreto de que las **resistencias** en estrella/tríngulo sean **iguales**...

$$R_a = R_b = R_c = R_{\prec}$$

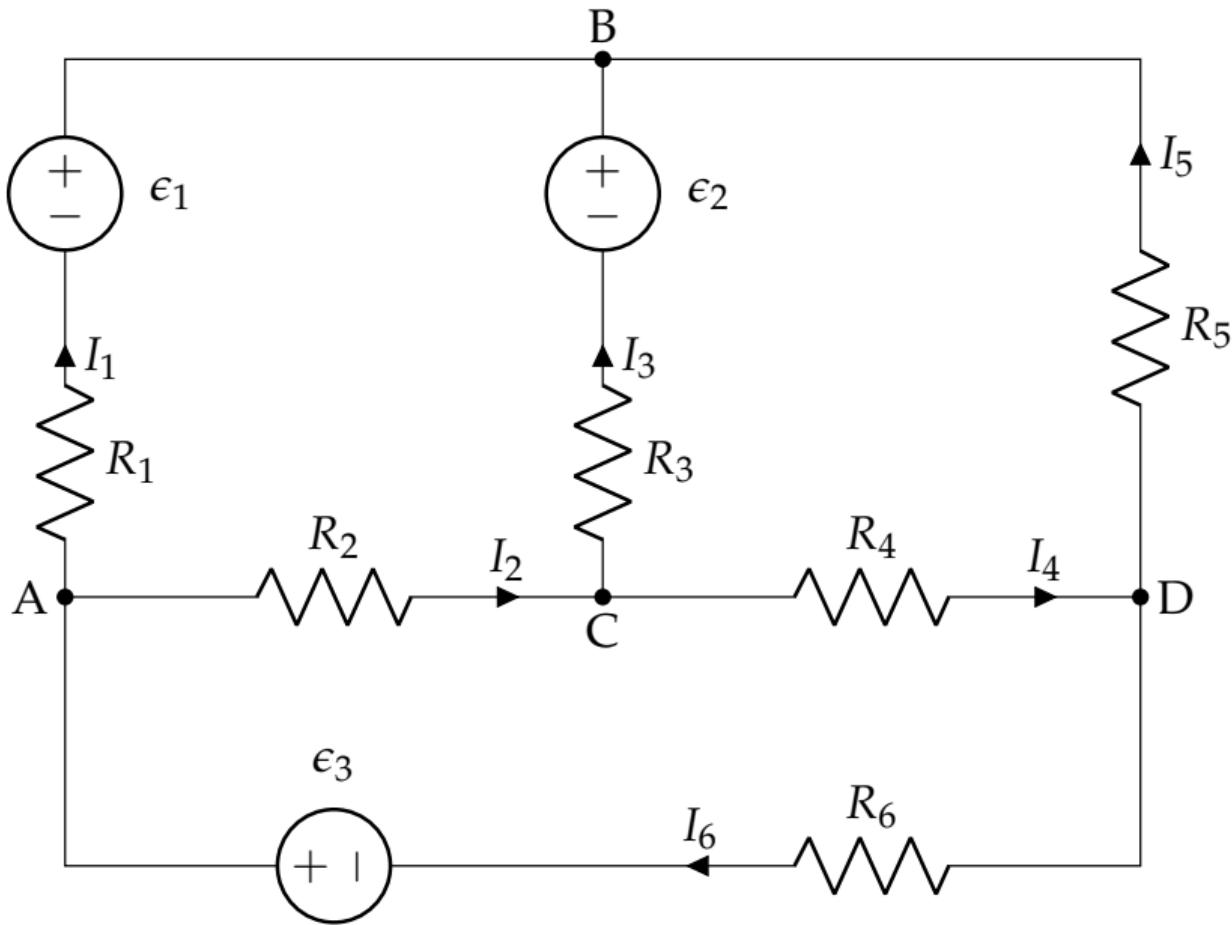
$$R_{ab} = R_{bc} = R_{ca} = R_{\triangle}$$

... las expresiones anteriores se reducen a:

