

Relación 4 - Conocimiento probabilístico

Problemas

Problema 1. Supongamos que tenemos cinco variables aleatorias A , B , C , D y E , tales que:

- B es independiente de A .
- C es independiente de A y de B .
- D es condicionalmente independiente de C dadas A y B .
- E es condicionalmente independiente, dadas B y C , del resto de variables.

Dibujar una red bayesiana que exprese las relaciones de dependencia e independencia anteriores. Suponemos que conocemos las siguientes probabilidades: $P(a) = 0.2$, $P(b) = 0.5$, $P(c) = 0.8$, $P(d|\neg a, \neg b) = 0.9$, $P(d|\neg a, b) = 0.6$, $P(d|a, \neg b) = 0.5$, $P(d|a, b) = 0.1$, $P(e|\neg b, \neg c) = 0.2$, $P(e|\neg b, c) = 0.4$, $P(e|b, \neg c) = 0.8$ y $P(e|b, c) = 0.3$. Se pide calcular $P(a, b, c, d, e)$, $P(\neg a|b, c, d, e)$ y $P(e|a, \neg b)$.

Problema 2. Supongamos que tenemos un modelo probabilístico que expresa de qué manera influyen los fallos de electricidad y los de hardware en los fallos informáticos. Tenemos por tanto tres variables aleatorias, E (fallo eléctrico), H (fallo de hardware) e I (fallo informático), y asumimos que E y H son incondicionalmente independientes. Conocemos además las siguientes probabilidades: $P(e) = 0.1$, $P(h) = 0.2$, $P(i|\neg e, \neg h) = 0$, $P(i|\neg e, h) = 0.5$, $P(i|e, \neg h) = 1$ y $P(i|e, h) = 1$. Dibujar la correspondiente red bayesiana y calcular $P(\neg e, h, i)$, $P(h|e)$ y $P(e|i)$.

Problema 3. Un estudio sobre la influencia del tabaco en el cáncer de pulmón maneja cuatro variables: que una persona padezca cáncer (**C**), que fume (**F**), que sea fumador pasivo (**FP**) y que sus padres fumen (**PF**). Representar, mediante una red bayesiana, un modelo causal que describa la influencia de unas variables sobre otras. Una vez dibujada la red, responder justificadamente, y utilizando el criterio de d-separación, a todas las preguntas del tipo ¿es X condicionalmente independiente de Y dado Z ? (siendo X , Y y Z cualesquiera tres variables distintas de la red).

Problema 4. Un sistema de diagnóstico automático puede ayudar a diagnosticar el virus de la gripe (**G**) o el tabaquismo (**Q**) como causas de una bronquitis (**B**). Para ello analiza los síntomas de un paciente: los debidos directamente a la bronquitis, tos (**T**) y respiración con silvidos (**S**); y los causados por el virus de la gripe, fiebre (**F**) y el dolor de garganta (**G**). Representar mediante una red bayesiana, un modelo causal que describa la influencia de unas variables sobre otras.

Problema 5. La IEEE está diseñando un prototipo de robot de asistencia doméstica, y nos encargan realizar demos para tratar de venderlos. Supongamos que hemos recibido un lote de 100 robots de muestra, de los cuales sabemos que uno de ellos era de una serie defectuosa, pero durante el transporte se han mezclado y no podemos distinguir el defectuoso del resto.

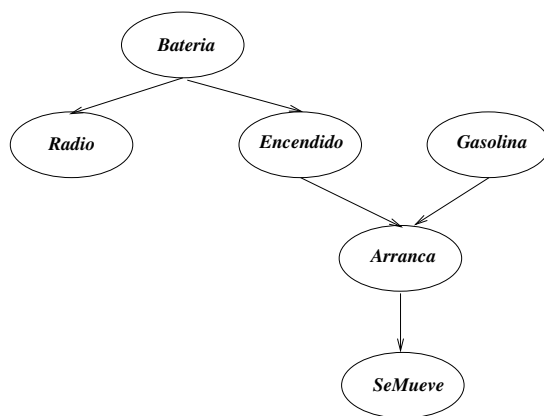
Del control de calidad en fábrica nos dicen que los robots de esa serie defectuosa tienen una probabilidad del 50% de sufrir algún pequeño fallo durante la demo, y para los no defectuosos la probabilidad de fallo es tan sólo del 2%.

Por otra parte, los estudios de mercado reflejan que el 80% de los clientes que ven una demo durante la que no ocurre ningún fallo comprarán un robot, mientras que únicamente el 0,5% de los clientes que ven una demo donde surge un fallo deciden comprarlo a pesar de todo.

Se pide:

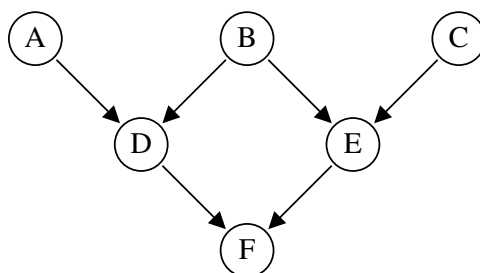
- Diseñar una red bayesiana (estructura y tablas asociadas) que capture toda la información dada en el enunciado.
- Calcular la probabilidad de que el robot usado en la demo fuera defectuoso si el cliente compró el robot.

