Mathematik

Prof. Dr. G. Baszenski [1]
Fachbereiche Elektrotechnik und Informationstechnik
Fachhochschule Dortmund

5. Auflage, Okt. 2017

Inhaltsverzeichnis

Komplexe Zahlen — Lineare Algebra — Lineare Differentialgleichungen 287

Abbildungsverzeichnis

Vorwort

Dieses Vorlesungsskript ist für die Veranstaltungen *Mathematik 1 und 2* in den Bachelorstudiengängen der Fachbereiche Elektrotechnik und Informationstechnik an der Fachhochschule Dortmund geschrieben.

Es handelt sich nicht um ein Textbuch, sondern um Notizen, die die Zuhörer beim Mitschreiben entlasten sollen und die nur zusammen mit dem Besuch der Lehrveranstaltungen verständlich sind.

Dieses Skript ist in zwei Teile

Reelle Funktionen – Analysis

und

Komplexe Zahlen – Lineare Algebra – Differentialgleichungen

gegliedert.

Wir wünschen, dass dieses Skript unsere Hörerinnen und Hörer in die Lage versetzt, im Unterricht aktiv mitzuarbeiten und bei Hausaufgaben und Prüfungsvorbereitungen die relevanten Konzepte nachzuschlagen.

Anregungen zur Verbesserung nehmen wir gerne entgegen (baszenski@fh-dortmund.de), auch wenn nicht jede sofort umgesetzt werden kann.

Dortmund, Juli 2017

G. Baszenski.

Reelle Funktionen
Analysis

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Logik

1.1.1 Definition (Aristoteles)
Eine Aussage *A ist ein sprachliches Gebilde, von dem es sinnvoll ist zu fragen, ob es wahr oder falsch ist (Zweiwertigkeitsprinzip).*

1.1.2 Bemerkung
Es ist nicht erforderlich, sagen zu können, ob das Gebilde wahr oder falsch ist, es genügt, dass die Frage nach Wahrheit ("Zutreffen") oder Falschheit ("Nicht-Zutreffen") sinnvoll gestellt werden kann.

Folgendes Beispiel enthält eine Aussage (ist entweder wahr oder falsch), auch wenn die richtige Antwort, d. h. der Wahrheitsgehalt der Aussage derzeit unbekannt ist:

1.1.3 Beispiel
Schwierig zu entscheidende Aussage:
Mersenne-Zahlen (Mersenne, 1644)

$$M_n = 2^n - 1.$$

Primzahl z. B. für $n = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31$ (siehe Abb. 1.1).
Behauptung: *Es gibt unendlich viele Mersenne-Primzahlen (bisher weder bewiesen noch widerlegt).*

Projekt GIMPS: *Great Internet Mersenne Prime Search*
Stand 2016:

$$2^{74\,207\,281} - 1 \text{ ist Primzahl } (\approx 10^{2.2\cdot 10^7}).$$

(49. gefundene Mersenne-Primzahl).

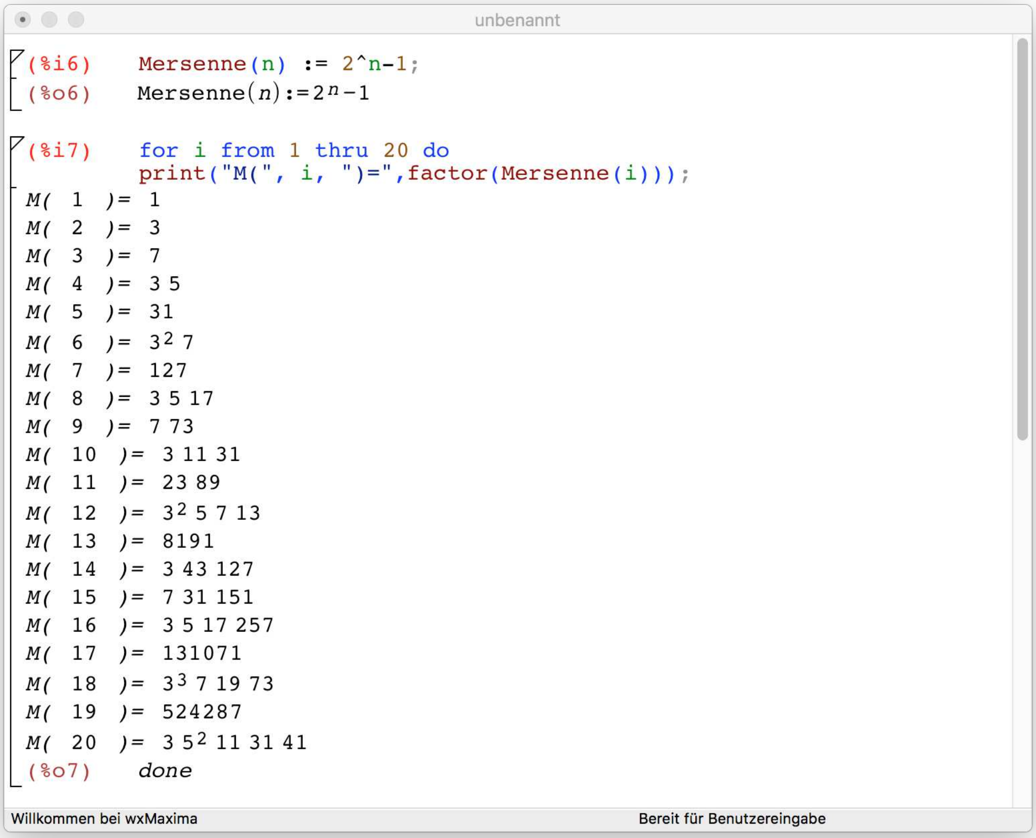


Abbildung 1.1: Berechnung von Mersennezahlen mit der Software *Wxmaxima*

Der Begriff der *Unentscheidbarkeit* aus der theoretischen Informatik behandelt ebenfalls Aussagen, die wahr oder falsch sind, obwohl der Wahrheitsgehalt nicht (durch einen Algorithmus) bestimmbar ist:

1.1.4 Beispiel

Bekanntes Beispiel aus der Informatik:
Das Halteproblem

"Läuft ein Computerprogramm endlos oder terminiert es nach endlich vielen Schritten?"

ist unentscheidbar.

1.1.5 Beispiel

Bekanntes Beispiel aus der Mathematik:
Hilberts zehntes Problem (1900):
Hat eine beliebige diophantische Gleichung eine Lösung?
Antwort (1970): Nicht allgemein entscheidbar (durch Algorithmus).

1.1.6 Definition
Eine diophantische Gleichung ist eine Polynomgleichung (in mehreren Variablen, Rechenoperationen +, -, ·), bei der ganzzahlige *Lösungen gesucht sind.*

1.1.7 Beispiel
Bekannte diophantische Gleichungen $x, y, z \in \mathbb{Z}$*:*

a) $ax + by = 1$*: lineare Gleichung.*
Lösbar falls die ganzzahligen Koeffizienten $a, b \in \mathbb{Z}$ *teilerfremd sind.*

b) $x^2 + y^2 = z^2$*:*
ist lösbar durch die sogenannten pythagoräischen Zahlentripel (einfachster Fall: $3^2 + 4^2 = 5^2$*, alle anderen Lösungen: einfache Programmieraufgabe).*

c) $x^n + y^n = z^n$*: unlösbar für* $n \in \mathbb{N}, n > 2$
(Fermats letztes Problem, 1637) bewiesen 1995.

d) $\dfrac{4}{n} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}$*:*
lösbar mit positiven ganzen Zahlen x*,* y*,* z *für alle* $n \geq 4$*?*
(Erdős, Straus 1948; offenes Problem).

— Wir werden folgende Formelzeichen im Zusammenhang mit Aussagen verwenden:

1.1.8 Bezeichnung (Logische Kurzzeichen)

$A \wedge B$	*Aussage A und Aussage B*
$A \vee B$	*Aussage A oder Aussage B*
$\neg A$	*Negation der Aussage A*
$A \Longrightarrow B$	*Aus A folgt B*
$B \Longleftarrow A$	*B ist notwendig für A*
$A \iff B$	*A und B sind äquivalent*
$A :\iff B$	*A ist definitionsgemäß äquivalent zu B*
$A := B$	*(das Ding) A ist definitionsgemäß gleich B*

Mit diesen Rechenoperationen für Wahrheitswerte lassen sich (ähnlich den Rechenregeln für Zahlen oder Mengen) Formeln aufstellen (Beweis durch Wahrheitstabellen). Dies wird hier nicht weiter entwickelt.

1.2 Mengen

Die Objekte, mit denen man sich in der modernen Mathematik beschäftigt, lassen sich aus dem Begriff der *Menge* herleiten.

Wir folgen der Definition von G. Cantor, dem Begründer der Mengenlehre:

1.2.1 Definition (Menge)

a) *Als* Menge *bezeichnet man eine Gesamtheit unterschiedlicher Objekte, die* Elemente *genannt werden. Von jedem Objekt steht fest, ob es zur Menge gehört (Element der Menge ist) oder nicht.*

b) *Eine Menge, die kein Element enthält, heißt* leere Menge *und wird mit dem Symbol*

$$\{\,\} \quad (\textit{oder } \emptyset)$$

bezeichnet.

1.2.2 Beispiel

a) *Menge der Zahlen* $2, 3, 5, 7$.

b) *Menge der Festnetztelefonnummern in Dortmund.*

Die natürlichen Zahlen sind die grundlegende unendliche Menge in der Mathematik:

1.2.3 Definition

a) *Mit*

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$$

bezeichnen wir die Menge der natürlichen Zahlen.

b)

$$\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

sei die Menge der natürlichen Zahlen einschließlich Null.

1.2.4 Bemerkung

a) Schreibweisen:

Mengen bezeichnen wir in der Regel mit Großbuchstaben, z.B. A, B, $\ldots$

Elemente bezeichnen wir meist mit kleinen Buchstaben, z.B. x, y, $\ldots$

$x \in A$: x *ist Element von* A

$x \notin A$: x *ist nicht Element von* A

b) Beschreibung von Mengen:

Aufzählende Form für endliche Mengen

$$M_1 = \{2, 3, 5, 7\}$$

Beschreibende Form (eine Aussage legt fest, welche Elemente die Menge enthält):

$$M_2 = \{x : x \text{ ist natürliche Zahl, } 1 \leq x \leq 7\}$$

Die oben angeführte Definition 1.2.1 des Mengenbegriffs hat u. a. folgende Konsequenzen:

1.2.5 Bemerkung

a) *Kommen Elemente mehrfach vor, so ändert sich die Menge nicht, z. B.* $\{1, 3, 1\} = \{1, 3\}$.

b) *Eine Menge ist unabhängig von der Reihenfolge ihrer Elemente, z. B.* $\{1, 3\} = \{3, 1\}$.

1.2.6 Bezeichnung

Die Anzahl der Elemente einer Menge M oder Mächtigkeit der Menge *bezeichnen wir mit*

$$|M|.$$

Für die leere Menge ist $|\{\ \}| = 0$, für endliche Mengen gilt $|M| \in \mathbb{N}_0$.
$|M| = \infty$ wird für unendliche Mengen geschrieben, z. B. ist $|\mathbb{N}| = \infty$.

1.2.7 Definition (Teilmenge)

Eine Menge A heißt Teilmenge *einer Menge B, wenn jedes Element von A auch Element von B ist.*

Formelschreibweise:

$$A \subseteq B.$$

Falls $A \subseteq B$ gilt, wird B Obermenge *von A genannt, Symbolschreibweise:*

$$B \supseteq A.$$

1.2.8 Bemerkung

Falls $A \subseteq B$, so gilt für die Mächtigkeiten $|A| \leq |B|$.

1.2.9 Beispiel
Es seien $M_0 = \{3, 7\}$, $M_1 = \{2, 3, 5, 7\}$, $M_2 = \{x \in \mathbb{N} : 1 \leq x \leq 7\}$.
Teilmengenbeziehungen:

Mengengleichheit können wir auf den Begriff der Teilmenge zurückführen:

1.2.10 Definition
Zwei Mengen A und B heißen gleich*, wenn $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$, d. h. wenn A sowohl Teil- als auch Obermenge von B ist, Schreibweise*

$$A = B.$$

1.2.11 Beispiel
a) $\{x \in \mathbb{N} : x \leq 12, x \text{ ist Primzahl}\} =$

b) $\{x \in \mathbb{N} : x \leq 12, x \text{ ist keine Primzahl}\} =$

1.2.12 Definition (Durchschnitt)
Als Durchschnitt *zweier Mengen A und B bezeichnet man die Menge aller Elemente, die zu A* und *zu B gehören:*

$$A \cap B := \{x : x \in A, x \in B\}.$$

Ist $A \cap B = \{\}$, so heißen A und B disjunkt.

1.2.13 Beispiel
Mit $M_1 = \{2, 3, 5, 7\}$, $M_3 = \{2, 4, 7, 8\}$ *gilt*

$$M_1 \cap M_3 =$$

1.2.14 Definition (Vereinigung)
Die Vereinigung *zweier Mengen A und B ist die Menge aller Elemente, die zu A* oder *zu B gehören:*

$$A \cup B := \{x : x \in A \text{ oder } x \in B\}.$$

1.2.15 Beispiel
Mit $M_1 = \{2, 3, 5, 7\}$, $M_3 = \{2, 4, 7, 8\}$ *ist*

$$M_1 \cup M_3 =$$

1.2.16 Bemerkung

a) Falls A, B *disjunkte Mengen sind, gilt:*

$$|A \cup B| =$$

b) Für Mengen mit endlichem Durchschnitt gilt:

$$|A \cup B| =$$

1.2.17 Definition (Differenzmenge)
Seien A *und* B *Mengen. Die* Differenzmenge *von* A *und* B *ist die Menge aller Elemente von* A*, die nicht zu* B *gehören, d. h.*

$$A \setminus B := \{x : x \in A, x \notin B\}.$$

1.2.18 Beispiel
Seien $M_1 = \{2, 3, 5, 7\}$, $M_3 = \{2, 4, 7, 8\}$. *Dann ist:*

$$M_1 \setminus M_3 =$$

1.2.19 Definition (Kreuzprodukt)
Seien A *und* B *Mengen. Unter dem* Kreuzprodukt *von* A *und* B *versteht man die Menge aller möglichen geordneten Paare* (a, b)*, wobei die erste Komponente aus* A *und die zweite Komponente aus* B *ist, d. h.*

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A,\ b \in B\}.$$

1.2.20 Beispiel

$$\{1, 2\} \times \{a, b, c\} =$$

1.2.21 Beispiel
Sei A *eine Menge.*

$$A \times \{\ \} =$$

1.2.22 Bezeichnung
Sei A eine Menge.

$$\begin{aligned} A^n &:= \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n \text{ Faktoren}} \\ &= \{(a_1, \ldots, a_n) : a_k \in A\} \end{aligned}$$

Menge der n-Tupel von Elementen aus A.

1.2.23 Beispiel

$$\{0,1\}^4 =$$

1.2.24 Bemerkung
Seien A, B Mengen. Dann ist

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

1.2.25 Beispiel
Anzahl der Elemente von $\{0,1\}^8$:

Zur Veranschaulichung von Mengen und Teilmengenbeziehungen werden die so genannten Venn-Diagramme verwendet (siehe Abb. 1.1).

Folgende Rechenregeln für Mengen lassen sich gut mit Venn-Diagrammen plausibel machen:

1.2.26 Satz
Rechenregeln für Durchschnitt und Vereinigung :

$$\begin{aligned} A \cup B &= B \cup A && \textit{Kommutativgesetz} \\ A \cap B &= B \cap A && \textit{Kommutativgesetz} \\ A \cup (B \cup C) &= (A \cup B) \cup C && \textit{Assoziativgesetz} \\ A \cap (B \cap C) &= (A \cap B) \cap C && \textit{Assoziativgesetz} \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) && \textit{Distributivgesetz} \\ A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) && \textit{Distributivgesetz} \end{aligned}$$

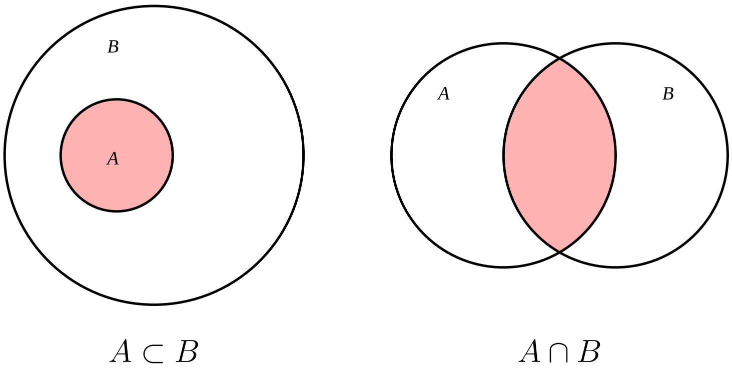


Abbildung 1.2: Venn-Diagramme für Teilmenge und Durchschnitt

1.3 Reelle Zahlen

1.3.1 Definitionen

In der Mathematik hat man es oft mit Zahlenmengen zu tun. Die folgende Hierarchie von Zahlenmengen ist aus der Schule bekannt:

1.3.1 Definition (Zahlenmengen)

a) Natürliche Zahlen:
$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}, \quad \mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

b) Ganze Zahlen:
$\mathbb{Z} := \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

c) Rationale Zahlen:
$\mathbb{Q} := \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$
$= \{x : x \textit{ endliche oder periodische Dezimalzahl}\}$

d) Reelle Zahlen:
$\mathbb{R} := \{x : x \textit{ endliche oder unendliche Dezimalzahl}\}$

1.3.2 Bemerkung
Es gilt für die Zahlenmegen

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Innerhalb dieser Zahlenmengen lassen sich in folgender Weise die Grundrechenarten ausführen:

1.3.3 Bemerkung (Abgeschlossenheit)

$$
\begin{aligned}
m, n \in \mathbb{N} &\implies m+n,\ m \cdot n \in \mathbb{N} \\
m, n \in \mathbb{Z} &\implies m+n,\ m \cdot n,\ m-n \in \mathbb{Z} \\
m, n \in \mathbb{Q} &\implies m+n,\ m \cdot n,\ m-n \in \mathbb{Q} \\
m, n \in \mathbb{Q},\ n \neq 0 &\implies \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \\
m, n \in \mathbb{R} &\implies m+n,\ m \cdot n,\ m-n \in \mathbb{R} \\
m, n \in \mathbb{R},\ n \neq 0 &\implies \frac{m}{n} \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Alle reellen Zahlen lassen sich als (unendliche) Dezimalzahlen schreiben. Die Teilmenge der rationalen Zahlen ist wie folgt charakterisiert:

1.3.4 Bemerkung

a) *Falls $x \in \mathbb{Q}$, dann ist x durch eine endliche oder unendliche periodische Dezimalzahl darstellbar, z. B.*

$$\frac{1}{4} = \qquad\qquad \frac{1}{11} = \qquad\qquad\qquad \frac{3}{8} =$$

b) *Unendliche, nicht periodische Dezimalzahlen heißen* irrationale Zahlen, *z. B.*

$$\sqrt{2} = 1.414213\ldots \qquad \pi = 3.141592\ldots \qquad e = 2.7182818\ldots$$

Es ist also $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \{x : x \textit{ ist irrational}\}$.

Die Dezimaldarstellung von Zahlen ist nicht ganz eindeutig, da eine Periode der Ziffer 9 sich stets auch als endliche Dezimalzahl schreiben lässt, bei der die Ziffer vor der Periode um 1 erhöht wird:

1.3.5 Bemerkung

Eindeutigkeit der Dezimaldarstellung?

z. B. $0.9999\ldots = 1, \quad 1.2349999\ldots = 1.235.$

Die einfachsten periodischen Dezimalzahlen sind folgende:

1.3.6 Beispiel

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{9} &= 0.\overline{1} \quad, \textit{denn}\ \ 9 \cdot 0.\overline{1} = 0.\overline{9} = 1, \\
\frac{1}{99} &= 0.\overline{01} \quad, \textit{denn}\ \ 99 \cdot 0.\overline{01} = 0.\overline{99} = 0.\overline{9} = 1, \\
\frac{1}{999} &= 0.\overline{001} \quad, \textit{denn}\ \ 999 \cdot 0.\overline{001} = 0.\overline{999} = 0.\overline{9} = 1, \\
&\ldots
\end{aligned}
$$

Abbrechende Dezimalzahlen lassen sich als gewöhnlicher Bruch mit einer Zehnerpotenz 10^n im Nenner schreiben. n ist die Anzahl Stellen hinter dem Komma:

1.3.7 Beispiel
Umwandlung in Bruch: 2.4375*:*

$$2.4375 = \frac{24375}{10\,000}$$

Periodische Dezimalzahlen, bei denen die Periode von Ziffern direkt hinter dem Dezimalpunkt beginnt, sind ganzzahlige Vielfache von einem der Brüche $\frac{1}{9}, \frac{1}{99}, \frac{1}{999}, \ldots$:

1.3.8 Beispiel
Umwandlung in Bruch: $0.\overline{459}$*:*

$$0.\overline{001} = \frac{1}{999} \iff 0.\overline{459} = \frac{459}{999} = \frac{51}{111} = \frac{17}{37}.$$

Die Kombination beider Methoden löst den allgemeinen Fall einer periodischen Dezimalzahl:

1.3.9 Beispiel
Umwandlung in Bruch: $1.2\overline{459}$*:*

$$\begin{aligned} 0.\overline{459} = \frac{17}{37} \quad &\iff \quad 0.0\overline{459} = \frac{17}{370} \\ &\iff \quad 1.2\overline{459} = 1.2 + 0.0\overline{459} \\ &\qquad\quad = \frac{12}{10} + \frac{17}{370} = \frac{444+17}{370} = \frac{461}{370}. \end{aligned}$$

Brüche der Form $\frac{a}{b}$ können ggfs. durch den größten gemeinsamen Teiler gekürzt werden. Der Euklidische Algorithmus gilt als einer der ältesten (und noch heute aktuellen) Algorithmen der Welt. Besonders bei großen Zahlen effektiver als Zerlegung von a und b in Primfaktoren.

1.3.10 Bezeichnung
Für $a, b \in \mathbb{N}$ sei

$$a\%b$$

der Divisionsrest bei ganzzahliger Division a/b, d. h.

$$r = a\%b :\iff a = nb + r \quad \textit{mit} \;\; 0 \le r < b,\; n \in \mathbb{N}_0$$

1.3.11 Algorithmus (Euklid, 300 v. Chr.)
Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers zweier natürlicher Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$.
Start: Setze

$$a_0 := a, \quad b_0 := b, \quad r_0 := a_0 \% b_0$$

Für $k = 1, 2, \ldots$:
Falls $r_{k-1} = 0$: Gehe zum Ende,
sonst: Setze

$$a_k := b_{k-1}, \quad b_k := r_{k-1}, \quad r_k := a_k \% b_k$$

Ende: Der $\mathrm{ggT}(a, b)$ ist gleich dem letzten Wert b_k.

Beweis
Die Divisionsreste $r_k \geq 0$ werden in jedem Schritt kleiner, dadurch endet der Algorithmus.
Jeder gemeinsame Teiler von a und b ist auch Teiler des Divisionsrests:

$$\begin{aligned}
q \text{ ist Teiler von } a &\iff a = a' \cdot q \quad (a', q \in \mathbb{N}) \\
q \text{ ist Teiler von } b &\iff b = b' \cdot q \quad (b' \in \mathbb{N}) \\
a \% b = r &\iff a = n \cdot b + r \\
&\implies r = a - nb \\
& = a'q - nb'q \\
& = (a' - nb')q.
\end{aligned}$$

1.3.12 Beispiel
Man schreibe den Bruch $\frac{24\,375}{10\,000}$ in gekürzter Form.

Lösung
Größter gemeinsamer Teiler mit Euklidischem Algorithmus:

$$\begin{aligned}
24\,375/10\,000 &= 2 \text{ Rest } \ 4\,375 \\
10\,000/4\,375 &= 2 \text{ Rest } \ 1\,250 \\
4\,375/1\,250 &= 3 \text{ Rest } \ 625 \\
1\,250/625 &= 2 \\
\implies ggT(24\,375, 10\,000) &= 625 (= 25^2 = 5^4)
\end{aligned}$$

$$\implies \frac{24\,375}{10\,000} = \frac{24\,375/625}{10\,000/625} = \frac{39}{16}.$$

1.3.13 Beispiel
Man kürze den Bruch $\frac{459}{999}$.

Lösung

Größter gemeinsamer Teiler mit Euklidischem Algorithmus:

1.3.14 Beispiel

Veranschaulichung von Zahlenmengen: Abbildung 1.3.

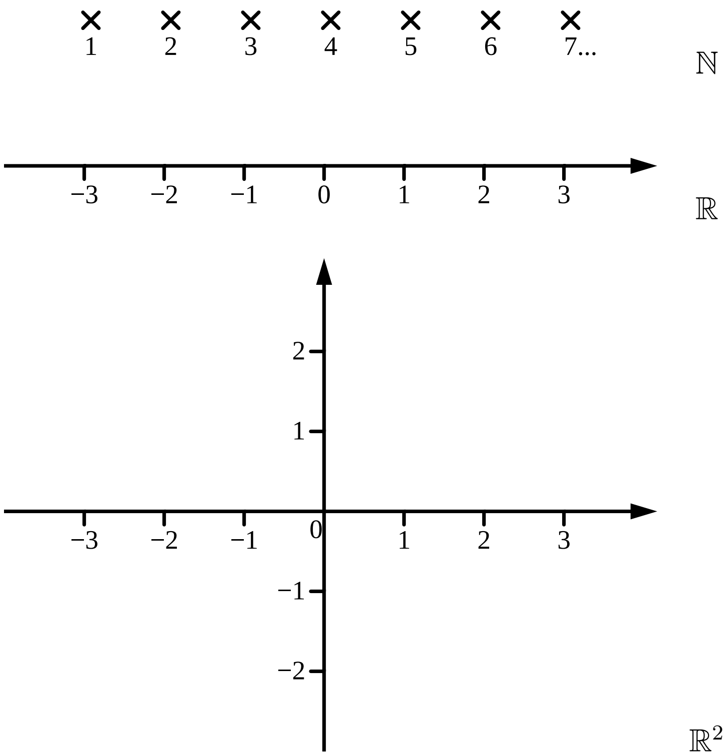


Abbildung 1.3: natürliche Zahlen, Zahlenstrahl, Zahlenebene

1.3.2 Ungleichungen

Reelle Zahlen können der Größe nach angeordnet werden, je zwei von ihnen können verglichen werden. Es gilt: a ist kleiner als b (Formelschreibweise $a < b$), wenn die Differenz

$a-b$ positiv ist. Auf dem Zahlenstrahl (Abbildung 1.3) liegen die kleineren Zahlen weiter links als die größeren.

Folgende Rechenregeln für Ungleichungen sind wichtig:

1.3.15 Satz
Seien $a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\begin{array}{rrcl}
 & a<b & \Longleftrightarrow & a+c<b+c \\
 & a<b,\ c<d & \Longrightarrow & a+c<b+d \\
 & a<b,\ c>0 & \Longrightarrow & ac<bc \\
 & a<b,\ c<0 & \Longrightarrow & ac>bc \\
\textit{Spezialfall } c=-1: & a<b & \Longleftrightarrow & -a>-b \\
 & a\le b,\ b\le a & \Longleftrightarrow & a=b \\
 & a<b,\ b<c & \Longrightarrow & a<c
\end{array}$$

1.3.16 Satz
Seien $a>0,\ b>0$. Dann gilt:

a) $a<b \iff \dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$

b) $a<b \iff a^2<b^2$

c) $\sqrt{ab} \le \dfrac{a+b}{2}$

d) Sei $a \ge -1,\quad n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$(1+a)^n \ge 1+na \tag{1.1}$$

(Bernoullische Ungleichung, siehe Abbildung 1.4)

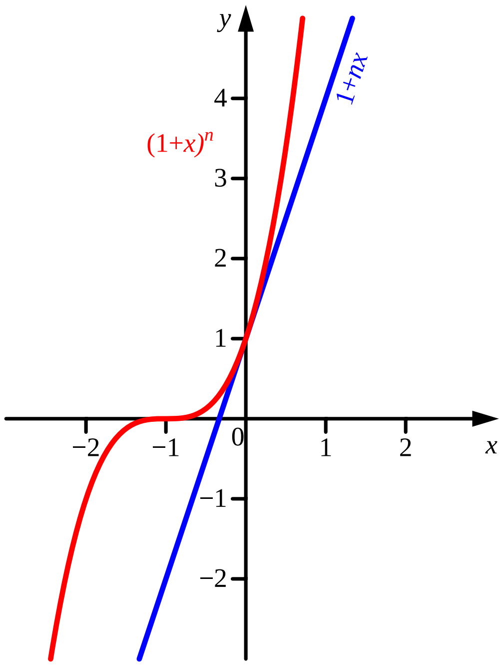


Abbildung 1.4: Bernoulli-Ungleichung

1.3.17 Beispiel (Vergleich von Zahlen)

$$\begin{array}{cc} -3 & -1 \\ \frac{3}{8} & \frac{2}{7} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{3} \\ \pi & \frac{22}{7} \end{array}$$

1.3.18 Beispiel (Anwendungen von Satz 1.3.16)

a) Behauptung: Für $a > 0$ gilt

$$a + \frac{1}{a} \geq 2$$

Beweis

Setze $b = \frac{1}{a}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} 1 = \sqrt{ab} &\leq \frac{1}{2}(a+b) = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) \\ \Longrightarrow \quad 2 &\leq a + \frac{1}{a}. \end{aligned}$$

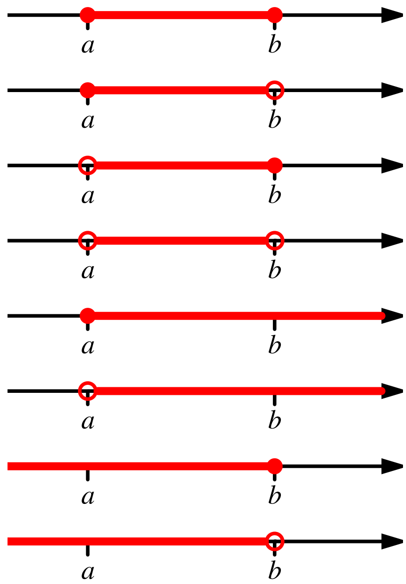
b) Behauptung: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $n < 2^n$.
Beweis

Mit der Bernoullischen Ungleichung (vgl. (1.1) für $a = 1$) gilt:

$$\begin{aligned} 2^n = (1+1)^n &\geq &= 1+n \\ \implies 2^n &> &n \end{aligned}$$

1.3.19 Definition (Intervalle)
Seien $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
[a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \\
[a,b) &:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} \\
(a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} \\
(a,b) &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \\
[a,\infty) &:= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\} \\
(a,\infty) &:= \{x \in \mathbb{R} : x > a\} \\
(-\infty,b] &:= \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\} \\
(-\infty,b) &:= \{x \in \mathbb{R} : x < b\}
\end{aligned}$$



Dabei ist $a \leq x \leq b$ Kurzschreibweise für

$$a \leq x \quad \text{und} \quad x \leq b$$

d. h. alle Zahlen x zwischen a und b.

1.3.20 Beispiel
Grafische Darstellung von Intervallen, siehe Abbildung 1.5

1.3.21 Beispiel (Veranschaulichung von Zahlenmengen)

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x+y \leq 3\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; y \leq 3-x\}$$

In der xy-Ebene zeichnet man $y = 3-x$ und schraffiert den Bereich mit $y \leq 3-x$ (siehe Abbildung 1.6)

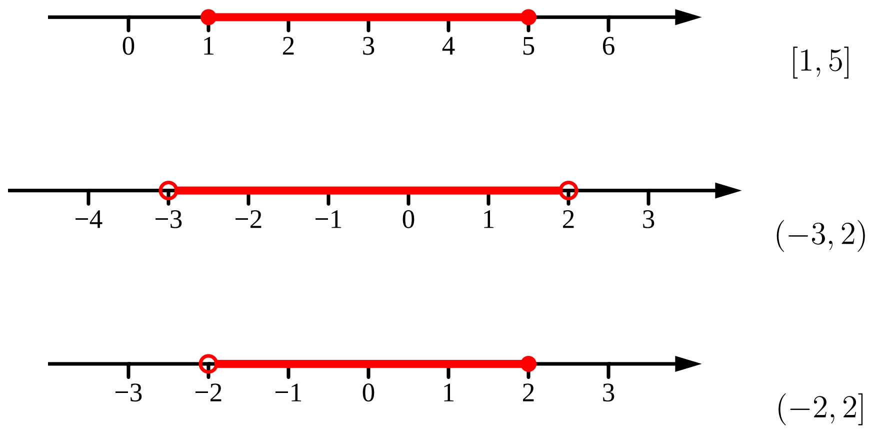


Abbildung 1.5: Intervalle $[1, 5]$, $(-3, 2)$, $(-2, 2]$

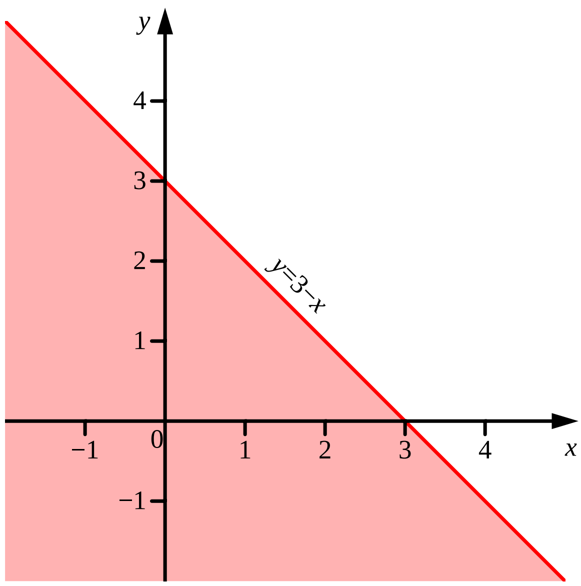


Abbildung 1.6: Grafische Darstellung von $x + y \leq 3$

1.3.3 Betrag reeller Zahlen

1.3.22 Definition (Betrag)
Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann ist der Betrag von x, *in Zeichen $|x|$, definiert durch*

$$|x| \quad := \quad \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases} .$$

Geometrisch ist $|x|$ der Abstand von x zum Nullpunkt auf der reellen Zahlengeraden.

1.3.23 Beispiel

$$\begin{aligned} |2| &= 2 \\ |-7.5| &= 7.5 \\ |0| &= 0 \\ |\pi| &= \pi \\ |-a| &= a, \textit{ falls } a \textit{ positiv ist} \\ |-a| &= -a, \textit{ falls } a \textit{ negativ ist} \end{aligned}$$

1.3.24 Satz (Eigenschaften des Betrages reeller Zahlen)
Seien x, $y \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$|x| \geq 0$$

$$|x| \geq x$$

$$|x| = 0 \iff x = 0$$

$$|-x| = |x|$$

$$|xy| = |x||y|$$

$$|x+y| \leq |x| + |y| \textit{ (Dreiecksungleichung)} \tag{1.2}$$

$$|x+y| \geq \big||x| - |y|\big| \textit{ (inv. Dreiecksungleichung)} \tag{1.3}$$

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

1.3.25 Satz (Auflösen von Beträgen)
Sei $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

a)

$$|x| < c \iff -c < x < c \tag{1.4}$$

b)

$$|x| \leq c \iff -c \leq x \leq c \tag{1.5}$$

c)

$$|x| > c \iff x < -c \textit{ oder } x > c \tag{1.6}$$

d)

$$|x| \geq c \iff x \leq -c \textit{ oder } x \geq c \tag{1.7}$$

Beweis

a)

$$\begin{aligned}
|x| < c &\iff (x < 0 \wedge -x < c) \vee (x \geq 0 \wedge x < c) \\
&\iff -c < x < 0 \vee 0 \leq x < c \\
&\iff -c < x < c
\end{aligned}$$

(Für "$\leq$" analog.)

b)

$$\begin{aligned}
|x| > c &\iff (x < 0 \wedge -x > c) \vee (x \geq 0 \wedge x > c) \\
&\iff (x < 0 \wedge x < -c) \vee (x \geq 0 \wedge x > c) \\
&\iff x < -c \vee x > c
\end{aligned}$$

(Für "$\geq$" analog.)

Sonderfälle von Satz 1.3.25:

1.3.26 Bemerkung

a) $|x| < c$ *ist für* $c \leq 0$ *nicht lösbar.*

b) $|x| \leq c$ *ist für* $c < 0$ *nicht lösbar,*
$|x| \leq 0$ *hat die Lösung* $x = 0$.

c) $|x| > c$ *ist für* $c < 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$ *erfüllt,*
$|x| > 0$ *hat die Lösungen* $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

d) $|x| \geq c$ *ist für alle* $x \in \mathbb{R}$ *erfüllt, falls* $c \leq 0$.

1.3.27 Beispiel

$$|3x - 1| \leq 2$$

Lösung

Nach Formel (1.5) haben wir:

$$\begin{aligned}
|3x - 1| \leq 2 &\iff -2 \leq 3x - 1 \leq 2 \\
&\iff -1 \leq 3x \leq 3 \\
&\iff -\frac{1}{3} \leq x \leq 1.
\end{aligned}$$

1.3.28 Beispiel

$$|4x + 3| > 6$$

Lösung
Nach Formel (1.6) gilt:

$$\begin{aligned} |4x+3| > 6 \quad &\Longleftrightarrow \quad 4x+3 < -6 \ \text{ oder } \ 4x+3 > 6 \\ &\Longleftrightarrow \quad 4x < -9 \ \text{ oder } \ 4x > 3 \\ &\Longleftrightarrow \quad x < -\frac{9}{4} \ \text{ oder } \ x > \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

1.3.29 Beispiel

$$|2x+1| - |x-3| \leq 2$$

Lösung
Auflösung des ersten Betrags gemäß Formel (1.5):

$$|2x+1| - |x-3| \leq 2 \iff \overbrace{|2x+1|}^{|y|} \leq \overbrace{2+|x-3|}^{b}$$

$$\iff \quad -2 - |x-3| \leq 2x+1 \leq 2 + |x-3|$$

$$\iff \quad -|x-3| \underset{i)}{\leq} 2x+3 \underset{ii)}{\leq} 4 + |x-3|$$

Gesamtlösung:

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_i \cap \mathbb{L}_{ii} :$$

Lösung
von i) gemäß Formel (1.7):

$$\begin{aligned} -|x-3| \leq 2x+3 \iff & |x-3| \geq -2x-3 \\ \iff \quad & x-3 \leq 2x+3 \ \text{ oder } \ x-3 \geq -2x-3 \\ \iff \quad & -6 \leq x \ \text{ oder } \ 3x \geq 0 \\ \iff \quad & x \in [-6,\infty) \cup [0,\infty) = [-6,\infty) =: \mathbb{L}_i. \end{aligned}$$

Lösung
von ii) ebenfalls gemäß Formel (1.7):

$$\begin{aligned} 2x+3 \leq 4+|x-3| \iff & 2x-1 \leq |x-3| \\ \iff \quad & x-3 \leq -2x+1 \ \text{ oder } \ 2x-1 \leq x-3 \\ \iff \quad & 3x \leq 4 \ \text{ oder } \ x \leq -2 \\ \iff \quad & x \in (-\infty, \tfrac{4}{3}] =: \mathbb{L}_{ii}. \end{aligned}$$

Insgesamt ist

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_i \cap \mathbb{L}_{ii} = [-6,\infty) \cap (\infty, \tfrac{4}{3}] = [-6, \tfrac{4}{3}].$$

1.4 Der binomische Lehrsatz

1.4.1 Beispiel

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2 \\
(a+b)^3 &= (a^2+2ab+b^2)(a+b) \\
&= a^3+3a^2b+3ab^3+b^3 \\
(a+b)^4 &= (a^3+3a^2b+3ab^3+b^3)(a+b) \\
&= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 \\
&\dots
\end{aligned}$$

Gewünscht ist eine allgemeine Formel für $(a+b)^n, n \in \mathbb{N}$ beliebig.

1.4.2 Bezeichnung (Summenzeichen)

Das Summenzeichen $\sum$ wird verwendet, um Summen aus mehreren Termen, die regelmäßig aufgebaut sind, in übersichtlicher Form darzustellen.

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

1.4.3 Beispiel

a) $a+a^2+a^3+\cdots+a^n = \sum_{k=1}^{n} a^k$

b) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{1024} = \sum_{n=0}^{10} 0.5^n = \sum_{n=0}^{10} \frac{1}{2^n}$

c) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\pm\frac{1}{n^2} = \sum_{m=1}^{n^2} \frac{(-1)^{m+1}}{m}$

d) $\sin x+\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 4x}{4}+\cdots+\frac{\sin Nx}{N} = \sum_{\nu=1}^{N} \frac{1}{\nu}\sin \nu x$ *(siehe Abb. 1.7)*

1.4.4 Bemerkung

Umgang mit Summen

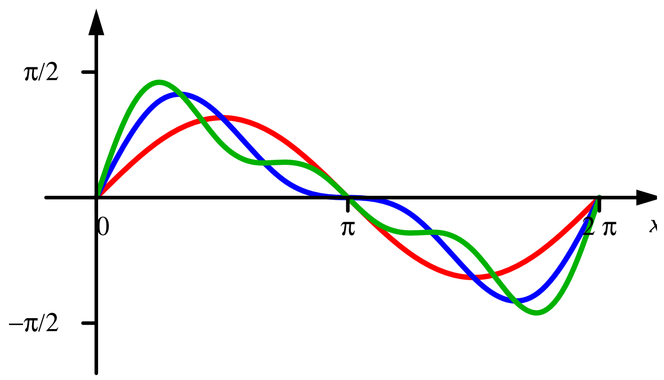


Abbildung 1.7: $\sum_{\nu=1}^{N} \frac{1}{\nu} \sin \nu x \quad$ für $N = 1, 2, 3$.

a) $\sum_{k=-2}^{2} e^{\frac{k\pi j}{6}} = e^{-\frac{\pi j}{3}} + e^{-\frac{\pi j}{6}} + 1 + e^{\frac{\pi j}{6}} + e^{\frac{\pi j}{3}}$: *negative Werte beim Index sind erlaubt.*

b) $\sum_{k=2}^{-2} e^{\frac{k\pi j}{6}} = 0$: *leere Summe, da* $\{k : 2 \leq k \leq -2\} = \{\}$: *definitionsgemäß* 0.

c) $\sum_{k=5}^{15} a_k = \sum_{n=0}^{10} a_{n+5}$: *Beispiel für Indextransformation, hier*

$$n = k - 5 \iff k = n + 5.$$

d) $\sum_{k=m}^{n} c\, a_k = c \sum_{k=m}^{n} a_k$: *Distributivgesetz, Ausklammern, Ausmultiplizieren.*

1.4.5 Definition (Fakultät)
Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Dann definiert man n-Fakultät *durch*

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0 \\ 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n & \text{für } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1.4.6 Beispiel

$$\begin{aligned}
0! &= 1\\
1! &= 1\\
2! &= 1\cdot 2 = 2\\
3! &= 1\cdot 2\cdot 3 = 6\\
4! &= 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24\\
5! &= 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120\\
6! &= 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6 = 720
\end{aligned}$$

1.4.7 Bemerkung

Die Fakultät lässt sich auch rekursiv definieren durch

$$\begin{aligned}
0! &= 1\\
(n+1)! &= n!\,(n+1) \quad \textit{für } n \in \mathbb{N}_0
\end{aligned}$$

1.4.8 Definition (Binomialkoeffizienten)

Seien $n, k \in \mathbb{N}_0$, $n \geq k$. Dann definiert man die Binomialkoeffizienten n über k *durch*

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k}\\
\binom{n}{0} &= 1
\end{aligned}$$

1.4.9 Beispiel

$$\begin{aligned}
\binom{3}{1} &= \frac{3}{1} = 3\\
\binom{4}{2} &= \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2} = 6\\
\binom{7}{5} &= \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 21\\
\binom{8}{8} &= \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8} = 1.
\end{aligned}$$

1.4.10 Satz (Eigenschaften Binomialkoeffizienten)
Die Binomialkoeffizienten besitzen die folgenden Eigenschaften.

a)

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

b)

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

c)

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

d)

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

Beweis
Zu a)

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k} \\
&= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k}\cdot\frac{(n-k)(n-k-1)\cdots 2\cdot 1}{(n-k)(n-k-1)\cdots 2\cdot 1} \\
&= \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)\cdot(n-k)(n-k-1)\cdots 2\cdot 1}^{n!}}{\underbrace{1\cdot 2\cdot 3\cdots k}_{k!}\cdot\underbrace{(n-k)(n-k-1)\cdots 2\cdot 1}_{(n-k)!}} \\
&= \frac{n!}{k!\,(n-k)!}
\end{aligned}$$

Zu c)

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

Zu d)

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!} \\
&= \frac{n!\,(k+1)}{k!\,(k+1)\,(n-k)!} + \frac{n!\,(n-k)}{(k+1)!\,(n-k-1)!\,(n-k)} \\
&= \frac{n!\,(k+1+n-k)}{(k+1)!\,(n-k)!} \\
&= \frac{n!\,(n+1)}{(k+1)!\,(n-k)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n+1-(k+1))!} = \binom{n+1}{k+1}.
\end{aligned}$$

1.4.11 Bemerkung (Pascalsches Dreieck)

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \binom{0}{0} & & & \\
 & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\
 & & \searrow & & \swarrow & & \\
 & & & + & & & \\
 & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\
 & \searrow & & \swarrow \quad \searrow & & \swarrow & \\
 & & + & & + & & \\
\binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\
\searrow & & \swarrow \quad \searrow & & \swarrow \quad \searrow & & \swarrow
\end{array}$$

1.4.12 Bemerkung

Dies ergibt mit Zahlenwerten:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots
\end{array}$$

1.4.13 Satz (Binomischer Lehrsatz)
Für $n \in \mathbb{N}_0,\ a, b \in \mathbb{C}$ gilt:

$$(a+b)^n \quad = \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \quad = \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \tag{1.8}$$

1.4.14 Beispiel

$$(2x+3y)^4 =$$

1.4.15 Beispiel

$$\left(\frac{x}{2} - 2y\right)^5 =$$

1.4.16 Beispiel

$$(\sqrt{2} + \sqrt{2}j)^6 =$$

1.4.17 Beispiel
Für $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$(1+x)^n \quad = \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \quad = 1 + nx + \cdots + x^n. \tag{1.9}$$

Kapitel 2

Reelle Funktionen

2.1 Relationen

2.1.1 Definition (Relation)
Seien M und N Mengen.
Eine Teilmenge

$$A \subseteq M \times N$$

heißt Relation *zwischen M und N.*

2.1.2 Beispiel
Seien $M = \{1, 2, 3\}$ und $N = \{a, b, c\}$.

$$M \times N = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c), (3, a), (3, b), (3, c)\}$$

Beispiele für Relationen zwischen M und N:

$$A = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, c)\}, \quad B = \{(1, b), (2, b), (3, b)\}$$

Graphische Darstellung siehe Abbildung 2.1

2.1.3 Bemerkung

a) *Die Zuordnung muß nicht eindeutig sein,*
d. h. einem Element aus M können verschiedene (oder keine) Elemente aus N zugeordnet werden.
Verschiedenen Elementen aus M kann das gleiche Element aus N zugeordnet sein.

b) *Nicht alle Elemente von M und N müssen in der Relation vorkommen.*

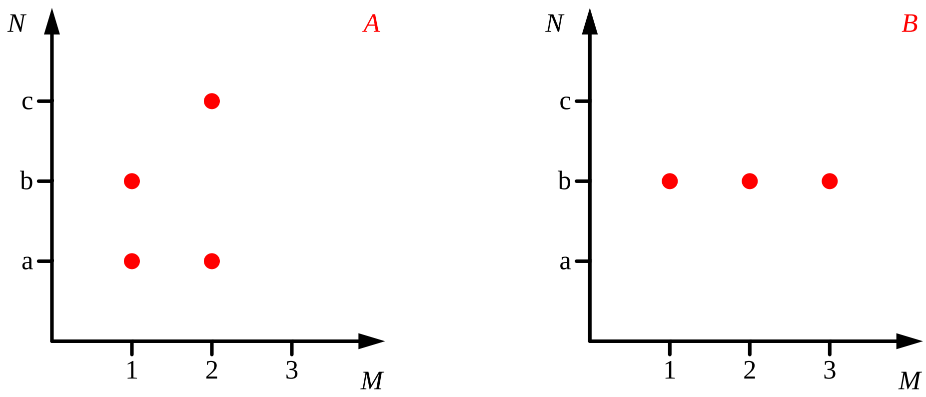


Abbildung 2.1: Relationen A und B

2.1.4 Definition
Sei $A \subseteq M \times N$ eine Relation. Dann definiert man

a) den Definitionsbereich *von A durch*

$$D_A = \{x \in M : \ (x, y) \in A \text{ für mindestens ein } y \in N\},$$

b) den Wertebereich *von A durch*

$$W_A = \{y \in N : \ (x, y) \in A \text{ für mindestens ein } x \in M\}.$$

c) Für $(x, y) \in A$ heißt x ein Urbild *von y und y ein* Bild *von x.*

2.1.5 Definition (Umkehrrelation)
Sei $A \subseteq M \times N$ eine Relation. Dann heißt

$$A^{-1} = \{(y, x) \in N \times M : \ (x, y) \in A\}$$

Umkehrrelation *zu A.*

2.1.6 Bemerkung
a) Häufig vertauscht man bei der Angabe der Umkehrrelation die Namen für x und y, d.h. man schreibt

$$A^{-1} = \{(x, y) \in N \times M : \ (y, x) \in A\}.$$

b) Für die Definitions- und Wertebereiche einer Relation und der zugehörigen Umkehrrelation gilt

$$D_{A^{-1}} = W_A \text{ und } W_{A^{-1}} = D_A.$$

2.1.7 Beispiel

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \leq y\}$$

(siehe Abbildung 2.2).