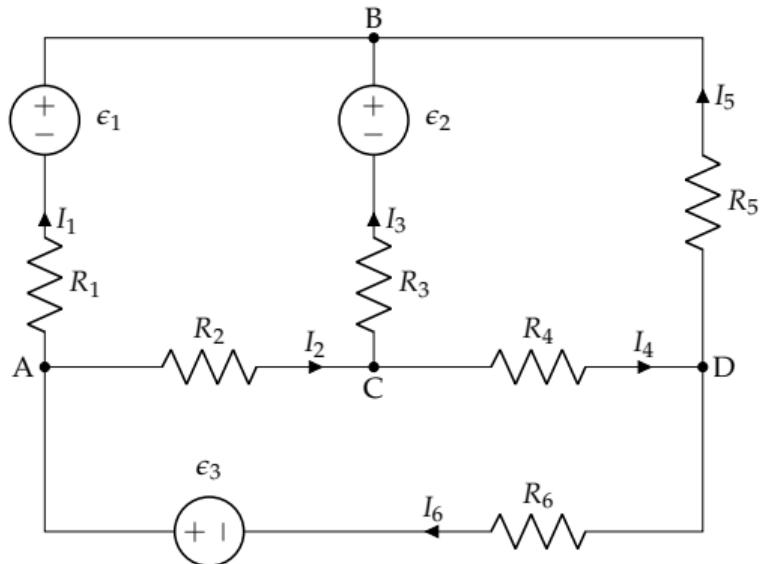
$$R_{\triangle} = 3 \cdot R_{\prec}$$

(este resultado será muy útil en el Tema 3, en **corriente alterna trifásica** equilibrada)

- ① Conceptos fundamentales
- ② Elementos de los circuitos
- ③ Leyes de Kirchhoff
- ④ Métodos de análisis



Paso 1: aplicar 1LK



Cuatro nudos ($N = 4$):

Nudo A: $I_6 = I_1 + I_2$

Nudo B: $I_1 + I_3 + I_5 = 0$

Nudo C: $I_2 = I_3 + I_4$

Nudo D: $I_4 = I_5 + I_6$

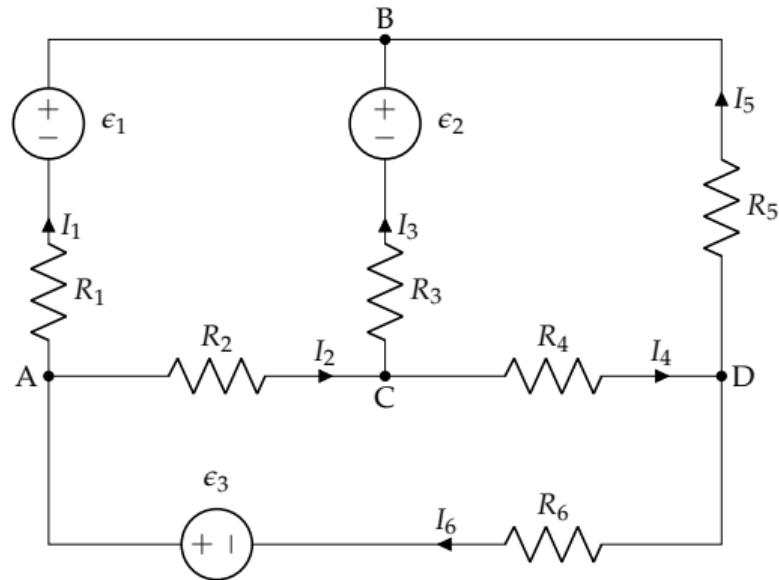
No son ecuaciones linealmente independientes:

$$C = A + B + D$$

El número de **ecuaciones linealmente independientes** aplicando 1LK es $N - 1$

- Lo relevante son las **diferencias de potencial**, así que uno de los nudos siempre es la referencia de potenciales (se puede tomar como potencial cero, o tierra)