Problema 6. (Russell & Norvig, ej. 14.1) Considérese la siguiente red para diagnóstico de averías en coches (las variables son booleanas):



- Extender la red con las variables *TiempoHelado* y *MotorArranque*
- Incluir una tabla de probabilidad (con valores razonables) en cada nodo de la red.
- ¿Cuántos valores de probabilidad (independientes) necesitaríamos para la DCC, supuesto que no conociéramos las relaciones de dependencia? ¿Cuántos se necesitan una vez que se saben las dependencias de la red?
- Con esos valores de probabilidad, calcular la probabilidad de que un coche que no se mueva tenga mal la batería.

Problema 7. Consideremos la siguiente red bayesiana que relaciona las variables aleatorias A , B , C , D , E y F :



con las siguientes tablas de distribución:

$P(a)$
0.4

$P(b)$
0.3

$P(c)$
0.7

A	B	$P(d A, B)$
a	b	0.8
a	$\neg b$	0.2
$\neg a$	b	0.7
$\neg a$	$\neg b$	0.3

B	C	$P(e B, C)$
b	c	0.2
b	$\neg c$	0.3
$\neg b$	c	0.5
$\neg b$	$\neg c$	0.8

D	E	$P(f D, E)$
d	e	0.1
d	$\neg e$	0.8
$\neg d$	e	0.2
$\neg d$	$\neg e$	0.7

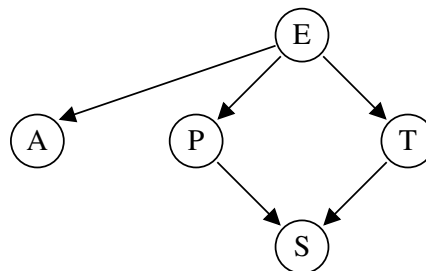
Se pide:

- Calcular la distribución de la variable aleatoria B condicionada a que se ha observado que F es verdadera, utilizando para ello el **algoritmo de inferencia por enumeración**.
- Calcular la distribución de la variable aleatoria B condicionada a que se ha observado que F es falsa, utilizando para ello el **algoritmo de eliminación de variables**.

Problema 8. Considérese las siguientes variables aleatorias que describen determinadas circunstancias sobre el examen para obtener el permiso de circulación:

- E : se ha dedicado poco tiempo de estudio al código de circulación.
- T : se ha hecho mal el examen teórico.
- P : se ha hecho mal el examen práctico.
- A : se han aprendido bien las señales de circulación.
- S : se ha suspendido.

Supongamos que todo el conocimiento (incierto) acerca de la situación modelada queda expresado mediante la siguiente red bayesiana:



con las siguientes tablas de distribución:

$P(e)$	E	$P(a E)$	E	$P(p E)$	E	$P(t E)$	P	T	$P(s P,T)$
0.7	e	0.2	e	0.3	e	0.8	p	t	0.9
	$\neg e$	0.8	$\neg e$	0.8	$\neg e$	0.4	p	$\neg t$	0.6
							$\neg p$	t	0.5
							$\neg p$	$\neg t$	0.1

Responder justificadamente a las siguientes preguntas, suponiendo que la red refleja adecuadamente el dominio de conocimiento.

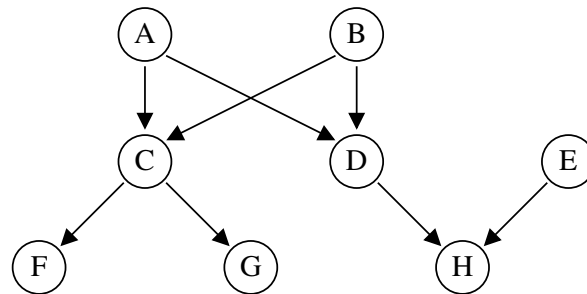
- ¿Es posible calcular a partir de la red cualquier entrada de la DCC?
- ¿Es cierto que P y A son incondicionalmente independientes? ¿Es cierto que nuestro grado de creencia sobre S sabiendo el valor de T se vería actualizado si además conociéramos el valor de E ? (es decir, se pregunta si $\mathbf{P}(S|T,E) = \mathbf{P}(S|T)$) ¿Es S condicionalmente independiente de A dado E ? ¿Son P y T condicionalmente independientes dado S ? Justificar las respuestas de este apartado usando criterios gráficos.
- Calcular la probabilidad de que se dedique poco tiempo de estudio, se hagan mal ambos exámenes (teórico y práctico), no se aprendan las señales y no se suspenda.
- Supongamos que se ha suspendido. ¿Cuál es la probabilidad de que se haya dedicado poco tiempo de estudio al código de circulación?