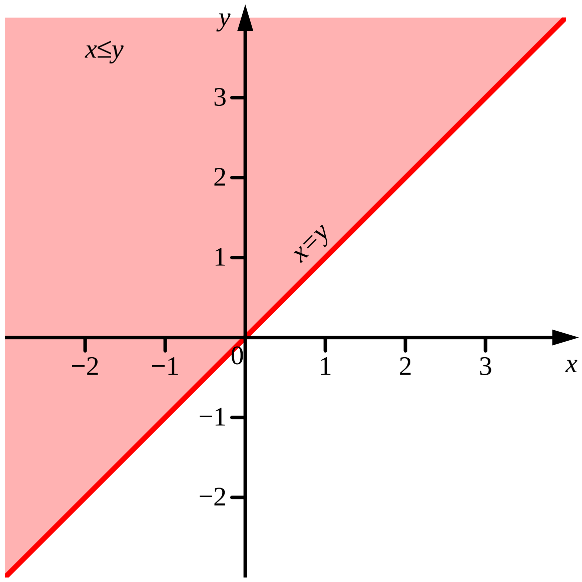


Abbildung 2.2: Relation $x \leq y$

2.1.8 Beispiel
Umkehrrelation:

$$A^{-1} = \{(y, x) \in \mathbb{R}^2 : \ x \leq y\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \leq x\}.$$

(siehe Abbildung 2.3).

2.1.9 Beispiel
Relation:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x = y^2\}$$

Elemente der Relation sind z. B. $(4, 2)$, $(4, -2)$, $(2, \sqrt{2})$, $(2, -\sqrt{2})$ *etc., siehe Abbildung 2.4.*

Es gilt $D_A =$ *und* $W_A =$.

2.1.10 Beispiel
Umkehrrelation zu $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x = y^2\}$ *(siehe Abbildung 2.5):*

$$A^{-1} = \{(y, x) : \ x = y^2\} = \{(x, y) : \ y = x^2\}$$

Es ist $D_{A^{-1}} = \mathbb{R}$ *und* $W_{A^{-1}} = [0, \infty)$.

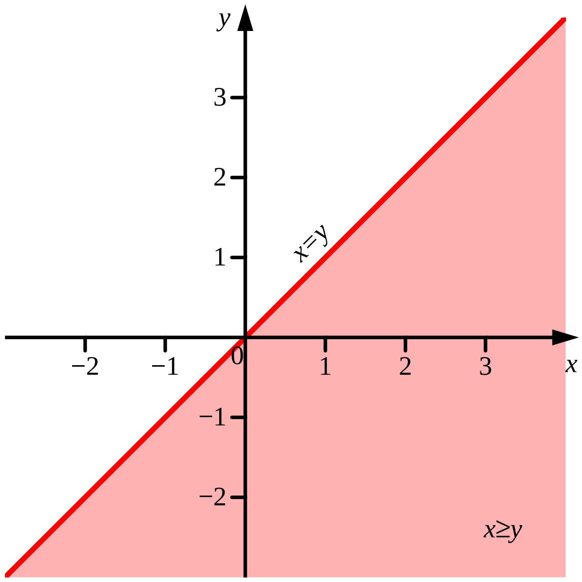


Abbildung 2.3: Relation $x \geq y$

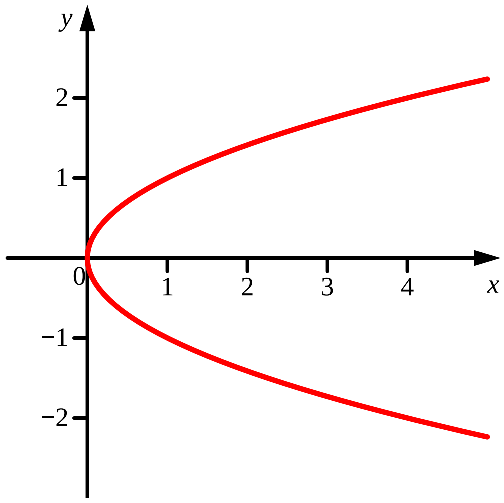


Abbildung 2.4: Relation $\{(x, y) : x = y^2\}$

2.2 Funktionen

2.2.1 Definition (Funktion)
Eine Relation $A \subseteq M \times N$ *heißt* Funktion von M nach N, *wenn die Zuordnung eindeutig ist, d. h. wenn aus*

$$(x, y_1), (x, y_2) \in A$$

folgt, dass

$$y_1 = y_2$$

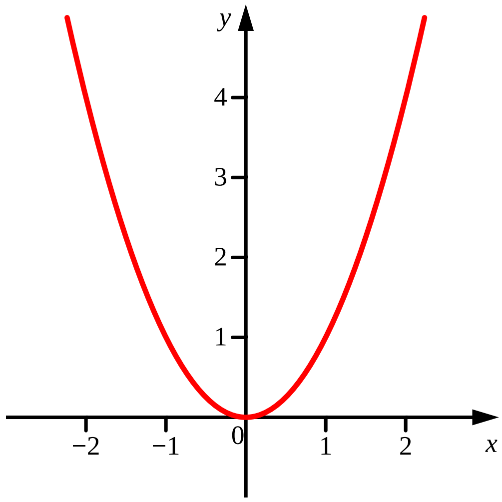


Abbildung 2.5: Umkehrrelation zu $\{(x,y) : x = y^2\}$

gilt.

2.2.2 Bemerkung
Funktionen zwischen Zahlenmengen:

$$M, N \subseteq \mathbb{R} \quad \textit{oder} \quad M, N \subseteq \mathbb{C}.$$

Schreibweise:

$$\begin{aligned} f: \quad & M \longrightarrow N \\ & x \longrightarrow y \quad \textit{oder} \quad y = f(x) \end{aligned}$$

wobei f Rechenvorschrift (d.h. Formel, Fallunterscheidung etc.) mit der Variablen x ist. *x heißt* unabhängige Variable *oder* Argument*,* *y heißt* abhängige Variable*.*

2.2.3 Bemerkung
Multivariate Funktionen:

$$M \subseteq \mathbb{R}^n \quad \textit{oder} \quad M \subseteq \mathbb{C}^n.$$

$$\begin{aligned} f: \quad & M \longrightarrow N \\ & (x_1, \ldots, x_n) \longrightarrow y \quad \textit{oder} \quad y = f(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

wobei f Rechenvorschrift mit mehreren Variablen ist.

2.2.4 Beispiel

$$\begin{aligned} f: \quad & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longrightarrow x^2 - x - 1 \end{aligned}$$

$D_f = \quad , W_f = \qquad\qquad ,$

2.2.5 Beispiel
Betragsfunktion, siehe Abbildung 2.6: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \textit{falls } x \in [0, \infty) \\ -x & \textit{falls } x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

$D_f = \mathbb{R}$, $W_f = [0, \infty)$.

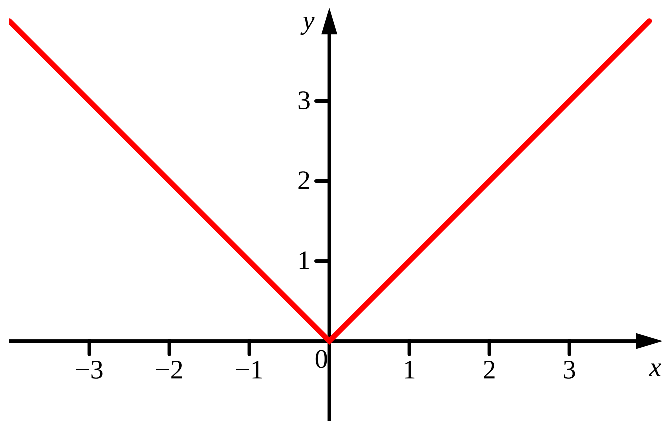


Abbildung 2.6: Betragsfunktion

2.2.6 Beispiel
Signumfunktion, siehe Abbildung 2.7: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \textit{falls } x < 0 \\ 0 & \textit{falls } x = 0 \\ 1 & \textit{falls } x > 0 \end{cases}$$

$D_f = \quad , W_f = \qquad\qquad .$

2.2.7 Definition (Gleichheit von Funktionen)
Zwei Funktionen f_1 und f_2 heißen gleich*,*
wenn sie gleichen Definitionsbereich haben,
d. h.

$$D_{f_1} = D_{f_2},$$

und

$$f_1(x) = f_2(x) \quad \textit{für alle } x \in D_{f_1}$$

gilt.

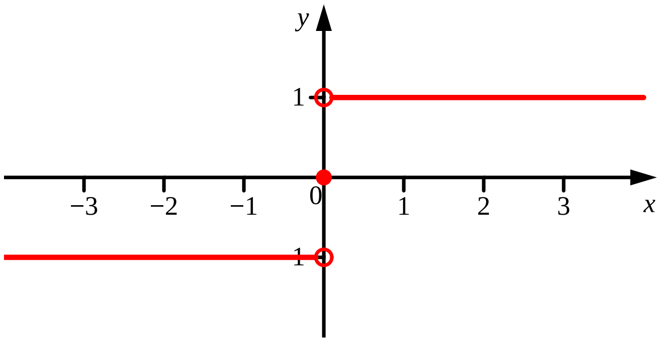


Abbildung 2.7: Signumfunktion

2.2.8 Beispiel
$f_1(x) = \sqrt{x^2}$ *und* $f_2(x) = |x|$ *sind auf* $\mathbb{R}$ *gleich.*

2.2.9 Definition
Eine Funktion f_2 *heißt* Erweiterung *einer Funktion* f_1, *wenn*

$$D_{f_1} \subseteq D_{f_2}$$

und

$$f_1(x) = f_2(x) \quad \text{für alle } x \in D_{f_1}$$

gilt. Man nennt f_1 *in diesem Falle* Einschränkung *von* f_2.

2.2.10 Bezeichnung
Mit $f\big|_M$ *bezeichnet man die Einschränkung einer Funktion auf die Menge* M, *falls* $M \subseteq D_f$ *ist.*

2.2.11 Beispiel
$\cos\big|_{[0,\pi]}$ *ist die Einschränkung der Cosinusfunktion auf das Intervall* $[0, \pi]$.

2.2.12 Beispiel

$$\begin{aligned} f_1 : \quad & \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q} \\ & x \longrightarrow x^2. \end{aligned}$$

Dann ist

$$f_2: \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow x^2 \end{array}$$

eine Erweiterung von f_1 *(einzig mögliche* stetige *Ergänzung).*

2.2.13 Beispiel

$$f_1 : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_1(x) = x.$$

Erweiterungen von f_1 *auf* $\mathbb{R}$ *(siehe Abbildung 2.8):*

a) $f_2(x) = |x|$

b) $f_3(x) = x$

c) $f_4(x) = \max\{0, x\} = \begin{cases} 0 & \textit{falls } x < 0 \\ x & \textit{falls } x \geq 0 \end{cases}$

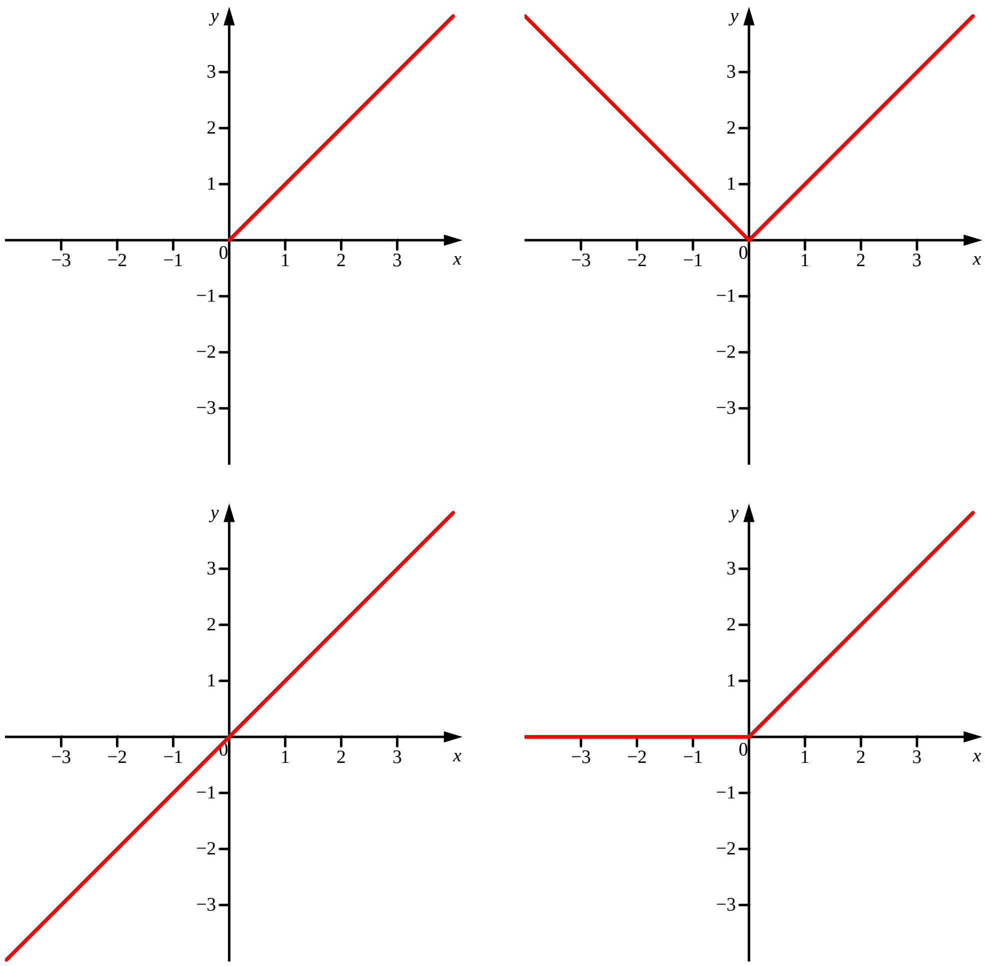


Abbildung 2.8: Mögliche Erweiterungen einer Funktion

2.3 Darstellung von Funktionen

Für die Darstellung von Funktionen gibt es verschiedene Möglichkeiten, die wichtigsten sind:

a) *Funktionstafel:* Tabelle von Wertepaaren

b) *Funktionsgleichung:* Rechenvorschrift, Formel in unabhängiger Variable

   (i) Explizite Darstellung $y = f(x)$,
   d. h. aufgelöst nach y.

   (ii) Implizite Darstellung: $F(x, y) = 0$,
   nicht immer nach y auflösbar.

   (iii) Parameterdarstellung: z. B. $x = x(t)$, $y = y(t)$,
   werden in Abhängigkeit von einem Parameter t angegeben. Der Wert von x und y hängt beispielsweise vom Zeitparameter t ab.

c) *Funktionsgraph:* Schaubild in der $\mathbb{R}^2$–Ebene

2.3.1 Beispiel

a) Messwerte

b) Funktionsgleichung:

(i)

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{falls } x \in (-\infty, 0) \\ x+1 & \text{falls } x \in [0, \infty) \end{cases}$$

(ii)

$$y + \sin y + \cos x - 1 = 0$$

Ist z.B. $x = 0$, *dann ist* $y + \sin y = 0$, *d.h.* $y = 0$.

(iii)

$$x = \cos t \text{ und } y = \sin t\,, \quad t \in [0, \pi]$$

Hier gilt $y = \sin t = \sqrt{\sin^2 t} = \sqrt{1 - \cos^2 t} = \sqrt{1 - x^2}$.

c) Funktionsgraph (siehe Abbildung 2.9).

2.4 Umkehrfunktionen

Eine Funktion $y = f(x)$ ordnet jedem Argument $x \in D_f$ genau einen Funktionswert $y \in W_f$ zu (Abbildung 2.10).

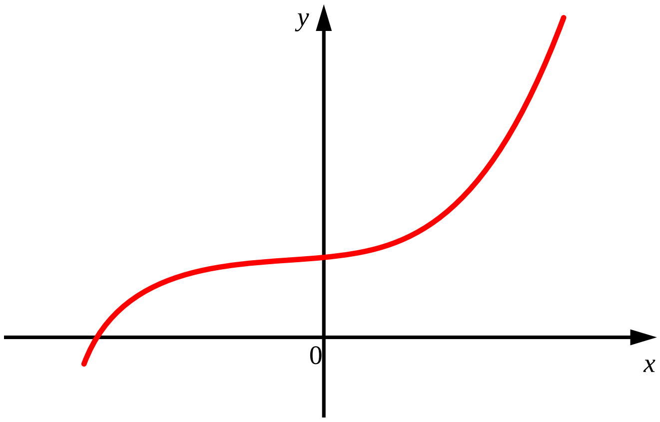


Abbildung 2.9: Funktionsgraph

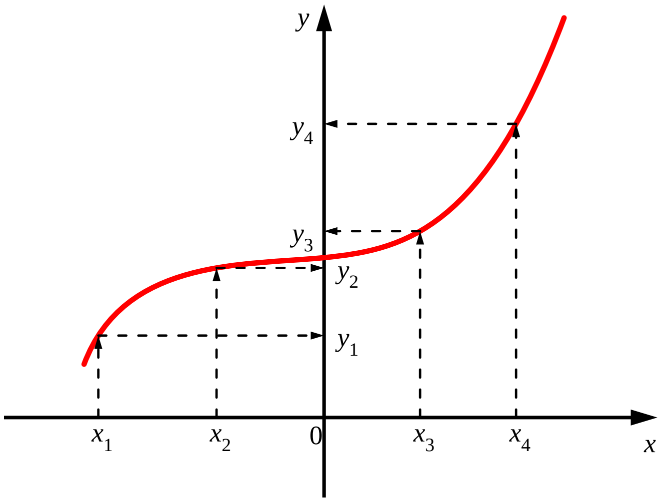


Abbildung 2.10: Zuordnungsvorschrift Funktion

2.4.1 Definition
Eine Funktion $f : D_f \longrightarrow W_f$ heißt umkehrbar *(oder* injektiv *) mit der* Umkehrfunktion

$$f^{-1} : W_f \longrightarrow D_f,$$

wenn aus

$$f(x_1) = f(x_2)$$

stets

$$x_1 = x_2$$

folgt, d. h. zu einem Funktionswert ist das Urbild eindeutig bestimmt.

2.4.2 Bemerkung
Äquivalent ist die Forderung, dass die Umkehrrelation f^{-1} eine Funktion ist (Abbildung

2.11).

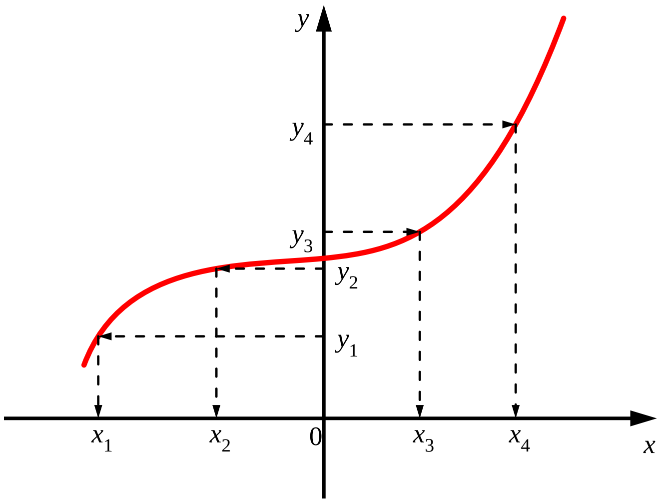


Abbildung 2.11: Zuordnungsvorschrift Umkehrfunktion

2.4.3 Beispiel
Umkehrfunktion zu

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 1$$

(Abbildung 2.12).

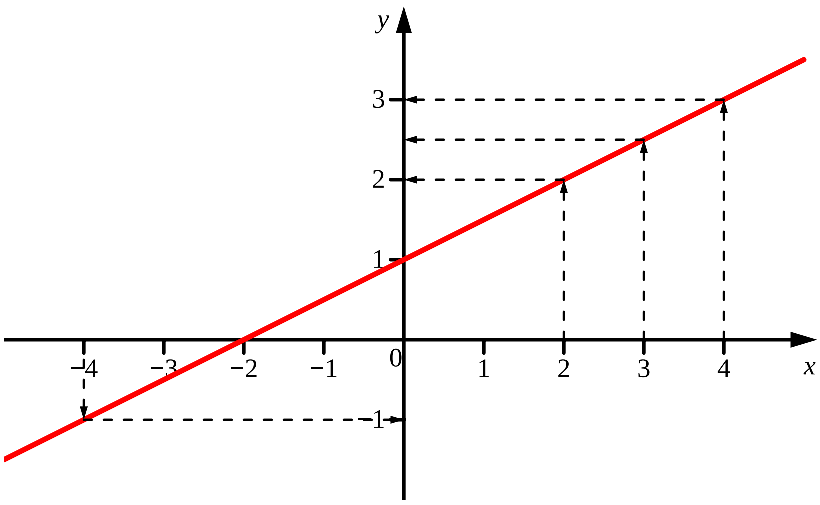


Abbildung 2.12: $x \longrightarrow y = \frac{1}{2}x + 1$

Es ist die Gleichung

$$y = \frac{1}{2}x + 1$$

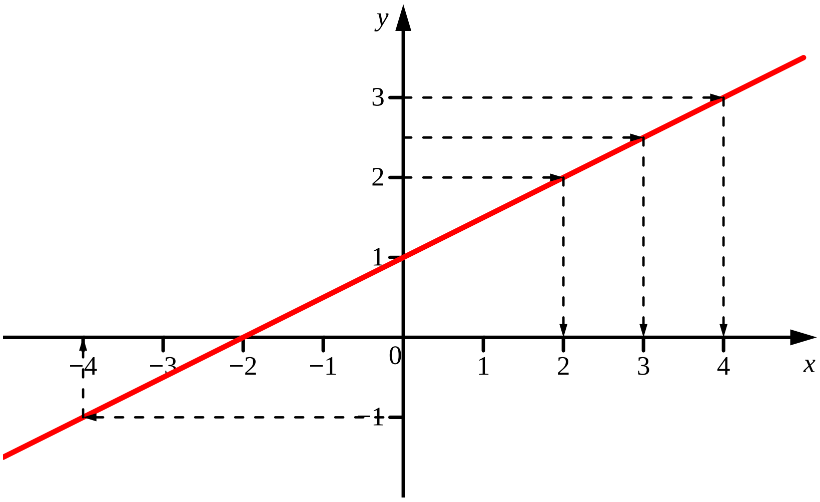


Abbildung 2.13: $y \longrightarrow x = 2y - 2$

nach x aufzulösen. Dies ergibt

Die Umkehrfunktion zu $f(x) = 2x + 1$ ist $f^{-1}(y) = 2y - 2$.

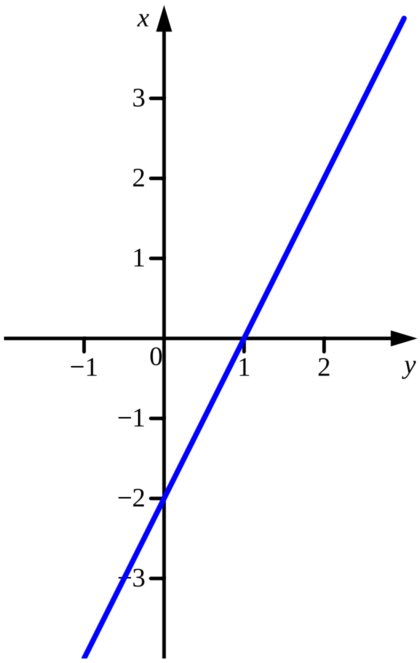


Abbildung 2.14: $y \longrightarrow x = 2y - 2$

2.4.1 Rechnerische Konstruktion von Umkehrfunktionen

Rechnerische Bestimmung von f^{-1}:

Auflösen von $y = f(x)$ nach der Variablen x:

$$x = f^{-1}(y).$$

Oft tauscht man nach dem Auflösen die Namen von x und y aus, damit die unabhängige Variable wieder x und die abhängige wieder y heißt, d.h. man schreibt $y = f^{-1}(x)$.

2.4.4 Beispiel

$$\begin{aligned} f: \quad & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & f(x) = y = \frac{1}{2}x + 1 \\ \Longrightarrow \quad & f^{-1}(y) = x = 2(y-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{-1}: \quad & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & f^{-1}(x) = 2x - 2. \end{aligned}$$

2.4.2 Grafische Konstruktion von Umkehrfunktionen

Den Graphen der Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$ zur Funktion $f(x)$ erhält man durch Spiegelung von $f(x)$ an der ersten Winkelhalbierenden (siehe Abbildung 2.15) bzw. durch Vertauschen der Rollen von x und y in der Wertetabelle.

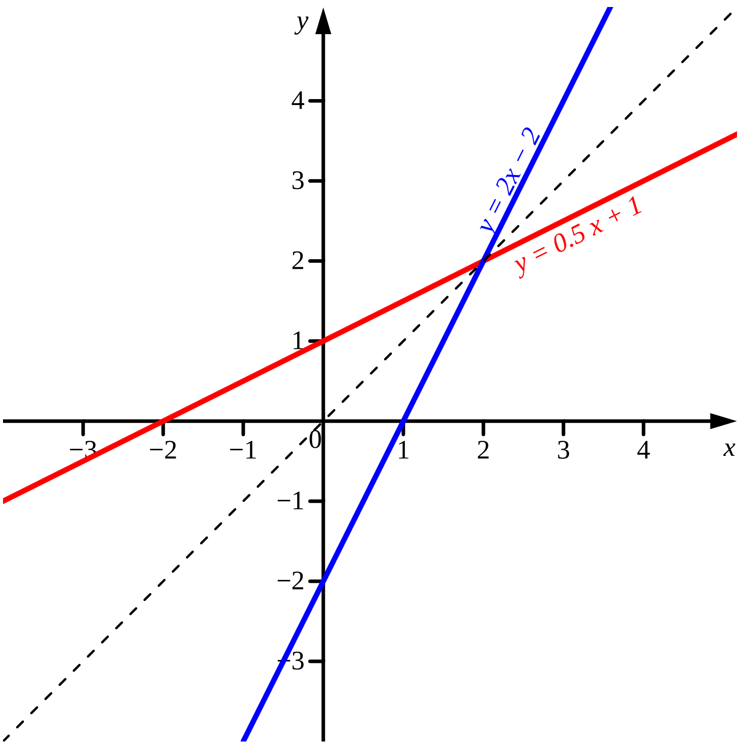


Abbildung 2.15: Funktion und Umkehrfunktion (Spiegelung an der Winkelhalbierenden)

2.4.5 Bemerkung
Ist $f : D_f \longrightarrow W_f$ *umkehrbar, dann ist auch* $f^{-1} : W_f \longrightarrow D_f$ *umkehrbar und es gilt*

$$(f^{-1})^{-1} = f$$

bzw.

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= x \text{ für alle } x \in D_f\,, \\ f(f^{-1}(y)) &= y \text{ für alle } y \in W_f = D_{f^{-1}}\,. \end{aligned}$$

2.5 Eigenschaften reeller Funktionen

Im folgenden sei $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit $D_f \subseteq \mathbb{R}$.

2.5.1 Definition (Beschränktheit nach oben)
f *heißt* nach oben beschränkt, *wenn ein* $C \in \mathbb{R}$ *existiert mit*

$$f(x) \le C \quad \text{für alle } x \in D_f.$$

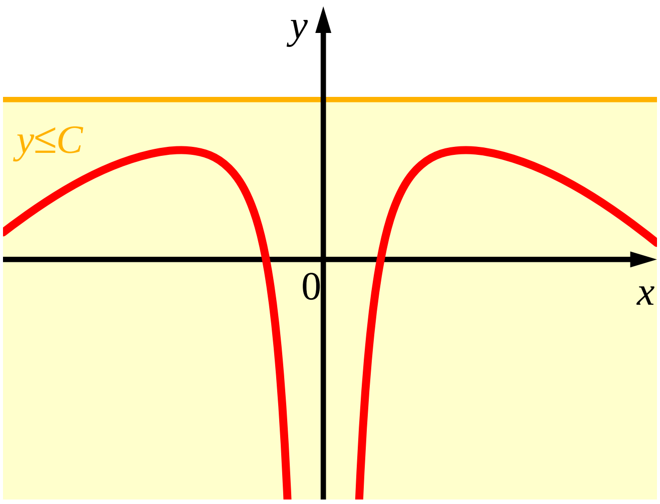


Abbildung 2.16: Nach oben beschränkte Funktion

2.5.2 Definition (Beschränktheit nach unten)
f *heißt* nach unten beschränkt, *wenn ein* $c \in \mathbb{R}$ *existiert mit*

$$f(x) \ge c \quad \text{für alle } x \in D_f.$$

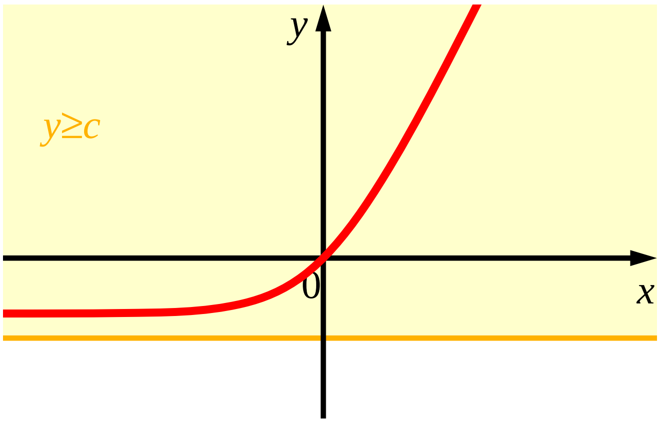


Abbildung 2.17: Nach unten beschränkte Funktion

2.5.3 Definition (Beschränktheit beidseitig)
f heißt beschränkt*, wenn f nach unten und oben beschränkt ist.*

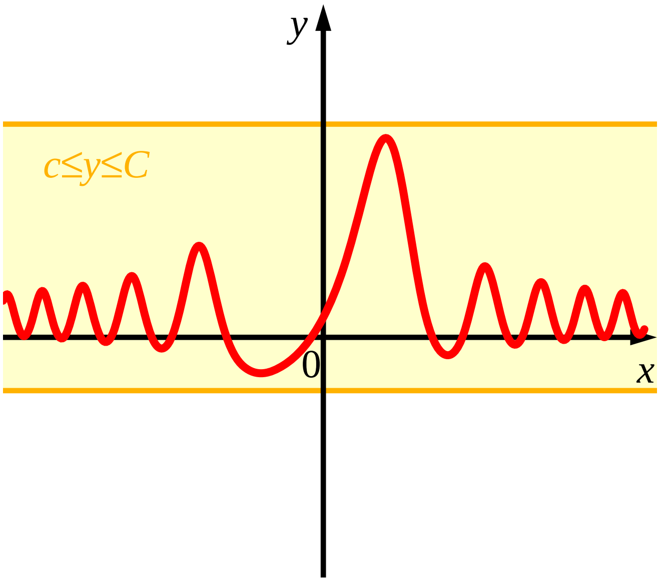


Abbildung 2.18: Beidseitig beschränkte Funktion

2.5.4 Bemerkung
f beschränkt $\iff$ Es gibt ein $c > 0$ mit

$$|f(x)| \leq c \quad \textit{für alle } x \in D_f.$$

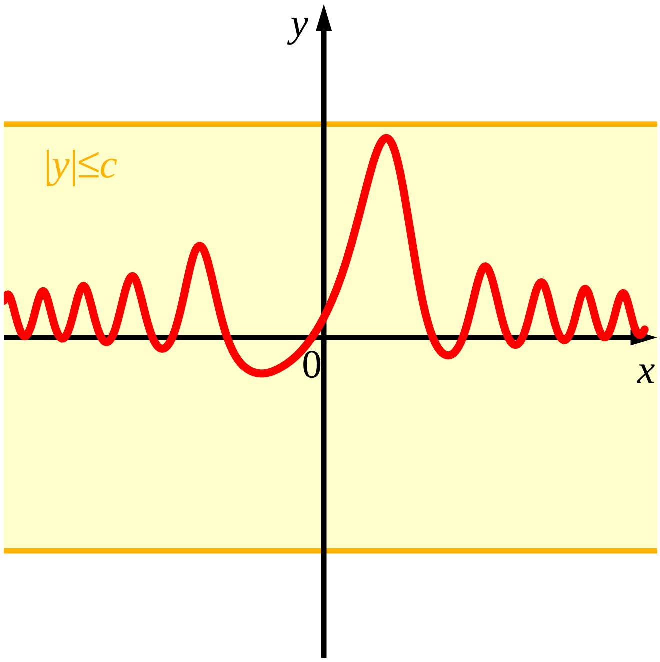


Abbildung 2.19: Beschränkte Funktion, betragsmäßige Schranke

2.5.5 Definition (Monotonie)

a) f heißt monoton wachsend*,*
wenn aus $x_1, x_2 \in D_f$ mit $x_1 < x_2$ folgt:

$$f(x_1) \leq f(x_2).$$

b) f heißt streng monoton wachsend*,*
wenn aus $x_1, x_2 \in D_f$ mit $x_1 < x_2$ folgt:

$$f(x_1) < f(x_2).$$

2.5.6 Definition (Monotonie)

a) f heißt monoton fallend*,*
wenn aus $x_1, x_2 \in D_f$ mit $x_1 < x_2$ folgt:

$$f(x_1) \geq f(x_2).$$

b) f heißt streng monoton fallend*,*
wenn aus $x_1, x_2 \in D_f$ mit $x_1 < x_2$ folgt:

$$f(x_1) > f(x_2).$$

2.5.7 Satz
Wenn f streng monoton ist, dann ist f umkehrbar.

2.5.8 Beispiel
$f(x) = x^2$ *ist streng monoton fallend auf* $(-\infty, 0]$
und streng monoton wachsend auf $[0, \infty)$.

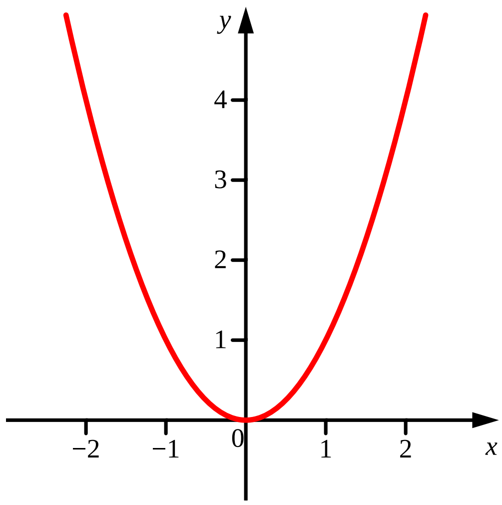


Abbildung 2.20: Monotonie von $f(x) = x^2$

2.5.9 Beispiel

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - x \\ &= x(x^2 - 1) \\ &= x(x+1)(x-1) \end{aligned}$$

ist streng monoton wachsend auf $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}]$ *und* $[\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty)$.

Die Funktion ist streng monoton fallend auf $[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}]$ *(Abbildung 2.21).*

2.5.10 Beispiel
$f(x) = \dfrac{1}{x}$ *ist streng monoton fallend auf* $(-\infty, 0)$ *und auf* $(0, \infty)$ *(Abbildung 2.22)*

f *ist nicht streng monoton auf* D_f *(Sprung von* $-\infty$ *nach* $+\infty$ *bei* $x = 0$*).*

f *ist invertierbar mit* $f^{-1} = f$.

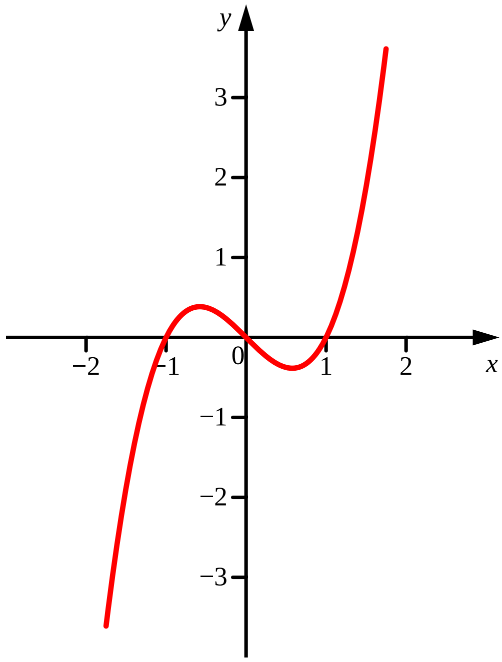


Abbildung 2.21: Monotonie von $f(x) = x^3 - x$

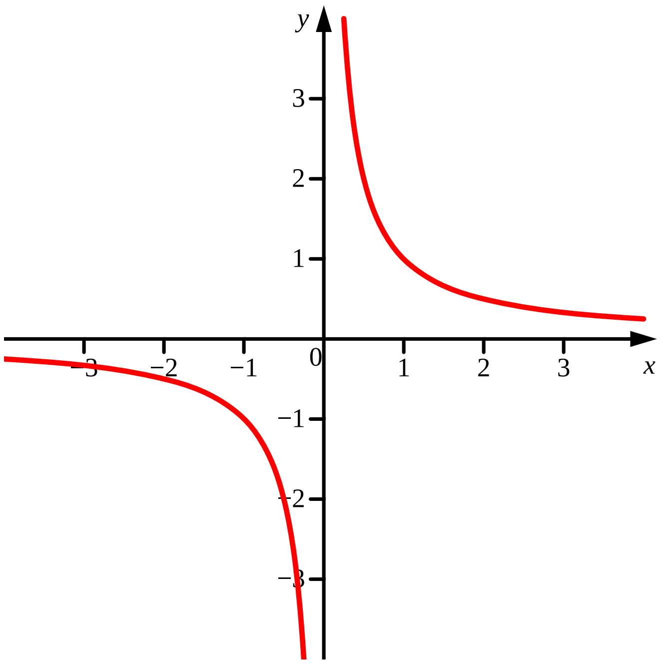


Abbildung 2.22: Zur Monotonie von $f(x) = \dfrac{1}{x}$

2.5.11 Beispiel
$f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ *ist monoton wachsend auf* $\mathbb{R}$ *(Abbildung 2.7).*

2.5.12 Definition
Für $x \in \mathbb{R}$ ist

$$\lfloor x \rfloor := \max \{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$$

der ganzzahlige Teil *von x (in Programmiersprachen:* `floor(x)`*).*

2.5.13 Beispiel

$$\begin{aligned}
\lfloor \pi \rfloor &= \quad , \\
\lfloor 11.1 \rfloor &= \quad , \\
\lfloor e \rfloor &= \quad , \\
\lfloor 4 \rfloor &= \quad , \\
\lfloor -3.3 \rfloor &= \quad , \\
\lfloor \sqrt{12} \rfloor &= \quad , \\
\lfloor -\sqrt{12} \rfloor &= \quad .
\end{aligned}$$

2.5.14 Beispiel
$f(x) = \lfloor x \rfloor$ ist monoton wachsend auf $\mathbb{R}$.
Es ist z. B.

für $-3 \leq x < -2$: $\lfloor x \rfloor = -3$
für $-2 \leq x < -1$: $\lfloor x \rfloor = -2$
für $-1 \leq x < 0$: $\lfloor x \rfloor = -1$
für $0 \leq x < 1$: $\lfloor x \rfloor = 0$
für $1 \leq x < 2$: $\lfloor x \rfloor = 1$
für $2 \leq x < 3$: $\lfloor x \rfloor = 2$

usw. (Abbildung 2.23).

2.5.15 Definition (Symmetrien)
Es sei $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit zu $x = 0$ symmetrischem Definitionsbereich, d. h.

$$x \in D_f \implies -x \in D_f$$

(Kurzschreibweise: $D_f = -D_f$).

a) f heißt gerade*, wenn der Graph symmetrisch zur y-Achse ist, d. h. wenn gilt:*

$$f(-x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in D_f.$$

b) f heißt ungerade*, wenn der Graph symmetrisch zum Ursprung ist, d. h. wenn gilt:*

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{für alle } x \in D_f.$$

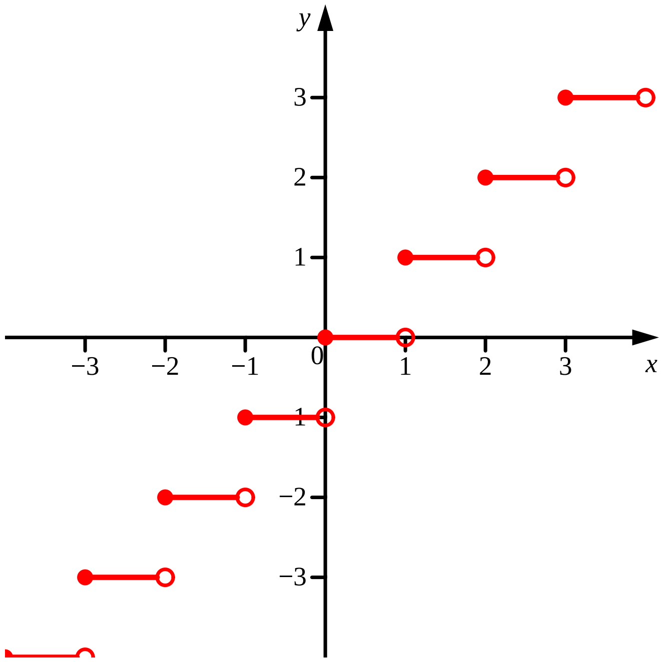


Abbildung 2.23: $f(x) = \lfloor x \rfloor$

2.5.16 Bemerkung

Ist f ungerade und $0 \in D_f$, so gilt $f(0) = 0$.

Beweis

Da $f(-x) = -f(x)$, gilt für $x = 0$ insbesondere

$$f(-0) = -f(0) \iff 2f(0) = 0 \iff f(0) = 0.$$

2.5.17 Beispiel

Gerade, ungerade oder keine der Symmetrien?

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = x$

c) $f(x) = x^3$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x^5}$

e) $f(x) = \sqrt{x}$

f) $f(x) = x^2 + x$

g) $f(x) = |x|$

h) $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$

2.5.18 Definition
Es sei $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $D_f = -D_f$.

Seien $f_0, f_1 : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_0(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)),$$

$$f_1(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)).$$

f_0 heißt gerader*, f_1* ungerader Anteil *von f.*

2.5.19 Satz
Sei $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$, $D_f = -D_f$ und

$$f_0(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)),$$

$$f_1(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)).$$

Dann ist

$$f(x) = f_0(x) + f_1(x).$$

Ferner ist f_0 gerade, f_1 ungerade, und die Zerlegung ist eindeutig.

2.5.20 Beispiel
Zerlege in geraden und ungeraden Anteil:

a) $f(x) = x^2 - x + 1$

b) $g(x) = e^x$

(siehe Abbildung 2.42).

2.5.21 Definition (Periodizität)
$f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt periodisch *mit der Periode $\lambda \in \mathbb{R}$ (kurz λ-periodisch), wenn gilt*

a) $x \in D_f \implies x + \lambda \in D_f$

b) $f(x+\lambda) = f(x)$ *für alle* $x \in D_f$

2.5.22 Beispiel

a) $\sin x$ *und* $\cos x$ *sind* 2π*-periodisch.*

b) $\tan x$ *und* $\cot x$ *sind* π*-periodisch.*

c) $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ *ist* 1*-periodisch (Abbildung 2.24)*

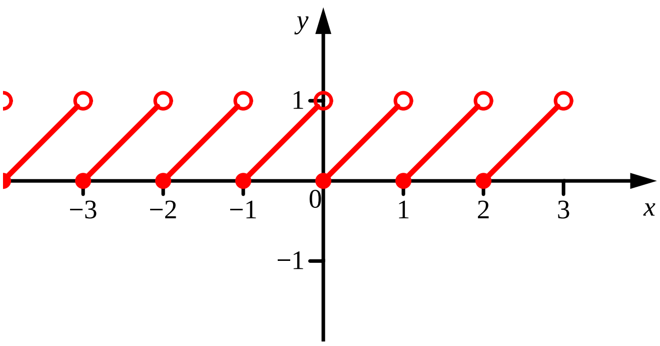


Abbildung 2.24: Funktion $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$

2.5.23 Definition (Nullstelle)
Sei $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ Funktion.
$x \in D_f$ *heißt* Nullstelle *von f, wenn* $f(x) = 0$.

2.6 Mathematische Grundfunktionen

2.6.1 Reelle Polynome

2.6.1 Definition (Polynom)
Ein reelles Polynom $p : D_p \longrightarrow \mathbb{R}$ *ist eine Funktion der Form*

$$\begin{aligned} p(x) &= a_n\,x^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + \cdots + a_1\,x + a_0 \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \end{aligned}$$

mit $n \in \mathbb{N}_0,\ a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R},\ a_n \neq 0$.

n *heißt* Grad *des Polynoms,*
die Zahlen a_k *heißen* Koeffizienten.
a_n *bezeichnet man als* Leitkoeffizienten.

2.6.2 Beispiel

a) $f(x) = c$*: konstante Funktionen, Polynome vom Grad* 0.

b) $f(x) = ax + b$*: lineare Funtionen, Polynome vom Grad* 1.

c) Quadratische Funktionen $f(x) = ax^2 + bx + c$*:*
Polynome vom Grade 2.

d) $f(x) = 3x^3 - 2x^2 - 4x + 1$ *ist ein Polynom vom Grad 3.*

e) $f(x) = 0$ *wird als Polynom vom Grad* -1 *gewertet:*
$f(x) = \sum_{k=0}^{-1} a_k x^k$ *(leere Summe).*

2.6.1.1 Auswertung von Polynomen

2.6.3 Beispiel
$P(x) = 2x^4 + x^3 - 9x^2 + 9x + 7$ *soll an der Stelle* $x_0 = 2$ *ausgewertet werden.*

Lösung
Wir klammern auf folgende Weise schrittweise die Variable x aus Teilausdrücken aus:

$$\begin{aligned} P(x) &= x\,(2x^3 + x^2 - 9x + 9) + 7 \\ &= x\,\big(x\,(2x^2 + x - 9) + 9\big) + 7 \\ &= x\,(x\,(x\,(2x + 1) - 9) + 9) + 7 \end{aligned}$$

Der Ausdruck wird durch abwechselnde Multiplikation mit x_0 und Addition eines Koeffizienten des Polynoms ausgewertet, wobei die Koeffizienten der Reihe nach die der höchsten bis niedrigsten Potenzen von x sind:

$$\begin{aligned} p_0 &= 2, \\ p_1 &= x_0\, p_0 + 1, \\ p_2 &= x_0\, p_1 - 9, \\ p_3 &= x_0\, p_2 + 9, \\ P(x_0) = p_4 &= x_0\, p_3 + 7. \end{aligned}$$

Dies wird in Form des folgenden Rechenschemas notiert *(Hornerschema):*

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & 1 & -9 & 9 & 7 \\ x_0 = 2 & & & & & \\ \hline & 2 & & & & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r|rrrrr} & 2 & 1 & -9 & 9 & 7 \\ x_0 = 2 & & 4 & & & \\ \hline & 2 & & & & \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{r|rrrrr} & 2 & 1 & -9 & 9 & 7 \\ x_0 = 2 & & 4 & & & \\ \hline & 2 & 5 & & & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r|rrrrr} & 2 & 1 & -9 & 9 & 7 \\ x_0 = 2 & & 4 & 10 & & \\ \hline & 2 & 5 & & & \end{array}$$

$$\longrightarrow \quad \ldots \quad \longrightarrow \begin{array}{r|rrrrr} & 2 & 1 & -9 & 9 & 7 \\ x_0 = 2 & & 4 & 10 & 2 & 22 \\ \hline & 2 & 5 & 1 & 11 & 29 \end{array}$$

2.6.4 Beispiel
$P(x) = 2x^3 + 4x^2 - 10x - 12$ soll an den Stellen
$x_0 = -1,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = -2$ ausgewertet werden.

Lösung

2.6.5 Satz
Ein Polynom $P(x)$ vom Grad n lässt sich mit dem Hornerschema an jeder Stelle x_0 durch n Multiplikationen mit x_0 und n Additionen berechnen.

2.6.1.2 Nullstellen von Polynomen, Faktorisierung

2.6.6 Satz (Nullstellen)
Sei $P(x)$ ein Polynom vom Grad n.

a) Falls $P(x_0) = 0$, so ist

$$P(x) = (x - x_0)Q(x),$$

wobei $Q(x)$ ein Polynom vom Grad $n - 1$ ist.

$Q(x)$ ergibt sich durch Polynomdivision:

$$Q(x) = \frac{P(x)}{x - x_0}\,.$$

b) $P(x)$ hat höchstens n Nullstellen in $\mathbb{R}$.

2.6.7 Beispiel
Sei $P(x) = 2x^3 + 4x^2 - 10x - 12$.
Es gilt: $P(-1) = 0$. — Faktorisiere $P(x)$.

2.6.8 Satz
Sei $P(x)$ ein Polynom vom Grad n mit $P(x_0) = 0$,

$$P(x) = Q(x)(x - x_0).$$

Dann stehen die Koeffizienten von $Q(x)$ in der Ergebniszeile des Hornerschemas für $P(x_0)$.

2.6.9 Beispiel (Polynomdivision mit Hornerschema)
Sei

$$P(x) = x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 27x - 18.$$

Es gilt: $P(2) = 0$.
Faktorisiere $P(x)$.

2.6.10 Satz (Faktorisierung)
Sei $P(x)$ ein reelles Polynom vom Grad n. Dann hat $P(x)$ stets eine eindeutige Produktdarstellung aus linearen Faktoren

$$(x - x_l)$$

und irreduziblen quadratischen Faktoren

$$(x^2 + p_k x + q_k)$$

mit $p_k^2 - 4q_k < 0, \qquad p_k, q_k \in \mathbb{R}$.

Genauer ist

$$\begin{aligned} P(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_m) \cdot \\ \cdot (x^2 + p_1 x + q_1)(x^2 + p_2 x + q_2) \cdots (x^2 + p_r x + q_r) \end{aligned}$$

mit $m + 2r = n$.

2.6.11 Bemerkung

a) *Für Polynome vom Grad 2 liefert die quadratische Formel die Faktorisierung.*

b) *Für Polynome vom Grad 3 und 4 existieren Formeln, die allerdings kompliziert sind.*

c) *Für Polynome vom Grad 5 und höher gibt es keine allgemeinen Formeln. (Näherungsrechnung erforderlich)*

2.6.12 Satz
Sei

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \qquad \text{mit} \quad a_k \in \mathbb{Z}.$$

a) *Ist $P(x_0) = 0$ mit $x_0 \in \mathbb{Z}$, dann teilt x_0 die Konstante a_0, d. h. wenn es ganzzahlige Nullstellen gibt, so sind diese Teiler von a_0.*

b) *Allgemeiner gilt: Ist*

$$P\left(\frac{a}{b}\right) = 0 \qquad \text{mit} \quad \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}, \;\; a \in \mathbb{Z}, \;\; b \in \mathbb{N}$$

(in gekürzter Form), so ist a Teiler von a_0 und b Teiler von a_n.