Paso 2: aplicar 2LK



Malla ABCA

$$I_1 \cdot R_1 - \epsilon_1 + \epsilon_2 - I_3 \cdot R_3 - I_2 \cdot R_2 = 0$$

Malla BDCB

$$-I_5 \cdot R_5 - I_4 \cdot R_4 + I_3 \cdot R_3 - \epsilon_2 = 0$$

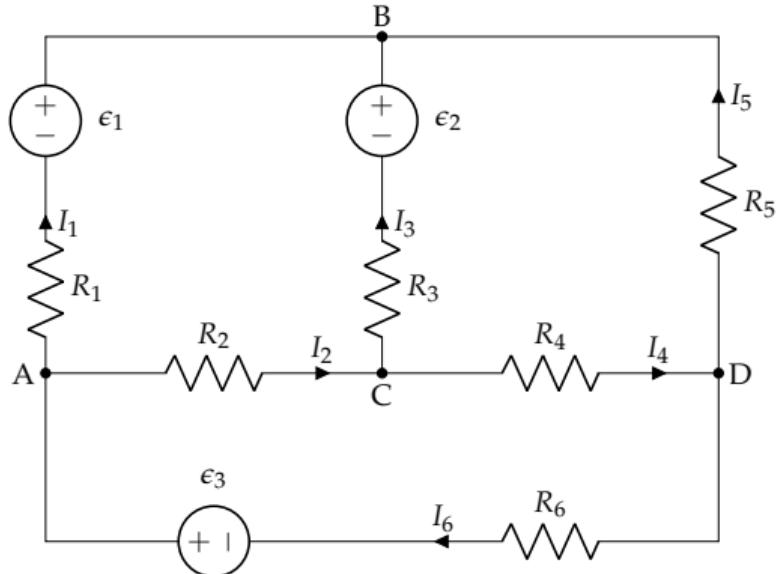
Malla ACDA

$$I_2 \cdot R_2 + I_4 \cdot R_4 + I_6 \cdot R_6 - \epsilon_3 = 0$$

El número de **ecuaciones linealmente independientes** aplicando 2LK es
 $R - (N - 1)$ (nº de ramas – (nº de nudos – 1)) = **nº de mallas**)

- Definición de **rama**, **nudo** y **malla** en la diapositiva 46

Paso 3: combinar las ecuaciones



$$-I_1 - I_2 + I_6 = 0$$

$$I_1 + I_3 + I_5 = 0$$

$$I_4 - I_5 - I_6 = 0$$

$$I_1 \cdot R_1 - I_2 \cdot R_2 - I_3 \cdot R_3 = \epsilon_1 - \epsilon_2$$

$$I_3 \cdot R_3 - I_4 \cdot R_4 - I_5 \cdot R_5 = \epsilon_2$$

$$I_2 \cdot R_2 + I_4 \cdot R_4 + I_6 \cdot R_6 = \epsilon_3$$

Paso 3, en forma matricial

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ R_1 & -R_2 & -R_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & -R_4 & -R_5 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & R_4 & 0 & R_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \epsilon_1 - \epsilon_2 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{bmatrix}$$

Analizar el circuito implica resolver un sistema lineal de **6 ecuaciones**, en el que las incógnitas son las corrientes de cada rama

Pero existen estrategias más eficientes para resolver circuitos, usando sistemas de ecuaciones de menores dimensiones, que veremos a continuación