Problema 9. Para la red del ejercicio anterior, y en el caso de la consulta sobre la probabilidad de que se haya dedicado poco tiempo de estudio si se ha suspendido, obtener *una* muestra ponderada, tal y como las obtiene el **algoritmo de inferencia aproximada de ponderación por verosimilitud**; es decir, la muestra y su peso asociado.

Nota: Cuando se necesite realizar un sorteo con una probabilidad dada, suponer siempre que se obtiene el valor más probable.

Problema 10. En la red bayesiana sobre la alarma vista en teoría ¿son **Robo** y **Terremoto** independientes incondicionalmente? ¿son **Robo** y **Terremoto** condicionalmente independientes dado **Alarma**? Justificar las respuestas mediante el criterio de d-separación.

Problema 11. Consideremos la siguiente red bayesiana que relaciona las variables aleatorias A, B, C, D, E, F, G y H :



con las siguientes tablas de distribución:

$P(a)$
0.3

$P(b)$
0.4

A	B	$P(c A, B)$
a	b	0.4
a	$\neg b$	0.25
$\neg a$	b	0.4
$\neg a$	$\neg b$	0.3

A	B	$P(d A, B)$
a	b	0.8
a	$\neg b$	0.75
$\neg a$	b	0.1
$\neg a$	$\neg b$	0.25

$P(e)$
0.9

C	$P(f C)$
c	0.8
$\neg c$	0.5

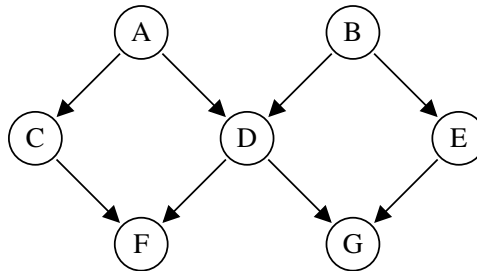
C	$P(g C)$
c	0.2
$\neg c$	0.1

D	E	$P(h D, E)$
d	e	0.5
d	$\neg e$	0.05
$\neg d$	e	0.3
$\neg d$	$\neg e$	0.7

Se pide:

- Calcular $P(a, b, \neg c, d, \neg e, f, g, \neg h)$
- Supongamos que queremos calcular $P(\neg f|a, b, \neg d)$ ¿Qué variables de la red podemos ignorar para esta consulta concreta? Aplicar, detallando cada paso, el algoritmo de eliminación de variables para calcular la probabilidad anterior.

Problema 12. Consideremos la siguiente red bayesiana que relaciona las variables aleatorias A, B, C, D, E, F y G :



con las siguientes tablas de distribución:

$P(a)$
0.4

$P(b)$
0.3

A	$P(c A)$
a	0.7
$\neg a$	0.2

A	B	$P(d A, B)$
a	b	0.8
a	$\neg b$	0.2
$\neg a$	b	0.7
$\neg a$	$\neg b$	0.3

B	$P(e B)$
b	0.2
$\neg b$	0.5

C	D	$P(f C, D)$
c	d	0.1
c	$\neg d$	0.5
$\neg c$	d	0.7
$\neg c$	$\neg d$	0.9

D	E	$P(g D, E)$
d	e	0.9
d	$\neg e$	0.7
$\neg d$	e	0.6
$\neg d$	$\neg e$	0.1

Se pide:

- Calcular la distribución de la variable aleatoria B condicionada a que se ha observado que F es verdadera, utilizando para ello el **algoritmo de eliminación de variables**.

- Calcular la distribución de la variable aleatoria B condicionada a que se ha observado que D es verdadera y F es falsa, utilizando para ello el **algoritmo de ponderación por verosimilitud** con 5 muestras, indicando las muestras generadas y el peso de las mismas ¿Es necesario generar valores en las muestras para todas las variables o se puede eliminar alguna de ellas?, justificar la respuesta.

Considerar la siguiente secuencia de números aleatorios en el proceso de generación de las muestras: 0.13, 0.07, 0.57, 0.94, 0.13, 0.78, 0.48, 0.38, 0.75, 0.93, 0.55, 0.16, 0.91, 0.06, 0.74, 0.02, 0.71, 0.48, 0.10, 0.04, 0.86, 0.70, 0.49, 0.40, 0.77

Problema 13. Supongamos que tenemos **dos sensores** colocados en una máquina de una planta industrial. Cada sensor puede estar en dos posiciones: normal y alerta. Se supone que cada sensor podría saltar a la posición de alerta porque la máquina esté con **temperatura alta** o también porque **se rompa algún componente** (supondremos que estas dos circunstancias son independientes entre sí). Sin embargo, los sensores están sujetos a errores: existe la posibilidad (con baja probabilidad) de que pasen a posición de alerta sin que ocurra ninguna de las dos cosas anteriores, o bien no pasar a alerta aunque ocurra alguna de las dos cosas, o incluso ambas. Los sensores, además, no tienen la misma precisión.