2.6.13 Beispiel
Faktorisiere

$$P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + 13x - 6.$$

Lösung

2.6.14 Beispiel
Faktorisiere

$$P(x) = 3x^3 - x^2 + 6x - 2$$

Lösung

2.6.15 Satz (Polynomungleichungen)

a) *Zwischen benachbarten Nullstellen ändert ein Polynom sein Vorzeichen nicht.*

b) *Als Lösungsmengen von $P(x) \geq 0$ bzw. $P(x) \leq 0$ erhält man* abgeschlossene *Intervalle, die durch die Nullstellen von $P(x)$ begrenzt sind.*

c) *Als Lösungsmengen von $P(x) > 0$ bzw. $P(x) < 0$ erhält man* offene *Intervalle, die durch die Nullstellen von $P(x)$ begrenzt sind.*

2.6.16 Beispiel

a) *Löse die Ungleichung* $^4 - x^3 - 7x^2 + 13x - 6 \geq 0.$

b) Finde die Lösungsmenge von $3x^3 - x^2 + 6x - 2 > 0$.

2.6.17 Satz (Geometrische Summe)
Sei $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. *Dann gilt:*

$$\sum_{k=m}^{n} x^k = \frac{x^{n+1} - x^m}{x - 1} = \frac{x^m - x^{n+1}}{1 - x}. \tag{2.1}$$

Für $x = 1$ *gilt* $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} 1^k = n - m + 1$.

Beweis

Setze $S(x) = \displaystyle\sum_{k=m}^{n} x^k$. Es ist

$$\begin{aligned} x\,S(x) &= x \sum_{k=m}^{n} x^k = \sum_{k=m}^{n} x^{k+1} = \sum_{k=m+1}^{n+1} x^k \\ \Longrightarrow x\,S(x) - S(x) &= \sum_{k=m+1}^{n+1} x^k - \sum_{k=m}^{n} x^k \\ &= x^{n+1} + \sum_{k=m+1}^{n} x^k - \sum_{k=m+1}^{n} x^k - x^m \\ &= x^{n+1} - x^m. \end{aligned}$$

2.6.18 Beispiel

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{10}}$$

2.6.19 Beispiel (Faktorisierung von $a^3 - b^3$)
Die Formel für die geometrische Summe liefert für $n = 2$

$$1 + x + x^2 = \frac{x^3 - 1}{x - 1} \iff (1 + x + x^2)(x - 1) = x^3 - 1.$$

Setzt man $x = \dfrac{a}{b}$ ein, so erhält man daraus

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{a}{b} + \left(\frac{a}{b}\right)^2\right)\left(\frac{a}{b} - 1\right) = \left(\frac{a}{b}\right)^3 - 1 \quad \Big| \cdot b^3 \\ \iff \quad & (b^2 + ab + a^2)(a - b) = a^3 - b^3 \\ \iff \quad & a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2). \end{aligned}$$

2.6.2 Rationale Funktionen

2.6.20 Definition (Rationale Funktionen)
Seien

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \quad Q(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$$

Polynome vom Grad n bzw. m, wobei $Q(x) \neq 0$.
Dann heißt

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

rationale Funktion *mit dem Definitionsbereich*

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{x : Q(x) = 0\}.$$

2.6.21 Bemerkung

a) *Üblicherweise bringt man rationale Funktionen auf eine gekürzte Form, indem man die Faktorisierungen von $P(x)$ und $Q(x)$ bestimmt und gemeinsame Faktoren kürzt.*

b) *Liegt die rationale Funktion $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ in gekürzter Form vor, dann sind die Nullstellen von f die Nullstellen von P und die Polstellen von f die Nullstellen von Q.*

2.6.22 Beispiel

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

$$\begin{aligned} \text{Zähler:} \quad & x^3 - 3x - 2 = (x+1)^2(x-2) \\ \text{Nenner:} \quad & x^3 - x^2 - x + 1 = (x+1)(x-1)^2 \\ \Longrightarrow \quad & D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}. \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{(x+1)^2(x-2)}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)^2}$$

Polstelle von f: $x = 1$.
Nullstelle von f: $x = 2$.
Bei $x = -1$ ist f undefiniert (gemeinsame Zähler- und Nennernullstelle), siehe Abbildung 2.25

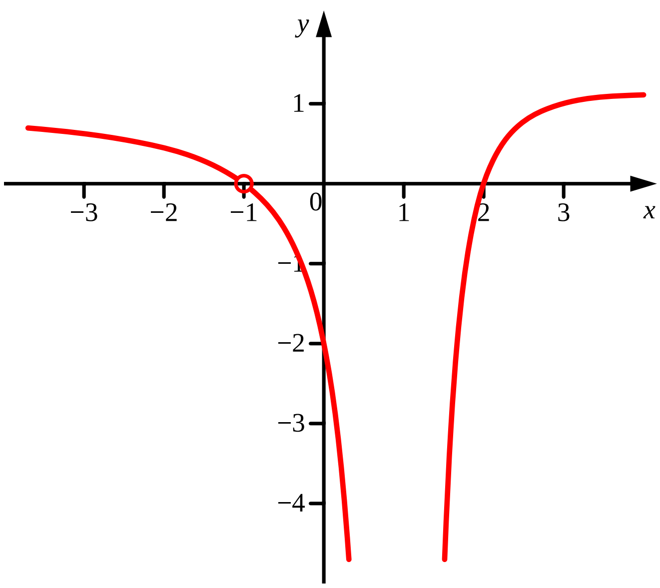


Abbildung 2.25: $f(x) = \frac{(x+1)^2(x-2)}{(x+1)(x-1)^2}$

2.6.23 Satz
Falls $n \leq m$, so läßt sich $f(x)$ schreiben als

$$f(x) = N(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

wobei $N(x)$ ein Polynom vom Grad $n - m$ und $R(x)$ ein Polynom vom Höchstgrad $m - 1$ bezeichnet.

2.6.24 Bemerkung

a) Die Polynome $N(x)$ und $R(x)$ erhält man durch Polynomdivision.

b) Für große Werte von $|x|$ ist $f(x) \approx N(x)$,
$N(x)$ heißt Asymptote.

2.6.25 Beispiel

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x + 3}{x^2 - x - 2} = x + 1 + \frac{x + 5}{(x-2)(x+1)}.$$

siehe Abbildung 2.26.

2.6.3 Potenzfunktionen

2.6.26 Definition (Potenzen, Wurzeln)
Sei $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Dann definiert man

a) $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}, \quad a^1 = a$

b) $a \neq 0$: $\quad a^0 = 1$

c) $a \neq 0$: $\quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}}$

d) $a \geq 0$: $\quad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} = b$ *wobei* $b^n = a$, $b \geq 0$

e) $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $a \geq 0$ *(bzw. $a > 0$ für $m \leq 0$):*

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$$

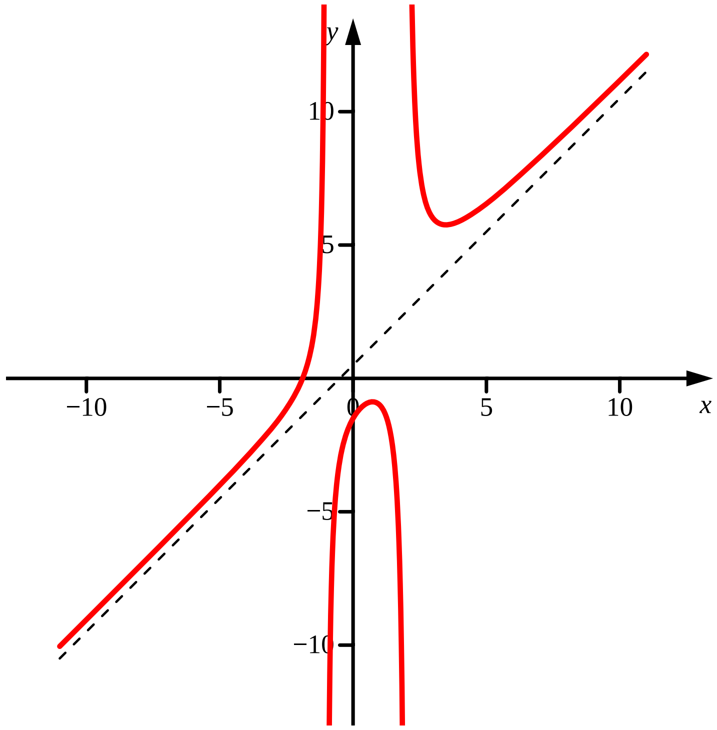


Abbildung 2.26: $f(x) = x + 1 + \frac{x+5}{(x-2)(x+1)}$

2.6.27 Bezeichnung

a) *Bei dem Potenzausdruck* a^b *heißt* a *die* Basis *und* b *der* Exponent.

b) *Beim Wurzelausdruck* $\sqrt[b]{a}$ *heißt* a Radikand *und* b Index *oder* Exponent *der Wurzel.*

c) *Man schreibtabkürzend* $\sqrt{a}$ *statt* $\sqrt[2]{a}$ *für* Quadratwurzeln.

2.6.28 Bemerkung (Definitionsbereiche bei Potenzen)

Für Potenzen a^b *ist der Definitionsbereich* D_a *bezüglich der Variablen* a *abhängig vom Exponenten* b*:*

a) $b \in \mathbb{N}, \quad a \in \mathbb{R}$*:*
wiederholte Faktoren, möglich für beliebige reelle Zahlen,
z. B. $(-\pi)^3, 0^{10}$.

b) $b \in \mathbb{Z},\ b \leq 0, \quad a \in \mathbb{R}, a \neq 0$*:*
Kehrwerte, Faktor muss $\neq 0$ *sein.* 0^0 *ist undefiniert,*
z. B. $(-0.25)^{-2}$.

c) $b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z},\ b > 0, \quad a \in \mathbb{R}, a \geq 0$*:*
Wurzeln nur aus nicht negativen Zahlen,
z. B. $0.125^{5/3}$.

d) $b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z},\ b \leq 0, \quad a \in \mathbb{R}, a > 0$:
Wurzeln kombiniert mit Kehrwert: nur aus positven Zahlen (nicht aus Null), z. B. $8^{-2/3}$

2.6.29 Satz (Rechenregeln Potenzen und Wurzeln)
Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ *so gewählt, dass die auftretenden Potenzen und Wurzeln definiert sind.*

a) $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$

b) $a^{b-c} = \dfrac{a^b}{a^c}$

c) $a^c b^c = (ab)^c$

d) $(a^b)^c = a^{bc}$

e) $a^{\frac{b}{c}} = \sqrt[c]{a^b} = (\sqrt[c]{a})^b$

f) $\sqrt[c]{a}\sqrt[c]{b} = \sqrt[c]{ab}$

g) $\sqrt[c]{\sqrt[b]{a}} = \sqrt[bc]{a}$

h) $\sqrt{a^2} = |a|$

2.6.30 Bemerkung
Aus folgendem Grund sind negative Basen bei gebrochenen Exponenten bzw. Wurzeln verboten!

$$(-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = -2$$

aber auch:

$$(-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \left((-8)^2\right)^{\frac{1}{6}} = 2$$

Man erhält also widersprüchliche Vorzeichen!

2.6.31 Definition (Potenzfunktionen)
Die Funktion

$$f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^{\frac{m}{n}}$$

mit $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ *heißt* Potenzfunktion, *ebenso*

$$f(x) = (\sqrt[n]{x})^m \quad \text{oder} \quad f(x) = \sqrt[n]{x^m}.$$

Der maximale Definitionsbereich bestimmt sich nach Bem. 2.6.28

2.6.32 Beispiel

a) $m \in \mathbb{N},\ n = 1$:

$$f(x) = x,\ f(x) = x^2,\ f(x) = x^3,\ f(x) = x^4, \ldots$$

sind spezielle Polynome.
$D_f = \mathbb{R}$

b) $m \in \mathbb{Z},\ m < 0,\ n = 1$:

$$f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x},\ f(x) = x^{-2} = \frac{1}{x^2},\ f(x) = x^{-3} = \frac{1}{x^3}, \ldots$$

$D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$

c) $m = 1,\ n \in \mathbb{N}$:

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x},\ f(x) = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x},\ f(x) = x^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{x},\ \ldots$$

$D_f = [0, \infty)$.

d) allgemein:

$$f(x) = x^{\frac{3}{2}} = x\sqrt{x},\ f(x) = x^{\frac{2}{3}} = \frac{x}{\sqrt[3]{x}},\ f(x) = x^{-\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt[3]{x}}{x}, \ldots$$

2.6.33 Bemerkung

a) Es gilt $f(1) = 1$ *für alle Potenzfunktionen.*

b) Es ist $f(0) = 0$ *oder* $f(0)$ *ist nicht definiert.*

2.6.3.1 Schema der Funktionsgraphen von Potenzfunktionen

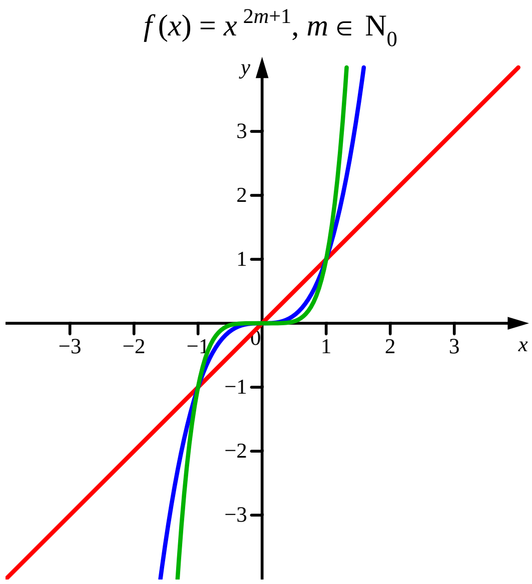
Siehe Abb. 2.27, **??** . Monotonie, Umkehrbarkeit, Definitionsbereich können diesem Schema entnommen werden.

2.6.34 Satz (Umkehrbarkeit)
Sei

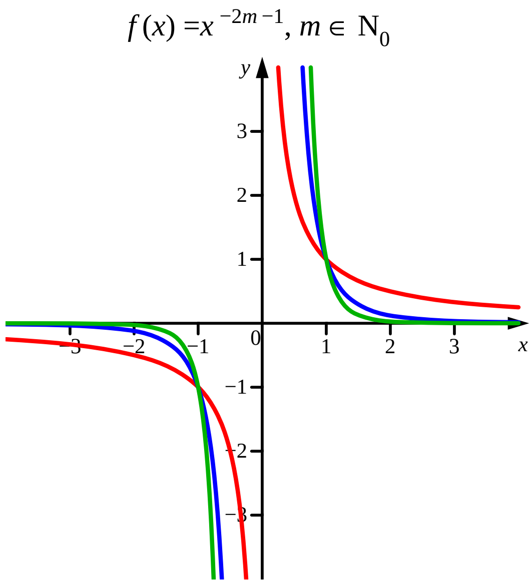
$$\begin{aligned} f :& D_f \longrightarrow \mathbb{R} \\ & f(x) = x^a \end{aligned}$$

eine Potenzfunktion. Falls $f(x)$ *nicht auf dem maximal möglichen Definitionsbereich umkehrbar ist, schränken wir den Definitionsbereich auf* $D_f = [0, \infty)$ *bzw.* $D_f = (0, \infty)$ *ein. Dann ist*

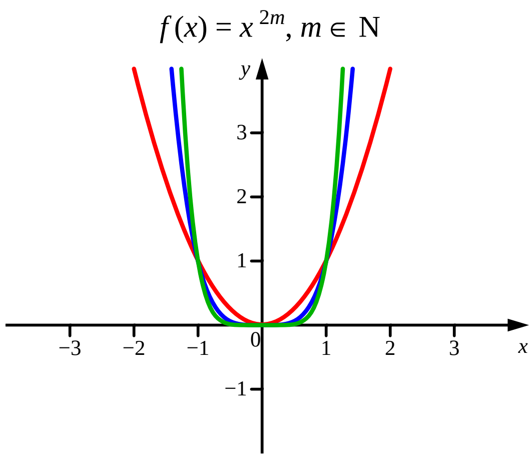
$$f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{a}} \text{ Umkehrfunktion zu } f(x) = x^a.$$



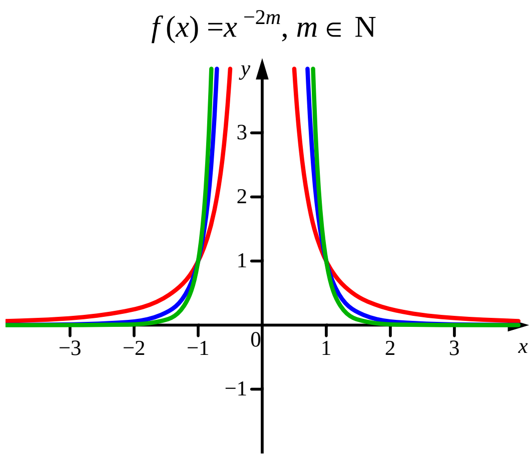
Die Funktionen x, x^3, x^5



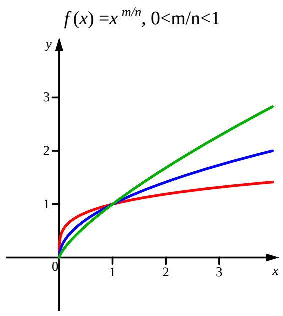
Die Funktionen $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^3}$, $\frac{1}{x^5}$



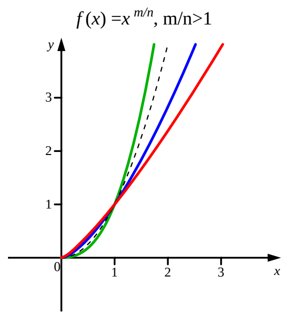
Die Funktionen x^2, x^4, x^6



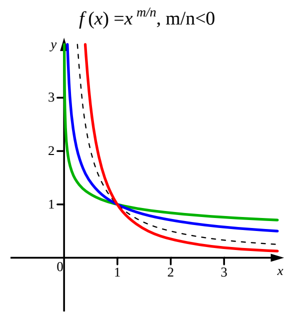
Die Funktionen $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^4}$, $\frac{1}{x^6}$



Die Funktionen $\sqrt[4]{x}$, $\sqrt{x}$, $x^{3/4}$



Die Funktionen $x^{5/4}$, $x^{3/2}$, $x^{5/2}$



Die Funktionen $x^{-5/4}$, $x^{-3/2}$, $x^{-5/2}$

Abbildung 2.27: Funktionsgraphen von Potenzfunktionen

2.6.35 Beispiel

a)

$$
\begin{array}{ll}
f:[0,\infty) \longrightarrow [0,\infty) & f^{-1}:\ [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty) \\
f(x) = x^2 & f^{-1}(x) = \sqrt{x}
\end{array}
$$

Die Einschränkung des Definitionsbereiches auf $[0,\infty)$ ist notwendig, da $f(x)$ für den maximal möglichen Definitionsbereich nicht umkehrbar ist.

b)

$$
\begin{array}{ll}
f:\mathbb{R}\backslash\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}\backslash\{0\} & f^{-1}:\mathbb{R}\backslash\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}\backslash\{0\} \\
f(x) = x^{-1} & f^{-1}(x) = x^{-1}
\end{array}
$$

c)

$$
\begin{array}{ll}
f:[0,\infty) \longrightarrow [0,\infty) & f^{-1}:[0,\infty) \longrightarrow [0,\infty) \\
f(x) = x^{\frac{3}{2}} & f^{-1}(x) = x^{\frac{2}{3}}
\end{array}
$$

d)

$$
\begin{array}{ll}
f:[0,\infty) \longrightarrow [0,\infty) & f^{-1}:\ [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty) \\
f(x) = \sqrt[3]{x^2} & f^{-1}(x) = \sqrt{x^3}
\end{array}
$$

Die Einschränkung des Definitionsbereiches auf $[0,\infty)$ ist notwendig, da $f(x)$ für den maximal möglichen Definitionsbereich nicht umkehrbar ist.

2.6.36 Beispiel

$$
\begin{array}{l}
f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\
f(x) = x^3
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
f^{-1}:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\
f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & x \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-x} & x < 0 \end{cases}
\end{array}
$$

2.6.4 Exponentialfunktionen

2.6.37 Definition (Exponentialfunktion)
Die Funktion

$$f: D_f \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad f(x) = a^x$$

mit $D_f \subseteq \mathbb{R}$ und $a > 0$ heißt Exponentialfunktion. *a heißt* Basis.

2.6.38 Beispiel (Verschiedene Basen)
Wertetabelle (mit zum Teil gerundeten Werten):

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	
2^x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	
$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	
3^x	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27	
$\left(\frac{1}{3}\right)^x = 3^{-x}$	27	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$	
e^x	$0,05$	$0,14$	$0,37$	1	$2,72$	$7,39$	$20,09$	$\}$ *gerundet*
$\left(\frac{1}{e}\right)^x = e^{-x}$	$20,09$	$7,39$	$2,72$	1	$0,37$	$0,14$	$0,05$	
								$e = 2,718281\ldots\ldots$

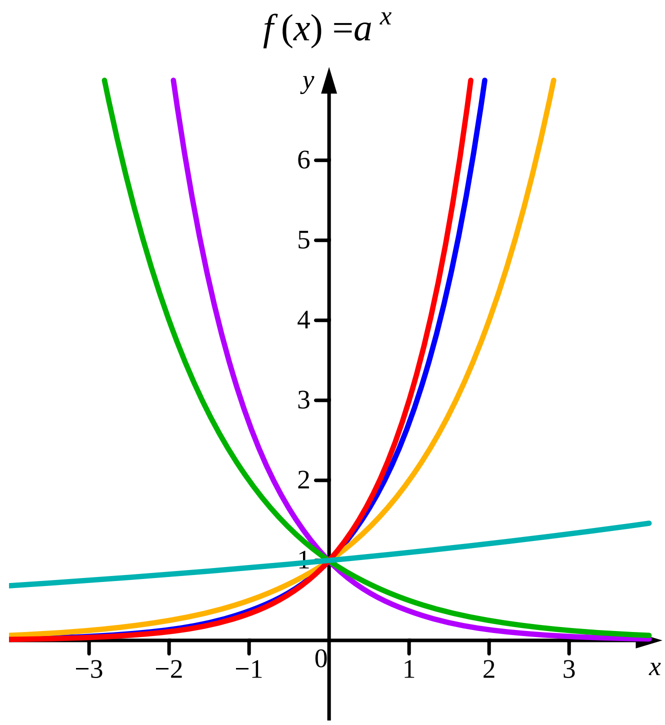


Abbildung 2.28: Die Funktionen $e^{-x} = \left(\frac{1}{e}\right)^x$, 0.5^x, 1.1^x, 2^x, e^x, 3^x

2.6.39 Bemerkung
Die Scharen der Funktionen

$$f(x) = a^x$$

in Abb. 2.28 und

$$g(x) = e^{bx}$$

in Abb. 2.29 sind offenbar gleich (warum?).

2.6.40 Beispiel

a) Wird zum Zeitpunkt $t = 0$ ein Betrag B mit einem Zinssatz von p angelegt, so beträgt das Kapital zum Zeitpunkt t:

$$f(t) = B(1+p)^t$$

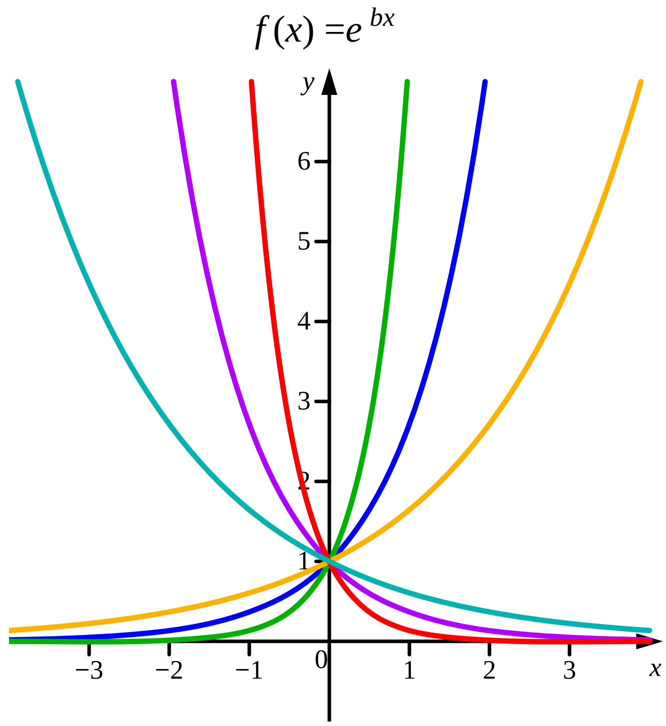


Abbildung 2.29: Die Funktionen e^x, e^{2x}, $e^{\frac{1}{2}x}$, e^{-x},e^{-2x}, $e^{-\frac{1}{2}x}$

b) Radioaktives Material zerfällt nach einem Gesetz der Form

$$f(t) = Ke^{-kt}$$

mit einer positiven materialabhängigen Zerfallskonstanten k.

2.6.41 Satz (Eigenschaften der Exponentialfunktion)
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$ mit $a > 0$. Dann gilt:

a) $f(x)$ besitzt keine Nullstellen.

b) Für $a = 1$ ist

$$f(x) = 1^x = 1\,.$$

c) Für $a \neq 1$ ist

$$W_f = (0, \infty)\,.$$

d) $f(x)$ *ist* $\left\{\begin{matrix} \textit{streng monoton wachsend} \\ \textit{streng monoton fallend} \end{matrix}\right\}$ *für* $\left\{\begin{matrix} a > 1 \\ a < 1 \end{matrix}\right\}$.

e) Für $a \neq 1$ ist $f(x)$ wegen der strengen Monotonie umkehrbar.

2.6.5 Logarithmusfunktionen

2.6.42 Definition (Logarithmus)
Sei $a > 0$, $a \neq 1$, $u > 0$. Dann ist der Logarithmus von u zur Basis a *definiert durch*

$$\log_a u = s \iff a^s = u.$$

In obigem Ausdruck heißt a Basis, *u* Numerus, *s* Logarithmus.

2.6.43 Beispiel

$$\begin{aligned} \log_2 8 &= \quad , \\ \log_4 2 &= \quad , \\ \log_{\frac{1}{3}} 9 &= \quad , \\ \log_{10} 10000 &= \quad , \end{aligned}$$

2.6.44 Bemerkung
Sei $a > 0$, $a \neq 1$, $u > 0$, $s \in \mathbb{R}$. Dann gilt

a)

$$a^{\log_a u} = u \, ,$$

denn $a^s = u \iff s = \log_a u$.

b)

$$\log_a (a^s) = s \, ,$$

was unmittelbar aus der Definition des Logarithmus folgt. (äquivalente Exponentialgleichung $a^s = a^s$).

2.6.45 Satz (Rechenregeln für Logarithmen)

a) $\log_a (u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$

b) $\log_a \left(\frac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v$

c) $\log_a (u^t) = t \cdot \log_a u$

d) $\log_a \sqrt[n]{u} = \frac{1}{n} \cdot \log_a u$

e) $\frac{\log_a u}{\log_a b} = \log_b u$

Beweis:
zu a)

$$\begin{array}{rcl} \log_a u = s & \Longrightarrow & a^s = u \\ \log_a v = t & \Longrightarrow & a^t = v \\ \hline \log_a (u \cdot v) = s + t & \Longleftarrow & a^{s+t} = u \cdot v \end{array}$$

zu e)

$$\begin{array}{llcl} 1) & \log_a u = s & \Longleftrightarrow & a^s = u \\ 2) & \log_a b = t & \Longleftrightarrow & a^t = b \\ 3) & \log_b u = r & \Longleftrightarrow & b^r = u \end{array}$$

zu zeigen: $s = t \cdot r$
aus 1) und 3) folgt $u = a^s = b^r$
mit 2) $(b = a^t)$ folgt daraus durch Einsetzen:

$$\underline{a^s} = b^r = \underline{\left(a^t\right)^r} = a^{t \cdot r}$$
$$\Rightarrow s = t \cdot r$$

2.6.46 Bemerkung (Spezielle Basen)
Für einige häufig vorkommende Basen gibt es es gesonderte Bezeichnungen.

$$\begin{array}{rcll} \log_{10} u & = & \lg u & \textit{Zehnerlogarithmus} \\ \log_e u & = & \ln u & \textit{natürlicher Logarithmus} \\ \log_2 u & = & \mathrm{lb}\, u & \textit{Zweierlogarithmus} \end{array}$$

2.6.47 Definition (Logarithmusfunktion)
Sei $a > 0$, $a \neq 1$.

$$f : D_f \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \log_a x$$

mit $D_f = (0, \infty)$ heißt Logarithmusfunktion .

2.6.48 Bemerkung
Für Logarithmusfunktionen $f(x) = \log_a x$ mit $a > 0$, $a \neq 1$ gilt:

a) $W_f = \mathbb{R}$

b) $\log_a x = y \iff a^y = x$, *d.h. Exponential- und Logarithmusfunktionen sind Umkehrfunktionen zueinander.*

c) $\log_a 1 = 0$ *ist einzige Nullstelle jeder Logarithmusfunktion.*

d) $\log_a$ *ist streng monoton steigend für $a > 1$, streng monoton fallend für $0 < a < 1$.*

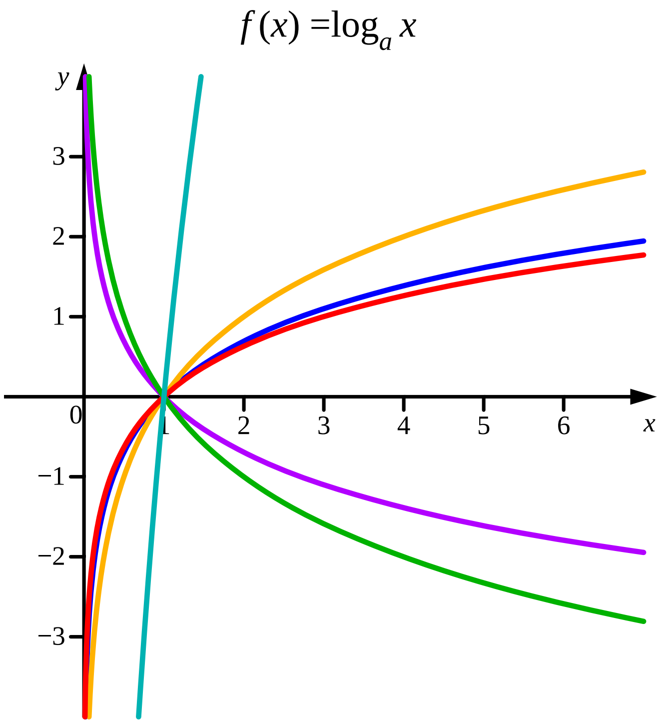


Abbildung 2.30: Die Funktionen $\log_{1/e} x$, $\log_{0.5} x$, $\log_{1.1} x$, $\log_2 x$, $\ln x$, $\log_3 x$

2.6.49 Beispiel (Lösen von Exponentialgleichungen)

a) $e^{2x+3} = 4$:

b) $e^{x^2} = e^{-x}$:

c) $7^{2x-1} - 3^{3x-2} = 7^{2x+1} - 3^{3x+2}$:

2.6.50 Beispiel (Lösen von Logarithmusgleichungen)

$\ln \frac{1}{2+x} = 0$:

2.6.6 Trigonometrische Funktionen

2.6.51 Bemerkung (Bogenmaß)
Das Verhältnis

$$\pi = \frac{\textit{Umfang}}{\textit{Durchmesser}} = 3.14159265\ldots$$

ist für alle Kreise konstant. π ist irrational.

Der Umfang des Einheitskreises beträgt 2π. Für die zu einem Winkel α (in Grad) gehörende Bogenlänge am Einheitskreis gilt die Verhältnisgleichung

$$\frac{\alpha\,(\textit{in Grad})}{360^\circ} = \frac{x}{2\pi},$$

d.h. die Bogenlänge beträgt

$$x = 2\pi \cdot \frac{\alpha\,(\textit{in Grad})}{360^\circ}.$$

2.6.52 Beispiel

$\frac{\pi}{6} \mathrel{\hat{=}}$ $\frac{\pi}{4} \mathrel{\hat{=}}$ $\frac{\pi}{3} \mathrel{\hat{=}}$ $\frac{\pi}{2} \mathrel{\hat{=}}$

$\frac{2}{3}\pi \mathrel{\hat{=}}$ $\frac{7}{6}\pi \mathrel{\hat{=}}$ $\frac{10}{3}\pi \mathrel{\hat{=}}$ $-\frac{5}{2}\pi \mathrel{\hat{=}}$

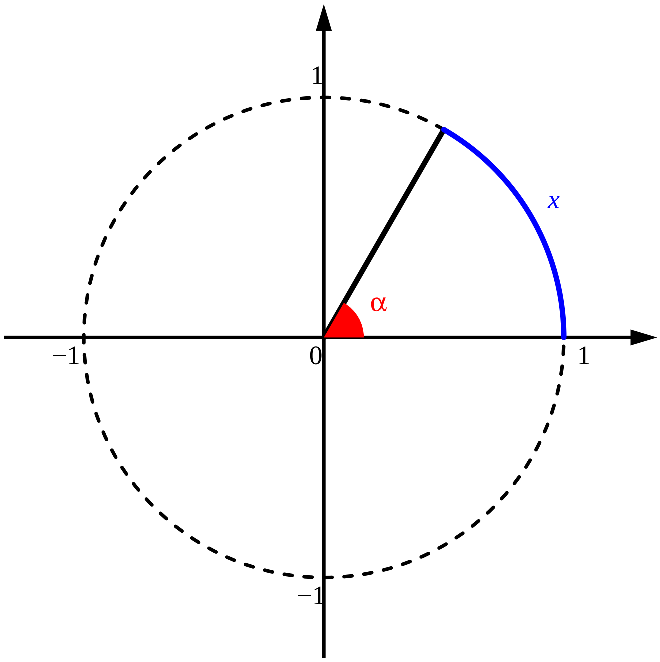


Abbildung 2.31: Winkel und Bogenlänge am Einheitskreis

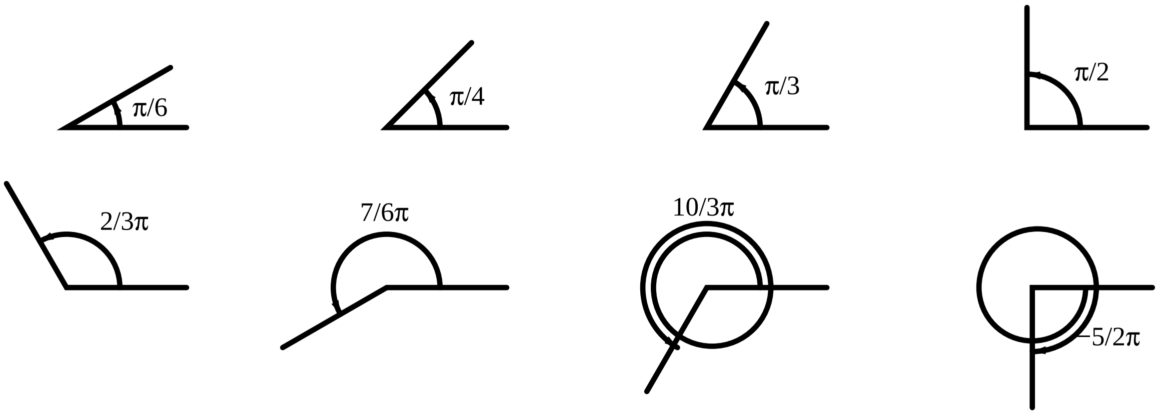


Abbildung 2.32: Winkel im Bogenmaß

2.6.53 Definition (Sinus, Cosinus)
Sei (u, v) *der Punkt auf dem Einheitskreis, der längs des Kreisbogens die Entfernung* x *von* $(1, 0)$ *hat. Dann ist* $(u, v) = (\cos x, \sin x)$.

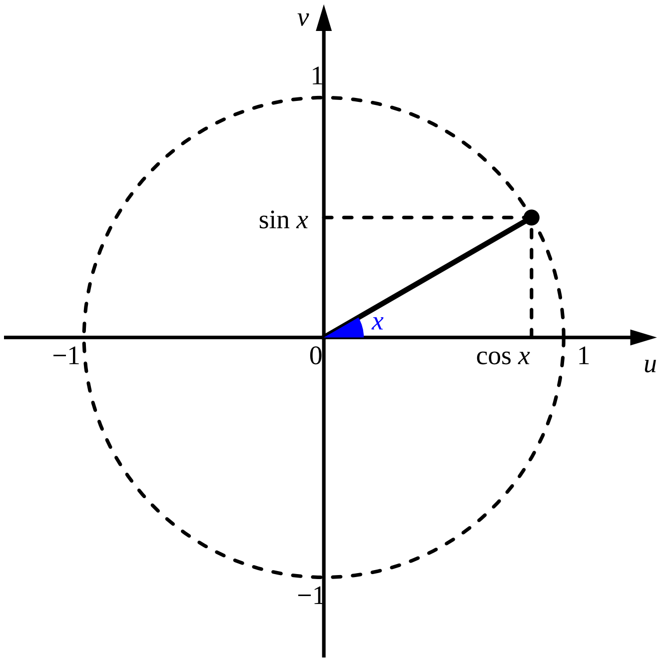


Abbildung 2.33: Punkt auf dem Einheitskreis, sin und cos

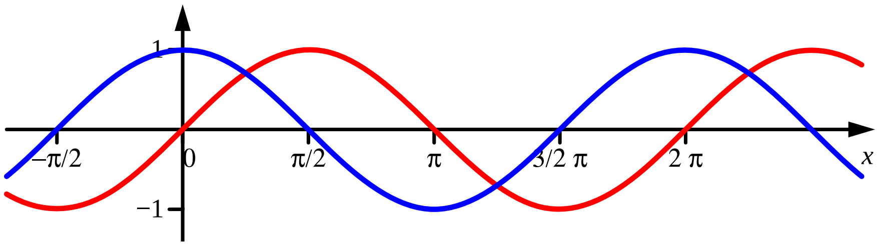


Abbildung 2.34: Die Funktionen $\sin x$ und $\cos x$

2.6.54 Satz
Für die trigonometrischen Funktionen sin *und* cos *gilt*

a) $D_{\sin} = \mathbb{R}, \quad D_{\cos} = \mathbb{R}$.

b) $W_{\sin} = [-1, 1] \quad W_{\cos} = [-1, 1]$.

c) Symmetrien: sin *ist eine ungerade,* cos *ist eine gerade Funktion.*

d) Periode: sin *und* cos *sind* 2π*-periodisch.*

2.6.55 Satz

a) *Die Nullstellen von* sin *sind*

$$\{\ldots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots\} = \{k \cdot \pi : \; k \in \mathbb{Z}\}.$$

b) *Die Nullstellen von* cos *sind*

$$\left\{\ldots, -\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \ldots\right\} = \{k \cdot \pi + \frac{\pi}{2} : \; k \in \mathbb{Z}\}.$$

2.6.56 Satz (Wichtige trigonometrische Formeln)

a) *Additionstheoreme*

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b \tag{2.2}$$
$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b \tag{2.3}$$

b) *Trigonometrischer Pythagoras*

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1$$

c) *Formeln für doppelte Winkel*

$$\begin{aligned} \sin 2a &= 2 \sin a \cos a \\ \cos 2a &= \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 \end{aligned}$$

d) *Formeln für halbe Winkel*

$$\sin\frac{b}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos b)}, \quad \cos\frac{b}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos b)}$$

je nach Quadrant für den Winkel $\frac{b}{2}$.

Beweis:

Zu d)

$$\begin{aligned} & \cos 2a = 1 - 2\sin^2 a \\ \Rightarrow \quad & \sin^2 a = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2a) \\ \Rightarrow \quad & \sin a = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}(1 - \cos 2a)} \\ \text{setze} \quad & a = \tfrac{b}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 2a &= 2\cos^2 a - 1 \\ \Rightarrow \quad \cos^2 a &= \tfrac{1}{2}(1+\cos 2a) \\ \Rightarrow \quad \cos a &= \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}(1+\cos 2a)} \end{aligned}$$

2.6.57 Beispiel
a) Berechne

$$\begin{aligned} \sin\frac{\pi}{8} &= \sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos\frac{\pi}{4})} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

b) Berechne

$$\begin{aligned} \cos\frac{9}{8}\pi &= -\cos\frac{\pi}{8} \\ &= -\sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos\frac{\pi}{4})} \\ &= -\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Umwandlung von Produkten in Summen werden z. B. verwendet, um Funktionen leichter ableiten oder integrieren zu können. Sie sind auch bei der Lösung von Differentialgleichungen oft ein wesentlicher Umformungsschritt:

2.6.58 Satz (Umwandlung Produkte in Summen)

$$\begin{aligned} \sin\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\Big(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\Big) \\ \cos\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}\Big(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\Big) \\ \sin\alpha\sin\beta &= \frac{1}{2}\Big(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\Big) \end{aligned}$$

Beweis

$$\begin{aligned} \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \\ \hline \sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) &= 2\sin\alpha\cos\beta \end{aligned}$$

Umwandlung von Summen in Produkte sind eine fundamentale Methode, um Gleichungen zu lösen. Bestimmung von Nullstellen, Berechnung von Extremwerten sind wichtige mathematische Verfahren, bei denen Gleichungen zu lösen sind:

2.6.59 Satz (Umwandlung Summen in Produkte)

$$\begin{aligned}
\sin x + \sin y &= 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\\
\sin x - \sin y &= 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\\
\cos x + \cos y &= 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\\
\cos x - \cos y &= 2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}
\end{aligned}$$

Beweis

Nach der soeben gezeigten Produktformel ist

$$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) \tag{2.4}$$

Benenne $x := \alpha + \beta, \quad y := \alpha - \beta$.

Dann ist $\alpha = \dfrac{x+y}{2}, \quad \beta = \dfrac{x-y}{2}$.

Ersetze nun in (2.4) die Variablen α, β durch x, y.

2.6.60 Beispiel

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin 2x$. *Es gilt*

a) $f(x)$ *ist* π*-periodisch.*

b) $f(x)$ *ist ungerade.*

c) Nullstellen:

$$\begin{aligned}
\sin 2x = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad 2x = k\cdot\pi, \quad k\in\mathbb{Z}\\
&\Longleftrightarrow \quad x = k\cdot\frac{\pi}{2}, \quad k\in\mathbb{Z}
\end{aligned}$$

d) Funktionsgraph: Graph der Sinusfunktion, um den Faktor 2 *waagerecht gestaucht.*

2.6.61 Beispiel

Sei $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

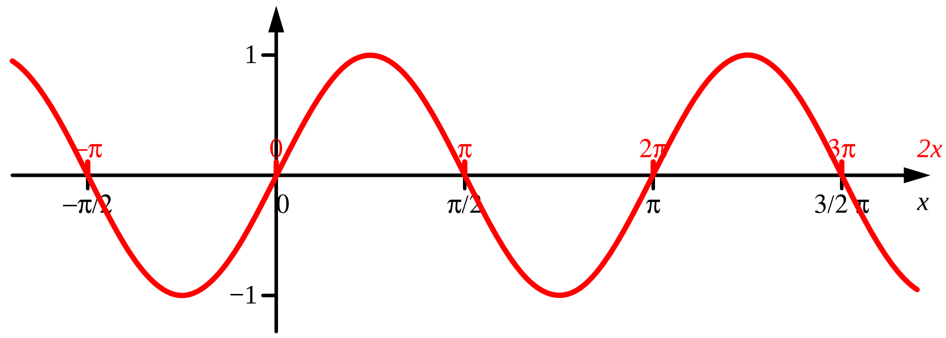


Abbildung 2.35: Die Funktion $\sin(2x)$

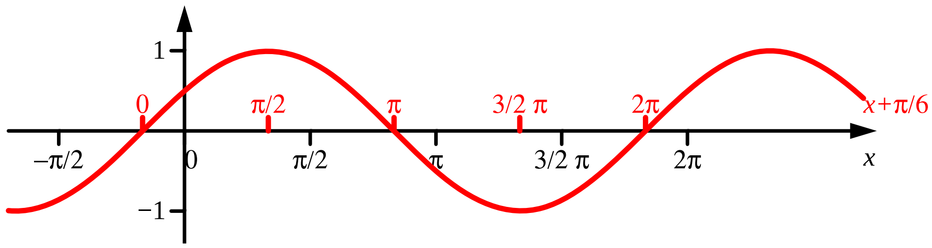


Abbildung 2.36: Die Funktion $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

a) Funktionsgraph: Der Graph von $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ *entspricht dem der Sinusfunktion um* $\frac{\pi}{6}$ *nach links verschoben.*

2.6.62 Definition (Tangens, Cotangens)

a) Die Tangensfunktion *ist definiert durch*

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Es ist $D_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{k \cdot \pi + \frac{\pi}{2} \ : \ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

b) Die Cotangensfunktion *ist definert durch*

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}.$$

Es gilt $D_{\cot} = \mathbb{R} \setminus \{k \cdot \pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$.