① Conceptos fundamentales

② Elementos de los circuitos

③ Leyes de Kirchhoff

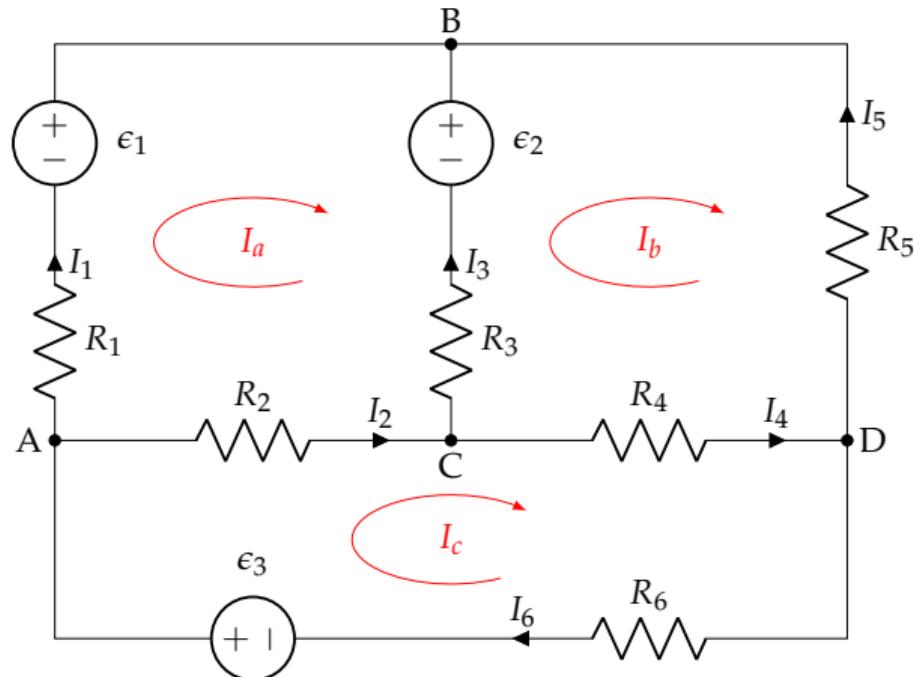
④ Métodos de análisis

Método de las mallas

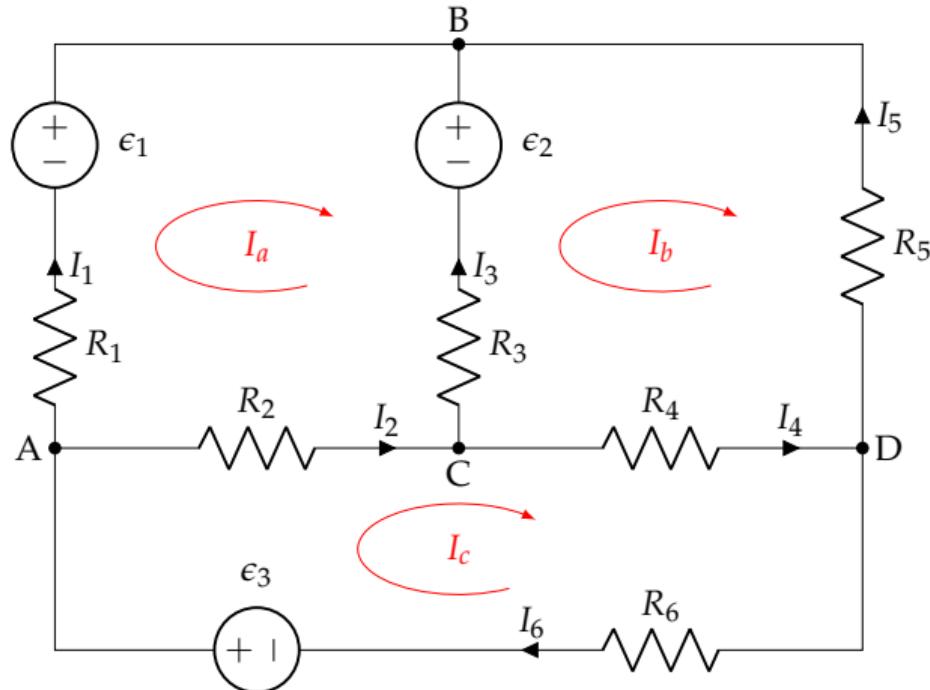
Método de los nudos

Método de las mallas

El método de las mallas simplifica el sistema de ecuaciones necesario mediante unas corrientes *ficticias* denominadas **corrientes de malla**, aprovechando las relaciones entre corrientes de la 1LK



Relaciones entre las corrientes de rama y malla



$$I_1 = I_a$$

$$I_5 = -I_b$$

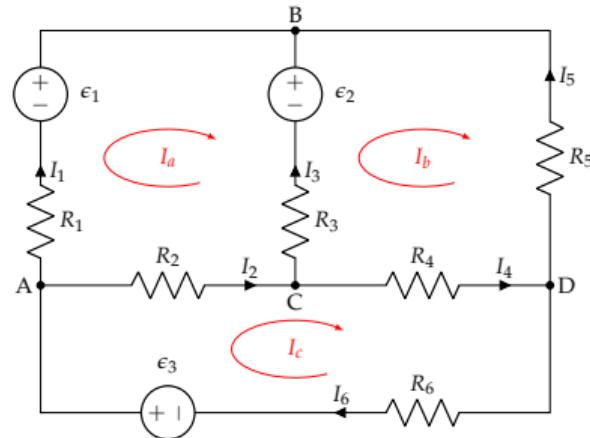
$$I_6 = I_c$$

$$I_2 = I_c - I_a$$

$$I_3 = I_b - I_a$$

$$I_4 = I_c - I_b$$

Ecuaciones de malla, aplicando 2LK



Malla ABCA

$$I_a \cdot R_1 - \epsilon_1 + \epsilon_2 + (I_a - I_b) \cdot R_3 + (I_a - I_c) \cdot R_2 = 0$$