Hay un operario observando ambos sensores continuamente, con la orden de **parar la máquina** si alguno de los dos sensores se sitúa en posición de alerta. El operario está controlando otras cuestiones además, por lo que, aunque no es muy probable, podría no parar la máquina aún cuando los sensores alertaran. O incluso por error (improbable) podría parar la máquina sin que ninguno de los dos sensores estuviera en alerta.

- Se pide modelar el problema mediante una red bayesiana, indicando claramente las variables aleatorias consideradas y sus posibles valores, el orden en el que se dibujan las variables, y las relaciones de independencia condicional asumidas al construir la red. Dar también (usando unas probabilidades razonables) las tablas de probabilidad de la red.
- Según la red dibujada, ¿son independientes (incondicionalmente) el estado de ambos sensores? ¿son condicionalmente independientes dado el estado de la temperatura de la máquina? ¿son condicionalmente independientes dados el estado de la temperatura de la máquina y el estado sobre rotura de componentes? Justificar todas las respuestas usando el criterio de d -separación.

Problema 14.

Supongamos que estamos un día de viaje y que hemos dejado el portátil encendido en casa, enchufado y con la batería al cien por cien, realizando una serie de cálculos. A la vuelta, podríamos encontrarnos el **portátil apagado**. Básicamente hay dos razones que podrían influir en eso: que se hubiera producido un **corte eléctrico**, o también que la **batería hubiera fallado**. Se sabe que las baterías pueden fallar con más probabilidad en días de **calor**. También en días de calor es más probable que se produzcan **cortes eléctricos** por sobrecarga en la red debido al consumo masivo de aire acondicionado. También otra causa de cortes eléctricos pueden ser que hubiera **tormenta** con aparato eléctrico. Como hemos estado fuera, no podemos saber si ha habido tormenta, pero la tormenta en ocasiones viene acompañada de **lluvia**, y esta a su vez **mojar el jardín** de la entrada a la casa.

- Se pide modelar la situación descrita mediante una red bayesiana, indicando claramente cada variable aleatoria considerada y sus posibles valores. Indicar también el orden en el que se han ido dibujando las variables, por qué se ha escogido ese orden, y las relaciones de independencia condicional asumidas al construir la red. Dar también (usando unas probabilidades razonables) las tablas de probabilidad de la red.
- ¿Por qué una red bayesiana es una representación compacta de la distribución de probabilidad conjunta de todas las variables? Explicarlo usando la red del apartado anterior. Dar dos razones por las que es más ventajosa la representación de una distribución mediante una red bayesiana.
- Según la red dibujada, ¿son independientes tener el jardín mojado y encontrar el ordenador apagado? ¿son condicionalmente independientes si sabemos si ha habido tormenta o no? Justificar todas las respuestas usando el criterio de d -separación.

Problema 15.

En la Escuela XXX hay cuatro clases de **Alumnos (Al)** que clasificaremos (en orden descendente) como a , b , c y d , en función de su capacidad de trabajo y preparación. Así los alumnos a son los que acuden a los exámenes mejor preparados, y los d los peores. Según los alumnos, hay tres clases de **Profesores (Prof)**: *justos* (j), el 70%; *exigentes* (e), el 10%; y *moderados* (m), el 20%. Calificación que otorgan en función del número de alumnos que reciben la calificación de **Aprobado (Aprob)**, en sus exámenes. Así,

- Los profesores *justos* normalmente *aprueban* al 100% de los alumnos a y b , al 50% de los alumnos c , y al 10% de los alumnos d
- Los profesores *exigentes* normalmente *aprueban* al 90% de los alumnos a , al 70% de los alumnos b , al 30% de los alumnos c , y al 0% de los alumnos d
- Los profesores *moderados* normalmente *aprueban* al 100% de los alumnos a y b , al 60% de los alumnos c , y al 30% de los alumnos d

A un examen de la asignatura YYY se presentan alumnos de los cuatro tipos a , b , c y d , en una proporción de 10%, 40%, 30% y 20%, respectivamente. El examen será corregido por un profesor de la escuela elegido por sorteo. De entre los alumnos aprobados, al 20% de los de tipo a , y al 10% de los del tipo b , se les ofrecerá un puesto de **Trabajo (Trab)**.

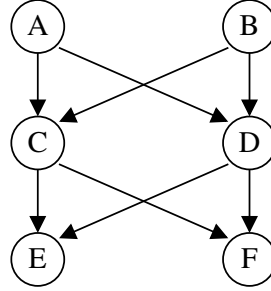
Se pide:

- Diseñar una red bayesiana que recoja esta información, identificando claramente las variables y sus valores, los nodos, dependencias, arcos y tablas de probabilidad.

Responder usando las técnicas estudiadas de inferencia probabilística, y detallando los pasos dados, a las siguientes preguntas:

- ¿Qué probabilidad tiene de aprobar (o no aprobar) un alumno del tipo b ?
- Si un alumno suspende, ¿cuál es la causa más probable? ¿el tipo de profesor? ¿el nivel de preparación del alumno?
- ¿Cuál es la probabilidad de que si un alumno no ha conseguido el trabajo sea porque el profesor era de los exigentes? Para responder a esta pregunta utilice el método de **Eliminación de Variables**.