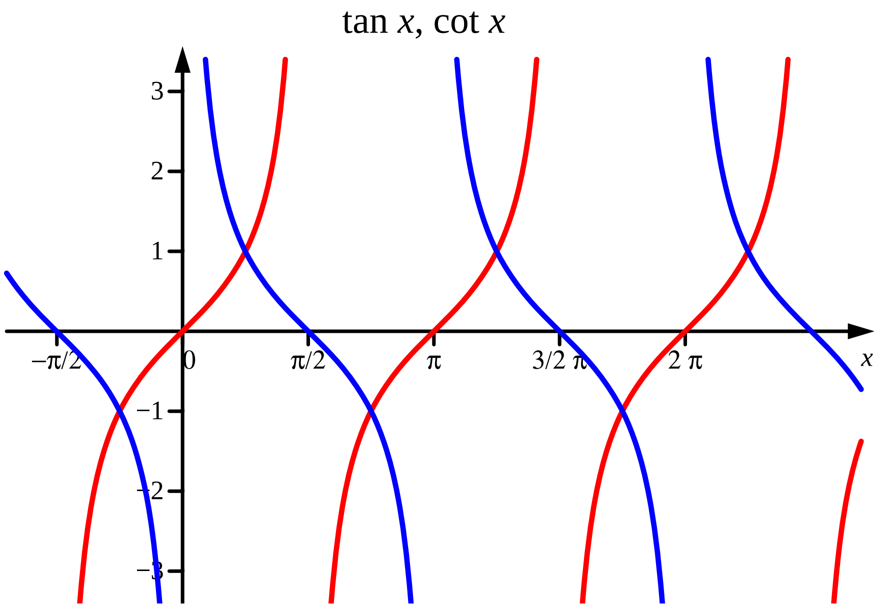


Abbildung 2.37: Die Funktionen tan x und cot x

2.6.63 Satz

a) Die Tangens- und Cotangensfunktionen sind ungerade.

b) tan, cot *sind* π*-periodisch.*

c) Die Nullstellen von tan *sind*

$$\{k \cdot \pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$$

d) Die Nullstellen von cot *sind*

$$\{k \cdot \pi + \frac{\pi}{2} \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$$

2.6.7 Arcusfunktionen

2.6.64 Definition (Arcussinus)

$\sin\big|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$, *d. h.* $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1]$ *ist streng monoton steigend und umkehrbar.*

$\arcsin : [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *ist definiert durch*

$$\arcsin x = y \iff \sin y = x, \quad -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$$

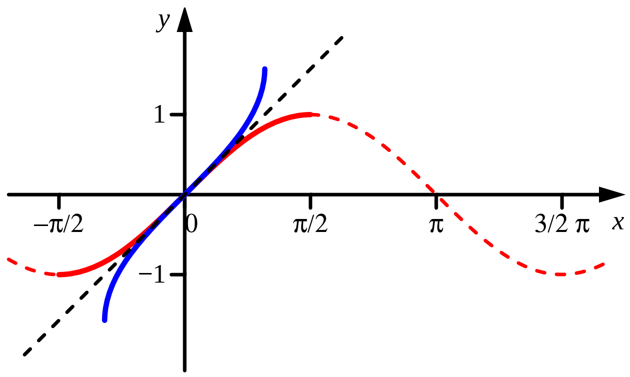


Abbildung 2.38: Die Funktionen sin x und arcsin x

2.6.65 Definition (Arcuscosinus)
$\cos\big|_{[0,\pi]} : \ [0,\pi] \longrightarrow [-1,1]$
ist streng monoton fallend und umkehrbar.
$\arccos : \ [-1,1] \longrightarrow [0,\pi]$ *ist definiert durch*

$$\arccos x = y \iff \cos y = x, \quad 0 \le y \le \pi$$

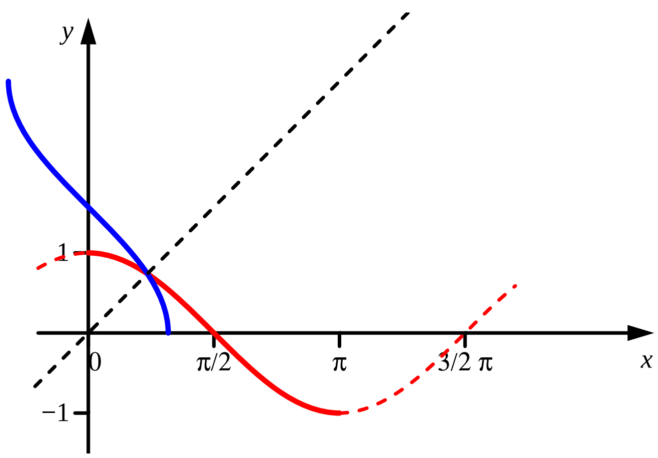


Abbildung 2.39: Die Funktionen cos x und arccos x

2.6.66 Bemerkung
Wertetabelle von arcsin *und* arccos *ergibt sich durch Zeilen vertauschen aus den Wertetabellen von* sin, cos *(man fülle die Tabelle sinvoll aus):*

htb]

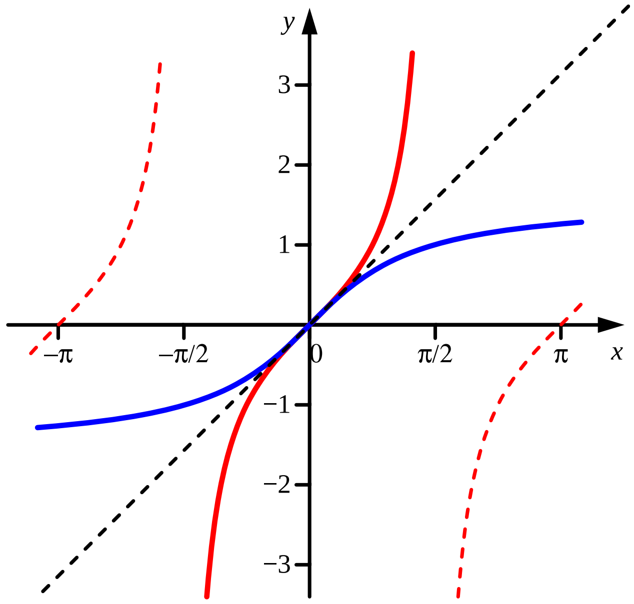


Abbildung 2.40: Die Funktionen tan x und arctan x

x	-1	0	1
$\arcsin x$			
$\arccos x$			

2.6.67 Definition (Arcustangens)
$\tan\big|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}: \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$
ist streng monoton wachsend und umkehrbar.
$\arctan: \mathbb{R} \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ *ist definiert durch*

$$\arctan x = y \iff \tan y = x, \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

2.6.68 Definition (Arcuscotangens)
$\cot\big|_{(0,\pi)}: (0,\pi) \longrightarrow \mathbb{R}$
ist streng monoton fallend und umkehrbar.
$\operatorname{arccot}: \mathbb{R} \longrightarrow (0,\pi)$ *ist definiert durch*

$$\operatorname{arccot} x = y \iff \cot y = x, \quad 0 < y < \pi$$

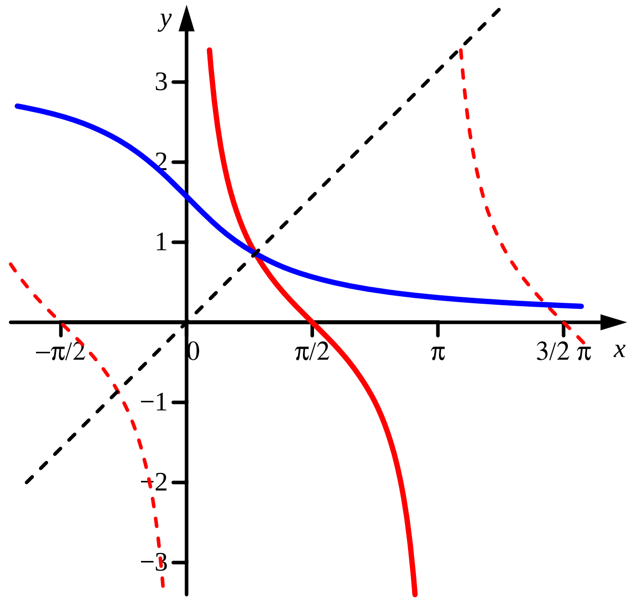


Abbildung 2.41: Die Funktionen $\cot x$ und $\operatorname{arccot} x$

2.6.69 Satz

a) arcsin *und* arctan *sind ungerade und streng monoton wachsend.*

b) arccos *und* arccot *sind streng monoton fallend.*

Die Arcusfunktionen als Umkehrung der trigonometrischen Funktionen, werden verwendet, um trigonometrische Gleichungen zu lösen. Da die trigonometrischen Funktionen jedoch nicht injektiv (Definition 2.4.1) sind, sind Zusatzbetrachtungen notwendig:

2.6.70 Beispiel (Lösen trigonometrischer Gleichungen)
Löse

$$\sin x = 0,4 \textit{ mit } x \in \mathbb{R}.$$

Lösung

a) Alle Lösungen eines Periodenintervalls, z.B. $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$:

(i) in $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$: $\quad x = \arcsin(0,4)$

(ii) in $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$: $\quad x = \pi - \arcsin(0,4)$

b) Alle Lösungen (2π-Periodizität):

$$x = \arcsin(0,4) + k \cdot 2\pi$$

oder

$$\begin{aligned} x &= -\arcsin(0,4) + \pi + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &= -\arcsin(0,4) + (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Ergebnis:

$$\begin{aligned} \mathbb{L} = \{x \ : \ & x = +\arcsin(0,4) + 2k\pi \vee \\ & x = -\arcsin(0,4) + (2k+1)\pi, \ \ k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

2.6.71 Beispiel (Lösen trigonometrischer Gleichungen)
Finde alle Lösungen von

$$2\cos(2x) = \frac{1}{2} \quad \textit{mit } x \in \mathbb{R}.$$

Lösung
Äquivalent ist $\cos z = \frac{1}{4}$ mit $z = 2x$.

a) Lösung durch die Umkehrfunktion, d. h. $z \in [0, \pi]$: $\quad z_1 = \arccos \frac{1}{4}$

b) Alle Lösungen eines Periodenintervalls, z. B. $z \in [-\pi, \pi]$: $\quad z_{0,1} = \pm \arccos \frac{1}{4}$

c) Alle reellen Lösungen bezüglich z: $z = \pm \arccos \frac{1}{4} + k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$.

d) Rücksubstitution $x = \frac{z}{2}$:

$$\mathbb{L} \quad = \quad \left\{x \in \mathbb{R} : x = \pm\tfrac{1}{2} \arccos \tfrac{1}{4} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

2.6.72 Beispiel (Lösen trigonometrischer Gleichungen)
Löse

$$\tan^2 x + 2\tan x - 1 = 0\,,$$

wobei $\tan^2 x = (\tan x)^2$ *bezeichnet.*

Lösung

2.6.8 Hyperbelfunktionen

2.6.73 Definition (Hyperbelfunktionen)

a)

$$\sinh x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) \qquad \text{Sinus Hyperbolicus}$$

b)

$$\cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \qquad \text{Cosinus Hyperbolicus}$$

2.6.74 Definition (Hyperbelfunktionen)

a)

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \qquad \text{Tangens Hyperbolicus}$$

b)

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} \qquad \text{Cotangens Hyperbolicus}$$

2.6.75 Bemerkung

a) Es gilt $D_{\sinh} = D_{\cosh} = D_{\tanh} = \mathbb{R}$, $D_{\coth} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

b) sinh, tanh, *und* coth *sind ungerade,* cosh *ist gerade.*

2.6.76 Satz (Wichtige Formeln)

a) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

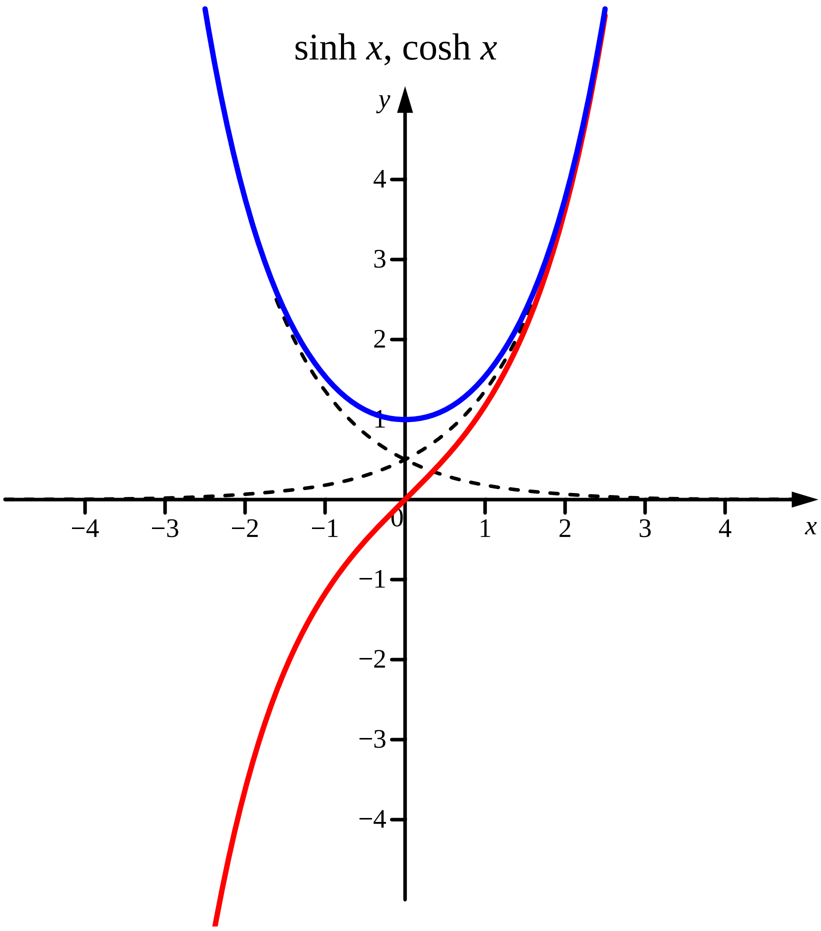


Abbildung 2.42: Die Funktionen sinh x und cosh x

b) $\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$

c) $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$

Beweis

Z. B. Additionstheorem für cosh:

$$4\,(\cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y) =$$

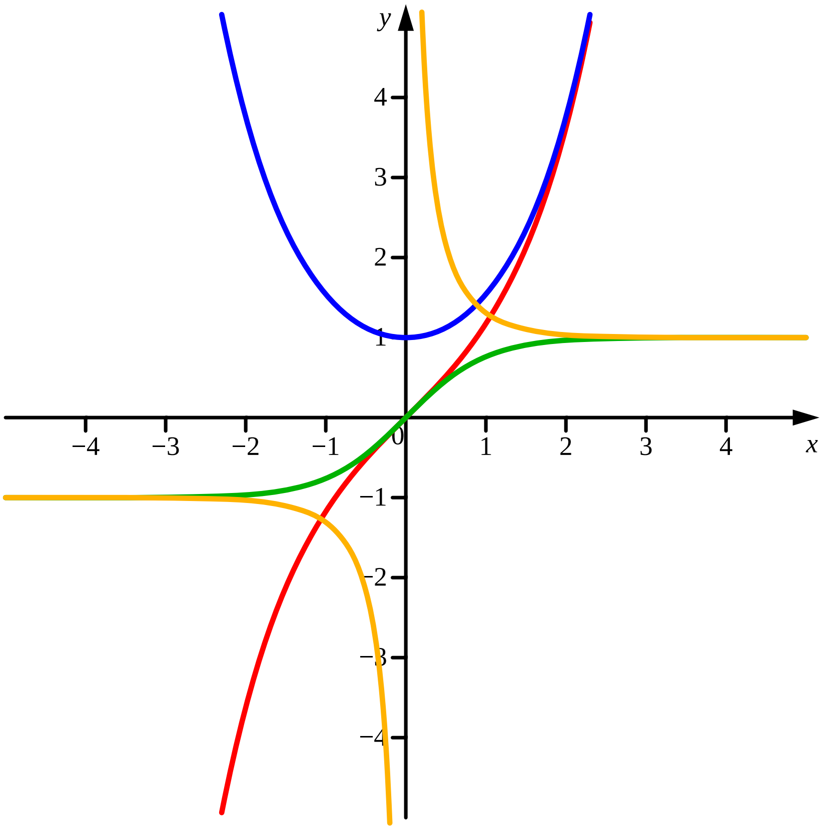


Abbildung 2.43: Die Hyperbelfunktionen

2.6.77 Satz (Umkehrfunktionen)
Die Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen sind die sogenannten Areafunktionen:

a)
$$\operatorname{arsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right),\ x \in \mathbb{R}$$

b)
$$\operatorname{arcosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right),\ x \in [1,\infty)$$

($= (\cosh\big|_{[0,\infty)})^{-1}$*).*

c)
$$\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},\ x \in (-1,1)$$

d)
$$\operatorname{arcoth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1},\ x \in \mathbb{R}\setminus[-1,1]$$

Beweis

Z. B. für $\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$ (vgl. auch Blatt 0, Aufg. 4)

Es ist die Gleichung $x = \tanh y$ nach y aufzulösen:

$$x = \tanh y =$$

Definitionsbereich von $\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$:

$$\frac{1+x}{1-x} > 0$$

2.6.78 Bemerkung (Geometrische Interpretation der Kreisfunktionen)
Kreisgleichung

$$u^2 + v^2 = 1,$$

Flächeninhalt des schraffierten Kreissektors in Abbildung 2.44 ist α *(Kreissektor mit Radius* 1 *und Öffnungswinkel* 2α*), und*

$$\cos \alpha = u, \quad \sin \alpha = v.$$

2.6.79 Bemerkung (Geometrische Interpretation der Hyperbelfunktionen)
Hyperbelgleichung

$$u^2 - v^2 = 1,$$

Hat der schraffierte Sektor in Abbildung 2.45 den Flächeninhalt α*, dann ist*

$$\cosh \alpha = u, \quad \sinh \alpha = v.$$

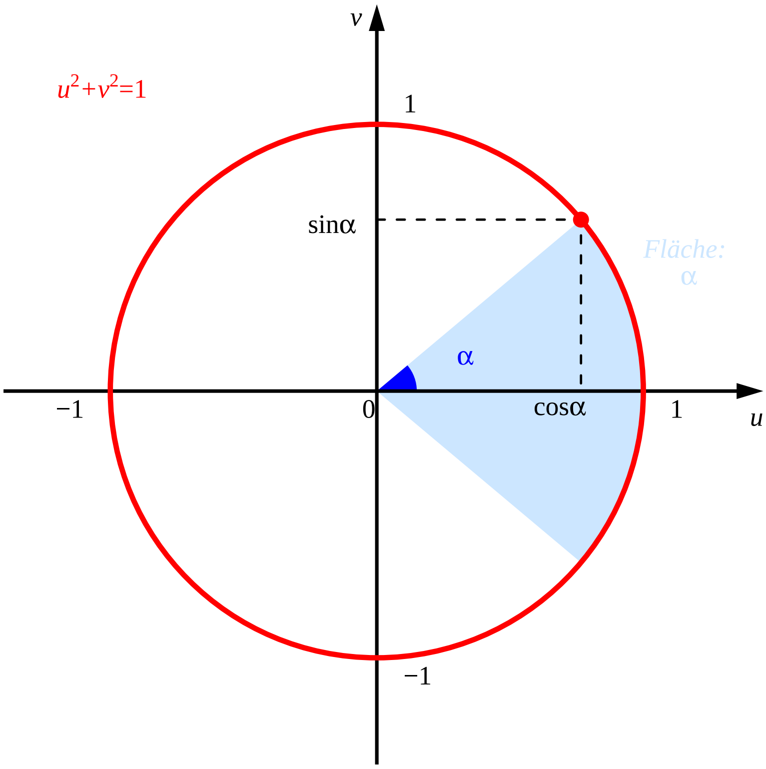


Abbildung 2.44: Kreisfunktionen $\sin x, \cos x$

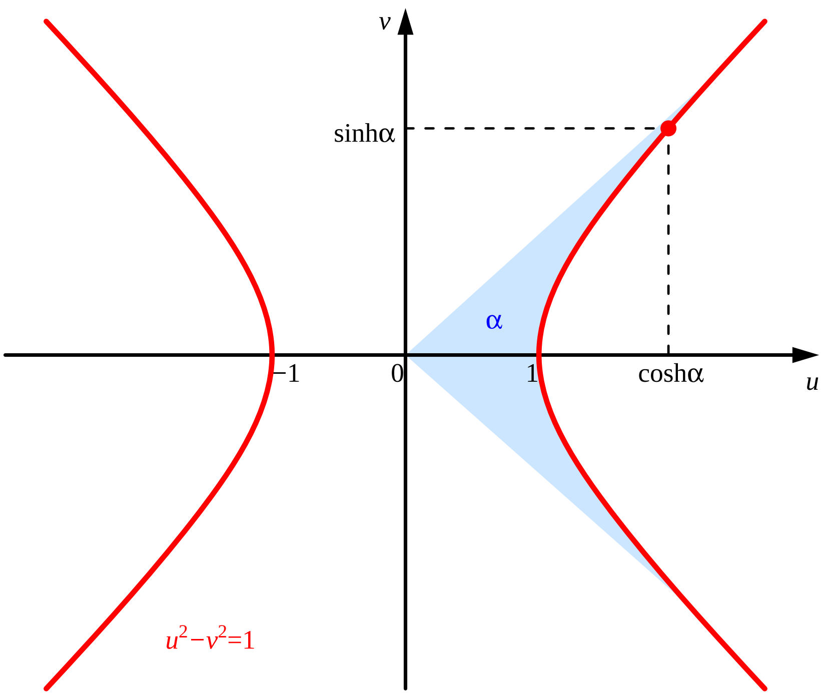


Abbildung 2.45: Hyperbelfunktionen $\sinh x, \cosh x$

2.7 Zusammengesetzte Funktionen

2.7.1 Definition (Verknüpfungen von Funktionen)
Seien $f: D_f \longrightarrow \mathbb{R}$, $g: D_g \longrightarrow \mathbb{R}$ *Funktionen.*

a) $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$: $D_f \cap D_g \longrightarrow \mathbb{R}$ *sind gegeben durch:*

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &:= f(x)+g(x)\\ (f-g)(x) &:= f(x)-g(x)\\ (f\cdot g)(x) &:= f(x)\cdot g(x).\end{aligned}$$

b) $a \cdot f: D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ *ist für* $a \in \mathbb{R}$ *gegeben durch:*

$$(af)(x) := a \cdot f(x).$$

c) $\dfrac{f}{g}: (D_f \cap D_g) \setminus \{x \in \mathbb{R}: g(x) = 0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ *ist gegeben durch:*

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}.$$

2.7.2 Beispiel

a) *Polynome entstehen aus* $f(x) = x$ *und Konstanten durch Summen- und Produktbildung.*

b) *Rationale Funktionen enstehen aus Polynomen durch Division.*

c) *Die Hyperbelfunktionen enstehen aus* e^x *und* e^{-x}.

2.7.3 Beispiel (Verkettung von Funktionen)

a) *Für* $f(u) = \sqrt{u}$, $g(x) = x^2 + 1$ *ist*

$$f(g(x)) = \sqrt{x^2+1}.$$

b) *Für* $f(u) = \sin u$, $g(x) = \omega x + \varphi$ *ist*

$$f(g(x)) = \sin(\omega x + \varphi)$$

2.7.4 Definition (Verkettung von Funktionen)
Seien $f: D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ *und* $g: D_g \longrightarrow \mathbb{R}$
Funktionen mit $W_g \subseteq D_f$.

Dann heißt

$$f \circ g: \ D_g \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mit } (f \circ g)(x) = f\left(g(x)\right)$$

Verkettung *der Funktionen f und g.*

2.7.5 Beispiel
$f \circ g$ für

$$f(u) = \sqrt{u} \qquad\qquad g(x) = 1 - x^2$$

$$\begin{aligned} f : [0,\infty) &\longrightarrow [0,\infty) & g : \mathbb{R} &\longrightarrow (-\infty, 1] \\ D_f &= [0,\infty) & W_g &= (-\infty, 1] \\ & & g_1 := g\big|_{[-1,1]} : [-1,1] &\longrightarrow [0,1] \end{aligned}$$

$(f \circ g)(x) = \sqrt{1-x^2}$ *nur für $x \in [-1,1]$ definiert, da $W_{g_1} = [0,1] \subseteq D_f = [0,\infty)$.*

2.7.1 Verkettung mit linearen Funktionen

Gegeben: Graph von $f(x)$.

Gesucht: Graph von $f(ax+b)$ bzw. $af(x)+b$,

d. h. von $f \circ h$ und $h \circ f$, wobei $h(x) = ax + b$.

2.7.6 Satz (Allgemeine Sinusfunktion)

a) Sei $f(x) = \sin \omega x$. Dann ist

$$\begin{aligned} \sin \omega x = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \omega x = k \cdot \pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ &\Longleftrightarrow \quad x = k \cdot \frac{\pi}{\omega}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Das bedeutet: Der Graph von $f(x)$ ist der der Sinusfunktion, aber waagerecht gestaucht (falls $|\omega| > 1$) oder gedehnt (falls $0 < |\omega| < 1$) um den Faktor ω.
Für $\omega < 0$ ist der Funktionsgraph noch zusätzlich an der y-Achse gespiegelt.

b) Sei $g(x) = \sin(\omega x + \varphi) = \sin\left(\omega(x + \frac{\varphi}{\omega})\right)$. Dann ist

$$\begin{aligned} g(x) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \omega x - \varphi = k \cdot \pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ &\Longleftrightarrow \quad x = \frac{k \cdot \pi + \varphi}{\omega}, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Das bedeutet: Der Graph von $g(x)$ ist der von $f(x) = \sin \omega x$, verschoben um $\frac{\varphi}{\omega}$ in x-Richtung (Verschiebung nach links, wenn $\frac{\varphi}{\omega} > 0$, sonst nach rechts).

c) Sei $h(x) = a \sin(\omega x + \varphi)$, $a \neq 0$. Graph von $h(x)$ ist der von $g(x) = \sin(\omega x + \varphi)$, gestreckt um den Faktor a in y-Richtung (falls $|a| > 1$), gestaucht falls $|a| < 1$. Für $a < 0$ wird der Graph noch an der x-Achse gespiegelt.

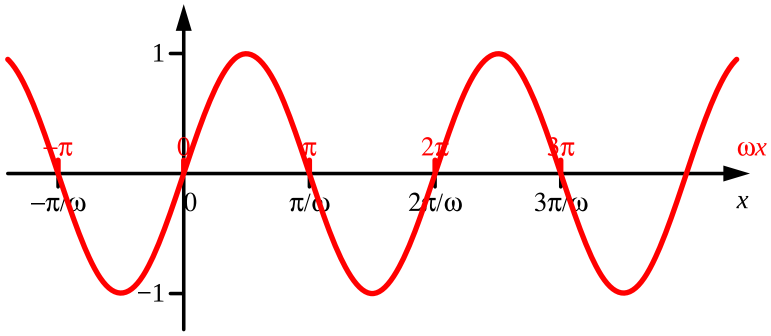


Abbildung 2.46: Die Funktion $\sin \omega x$

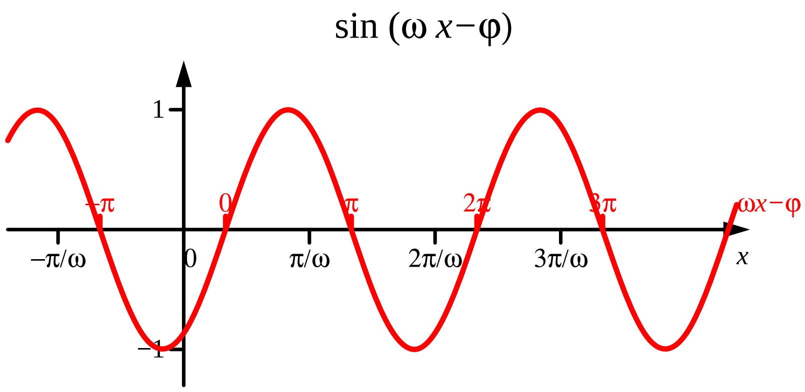


Abbildung 2.47: Die Funktion $\sin(\omega x - \varphi)$

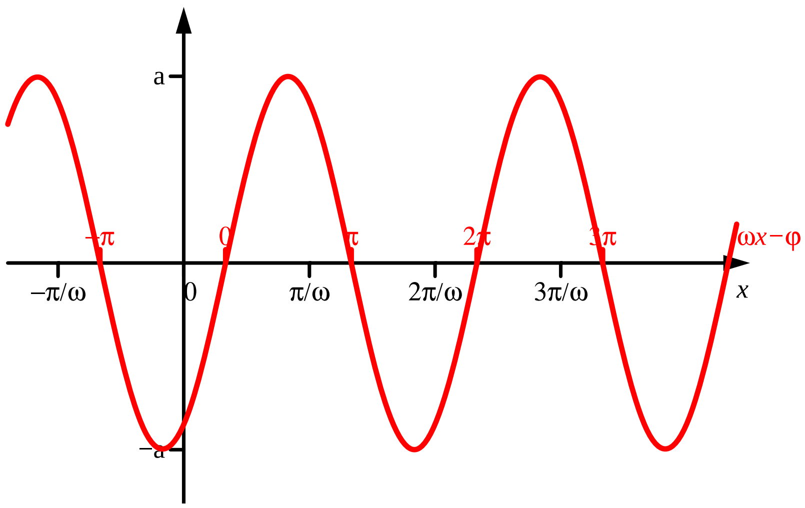


Abbildung 2.48: Die Funktion $a\ \sin(\omega x - \varphi)$

2.7.7 Satz
Verkettung mit linearen Funktionen

a) *Bestimmung des Graphen von $f(ax+b)$ aus $f(x)$:*

   (i) *Dehnung $(0 < |a| < 1)$ bzw. Stauchung $|a| > 1)$ in x–Richtung;*
   $a < 0$: Spiegelung an der y–Achse

   (ii) *Verschiebung in x–Richtung um $\frac{b}{a}$ (nach links, falls > 0).*

b) *Bestimmung des Graphen von $c \cdot f(x) + d$ aus $f(x)$:*

   (i) *Dehnung $(|c| > 1)$ bzw. Stauchung $(0 < |c| < 1)$ in y–Richtung;*
   $c < 0$: Spiegelung an der x–Achse

   (ii) *Verschiebung in y–Richtung um d*

2.7.8 Beispiel
Scheitelpunktform von Parabeln Für $g(x) = x^2 + px + q$ und $f(x) = x^2$ ist

$$g(x) = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4} = f\left(x + \frac{p}{2}\right) + q - \frac{p^2}{4}.$$

Der Graph von g entsteht aus f durch Verschiebung um $\dfrac{p}{2}$ nach links und $q - \dfrac{p^2}{4}$ nach oben.

2.7.9 Beispiel
Sei $g(x) = a\,e^x$. Der Graph von g entsteht aus $f(x) = e^x$ durch senkrechte Streckung um den Faktor a.

2.7.10 Beispiel
$g(x) = -\sin x$ hat den Graph der Sinusfunktion $f(x) = \sin x$, gespiegelt an der x-Achse.

2.7.11 Beispiel
$g(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$.
Der Graph von g ergibt sich aus $f(x) = \sin x$ durch

$$g(x) = \sin\left(2\left(x + \frac{\pi}{8}\right)\right) = f\left(2\left(x + \frac{\pi}{8}\right)\right),$$

d. h. i) durch Stauchung um den Faktor 2 waagerecht und ii) durch Verschiebung um $\frac{\pi}{8}$ nach links der gestauchten Funktion. Die Reihenfolge der beiden Transformationen ist nicht *vertauschbar.*

2.7.12 Satz (Trigonometrische Polynome ersten Grades)
Die Mengen

$$\{f(x) = a\ \sin x + b\ \cos x : a, b \in \mathbb{R}\}$$

und

$$\{f(x) = A\ \sin (x + \alpha) : A, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

sind gleich:

Jede Linearkombination aus Sinus- und Kosinusfunktion mit demselben Argument kann als Sinusfunktion derselben Frequenz mit Phasenverschiebung aufgefasst werden (und umgekehrt kann jede verschobene Sinusfunktion als Linearkombination der Standardsinus- und Kosinusfunktion geschrieben werden).

Beweis

$$\begin{aligned} A\ \sin (x + \alpha) &= A\,(\sin x\ \cos \alpha + \cos x\ \sin \alpha) \\ &= a\ \sin x + b\ \cos x \end{aligned}$$

mit $a := A\ \cos \alpha, \quad b := A\ \sin \alpha$. Jede Funktion der zweiten Menge ist also in der ersten enthalten.

- Zum Beweis der anderen Inklusion wird eine Umwandlung in komplexe Zahlen vorgenommen. Wir benutzen aus der Eulerschen Identität (7.2)

$$\sin x = \mathrm{Im}(e^{jx}),$$

und es sei

$$a + bj = Ae^{j\alpha}$$

(Polarform, siehe Abb. 7.11). Dann gilt:

$$\begin{aligned} a \sin x + b \cos x &= a \sin x + b \sin \left(x + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= a\,\mathrm{Im}(e^{jx}) + b\,\mathrm{Im}(e^{j(x+\frac{\pi}{2})}) \\ &= \mathrm{Im}\left(ae^{jx} + be^{j(x+\frac{\pi}{2})}\right) \\ &= \mathrm{Im}\left((a+bj)e^{jx}\right) \\ &= \mathrm{Im}\left(Ae^{j\alpha}e^{jx}\right) \\ &= \mathrm{Im}\left(Ae^{j(x+\alpha)}\right) \\ &= A \sin(x + \alpha). \end{aligned}$$

Also ist auch jede Funktion der ersten Menge in der zweiten enthalten: beide Mengen sind gleich.

2.7.13 Folgerung
Eine Summe beliebig vieler verschobener Sinusfunktionen verschiedener Phase und Amplitude, aber gleicher Frequenz lässt sich zu einer einizigen solchen Funktion zusammenfassen:

$$\sum_{k=0}^{n} A_k \sin(x+\alpha_k) = A \sin(x+\alpha),$$

wobei A und α durch die komplexe Zeigeraddition

$$A\, e^{j\alpha} = \sum_{k=0}^{n} A_k\, e^{j\alpha_k}$$

für $A_0, \ldots, A_N, \alpha_0, \alpha_N \in \mathbb{R}$ bestimmt sind.

2.7.14 Beispiel
Man fasse $\sin x - \sqrt{3}\cos x$ *zu einer Funktion zusammen.*

Lösung

2.7.15 Beispiel
Man fasse $\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4}) + 2\sin x - 2\sin(x+\frac{\pi}{2})$ *zu einer Funktion zusammen.*

Lösung

2.7.16 Beispiel
Man schreibe $\sqrt{6}\sin\left(x+\frac{5}{6}\pi\right)$ *als Linearkombination von* $\sin x$ *und* $\cos x$.

Lösung

Kapitel 3

Grenzwerte

3.1 Einführung, Definitionen

3.1.1 Definition
Eine Funktion f mit $D_f = \mathbb{N}, W_f \subset \mathbb{R}$ heißt reelle Folge:

$$f: \quad \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$f(n) = a_n$$

a_n *heißt* n-tes Folgenglied.

3.1.2 Bemerkung
Schreibweise für Folgen:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots$$

oder

$$\Big(a_n\Big)_{n\in\mathbb{N}}$$

oder

$$\Big(a_n\Big).$$

3.1.3 Beispiel

a) $1, 2, 3, 4, \ldots$

b) $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots$

c) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$

3.1.4 Bemerkung

Man kann auch komplexe Folgen definieren, z. B.

$$j, -1, -j, 1, j, -1, \ldots$$

3.1.5 Bemerkung

Graphische Darstellung von Folgen:

a) eindimensional: Markiere die Punkte $a_1, a_2, \ldots$ auf der reellen Achse,

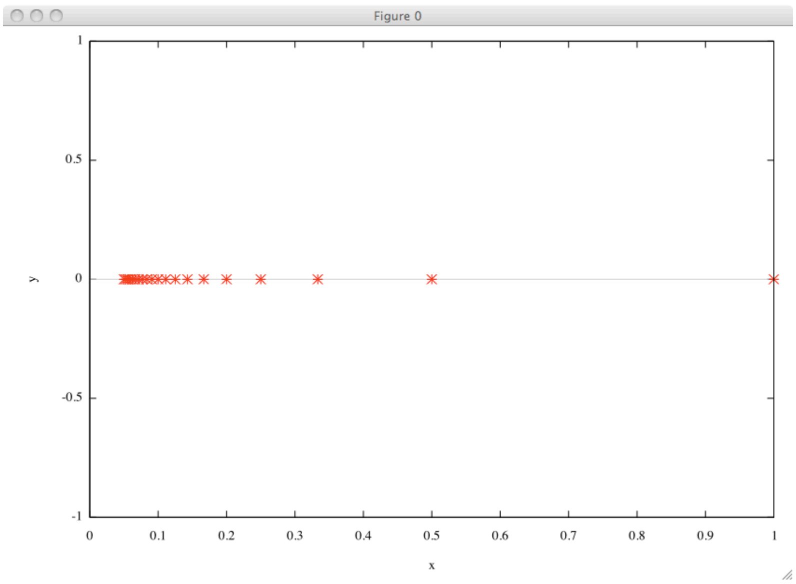
b) zweidimensional: als Funktionsgraph mit diskreten Punkten,

c) komplexe Folgen: die Punktmenge $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ in der Zahlenebene,

siehe folgende Beispiele.

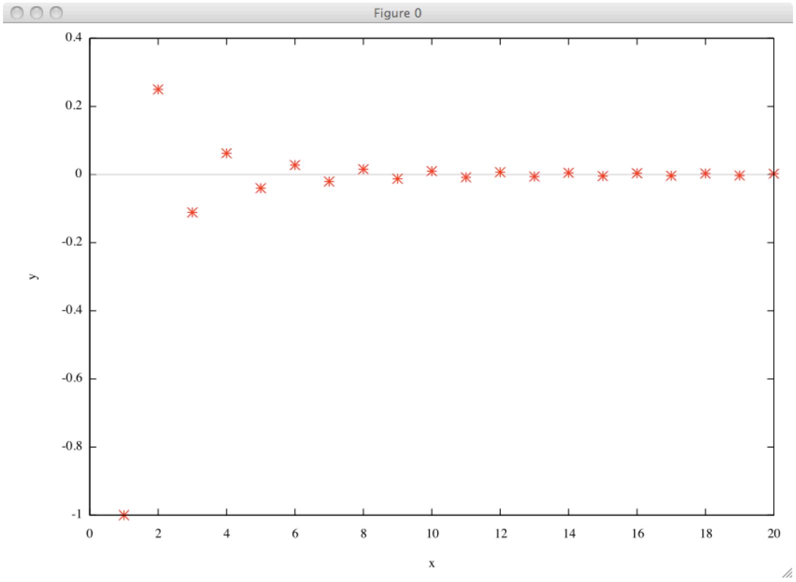
3.1.6 Beispiel

Die Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$*:*



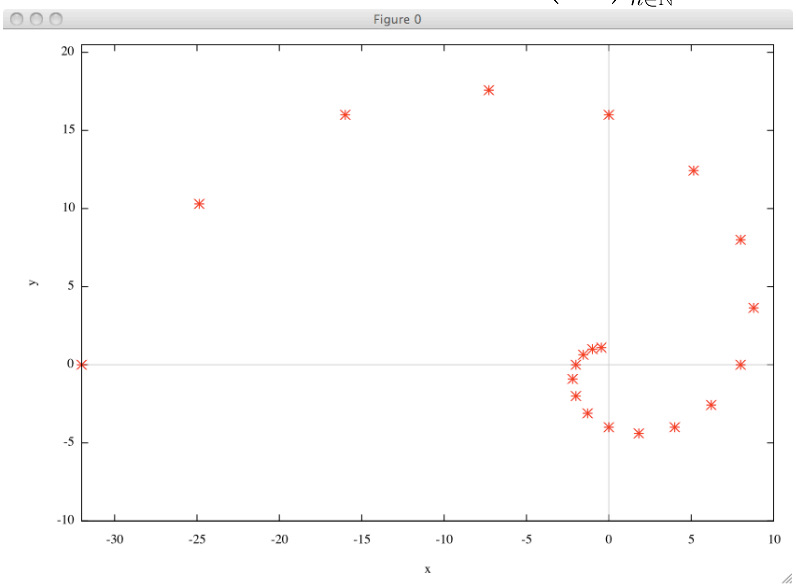
3.1.7 Beispiel

Die Folge $\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *(zweidimensionale Darstellung):*



3.1.8 Beispiel

Darstellung der komplexen Zahlenfolge $\left(j\,z^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit* $z = \sqrt[4]{2}\,e^{\frac{\pi}{8}j}$:



3.1.9 Definition

$\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *heißt* arithmetische Folge, *wenn*

$$a_n = a + (n-1)\,d \quad (n \in \mathbb{N})$$

mit $a, d \in \mathbb{R}$, *d. h.*

$$\left(a_n\right) = a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ \ldots$$

bzw. rekursiv

$$a_{n+1} = a_n + d \textit{ für } n \in \mathbb{N}$$

und

$$a_1 = a.$$

3.1.10 Beispiel

a) $2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ \ldots$

b) $1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ \ldots$

c) $0,;\ -10,\ -20,\ -30,\ -40,\ \ldots$

3.1.11 Definition

$\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *heißt* geometrische Folge, *wenn*

$$a_n = aq^{n-1} \quad (n \in \mathbb{N})$$

mit $a, q \in \mathbb{R}$, *d. h.*

$$\left(a_n\right) = a,\ aq,\ aq^2, \ldots$$

bzw. rekursiv

$$a_{n+1} = a_n q \qquad \textit{für } n \in \mathbb{N}$$

und

$$a_1 = a.$$

3.1.12 Beispiel

a) $1,\ 10,\ 100,\ 1000,\ 10000,\ \ldots$

b) $\sqrt{2},\ 2,\ 2\sqrt{2},\ 4,\ 2\sqrt{4},\ 8,\ \ldots$

c) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j,\quad -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j,\quad -1,\quad -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j,\quad \ldots$

3.1.13 Definition

Eine Folge $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *heißt* alternierend, *wenn*

$$a_n \cdot a_{n+1} < 0 \quad (n \in \mathbb{N})$$

d. h. a_n, a_{n+1} *haben unterschiedliches Vorzeichen.*

3.1.14 Beispiel

a)

$$-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots =$$

b)

$$\left(\sin n\frac{\pi}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

3.1.15 Satz

a) *Eine Folge* $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist*
monoton wachsend, *wenn*

$$a_n \leq a_{n+1} \quad (n \in \mathbb{N})$$

bzw. monoton fallend, *wenn*

$$a_n \geq a_{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

b) *Die Folge* $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist*
streng monoton wachsend, *wenn*

$$a_n < a_{n+1} \quad (n \in \mathbb{N})$$

bzw. streng monoton fallend, *wenn*

$$a_n > a_{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

3.1.16 Satz

a) *Eine Folge* $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist* nach oben beschränkt, *falls* $C \in \mathbb{R}$ *existiert mit*

$$a_n \leq C \quad (n \in \mathbb{N})$$

(C *heißt in diesem Falle* obere Schranke *von* $\left(a_n\right)$*).*

b) (a_n) *ist* nach unten beschränkt, *falls* $C \in \mathbb{R}$ *existiert mit*

$$a_n \geq C \quad (n \in \mathbb{N})$$

(C *heißt dann* untere Schranke *von* (a_n)*).*

c) *Eine Folge* $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist* beschränkt, *wenn sie nach oben und unten beschränkt ist. Dies ist genau dann erfüllt, wenn* $C \in [0,\infty)$ *existiert mit*

$$|a_n| \leq C \quad (n \in \mathbb{N}).$$

3.1.17 Beispiel
Untersuche auf Beschränktheit:

a) $\left(2n-1\right)$

b) $\left(-\frac{1}{n}\right)$

c) $\left(\frac{1-3n}{n}\right)$

3.2 Nullfolgen

3.2.1 Beispiel

$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$$

Folgenglieder liegen für großes n *"beliebig nahe" an* 0.

"Beliebig nahe" heißt: Für jedes $\varepsilon > 0$ *(beliebig klein),* n *"groß genug" ist*

$$|a_n| < \varepsilon.$$

3.2.2 Beispiel

$$\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}} = 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \ldots$$

Lösung

Sei $\varepsilon > 0$.

$$\left|\frac{1}{n^2}\right| < \varepsilon$$

3.2.3 Definition

$\Big(a_n\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ *heißt* Nullfolge*, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert mit*

$$|a_n| < \varepsilon \quad \textit{für alle } n \geq n_\varepsilon.$$

3.2.4 Beispiel

Ist

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}} &= 1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{4}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \ldots \\ &\approx 1, 0.7071, 0.5774, 0.5, 0.4472, \ldots\end{aligned}$$

Nullfolge?

Lösung

Ist $\Big(a_n\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

3.2.5 Beispiel

$$\begin{aligned}\Big(a_n\Big)_{n\in\mathbb{N}} &= \Big(\frac{2n+5}{3n}\Big)_{n\in\mathbb{N}} \\ &= \frac{7}{3}, \frac{9}{6}, \frac{11}{9}, \frac{13}{12}, \frac{15}{15}, \frac{17}{18}, \dots \\ &\approx 2.333, 1.5, 1.222, 1.083, 1, 0.944\dots\end{aligned}$$

eine Nullfolge?

Lösung

3.2.6 Beispiel

$$\Big(a_n\Big)_{n\in\mathbb{N}} = \Big(1+(-1)^n\Big)_{n\in\mathbb{N}} = 0, 2, 0, 2, 0, 2\dots$$

Lösung

3.2.7 Beispiel

$$\Big(a_n\Big)_{n\in\mathbb{N}} = \Big(\frac{(-1)^n}{n}\Big)_{n\in\mathbb{N}} = -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

Lösung

3.2.8 Satz

Sei $\Big(a_n\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge und $C \in \mathbb{R}$. Dann ist $\Big(Ca_n\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

3.2.9 Satz

Sei $\Big(a_n\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, $\Big(b_n\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkte Folge. Dann ist $\Big(a_nb_n\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

3.2.10 Beispiel

Sei $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \sin n$.

$\left(\frac{1}{n}\right)$ *ist eine Nullfolge, und* $(\sin n)$ *ist eine beschränkte Folge.*

Somit ist $\left(\frac{\sin n}{n}\right)$ *eine Nullfolge.*

3.3 Konvergenz

3.3.1 Definition

Sei $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge.* $a \in \mathbb{R}$ *heißt* Grenzwert *von* $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$,
und $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *heißt* konvergent gegen a,
wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ *eine Zahl* $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *gibt mit*

$$|a_n - a| < \varepsilon \text{ für jedes } n \geq N_\varepsilon.$$

Man schreibt dann

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

("Limes a_n *für* n *gegen unendlich") oder*

$$a_n \to a \quad (n \to \infty).$$

3.3.2 Bemerkung

a) *Jede konstante Folge konvergiert,*
d. h. für $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(a\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *gilt:* $\quad a_n \longrightarrow a$ *für* $n \to \infty$.

b) *Jede Nullfolge konvergiert gegen* 0.

c) $a_n \to a$ *für* $n \to \infty \iff \left(a_n - a\right)$ *Nullfolge.*

3.3.3 Satz

Aus $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ *und* $\lim_{n\to\infty} a_n = b$ *folgt* $a = b$,
(d. h. wenn ein Grenzwert existiert, ist er eindeutig).

3.3.4 Definition
Nicht konvergente Folgen heißen divergent.

3.3.5 Beispiel

$$\Big(a_n\Big)_{n\in\mathbb{N}} = \Big((-1)^n\Big)_{n\in\mathbb{N}} = -1, 1, -1, 1, \ldots \text{ ist divergent.}$$

3.3.1 Eigenschaften konvergenter Folgen

3.3.6 Satz
Jede konvergente Folge ist beschränkt (die Umkehrung gilt nicht, vgl. nächstes Beispiel).

3.3.7 Beispiel

a) $\Big(a_n\Big)_{n\in\mathbb{N}} = \Big(n\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist divergent und unbeschränkt.*

b) $\Big(a_n\Big)_{n\in\mathbb{N}} = \Big((-1)^n\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist divergent und beschränkt.*

c) $\Big(a_n\Big)_{n\in\mathbb{N}} = \Big(j^n\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist divergent und beschränkt.*

3.3.8 Satz
Sei $c \in \mathbb{R}$. *Seien* $\Big(a_n\Big)_{n\in\mathbb{N}}, \Big(b_n\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergente Folgen mit*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b.$$

Dann gilt:

a) $\Big(a_n + b_n\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist konvergent mit* $a_n + b_n \to a + b$.

b) $\Big(a_n - b_n\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist konvergent mit* $a_n - b_n \to a - b$.

c) $\Big(a_n \cdot b_n\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist konvergent mit* $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$.

d) $\left(c \cdot a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist konvergent mit* $c \cdot a_n \to c \cdot a$.

e) $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist konvergent mit* $\dfrac{a_n}{b_n} \to \dfrac{a}{b}$, *falls* $b_n \neq 0$ $(n \in \mathbb{N})$ *und* $b \neq 0$.

3.3.9 Beispiel

a) $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \to 0.$

b) $\left(\dfrac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \to 0\ .$

c) $\left(\dfrac{1}{n^3}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\dfrac{1}{n^2} \cdot \dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \to 0\ .$

d) $\left(\dfrac{1}{n^k}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\dfrac{1}{n^{k-1}} \cdot \dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \cdots = \left(\dfrac{1}{n} \cdots \dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \to 0\ .$

3.3.10 Beispiel

Grenzwert von $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\dfrac{1+3n+5n^2}{4n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Lösung

3.3.11 Beispiel

Konvergenz von $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\dfrac{3n^2+2}{4n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Lösung

3.3.12 Beispiel

Konvergenz von $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\dfrac{3n^2+4}{n^3+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Lösung

Verallgemeinert man die Ergebnisse der Beispiele **??** - **??**, so erhält man:

3.3.13 Satz

Die Folge $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\dfrac{P(n)}{Q(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit Polynomen*

$$P(n) = \sum_{k=0}^{m} a_k n^k,\ a_m \neq 0, \qquad Q(n) = \sum_{k=0}^{l} b_k n^k,\ b_l \neq 0$$

a) *konvergiert gegen* 0, *falls* $\operatorname{grad} P < \operatorname{grad} Q$, *d. h.* $m < l$

b) *konvergiert gegen* $\dfrac{a_m}{b_l}$, *falls* $\operatorname{grad} P = \operatorname{grad} Q$, *d. h.* $m = l$

c) *divergiert, falls* $\operatorname{grad} P > \operatorname{grad} Q$, *d. h.* $m > l$.

3.3.14 Wiederholung
$\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert* $\Longrightarrow$ $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *beschränkt.*
Die Umkehrung gilt i. a. nicht: Es sind Zusatzvoraussetzungen nötig.

3.3.15 Satz

$\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *sei monoton fallend und nach unten beschränkt oder monoton wachsend und nach oben beschränkt.*

Dann ist $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergent.*

3.3.16 Beispiel

Sei $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sqrt[n]{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. *Die Folge ist nach unten beschränkt und monoton fallend, also konvergent.*

Beweis

a) Es ist $a_n = 2^{\frac{1}{n}} \geq 0$, also nach unten beschränkt.

b)

$$\begin{aligned}\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ monoton fallend} \quad &\Longleftrightarrow \quad 2^{\frac{1}{n+1}} \le 2^{\frac{1}{n}}\\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{n+1}\ln 2 \le \frac{1}{n}\ln 2\\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{n+1} \le \frac{1}{n}\\ &\Longleftrightarrow \quad n+1 \ge n.\end{aligned}$$

Die letzte Aussage ist offensichtlich richtig, daher auch die äquivalente erste.

3.3.17 Satz

Seien $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}, \left(b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}, \left(c_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *Folgen mit* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$ *und*

$$a_n \le b_n \le c_n \qquad \textit{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dann ist

$$\lim_{n\to\infty} b_n = a.$$

Der Satz gilt auch, wenn die Ungleichung $a_n \le b_n \le c_n$ *nicht für alle* $n \in \mathbb{N}$, *sondern von einem Index* n_0 *an für alle größeren* $n \ge n_0$ *gilt.*

3.3.18 Beispiel

$$\left(b_n\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{2+(-1)^n}{n}\right) = \frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{5}, \frac{1}{6}, \frac{3}{7}, \frac{1}{8}, \dots$$

Wegen

$$\frac{1}{n} \le b_n \le \frac{3}{n}$$

und da $\frac{1}{n} \to 0$, $\frac{3}{n} \to 0$, *ist* $\left(b_n\right)$ *Nullfolge.*

3.3.19 Beispiel

$$a_n := \sqrt[n]{n} \to 1 \quad (n \to \infty).$$

(Beweis später, Differentialrechnung).

3.3.20 Beispiel
Für

$$\left(a_n\right) = \left(\sqrt[n]{a}\right), \qquad a > 1 \textit{ konstant.}$$

gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

Beweis

Für $n \geq a$ gilt

$$1 \leq \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{n}.$$

Behauptung folgt mit dem Einschließungssatz 3.3.17.

3.3.21 Beispiel

Für

$$\left(b_n\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sqrt[n]{b}\right)_{n\in\mathbb{N}}, \quad 0 < b < 1 \text{ konstant}$$

gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b} = 1.$$

Beweis

$\left(\frac{1}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sqrt[n]{\frac{1}{b}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Folge gemäß den Voraussetzungen von Beispiel 3.3.20. Daher ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = 1$$

also auch

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 1.$$

Die Beispiele 3.3.20 und 3.3.21 lassen sich zu folgender Aussage zusammenfassen:

3.3.22 Bemerkung

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1 \quad \text{für jedes } c > 0.$$

3.3.23 Beispiel (Konvergenzverhalten geometrischer Folgen)

$$\left(a_n\right) = \left(q^n\right), \quad q \text{ konstant :}$$

$$|q| < 1 \implies \lim_{n\to\infty} q^n = 0$$

$$q = 1 \implies \lim_{n\to\infty} q^n = 1$$

$$q = -1 \text{ oder } |q| > 1 \implies \left(q^n\right) \text{ ist divergent.}$$

Beweis

Sei $q \in \mathbb{R}$, $|q| < 1$ und sei $\varepsilon > 0$ beliebig klein gegeben:

$$\begin{aligned} |q^n| < \varepsilon \quad &\iff \quad n \ln|q| < \ln\varepsilon \\ &\iff \quad n > \frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}. \end{aligned}$$

3.3.24 Definition

Seien $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $\left(b_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *zwei reelle Zahlenfolgen mit den Eigenschaften (siehe Abbildung 3.1):*

a) $\left(a_n\right)$ *ist monoton steigend*

b) $\left(b_n\right)$ *ist monoton fallend*

c) $a_n < b_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$

d) $\left(b_n - a_n\right)$ *ist Nullfolge.*

Dann heißt die Folge der Intervalle $\left([a_n, b_n]\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine* Intervallschachtelung.

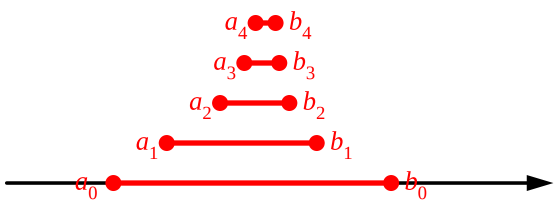


Abbildung 3.1: Intervallschachtelung

3.3.25 Satz
Zu jeder Intervallschachtelung $\left([a_n, b_n]\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *gibt es genau eine reelle Zahl* a, *so dass*

$$a \in [a_n, b_n] \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

3.3.26 Satz
Die Folgen
$$\left(a_n\right) = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right), \quad \left(b_n\right) = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right)$$
bilden eine Intervallschachtelung.

