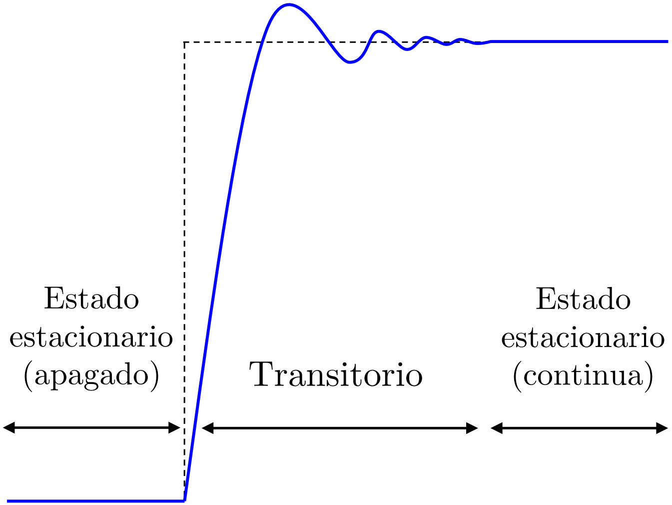
Introducción al régimen transitorio

Teoría de Circuitos

Autor: Luis Badesa Bernardo

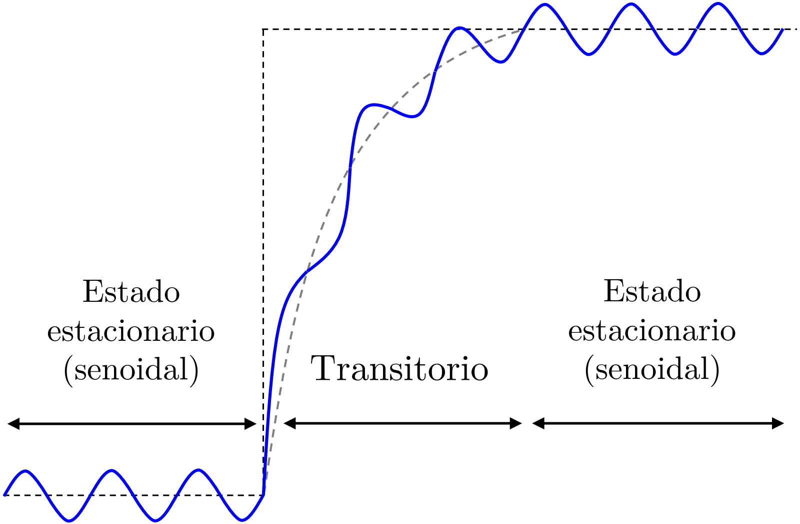
¿Qué es el régimen transitorio?

- Ejemplo: **encendido** de circuito de **continua** (con transitorio *subamortiguado*)



¿Qué es el régimen transitorio?

- Ejemplo: **aumento de voltaje** en circuito de **alterna** (con transitorio *sobreamortiguado*)



Régimen transitorio *vs.* estado estacionario

Estado estacionario o "régimen permanente"

- Circuito **estabilizado**
- Las **tensiones** y **corrientes** de un circuito son **constantes** (CC) o **periódicas** (CA)
- Modelado matemático: **ecuaciones algebraicas**

Régimen transitorio

- **Cambio** en las **condiciones** de funcionamiento de un **circuito**:
  encendido o apagado de fuentes, o cambio en las cargas $\rightarrow$ **interruptores**
- Variación de $u(t)$ e $i(t)$ hasta alcanzar nuevos valores
- Modelado matemático: **ecuaciones diferenciales**

Acumulación de energía

Estado estacionario

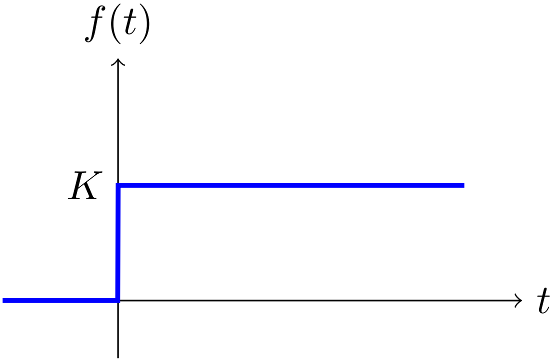
- **Energía acumulada** en **bobinas** y **condensadores**

Régimen transitorio

- **Redistribución** y **disipación** de energía acumulada
- La redistribución de energía **no** es **inmediata**

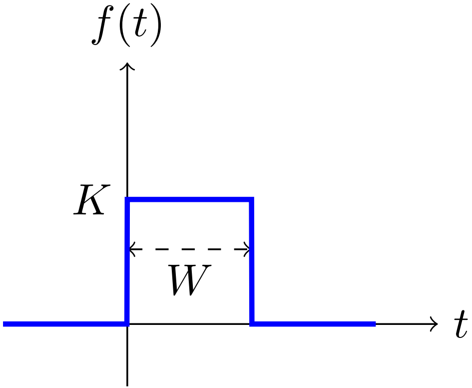
  Duración corta (μs) pero superior a 0 s, dependiendo de **relación entre acumulación** y **disipación** (resistencia)

Consigna habitual: función escalón



$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ K & t \geq 0 \end{cases}$$