Problema 16. En sociedades endogámicas se dan con cierta frecuencia relaciones incestuosas entre hermanos. Esta es una situación propicia para la transmisión de enfermedades sanguíneas. El servicio de salud quiere desarrollar una aplicación informática para dar información a parejas de hermanos sobre la probabilidad de que sus hijos tengan enfermedades sanguíneas. Para ello se considera la siguiente red bayesiana que establece las relaciones de dependencia entre las variables asociadas a la presencia de enfermedades sanguíneas en un hombre (A), una mujer (B), dos de sus hijos (C hombre y D mujer) y dos hijos fruto de la relación de estos últimos (E hombre y F mujer):



con las siguientes tablas de distribución:

$P(a)$
0.3

$P(b)$
0.4

A	B	$P(c A, B)$
a	b	0.8
a	$\neg b$	0.7
$\neg a$	b	0.4
$\neg a$	$\neg b$	0.3

A	B	$P(d A, B)$
a	b	0.8
a	$\neg b$	0.3
$\neg a$	b	0.7
$\neg a$	$\neg b$	0.2

C	D	$P(e C, D)$
c	d	0.8
c	$\neg d$	0.5
$\neg c$	d	0.3
$\neg c$	$\neg d$	0.2

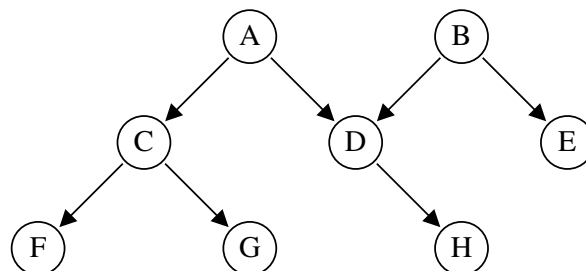
C	D	$P(f C, D)$
c	d	0.7
c	$\neg d$	0.5
$\neg c$	d	0.2
$\neg c$	$\neg d$	0.1

Se pide:

- Calcular la probabilidad de que una hija fruto del incesto (F) tenga una enfermedad sanguínea, dado que se sabe que un primer hijo (E) ya la tiene, utilizando para ello el **algoritmo de inferencia por enumeración**.
- Calcular la probabilidad de que una hija fruto del incesto (F) tenga una enfermedad sanguínea, dado que se sabe que un primer hijo (E) no la tiene, utilizando para ello el **algoritmo de eliminación de variables**.

Problema 17.

Consideremos la siguiente red bayesiana que relaciona las variables aleatorias A , B , C , D , E , F , G y H :



con las siguientes tablas de distribución:

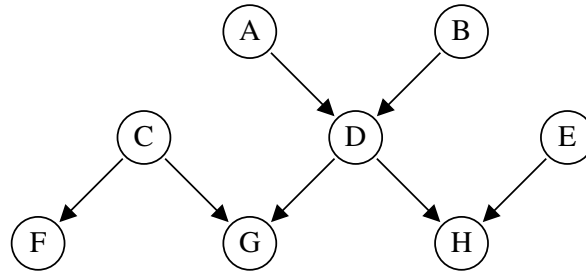
<table><tr><td>$P(a)$</td></tr><tr><td>0.3</td></tr></table>	$P(a)$	0.3	<table><tr><td>$P(b)$</td></tr><tr><td>0.4</td></tr></table>	$P(b)$	0.4	<table><tr><td>A</td><td>$P(c A)$</td></tr><tr><td>a</td><td>0.8</td></tr><tr><td>$\neg a$</td><td>0.3</td></tr></table>	A	$P(c A)$	a	0.8	$\neg a$	0.3	<table><tr><td>A</td><td>B</td><td>$P(d A, B)$</td></tr><tr><td>a</td><td>b</td><td>0.8</td></tr><tr><td>a</td><td>$\neg b$</td><td>0.7</td></tr><tr><td>$\neg a$</td><td>b</td><td>0.4</td></tr><tr><td>$\neg a$</td><td>$\neg b$</td><td>0.3</td></tr></table>	A	B	$P(d A, B)$	a	b	0.8	a	$\neg b$	0.7	$\neg a$	b	0.4	$\neg a$	$\neg b$	0.3	<table><tr><td>B</td><td>$P(e B)$</td></tr><tr><td>b</td><td>0.2</td></tr><tr><td>$\neg b$</td><td>0.5</td></tr></table>	B	$P(e B)$	b	0.2	$\neg b$	0.5
$P(a)$																																			
0.3																																			
$P(b)$																																			
0.4																																			
A	$P(c A)$																																		
a	0.8																																		
$\neg a$	0.3																																		
A	B	$P(d A, B)$																																	
a	b	0.8																																	
a	$\neg b$	0.7																																	
$\neg a$	b	0.4																																	
$\neg a$	$\neg b$	0.3																																	
B	$P(e B)$																																		
b	0.2																																		
$\neg b$	0.5																																		
<table><tr><td>C</td><td>$P(f C)$</td></tr><tr><td>c</td><td>0.8</td></tr><tr><td>$\neg c$</td><td>0.5</td></tr></table>	C	$P(f C)$	c	0.8	$\neg c$	0.5	<table><tr><td>C</td><td>$P(g C)$</td></tr><tr><td>c</td><td>0.2</td></tr><tr><td>$\neg c$</td><td>0.1</td></tr></table>	C	$P(g C)$	c	0.2	$\neg c$	0.1	<table><tr><td>D</td><td>$P(h D)$</td></tr><tr><td>d</td><td>0.50</td></tr><tr><td>$\neg d$</td><td>0.25</td></tr></table>	D	$P(h D)$	d	0.50	$\neg d$	0.25															
C	$P(f C)$																																		
c	0.8																																		
$\neg c$	0.5																																		
C	$P(g C)$																																		
c	0.2																																		
$\neg c$	0.1																																		
D	$P(h D)$																																		
d	0.50																																		
$\neg d$	0.25																																		