Sie bestimmt die Eulersche Zahl $e \approx 2.718281828459$.

Insbesondere ist
$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Beweis

Nach Definition 3.3.24 ist zu zeigen, dass

a) $\left(a_n\right)$ monoton wachsend

b) $\left(b_n\right)$ monoton fallend

c) $a_n < b_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$

d) $\left(b_n - a_n\right)$ Nullfolge

gilt:

a) $\left(a_n\right) = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist streng monoton wachsend, da $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$:

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\left(1+\frac{1}{n+1}\right) \\
&= \frac{\left(\frac{n+1}{n+1}+\frac{1}{n+1}\right)^n}{\left(\frac{n}{n}+\frac{1}{n}\right)^n}\left(\frac{n+1}{n+1}+\frac{1}{n+1}\right) \\
&= \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}\cdot\frac{n+2}{n+1} \quad =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\ldots &= \left(\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{n}{n+1}\right)^n\frac{n+2}{n+1}\\
&= \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^n\frac{n+2}{n+1}\\
&= \left(1-\frac{1}{n^2+2n+1}\right)^n\frac{n+2}{n+1}\\
&\geq \left(1-\frac{n}{n^2+2n+1}\right)\frac{n+2}{n+1} \quad \text{(Bernoulli-Ungleichung (1.4))}\\
&= \frac{n^2+2n+1-n}{n^2+2n+1}\cdot\frac{n+2}{n+1}\\
&= \frac{n^2+n+1}{(n+1)^2}\cdot\frac{n+2}{n+1}\\
&= \frac{n^3+n^2+n+2n^2+2n+2}{(n+1)^3}\\
&= \frac{n^3+3n^2+3n+2}{(n+1)^3}\\
&= \frac{(n+1)^3+1}{(n+1)^3} \quad > 1.
\end{aligned}
$$

b) $\left(b_n\right) = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist streng monoton fallend, da $\frac{b_n}{b_{n+1}} > 1$:

$$
\begin{aligned}
\frac{b_n}{b_{n+1}} &= \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}}\\
&= \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}} \quad = \ldots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dots &= \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}} \cdot \frac{n+1}{n+2} \\
&= \left(\frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2} \\
&= \left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^{n+1} \frac{n+1}{n+2} \\
&= \left(1 + \frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1} \frac{n+1}{n+2} \\
&\geq \left(1 + \frac{n+1}{n^2+2n}\right) \cdot \frac{n+1}{n+2} \quad \text{(Bernoulli-Ungleichung (1.4))} \\
&= \frac{n^2+2n+n+1}{n^2+2n} \cdot \frac{n+1}{n+2} \\
&= \frac{n^2+3n+1}{n^2+2n} \cdot \frac{n+1}{n+2} \\
&= \frac{n^3+3n^2+n+n^2+3n+1}{n^3+2n^2+2n^2+4n} \\
&= \frac{n^3+4n^2+4n+1}{n^3+4n^2+4n} \quad > 1.
\end{aligned}
$$

c) $a_n < b_n$:

$$
\begin{aligned}
b_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \\
&= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\
&= a_n + \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} \frac{1}{n}}_{>0} \quad > a_n.
\end{aligned}
$$

d) $b_n - a_n \to 0$:

$$\begin{aligned} b_n - a_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \\ &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}-1\right) \\ &= a_n \cdot \frac{1}{n} \end{aligned}$$

wobei $\left(a_n\right)$ beschränkt und $\left(\frac{1}{n}\right)$ Nullfolge ist.

Nachweis, dass $\left(a_n\right)$ beschränkt ist: Die Folge ist

- streng monoton wachsend (gem. a)),
- elementweise kleiner als $\left(b_n\right)$ nach c),
- daher ist jedes a_n kleiner als b_1 (weil $\left(b_n\right)$ monoton fallend ist).

3.3.27 Definition

Sei $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge.*

Sei

$$k_1 < k_2 < k_3 < \dots$$

eine unendliche geordnete Teilmenge aus $\mathbb{N}$.

Dann heißt $\left(a_{k_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ Teilfolge *von* $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

3.3.28 Beispiel

a)

$$\begin{aligned} \left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}} &= \left(n^{\frac{1}{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}} \\ \left(a_{3n}\right)_{n\in\mathbb{N}} &= \left((3n)^{\frac{1}{3n}}\right)_{n\in\mathbb{N}} \\ &= a_3, a_6, a_9, \dots \quad \textit{d. h. } k_n = 3n. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\Big(a_n\Big)_{n\in\mathbb{N}} &= \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}} \\
\Big(a_{n^2}\Big)_{n\in\mathbb{N}} &= \left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}} \\
&= a_1, a_4, a_9, \ldots \quad \text{d. h. } k_n = n^2.
\end{aligned}$$

3.3.29 Satz

Sei $\Big(a_n\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent gegen a und $\Big(a_{k_n}\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $\Big(a_n\Big)$.
Dann ist auch

$$\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = a.$$

3.3.30 Beispiel

$$(3n)^{\frac{1}{3n}} \to 1, \qquad \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \to e.$$

3.3.31 Definition (Uneigentliche Grenzwerte)
Sei $\Big(a_n\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge.

a)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

falls zu jedem $C \in \mathbb{R}$ („beliebig groß“) eine Zahl $N(C) \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$a_n > C \quad \text{für } n \geq N(C).$$

b)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

falls $\lim\limits_{n\to\infty} (-a_n) = \infty$
d. h. zu jedem $C \in \mathbb{R}$ („beliebig klein“) existiert $N(C)$ mit

$$a_n < C \quad \text{für alle } n \geq N(C).$$

3.3.32 Bemerkung

a) *Gilt* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$,
dann ist $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *nach oben nicht beschränkt und nur endlich viele* a_n *sind negativ.*

b) *Gilt* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, *dann ist* $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *nach unten nicht beschränkt und nur endlich viele* a_n *sind positiv.*

3.3.33 Satz

a) *Falls* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ *und* $b_n > 0$, *dann ist*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \infty.$$

b) *Falls* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ *und* $b_n < 0$, *dann ist*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = -\infty.$$

c) *Falls* $\lim\limits_{n\to\infty} |c_n| = \infty$, *dann ist*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{c_n} = 0.$$

3.3.34 Satz

Sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ *mit* $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$.
Dann ist:

a)

$$\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = a + b,$$

außer für $a = +\infty,\ b = -\infty$ *oder* $a = -\infty,\ b = +\infty$.

b)

$$\lim_{n\to\infty} a_n - b_n = a - b,$$

außer für $a = +\infty = b$ *oder* $a = -\infty = b$.

c)

$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$$

außer für $a = \pm\infty,\ b = 0$ *oder* $a = 0,\ b = \pm\infty$.

Festsetzung: $x + \infty := \infty$, $x - \infty := -\infty$, $x \cdot \infty := \infty$ *für* $x > 0$, $x \cdot \infty := -\infty$ *für* $x < 0$.

3.4 Grenzwerte von Funktionen

Im Folgenden betrachten wir reelle Funktionen.

3.4.1 Beispiel
Sei $y = x^2$, $P_0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ *fester Parabelpunkt,*
$P = (x, x^2)$ *variabel (siehe Abbildung 3.2).*
Steigung der Geraden durch P_0 *und* P*:*

$$f(x) \quad = \quad \frac{x^2 - \frac{1}{4}}{x - \frac{1}{2}}$$

Die Steigung ist eine Funktion von x. $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

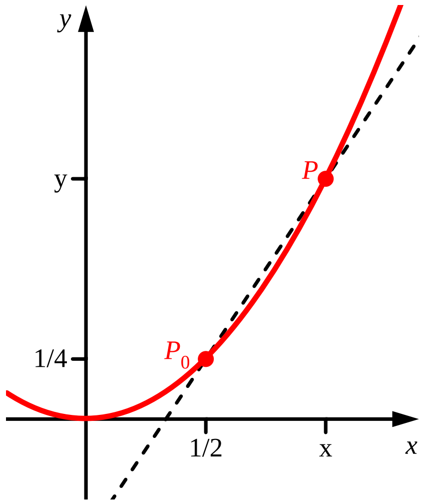


Abbildung 3.2: Tangente als Grenzwert

Frage: Was passiert mit $f(x)$ *für* $x \to \frac{1}{2}$ *?*

x	0.4	0.49	0.499 ...	0.6	0.51	0.501
$f(x)$	0.9	0.99	0.999 ...	1.1	1.01	01.001 ...

Allgemein ist für $x \in D_f$

$$f(x) = \frac{x^2 - \frac{1}{4}}{x - \frac{1}{2}} = \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}} = x + \frac{1}{2}.$$

Vermutung:

$$f(x) \to 1 \quad \text{für } x \to \frac{1}{2}$$

3.4.2 Bemerkung
Grenzwert einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *für* $x \to x_0$.
Test mit Folgen $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit den Eigenschaften*

a) $x_n \in D_f$

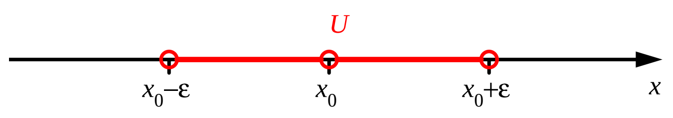
b) $x_n \neq x_0$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$

Untersucht wird, ob $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ *für alle solche Folgen existiert.*

f *soll in einer Umgebung* U *von* x_0 *definiert sein, mit Ausnahme von* x_0 *selbst:*

$$U = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\}, \quad U \subseteq D_f.$$

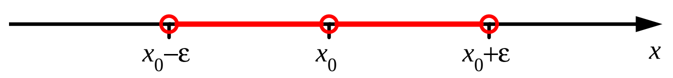


3.4.3 Definition

$$\dot{U}_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \varepsilon, x \neq x_0\}$$

heißt punktierte ε-Umgebung *von* x_0.
Es ist:

$$\begin{aligned} \dot{U}_\varepsilon(x_0) &= (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\} \\ &= (x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon). \end{aligned}$$



3.4.4 Definition

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *sei (mindestens) in einer punktierten* ε*-Umgebung* $\dot{U}_\varepsilon(x_0)$ *definiert.*
y_0 *heißt* Grenzwert *von* f *für* x *gegen* x_0,
wenn für jede Folge $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit*

$$x_n \in D_f \tag{3.1}$$

$$x_n \neq x_0 \tag{3.2}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \tag{3.3}$$

die Folge $\Big(f(x_n)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ *gegen* y_0 *konvergiert.*

Man schreibt dann

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0.$$

3.4.5 Beispiel

Sei $f(x) = \dfrac{x^2 - \frac{1}{4}}{x - \frac{1}{2}}$, *berechne* $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} f(x)$.

Sei $\Big(x_n\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine beliebige Folge mit den Eigenschaften (3.1), (3.2), (3.3), d. h.*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}, \quad x_n \neq \frac{1}{2}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} f(x) &= \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2 - \frac{1}{4}}{x_n - \frac{1}{2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(x_n + \frac{1}{2}\right)\left(x_n - \frac{1}{2}\right)}{x_n - \frac{1}{2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} x_n + \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1
\end{aligned}$$

Die Rechnung für jede beliebige Folge $\Big(x_n\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit den Eigenschaften 3.1), (3.2), (3.3). Also ist*

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x) = 1.$$

3.4.6 Beispiel

Berechne

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$$

Lösung

Sei $x_n \to 0, \quad x_n \neq 0.$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{x_n+1}-1}{x_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{x_n+1}-1)(\sqrt{x_n+1}+1)}{x_n(\sqrt{x_n+1}+1)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{x_n+1-1}{x_n(\sqrt{x_n+1}+1)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_n(\sqrt{x_n+1}+1)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x_n+1}+1} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

3.4.7 Beispiel

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{x}$$

Problem: $\sqrt{x}$ *ist nicht für* $x < 0$*, also nicht in punktierter Umgebung von* 0 *definiert. Trotzdem liegt es aufgrund des Funktionsgraphen (Abbildung 3.3) nahe,*

$$\sqrt{x} \to 0 \qquad \textit{für } x \to 0$$

festzusetzen.

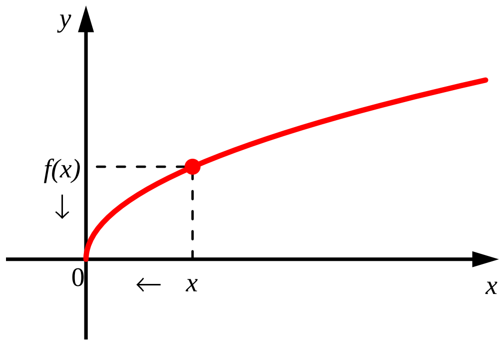


Abbildung 3.3: $f(x) = \sqrt{x}, \quad x \to 0$

Der Grenzwertbegriff für Funktionen wird folgendermaßen auf *einseitige Grenzwerte* erweitert:

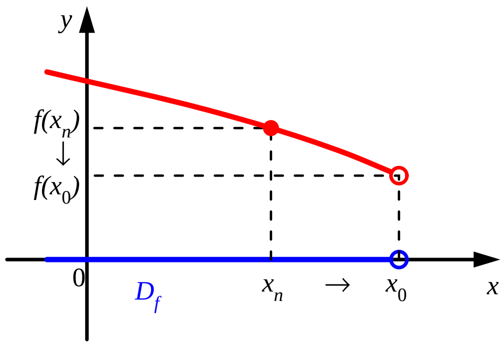
3.4.8 Definition

a) $f(x)$ *sei in* $(x_0 - c, x_0)$ *definiert.* y_l *heißt* linksseitiger Grenzwert *von* f *für* $x \to x_0$*, wenn (Abbildung 3.4)* $f(x_n)$ *gegen* y_l *konvergiert für jede Folge* $x_n \to x_0$*,* $x_n < x_0$*. Dann:*

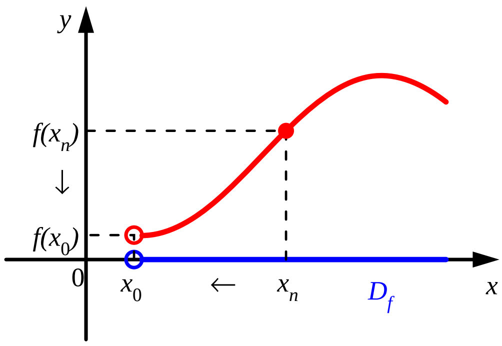
$$\lim_{x\to x_0-} f(x) := \lim_{\substack{x\to 0\\ x<x_0}} f(x) := y_l.$$

b) $f(x)$ sei in $(x_0, x_0 + c)$ definiert. y_r heißt rechtsseitiger Grenzwert *von f für $x \to x_0$, wenn (siehe Abbildung 3.4) $f(x_n)$ gegen y_r konvergiert für jede Folge $x_n \to x_0$, $x_n > x_0$. Dann:*

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) := \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > x_0}} f(x) := y_r.$$



a) Linksseitiger Grenzwert



b) Rechtsseitiger Grenzwert

Abbildung 3.4: Einseitige Funktionsgrenzwerte

3.4.9 Beispiel

$$\lim_{x \to 0+} \sqrt{x} = 0$$

3.4.10 Beispiel

Heavisidefunktion *(siehe Abbildung 3.5):*

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{für} \quad x < 0 \end{cases}$$

Rechts- und linksseitiger Grenzwert von $\Theta(x)$ bei 0:

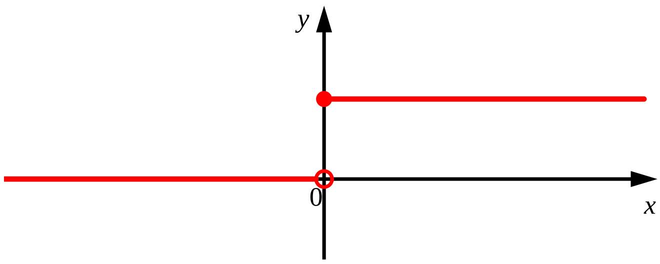


Abbildung 3.5: Heavisidefunktion

3.4.11 Beispiel

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x} & 1 < x \leq 3 \\ x - 2 & x \geq 3 \end{cases}$$

Grenzwerte bei $x = 3$:

3.4.12 Definition (Grenzwerte gegen $\pm\infty$)

a) *Sei $f(x)$ Funktion mit $D_f = (a, \infty)$, $\quad a \in \mathbb{R}$.*

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = y,$$

wenn $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = y$ für jede Folge $x_n \to \infty$.

b) *Sei $f(x)$ Funktion mit $D_f = (-\infty, a)$, $\quad a \in \mathbb{R}$.*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = y,$$

wenn $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = y$ für jede Folge $x_n \to -\infty$.

3.4.13 Beispiel

a)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

(Für beliebige Folge $\left(x_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \to \infty$ ist $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{x_n} = 0$).

b)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^k} = 0, \quad k \in \mathbb{N}$$

3.4.14 Satz (Rechenregeln für Grenzwerte)
Seien $f(x)$, $g(x)$ Funktionen mit

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f_0, \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = g_0.$$

Dann ist:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} f(x) + g(x) &= f_0 + g_0 \\
\lim_{x\to x_0} f(x) - g(x) &= f_0 - g_0 \\
\lim_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) &= f_0 \cdot g_0 \\
\lim_{x\to x_0} c \cdot f(x) &= c \cdot f_0 \\
\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f_0}{g_0} \quad \textit{falls } g_0 \neq 0.
\end{aligned}$$

3.4.15 Beispiel

a)

$$\lim_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0$$

b)

$$\lim_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0$$

c)

$$\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$$

d)

$$\lim_{x\to x_0} \tan x = \tan x_0 \qquad \textit{für } x_0 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

e)

$$\lim_{x\to x_0} \cot x = \cot x_0 \quad (x_0 \neq k\pi)$$

3.4.16 Satz

a) Sei $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ und $f(x) > 0$ in einer punktierten Umgebung von x_0. Dann ist

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = \infty$$

b) *Sei* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ *und* $f(x) < 0$ *in einer punktierten Umgebung von* x_0. *Dann ist*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$$

c) *Sei* $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \pm\infty$. *Dann ist*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

3.4.17 Satz (Einschließungssatz)
Sei

$$\lim_{x \to x_0} f_1(x) = y_0 = \lim_{x \to x_0} f_2(x)$$

und

$$f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x)$$

in punktierter Umgebung von x_0.
Dann ist

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0.$$

Eine wichtige Anwendung findet sich im folgenden Beispiel, das ein grundlegender Grenzwert für die Differentialrechnung der trigonometrischen Funktionen ist.

3.4.18 Beispiel

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Beweis
Geometrischer Beweis für den rechtsseitigen Grenzwert $x \to 0+$.
In der Figur in Abbildung 3.6 sei

a) F_1 die Fläche des rot gezeichneten Dreiecks $\triangle 0AB$

b) F_2 die Fläche des Kreissektors $0AB$ (rote und gelbe Fläche)

c) F_3 die gesamte Dreiecksfläche $\triangle 0AC$

Die einzelnen Flächen berechnen sich wie folgt:

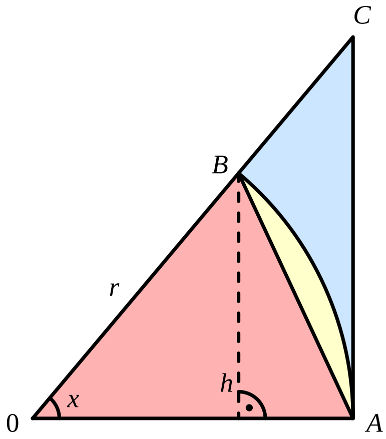


Abbildung 3.6: Der Grenzwert $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1$

a) Flächeninhalt F_1 eines gleichschenkligen Dreiecks mit Winkel x und Schenkellänge r (Abbildung 3.7):

   Für die eingezeichnete Höhe gilt

$$\sin x = \qquad \iff h =$$

$$\iff F_1 = \tag{3.4}$$

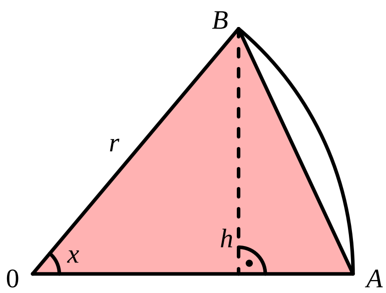


Abbildung 3.7: Dreieck $\triangle 0AB$

b) Flächeninhalt F_2 eines Kreissektors mit Winkel x und Radius r (Abbildung 3.8):
   Die Fläche des Vollkreises hat den Inhalt

$$F_0 = \pi r^2,$$

   davon ist der Bruchteil

$$F_2 = \tag{3.5}$$

   zu nehmen.

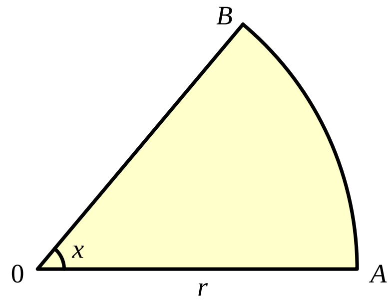


Abbildung 3.8: Kreissektor $0AB$

c) Flächeninhalt F_3 eines rechtwinkligen Dreiecks mit Winkel x und Ankathete r (Abbildung 3.9):

Tangens des Winkels:

$$\tan x = \qquad \iff h_2 =$$

$$\iff F_3 = \tag{3.6}$$

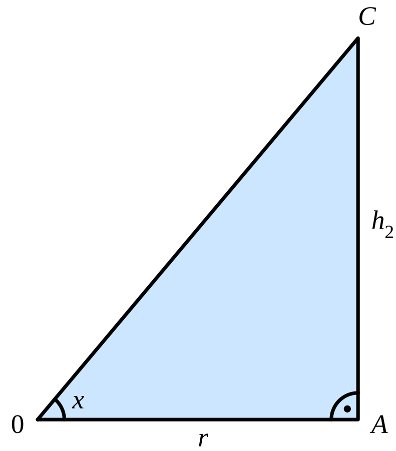


Abbildung 3.9: Dreieck $\triangle 0AC$

Berechnung von $\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{\sin x}{x}$:

Sei $x > 0$ und $x < \frac{\pi}{2}$.

Nach Konstruktion (siehe Abbildung 3.6) ist

$$F_1 \leq F_2 \leq F_3.$$

Die Flächeninhalte sind nach Gleichungen (3.4), (3.5), (3.6):

$$
\begin{aligned}
& 0 \leq \frac{1}{2} r^2 \sin x \leq \frac{x}{2} r^2 \leq \frac{1}{2} r^2 \tan x \\
\iff \quad & 0 \leq \sin x \leq x \leq \frac{\sin x}{\cos x} \\
\iff \quad & \frac{1}{\sin x} \geq \frac{1}{x} \geq \frac{\cos x}{\sin x} \\
\iff \quad & \begin{array}{ccccc} 1 & \geq & \dfrac{\sin x}{x} & \geq & \cos x \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ 1 & & & & 1 \quad (x \to 0) \end{array} \qquad (3.7) \\
\implies \quad & \frac{\sin x}{x} \to 1 \quad (x \to 0+).
\end{aligned}
$$

Linksseitiger Grenzwert: analog, da (3.7) auch für $x < 0$ gilt (denn es ist $\dfrac{\sin(-x)}{-x} = \dfrac{\sin x}{x}$ sowie $\cos(-x) = \cos x$).

Kapitel 4

Stetigkeit

4.0.1 Definition

Sei $f(x)$ in einer Umgebung von x_0 definiert.
f heißt in x_0 stetig, *wenn gilt:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

4.0.2 Bemerkung

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \iff \lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0).$$

4.0.3 Beispiel

a) $\sqrt{x}$, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$, a^x, $|x|$, *Polynome, rationale Funktionen, Potenz-, Logaritmusfunktionen sind auf ihrem gesamten Definitionsbereich stetig.*

b) $f(x) = \frac{1}{x}$ *ist in* $x = 0$ *nicht definiert, also nicht stetig.*

c) $f(x) = \operatorname{sgn} x$ *(siehe Abbildung 2.7) ist in* 0 *nicht stetig, aber in allen* $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

4.0.4 Definition

Die Funktion (siehe Abbildung 4.1)

$$\operatorname{sinc} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$\operatorname{sinc} x = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \textit{falls } x \neq 0 \\ 1 & \textit{für } x = 0 \end{cases}$$

heißt Sinus Cardinalis. sinc *ist stetig auf* $\mathbb{R}$.

Wichtige Eigenschaft:

$$\operatorname{sinc} 0 = 1 \ \textit{(vgl. Beispiel 3.4.18)}, \quad \operatorname{sinc} k\pi = 0 \quad (k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}).$$

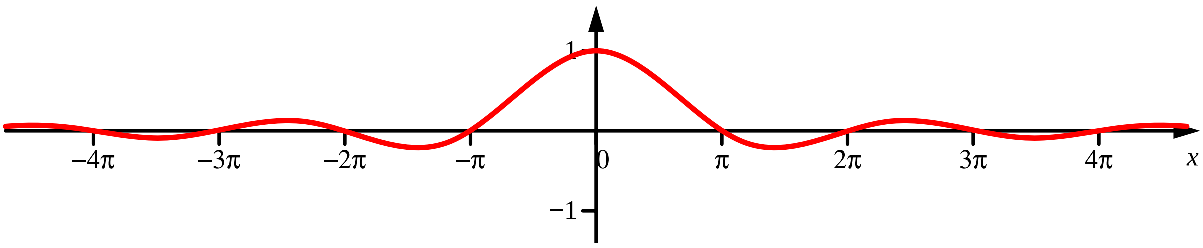


Abbildung 4.1: Sinus cardinalis ($\operatorname{sinc} x$)

4.0.5 Definition

a) $f(x)$ *heißt* rechtsseitig stetig *in* x_0, *wenn*

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0).$$

b) $f(x)$ *heißt* linksseitig stetig *in* x_0, *wenn*

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0).$$

4.0.6 Satz

$f(x)$ ist in x_0 stetig, wenn $f(x)$ dort rechts- und linksseitig stetig ist (d. h. rechts- und linksseitiger Grenzwert müssen existieren und gleich dem Funktionswert sein.)

4.0.7 Definition

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *heißt* stetig auf $[a, b]$, *wenn*

a) $f(x)$ *in allen* $a < x_0 < b$ *stetig,*

b) $f(x)$ *in* $x_0 = a$ *rechtsseitig und in* $x_0 = b$ *linksseitig stetig ist.*

4.1 Klassifikation von Unstetigkeitsstellen

a) $f : D_f \to \mathbb{R}$ sei in punktierter Umgebung von x_0 definiert, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existiert, $f(x_0) \neq \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

4.1.1 Beispiel

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin \pi x}{x} & \textit{für} \quad x \neq 0 \\ 1 & \textit{für} \quad x = 0 \end{cases}$$

(siehe Abbildung 4.2).

Die Funktion ist unstetig bei $x = 0$. Sie würde stetig werden, wenn der Funktionswert $f(0) = \pi$ gesetzt wird.

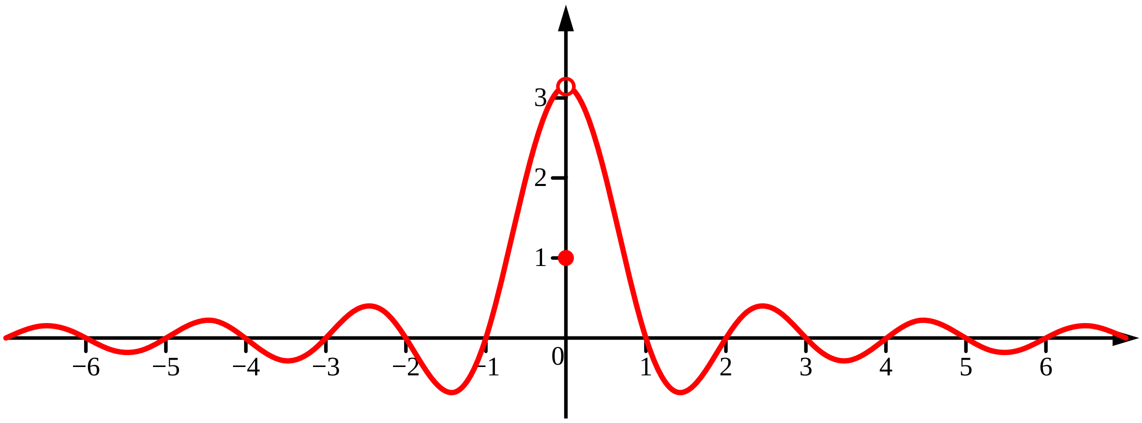


Abbildung 4.2: Die Funktion in Beispiel 4.1.1

b) $f : D_f \to \mathbb{R}$ sei in punktierter Umgebung von x_0 definiert, $x_0 \notin D_f$: Funktion mit Definitionslücke.

4.1.2 Beispiel

$$f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{(x+1)^2(x-2)}{(x+1)(x-1)^2}$$

Funktion mit Definitionslücke bei $x_0 = -1$ (und mit Polstelle bei $x = 1$, siehe Abbildung 4.3).

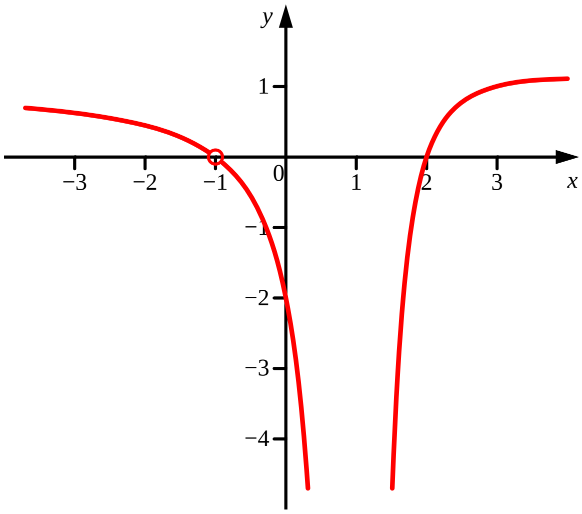


Abbildung 4.3: Funktion mit Definitionslücke (Beispiel 4.1.2)

c) $f : D_f \to \mathbb{R}$ sei in punktierter Umgebung von x_0 definiert.
$\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$ (beide existieren und sind endlich).
Sprungstelle mit endlichem Sprung,

4.1.3 Beispiel

(i) Heavisidefunktion $\Theta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & \textit{für} \quad x \geq 0 \\ 0 & \textit{für} \quad x < 0 \end{cases}$$

siehe Beispiel 3.4.10 (Abbildung 3.5): Sprungstelle bei $x_0 = 0$.

(ii) Signumfunktion $\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \textit{falls } x < 0 \\ 0 & \textit{falls } x = 0 \\ 1 & \textit{falls } x > 0 \end{cases}$$

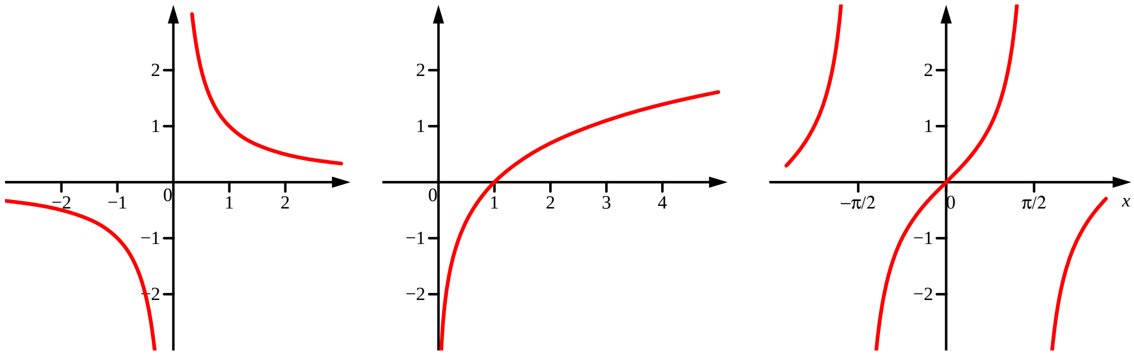
siehe Beispiel 2.2.6 (Abbildung 2.7): Sprungstelle bei $x_0 = 0$.

d) $f : D_f \to \mathbb{R}$ sei in punktierter Umgebung von x_0 definiert.
$\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = \pm\infty$
Unendlichkeitsstelle, Polstelle.

4.1.4 Beispiel

$f_1 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$	$f_2 : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$	$f_3 : \mathbb{R} \setminus \{\frac{2n+1}{2}\pi : n \in \mathbb{Z}\} \longrightarrow \mathbb{R}$
$f_1(x) = \frac{1}{x^k}$	$f_2(x) = \ln x$	$f_3(x) = \tan x$
Polstelle bei $x = 0$	*Polstelle bei* $x = 0$	*Polstellen bei* $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$

usw., siehe Abbildung 4.4



$f_1(x) = \frac{1}{x^k}$ $\qquad$ ${}_2f(x) = \ln x$ $\qquad$ $f_3(x) = \tan x$

Abbildung 4.4: Funktionen mit Polstelle

e) $f : D_f \to \mathbb{R}$ sei in punktierter Umgebung von x_0 definiert.
Ein einseitiger Limes ist endlich, der andere unendlich:
„Sprungstelle mit unendlichem Sprung“.

4.1.5 Beispiel

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \textit{für} \quad x \leq 0 \\ \ln x & \textit{für} \quad x > 0 \end{cases}$$

siehe Abbildung 4.5: unendliche Sprungstelle bei $x = 0$

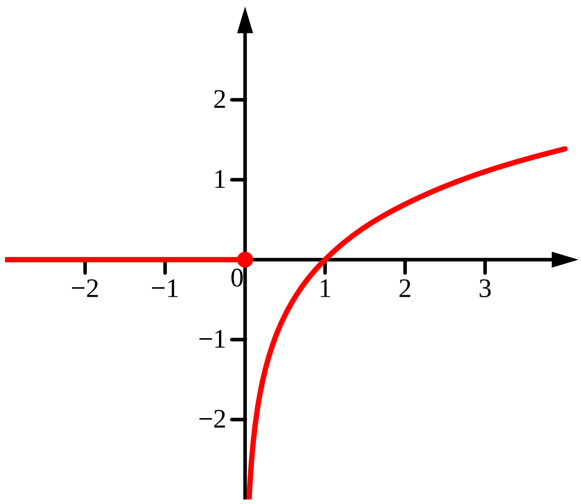


Abbildung 4.5: Funktion mit unendlichem Sprung

f) $f : D_f \to \mathbb{R}$ sei in punktierter Umgebung von x_0 definiert.
Für $x \to x_0-$ oder / und $x \to x_0+$ oszilliert f:
oszillierende Unstetigkeitsstelle.

4.1.6 Beispiel

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \sin \frac{1}{x}$$

(siehe Abbildung 4.6) hat unendlich oszillierenden Verlauf bei $x = 0$.

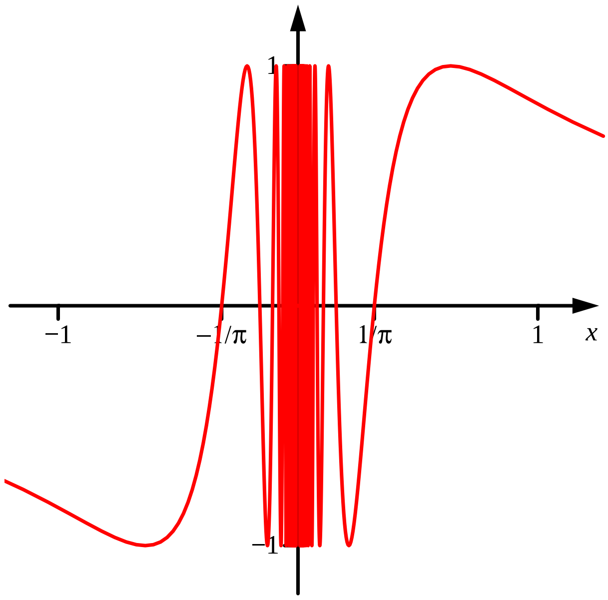


Abbildung 4.6: $\sin \frac{1}{x}$

Nullstellen der Funktion sind: $\dfrac{1}{x} = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

Maxima sind bei $\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$

Minima bei $\dfrac{1}{x} = \dfrac{3}{2}\pi + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$.

Oszillierende Unstetigkeit von $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$ bei $x = 0$:

(i) $\sin \dfrac{1}{x} = 0 \iff \qquad x =$

(ii) $\sin \dfrac{1}{x} = 1 \iff \qquad x =$

(iii) $\sin \dfrac{1}{x} = -1 \iff \qquad x =$

Wähle als Nullfolgen $\left(x_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$:

(i) $x_n = \dfrac{1}{n\pi} \to 0 \Longrightarrow f(x_n) \to$

(ii) $x_n = \dfrac{2}{(4n+1)\pi} \to 0 \Longrightarrow f(x_n) \to$

(iii) $x_n = \dfrac{2}{(4n+3)\pi} \to 0 \Longrightarrow f(x_n) \to \quad ,$

Da die Folgengrenzwerte $f(x_n)$ je nach gewählter Nullfolge x_n unterschiedlich sind, existiert $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ nicht!

4.1.7 Beispiel

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & \textit{für } x \neq 0 \\ 0 & \textit{für } x = 0 \end{cases}$$

(siehe Abbildung 4.7) ist stetig an der Stelle $x = 0$.

Z. B. ist für $x > 0$:

$$\begin{array}{ccccc} -x & \leq f(x) \leq & x & \\ \downarrow & & \downarrow & (x \to 0) \\ 0 & & 0 & \end{array}$$

Einschließungssatz liefert Behauptung.

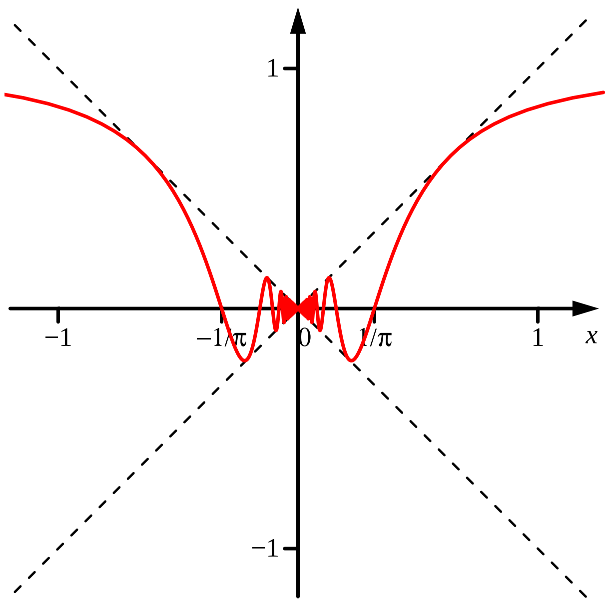


Abbildung 4.7: Funktion $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$

g) Überall definierte und nirgends stetige Funktion:

4.1.8 Beispiel (Dirichlet)
Die Dirichlet-Funktion (siehe Abbildung 4.8)

$$\chi \; : \; \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$\chi(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

ist nirgendwo stetig.

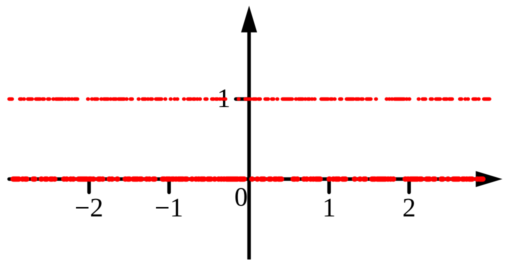


Abbildung 4.8: Dirichlet-Funktion

4.1.9 Satz
Rechenregeln für Stetigkeit:

a) *Sei* $f(x)$, $g(x)$ *in* x_0 *stetig.*

   (i) *Dann sind* $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ *in* x_0 *stetig.*

   (ii) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *ist stetig in* x_0 *falls* $g(x) \neq 0$.

b) *Sei* $g(x)$ *stetig in* x_0, $g(x_0) = y_0$ *und* $h(y)$ *stetig in* y_0.
Dann ist
$$f(x) = (h \circ g)(x) = h(g(x))$$
stetig in x_0.

c) $f(x)$ *sei stetig in* x_0, $f(x_0) = y_0$, *und* $f(x)$ *habe eine Umkehrfunktion* $f^{-1}(y)$.
Dann ist $f^{-1}(y)$ *stetig in* y_0.

4.1.10 Beispiel

a) $f(x) = \sin x + \cos 2x$ *ist stetig für beliebige* $x_0 \in \mathbb{R}$

b) $f(x) = e^{-x} \sin \omega x$ *ist stetig für alle* $x_0 \in \mathbb{R}$

c) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ *ist stetig für alle* $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

d) $f(x) = \dfrac{\cos x}{1+x^2}$ *ist stetig für* $x_0 \in \mathbb{R}$.

4.1.11 Beispiel

a) $f(x) = e^{\cos x}$ *ist stetig für alle* $x_0 \in \mathbb{R}$
($f = h \circ g$ *mit* $h(y) = e^y$, $g(x) = \cos x$*)*

b) $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$ *ist stetig für alle* $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
($f = h \circ g$ *mit* $h(y) = \sin y$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$*)*

c) $f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$ *ist stetig für alle* $x_0 \in \mathbb{R}$

d) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ *ist stetig für alle* $x_0 \in [-1,1] = D_f$
($f = h \circ g, \quad h(y) = \sqrt{y}, \quad g(x) = 1 - x^2$*)*

4.1.12 Beispiel

a) $\log_a x$ *ist stetig auf* $(0,\infty)$ *für beliebige* $a > 0, a \neq 1$.

b) $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$, $\operatorname{arccot} x$ *sind stetig auf ihren jeweiligen Definitionsbereichen.*

4.1.13 Satz (Nullstellensatz)
Sei $f(x)$ *stetig auf* $[a,b]$ *und* $f(a) \cdot f(b) < 0$.
Dann ist $f(x) = 0$ *für mindestens eine Stelle* $x \in (a,b)$.

Beweis

$f(a) \cdot f(b) < 0$ bedeutet, dass $f(a)$ und $f(b)$ unterschiedliche Vorzeichen haben (und beide nicht null sind).

Betrachte den Intervallmittelpunkt $x_1 = \dfrac{a+b}{2}$.

a) Wenn $f(x_1) = 0$ ist, hat man die Nullstelle gefunden und ist fertig.

b) Wenn $f(x_1)$ das gleiche Vorzeichen wie $f(a)$ hat, ersetze a durch x_1, d. h. betrachte das Intervall $I_1 = [a_1, b_1] = [x_1, b]$.

c) Andernfalls hat $f(x_1)$ das gleiche Vorzeichen wie $f(b)$. Ersetze b durch x_1 und betrachte das Intervall $I_1 = [a_1, b_1] = [a, x_1]$.

In beiden Fällen ist das Intervall I_1 halb so groß wie I (entweder die linke oder rechte Hälfte von I) und erfüllt die Voraussetzungen des Satzes.

Wiederhole den Unterteilungsschritt, bis ein Mittelpunkt die gesuchte Nullstelle ist. Falls dies nie zutrifft, bilden die gefundenen Intervalle I_n eine Intervallschachtelung. Diese bestimmt die Nullstelle x_0, denn

$$\begin{aligned} & a_n \to x_0, \quad b_n \to x_0 \\ & f(a_n) > 0, \quad f(b_n) < 0 \\ \text{oder} \quad & f(a_n) < 0, \quad f(b_n) > 0. \end{aligned}$$

Weil f stetig ist, muss

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(b_n)$$

sein. Dies ist nur möglich für den Grenzwert null.

4.1.14 Satz (Zwischenwertsatz, Bolzano-Cauchy)
Sei $f(x)$ stetig auf $[a, b]$.
Sei $A = f(a)$, $B = f(b)$.
Dann existiert zu jedem Wert C zwischen A und B eine Stelle $x \in (a, b)$ mit $f(x) = C$.

Beweis

Falls $C = A$ oder $C = B$, ist $x = a$ bzw. $x = b$ die gesuchte Stelle.

Andernfalls, d. h. für $C \neq A$ und $C \neq B$ erfüllt die Funktion $g(x) := f(x) - C$ die Voraussetzungen des Nullstellensatzes 4.1.13. Also gibt es eine Stelle $x \in [a, b]$ mit

$$g(x) = 0, \quad \text{d. h.} f(x) = C.$$

4.1.15 Beispiel
Lösung der Gleichung

$$10^x - x - 2 = 0.$$

$f(x) = 10^x - x - 2$ ist stetig und $f(0) = -1$, $f(1) = 7$.

Wir halbieren das Intervall $[0, 1]$ fortwährend und beschränken uns jeweils auf die Hälfte, bei der der Funktionswert von f am linken Rand negativ und am rechen positiv ist.

- *$f(0) = -1$, $f(1) = 7$.*
- *Daher ist $f(x_0) = 0$ für ein $x_0 \in (0, 1)$.*
- *Betrachte Intervallmitte $x = \frac{1}{2}$. Es ist $f(\frac{1}{2}) = \sqrt{10} - \frac{1}{2} - 2 > 0$.*
- *Es folgt $f(x_0) = 0$ für $x_0 \in (0, \frac{1}{2})$, da $f(0) < 0$, $f(\frac{1}{2}) > 0$.*

- *Betrachte Intervallmitte* $x = \frac{1}{4}$. *Es ist* $f(\frac{1}{4}) = \sqrt[4]{10} - \frac{1}{4} - 2 < 0$.
- *Es folgt* $f(x_0) = 0$ *für* $x_0 \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$, *da* $f(\frac{1)}{4}) < 0$, $f(\frac{1}{2}) > 0$.
- *usw.*

(Bisektionsverfahren zur Nullstellenbestimmung, Intervallschachtelung für die Nullstelle).

4.1.16 Satz (Extremwertsatz, Weierstrass)
Sei $f(x)$ *stetig auf* $[a, b]$.
Dann existieren $x_0, x_1 \in [a, b]$, *so dass*

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$$

d. h. f *ist beschränkt, und die untere und und obere Schranke werden als Funktionswerte angenommen.*

Kapitel 5

Differentialrechnung

5.1 Einführung

Gegeben sei eine *glatte* Funktion $f(x)$, definiert in einer Umgebung von x_0. Gesucht ist die Steigung der Tangente an den Graph von $f(x)$ in x_0 (siehe Abbildung 5.1

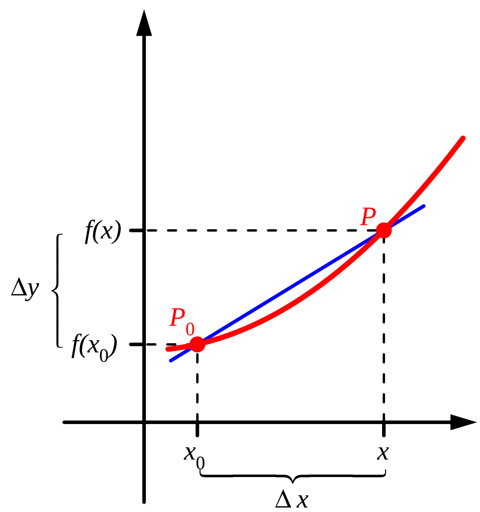


Abbildung 5.1: Sekante eines Funktionsgraphen

a) $P_0 = (x_0, f(x_0))$ fest

b) $P = (x, f(x))$ variabel

Steigung der Gerade durch P_0, P:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = s(x)$$

Tangentensteigung (siehe Abbildung 5.2):

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} s(x) &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\end{aligned}$$

wobei $h = x - x_0$,
d. h. $x = x_0 + h$ gesetzt wurde.

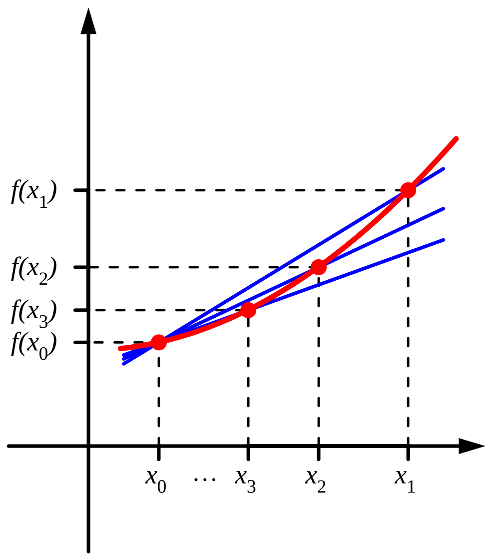


Abbildung 5.2: Tangente als Grenzwert von Sekanten

5.2 Ableitung

5.2.1 Definition
$f(x)$ sei in einer Umgebung von x_0 definiert. $f(x)$ heißt an der Stelle x_0 differenzierbar*, wenn*

$$f'(x_0) := \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

existiert.
$f'(x_0)$ heißt erste Ableitung *von $f(x)$ an der Stelle x_0.*

Übliche Schreibweisen:

$$f'(x_0), \quad y'|_{x=x_0}, \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}, \quad \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}, \quad \left.\frac{df}{dx}(x)\right|_{x=x_0}$$

("dy nach dx", "$df(x)$ nach dx").

$\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ heißt *Differenzenquotient*,

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\dfrac{df}{dx}(x_0)$ heißt *Differentialquotient*.

5.2.2 Definition
$f(x)$ heißt an der Stelle x_0 rechtsseitig (linksseitig) differenzierbar*, wenn*

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

bzw.

$$\lim_{h\to 0-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}$$

existiert.

Die Grenzwerte heißen rechtsseitige (linksseitige) Ableitung *von $f(x)$ an der Stelle x_0.*

5.2.3 Definition
$f(x)$ heißt auf $[a,b]$ differenzierbar*, wenn*

a) $f(x)$ differenzierbar an allen inneren Punkten $x_0 \in (a,b)$

b) $f(x)$ rechtsseitig differenzierbar am linken Rand $x_0 = a$

c) $f(x)$ linksseitig differenzierbar am rechten Rand $x_0 = b$

ist.

Wenn $f(x)$ differenzierbar auf $[a,b]$ ist, dann gilt:
$f'(x)$ ist eine Funktion mit Definitionsbereich $D_{f'} = [a,b]$.

5.2.4 Satz
Wenn $f(x)$ in $x_0 \in D_f$ differenzierbar ist, so ist $f(x)$ dort stetig.

Beweis
Zu zeigen ist $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ bzw. $\lim\limits_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$.
Für $h \neq 0$ ist

$$f(x_0 + h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot h + f(x_0).$$

Daher gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} f(x_0 + h) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} h + f(x_0) \\ &= f'(x_0) \cdot \lim_{h \to 0} h + f(x_0) \\ &= f(x_0) \end{aligned}$$

Somit ist $f(x)$ in x_0 stetig, da $\lim\limits_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$ gilt.