Consigna habitual: pulso rectangular



$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ K & 0 \leq t \leq W \\ 0 & t > W \end{cases}$$

Ecuaciones diferenciales

Al aplicar **Kirchhoff** a un circuito lineal obtenemos ecuaciones diferenciales

$$u_L(t) = L\,\frac{d\,i_L(t)}{dt} \quad \leftrightarrow \quad i_L(t) = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} u_L(\tau)\,d\tau$$

$$i_C(t) = C\,\frac{d\,u_C(t)}{dt} \quad \leftrightarrow \quad u_C(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C(\tau)\,d\tau$$

Por ejemplo, la ecuación de un **circuito RLC** serie será de la forma:

$$L\,\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + R\,\frac{d\,i(t)}{dt} + \frac{1}{C}\,i(t) = \frac{d\,E(t)}{dt}$$

(EDO lineal de segundo orden, obtenida aplicando 2LK al circuito)

Respuesta de un circuito lineal a una perturbación o consigna

La **solución** de la ecuación diferencial del circuito para $t \geq 0$ (*i.e.*, la **respuesta del circuito** a la perturbación) tiene **dos componentes**[*]:

$$\boxed{f(t) = f_n(t) + f_\infty(t)}$$

(donde $f(t)$ puede referirse a tensión o corriente)

- Respuesta **natural** o propia, $f_n(t)$
- Respuesta **forzada** o particular, $f_\infty(t)$

[*] Esta es la solución general a una Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO) lineal de orden arbitrario. Para más detalles, consultar *e.g.* libro Zill

Respuesta *natural*, $f_n(t)$

- Respuesta **natural** o propia, $f_n(t)$
  - Respuesta **sin fuentes de alimentación** $\rightarrow$ solución de la **ec. homogénea**

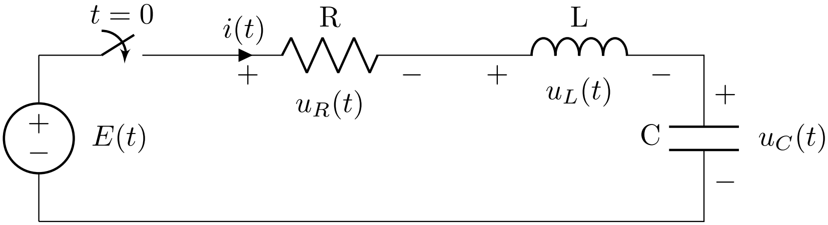
    Volviendo al ejemplo del circuito RLC, la ec. homogénea sería:

    $$L\,\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + R\,\frac{d\,i(t)}{dt} + \frac{1}{C}\,i(t) = \cancelto{0}{\frac{d\,E(t)}{dt}}$$

  - $f_n(t)$ queda determinada por la **energía almacenada previamente** (antes de conectar las fuentes) y por la **topología del circuito** (conexiones entre elementos)
  - Contiene constantes de integración $\rightarrow$ necesario conocer el **estado del circuito** en el instante que da origen al transitorio (*i.e.*, las <u>condiciones iniciales</u>)

Respuesta *forzada*, $f_\infty(t)$

- Respuesta **forzada** o particular, $f_\infty(t)$
  - Es una **solución particular** a la ecuación diferencial **no homogénea** $\rightarrow$ determinada por las fuentes existentes en $t > 0$, $\boldsymbol{E(t)}$ en el ejemplo RLC



  - Modela el estado del circuito **tras un tiempo** suficientemente **largo** después de la perturbación (régimen permanente), ya que <u>la respuesta natural se extingue</u>

$$\lim_{t\to\infty} f_n(t) = 0 \qquad \text{(demostración más adelante)}$$

Condiciones iniciales

- El **instante del cambio** se representa habitualmente con $\boldsymbol{t = 0}$
  - $t = 0^-$ $\rightarrow$ tiempo inmediatamente **anterior** al cambio
  - $t = 0^+$ $\rightarrow$ tiempo inmediatamente **posterior** al cambio

- Las **condiciones iniciales** son el estado del circuito en $t = 0$
  - Se calculan con las **energías almacenadas** en bobinas y condensadores en $t = 0^-$
  - Se aplican a la **topología** del circuito en $t = 0^+$

- Las cond. iniciales determinan las **ctes. de integración** de la respuesta **natural**, $f_n(t)$

Condiciones iniciales, resistencia

No acumula energía $\rightarrow$ sigue los cambios de forma instantánea

$$u(t) = R \cdot i(t)$$

(no aparece ninguna derivada en su ec. de definición)

Condiciones iniciales, bobina

Para aplicar la **condición inicial** de la bobina (*i.e.*, **energía almacenada** en $t = 0^-$) a la topología del circuito en $t = 0^+$, basta con considerar la ***condición de continuidad***:

No son posibles tensiones infinitas ni corrientes infinitas

Según la ec. de definición de la bobina, la **corriente no puede variar de forma brusca** (implicaría tensión infinita):

$$u_L(t) = L\,\frac{d\,i_L(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad \boxed{i_L(0^-) = i_L(0^+)}$$

Si la corriente cambiara de forma brusca, su derivada sería infinita (por ejemplo, función escalón) $\rightarrow$ la tensión en bornes sería infinita (**físicamente imposible**)