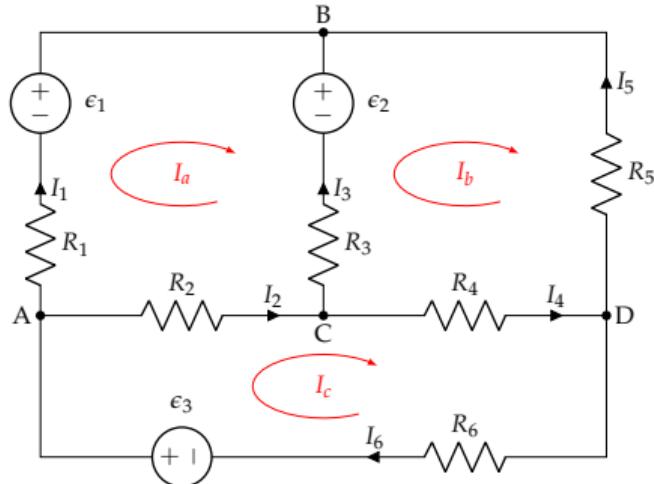
Malla BDCB

$$I_b \cdot R_5 + (I_b - I_c) \cdot R_4 + (I_b - I_a) \cdot R_3 - \epsilon_2 = 0$$

Malla ACDA

$$(I_c - I_a) \cdot R_2 + (I_c - I_b) \cdot R_4 + I_c \cdot R_6 - \epsilon_3 = 0$$

Reagrupamos corrientes en las ecuaciones

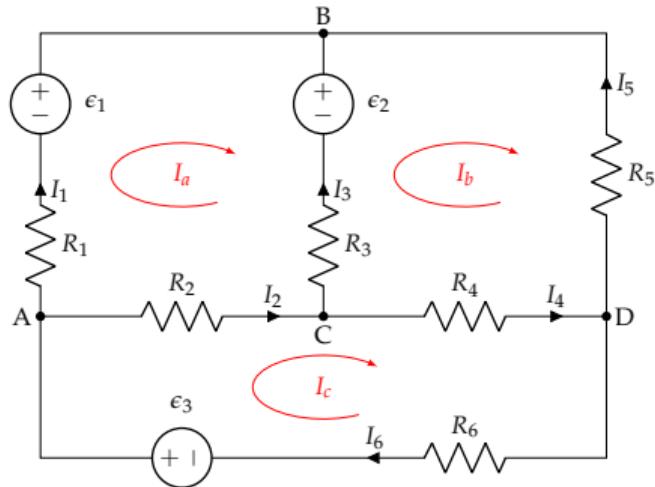


$$I_a \cdot (R_1 + R_3 + R_2) - I_b \cdot R_3 - I_c \cdot R_2 = \epsilon_1 - \epsilon_2$$

$$-I_a \cdot R_3 + I_b \cdot (R_5 + R_4 + R_3) - I_c \cdot R_4 = \epsilon_2$$

$$-I_a \cdot R_2 - I_b \cdot R_4 + I_c \cdot (R_2 + R_4 + R_6) = \epsilon_3$$

Y lo expresamos en forma matricial



$$\begin{bmatrix} (R_1 + R_3 + R_2) & -R_3 & -R_2 \\ -R_3 & (R_5 + R_4 + R_3) & -R_4 \\ -R_2 & -R_4 & (R_2 + R_4 + R_6) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 - \epsilon_2 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{bmatrix}$$

Ecuación general del método de las mallas

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \sum R_a & \pm \sum R_{ab} & \dots & \pm \sum R_{an} \\ \pm \sum R_{ba} & \sum R_b & \dots & \pm \sum R_{bn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pm \sum R_{na} & \pm \sum R_{nb} & \dots & \sum R_n \end{bmatrix}}_{\text{matriz simétrica, } n \times n \text{ (n=nº mallas)}} \cdot \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum \epsilon_a \\ \sum \epsilon_b \\ \vdots \\ \sum \epsilon_n \end{bmatrix}$$