5.2.1 Ableitung der mathematischen Grundfunktionen

5.2.5 Satz
Für $f(x) = c$ gilt

$$f'(x) = 0$$

für beliebiges $x \in \mathbb{R}$.

Beweis

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = 0.$$

5.2.6 Satz
a) Für $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$.

b) Für $f(x) = x^a$ mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt

$$f'(x) = a \cdot x^{a-1} \tag{5.1}$$

für beliebiges $x \in \mathbb{R}$.

Beweis

a) Sei $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Mit dem Binomischen Satz 1.4.13 erhält man

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^n - x_0^n}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(x_0^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x_0^{n-k} h^k - x_0^n\right) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot h \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x_0^{n-k} h^{k-1} \\ &= \binom{n}{1} x_0^{n-1} \\ &= n \cdot x_0^{n-1} \end{aligned}$$

d.h. $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

b) Für $f(x) = x^a$, $a \in \mathbb{R}$ ist eine Verallgemeinerung des Binomischen Satzes notwendig (Potenzreihenentwicklung).

5.2.7 Beispiel

a) $f(x) = x \Longrightarrow f'(x) =$

b) $f(x) = x^3 \Longrightarrow f'(x) =$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

d) $f(x) = \sqrt{x}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

5.2.8 Satz
Für $f(x) = \sin x$ *und* $x \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$f'(x) = \cos x. \tag{5.2}$$

Beweis
Mit $\sin a - \sin b = 2\cos\dfrac{a+b}{2} \cdot \sin\dfrac{a-b}{2}$ folgt:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x_0+h)-\sin(x_0)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{2}{h}\cos\frac{x_0+h+x_0}{2}\cdot\sin\frac{x_0+h-x_0}{2} \\
&= \lim_{h\to 0}\cos\frac{2x_0+h}{2}\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \\
&= \lim_{h\to 0}\cos\frac{2x_0+h}{2}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \\
&= \cos\frac{2x_0}{2}\cdot 1 \\
&= \cos x_0
\end{aligned}$$

d. h. $\sin' x = \cos x$.

5.2.9 Satz
Für $f(x) = \ln x$ *mit* $x \in (0,\infty)$ *gilt:*

$$f'(x) = \frac{1}{x}. \tag{5.3}$$

Beweis
Wir benötigen die Hilfsaussage:

$$\lim_{\delta\to 0}(1+\delta)^{1/\delta} = e,$$

von der der Spezialfall $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, d. h. $\delta = \dfrac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ bekannt ist.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \ln \frac{x+h}{x} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{h} \cdot \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right) \\
&= \frac{1}{x} \lim_{h\to 0} \ln \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{x/h}
\end{aligned}$$

Substitution $\dfrac{h}{x} = \delta$: wegen $h \to 0$ gilt auch $\delta \to 0$.

Stetigkeit von $\ln x$: Reihenfolge von ln und lim lässt sich tauschen.

Dies ergibt:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{x} \lim_{\delta\to 0} \ln(1+\delta)^{1/\delta} \\
&= \frac{1}{x} \ln\left(\lim_{\delta\to 0}(1+\delta)^{1/\delta}\right) \\
&= \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x}.
\end{aligned}$$

5.2.10 Satz

Rechenregeln für Ableitungen:

Seien $f(x)$, $g(x)$ differenzierbar.

a) *Regel für konstante Faktoren: Sei $c \in \mathbb{R}$ konstant.*

$$y = c \cdot f(x) \implies y' = c \cdot f'(x) \tag{5.4}$$

b) *Summen- und Differenzregel*

$$y = f(x) \pm g(x) \implies y' = f'(x) \pm g'(x) \tag{5.5}$$

c) *Produktregel*

$$y = f(x) \cdot g(x) \implies y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \tag{5.6}$$

d) Quotientenregel

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \implies y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2} \tag{5.7}$$

e) Kettenregel

$$y = f\,(g(x)) \implies y' = f'\,(g(x)) \cdot g'(x) \tag{5.8}$$

(Merkregel: $y = f(u),\ u = u(x) \implies \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$ *)*

f) Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion

$y = f(x)$ *sei umkehrbar,*

$$x = f^{-1}(y) \implies \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)} \text{ mit } y = f(x). \tag{5.9}$$

(Merkregel: $y = f(x), x = f^{-1}(y) \implies \dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\frac{dy}{dx}}$ *)*

Beweis

a) *Konstanter Faktor:* Für $y = c \cdot f(x)$ ist

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{h \to 0} \frac{c \cdot f(x+h) - c \cdot f(x)}{h} \\ &= c \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= c \cdot f'(x) \end{aligned}$$

b) *Summenregel:* Für $y = f(x) + g(x)$ gilt

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) \ - \ (f(x) + g(x))}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= f'(x) + g'(x) \end{aligned}$$

c) *Produktregel:* Für $y = f(x) \cdot g(x)$ ist

$$\begin{aligned}
y' &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x+h)}{h} \\
&\qquad + \frac{f(x)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) \;-\; f(x)}{h} \cdot g(x+h) \;+\; f(x)\cdot \frac{g(x+h) \;-\; g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) \;-\; f(x)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} g(x+h) \\
&\qquad + f(x)\cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) \;-\; g(x)}{h} \\
&= f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)
\end{aligned}$$

d) Quotientenregel, Kettenregel, Regel für Umkehrfunktion werden ähnlich bewiesen.

5.2.11 Beispiel
Berechne die Ableitungen:

a) $y = 4x^3 - 5x^2 - 6, \quad y' =$

b) $y = \dfrac{x^3 - 2x - 3}{x^2 - 1}, \quad y' =$

c) $y = x^3 \cdot \sin x, \quad y' =$

d) $y = \sqrt{x^2 + 1}, \quad y' =$

e) $y = x \sin \dfrac{1}{x}, \quad y' =$

5.2.12 Satz

a)

$$f(x) = \cos x \implies f'(x) = -\sin x \tag{5.10}$$

b)

$$f(x) = \tan x \implies f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \tag{5.11}$$

c)

$$f(x) = \cot x \implies f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x$$

Beweis

a) Mit (5.2) und der Kettenregel (5.8) folgt:

$$\begin{aligned}(\cos x)' &= \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right)' \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) \\ &= -\sin x.\end{aligned}$$

b) Folgt mit der Quotientenregel (5.7), da die Ableitung von $\sin x$ (5.2) und Kosinus (5.10) bekannt sind:

c) wird wie b) gezeigt.

5.2.13 Satz

$$f(x) = e^x \implies f'(x) = e^x$$

Beweis

Die Ableitungen der Logarithmusfunktion wurde schon berechnet (5.3). Mit der Rechenregel für die Ableitung der Umkehrfunktion (5.9) ergibt sich:

$$\begin{aligned} y = e^x &\iff x = \ln y \\ &\implies \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y} = \frac{1}{e^x} \\ &\iff \frac{dy}{dx} = e^x. \end{aligned}$$

5.2.14 Satz

a)

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

b)

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

c)

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

d)

$$(\operatorname{arccot} x)' = \frac{-1}{1+x^2}.$$

Beweis

Z. B. a):

Benutze die Rechenregel für die Ableitung der Umkehrfunktion (5.9):

$$y = \arcsin x \iff x = \sin y, \quad |y| \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} &= \frac{1}{\cos y} \\
&= \frac{1}{|\cos y|} \qquad \text{da } |y| \leq \frac{\pi}{2}, \text{ d. h. } \cos y \geq 0 \\
&= \frac{1}{\sqrt{\cos^2 y}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.
\end{aligned}$$

b), c), d) werden ähnlich gerechnet.

5.2.15 Satz

a)

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a} \tag{5.12}$$

b)

$$(a^x)' = \ln a \cdot a^x \tag{5.13}$$

Beweis

a) Verwende die Transformationsformel für Logarithmen $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$, die Ableitung von $\ln x$ (5.3) und die Regel für konstante Faktoren (5.4.

b) Wegen $a = e^{\ln a}$ gilt nach den Rechenregeln für Exponenten:

$$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \ln a} \tag{5.14}$$

Das Ergebnis folgt mit der Kettenregel (verwende (5.14) in umgekehrter Richtung):

$$(a^x)' = \ln a \cdot e^{x \ln a} = \ln a \cdot a^x.$$

5.3 Ableitung, Aufgaben

5.3.1 Beispiel

Berechne die Ableitungen:

a) $y = (x^2+4)^2(2x^3-1)^3, \quad y' =$

b) $y = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}, \quad y' =$

c) $y = \left(\dfrac{x}{1+x}\right)^5, \quad y' =$

d) $y = \dfrac{\tan(2x)}{1-\cot(2x)}, \quad y' =$

e) $y = \ln(\ln x), \quad y' =$

f) $y = \ln \dfrac{x^4}{(3x-4)^2}, \quad y' =$

g) $y = \ln \sin x, \quad y' =$

h) $y = \sinh x, \quad y' =$

i) $y = \cosh x, \quad y' =$

j) $y = \tanh x, \quad y' =$

k) $y = \coth x, \quad y' =$

l) $y = 10\,x^{-3x}, \quad y' =$

m) $y = x^{1/\ln x}, \quad y' =$

5.3.2 Beispiel
Ableitung nach verschiedenen Parametern. Sei $V = \pi r^2 h$.

a) $\dfrac{dV}{dr} =$

b) $\dfrac{dV}{dh} =$

5.3.3 Beispiel
Ableitung nach Parametern. Sei $y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$.

a) $y' =$

b) $\dfrac{dy}{da_0} =$

c) $\dfrac{dy}{da_1} =$

d) $\dfrac{dy}{da_2} =$

5.4 Rechenmittel für Grenzwerte

5.4.1 Satz
Satz von l'Hospital
Seien $f(x)$, $g(x)$ in $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit

$$\lim_{x\to x_0} f(x_0) = 0 = \lim_{x\to x_0} g(x_0) \quad \textit{oder} \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty = \lim_{x\to x_0} g(x).$$

Dann ist:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

falls $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ *existiert.*

Beweis
Für den Fall $f(x_0) = 0 = g(x_0)$.

Es ist:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}\\
&= \lim_{x\to x_0}\frac{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}\\
&= \frac{\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}\\
&= \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.
\end{aligned}$$

5.4.2 Beispiel

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x} = \text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{”} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

5.4.3 Beispiel

$\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\ln x = \text{“ } 0\cdot(-\infty)\text{”} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0}(-x) = 0.$

5.4.4 Beispiel

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2} = \text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{”} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2x} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2} = \infty.$$

5.4.5 Beispiel

$\lim\limits_{x\to 0+} x^x = \text{“ } 0^0\text{”} = \lim\limits_{x\to 0+} e^{x\cdot\ln x} = e^0 = 1.$

Die erste Umformung verwendet $x = e^{\ln x}$, um zu einem Ausdruck mit Exponentialfunktion zu kommen.

Die Limesberechnung ist das Ergebnis von Beispiel 5.4.3.

Wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion (Beispiel 4.0.3) darf der Grenzwert im Exponenten berechnet werden.

Hinweis: Der Grenzwert kann nicht *nach Formel (5.1) berechnet werden, da der Exponent nicht konstant ist. Ebensowenig kann Formel (5.13) verwendet werden, da die Basis nicht konstant ist.*

5.4.6 Bemerkung

Der Grenzwert

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-2x-3}$$

von der Art $\dfrac{0}{0}$ *lässt sich auf zwei Weisen berechnen:*

a) Lösungsweg: Faktorisieren

$$\lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+1)} = \lim_{x\to 3} \frac{x+3}{x+1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

b) Lösungsweg: L'Hospital

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x^2-2x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{2x}{2x-2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

5.4.7 Beispiel

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x}$$

Lösung

Der Grenzwert ist zwar von der Art "$\frac{\infty}{\infty}$",
jedoch ist $\dfrac{(x+\sin x)'}{x'} = \dfrac{1+\cos x}{1}$ nicht konvergent,
daher ist L'Hospital–Regel nicht anwendbar!

Berechnung des Limes:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x}\right) = 1 + 0 = 1.$$

Die Regel von l'Hospital darf nur auf unbestimmte Ausdrücke in Form von Brüchen "$\frac{0}{0}$" bzw. "$\pm\frac{\infty}{\infty}$" angewendet werden. Andere Ausdrücke müssen zu solchen Brüchen entsprechend umgeformt werden, wie im folgenden Beispiel:

5.4.8 Beispiel

$$\lim_{x\to\infty} (e^x - x) = \text{“}\infty - \infty\text{”}.$$

Man kann auf folgende Weise zu einem Bruch kommen:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} (e^x - x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{e^x}{x} - 1 \quad \longrightarrow \quad \infty}{\frac{1}{x} \quad \longrightarrow \quad 0+} \\ &= \infty \end{aligned}$$

5.5 Grenzwert-Aufgaben

5.5.1 Beispiel

a) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-4x+1}{2x+1} =$

b) $\lim\limits_{x\to\pi} e^{\cos x} =$

c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{x^2-3x+2} =$

d) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{12}{x^3-8}\right) =$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1+3x}-1} =$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{\sqrt[4]{1+2x}-1} =$

g) $\lim\limits_{x\to \pi/4} \dfrac{1-\sin 2x}{1+\cos 4x} =$

h) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2x^2-1}{3x^2-4x} =$

i) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3x-1}{x^2+1} =$

j) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^3-1}{-2x^2+1} =$

k) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{3x+1}{\sqrt{3x^2+1}} =$

l) $\lim\limits_{x\to \infty} e^{-x} =$

m) $\lim\limits_{x\to -\infty} x + \sqrt{x^2-x+1} =$

n) $\lim\limits_{x\to -\infty} x - \sqrt{x^2-x+1} =$

o) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x}{x} =$

p) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sin(x-2)}{x^2-4} =$

q) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x+\sin x} =$

r) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+1}{\sin(x+1)} =$

5.6 Höhere Ableitungen

Sei $f:\ D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar,
dann ist $f'(x)$ eine Funktion mit $D_{f'} = D_f$.

Falls $f'(x)$ differenzierbar: $f''(x) = (f')'(x)$

Falls $f''(x)$ differenzierbar: $f'''(x) = (f'')'(x)$ usw.

5.6.1 Beispiel

Beispiel für eine beliebig oft differenzierbare Funktion und höhere Ableitungen:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sin x \\
f'(x) &= \cos x \\
f''(x) &= -\sin x \\
f'''(x) &= -\cos x \\
f^{(4)}(x) &= \sin x \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Allgemein:

$$\begin{aligned}
f^{(4k)}(x) &= \sin x, & f^{(4k+1)}(x) &= \cos x, \\
f^{(4k+2)}(x) &= -\sin x, & f^{(4k+3)}(x) &= -\cos x.
\end{aligned}$$

5.6.2 Definition

$f\ :\ D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ *heißt* n–mal differenzierbar, *wenn alle Ableitungen* $f',\ f'',\ f'',\dots,\ f^{(n)}$ *existieren.*

Schreibweise: $f^{(n)},\quad y^{(n)},\quad \dfrac{d^n f}{dx^n},\quad \dfrac{d^n y}{dx^n}$

5.6.3 Beispiel
Ableitungen von $f(x) = \ln x$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln x \\
f'(x) &= \frac{1}{x} \;=\; x^{-1} \\
f''(x) &= \big(x^{-1}\big)' \;=\; (-1)\cdot x^{-2} \;=\; -x^{-2} \\
f'''(x) &= \big(-x^{-2}\big)' \;=\; (-1)\cdot(-2)\cdot x^{-3} \;=\; 2\,x^{-3} \\
f^{(4)}(x) &= \big(2\cdot x^{-3}\big)' \;=\; (-1)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot x^{-4} \;=\; -6\,x^{-4} \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x) &= (-1)^{n-1}\,(n-1)!\,x^{-n}.
\end{aligned}$$

5.6.4 Beispiel
Ableitungen von $f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^n \\
f'(x) &= n\cdot x^{n-1} \\
f''(x) &= n\cdot(n-1)\cdot x^{n-2} \\
f'''(x) &= n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot x^{n-3} \\
&\vdots \\
f^{(k)}(x) &= n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)\cdot x^{n-k} \\
&= \frac{n!}{(n-k)!}\cdot x^{n-k} \qquad \textit{für } k \le n \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x) &= n!\cdot x^0 \;=\; n! \\
f^{(n+1)}(x) &= 0 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

5.6.5 Satz (Leibnizregel)
$u(x), v(x)$ seien n-mal differenzierbar.

a) Produktregel: $(uv)' = u'v + uv'$.

b) $(uv)'' = (u'v + uv')' = u''v + 2u'v' + uv''$.

c) $(uv)''' = (u''v + 2u'v' + uv'')' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''$.

d) Allgemein ist

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k)}.$$

5.6.6 Definition

Sei $f : D_f \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

$x_0 \in D_f$ *heißt* n-fache Nullstelle *von f, wenn es eine Funktion $g : D_f \to \mathbb{R}$ gibt mit $g(x_0) \neq 0$, so dass*

$$f(x) = (x - x_0)^n \, g(x).$$

5.6.7 Satz

Sei $f : D_f \to \mathbb{R}$ eine n-mal differenzierbare Funktion, $x_0 \in D_f$.

x_0 *ist eine n-fache Nullstelle von f, genau dann wenn*

$$0 = f(x_0) = f'(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0)$$

und

$$f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Beweis

Man wende die Leibnizregel auf $f(x) = (x - x_0)^n \, g(x)$ an.

5.7 Eigenschaften differenzierbarer Funktionen

5.7.1 Satz

Sei $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $x_0 \in (a, b)$ ein (innerer) Punkt des Definitionsbereichs mit der Eigenschaft:

$$f(x_0) \geq f(x) \text{ für alle } x \in (a, b)$$

d. h. $f(x_0)$ ist größter Funktionswert. Dann ist

$$f'(x_0) = 0$$

das heißt f hat eine waagerechte Tangente bei x_0.

Ebenso für den kleinsten Funktionswert (wenn er an einem inneren Punkt des Definitionsbereichs auftritt).

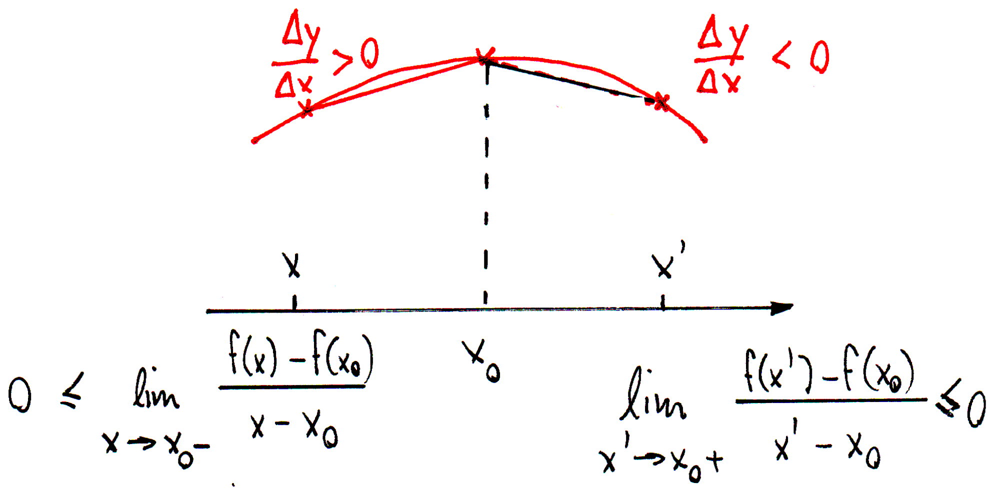


Abbildung 5.3: Maximum bei differenzierbarer Funktion

5.7.2 Beispiel
Maximum von $\sin x$, $0 < x < \pi$:

$$1 = \sin\frac{\pi}{2}$$

da $(\sin x)' = \cos x = 0$ *für* $x = \frac{\pi}{2}$.

5.7.3 Beispiel
Minimum von $\cosh x$:

$$1 = \cosh 0$$

da $(\cosh x)' = \sinh x = 0 \iff x = 0$ *(vgl. Abbildung 2.42).*

5.7.4 Satz (Satz von Rolle)
Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $f(a) = f(b)$.

Dann ist $f'(\xi) = 0$ an (mindestens) einem Punkt $\xi \in (a, b)$.

Beweis

Nach dem Satz von Weierstrass 4.1.16 nimmt die Funktion Minimum und Maximum als Funktionswerte an.

- Falls das Minimum $f(x_1)$ ist und $f(x_1) < f(a)$ $(= f(b))$: waagerechte Tangente bei x_1.
- Falls das Maximum $f(x_2)$ ist mit $f(x_2) > f(a)$ $(= f(b))$: waagerechte Tangente bei x_2.
- Falls beides nicht zutrifft: $f(a) = f(b)$, das Minimum ist nicht kleiner und das Maximum nicht größer: dann ist $f(x)$ konstant.

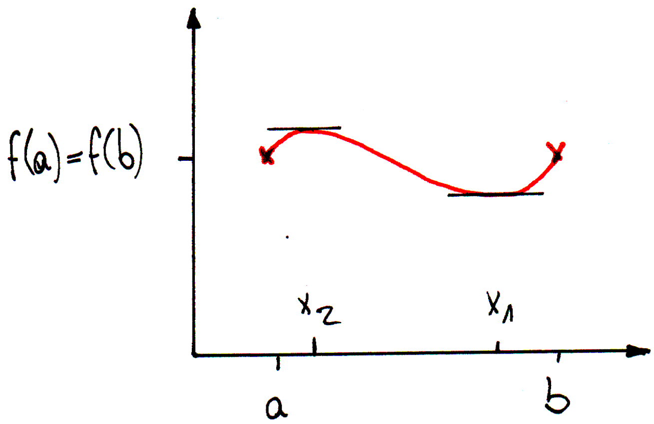


Abbildung 5.4: Zum Satz von Rolle

5.7.5 Satz (Mittelwertsatz)
Sei $f:\ [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann ist

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

für mindestens einen Punkt $\xi \in (a,b)$, d. h. die Tangente an mindestens einem inneren Punkt ist parallel der Geraden durch $(a, f(a))$, $(b, f(b))$.

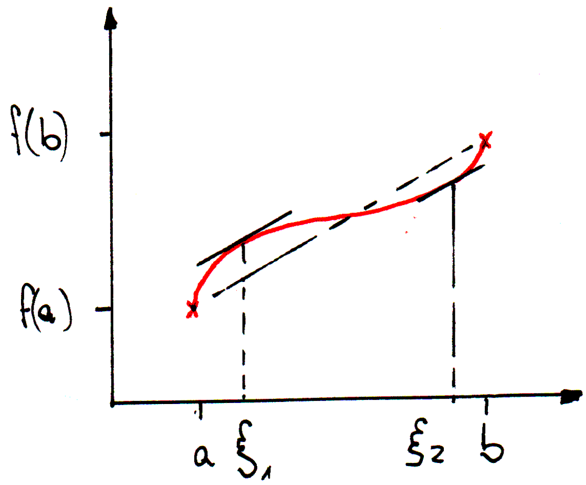


Abbildung 5.5: Zum Mittelwertsatz der Differentialrechnung

5.7.6 Folgerung
$f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sei differenzierbar mit

$$f'(x) = 0 \text{ für jedes } x \in [a,b].$$

Dann ist $f(x)$ konstant.

Beweis indirekt: Wenn $f(x)$ nicht konstant wäre:

- $x_1,\ x_2 \in [a,b]$ existieren mit $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- Zwischen x_1 und x_2 ist an einem Punkt ξ:
$$f'(\xi) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \neq 0, \text{ da } f(x_1) \neq f(x_2)$$
- Aber $f'(x)$ soll überall 0 sein.
- Also ist die Annahme, $f(x)$ wäre nicht konstant, falsch.

5.7.7 Folgerung
$f, g: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ seien differenzierbar mit

$$f'(x) = g'(x) \quad \text{für alle } x \in [a,b].$$

Dann ist

$$f(x) = g(x) + c \qquad \text{mit konstantem } c \in \mathbb{R}.$$

$f(x) - g(x)$ hat die Ableitung 0,
daher ist $f(x) - g(x)$ eine Konstante nach Folgerung 5.7.6.

5.7.8 Bemerkung
Für die vorangegangenen Aussagen (Satz 5.4 bis Folgerung 5.7.7) ist die Annahme wesentlich, dass D_f ein Intervall ist.

5.7.1 Monotonie

5.7.9 Satz
$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sei differenzierbar, und $D_f = I$ sei ein Intervall.

a) $f(x)$ ist monoton wachsend, genau dann, wenn $f'(x) \geq 0$ für $x \in I$ gilt.

b) $f(x)$ ist monoton fallend, genau dann, wenn $f'(x) \leq 0$ für $x \in I$ gilt.

Das heißt, aus der Monotonie folgt $f'(x) \geq 0$ (bzw. $f'(x) \leq 0$) für $x \in I$.

Aus $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) für $x \in I$ folgt die Monotonie von $f(x)$.

5.7.10 Satz
$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sei differenzierbar, $D_f = I$ sei ein Intervall.

a) Falls $f'(x) > 0$ für $x \in I$ gilt, so ist $f(x)$ streng monoton wachsend.

b) Falls $f'(x) < 0$ für $x \in I$ gilt, so ist $f(x)$ streng monoton fallend.

5.7.11 Beispiel

a) $f(x) = \ln x$ ist monoton wachsend, daher ist $(\ln x)' \geq 0$.

b) $f(x) = x + \sin x$. Es ist $f'(x) = 1 + \cos x \geq 0$, da $\cos x \geq -1$ ist. Damit ist $f(x)$ monoton wachsend.

c) Für $f(x) = \frac{1}{x}$ ist $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$, aber der Definitionsbereich ist unterbrochen. Die Funktion ist in Bereichen, die 0 enthalten, nicht monoton.

5.7.12 Beispiel

a) $f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x > 0$ d.h. $f(x)$ ist streng monoton wachsend.

b) $f(x) = x^3$ ist streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$, aber $f'(x) = 3x^2$ ist null für $x = 0$.

5.7.2 Extremwerte

5.7.13 Definition
Sei $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in D_f$.

a) *$f(x_0)$ heißt* Maximum *von $f(x)$, wenn*
$$f(x_0) \geq f(x) \text{ für alle } x \in D_f$$
gilt.

b) *$f(x_0)$ heißt* Minimum *von $f(x)$, wenn*
$$f(x_0) \leq f(x) \text{ für alle } x \in D_f$$
gilt.

c) *$f(x_0)$ heißt* lokales Maximum*, wenn es eine Umgebung $U = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ von x_0 gibt mit*
$$f(x_0) \geq f(x) \text{ für alle } x \in U.$$

d) *$f(x_0)$ heißt* lokales Minimum*, wenn es eine Umgebung $U = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ von x_0 gibt mit*
$$f(x_0) \leq f(x) \text{ für alle } x \in U.$$

5.7.14 Satz
Notwendige Bedingung : $f(x)$ sei in einer Umgebung U von x_0 differenzierbar. $f(x_0)$ sei lokaler Extremwert. Dann ist
$$f'(x_0) = 0.$$

Beweis
Betrachte z. B. eine differenzierbre Funktion mit lokalem Maximum bei x_0. In einer Umgebung von x_0 verläuft die Funktion wie in Abbildung 5.6 gezeigt. Der linksseitige Grenzwert des Differenzenquotienten ist positiv, der rechtsseitige negativ. Dann ist die Ableitung bei x_0 gleich null.

5.7.15 Beispiel
a) *$f(x) = x^2$ hat ein Minimum für $x = 0$. $f'(x) = 2x$, $f'(0) = 0$.*

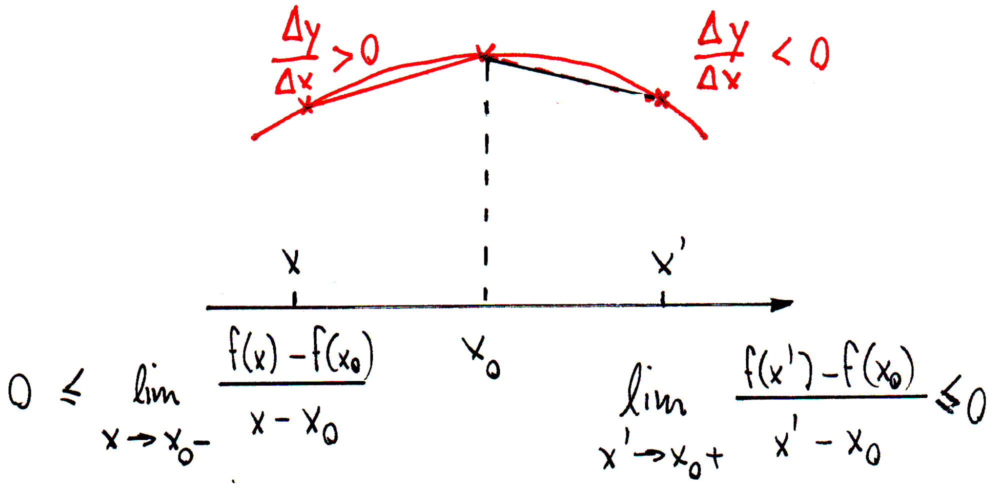


Abbildung 5.6: Differenzierbare Funktion, lokales Maximum

b) *$f(x) = \sin x$ wird maximal für $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$. $f'(x) = \cos x$ ist dort null.*
(Ebenso bei $x = \frac{3}{2}\pi + 2\pi k$, wo die Minima $\sin x = -1$ liegen).

c) *$f(x) = x^3$. $f'(x) = 3x^2$ wird null für $x = 0$.*
Kein Extremwert: Steigung der Kurve bei $x = 0$ ist null. Links und rechts davon monoton steigend!

5.7.16 Satz
Hinreichende Bedingung für lokale Extremwerte: $f(x)$ sei in einer Umgebung U von x_0 n-mal differenzierbar mit

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$$

und $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.

a) *Falls n eine gerade Zahl ist, dann hat $f(x)$ bei x_0 ein lokales*
   (i) *Maximum für $f^{(n)}(x_0) < 0$.*
   (ii) *Minimum für $f^{(n)}(x_0) > 0$.*

b) *Falls n eine ungerade Zahl ist, so hat $f(x)$ kein lokales Extremum an der Stelle x_0.*

5.7.17 Beispiel

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 & & \\ f'(x) &= 3x^2, & f'(0) &= 0 \\ f''(x) &= 6x, & f''(0) &= 0 \\ f'''(x) &= 6, & f'''(0) &\neq 0. \end{aligned}$$

d. h. bei $x_0 = 0$ liegt kein Extremwert.

5.7.18 Beispiel
Lokale Extrema von $f(x) = x^2\, e^{-x}$.

$$f'(x) = 2x\, e^{-x} - x^2\, e^{-x} = x\,(2-x)\, e^{-x}.$$

Es ist $f'(x) = 0$ für $x = 0$, $x = 2$. Dort liegen möglicherweise Extremwerte.
— Betrachtung der zweiten Ableitung:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \big((2x - x^2)\cdot e^{-x}\big)' \\ &= (2-2x)\cdot e^{-x} - (2x - x^2)\cdot e^{-x} \\ &= (2 - 4x + x^2)\cdot e^{-x}. \end{aligned}$$

$f''(0) = 2 > 0$: *Minimum für $x = 0$*
$f''(2) = -2 \cdot e^{-2} < 0$: *Maximum für $x = 2$.*

5.7.3 Krümmung und Wendepunkte

Linkskurve:

Tangentensteigung nimmt zu, wenn x wächst (Abbildung 5.7):

$$f'(x_0) < f'(x_0 + h)$$

an den Stellen x_0 für genügend kleine $h > 0$.

$$\Longrightarrow f''(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0+h) - f'(x_0)}{h} \geq 0$$

Rechtskurve:

Tangentensteigung nimmt ab, wenn x wächst (Abbildung 5.8):

$$f'(x_0) > f'(x_0 + h)$$

an den Stellen x_0 für $h > 0$.

$$\Longrightarrow f''(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0+h) - f'(x_0)}{h} \leq 0$$

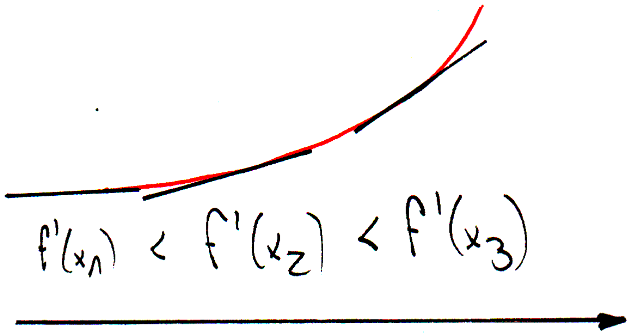


Abbildung 5.7: Linkskurve, zunehmende Tangentensteigung für wachsendes x

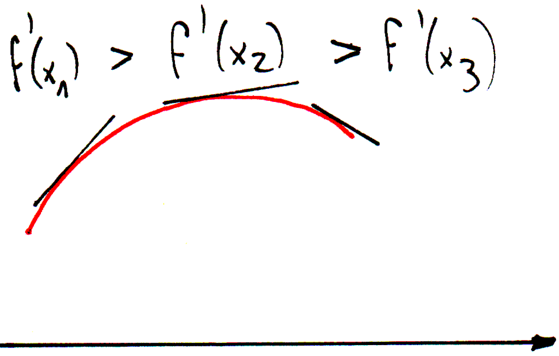


Abbildung 5.8: Rechtskurve, abnehmende Tangentensteigung für wachsendes x

5.7.19 Definition
f sei eine differenzierbare Funktion und $I \subset D_f$ ein Intervall.

a) *Der Graph von $f(x)$ ist auf I eine* Linkskurve, *wenn*

$$f'(x_0) < f'(x_0 + h)$$

für beliebige $x_0, \ x_0 + h \in I$ und für $h > 0$ gilt.

b) *Der Graph von $f(x)$ ist auf I eine* Rechtskurve, *wenn*

$$f'(x_0) > f'(x_0 + h)$$

für beliebige $x_0, \ x_0 + h \in I$ und für $h > 0$ gilt.

c) *$(x_0, f(x_0))$ heißt* Wendepunkt, *wenn $f(x)$ in x_0 von einer Rechts- in eine Linkskurve (oder umgekehrt) übergeht.*

5.7.20 Satz (Charakterisierung von Wendepunkten)
$f(x)$ habe in einer Umgebung von x_0 n Ableitungen mit

$$f''(x_0) = f'''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$$

und

$$f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Ist n ungerade, so hat $f(x)$ bei x_0 einen Wendepunkt, ansonsten nicht.

5.7.21 Beispiel
Wendepunkte von

$$f(x) = x^4 - 3x^2.$$

Zweite Ableitung:

$$f'(x) = 4x^3 - 6x, \quad f''(x) = 12x^2 - 6.$$

$$f''(x) = 0 \iff 12x^2 = 6 \iff x_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Für die dritte Ableitung $f'''(x) = 24x$ ist

$$f'''(x_1) \neq 0, \quad f'''(x_2) \neq 0,$$

also sind x_1, x_2 Wendepunkte.

5.8 Kurvendiskussionen

Zweck: Beschreibung der charakteristischen Eigenschaften einer mathematischen Funktion.

In einer vollständigen Kurvendiskussion werden folgende Eigenschaften einer Funktion behandelt:

a) Definitionsbereich

b) Nullstellen

c) Monotoniebereiche

d) Extremwerte

e) Wendepunkte

f) Verhalten für $x \to \infty$, $x \to -\infty$ und x gegen Randpunkte des Definitionsbereichs.

g) Symmetrie

Bei der Anwendung einer Kurvendiskussion auf ein technisches Problem kommt es auf die Fragestellung der Untersuchung an, ob alle diese Punkte zu behandeln sind. So wird es in der Elektrotechnik häufiger vorkommen, dass Extremwerte einer Funktion von Interesse sind, nicht aber Krümmung und Wendepunkte der Kurve.

5.8.1 Beispiel
Kurvendiskussion von $f(x) = \dfrac{-x^2+2x-1}{x+1}$.

a) *Definitionsbereich:*

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

b) *Ableitungen:*

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(-2x+2)(x+1) - (-x^2+2x-1)}{(x+1)^2} \\
&= -\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2} \\
&= -\frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2} \\
f''(x) &= -\frac{(2x+2)(x+1)^2 - (x^2+2x-3)\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} \\
&= -\frac{(x+1)\cdot 8}{(x+1)^4} \\
&= -\frac{8}{(x+1)^3} \\
&= -8(x+1)^{-3} \\
f'''(x) &= 24(x+1)^{-4}
\end{aligned}$$

c) *Nullstellen:*

$$\begin{aligned}
f(x) = \frac{-x^2+2x-1}{x+1} = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad -x^2+2x-1 = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad -(x-1)^2 = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad x = 1
\end{aligned}$$

d) *Monotonie:*

$$\begin{aligned}
f'(x) = -\frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2} < 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad -(x+3)(x-1) < 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad x < -3 \ \textit{oder}\ x > 1
\end{aligned}$$

d.h. $f(x)$ *ist monoton fallend auf* $(-\infty,-3)$ *und auf* $(1,\infty)$.

$$f'(x) = -\frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2} > 0 \iff -(x+3)(x-1) > 0$$

$$\iff -3 < x < 1$$

d.h. unter Berücksichtigung des Definitionsbereichs ist $f(x)$ *monoton steigend auf* $(-3,-1)$ *und auf* $(-1,1)$.

e) *Extremwerte:*

Notwendig: $f'(x) = -\dfrac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2} = 0 \iff x = -3$ *oder* $x = 1$.

$$f''(x) = -8(x+1)^{-3}$$

$f''(-3) = -\dfrac{8}{(-2)^3} > 0,$

d.h. $f(-3)$ *ist lokales Minimum.*

$f''(1) = -\dfrac{8}{2^3} < 0,$ *d.h.* $f(1)$ *ist lokales Maximum.*

f) *Krümmung:*

$$f''(x) = -\frac{8}{(x+1)^3} < 0 \iff x+1 > 0$$

$$\iff x > -1$$

d.h. auf $(-1,\infty)$ *ist* $f(x)$ *Rechtskurve.*

$$f''(x) > 0 \iff -\frac{8}{(x+1)^3} > 0$$

$$\iff x < -1$$

d.h. auf $(-\infty,-1)$ *ist* $f(x)$ *Linkskurve.*

g) *Wendepunkte:*

Keine, da $f''(x) = -\dfrac{8}{(x+1)^3} \neq 0$.

h) *Verhalten am Rand des Definitionsbereichs:*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^2+2x-1}{x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x+2-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{-x^2+2x-1}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x+2-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = -\infty$$

$$\lim_{x\to-1\,-} f(x) = \lim_{x\to-1\,-} \frac{-x^2+2x-1}{x+1} = \frac{-1-2-1}{0-} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-1\,+} f(x) = \lim_{x\to-1\,+} \frac{-x^2+2x-1}{x+1} == \frac{-1-2-1}{0+} = -\infty.$$

i) Symmetrien:

$$f(x) = \frac{-x^2+2x-1}{x+1}$$

keine.

5.9 Taylorformel

5.9.1 Beispiel

Gesucht ist die Tangente an $f(x) = e^x$ im Punkt $x_0 = 0$.

$$P(x) = ax + b$$

mit

$$b = P(0) = f(0) = 1$$

und

$$a = P'(0) = f'(0) = 1$$

d. h.

$$\begin{aligned} P(x) &= 1 + x \\ &= f(0) + f'(0) \cdot x. \end{aligned}$$

$P(x)$ hat an der Stelle $x_0 = 0$ denselben Funktionswert und dieselbe Ableitung wie $f(x)$. Bei $x_0 = 0$ ist

$$P(x) \approx f(x).$$

Bessere Näherungen: Polynom höheren Grades mit $P''(x_0) = f''(x_0)$, $P'''(x_0) = f'''(x_0)$ usw.

5.9.2 Satz (Taylor)
$f(x)$ sei in einer Umgebung von x_0 $(n+1)$-mal differenzierbar. Dann ist

$$f(x) = P(x) + R_n(x)$$

mit

$$\begin{aligned} P(x) &= f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) \\ &\quad + \frac{f''(x_0)}{2}\cdot(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot(x-x_0)^k \end{aligned}$$

und

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1}$$

mit ξ zwischen x_0 und x.

Es ist

$$\begin{aligned} P(x_0) &= f(x_0) \\ P'(x_0) &= f'(x_0) \\ &\vdots \\ P^{(n)}(x_0) &= f^{(n)}(x_0). \end{aligned}$$

5.9.3 Beispiel
Taylorpolynom Taylorpolynom vom Grade 5 für $f(x) = \sin x$ bei $x_0 = 0$:

$$\begin{aligned} f(0) &= \sin 0 = 0 \\ f'(0) &= \cos 0 = 1 \\ f''(0) &= -\sin 0 = 0 \\ f'''(0) &= -\cos 0 = -1 \\ f^{(4)}(0) &= \sin 0 = 0 \\ f^{(5)}(0) &= \cos 0 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow P(x) &= f'(0) \cdot (x-0) + \frac{f'''(0)}{3!} \cdot (x-0)^3 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!} \cdot (x-0)^5 \\ &= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 \end{aligned}$$

Fehlerabschätzung, z. B. falls $-0,1 \leq x \leq 0,1$:

$$\begin{aligned} R_5(x) &\leq \frac{f^{(6)}(\xi)}{(6)!} \cdot (x-0)^6 \\ \Longrightarrow |R_5(x)| &\leq \frac{|-\sin\,\xi|}{6!} \cdot |x^6| \\ &\leq \frac{1}{720} \cdot 0,1^6 \approx 1,4 \cdot 10^{-9}. \end{aligned}$$

Bei der Abschätzung wurde $|-\sin\,\xi| \leq 1$ und $|x| \leq 0,1$ verwendet.

Eine bessere Schranke erhält man, wenn man die schärfere Abschätzung $|-\sin\,\xi| \leq |\xi| \leq 0,1$ verwendet:

$$|R_5(x)| \leq 1,4 \cdot 10^{-10}.$$

5.9.4 Bemerkung
Ist $f(x)$ ein Polynom vom Höchstgrad n, d.h.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k,$$

so gilt

$$f(x) = P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k,$$

und es ist $R_n = 0$.

5.9.5 Beispiel
Enwicklung von $f(x) = x^2 + 7x + 1$ an der Stelle $x_0 = 1$:

$$\begin{aligned} & f(1) = 9 \\ f'(x) = 2x + 7 \quad & f'(1) = 9 \\ f''(x) = 2 \quad & f''(1) = 2 \end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} P(x) &= \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(1)}{k!} \cdot (x-1)^k \\ &= f(1) + f'(1) \cdot (x-1) + \frac{f''(1)}{2} \cdot (x-1)^2 \\ &= 9 + 9 \cdot (x-1) + (x-1)^2 \end{aligned}$$

(ausmultipliziert ergibt sich wieder $f(x)$).

5.9.6 Beispiel
Sei $a \in \mathbb{R}$.

Enwicklung von $f(x) = (1+x)^a$ an der Stelle $x_0 = 0$:
Zeichne Funktionsgraph für

a) $a = 2$

b) $a = \frac{1}{2}$

c) $a = -1$

d) $a = -\frac{1}{2}$

e) $a = \frac{3}{2}$

5.9.7 Satz (Binomische Reihe)
Sei $a \in \mathbb{R}$. Enwicklung von $f(x) = (1+x)^a$ an der Stelle $x_0 = 0$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= (1+x)^a \\
f'(x) &= a(1+x)^{a-1} \\
f''(x) &= a(a-1)\,(1+x)^{a-2} \\
&\vdots \\
f^{(k)}(x) &= a(a-1)\cdots(a-k+1)\,(1+x)^{a-k} \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x) &= a(a-1)\cdots(a-n+1)\,(1+x)^{a-n} \\
f^{(n+1)}(x) &= a(a-1)\cdots(a-n)\,(1+x)^{a-n-1}
\end{aligned}$$

d. h.

$$\begin{aligned}
f(0) &= 1, \\
f'(0) &= a, \\
f''(0) &= a(a-1), \\
&\vdots \\
f^{(k)}(0) &= a(a-1)\cdots(a-k+1), \\
&\vdots \\
f^{(n+1)}(\xi) &= a(a-1)\cdots(a-n)\,(1+\xi)^{a-n-1}.
\end{aligned}$$

Taylorpolynom:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k} x^k \tag{5.15}$$

mit

$$\binom{a}{k} = \frac{a(a-1)\cdots(a-k+1)}{k!}. \tag{5.16}$$

Taylorrest:

$$R_n(x) = \binom{a}{n+1}(1+\xi)^{a-n-1}x^{n+1} \tag{5.17}$$

mit ξ zwischen 0 und x.

(vgl. auch den Spezialfall (1.9)) von Formel (5.15)).

5.9.8 Beispiel

Elektrische Spule (zylinderförmig):

N Windungen, Länge ℓ, Durchmesser d, Stromstärke I.

Magnetische Feldstärke im Zentrum:

$$H = \frac{NI}{\ell}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{d}{\ell}\right)^2}}$$

Näherung durch Binomische Reihe für $d \ll \ell$?

Setze $x := (\frac{d}{\ell})^2$:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}} \approx \sum_{k=0}^{n}\binom{-\frac{1}{2}}{k}x^k$$
$$= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2}x^2 - \ldots$$

Magnetische Feldstärke:

$$H = \frac{NI}{\ell}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{d}{\ell}\right)^2}}$$

Mit $\frac{1}{\sqrt{1+x}} \approx P_1(x) = 1 - \frac{1}{2}x$:

$$H \approx \frac{NI}{\ell}\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{d}{\ell}\right)^2\right) = \frac{NI(2\ell^2 - d^2)}{2\ell^3}$$

Näherungsfehler:

$$R_1(x) = \binom{-\frac{1}{2}}{2}(1+\xi)^{-\frac{1}{2}-2}x^2 \approx \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2}x^2 = \frac{3}{8}x^2$$

Eingesetzt:

$$\Delta H = \frac{NI}{\ell} R_1(\frac{d}{\ell}) \approx \frac{NI}{\ell} \frac{3}{8} \left(\frac{d}{\ell}\right)^4$$

Rel. Fehler für $\frac{d}{\ell} = 0.1$:

$$\frac{\Delta H}{H} \approx \frac{\frac{NI}{\ell} \frac{3}{8} \left(\frac{d}{\ell}\right)^4}{\frac{NI}{\ell} \left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{d}{\ell}\right)^2\right)} = \frac{\frac{3}{8}10^{-4}}{1 - \frac{1}{2}10^{-2}} \approx 3.769\,10^{-5}.$$

5.9.9 Beispiel

Relativistische Masse (z. B. Elektron):

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

m_0*: Ruhemasse, c Lichtgeschwindigkeit.*

Kinetische Energie:

$$E_{kin} = (m - m_0)\, c^2.$$

Näherung gesucht für $v \ll c$.

Lösung

Binomische Reihe für $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-\frac{1}{2}}$:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-x)^k = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \ldots$$

Mit $x = \left(\frac{v}{c}\right)^2$ und $n = 1$:

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \approx m_0 \left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2\right)$$

Kinetische Energie näherungsweise:

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}} = (m - m_0)\, c^2 &\approx \left(m_0 \left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2\right) - m_0\right) c^2 \\ &= m_0 \left(\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2\right) - 1\right) c^2 = \frac{1}{2} m_0 v^2. \end{aligned}$$

Kapitel 6

Integralrechnung

6.1 Einführung

6.1.1 Definition
Sei $f : I \to \mathbb{R}$ *Funktion,* I *Intervall.*
$F : I \to \mathbb{R}$ *mit*

$$F'(x) = f(x) \qquad \text{für alle } x \in I$$

für alle $x \in I$ *heißt eine* Stammfunktion *von* $f(x)$ *auf* I.

6.1.2 Beispiel

a) Stammfunktion zu $f(x) = \cos x$ *ist*

b) Stammfunktion zu $f(x) = x^2$ *ist*

c) Stammfunktion zu $f(x) = \dfrac{1}{x}$ *ist*

6.1.3 Satz
Ist $F(x)$ *eine Stammfunktion zu* $f(x)$ *, so erhält man durch*

$$F(x) + C \qquad (C \in \mathbb{R})$$

sämtliche Stammfunktionen von $f(x)$*, falls* D_f *ein Intervall ist.*

Beweis
Zwei Funktionen $F_1(x), F_2(x)$ mit derselben Ableitung $f(x)$ unterscheiden sich durch konstanten Summand (vgl. 2. Folgerung aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung).

6.1.4 Definition
Sei $F(x)$ eine Stammfunktion von $f : I \to \mathbb{R}$, d. h. $F'(x) = f(x)$.
Dann heißt die Summe $F(x) + C, C \in \mathbb{R}$, unbestimmtes Integral *von $f(x)$:*

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

C heißt Integrationskonstante.

6.1.5 Bemerkung
Für integrierbare Funktionen gilt

$$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x).$$

Beweis
Mit einer Stammfunktion $F(x)$ zu $f(x)$,
d. h. $F'(x) = f(x)$ gilt:

$$\frac{d}{dx}\int f(x)dx = \frac{d}{dx}(F(x) + C) = f(x) + 0.$$

6.2 Unbestimmte Integrale

6.2.1 Unbestimmte Integrale der Grundfunktionen

6.2.1 Satz

a) $\displaystyle\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad x \in \mathbb{R}.$

b)
$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}, \quad x \in (0,\infty) \tag{6.1}$$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C, \quad x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$

d) $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C, \quad x \in \mathbb{R}.$

e) $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C, \quad x \in \mathbb{R}.$

f) $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C, \quad x \in \mathbb{R}.$

g) $\displaystyle\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + C, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{\tfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$

Beweis

Zu zeigen ist jeweils, dass linke und rechte Seite der Formeln dieselbe Ableitung haben: *Ableitung der Stammfunktion = Integrand.*

Vorgehensweise am Beispiel der Formeln c) und g):

Zu c): $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

Falls $x < 0$: $\displaystyle\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{d}{dx}(\ln(-x)) = \frac{1}{-x} \cdot -1 = \frac{1}{x}.$

Falls $x > 0$: $\displaystyle\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}.$

Zu g): $\displaystyle\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + C, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$:

Falls $\cos x > 0$ (d.h. $x \in (2\pi k - \frac{\pi}{2}, 2\pi k + \frac{\pi}{2}), k \in \mathbb{Z}$):

$$\frac{d}{dx}(-\ln|\cos x|) = \frac{d}{dx}(-\ln(\cos x)) = -\frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Falls $\cos x < 0$ (d.h. $x \in (2\pi k + \frac{\pi}{2}, 2\pi k + \frac{3}{2}\pi), k \in \mathbb{Z}$):

$$\frac{d}{dx}(-\ln|\cos x|) = \frac{d}{dx}(-\ln(-\cos x)) = -\frac{1}{-\cos x} \cdot \sin x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

6.2.2 Satz

a) $\displaystyle\int \sinh x\,dx = \cosh x + C.$

b) $\displaystyle\int \cosh x\,dx = \sinh x + C.$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C.$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x + C.$

e) $\displaystyle\int \frac{1}{\cosh^2 x}\,dx = \tanh x + C.$

f) $\displaystyle\int \frac{1}{\sinh^2 x}\,dx = \coth x + C.$

Beweis

Vergleiche dazu die Ableitungen in Satz 5.2.12.