Condiciones iniciales, condensador

Para aplicar la **condición inicial** del condensador (*i.e.*, **energía almacenada** en $t = 0^-$) a la topología del circuito en $t = 0^+$, basta con considerar la ***condición de continuidad***:

No son posibles tensiones infinitas ni corrientes infinitas

Según la ec. de definición del condensador, la **tensión no puede variar de forma brusca** (implicaría corriente infinita):

$$i_C(t) = C\,\frac{d\,u_C(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad \boxed{u_C(0^-) = u_C(0^+)}$$

Si la tensión cambiara de forma brusca, su derivada sería infinita (por ejemplo, función escalón) $\rightarrow$ la corriente de carga o descarga sería infinita (**físicamente imposible**)

Circuitos de primer orden: definición

- Circuitos compuestos por:
  - Un **único elemento de acumulación** (o varios elementos que pueden ser simplificados a un elemento equivalente, *e.g.* bobinas en serie)
  - Y **resistencias**
- Modelados mediante una **ec. diferencial de 1$^{\text{er}}$ orden**:

$$\boxed{a_1 \cdot f'(t) + a_0 \cdot f(t) = g(t)}$$

ejemplo de RL serie: $\quad L \cdot i'(t) + R \cdot i(t) = E(t)$

Circuitos de primer orden: resolución

- Modelados mediante una **ec. diferencial de 1$^{\text{er}}$ orden**:

$$\boxed{a_1 \cdot f'(t) + a_0 \cdot f(t) = g(t)}$$

ejemplo de RL serie: $\quad L \cdot i'(t) + R \cdot i(t) = E(t)$

- $\boxed{\text{Resolución}}$

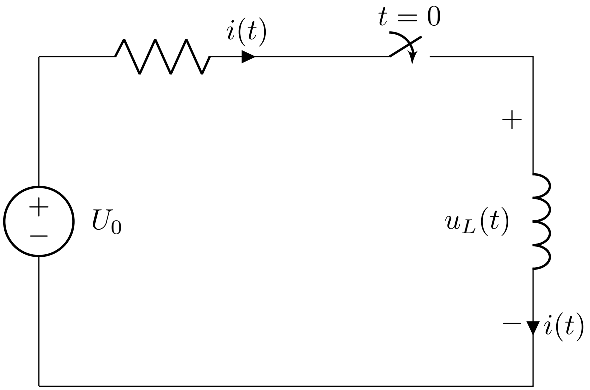
1. Cálculo de las **condiciones iniciales**, analizando el circuito en $t = 0^-$
2. **Respuesta natural**: análisis de la **ec. homogénea** ($g(t) = 0$, sin fuentes) en $t > 0$

$$f_n(t) = K \cdot \mathrm{e}^{-\frac{a_0}{a_1}t} \qquad \text{(demostración a continuación)}$$

3. **Respuesta forzada**, $f_\infty(t)$: análisis del circuito con fuentes en $t > 0$

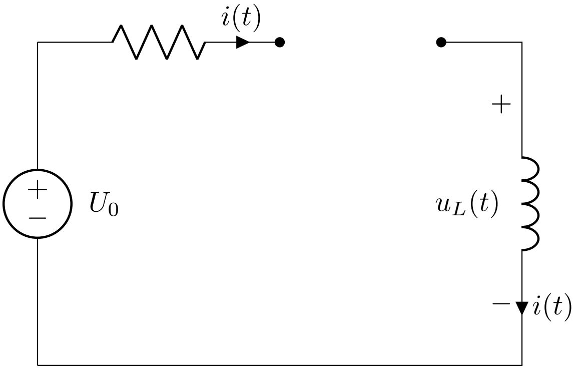
Circuito RL serie básico

- En $t < 0$ la fuente está desconectada
- En $t = 0$ la fuente se conecta
- En $t > 0$ la fuente alimenta el circuito RL (la bobina almacena energía)



Condiciones iniciales

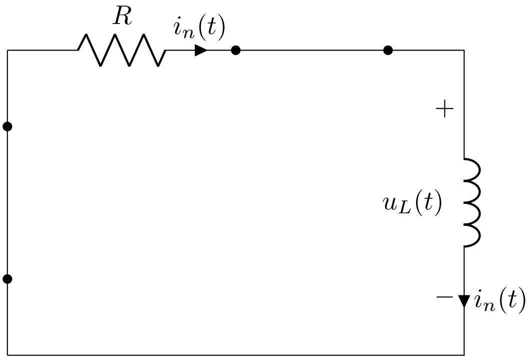
Analizando el circuito para $t < 0 \ldots$



$\ldots$obtenemos $\boxed{i(0^-) = 0}$

Respuesta natural, $f_n(t)$

Siguiendo los pasos de la diapositiva 19, analizamos el circuito para $t > 0$ **apagando la fuente** (ec. homogénea):



2LK $\rightarrow$ $u_R(t) + u_L(t) = 0$

Sustituyendo las **ecs. de definición** de R y L:

$$R \cdot i_n(t) + L \, \frac{d\, i_n(t)}{dt} = 0$$

Cuya **solución general** es:

$$\boxed{i_n(t) = K \cdot e^{s\,t}}$$

(deducción en la siguiente diapositiva)