$\sum R_x$ suma de las resistencias incluidas en la malla de I_x

$\sum R_{xy}$ suma de las resistencias incluidas en las ramas compartidas por las mallas de I_x e I_y
(‘+’ si las corrientes I_x e I_y van en el mismo sentido en esa rama, ‘-’ en caso contrario)

$\sum \epsilon_x$ suma algebraica de las fuerzas electromotrices de los generadores de la malla de I_x
(‘+’ si I_x sale por el + de la fuente, ‘-’ en caso contrario)

Procedimiento para el método de las mallas

- ① Identificar las corrientes de rama
- ② Asignar un sentido a las corrientes de malla
- ③ Relacionar corrientes de rama con corrientes de malla
- ④ Escribir sistema de ecuaciones de mallas
- ⑤ Resolver el sistema de ecs., obteniendo las corrientes de malla
- ⑥ Obtener las corrientes de rama a partir de las relaciones del punto 3

Importante: todos los generadores deben ser fuentes de tensión

Interludio: descarbonización, ¿electrificación directa o H₂?

Caso de la calefacción: ¿bombas de calor o calderas de H₂?



Si quieres saber más, [aquí](#) (en inglés)

① Conceptos fundamentales

② Elementos de los circuitos

③ Leyes de Kirchhoff

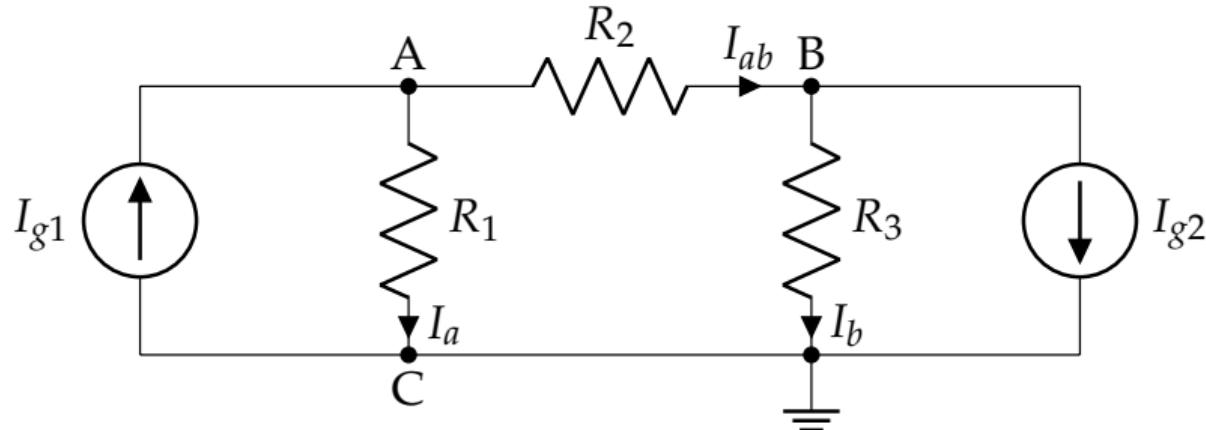
④ Métodos de análisis

Método de las mallas

Método de los nudos

Método de los nudos

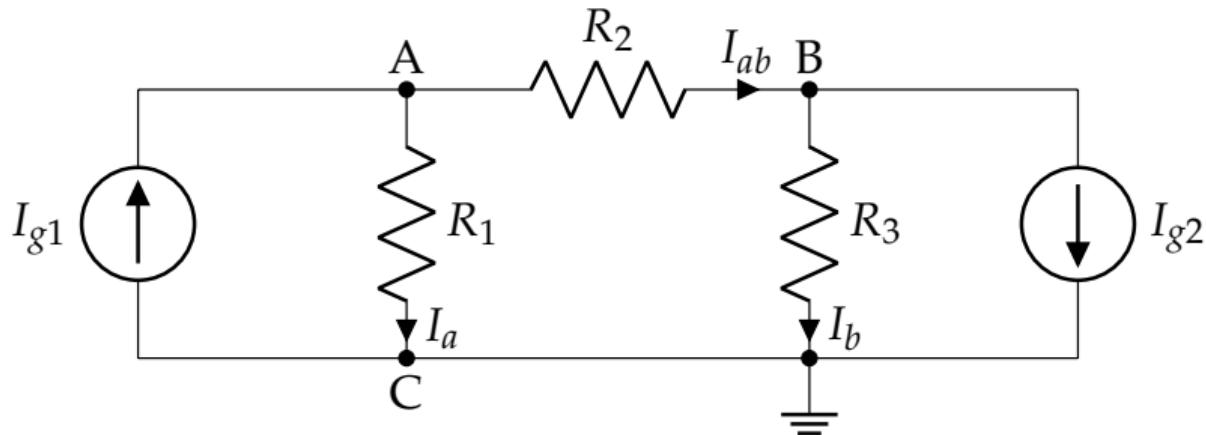
El **método de los nudos** se basa en las relaciones entre corrientes de la 1LK