6.2.2 Elementare Rechenregeln

6.2.3 Satz

a) $\displaystyle\int k\cdot f(x)\,dx = k\cdot\int f(x)\,dx$ *für* $k\in\mathbb{R}$ *konstant.*

b) $\displaystyle\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$

c) $\displaystyle\int (f(x)-g(x))\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx.$

Die folgende Regel ist ein Spezialfall der später behandelten Substitutionsregel (Satz 6.2.46), nämlich für lineare Funktionen. Wichtig ist, den Faktor $\frac{1}{a}$ bei der Anwendung nicht zu vergessen.

6.2.4 Satz

Sei $F(x)$ Stammfunktion zu $f(x)$. Dann ist

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C. \tag{6.2}$$

Beweis

Ableitung linke Seite :

$$\frac{d}{dx}\int f(ax+b)\,dx = f(ax+b).$$

Ableitung rechte Seite :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{a}F(ax+b)+C\right) = \frac{1}{a}F'(ax+b)\cdot a = f(ax+b).$$

6.2.3 Beispiele zur elementaren Integralrechnung

6.2.5 Beispiel

$$\int (x^2+6x-5)\,dx$$

6.2.6 Beispiel

$$\int \sqrt{x}dx$$

6.2.7 Beispiel

$$\int \frac{4}{\sqrt[3]{x}}$$

6.2.8 Beispiel

$$\int \cos(3x + \frac{\pi}{8})\, dx$$

6.2.9 Beispiel

$$\int \frac{1}{2x+5} dx$$

6.2.10 Beispiel

$$\int \sin^2 x \, dx$$

Lösung

Umformung von Potenz einer Winkelfunktion in Funktion mit mehrfachem Winkel mittels

$$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x \iff \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)) :$$

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \, dx &= \frac{1}{2} \int (1 - \cos(2x))\, dx \\ &= \frac{1}{2}(x - \frac{1}{2}\sin(2x)) + C \\ &= \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin(2x) + C. \end{aligned}$$

6.2.11 Beispiel

$$\int \sin x \cos x \, dx$$

6.2.12 Beispiel

$$\int 10x^4\,dx$$

6.2.13 Beispiel

$$\int x\sqrt{x}\,dx$$

6.2.14 Beispiel

$$\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,dx$$

6.2.15 Beispiel

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$$

6.2.16 Beispiel

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x}}$$

6.2.17 Beispiel

$$\int (5x^4 - 3x^2 + 1)\, dx$$

6.2.18 Beispiel

$$\int x^2(x^2 - 1)^2\, dx$$

6.2.19 Beispiel

$$\int \frac{x^2 - 3x + 4}{x}\, dx$$

6.2.20 Beispiel

$$\int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}}\,dx$$

6.2.21 Beispiel

$$\int \frac{x^2-x+1}{x-2}\,dx$$

6.2.22 Beispiel

$$\int \frac{x^4}{x-1}\,dx$$

6.2.23 Beispiel

$$\int \sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) dx$$

6.2.24 Beispiel

$$\int \cosh\left(2x - 5\right) dx$$

6.2.25 Beispiel

$$\int \frac{dx}{\cos^2 3x}$$

6.2.26 Beispiel

$$\int \frac{dx}{1+\cos x}$$

Hinweis: Kosinus-Additionstheorem

$$\begin{aligned} \cos 2t \quad (= \cos^2 t - \sin^2 t) &= 2\cos^2 t - 1 \\ \Longleftrightarrow \; 1 + \cos 2t &= 2\cos^2 t \\ \Longleftrightarrow \; 1 + \cos x &= 2\cos^2 \frac{x}{2} \quad (x = 2t) \end{aligned}$$

6.2.27 Beispiel

$$\int \frac{dx}{\sinh^2 2x}$$

6.2.28 Beispiel

$$\int \frac{dx}{(e^x + e^{-x})^2}$$

6.2.29 Beispiel

$$\int \frac{dx}{e^{2x} + e^{-2x} + 2}$$

6.2.4 Partielle Integration

6.2.30 Satz
Seien $u(x), v(x)$ differenzierbar , dann ist

$$\int u(x) \cdot v'(x)\, dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\, dx. \tag{6.3}$$

Entsprechend ist auch

$$\int u'(x) \cdot v(x)\, dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x)\, dx. \tag{6.4}$$

Beweis
Für Formel (6.3):
Ableitung linke Seite:

$$\frac{d}{dx} \int u(x) \cdot v'(x)\, dx = u(x) \cdot v'(x)$$

Ableitung rechte Seite:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left(u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\, dx \right) \\ = \; & \frac{d}{dx} \left(u(x) \cdot v(x) \right) - \frac{d}{dx} \int u'(x) \cdot v(x)\, dx \\ = \; & u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) - u'(x) \cdot v(x) \\ = \; & u(x) \cdot v'(x). \end{aligned}$$

6.2.31 Bemerkung
Die Formel für partielle Integration

$$\int u(x)v'(x)\, dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\, dx$$

soll angewendet werden, wenn

a) die Stammfunktion $v(x)$ von $v'(x)$ bekannt

b) das Integral $\int u'(x) \cdot v(x)\,dx$ auf der rechten Seite leichter zu lösen ist als das ursprüngliche Integral.

6.2.32 Beispiel

$$\begin{aligned} \int x \cdot e^x dx &= \int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{e^x}_{v'} dx \\ &= \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{e^x}_{v} - \int \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{e^x}_{v} dx \\ &= x \cdot e^x - e^x + C. \end{aligned}$$

6.2.33 Beispiel

$$\int x^2 \cdot \sin x\,dx$$

Lösung

Wende Rechenregel für partielle Integration zwei Mal hintereinander an:

$$\begin{aligned} \int x^2 \cdot \sin x\,dx &= \int \underbrace{x^2}_{u} \cdot \underbrace{\sin x}_{v'} dx \\ &= x^2 \cdot (-\cos x) - \int 2x \cdot (-\cos x)\,dx \\ &= -x^2 \cos x + 2 \int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\cos x}_{v'} dx \\ &= -x^2 \cos x + 2 \left(x \sin x - \int \sin x\,dx \right) \\ &= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C. \end{aligned}$$

6.2.34 Beispiel

$$\int \ln x\,dx$$

Lösung

Man fügt einen Faktor 1 ein und integriert partiell:

$$\begin{aligned} \int \ln x\,dx &= \int \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{\ln x}_{v} dx \\ &= x \cdot \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x\,dx \\ &= x \ln x - x + C. \end{aligned}$$

6.2.35 Beispiel

$$\begin{aligned}
\int x \ln x \, dx &= \int \underbrace{x}_{u'} \underbrace{\ln x}_{v} \, dx \\
&= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x} \, dx \\
&= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2} \int x \, dx \\
&= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C.
\end{aligned}$$

6.2.36 Beispiel
Zweite Möglichkeit :

$$\int \underbrace{x}_{u} \underbrace{\ln x}_{v'} \, dx \qquad (u' = 1, \quad v = x \ln x - x)$$

Lösung

$$\begin{aligned}
\int x \ln x \, dx &= x\,(x \ln(x) - x) - \int (x \ln x - x) \, dx \\
&= x\,(x \ln(x) - x) - \int x \ln x \, dx + \int x \, dx \\
\iff \underbrace{\int x \ln x \, dx}_{I} &= x\,(x \ln(x) - x) - \underbrace{\int x \ln x \, dx}_{I} + \frac{x^2}{2}
\end{aligned}$$

Fasse dies als Gleichung für die Unbekannte I auf

$$\begin{aligned}
\iff \; 2I = 2 \int x \ln x \, dx &= x^2 \ln x - \frac{x^2}{2} + C' \\
\iff \int x \ln x \, dx &= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C.
\end{aligned}$$

6.2.5 Beispiele zur partiellen Integration

6.2.37 Beispiel

$$\int \sin x \cos x \, dx$$

6.2.38 Beispiel

$$\int x^2 \cdot e^{-x} dx$$

6.2.39 Beispiel

$$\int x \ \cosh x \, dx$$

6.2.40 Beispiel

$$\int \sqrt{x} \ln x \, dx$$

6.2.41 Beispiel

$$\int (x^2 + x) \ln (x + 1) \, dx$$

6.2.42 Beispiel

$$\int x\,(\ln x)^2\,dx$$

– Integrale von Potenzen von $\cos x$ treten später bei der sogenannten Partialbruchzerlegung (siehe Formel (6.9)) auf.

Durch partielle Integration lassen sich Rekursionsformeln für $\displaystyle\int \cos^n x\,dx$ herleiten:

6.2.43 Satz

Mit $I_n = \displaystyle\int \cos^n x\,dx$ *gilt:*

$$I_n = \frac{1}{n}\sin x\;\cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}. \tag{6.5}$$

Dabei ist

$$I_1 = \int \cos x\,dx = \sin x + C, \quad I_0 = \int 1\,dx = x + C.$$

Beweis

$$
\begin{aligned}
I_n = \int \cos^n x\,dx &= \int \underbrace{\cos x}_{u'}\ \underbrace{\cos^{n-1} x}_{v}\ dx \\
&= \sin x\ \cos^{n-1} x + \int \sin^2 x\,(n-1)\cos^{n-2} x\,dx \\
&= \sin x\ \cos^{n-1} x + \int (1-\cos^2 x)(n-1)\cos^{n-2} x\,dx \\
&= \sin x\ \cos^{n-1} x \\
&\quad +(n-1)\int \cos^{n-2} x\,dx - (n-1)\int \cos^n x\,dx \\
&= \sin x\ \cos^{n-1} x + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \\
\Longrightarrow nI_n &= \sin x\ \cos^{n-1} x + (n-1)I_{n-2} \\
\Longrightarrow I_n &= \frac{1}{n}\sin x\ \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n}I_{n-2}.
\end{aligned}
$$

Rekursionsformeln für $\int \sin^n x\,dx$:

6.2.44 Satz

Mit $I_n = \int \sin^n x\,dx$ *gilt:*

$$I_n = -\frac{1}{n}\cos x\ \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n}I_{n-2}. \tag{6.6}$$

Dabei ist

$$I_1 = \int \sin x\,dx = -\cos x + C, \quad I_0 = \int 1\,dx = x + C.$$

Beweis

$$
\begin{aligned}
I_n = \int \sin^n x\,dx &= \int \underbrace{\sin x}_{u'}\ \underbrace{\sin^{n-1} x}_{v}\ dx \\
&= -\cos x\ \sin^{n-1} x + \int \cos^2 x\ (n-1)\sin^{n-2} x\,dx \\
&= -\cos x\ \sin^{n-1} x + \int (1-\sin^2 x)(n-1)\sin^{n-2} x\,dx \\
&= -\cos x\ \sin^{n-1} x \\
&\quad +(n-1)\int \sin^{n-2} x\,dx - (n-1)\int \sin^n x\,dx \\
&= -\cos x\ \sin^{n-1} x + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \\
\Longrightarrow nI_n &= -\cos x\ \sin^{n-1} x + (n-1)I_{n-2} \\
\Longrightarrow I_n &= -\frac{1}{n}\cos x\ \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}.
\end{aligned}
$$

6.2.45 Beispiel
Anwenden der Rekursionsformel (6.6):

Berechne $\int \sin^5 x\,dx$*:*

$$
\begin{aligned}
\int \sin^5 x\,dx &= -\frac{1}{5}\cos x\ \sin^4 x + \frac{4}{5}\int \sin^3 x\ dx \\
&= -\frac{1}{5}\cos x\ \sin^4 x + \frac{4}{5}\left(-\frac{1}{3}\cos x\ \sin^2 x + \frac{2}{3}\int \sin x\ dx\right) \\
&= -\frac{1}{5}\cos x\ \sin^4 x + \frac{4}{5}\left(-\frac{1}{3}\cos x\ \sin^2 x - \frac{2}{3}\cos x + C\right) \\
&= -\frac{1}{5}\cos x\ \sin^4 x - \frac{4}{15}\cos x\ \sin^2 x - \frac{8}{15}\cos x + C'.
\end{aligned}
$$

6.2.6 Integration durch Substitution

6.2.46 Satz
Es sei $F(z)$ Stammfunktion zu $f(z)$, d.h.

$$\int f(z)\,dz = F(z) + C.$$

Sei $g(x)$ differenzierbar.
Dann ist

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = F(g(x)) + C.$$

Beweis

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = F(g(x)) + C.$$

Zu zeigen : Ableitung linke und rechte Seite sind gleich.

Ableitung linke Seite :

$$\frac{d}{dx}\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

Ableitung rechte Seite:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(F(g(x)) + C) &= F'(g(x)) \cdot g'(x) \\ &= f(g(x)) \cdot g'(x).\end{aligned}$$

Merkregel Substitution:

$$\int f(u)\,\frac{du}{dx}\,dx = \int f(u)\,du.$$

6.2.47 Beispiel

$$\int \cos(5x - \frac{\pi}{6})\,dx$$

Lösung

Substitution: $u = 5x - \frac{\pi}{6}, \quad \frac{du}{dx} = 5, \quad dx = \frac{1}{5}\,du$
(vergleiche auch mit der Rechenregel (6.2)):

$$\begin{aligned}
\int \cos\,(5x - \frac{\pi}{6})\,dx &= \int \cos u \cdot \frac{1}{5}\,du \\
&= \frac{1}{5}\int \cos u\,du \\
&= \frac{1}{5}\sin u + C \\
&= \frac{1}{5}\sin(5x - \frac{\pi}{6}) + C.
\end{aligned}$$

6.2.48 Beispiel

$$\int \frac{x}{\sqrt{ax^2+b}}\,dx, \quad a \neq 0.$$

Lösung

Substitution: $u = ax^2 + b, \quad \frac{du}{dx} = 2ax, \quad dx = \frac{du}{2ax}$:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{\sqrt{ax^2+b}}\,dx &= \int \frac{x}{\sqrt{u}}\,\frac{du}{2ax} \\
&= \frac{1}{2a}\int u^{-1/2}\,du \\
&= \frac{1}{2a}\cdot 2u^{1/2} + C \\
&= \frac{1}{a}\sqrt{ax^2+b} + C.
\end{aligned}$$

6.2.49 Beispiel

$$\int \cos^3 x \sin x\,dx$$

Lösung

Substitution: $u = \cos x, \quad \frac{du}{dx} = -\sin x, \quad du = -\sin x\,dx$:

$$\begin{aligned}
\int \cos^3 x \sin x\,dx &= -\int u^3\,du \\
&= -\frac{1}{4}u^4 + C \\
&= -\frac{1}{4}\cos^4 x + C.
\end{aligned}$$

6.2.50 Beispiel

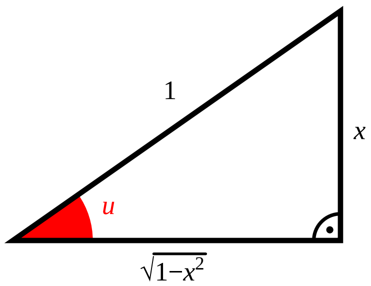
$$\int e^{x^3} \cdot x^2\,dx$$

Lösung

Substitution: $u = x^3$, $\quad \dfrac{du}{dx} = 3x^2, \quad du = 3x^2\,dx$:

$$\begin{aligned}\int e^{x^3} \cdot x^2\,dx &= \frac{1}{3}\int e^u\,du \\ &= \frac{1}{3}e^u + C \\ &= \frac{1}{3}e^{x^3} + C.\end{aligned}$$

Im folgenden eine nicht ganz so offensichtliche Substitution zur Beseitigung von quadratischen Ausdrücken unter Wurzeln (*trigonometrische Substitution*):



6.2.51 Beispiel

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad x \in (-1,1)$$

Lösung

Substitution (siehe Skizze):

$x = \sin u, u \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right) \iff u = \arcsin x$

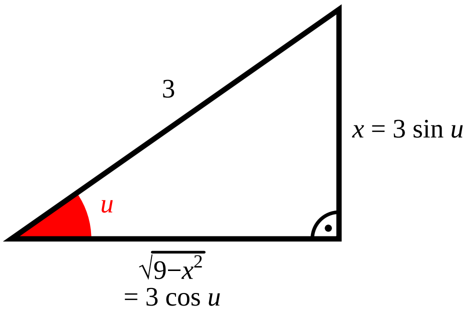
$\dfrac{dx}{du} = \cos u, \qquad dx = \cos u\,du$:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \int \frac{\cos u}{\sqrt{1-\sin^2 u}}\,du \\ &= \int \frac{\cos u}{\cos u}\,du \quad (*) \\ &= u + C \\ &= \arcsin x + C.\end{aligned}$$

$(*)$ Wegen $|u| < \dfrac{\pi}{2}$ ist $\cos u > 0$, also $\quad +\sqrt{1-\sin^2 u} = \cos u$.

6.2.52 Beispiel

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\,dx, \qquad x \in [-3,3]$$



Lösung

Substitution (siehe Skizze):

$x = 3\sin u,\ u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \iff u = \arcsin\frac{x}{3}$

$\frac{dx}{du} = 3\cos u, \qquad dx = 3\cos u\,du$:

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\,dx &= \int \frac{3\cos u}{9\sin^2 u}\,3\cos u\,du\\ &= \int \frac{\cos^2 u}{\sin^2 u}\,du\\ &= \int \frac{1-\sin^2 u}{\sin^2 u}\,du\end{aligned}$$

6.2.53 Beispiel

$$\int \arcsin x\,dx$$

Lösung

$$\int \arcsin x\,dx = \int 1\cdot\arcsin x\,dx.$$

a) Partielle Integration mit $u' = 1, u = x, \quad v = \arcsin x,\ v' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$\int \arcsin x\,dx = x\cdot\arcsin x - \int x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

b) Substitution: $t = 1 - x^2$, $\quad \dfrac{dt}{dx} = -2x, \quad \dfrac{1}{2}dt = -x\,dx$:

$$\begin{aligned}
\int \arcsin x\,dx &= x \cdot \arcsin x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt \\
&= x \cdot \arcsin x + \frac{1}{2}\int t^{-1/2}\,dt \\
&= x \cdot \arcsin x + t^{1/2} + C \\
&= x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.
\end{aligned}$$

6.2.54 Beispiel

$$\int x \ln(x^2 - 1)\,dx$$

Lösung

Substitution: $u = x^2 - 1$, $\quad \dfrac{du}{dx} = 2x, \quad \dfrac{1}{2}du = x\,dx$:

$$\begin{aligned}
\int x \ln(x^2-1)\,dx &= \frac{1}{2}\int \ln u\,du \\
&= \frac{1}{2}u \ln u - u + C \\
&= \frac{1}{2}(x^2-1)\ln(x^2-1) - \frac{1}{2}(x^2-1) + C \\
&= \frac{1}{2}(x^2-1)\ln(x^2-1) - \frac{1}{2}x^2 + C'.
\end{aligned}$$

6.2.55 Satz

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \ln|g(x)| + C \tag{6.7}$$

Beweis

Setze $f(u) = \frac{1}{u}$, dann ist $f(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx &= \int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx \\
&= \int f(u)\,du \\
&= \int u^{-1}\,du \\
&= \ln|u| + C \\
&= \ln|g(x)| + C.
\end{aligned}$$

Anwendungen der Rechenregel (6.7):

6.2.56 Beispiel

$$\int \cot x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$$

6.2.57 Beispiel

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$$

6.2.58 Beispiel

$$\int \frac{e^{2x}}{1-3e^{2x}}\,dx$$

Die Rechenregel lässt sich jeweils auch durch eine Substitution des Nenners ersetzen:

6.2.59 Beispiel

$$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx$$

Lösung

Substitution $u = x^2 + 1$,

6.2.7 Stammfunktion rationaler Funktionen

6.2.60 Wiederholung

Rationale Funktionen sind Term aus Variable x, Konstanten (Zahlen), Grundrechenarten.

Standardform rationaler Funktionen:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

6.2.61 Beispiel

Der rationale Term

$$\frac{\dfrac{1}{x^2+1}}{\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1}} \cdot \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)$$

soll in Standardform $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *geschrieben werden.*

Lösung

Beispiele bereits lösbarer Integrale mit rationalen Funktionen:

6.2.62 Beispiel

$$\int (x-1)(x^2+x+1)\,dx = \int (x^3-1)\,dx = \frac{1}{4}x^4 - x + C.$$

6.2.63 Beispiel

$$\int \frac{1}{x^3+6x^2+12x+8}\,dx =$$

6.2.64 Beispiel

$$\int \frac{1}{\frac{1}{2}x+2}\,dx =$$

6.2.65 Beispiel

$$\int \frac{x^2+1}{x^3+3x+1}\,dx =$$

6.2.66 Beispiel

$$\int \frac{1}{x^2+9}\,dx =$$

6.2.67 Beispiel

$$\int \frac{1}{x^2+\frac{1}{2}}\,dx =$$

6.2.68 Beispiel

$$\int \frac{dx}{x^2+6x+10}$$

$x^2+6x+10$ *ist irreduzibel:*

$$\begin{aligned} x^2+6x+10=0 &\iff x^2+6x+9+1=0 \\ &\iff \underbrace{(x+3)^2}_{>0}+1=0. \end{aligned}$$

Integration:

$$\int \frac{dx}{x^2+6x+10} = \int \frac{dx}{(x+3)^2+1}$$

Statt einer linearen Substituion kann man auch auf folgende Weise integrieren:
Substitution $x+3=\tan u$, d. h.

$$\frac{dx}{du} = \frac{1}{\cos^2 u} \Longrightarrow dx = \frac{1}{\cos^2 u} du:$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x+3)^2+1} &= \int \frac{1}{(\tan^2 u+1)\cos^2 u}\, du \\ &= \int \frac{1}{\sin^2 u+\cos^2 u}\, du \\ &= u+C \\ &= \arctan(x+3)+C. \end{aligned}$$

Diese Substitution wird in ähnlichen, allgemeineren Fällen wichtig sein (siehe (6.9)) und wird hier vorbereitend eingeführt.

6.2.69 Bemerkung
Klassen rationaler Funktionen und ihrer Stammfunktionen:

a) Alle Polynome sind mit elementaren Regeln integrierbar.

b)

$$\int \frac{1}{(ax+b)^m}\, dx = \frac{1}{(1-m)\,a}\,(ax+b)^{1-m}+C.$$

c)

$$\int \frac{1}{ax+b}\, dx = \frac{1}{a}\,\ln|ax+b|+C.$$

d)

$$\int \frac{Q'(x)}{Q(x)}\,dx = \ln|Q(x)| + C.$$

e)

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan\, x + C.$$

f) $a \neq 0$:

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C. \tag{6.8}$$

6.2.7.1 Partialbruchzerlegung

6.2.70 Satz
Eine rationale Funktion $R(x)$ lässt sich schreiben als

$$R(x) = P_1(x) + \frac{P(x)}{Q(x)}$$

mit Polynomen $P_1(x)$, $P(x)$, $Q(x)$, wobei Grad $P(x) <$ Grad $Q(x)$.

Die Darstellung erhält man mit Hilfe der Polynomdivision.

$\frac{P(x)}{Q(x)}$ *heißt* echt gebrochen rationale Funktion *(wenn* Grad $P(x) <$ Grad $Q(x)$ *ist).*

6.2.71 Beispiel

$$y = \frac{12x^4 - 36x^3 - 3x^2 - 13}{x^3 - 3x^2 - x + 3}.$$

Zählergrad > Nennergrad: Polynomdivision:

$$\begin{array}{l}
(12x^4 - 36x^3 \; - 3x^2 \qquad - 13)/(x^3 - 3x^2 - x + 3) \;=\; 12x + \dfrac{9x^2 - 36x - 13}{x^3 - 3x^2 - x + 3} \\
\underline{\;12x^4 - 36x^3 - 12x^2 + 36x\;} \\
\qquad\qquad\qquad 9x^2 - 36x \; - 13
\end{array}$$

6.2.72 Satz
Die echt gebrochen rationale Funktion $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *läßt sich als Summe von Termen der Form*

$$\frac{A}{(x-a)^\mu} \quad \textit{sowie} \quad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^\nu}$$

schreiben (Partialbruchzerlegung).

Dabei ist x^2+px+q *quadratischer Term ohne reelle Nullstelle, d. h.* $p^2-4q<0$*.*

$(x-a)^\mu$ *und* $(x^2+px+q)^\nu$ *sind jeweils Terme, die in der Faktorisierung von* $Q(x)$ *auftauchen.*
Die Exponenten μ*,* ν *variieren zwischen* 1 *und der Potenz in der Faktorisierung von* $Q(x)$*.*

6.2.73 Beispiel
Partialbruchzerlegung von $y = \dfrac{12x^4-36x^3-3x^2-13}{x^3-3x^2-x+3}$.

Zählergrad > Nennergrad: Polynomdivision

$$y = 12x + \frac{9x^2-36x-13}{x^3-3x^2-x+3}$$

(siehe Beispiel 6.2.71).
Die echt gebrochen rationale Funktion

$$\frac{9x^2-36x-13}{x^3-3x^2-x+3}$$

ist in Partialbrüche zu zerlegen.
Partialbruchzerlegung von $\dfrac{9x^2-36x-13}{x^3-3x^2-x+3}$:

Nennerfaktorisierung:

$$\begin{aligned}
\underbrace{x^3-3x^2}\underbrace{-x+3} &= x^2(x-3)-(x-3) \\
&= (x^2-1)(x-3) \\
&= (x+1)(x-1)(x-3).
\end{aligned}$$

Ansatz:

$$\begin{aligned}
\frac{9x^2-36x-13}{x^3-3x^2-x+3} &= \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x-3} \\
&= \frac{A(x-1)(x-3)+B(x+1)(x-3)+C(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)(x-3)}
\end{aligned}$$

Die Nennerpolynome sind gleich, daher auch die Zähler der linken und rechten Seite:

$$9x^2 - 36x - 13 =$$

$$A(x-1)(x-3) + B(x+1)(x-3) + C(x+1)(x-1).$$

Dies gilt insbesondere, wenn $x = -1$, $x = 1$, $x = 3$ eingesetzt wird.

$$\begin{array}{rll} \text{Für } x = -1: & & 9 + 36 - 13 = A(-1-1)(-1-3) \\ & \iff & 32 = 8A \iff A = 4 \\[1em] \text{Für } x = 1: & & 9 - 36 - 13 = B(1+1)(1-3) \\ & \iff & -40 = -4B \iff B = 10 \\[1em] \text{Für } x = 3: & & 81 - 108 - 13 = C(3+1)(3-1) \\ & \iff & -40 = 8C \iff C = -5 \end{array}$$

Ergebnis:

$$\begin{aligned} y &= \frac{12x^4 - 36x^3 - 3x^2 - 13}{x^3 - 3x^2 - x + 3} \\ &= 12x + \frac{9x^2 - 36x - 13}{x^3 - 3x^2 - x + 3} \\ &= 12x + \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-3} \\ &= 12x + \frac{4}{x+1} + \frac{10}{x-1} - \frac{5}{x-3}. \end{aligned}$$

6.2.74 Beispiel
Partialbruchzerlegung von $y = \dfrac{7x^2 - 19x + 30}{x^3 - 6x^2 + 10x}$.

Nennerfaktorisierung:

$$\begin{aligned} x^3 - 6x^2 + 10x &= x(x^2 - 6x + 10) \\ &= x(\ \underbrace{(x-3)^2 + 1}_{\geq 1,\ \text{unzerlegbar}}\ ). \end{aligned}$$

Partialbruchansatz:

$$\begin{aligned}\frac{7x^2-19x+30}{x^3-6x^2+10x} &= \frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2-6x+10}\\ &= \frac{A(x^2-6x+10)+(Bx+C)x}{x(x^2-6x+10)}.\end{aligned}$$

Zählerpolynome der linken und rechten Seite:

$$\begin{aligned}7x^2-19x+30 &= A(x^2-6x+10)+(Bx+C)x\\ &= Ax^2-6Ax+10A+Bx^2+Cx\\ &= (A+B)x^2+(-6A+C)x+10A.\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich:

$$\begin{array}{rcrcccl} 7 &=& A &+& B & & (\text{Koeff. von } x^2)\\ -19 &=& -6A & & & + \; C & (\text{Koeff. von } x)\\ 30 &=& 10A & & & & (\text{konstanter Koeff.})\end{array}$$

$$\iff A=3, \quad B=4, \quad C=-1.$$

Ergebnis: Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned}y=\frac{7x^2-19x+30}{x^3-6x^2+10x} &= \frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2-6x+10}\\ &= \frac{3}{x}+\frac{4x-1}{x^2-6x+10}.\end{aligned}$$

6.2.75 Beispiel
Partialbruchzerlegung von $y=\dfrac{x^2}{x^3-4x^2-3x+18}$.

Nennerfaktorisierung:
Suche ganzzahlige Nullstellen (Teiler von 18, Hornerschema).
Faktorisierung von $x^3-4x^2-3x+18$,
Hornerschema:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -4 & -3 & 18\\ x= & & & & \\ \hline \end{array}$$

Ergebnis der Faktorisierung:

$$x^3-4x^2-3x+18 = (x+2)(x-3)^2.$$

Partialbruchansatz:

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{x^3-4x^2-3x+18} &= \frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{(x-3)^2}\\ &= \frac{A(x-3)^2+B(x-3)(x+2)+C(x+2)}{(x+2)(x-3)^2}.\end{aligned}$$

Zählerpolynome der linken und rechten Seite:

$$\begin{aligned}x^2 &= A(x-3)^2+B(x-3)(x+2)+C(x+2)\\ &= A(x^2-6x+9)+B(x^2-x-6)+C(x+2)\\ &= Ax^2-6Ax+9A+Bx^2-Bx-6B+Cx+2C\\ &= (A+B)x^2+(-6A-B+C)x+9A-6B+2C.\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich:

$$\begin{array}{rcrcrcrl} 1 &=& A &+& B & & & \text{(Koeff. von } x^2\text{)}\\ 0 &=& -6A &-& B &+& C & \text{(Koeff. von } x\text{)}\\ 0 &=& 9A &-& 6B &+& 2C & \text{(konstanter Koeff.)}\end{array}$$

(lineares Gleichungssystem für A, B, C).

Lösung des lin. Gl.-Systems: $A = \frac{4}{25}, \quad B = \frac{21}{25}, \quad C = \frac{9}{5}$ (Gaußsches Eliminationsverfahren).

Ergebnis: Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned}y = \frac{x^2}{x^3-4x^2-3x+18} &= \frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{(x-3)^2}\\ &= \frac{4}{25(x+2)}+\frac{21}{25(x-3)}+\frac{9}{5(x-3)^2}.\end{aligned}$$

6.2.76 Beispiel
Partialbruchzerlegung von $y = \frac{-3x^3+12x^2-6x+7}{x^4-2x^3+5x^2-8x+4}$.

Nennerfaktorisierung:
Suche ganzzahlige Nullstellen (Teiler von 4, Hornerschema).
Faktorisierung von $x^4-2x^3+5x^2-8x+4$,
Hornerschema:

	1	-2	5	-8	4
$x =$					

Ergebnis der Faktorisierung:

$$x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 8x + 4 = (x-1)^2(x^2+4).$$

Partialbruchansatz:

$$\begin{aligned}
&\frac{-3x^3 + 12x^2 - 6x + 7}{x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 8x + 4} \\
&= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+4} \\
&= \frac{A(x-1)(x^2+4) + B(x^2+4) + (Cx+D)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+4)}.
\end{aligned}$$

Zählerpolynome der linken und rechten Seite:

$$\begin{aligned}
&-3x^3 + 12x^2 - 6x + 7 \\
&= A(x-1)(x^2+4) + B(x^2+4) + (Cx+D)(x-1)^2 \\
&= A(x^3 - x^2 + 4x - 4) + B(x^2+4) + C(x^3 - 2x^2 + x) \\
&\qquad + D(x^2 - 2x + 1) \\
&= (A+C)x^3 + (-A + B - 2C + D)x^2 \\
&\qquad + (4A + C - 2D)x - 4A + 4B + D.
\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrl}
-3 & = & A & & & + & C & & & \text{(Koeff. von } x^3\text{)} \\
12 & = & -A & + & B & - & 2C & + & D & \text{(Koeff. von } x^2\text{)} \\
-6 & = & 4A & & & + & C & - & 2D & \text{(Koeff. von } x\text{)} \\
7 & = & -4A & + & 4B & & & + & D & \text{(konstanter Koeff.)}
\end{array}$$

(lineares Gleichungssystem für A, B, C, D).

Lösung des lin. Gl.-Systems: $A = 1, \quad B = 2, \quad C = -4, \quad D = 3$ (Gaußsches Eliminationsverfahren).

Ergebnis: Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned}
y &= \frac{-3x^3 + 12x^2 - 6x + 7}{x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 8x + 4} \\
&= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+4} \\
&= \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{-4x+3}{x^2+4}.
\end{aligned}$$

6.2.77 Beispiel
Partialbruchzerlegung von $y = \dfrac{x + x^{-1}}{x - x^{-1}} - \dfrac{x - x^{-1}}{x + x^{-1}}$*:*

Standardform der rationalen Funktion (erweitere mit x*):*

$$y = \frac{x^2+1}{x^2-1} - \frac{x^2-1}{x^2+1}.$$

Zwei Mal Polynomdivision (durch geeignete Aufteilung des jew. Zählers):

$$\begin{aligned} y &= \frac{(x^2-1)+2}{x^2-1} - \frac{(x^2+1)-2}{x^2+1} \\ &= 1 + \frac{2}{x^2-1} - \left(1 - \frac{2}{x^2+1}\right) \\ &= \frac{2}{(x+1)(x-1)} + \frac{2}{x^2+1} \\ &= \frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)(x-1)} + \frac{2}{x^2+1} \\ &= \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x^2+1}. \end{aligned}$$

6.2.7.2 Integration rationaler Funktionen

Bestimmung von $\displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ mit Polynomen $P(x)$, $Q(x)$:

a) Falls $\operatorname{Grad} P \geq \operatorname{Grad} Q$ ist: Polynomteil abtrennen.

b) $Q(x)$ vollständig faktorisieren in Terme der Form $(x-a)^\mu$ und $(x^2+px+q)^\nu$ mit $p^2-4q<0$.

c) Partialbruchzerlegung: Die echt gebrochen rationale Funktion $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ (d. h. mit $\operatorname{Grad} P < \operatorname{Grad} Q$) wird zerlegt in eine Summe aus Termen der Form:

$$\frac{A_k}{(x-a_k)^{\mu_k}} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

und

$$\frac{B_l x + C_l}{(x^2+p_l x+q_l)^{\nu_l}} \quad \text{mit } p_l^2 - 4q_l < 0 \quad (l = 1, 2, \dots).$$

d) Integration (des Polynoms und) der Partialbrüche.

Nach der Partialbruchzerlegung integriert man summandenweise die Terme

$$\frac{A_k}{(x-a_k)^{\mu_k}} \quad \text{sowie} \quad \frac{B_l x + C_l}{(x^2+p_l x+q_l)^{\nu_l}}.$$

6.2.7.3 Integration der Partialbrüche

6.2.78 Satz
Integrale linearer Partialbrüche:

a)

$$\int \frac{A}{(x-a)^\mu}\,dx \quad = \quad \frac{A}{1-\mu}\frac{1}{(x-a)^{\mu-1}} + C \qquad \textit{falls } \mu \in \mathbb{N}\setminus\{1\}.$$

b)

$$\int \frac{A}{x-a}\,dx \quad = \quad A\ln|x-a| + C.$$

6.2.79 Satz
Integrale irreduzibler quadratischer Partialbrüche, Vielfachheit 1.

a)

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx \quad = \quad \frac{A}{2}\ln(x^2+px+q) + \int \frac{B'}{x^2+px+q}\,dx$$

$$\textit{mit } B' = B - \frac{Ap}{2}.$$

b)

$$\int \frac{1}{x^2+px+q}\,dx \quad = \quad \frac{1}{a}\arctan\frac{x+\frac{p}{2}}{a} + C$$

$$\textit{mit } a = \sqrt{q-\frac{p^2}{4}}.$$

Beweis

a)

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx \quad = \quad \frac{A}{2}\int \frac{2x+\frac{2B}{A}}{x^2+px+q}\,dx$$

$$= \frac{A}{2}\left(\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,dx + \int \frac{\frac{2B}{A}-p}{x^2+px+q}\,dx\right)$$

$$= \frac{A}{2}\ln(x^2+px+q) + \int \frac{B-\frac{Ap}{2}}{x^2+px+q}\,dx.$$

b)

$$\int \frac{1}{x^2+px+q}\,dx \quad = \quad \int \frac{1}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 \underbrace{-\frac{p^2}{4}+q}_{>0}}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{u^2+a^2}\,du \quad \text{mit } u = x+\frac{p}{2}, \quad a = \sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$$

$$= \frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a} + C.$$

6.2.80 Satz
Stammfunktionen irreduzibler quadratischer Partialbrüche, Vielfachheit > 1:

a)

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^\nu}\,dx =$$

$$\frac{A}{2}\cdot\frac{1}{1-\nu}\cdot\frac{1}{(x^2+px+q)^{\nu-1}} \quad + \quad B'\int \frac{1}{(x^2+px+q)^\nu}\,dx$$

$$\textit{mit } B' = B - \frac{Ap}{2}.$$

b)

$$\int \frac{1}{(x^2+px+q)^\nu}\,dx \quad = \quad \frac{1}{a^{2\nu-1}}\int \cos^{2\nu-2} t\,dt, \tag{6.9}$$

$$\textit{wobei} \quad t = \arctan\frac{x+\frac{p}{2}}{a}, \quad a = \sqrt{q-\frac{p^2}{4}}.$$

Beweis

a)

$$\begin{aligned}\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^\nu}\,dx &= \frac{A}{2}\int \frac{2x+\frac{2B}{A}}{(x^2+px+q)^\nu}\,dx \\ &= \frac{A}{2}\left(\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^\nu}\,dx + \int \frac{\frac{2B}{A}-p}{(x^2+px+q)^\nu}\,dx\right) \\ &= \frac{A}{2}\frac{1}{1-\nu}(x^2+px+q)^{-\nu+1} + \int \frac{B-\frac{2A}{p}}{(x^2+px+q)^\nu}\,dx.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x^2+px+q)^\nu}\,dx &= \int \frac{1}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\underbrace{q-\frac{p^2}{4}}_{>0}\right)^\nu}\,dx \\ &= \int \frac{1}{(u^2+a^2)^\nu}\,du \quad \text{mit } u=x+\frac{p}{2}, \quad a^2=q-\frac{p^2}{4} \\ &= \frac{1}{a^{2\nu}}\int \frac{1}{\left(\left(\frac{u}{a}\right)^2+1\right)^\nu}\,du.\end{aligned}$$

Substitution $\frac{u}{a}=\tan t, \quad \frac{1}{a}\frac{du}{dt}=\frac{1}{\cos^2 t} \iff du=\frac{a}{\cos^2 t}\,dt$:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x^2+px+q)^\nu}\,dx &= \frac{1}{a^{2\nu}}\int \frac{a}{(\tan^2 t+1)^\nu\cos^2 t}\,dt \\ &= \frac{1}{a^{2\nu-1}}\int \frac{1}{(\tan^2 t+1)^\nu\cos^2 t}\,dt \\ &= \frac{1}{a^{2\nu-1}}\int \frac{\cos^{2\nu-2} t}{\left(\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}+1\right)^\nu\cos^{2\nu} t}\,dt \\ &= \frac{1}{a^{2\nu-1}}\int \frac{\cos^{2\nu-2} t}{(\sin^2 t+\cos^2 t)^\nu}\,dt \\ &= \frac{1}{a^{2\nu-1}}\int \cos^{2\nu-2} t\,dt.\end{aligned}$$

6.2.81 Beispiel

a)

$$I = \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan x + C$$

Substitution $x = \tan t, \quad dx = \dfrac{1}{\cos^2 t} = (\tan^2 t + 1)\,dt$*:*

$$I = \int \frac{1}{\tan^2 t + 1} \cdot (\tan^2 t + 1)\,dt = \int 1\,dt = t + C = \arctan x + C.$$

b) Mit derselben Substitution findet man

$$\begin{aligned} I_n = \int \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx &= \int \frac{1}{(\tan^2 t + 1)^n} \cdot (\tan^2 t + 1)\,dt \\ &= \int \frac{1}{(\tan^2 t + 1)^{n-1}} dt = \int \cos^{2n-2} t\,dt. \end{aligned}$$

6.2.7.4 Drei Methoden zur Berechnung der Kosinusintegrale

1. Methode zur Lösung von $\displaystyle\int \cos^{2n} t\,dt$*:*

Potenzen von $\cos t$ umwandeln in Kosinusterme mit mehrfachen Winkeln (Additionstheoreme):

6.2.82 Beispiel

Schreibe mit mehrfachen Winkeln: $\cos^4 t$*:*

Additionstheorem Kosinus:

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 \iff \cos^2 a = \frac{1}{2}(1 + \cos 2a) \tag{6.10}$$

$$\begin{aligned} \cos^4 t = (\cos^2 t)^2 &= \frac{1}{4}(1 + \cos 2t)^2 \\ &= \frac{1}{4}(1 + 2\cos 2t + \cos^2 2t) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{8}(1 + \cos 4t) \qquad \textit{nach (6.10), setze } a = 2t \\ &= \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{8}\cos 4t \end{aligned}$$

2. Methode zur Lösung von $\displaystyle\int \cos^{2n} t\,dt$*:*

Potenzen von $\cos t$ umwandeln in Kosinusterme mit mehrfachen Winkel (mit komplexer Rechnung):

6.2.83 Beispiel
Schreibe mit mehrfachen Winkeln: $\cos^8 t$*:*

Kosinus, komplexe Darstellung: $\cos t = \frac{1}{2}(e^{jt} + e^{-jt})$*:*

$$\begin{aligned}
\cos^8 t &= 2^{-8}(e^{jt} + e^{-jt})^8 \\
&= 2^{-8}\left(e^{8jt} + 8e^{6jt} + \binom{8}{2}e^{4jt} + \binom{8}{3}e^{2jt} + \binom{8}{4}\right. \\
&\quad \left. + \binom{8}{3}e^{-2jt} + \binom{8}{2}e^{-4jt} + 8e^{-6jt} + e^{-8jt}\right) \\
&= 2^{-7}\left(\cos 8t + 8\cos 6t + 28\cos 4t + 56\cos 2t + 70\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \int \cos^8 t\, dt \\
&= 2^{-7}\int \left(\cos 8t + 8\cos 6t + 28\cos 4t + 56\cos 2t + 70\right)\, dt \\
&= 2^{-7}\left(\frac{1}{8}\sin 8t + \frac{8}{6}\sin 6t + 7\sin 4t + 28\sin 2t + 70t\right) + C.
\end{aligned}$$

3. Methode zur Lösung von $\int \cos^{2n} t\, dt$*:*
Rekursionsformel (6.5) für Kosinusintegrale:

6.2.84 Beispiel
Anwendung von $\int \cos^n t\, dt = \frac{1}{n}\sin t \cos^{n-1} t + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} t\, dt$ *auf*

$$\begin{aligned}
\int \cos^8 t\, dt &= I_8 = \frac{1}{8}\sin t\cos^7 t + \frac{7}{8}I_6 \\
&= \frac{1}{8}\sin t\cos^7 t + \frac{7}{8}(\frac{1}{6}\sin t\cos^5 t + \frac{5}{6}I_4) \\
&= \frac{1}{8}\sin t\cos^7 t + \frac{7}{48}\sin t\cos^5 t + \frac{35}{48}\cdot\frac{1}{4}(\sin t\cos^3 t + \frac{3}{4}I_2) \\
&= \frac{1}{8}\sin t\cos^7 t + \frac{7}{48}\sin t\cos^5 t + \frac{35}{192}\sin t\cos^3 t \\
&\quad + \frac{105}{768}\cdot\frac{1}{2}(\sin t\cos t + \frac{1}{2}t) + C.
\end{aligned}$$

6.2.85 Satz
Die Kosinusintegrale (6.9) haben Stammfunktionen der Form

$$\int \cos^{2n} t\, dt = \sin t \cdot P_{2n-1}(\cos t). \tag{6.11}$$

Dabei ist $P_{2n-1}(u)$ jeweils ein ungerades Polynom vom Grad $2n-1$.

Beweis
Mit der Rekursionsformel (6.5) erhält man der Reihe nach:

a) $\displaystyle\int \cos^2 t\, dt = \frac{1}{2}\sin t\cos t + \frac{t}{2} + C$

b) $\displaystyle\int \cos^4 t\, dt = \frac{1}{4}\sin t\cos^3 t + \frac{3}{8}\sin t\cos t + \frac{3}{8}t + C$

c) $\displaystyle\int \cos^6 t\, dt = \frac{1}{6}\sin t\cos^5 t + \frac{5}{24}\sin t\cos^3 t + \frac{5}{16}\sin t\cos t + \frac{5}{16}t + C$

usw.

Diese haben jeweils die behauptete Form. Bei jedem Rekursionsschritt kommt für das nächsthöhere Integral ein Term $\dfrac{1}{2n}\sin t\cos^{2n-1} t$ hinzu, der genau die passende Struktur besitzt.

6.2.86 Bemerkung
Anwendung der Ergebnisse auf ursprüngliches Integral (6.9), z. B.

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{1}{(x^2+1)^2}\, dx \quad \textit{(Subst. } x = \tan t,\ dx = (1+\tan^2 t)\, dt\textit{)} \\
&= \int \frac{1}{(\tan^2 t + 1)^2} \cdot (\tan^2 t + 1)\, dt \\
&= \int \frac{1}{\tan^2 t + 1} dt \\
&= \int \cos^2 t\, dt \\
&= \frac{1}{2}\sin t\cos t + \frac{t}{2} + C,
\end{aligned}$$

wobei $t = \arctan x$.

Es ist wünschenswert, die Stammfunktionen in Formel (6.11) nur mit Hilfe von $\tan t$ auszudrücken, da dies der Substitution entspricht.

6.2.87 Satz
Die Terme der Stammfunktion in (6.11) lassen sich folgendermaßen durch $\tan t$ *ausdrücken:*

$$\cos^{2n-1} t \sin t = \frac{\tan t}{(\tan^2 t + 1)^n}$$

Beweis

a) $\cos^2 t = \dfrac{1}{\tan^2 t + 1}$ nach Formel (5.11)

b) $\sin t \cos t = \dfrac{\sin t}{\cos t} \cos^2 t = \dfrac{\tan t}{\tan^2 t + 1}$ (nach a))

c) $\sin t \cos^3 t = \dfrac{\tan t}{(\tan^2 t + 1)^2}$ (multipliziere b) mit a))

d) $\sin t \cos^5 t = \dfrac{\tan t}{(\tan^2 t + 1)^3}$ (multipliziere c) mit a))

usw.