Respuesta natural, $f_n(t)$

La ec. homogénea a resolver es:

$$L\,\frac{d\,i_n(t)}{dt} + R \cdot i_n(t) \;=\; 0$$

Para resolverla, debe hallarse una función cuya **derivada sea igual a la propia función**, multiplicada por una constante $\rightarrow$ la **función exponencial** cumple esta propiedad

Sustituyendo entonces $i_n(t) = K \cdot e^{s\,t}$ (donde K y s son **constantes** a determinar):

$$L\,\frac{d\,(K \cdot e^{s\,t})}{dt} + R \cdot K \cdot e^{s\,t} \;=\; 0 \quad \rightarrow \quad s \cdot K \cdot e^{s\,t} + \frac{R}{L} \cdot K \cdot e^{s\,t} \;=\; 0$$

Diviendo a ambos lados por $K \cdot e^{s\,t}$ se obtiene la **ec. característica**:

$$s + \frac{R}{L} = 0 \quad \rightarrow \quad s = -\frac{R}{L} \quad \xrightarrow[i_n(t) = K \cdot e^{s\,t}]{\text{sustituyendo en}} \quad \boxed{i_n(t) \;=\; K \cdot e^{-\frac{R}{L}\,t}}$$

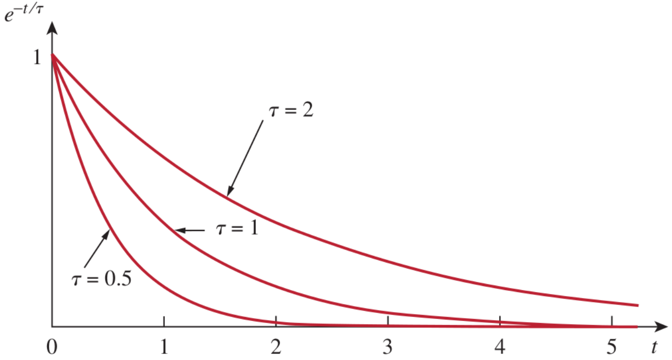
Para más detalles, consultar págs. 400 - 404 del Fraile Mora, edición 2012

Respuesta natural, $f_n(t)$ $\rightarrow$ constante de tiempo

Definimos $\tau = \dfrac{L}{R}$ como la **constante de tiempo** del circuito (unidades [s])

$$\boxed{i_n(t) = K \cdot e^{-t/\tau}}$$

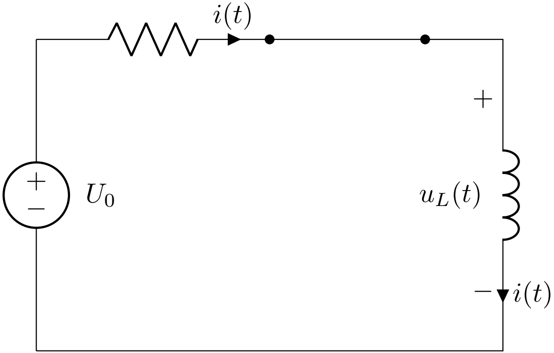
- Ratio entre **almacenamiento** (L) y **disipación** (R)
- Valores altos de τ implican decrecimiento lento
- La respuesta natural **se extingue** tras $\simeq 5\tau$



La **energía almacenada** en la bobina en $t = 0^-$ se **disipa en las resistencias** en $t > 0$

Respuesta forzada, $f_\infty(t)$

Volvemos a **activar la fuente**, analizando para $t > 0$:



2LK $\rightarrow$ $u_R(t) + u_L(t) = u(t)$

$$R\,i(t) + L\,\cancel{\frac{d\,i(t)}{dt}}^{\,0\,(\mathrm{CC})} = U_0$$

Al ser un circuito de **Corriente Continua**, la **bobina** se sustituye por un **cortocircuito**

La **solución** es entonces:

$$\boxed{i_\infty(t) = \frac{U_0}{R}}$$

Respuesta completa, $f(t) = f_n(t) + f_\infty(t)$

$$i(t) = i_n(t) + i_\infty(t) \rightarrow \begin{cases} i_n(t) = K \cdot e^{-t/\tau} \\ i_\infty(t) = U_0/R \end{cases}$$

Para **determinar** el valor de la **constante de integración** K, particularizamos en $t = 0^+$:

$$i(0^+) = i_n(0^+) + i_\infty(0^+) = K + \frac{U_0}{R} \quad \rightarrow \quad K = i(0^+) - i_\infty(0^+)$$

Teniendo en cuenta la **condición de continuidad**, $i(0^+) = i(0^-) = 0$, obtenemos:

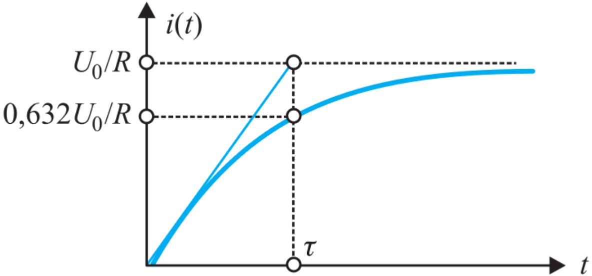
$$K = 0 - \frac{U_0}{R}$$

La **solución completa** (para esta topología concreta) es :