Se pide:

1. Calcular $P(a, b, c, \neg d, \neg e, \neg f, g, h)$
2. Supongamos que queremos calcular $P(\neg a|d, \neg g)$ ¿Qué variables de la red podemos ignorar para esta consulta concreta? Aplicar, detallando cada paso, el algoritmo de eliminación de variables para calcular la probabilidad anterior.

Problema 18.

Consideremos la siguiente red bayesiana que relaciona las variables aleatorias A, B, C, D, E, F, G y H :



con las siguientes tablas de distribución:

<table><tr><td>$P(a)$</td></tr><tr><td>0.3</td></tr></table>	$P(a)$	0.3	<table><tr><td>$P(b)$</td></tr><tr><td>0.4</td></tr></table>	$P(b)$	0.4	<table><tr><td>$P(c)$</td></tr><tr><td>0.8</td></tr></table>	$P(c)$	0.8	<table><tr><td>A</td><td>B</td><td>$P(d A, B)$</td></tr><tr><td>a</td><td>b</td><td>0.8</td></tr><tr><td>a</td><td>$\neg b$</td><td>0.7</td></tr><tr><td>$\neg a$</td><td>b</td><td>0.4</td></tr><tr><td>$\neg a$</td><td>$\neg b$</td><td>0.3</td></tr></table>	A	B	$P(d A, B)$	a	b	0.8	a	$\neg b$	0.7	$\neg a$	b	0.4	$\neg a$	$\neg b$	0.3	<table><tr><td>$P(e)$</td></tr><tr><td>0.1</td></tr></table>	$P(e)$	0.1											
$P(a)$																																						
0.3																																						
$P(b)$																																						
0.4																																						
$P(c)$																																						
0.8																																						
A	B	$P(d A, B)$																																				
a	b	0.8																																				
a	$\neg b$	0.7																																				
$\neg a$	b	0.4																																				
$\neg a$	$\neg b$	0.3																																				
$P(e)$																																						
0.1																																						
<table><tr><td>C</td><td>$P(f C)$</td></tr><tr><td>c</td><td>0.8</td></tr><tr><td>$\neg c$</td><td>0.5</td></tr></table>	C	$P(f C)$	c	0.8	$\neg c$	0.5	<table><tr><td>C</td><td>D</td><td>$P(g C, D)$</td></tr><tr><td>c</td><td>d</td><td>0.1</td></tr><tr><td>c</td><td>$\neg d$</td><td>0.7</td></tr><tr><td>$\neg c$</td><td>d</td><td>0.5</td></tr><tr><td>$\neg c$</td><td>$\neg d$</td><td>0.4</td></tr></table>	C	D	$P(g C, D)$	c	d	0.1	c	$\neg d$	0.7	$\neg c$	d	0.5	$\neg c$	$\neg d$	0.4	<table><tr><td>D</td><td>E</td><td>$P(h D, E)$</td></tr><tr><td>d</td><td>e</td><td>0.3</td></tr><tr><td>d</td><td>$\neg e$</td><td>0.8</td></tr><tr><td>$\neg d$</td><td>e</td><td>0.4</td></tr><tr><td>$\neg d$</td><td>$\neg e$</td><td>0.3</td></tr></table>	D	E	$P(h D, E)$	d	e	0.3	d	$\neg e$	0.8	$\neg d$	e	0.4	$\neg d$	$\neg e$	0.3
C	$P(f C)$																																					
c	0.8																																					
$\neg c$	0.5																																					
C	D	$P(g C, D)$																																				
c	d	0.1																																				
c	$\neg d$	0.7																																				
$\neg c$	d	0.5																																				
$\neg c$	$\neg d$	0.4																																				
D	E	$P(h D, E)$																																				
d	e	0.3																																				
d	$\neg e$	0.8																																				
$\neg d$	e	0.4																																				
$\neg d$	$\neg e$	0.3																																				

Se pide:

1. Supongamos que queremos calcular $P(d|a, \neg g)$, ¿qué variables de la red podemos ignorar para esta consulta? Aplicar, detallando cada paso, el algoritmo de eliminación de variables para calcular la probabilidad anterior.