Primer paso: si no viene determinado en el enunciado, elegir **nudo de referencia** de potenciales (nudo de tierra)

- Conveniente elegir el nudo que conecte mayor número de elementos (porque simplifica ligeramente las ecuaciones)

Ecuaciones de nudo, aplicando 1LK



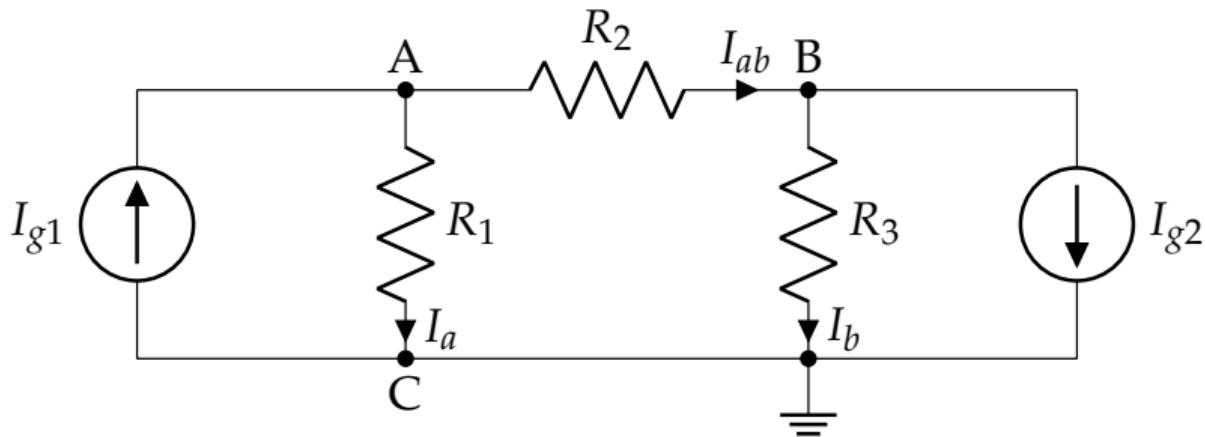
Nudo A

$$I_{g1} - I_a - I_{ab} = 0$$

Nudo B

$$I_{ab} - I_{g2} - I_b = 0$$

Tensiones en las resistencias, ley de Ohm



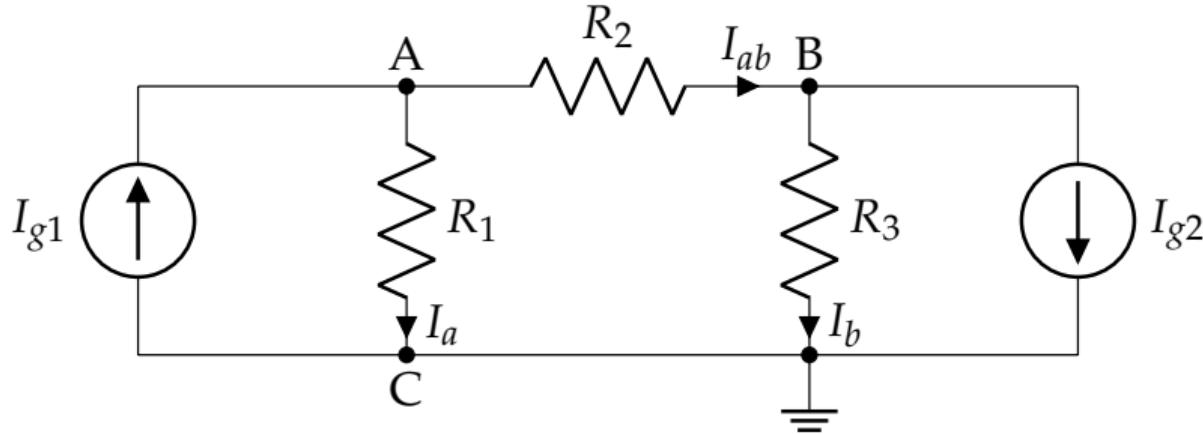
$$U_A = I_a \cdot R_1 \quad \rightarrow \quad I_a = \frac{U_A}{R_1}$$