$$\boxed{i(t) = \frac{U_0}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$

Respuesta completa, $f(t) = f_n(t) + f_\infty(t)$, para esta topología

$$\boxed{i(t) = \frac{U_0}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$



Expresión general de la respuesta completa

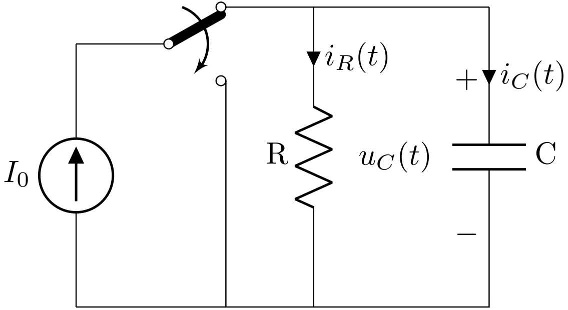
La **respuesta completa** de un **circuito RL general** (*i.e.*, para cualquier topología)

$$\boxed{i(t) = \overbrace{\underbrace{\left[i(0^+) - i_\infty(0^+)\right]}_{=K} \cdot e^{-t/\tau}}^{i_n(t)} + i_\infty(t)}$$

- $i(0^+) \rightarrow$ corriente en la bobina en $t = 0^+$, definida por cond. iniciales, $i(0^-) = i(0^+)$
- $i_\infty(t) \rightarrow$ corriente en la bobina en régimen permanente (para $t > 0$)
- $i_\infty(0^+) \rightarrow$ corriente en la bobina, en régimen permanente, en $t = 0^+$

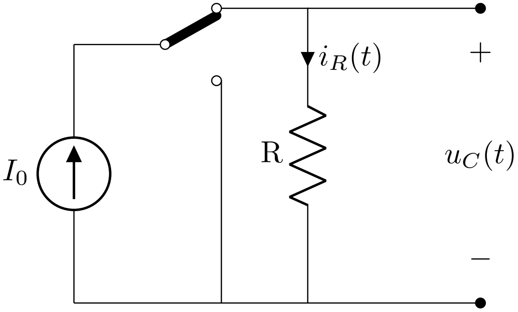
Circuito RC paralelo básico

- En $t < 0$ la fuente alimenta el circuito RC (el condensador se carga)
- En $t = 0$ se desconecta la fuente
- En $t > 0$ el condensador comienza a descargarse en la resistencia



Condiciones iniciales

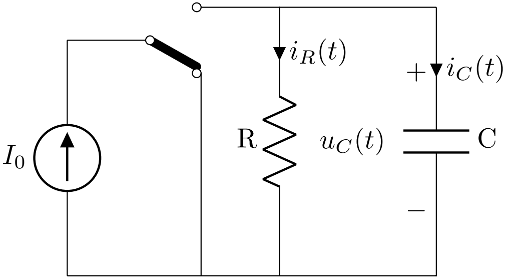
Analizando el circuito para $t < 0 \ldots$



$\ldots$ obtenemos $\boxed{u_C(0^-) = R \cdot I_0}$

Respuesta natural, $f_n(t)$

Siguiendo los pasos de la diapositiva 19, analizamos el circuito para $t > 0$ **apagando la fuente** (ec. homogénea)



(en este caso, la fuente ya está apagada en $t > 0$)

1LK $\rightarrow$ $i_R(t) + i_C(t) = 0$

$$\frac{u_n(t)}{R} + C\,\frac{d\,u_n(t)}{dt} = 0$$

Cuya **solución general** es:

$$\boxed{u_n(t) = K \cdot e^{s\,t}}$$

(deducción equivalente a la diapositiva 24)

Luego la **respuesta natural**, $u_n(t)$ del circuito es:

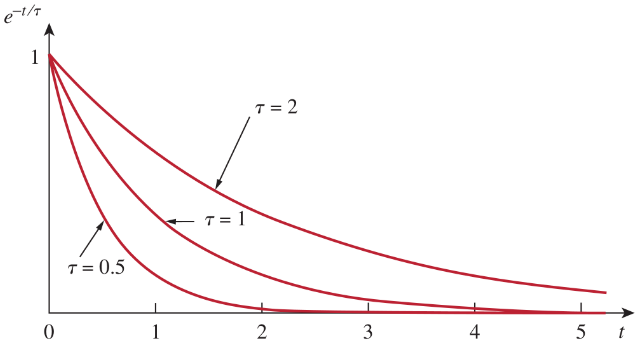
$$\boxed{u_n(t) = K \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}}$$

Respuesta natural, $f_n(t)$ $\rightarrow$ constante de tiempo

Definimos $\tau = R \cdot C$ como la **constante de tiempo** del circuito (unidades [s])

$$\boxed{u_n(t) = K \cdot e^{-t/\tau}}$$

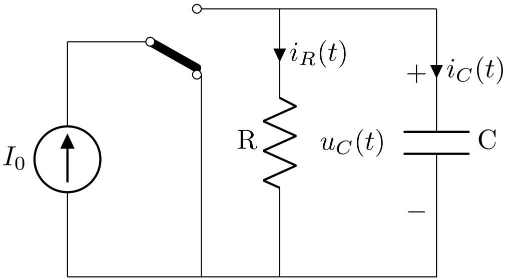
- Valores altos de τ implican decrecimiento lento
- La respuesta natural **se extingue** tras $\simeq 5\tau$



La **energía almacenada** en el C en $t = 0^-$ se **disipa en las resistencias** en $t > 0$