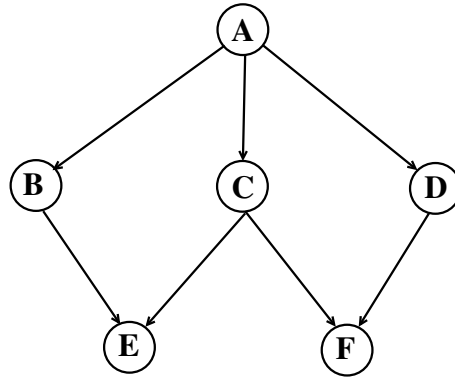
2. Consideremos los siguientes eventos:

- (a) $(a, b, c, \neg d, \neg e, \neg f, g, h)$
- (b) $(\neg a, \neg b, \neg c, \neg d, \neg e, \neg f, \neg g, \neg h)$
- (c) $(a, b, c, d, \neg e, \neg f, \neg g, \neg h)$

¿Cuál(es) de ellos podría(n) ser generados por el algoritmo de ponderación por verosimilitud al intentar aproximar el valor de $P(a|\neg g, \neg h)$?, ¿por qué?, ¿qué peso llevaría(n) asociado?

Problema 19.

Consideremos la siguiente red bayesiana que expresa las dependencias existentes entre las variables aleatorias booleanas A, B, C, D, E , y F (la red ha sido dibujada siguiendo ese mismo orden entre las variables):



con las siguientes tablas de distribución:

$P(a)$	<table> <tr> <th>A</th> <th>$P(b A)$</th> </tr> <tr> <td>a</td> <td>0.2</td> </tr> <tr> <td>$\neg a$</td> <td>0.7</td> </tr> </table>	A	$P(b A)$	a	0.2	$\neg a$	0.7	<table> <tr> <th>A</th> <th>$P(c A)$</th> </tr> <tr> <td>a</td> <td>0.1</td> </tr> <tr> <td>$\neg a$</td> <td>0.5</td> </tr> </table>	A	$P(c A)$	a	0.1	$\neg a$	0.5	<table> <tr> <th>A</th> <th>$P(d A)$</th> </tr> <tr> <td>a</td> <td>0.6</td> </tr> <tr> <td>$\neg a$</td> <td>0.2</td> </tr> </table>	A	$P(d A)$	a	0.6	$\neg a$	0.2
A	$P(b A)$																				
a	0.2																				
$\neg a$	0.7																				
A	$P(c A)$																				
a	0.1																				
$\neg a$	0.5																				
A	$P(d A)$																				
a	0.6																				
$\neg a$	0.2																				

B	C	$P(e B, C)$
b	c	0.8
b	$\neg c$	0.2
$\neg b$	c	0.1
$\neg b$	$\neg c$	0.9

C	D	$P(f C, D)$
c	d	0.2
c	$\neg d$	0.3
$\neg c$	d	0.4
$\neg c$	$\neg d$	0.9

Se pide:

1. Según las dependencias que se deducen por la red, decir si son ciertas o no las siguientes afirmaciones (justificando la respuesta):
 - Sabiendo el valor que toma A , el grado de creencia en que ocurra D no se ve actualizado si además sabemos el valor que toma B y C .
 - $P(C, D) = P(C) \cdot P(D)$
 - E y F son condicionalmente independientes dado C
 - E y F son condicionalmente independientes dados B y C

- $P(A|C, D) = P(A|C, D, F)$

2. Calcular la probabilidad de que A sea verdadero, dado que se ha observado que B y F son falsos, usando el algoritmo de eliminación de variables.

Nota: para que se tengan que hacer menos cálculos se proporciona el siguientes factor $f_D(A, C)$, resultado de eliminar la variable D :

A	C	$f_D(A, C)$
a	c	0.76
a	$\neg c$	0.4
$\neg a$	c	0.72
$\neg a$	$\neg c$	0.2

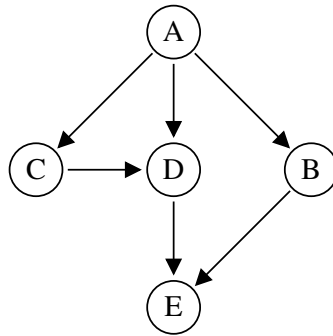
3. Generar una muestra ponderada, como las que se necesitarían si se aplicara el algoritmo de ponderación por verosimilitud para estimar la probabilidad $P(A|\neg b, \neg f)$.