$$U_B = I_b \cdot R_3 \quad \rightarrow \quad I_b = \frac{U_B}{R_3}$$

$$U_{AB} = I_{ab} \cdot R_2 \quad \rightarrow \quad I_{ab} = \frac{U_A - U_B}{R_2}$$

Combinando las ecuaciones de nudos con la ley de Ohm

Objetivo: despejar las **tensiones en cada nudo**



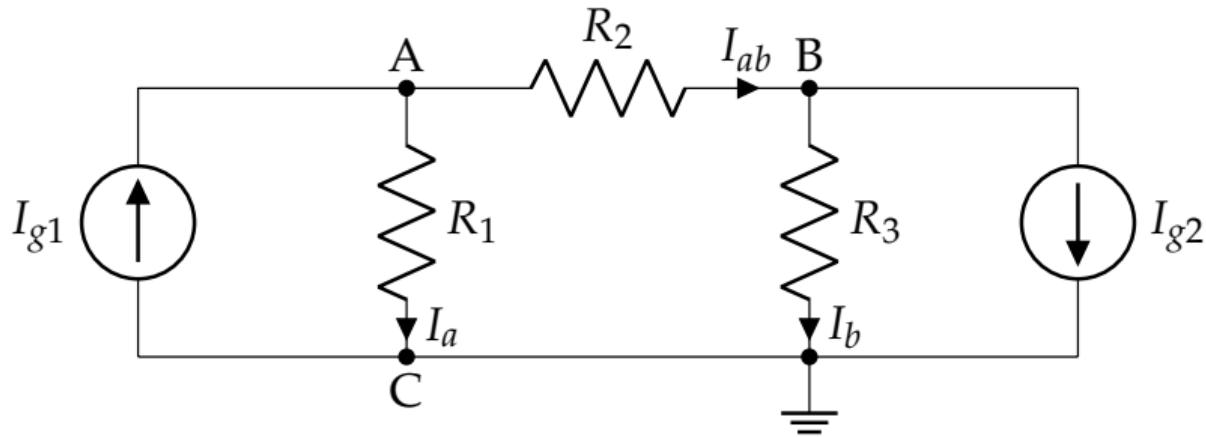
Nudo A

$$I_{g1} - \frac{U_A}{R_1} - \frac{U_A - U_B}{R_2} = 0 \quad \rightarrow \quad I_{g1} = U_A \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - \frac{U_B}{R_2}$$

Nudo B

$$\frac{U_A - U_B}{R_2} - I_{g2} - \frac{U_B}{R_3} = 0 \quad \rightarrow \quad -I_{g2} = -\frac{U_A}{R_2} + U_B \cdot \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)$$

Y expresando en forma matricial



$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_A \\ U_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{g1} \\ -I_{g2} \end{bmatrix}$$

Ecuación general del método de los nudos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \sum G_A & -\sum G_{AB} & \dots & -\sum G_{AN} \\ -\sum G_{BA} & \sum G_B & \dots & -\sum G_{BN} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\sum G_{NA} & -\sum G_{NB} & \dots & \sum G_N \end{bmatrix}}_{\text{matriz simétrica, } N \times N \text{ (N=nº nudos-1)}} \cdot \begin{bmatrix} U_A \\ U_B \\ \vdots \\ U_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum I_{g_A} \\ \sum I_{g_B} \\ \vdots \\ \sum I_{g_N} \end{bmatrix}$$

$\sum G_X$ Suma de las conductancias conectadas al nudo X

$\sum G_{XY}$ Suma de las conductancias conectadas entre los nudos X e Y

$\sum I_{gx}$ Suma algebraica de las corrientes de los generadores conectados al nudo X
(‘+’ si el generador inyecta corriente en el nudo, ‘-’ en caso contrario)

Importante: todos los generadores deben ser fuentes de corriente