Respuesta forzada, $f_\infty(t)$

Analizando para $t > 0$ con la **fuente encendida**:



Dado que en $t > 0$ **no hay fuentes** presentes en el circuito RC, toda la **energía almacenada** en el condensador **se disipa** en la resistencia

Luego la **respuesta forzada**, $u_\infty(t)$, es:

$$\boxed{u_\infty(t) \; = \; 0}$$

Respuesta completa, $f(t) = f_n(t) + f_\infty(t)$

$$u(t) = u_n(t) + u_\infty(t) \rightarrow \begin{cases} u_n(t) = K \cdot e^{-t/\tau} \\ u_\infty(t) = 0 \end{cases}$$

Para **determinar** el valor de la **constante de integración** K, particularizamos en $t = 0^+$:

$$u(0^+) = u_n(0^+) + u_\infty(0^+) = K + 0 \quad \rightarrow \quad K = u(0^+)$$

Teniendo en cuenta la **condición de continuidad**, $u(0^+) = u(0^-) = R \cdot I_0 = U_0$:

$$K = U_0$$

La **solución completa** (para esta topología concreta) es :

$$\boxed{u(t) = U_0 \cdot e^{-t/\tau}}$$

Balance energético

Podemos comprobar que **toda la energía** acumulada en el condensador en $t < 0$ realmente **se disipa** en la resistencia en $t > 0$:

$$\boxed{W_R} = \int_0^\infty u_R(t) \cdot i_R(t)\, \mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{u_R^2(t)}{R}\, \mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{1}{R} \left(U_0 \cdot e^{-t/\tau}\right)^2 \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{U_0^2}{R} \int_0^\infty e^{-\frac{2}{R \cdot C} t}\, \mathrm{d}t = \frac{U_0^2}{\cancel{R}} \cdot \frac{-\cancel{R} \cdot C}{2} \left[e^{-\frac{2}{R \cdot C} t} \right]_0^\infty = \frac{-1}{2}\, C \cdot U_0^2 \cdot [0 - 1]$$

$$= \frac{1}{2}\, C \cdot U_0^2 = \boxed{W_C}$$

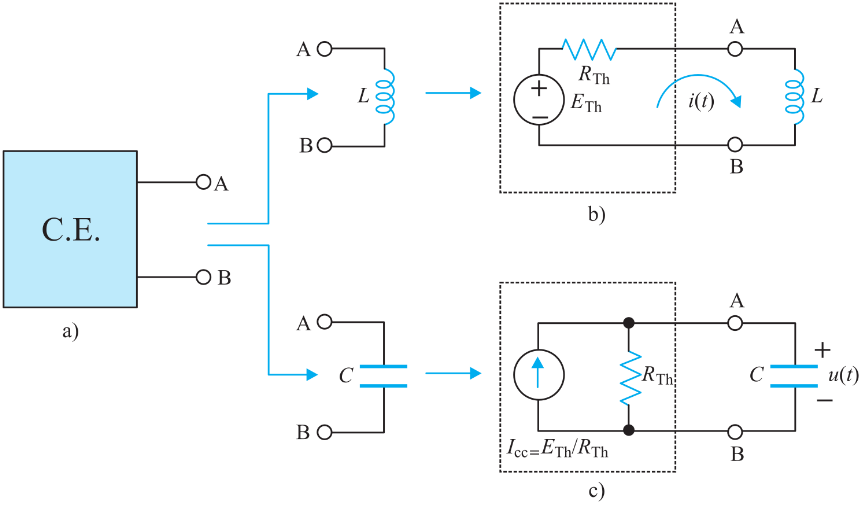
Expresión general de la respuesta completa

La **respuesta completa** de un **circuito RC general** (*i.e.*, para cualquier topología)

$$\boxed{u(t) = \overbrace{\underbrace{\left[u(0^+) - u_\infty(0^+)\right]}_{=K} \cdot e^{-t/\tau}}^{u_n(t)} + u_\infty(t)}$$

- $u(0^+) \rightarrow$ tensión en el C en $t = 0^+$, definida por las cond. iniciales, $u(0^-) = u(0^+)$
- $u_\infty(t) \rightarrow$ tensión en el C en régimen permanente (para $t > 0$)
- $u_\infty(0^+) \rightarrow$ tensión en el C, en régimen permanente, en $t = 0^+$

Procedimiento general $\rightarrow$ equivalente de Thévenin/Norton



R_{th} es la **resistencia vista desde los bornes** del condensador o de la bobina, cuando se anulan todas las fuentes independientes