Nota: Si para obtener esta muestra fueran necesarios números aleatorios entre 0 y 1, tomar de la siguiente secuencia los que se necesiten: 0.13, 0.07, 0.57, 0.94, 0.13, 0.78, 0.35, 0.21.

Una vez que tuvieramos 1000 muestras como ésta, ¿cómo obtendríamos a partir de ellas las probabilidades que finalmente devuelve el algoritmo?

Problema 20.

Consideremos la siguiente red bayesiana que relaciona las variables booleanas aleatorias A , B , C , D y E :



Se tienen también los siguientes datos de probabilidades:

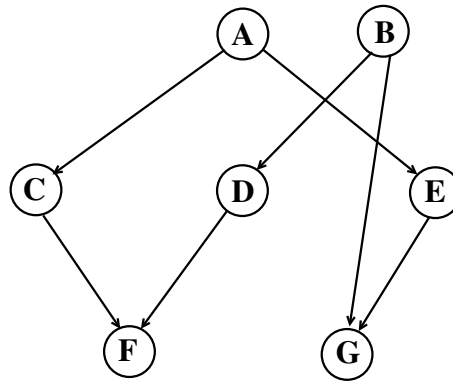
- La probabilidad de que A sea cierto es 0.7.
- La probabilidad de que B sea cierto cuando se sabe que A también lo es es 0.6. Si lo que se sabe es que A es falso, esa probabilidad es 0.8.
- La probabilidad de que C sea cierto dado que A es cierto es 0.6. La probabilidad de que C sea cierto dado que A es falso es 0.3.
- $P(d|a, c) = 0.4$, $P(d|a, \neg c) = 0.8$, $P(d|\neg a, c) = 0.3$, y $P(d|\neg a, \neg c) = 0.5$.
- $P(e|b, d) = 0.1$, $P(e|b, \neg d) = 0.6$, $P(e|\neg b, d) = 0.7$ y $P(e|\neg b, \neg d) = 0.2$.

Se pide:

1. Calcular $P(c, \neg d, \neg e)$
2. Calcular $P(E|\neg b, c)$, aplicando el algoritmo de eliminación de variables.
3. ¿Cuándo decimos que dos variables aleatorias son condicionalmente independientes dado un conjunto de otras variables aleatorias? Definirlo de manera precisa y dar también una idea intuitiva de dicho concepto.
4. Usar el criterio de d -separación para responder a las siguientes preguntas:
 - (a) ¿Son B y D independientes?
 - (b) ¿Son B y D condicionalmente independientes dado A ?
 - (c) ¿Son E y C condicionalmente independientes dado D ?
 - (d) ¿Son E y C condicionalmente independientes dado D y B ?

Problema 21.

Consideremos la siguiente red bayesiana que expresa las dependencias existentes entre las variables aleatorias booleanas A, B, C, D, E, F y G :



con las siguientes tablas de distribución:

$P(a)$	$P(b)$	<table><tr><th>A</th><th>$P(c A)$</th></tr><tr><td>a</td><td>0.7</td></tr><tr><td>$\neg a$</td><td>0.1</td></tr></table>	A	$P(c A)$	a	0.7	$\neg a$	0.1	<table><tr><th>B</th><th>$P(d B)$</th></tr><tr><td>a</td><td>0.1</td></tr><tr><td>$\neg a$</td><td>0.9</td></tr></table>	B	$P(d B)$	a	0.1	$\neg a$	0.9	<table><tr><th>A</th><th>$P(e A)$</th></tr><tr><td>a</td><td>0.3</td></tr><tr><td>$\neg a$</td><td>0.8</td></tr></table>	A	$P(e A)$	a	0.3	$\neg a$	0.8
A	$P(c A)$																					
a	0.7																					
$\neg a$	0.1																					
B	$P(d B)$																					
a	0.1																					
$\neg a$	0.9																					
A	$P(e A)$																					
a	0.3																					
$\neg a$	0.8																					

C	D	$P(f C,D)$
c	d	0.9
c	$\neg d$	0.7
$\neg c$	d	0.5
$\neg c$	$\neg d$	0.2

B	E	$P(g B,E)$
b	e	0.2
b	$\neg e$	0.8
$\neg b$	e	0.2
$\neg b$	$\neg e$	0.9

Se pide:

1. Supongamos que la red se ha ido construyendo siguiendo el algoritmo de construcción de redes bayesianas visto en clase, considerando las variables en orden alfabético. ¿Qué relaciones de dependencia condicional se han ido suponiendo?
2. Según las dependencias *que se deducen* de la estructura de la red, decir si son ciertas o no las siguientes afirmaciones (justificando la respuesta):

- Sabiendo el valor que toma A , el grado de creencia en que ocurra C no se ve actualizado si además sabemos el valor que toma G .
 - F y G son condicionalmente dado A
 - $\mathbf{P}(F|A, B) = \mathbf{P}(F|A, B, G)$
3. Aplicar el algoritmo de eliminación para calcular la probabilidad de que A sea falso, dado que se ha observado que F es falso y G es verdadero.