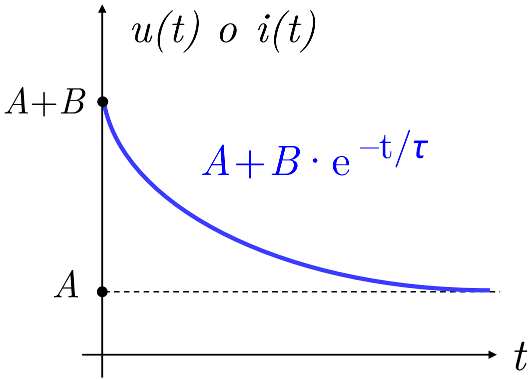
Procedimiento general

1. Dibujar el circuito para $\boldsymbol{t < 0}$
   - Obtener el valor de $i_L(0^-)$ o $u_C(0^-)$
   - Aplicar el **principio de continuidad** para determinar $i_L(0^+)$ o $u_C(0^+)$
2. Dibujar el circuito para $\boldsymbol{t > 0}$
   - Calcular el equivalente de **Thévenin/Norton** visto por L o C
   - Determinar la **constante de tiempo** del circuito: $\tau = \dfrac{L}{R_{th}}$ o $\tau = R_{th} \cdot C$
   - Calcular la respuesta en **régimen permanente**, $i_\infty(t)$ o $u_\infty(t)$
3. Obtener la **respuesta completa**:

$$
\begin{aligned}
i_L(t) &= \left[i_L(0^+) - i_\infty(0^+)\right] \cdot e^{-t/\tau} + i_\infty(t) \\
u_C(t) &= \left[u_C(0^+) - u_\infty(0^+)\right] \cdot e^{-t/\tau} + u_\infty(t)
\end{aligned}
$$

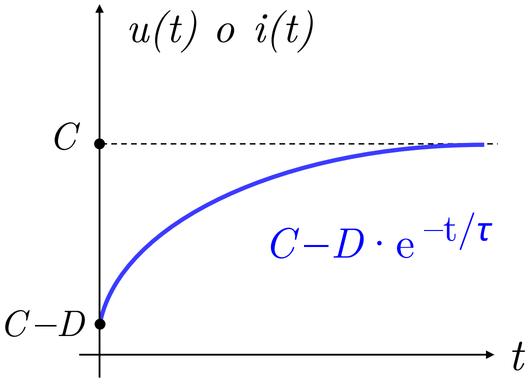
Resumen: respuestas posibles de un 1$^{\text{er}}$ orden (corriente continua)

Elemento que se **descarga** (parcialmente)



Caso particular: $A = 0$, no hay fuentes en $t > 0$ (el elemento se **descarga totalmente**)

Elemento (C o L) que **aumenta su carga**



Caso particular: $C = D$, el elemento estaba **inicialmente descargado**

Interludio: temas de investigación en sistemas eléctricos

- Operación económica de sistemas eléctricos nacionales con baja inercia, link

Circuitos de segundo orden

- Circuitos que contienen **dos elementos de acumulación**, además de elementos de disipación (resistencias)

- Modelados mediante una **ec. diferencial de 2^{do} orden**:

$$\boxed{a_2 \cdot f''(t) + a_1 \cdot f'(t) + a_0 \cdot f(t) = g(t)}$$

ejemplo de RLC serie: $$L\,\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + R\,\frac{d\,i(t)}{dt} + \frac{1}{C}\,i(t) = \frac{d\,E(t)}{dt}$$

- $\boxed{\text{Resolución}}$ $\rightarrow$ obtención de **respuesta natural** $f_n(t)$ y **respuesta forzada** $f_\infty(t)$

$$\boxed{f(t) = f_n(t) + f_\infty(t)}$$

Circuitos de segundo orden: respuesta natural, $f_n(t)$

$$a_2 \cdot f''(t) + a_1 \cdot f'(t) + a_0 \cdot f(t) = 0 \quad \rightarrow \quad f''(t) + \frac{a_1}{a_2} \cdot f'(t) + \frac{a_0}{a_2} \cdot f(t) = 0$$

- Redefinición de constantes:

$$\frac{a_1}{a_2} = 2\,\xi\,\omega_n \qquad\qquad \frac{a_0}{a_2} = \omega_n^2$$

ω_n pulsación natural

ξ coeficiente de **amortiguamiento**

- Resolviendo la **ec. característica***:

$$s^2 + 2\,\xi\,\omega_n\,s + \omega_n^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} s_1 = -\omega_n \left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}\right) \\ s_2 = -\omega_n \left(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}\right) \end{cases}$$

---

*Obtenida mediante el mismo procedimiento que en la diapositiva 24, sustituyendo la solución de prueba $f_n(t) = K \cdot e^{s\,t}$. Para más detalles, consultar págs. 423 - 424 del Fraile Mora, edición 2012

Circuitos de segundo orden: respuesta natural, $f_n(t)$

(continuación)

- Resolviendo la **ec. característica**:

$$s^2 + 2\,\xi\,\omega_n\,s + \omega_n^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} s_1 = -\omega_n\left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}\right) \\ s_2 = -\omega_n\left(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}\right) \end{cases}$$

- Por lo tanto, la **solución de la ec. diferencial** es:

$$\boxed{f_n(t) = K_1 \cdot e^{s_1 \cdot t} + K_2 \cdot e^{s_2 \cdot t}}$$

donde K_1 y K_2 son ctes. que dependen de las **condiciones iniciales**

Circuitos de segundo orden: respuesta natural, $f_n(t)$

Dependiendo de los **valores de las soluciones** de la ec. característica, hay **3 posibilidades de transitorio**:

$$s_1 = -\omega_n\left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}\right) \qquad s_2 = -\omega_n\left(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}\right)$$

- Soluciones **reales distintas** $\rightarrow$ circuito **sobreamortiguado** (transitorio "lento")
- Solución **real doble** $\rightarrow$ circuito **críticamente amortiguado**
- Soluciones **complejas conjugadas*** $\rightarrow$ circuito **subamortiguado** (con oscilaciones)

*Por el Tª de la raíz conjugada compleja: si un polinomio en una variables con coefs. reales tiene una raíz compleja, el conjugado también es raíz del polinomio

Circuitos de segundo orden: respuesta natural, $f_n(t)$

Dependiendo de los **valores de las soluciones** de la ec. característica, hay **3 posibilidades de transitorio**:

Sobreamortiguado $\boxed{\xi > 1}$:

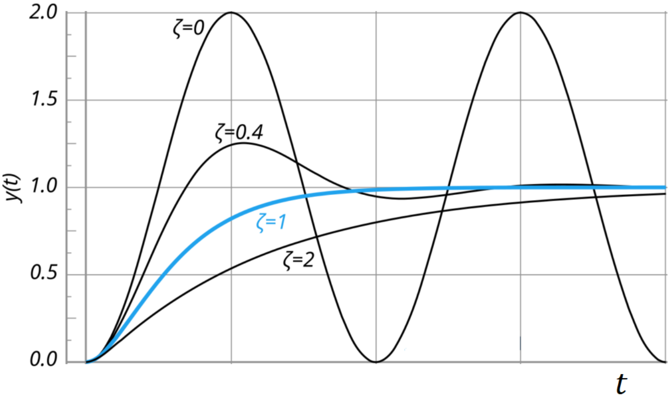
$$f_n(t) = K_1 \cdot e^{s_1 \cdot t} + K_2 \cdot e^{s_2 \cdot t} \quad s_1, s_2 \in \mathbb{R}$$

Críticamente amortiguado $\boxed{\xi = 1}$:

$$f_n(t) = (K_1 + K_2 \cdot t) \cdot e^{s_1 \cdot t} \quad s_1 \in \mathbb{R}$$

Subamortiguado $\boxed{\xi < 1}$:

$$f_n(t) = K_1 \cdot e^{s_1 \cdot t} + K_2 \cdot e^{s_2 \cdot t} \quad s_1, s_2 \in \mathbb{C}$$



Circuitos de segundo orden *subamortiguados*

El caso **subamortiguado** ($\xi < 1$) da lugar a **oscilaciones atenuadas**. Demostración:

$$f_n(t) \;=\; K_1 \cdot e^{s_1 \cdot t} + K_2 \cdot e^{s_2 \cdot t} \quad s_1, s_2 \in \mathbb{C} \quad \rightarrow \quad f_n(t) \;=\; K_1 \cdot e^{(-a+\mathrm{j}\,b)\cdot t} + K_2 \cdot e^{(-a-\mathrm{j}\,b)\cdot t}$$

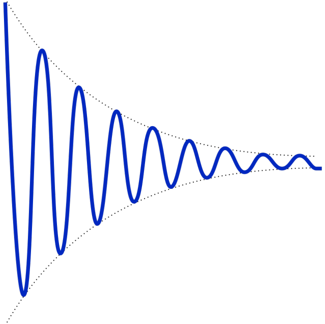
Nota: la **parte real es siempre negativa** en las soluciones complejas de un circuito de 2$^{\text{do}}$ orden

Lo contrario implicaría $\xi < 0$, y por tanto implicaría resistencia negativa, lo cual carece de sentido físico (se omite la demostración)

Usando la fórmula de Euler ($e^{\mathrm{j}\,\theta} = \cos(\theta) + \mathrm{j}\,\sin(\theta)$), puede llegarse a:

$$\begin{aligned} f_n(t) \;&=\; e^{-\alpha \cdot t} \cdot [B_1 \cdot \sin(\omega t) \;+\; B_2 \cdot \cos(\omega t)] \\ &=\; \boxed{B' \cdot e^{-\alpha \cdot t} \cdot \sin(\omega t + \theta)} \end{aligned}$$

(la forma de obtener las ctes. B', α, ω y θ se detallará en un ejercicio)



Circuitos de segundo orden, resolución

1. Obtener la **respuesta natural** del circuito
   - Se escribe la **ec. diferencial del circuito** sin fuentes, usando 1LK o 2LK
   - Se resuelve la ec. característica, primero obteniendo el valor de las **ctes.** ω_n y ξ
   - El tipo de soluciones de la ec. característica determina el **tipo de transitorio** $\rightarrow$ debe comprobarse que el **transitorio** es coherente con el **valor de** ξ $(\xi > 1, \quad \xi = 1 \quad \text{o} \quad 1 > \xi > 0)$
   - Se escribe la ec. para ese transitorio
2. Determinar el valor de las **ctes. de integración** de la respuesta natural usando las **condiciones iniciales**, y aplicando el **principio de continuidad** para L o C
   - Son **necesarias 2 condiciones iniciales**: una para la propia magnitud ($u(t)$ o $i(t)$) y otra para su primera derivada ($u'(t)$ o $i'(t)$)
   - Más detalles en ejercicios resueltos
3. Obtener la **respuesta forzada**, $f_\infty(t)$: análisis del circuito con fuentes en $t > 0$

Interludio: transitorios inestables, apagón EE. UU. 2003

- **55 millones** de personas sin luz
- **6.000 millones de $** en pérdidas

- **Nueva York** perdió gran parte del suministro durante **13 horas**
- Ocurrió en agosto a las 16h: **podría haber sido mucho peor** (*e.g.* diciembre a las 16h, sin luz natural)