6.2.88 Beispiel

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(4x^2+4x+2)^2} dx &= \int \frac{1}{((2x+1)^2+1)^2}\, dx \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{1}{(\tan^2 t + 1)^2} (\tan^2 t + 1)\, dt, \quad \tan t = 2x+1 \\
&= \frac{1}{2} \int \cos^2 t\, dt \\
&= \frac{1}{4} \sin t \cos t + \frac{1}{4} t + C \\
&= \frac{1}{4} \frac{\tan t}{\tan^2 t + 1} + \frac{1}{4} t + C \\
&= \frac{1}{4} \frac{2x+1}{(2x+1)^2+1} + \frac{1}{4} \arctan(2x+1) + C \\
&= -\frac{1}{4} \frac{2x+1}{4x^2+4x+2} + \frac{1}{4} \arctan(2x+1) + C.
\end{aligned}$$

6.2.89 Beispiel

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x+4}{(4x^2+4)^2} dx &= \frac{1}{16}\int \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,dx + \frac{1}{16}\int \frac{4}{(x^2+1)^2}\,dx \\
&= \frac{1}{16}\int \frac{du}{u^2} + \frac{1}{4}\int \cos^2 t\,dt, \quad u = x^2+1,\ \tan t = x \\
&= -\frac{1}{16}\frac{1}{u} + \frac{1}{8}\sin t\cos t + \frac{1}{8}t + C \\
&= -\frac{1}{16}\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{8}\frac{\tan t}{\tan^2 t+1} + \frac{1}{8}t + C \\
&= -\frac{1}{16}\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{8}\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{8}\arctan x + C.
\end{aligned}$$

Integration der bisherigen Beispiele zur Partialbruchzerlegung:

6.2.90 Beispiel
Fortsetzung von Beispiel 6.2.73:

$$\begin{aligned}
y &= \frac{12x^4-36x^3-3x^2-13}{x^3-3x^2-x+3} \\
&= 12x + \frac{4}{x+1} + \frac{10}{x-1} - \frac{5}{x-3}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int y\,dx &= \int 12x\,dx + \int \frac{4}{x+1}\,dx + \int \frac{10}{x-1}\,dx - \int \frac{5}{x-3}\,dx \\
&= 6x^2 + 4\ln|x+1| + 10\ln|x-1| - 5\ln|x-3| + C.
\end{aligned}$$

6.2.91 Beispiel
Fortsetzung von Beispiel 6.2.61:

$$\int \frac{\frac{1}{x^2+1}}{\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}} \cdot \left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right) dx = \int \frac{1}{x^3+x}\,dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{x^2+1-x^2}{x^3+x}\,dx \\
&= \int \left(\frac{x^2+1}{(x^2+1)x} - \frac{x^2}{(x^2+1)x}\right) dx \\
&= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right) dx \\
&= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.
\end{aligned}$$

6.2.92 Beispiel
Fortsetzung Beispiel 6.2.74

$$\int \frac{7x^2-19x+30}{x^3-6x^2+10x}\,dx = \int \frac{3}{x}\,dx + \int \frac{4x-1}{x^2-6x+10}\,dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{3}{x}\,dx + 2\int \frac{2x-6}{x^2-6x+10}\,dx + 11\int \frac{1}{x^2-6x+10}\,dx \\
&= 3\ln|x| + 2\ln(x^2-6x+10) + 11\int \frac{1}{x^2-6x+10}\,dx.
\end{aligned}$$

Substitution $x-3=\tan t$, *d. h.* $dx=(\tan^2 t+1)\,dt$*:*

$$\begin{aligned}
11\int \frac{1}{(x-3)^2+1}\,dx &= 11\int \frac{1}{\tan^2 t+1}(\tan^2 t+1)\,dt \\
&= \int 11\,dt \\
&= 11t + C = 11\arctan(x-3) + C.
\end{aligned}$$

6.2.93 Beispiel
Fortsetzung Beispiel 6.2.75

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{x^3-4x^2-3x+18}\,dx &= \int \frac{4}{25(x+2)}\,dx + \int \frac{21}{25(x-3)}\,dx + \int \frac{9}{5}(x-3)^{-2}\,dx \\
&= \frac{4}{25}\ln|x+2| + \frac{21}{25}\ln|x-3| - \frac{9}{5}(x-3)^{-1} + C.
\end{aligned}$$

6.2.94 Beispiel
Fortsetzung Beispiel 6.2.76

$$\begin{aligned} y &= \frac{-3x^3+12x^2-6x+7}{x^4-2x^3+5x^2-8x+4} \\ &= \frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{-4x+3}{x^2+4}. \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \int y\,dx = \int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{2}{(x-1)^2}\,dx + \int \frac{-4x+3}{x^2+4}\,dx$$

mit

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x-1}\,dx &= \ln|x-1| + C_1 \\ \int 2(x-1)^{-2}\,dx &= -2(x-1)^{-1} + C_2 \\ \int \frac{-4x+3}{x^2+4}\,dx &= -2\int \frac{2x}{x^2+4}\,dx + 3\int \frac{1}{x^2+4}\,dx \\ &= -2\ln(x^2+4) + \frac{3}{2}\arctan\frac{x}{2} + C_3 \end{aligned}$$

Ergebnis:

$$\int y\,dx = \ln|x-1| - \frac{2}{x-1} - 2\ln(x^2+4) + \frac{3}{2}\arctan\frac{x}{2} + C.$$

6.2.95 Beispiel
Fortsetzung Beispiel 6.2.77

$$\begin{aligned} y &= \frac{x+x^{-1}}{x-x^{-1}} - \frac{x-x^{-1}}{x+x^{-1}} \\ &= \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x^2+1} \\ \Longrightarrow \int y\,dx &= \int \frac{1}{x-1}\,dx - \int \frac{1}{x+1}\,dx + \int \frac{2}{x^2+1}\,dx \\ &= \ln|x-1| - \ln|x+1| + 2\arctan x + C. \end{aligned}$$

6.2.96 Beispiel

$$\int \frac{x^6 + 3x^4 + x^2 - 3}{x^4 + 4x^2 + 4}\, dx$$

Polynomteil durch Division:

$$(x^6 + 3x^4 + x^2 - 3) : (x^4 + 4x^2 + 4) = x^2 - 1 + \frac{x^2 + 1}{x^4 + 4x^2 + 4}$$

Partialbruchzerlegung von $\dfrac{x^2+1}{x^4+4x^2+4}$:

Faktorisierung des Nenners: $x^4 + 4x^2 + 4 = (x^2 + 2)^2$

Partialbruchansatz:

$$\begin{aligned}
\frac{x^2+1}{x^4+4x^2+4} &= \frac{A_1x + A_2}{x^2+2} + \frac{A_3x + A_4}{(x^2+2)^2} \\
\Longrightarrow x^2 + 1 &= (A_1x + A_2)(x^2 + 2) + A_3x + A_4 \\
\Longleftrightarrow x^2 + 1 &= A_1x^3 + A_2x^2 + (2A_1 + A_3)x + 2A_2 + A_4
\end{aligned}$$

$$x^2 + 1 = A_1x^3 + A_2x^2 + (2A_1 + A_3)x + 2A_2 + A_4$$

Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned}
A_1 &= 0 \\
A_2 &= 1 \\
2A_1 + A_3 &= 0 \\
2A_2 + A_4 &= 1
\end{aligned}$$

d. h. $A_1 = 0,\ A_2 = 1,\ A_3 = 0,\ A_4 = -1.$

Daher ist

$$\frac{x^2+1}{x^4+4x^2+4} = \frac{1}{x^2+2} - \frac{1}{(x^2+2)^2}.$$

Integration:

$$\int \frac{x^6 + 3x^4 + x^2 - 3}{x^4 + 4x^2 + 4}\, dx = \int (x^2 - 1)\, dx + \int \frac{1}{x^2+2}\, dx - \int \frac{1}{(x^2+2)^2}\, dx.$$

Es ist

a)

$$\int (x^2 - 1)\, dx = \frac{1}{3}x^3 - x + C_1$$

b)

$$\int \frac{dx}{x^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} + C_2 \qquad \text{gemäß (6.8)}$$

c)

$$\int \frac{dx}{(x^2+2)^2} = \frac{1}{4} \int \frac{1}{\left(\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1\right)^2}\, dx$$

Substitution:

$$\frac{x}{\sqrt{2}} = \tan t \Longrightarrow \frac{dx}{\sqrt{2}\, dt} = \frac{1}{\cos^2 t} \iff dx = \frac{\sqrt{2}}{\cos^2 t}\, dt :$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(x^2+2)^2} &= \frac{\sqrt{2}}{4} \int \frac{1}{(\tan^2 t + 1)^2 \cdot \cos^2 t}\, dt \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4} \int \frac{\cos^2 t}{(\tan^2 t + 1)^2 \cdot \cos^4 t}\, dt \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4} \int \cos^2 t\, dt \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4} \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t\right)\, dt \\
&= \frac{\sqrt{2}}{8} \left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C_3 \\
&= \frac{\sqrt{2}}{8} t + \frac{\sqrt{2}}{16} \cdot \frac{\tan t}{1 + \tan^2 t} + C_3 \\
&= \frac{\sqrt{2}}{8} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{16} \cdot \frac{\frac{x}{\sqrt{2}}}{1 + \frac{x^2}{2}} + C_3 \\
&= \frac{\sqrt{2}}{8} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{8} \cdot \frac{x}{2 + x^2} + C_3.
\end{aligned}$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^6+3x^4+x^2-3}{x^4+4x^2+4}\,dx &= \int (x^2-1)\,dx + \int \frac{1}{x^2+2}\,dx - \int \frac{1}{(x^2+2)^2}\,dx \\
&= \frac{1}{3}x^3 - x + \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{8}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{4}\cdot\frac{x}{x^2+2} + C \\
&= \frac{1}{3}x^3 - x + \frac{3\sqrt{2}}{8}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{4}\cdot\frac{x}{x^2+2} + C.
\end{aligned}$$

6.2.8 Weitere Stammfunktionen rationaler Ausdrücke

6.2.97 Bezeichnung
Mit $R(x,y,z,\ldots)$ bezeichnen wir rationale Ausdrücke in den Größen $x,y,z,\ldots$ d.h. Formeln, die $x,y,z,\ldots$, Konstanten und die Grundrechenoperationen enthalten.

6.2.98 Beispiel

a) $\dfrac{x}{\sqrt{x+2}}$ *ist von der Form* $R(x,\sqrt{x+2})$.

b) $\sinh x$ *ist von der Form* $R(e^x)$.

6.2.99 Satz

$$\int f(x,\sqrt[n]{ax+b})\,dx \quad \textit{mit } f(x,y)\in R(x,y)$$

wird rational durch die Substitution

$$u=\sqrt[n]{ax+b},$$

das heißt

$$u^n = ax+b \iff x=\frac{u^n-b}{a}$$

und

$$dx = \frac{n}{a}\cdot u^{n-1}\,du.$$

6.2.100 Beispiel

$$\int \frac{x+\sqrt{x-1}}{x-\sqrt{x-1}}\,dx$$

Substitution $u=\sqrt{x-1} \iff x=u^2+1, \quad dx=2u\,du$:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+\sqrt{x-1}}{x-\sqrt{x-1}}\,dx &= \int \frac{u^2+1+u}{u^2+1-u} 2u\,du \\
&= 2\int \frac{u^3+u^2+u}{u^2-u+1}\,du \\
&= 2\int (u+2+\underbrace{\frac{2u-2}{u^2-u+1}}_{\text{keine Nullstelle}})\,du \\
&= u^2+4u+2\int (\frac{2u-1}{u^2-u+1}-\frac{1}{u^2-u+1})\,du \\
&= u^2+4u+2\cdot\ln\left|u^2-u+1\right|-2\int \frac{1}{(u-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,du \\
&= u^2+4u+2\cdot\ln\left|u^2-u+1\right|-2\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{u-\frac{1}{2}}{\frac{2}{\sqrt{3}}}+C \\
&= u^2+4u+2\cdot\ln\left|u^2-u+1\right|-\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}u-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+C.
\end{aligned}$$

(im vorletzten Schritt wurde Formel (6.8) angewendet).

Insgesamt ist also $(u=\sqrt{x-1})$:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+\sqrt{x-1}}{x-\sqrt{x-1}}\,dx &= x-1+4\sqrt{x-1}+2\ln\left|x-\sqrt{x-1}\right| \\
&\quad -\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2\sqrt{x-1}}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+C.
\end{aligned}$$

6.2.101 Satz

$$\int f(e^x)\,dx \quad \textit{mit } f(x)\in R(x)$$

wird rational durch die Substitution

$$u=e^x, \quad dx=\frac{du}{u}.$$

$$(u = e^x \iff \frac{du}{dx} = e^x = u \iff dx = \frac{du}{u})$$

6.2.102 Beispiel

$$\begin{aligned}
\int \frac{e^{2x}}{e^x - 1}\,dx &= \int \frac{u^2}{u-1}\,\frac{du}{u} \\
&= \int \frac{u}{u-1}\,du \\
&= \int \left(1 + \frac{1}{u-1}\right) du \\
&= u + \ln|u-1| + C \\
&= e^x + \ln|e^x - 1| + C.
\end{aligned}$$

6.2.103 Satz
$$\int f(\sin x, \cos x)\,dx \qquad \textit{mit } f(x,y) \in R(x,y)$$
wird rational durch
$$t = \tan\frac{x}{2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt.$$
Dabei ist
$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Beweis

a)

$$t = \tan\frac{x}{2}$$

$$\iff \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2}\left(1 + \tan^2\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}(1+t^2).$$

$$\iff \quad dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt.$$

b)

$$\begin{aligned}
\sin x &= \sin\left(2\cdot\frac{x}{2}\right)\\
&= 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\\
&= \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}\\
&= \frac{2\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}+\dfrac{\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}\\
&= \frac{2\tan\frac{x}{2}}{\tan^2\frac{x}{2}+1}\\
&= \frac{2t}{t^2+1}.
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\cos x &= \cos\left(2\cdot\frac{x}{2}\right)\\
&= \cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\\
&= \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}\\
&= \frac{1-\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{1+\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}\\
&= \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}\\
&= \frac{1-t^2}{1+t^2}.
\end{aligned}$$

d) Mit der Darstellung für $\sin x$ und $\cos x$ folgt:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\dfrac{2t}{t^2+1}}{\dfrac{1-t^2}{1+t^2}} = \frac{2t}{1-t^2}, \quad \cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{1-t^2}{2t}.$$

6.2.104 Beispiel

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin x}\,dx &= \int \frac{1+t^2}{2t}\frac{2}{1+t^2}\,dt\\ &= \int \frac{dt}{t}\\ &= \ln|t| + C\\ &= \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C.\end{aligned}$$

6.2.105 Beispiel

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{5+3\cos x}\,dx &= \int \frac{1}{5+3\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}\,dt\\ &= \int \frac{2}{5(1+t^2)+3(1-t^2)}\,dt\\ &= \int \frac{1}{t^2+4}\,dt\\ &= \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{t}{2}\right)^2+1}\,dt\\ &= \frac{1}{4}\cdot 2\cdot \arctan\frac{t}{2} + C\\ &= \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}\right) + C.\end{aligned}$$

6.2.106 Satz
Spezielle Substitutionen für $\int f(\sin x, \cos x)\,dx$ *mit* $f(x,y) \in R(x,y)$*:*

a) Falls

$$f(-\sin x, \cos x) = -f(\sin x, \cos x): \quad t = \cos x \tag{6.12}$$

b) Falls

$$f(\sin x, -\cos x) = -f(\sin x, \cos x): \quad t = \sin x \tag{6.13}$$

c) Falls

$$f(-\sin x, -\cos x) = f(\sin x, \cos x): \qquad t = \tan x \tag{6.14}$$

Für $t = \tan x$ gilt dann:

$$\sin 2x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos 2x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$
$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2},$$
$$dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

6.2.107 Beispiel

$$\int \frac{\cos x\,(1+\cos x)}{\sin x}\,dx \qquad \textit{(Es gilt (6.12). Substituiere } u = \cos x,\ du = -\sin x\,dx\textit{)}$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{\cos x\,(1+\cos x)\ \sin x}{\sin^2 x}\,dx \\
&= \int \frac{\cos x\,(1+\cos x)\ \sin x}{1-\cos^2 x}\,dx \\
&= \int \frac{-u\,(1+u)}{1-u^2}\,du \\
&= \int \frac{1-u+1}{1-u}\,du \\
&= \int \left(1+\frac{1}{1-u}\right)\,du \\
&= u - \ln(1-u) + C \\
&= \cos x - \ln(1-\cos x) + C.
\end{aligned}$$

6.2.108 Beispiel

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx & \qquad \textit{(Es gilt (6.13). Substituiere } u = \sin x,\ du = \cos x\, dx\textit{)} \\
&= \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^4 x} \cos x\, dx \\
&= \int \frac{1 - u^2}{u^4}\, du \\
&= \int (u^{-4} - u^{-2})\, du \\
&= -\frac{1}{3} u^{-3} + u^{-1} + C \\
&= \frac{1}{3 \sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} + C.
\end{aligned}
$$

6.2.109 Beispiel

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x} & \qquad \textit{(Es gilt (6.14). Subst. } u = \tan x,\ du = \frac{dx}{\cos^2 x}, \\
& \qquad \cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x},\ \sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x}\textit{)} \\
&= \int \frac{1}{\sin^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} \\
&= \int \frac{1 + u^2}{u^2} (1 + u^2)\, du \\
&= \int (u^{-2} + 2 + u^2)\, du \\
&= -\frac{1}{u} + 2u + \frac{1}{3} u^3 + C \\
&= -\cot x + 2 \tan x + \frac{1}{3} \tan^3 x + C.
\end{aligned}
$$

6.2.110 Satz

$$\int f\left(x,\ \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+e}}\right)dx \quad \textit{mit } f(x,y)\in R(x,y)$$

wird rational durch die Substitution

$$u=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+e}} \iff x=\frac{b-eu^n}{cu^n-a} \qquad \textit{und} \qquad dx=\frac{(ae-bc)\,nu^{n-1}}{(cu^n-a)^2}\,du.$$

Beweis

$$\begin{aligned} u=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+e}} &\iff u^n=\frac{ax+b}{cx+e}\\ &\iff (cx+e)u^n=ax+b\\ &\iff cxu^n-ax=b-eu^n\\ &\iff (cu^n-a)x=b-eu^n\\ &\iff x=\frac{b-eu^n}{cu^n-a}. \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \frac{dx}{du} &= \frac{-enu^{n-1}(cu^n-a)-(b-eu^n)cnu^{n-1}}{(cu^n-a)^2}\\ &= \frac{-cenu^{2n-1}+aenu^{n-1}-bcnu^{n-1}+cenu^{2n-1}}{(cu^n-a)^2}\\ &= \frac{(ae-bc)nu^{n-1}}{(cu^n-a)^2} \end{aligned}$$

6.2.111 Beispiel

$$\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{dx}{x}$$

Lösung

Substitution $u = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, $\quad x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$, $\quad dx = \frac{-4u\,du}{(1+u^2)^2}$:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{dx}{x} &= \int u \cdot \frac{1+u^2}{1-u^2} \cdot \frac{-4u}{(1+u^2)^2}\,du \\
&= \int \left(\frac{2}{1+u^2} - \frac{1}{u+1} + \frac{1}{u-1} \right) du \\
&= 2\arctan u - \ln|u+1| + \ln|u-1| + C \\
&= 2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} - \ln|\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + 1| \\
&\quad + \ln\left|\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} - 1\right| + C.
\end{aligned}$$

6.2.112 Beispiel

$$\int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{1}{(1+x)^2}\,dx$$

6.2.113 Beispiel

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x+1}}$$

6.2.114 Beispiel

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1} - \sqrt[3]{2x-1}}$$

6.2.115 Beispiel

$$\int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{1+\sqrt{x}}\, dx$$

6.2.116 Beispiel

$$\int \frac{2+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}}\,dx$$

6.3 Bestimmtes Integral

Aufgabe: Bestimme Flächeninhalt des *krummlinigen Trapezes* begrenzt durch $y = 0$, $x = a$, $x = b$, Funktionsgraph $f(x)$ (siehe Abbildung 6.1). Für welche Funktionen ist die

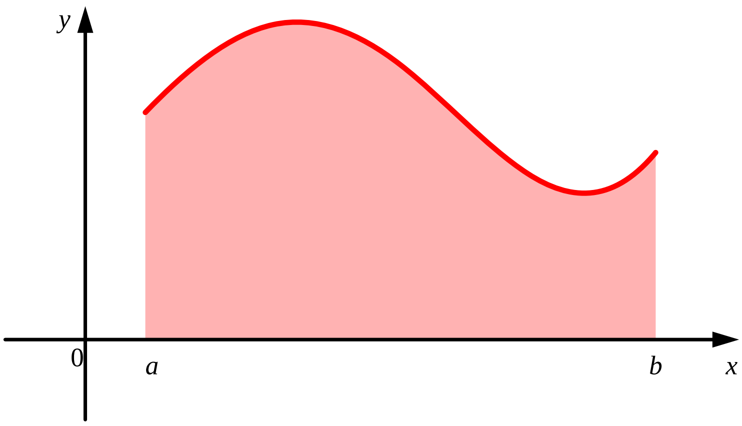


Abbildung 6.1: Flächeninhalt, bestimmtes Integral

Aufgabenstellung wohldefiniert?

Methode: Annäherung durch n Rechtecksflächen (siehe Abbildung 6.2).

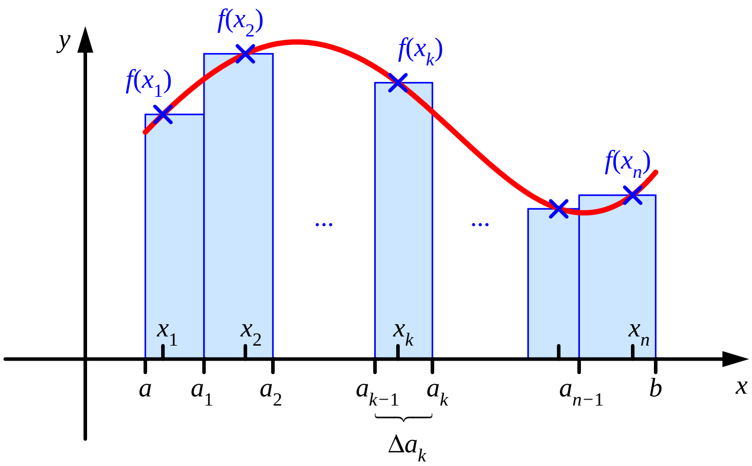


Abbildung 6.2: Rechteckssumme

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. $I = [a, b]$ abgeschlossenes Intervall.
Wähle Unterteilung von $[a, b]$ (Abbildung 6.3)

$$n \in \mathbb{N}, \quad a_1, \ldots, a_{n-1} \quad \text{mit } a < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < b.$$

Zerlegung Z von I in Teilintervalle (Abbildung 6.3):

$$\begin{aligned} I &= I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_n \\ I_k &= [a_{k-1}, a_k] \qquad a_0 = a, \ a_n = b. \end{aligned}$$

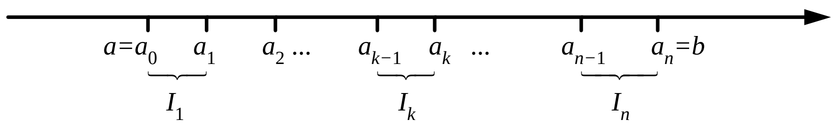


Abbildung 6.3: Zerlegung eines Intervalls

Maximale Intervallänge von Z:

$$\delta = \max_{k=1,\dots,n} \Delta a_k, \qquad \Delta a_k = a_k - a_{k-1}, \quad k = 1, \dots, n$$

Je kleiner δ , desto genauer oder *feiner* ist Z.

Wähle Punkte $x_k \in I_k$ für jedes Intervall:

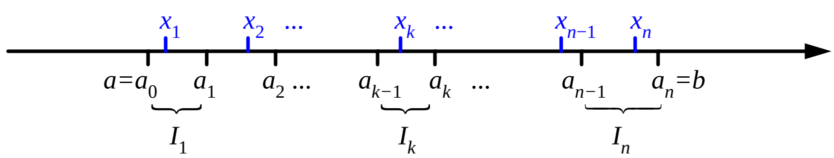


Abbildung 6.4: Zerlegung eines Intervalls, Zwischenpunkte $x_k \in I_k$

Die Fläche des Streifens über I_k mit der Höhe $f(x_k)$ ist (Abbildung 6.2)

$$\Delta a_k \cdot f(x_k).$$

Integralsumme zur Zerlegung $Z = \{I_1, I_2, \dots, I_n\}$:

$$S(Z) = \sum_{k=1}^{n} \Delta a_k \cdot f(x_k).$$

Dies ist eine Näherung für den Inhalt der Fläche zwischen x-Achse, Geraden $x = a$ und $x = b$ und Graph von $f(x)$.

6.3.1 Definition

Eine Folge von Zerlegungen $Z_1, Z_2, Z_3, \dots$ heißt unbegrenzt fein*, wenn die Folge der maximalen Intervalllängen $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots$ gegen Null konvergiert.*

6.3.2 Definition

Falls

$$G = \lim S(Z_i) = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \delta_n \to 0}} \sum_{k=1}^{n} \Delta a_k \cdot f(x_k)$$

für jede *unbegrenzt feine Folge von Zerlegungen stets denselben Wert G liefert , heißt* $f(x)$ integrierbar *auf* $[a, b]$ *und*

$$G = \int_a^b f(x)\, dx$$

bestimmtes Integral *von* $f(x)$ *über* $[a, b]$.

6.3.3 Beispiel

$f(x) = x, \quad [a, b] = [0, 1],$

Beispiel für zwei mögliche Integralsummen (Untersumme und Obersumme) zu äquidistanten Zerlegungen

Bei gegebenem n setze $h = \frac{1}{n}$, d. h. $\quad a_k = k \cdot h = \frac{k}{n}$.

Untersumme:

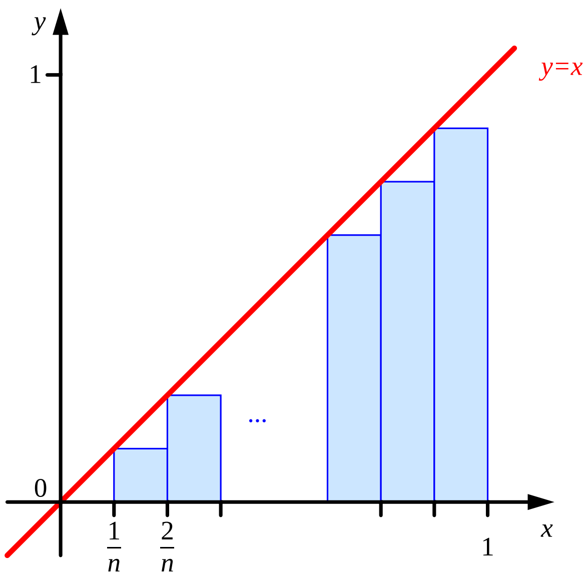


Abbildung 6.5: Untersumme für $f(x) = x$

Man setzt in jedem Teilintervall die kleinstmögliche Höhe ein:

$$\begin{aligned} f_k &= \min\{f(x) : x \in I_k\} \\ &= \min\{x : \frac{k-1}{n} \le x \le \frac{k}{n}\} \\ &= \frac{k-1}{n}. \end{aligned}$$

Wegen $\quad 0 + 1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{1}{2}n(n-1) \quad$ folgt:

$$\begin{aligned} US(f,n) = h\sum_{k=1}^{n} f(x_k) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k-1}{n} \\ &= \frac{1}{n^2}\frac{n}{2}(n-1) = \frac{n-1}{2n}. \end{aligned}$$

Obersumme:

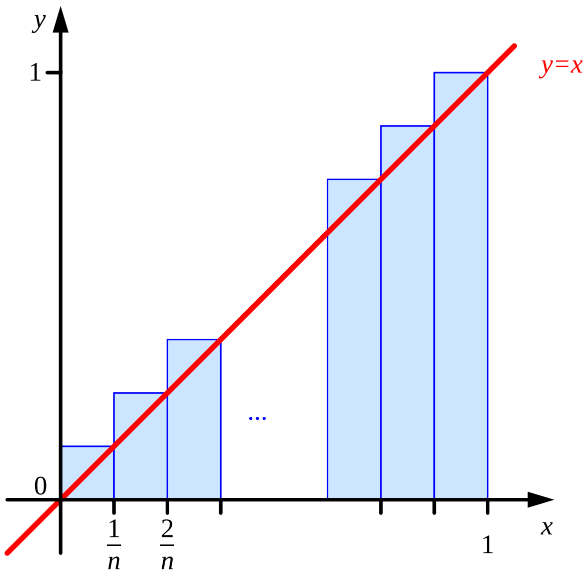


Abbildung 6.6: Obersumme für $f(x) = x$

Setze maximale Funktionswerte in jedem Teilintervall ein:

$$\begin{aligned} f_k &= \max\{f(x) : x \in I_k\} \\ &= \max\{x : \frac{k-1}{n} \le x \le \frac{k}{n}\} \\ &= \frac{k}{n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} OS(f,n) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n} \\ &= \frac{1}{n^2}\frac{1}{2}n(n+1) = \frac{n+1}{2n}. \end{aligned}$$

6.3.4 Beispiel

$$f(x) = x, \quad [a,b] = [0,1], \quad a_k = \frac{k}{n}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} US(f,n) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\frac{n-1}{n} = \frac{1}{2} \\ \lim_{n\to\infty} OS(f,n) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\frac{n+1}{n} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Da die Unterteilungen äquidistant sind,
ist die Unterteilungslänge jeweils $\delta = \frac{1}{n}$,
also sind dies unendlich feine *Unterteilungen für* $n \to \infty$.

6.3.5 Satz

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ *Funktion mit Stammfunktion* $F(x)$, $I = [a,b]$.

Dann existiert das bestimmte Integral von $f(x)$ *und*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

(Abkürzung: $F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$*)*

6.3.6 Beispiel

$$\int_{-1}^{2} x^2\,dx$$

Lösung

$$\int_{-1}^{2} x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{2} = \frac{1}{3}\cdot 2^3 - \left(-\frac{1}{3}\right) = 3.$$

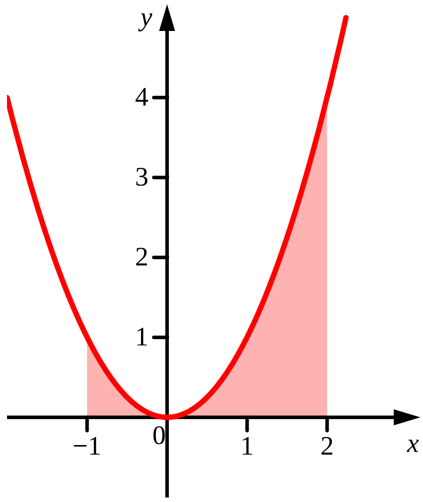


Abbildung 6.7: $\int_{-1}^{2} x^2\,dx$

6.3.7 Beispiel

$$\int_0^{\pi} \sin\,x\,dx = -\cos\,x\Big|_0^{\pi} = -\cos\,\pi - (-\cos\,0) = 2.$$

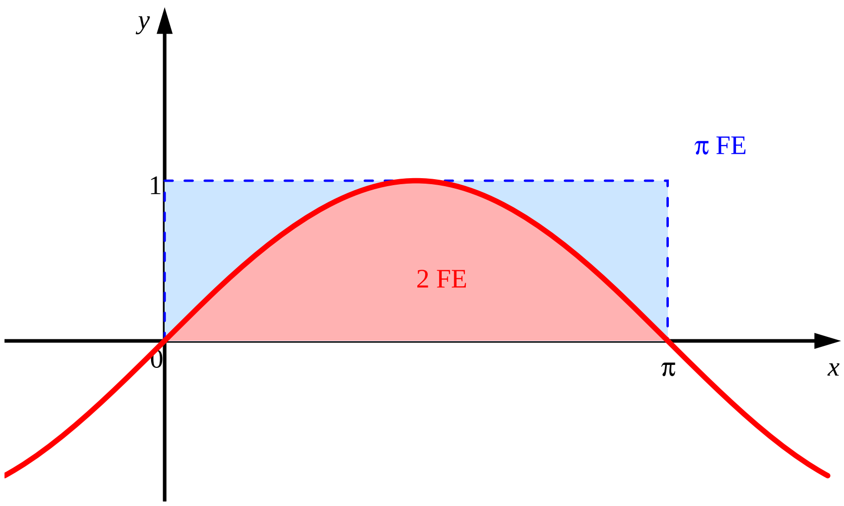


Abbildung 6.8: Zu Beispiel 6.3.7

6.3.8 Beispiel

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \sin x \cos x \, dx &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin(2x)\, dx \\ &= -\frac{1}{4}\cos(2x)\Big|_0^{2\pi} \\ &= -\frac{1}{4}(\cos(4\pi) - \cos 0) \\ &= 0.\end{aligned}$$

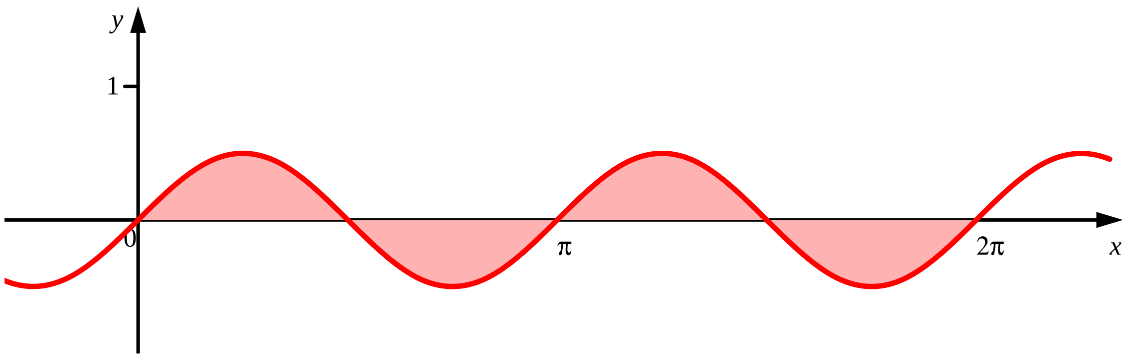


Abbildung 6.9: Zu Beispiel 6.3.8

6.3.9 Bemerkung
Falls $f(x) < 0$ auf $I = [a, b]$ ist, so ist

$$\int_a^b f(x)\, dx < 0.$$

6.3.10 Bemerkung
Falls $f(x)$ wechselndes Vorzeichen hat, so berechnet man mit

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

die Flächenteile unter der x-Achse negativ.

6.3.11 Bemerkung

Mit $\int_a^b |f(x)|\, dx$ berechnet man die Fläche zwischen dem Graph von $f(x)$ und der x-Achse , wobei alle Flächen positiv zählen.

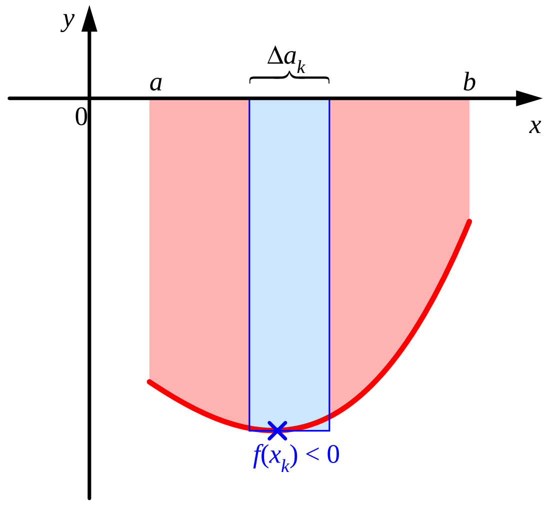


Abbildung 6.10: Flächenberechnung bei negativen Funktionswerten

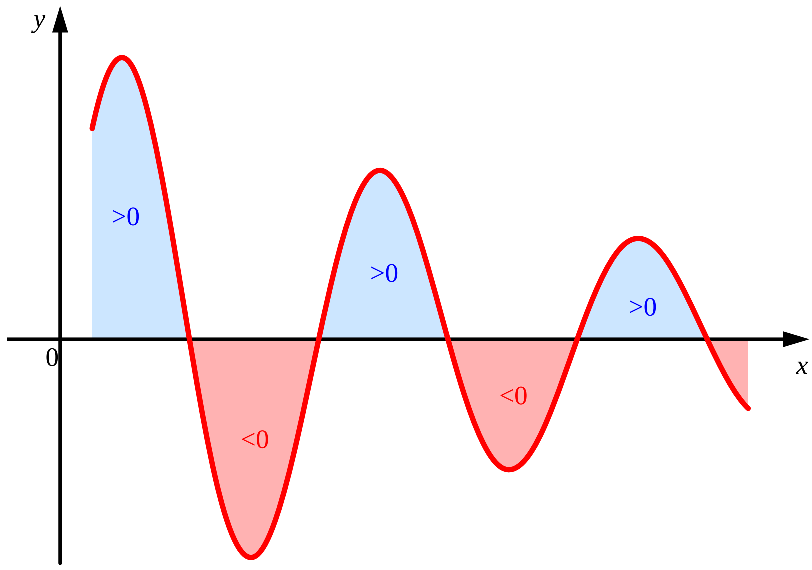


Abbildung 6.11: Flächenberechnung bei wechselnden Vorzeichen

6.3.12 Beispiel

$$\int_0^{2\pi} |\sin x|\, dx.$$

Vorüberlegung :

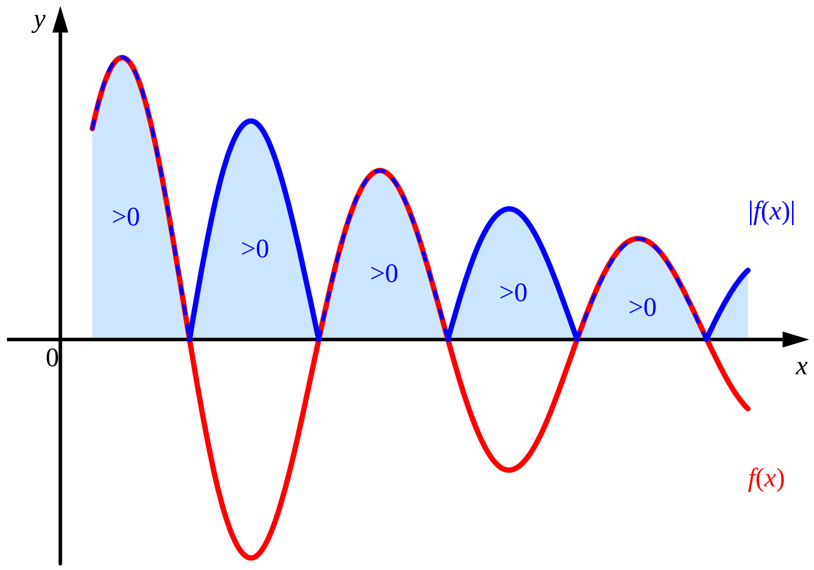


Abbildung 6.12: Flächenberechnung bei Betragsfunktionen

$$|\sin x| = \begin{cases} \sin x & falls \quad \sin x \geq 0 \\ -\sin x & falls \quad \sin x < 0 \end{cases}$$

$$\iff |\sin x| = \begin{cases} \sin x & \textit{für} \quad 0 \leq x \leq \pi \\ -\sin x & \textit{für} \quad \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

d.h.

$$\int_0^{2\pi} |\sin x|\,dx = \int_0^{\pi} \sin x\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin x)\,dx$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |\sin x|\,dx &= \int_0^{\pi} \sin x\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin x)\,dx \\ &= -\cos(x)\Big|_0^{\pi} + \cos x\Big|_{\pi}^{2\pi} \\ &= -\cos\pi - (-\cos 0) + \cos 2\pi - \cos\pi \\ &= 1 + 1 + 1 - (-1) \\ &= 4. \end{aligned}$$

6.3.13 Bemerkung
Die Fläche zwischen zwei Kurven $f(x)$, $g(x)$
mit $f(x) \geq g(x)$ im Bereich $a \leq x \leq b$
wird berechnet durch

$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx.$$

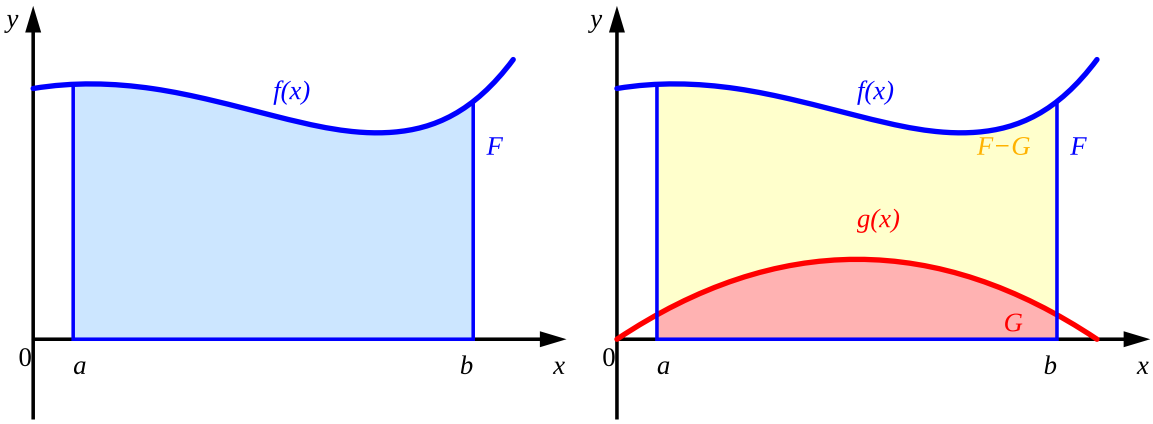


Abbildung 6.13: Fläche zwischen zwei Kurven

6.3.14 Bemerkung
Die Fläche zwischen zwei Kurven $f(x)$, $g(x)$ im Bereich $a \leq x \leq b$
wird berechnet durch

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx.$$

(Alle Flächenteile werden positiv gezählt.)

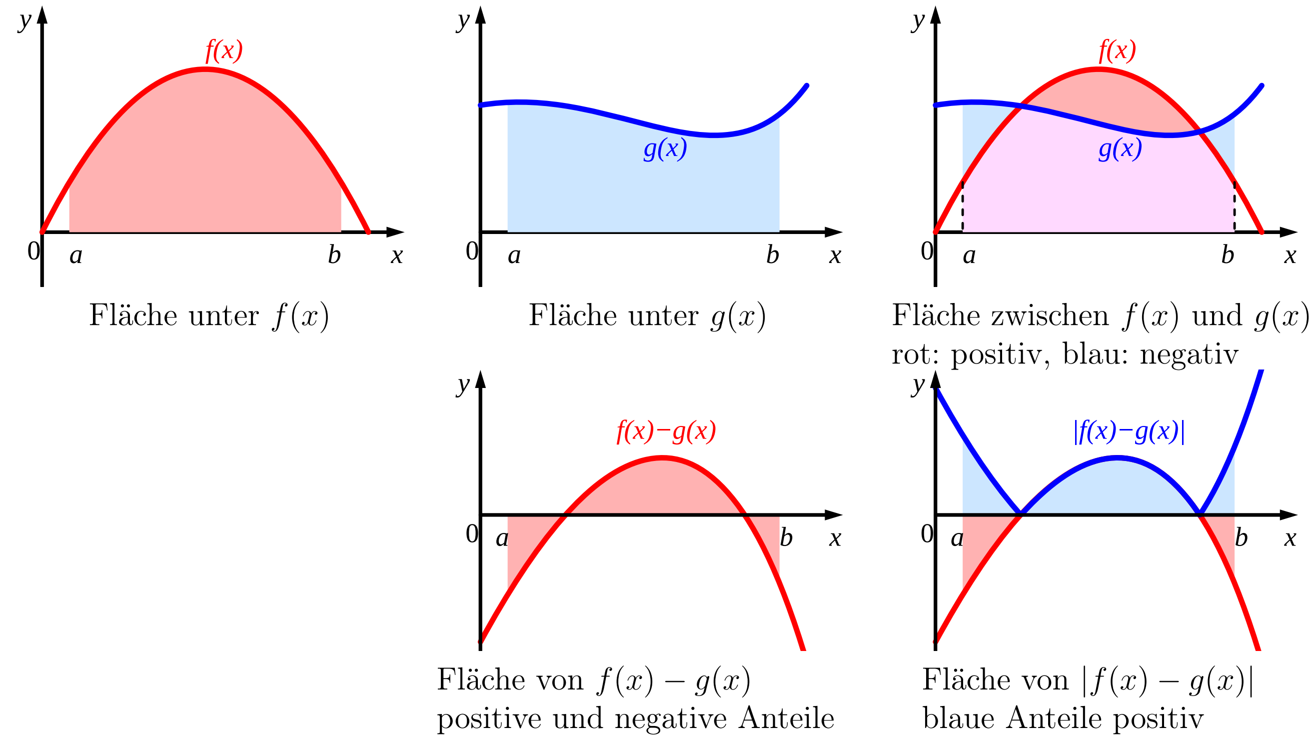


Abbildung 6.14: Fläche zwischen zwei Kurven, wechselnde Vorzeichen

6.3.15 Beispiel
Fläche zwischen der Parabel $f(x) = x^2$ und der Geraden $g(x) = x + 2$.

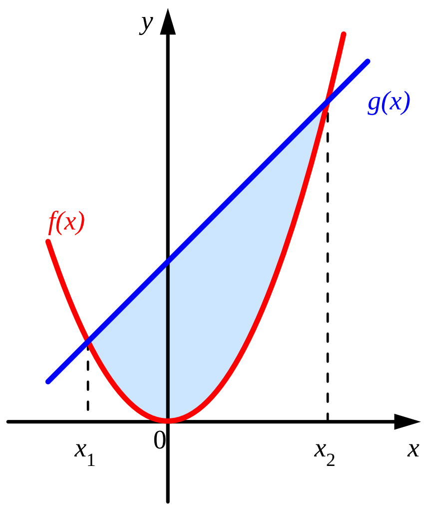


Abbildung 6.15: Parabel $f(x) = x^2$, Gerade $g(x) = x + 2$

Lösung

Siehe Abbildung 6.15:

a) Schnittpunkte zwischen $f(x)$ und $g(x)$:

$$\begin{aligned} x^2 = x+2 \quad &\Longleftrightarrow \quad x^2 - x - 2 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad (x-2)(x+1) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad x_1 = -1, \qquad x_2 = 2. \end{aligned}$$

b) Fläche :

$$\begin{aligned} F &= \int_{-1}^{2} |f(x) - g(x)| \, dx \\ &= \int_{-1}^{2} |x^2 - (x+2)| \, dx \\ &= \int_{-1}^{2} (x + 2 - x^2) \, dx \qquad (\text{für } x \in [-1,2] \text{ ist } g(x) \geq f(x)) \\ &= (\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{3}x^3)\Big|_{-1}^{2} \\ &= 6 - \frac{8}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{3} \\ &= \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

6.3.1 Eigenschaften des bestimmten Integrals

6.3.16 Satz
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall.

a) Stetige Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$ sind integrierbar auf I.

b) Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stückweise stetig mit endlichen Sprüngen bei $x_1, x_2 \cdots, x_n$ (insb. sei f beschränkt). Dann ist f(x) integrierbar und

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^{x_1} + \int_{x_1}^{x_2} + \cdots + \int_{x_n}^{b} f(x)\, dx$$

(siehe Abbildung 6.16

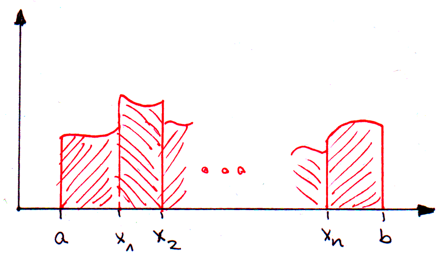


Abbildung 6.16: Fläche unter stückweise stetiger Funktion

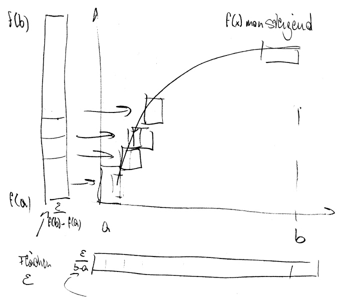


Abbildung 6.17: Fläche unter monotoner Funktion

6.3.17 Satz
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall.
Alle monotonen beschränkten Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$ sind integrierbar auf I (siehe Abbildung 6.17).

6.3.18 Satz
Unbeschränkte Funktionen sind nicht integrierbar.

Beweis
Wenn f unbeschränkt ist, so gilt dies bei jeder Zerlegung von I auf mindestens einem Teilintervall für f ebenfalls.

In diesem Teilintervall kann man dann die Höhe des Rechtecks (also auch den Flächeninhalt und damit die gesamte Rechtecksumme) beliebig groß wählen,

6.3.19 Satz
Es sei $I \subset \mathbb{R}$ abgeschlossenes Intervall.

a) *Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ integrierbar. Sei ferner $c \in \mathbb{R}$. Dann sind*

$$c \cdot f(x), \quad |f(x)|$$

integrierbar auf I.

b) *Es seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ integrierbar. Dann sind*

$$f(x) + g(x), \quad f(x) - g(x), \quad f(x) \cdot g(x)$$

integrierbar auf I.

c) *Es sei $f : I \to [c, d]$ integrierbar und $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist*

$$g \circ f : I \to \mathbb{R}$$

integrierbar.

6.3.20 Satz
Es sei $I \subset \mathbb{R}$ abgeschlossenes Intervall und $f(x)$ integrierbar auf I.

Falls $[\alpha, \beta] \subset I$, so ist f auch auf dem Teilintervall $[\alpha, \beta]$ integrierbar (Abbildung 6.18).

6.3.21 Satz
Es sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ abgeschlossenes Intervall.

Sei

$$a = a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1} < a_n = b.$$

Es sei f auf $[a_{k-1}, a_k]$ integrierbar $(k = 1, \ldots, n)$.
Dann ist f auch auf dem Gesamtintervall $I = [a_0, a_n]$ integrierbar (Abbildung 6.19).

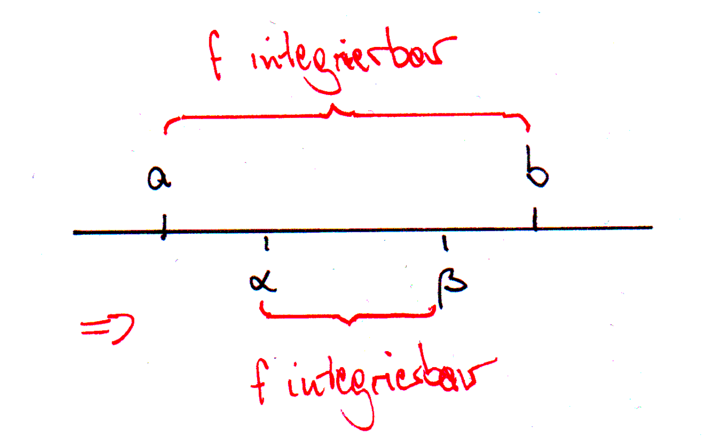


Abbildung 6.18: Integrierbarkeit auf Teilintervall

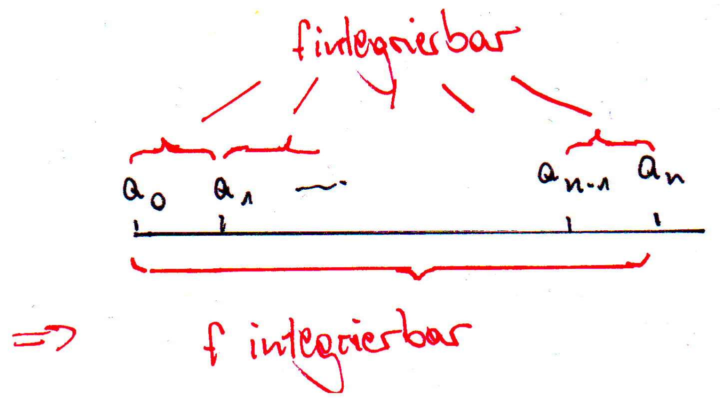


Abbildung 6.19: Integrierbarkeit auf Partition und Gesamtintervall

6.3.22 Satz
Sei f(x) integrierbar , $a < c < b$.
Dann ist

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

(Abbildung 6.20

6.3.23 Satz
$f(x)$ sei auf $I = [a, b]$ integrierbar.
Dann ist $f(x)$ beschränkt, sei

$$m \le f(x) \le M \quad (x \in I).$$

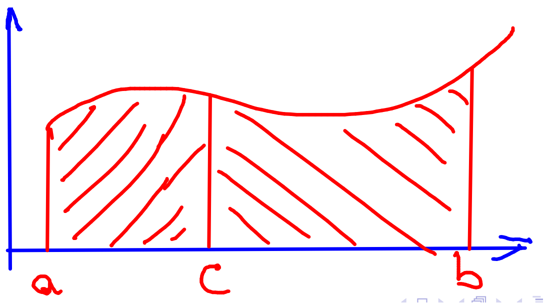


Abbildung 6.20: Unterteilung des Integrals $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

Es gilt

$$m \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M \cdot (b-a).$$

(Abbildung 6.21).

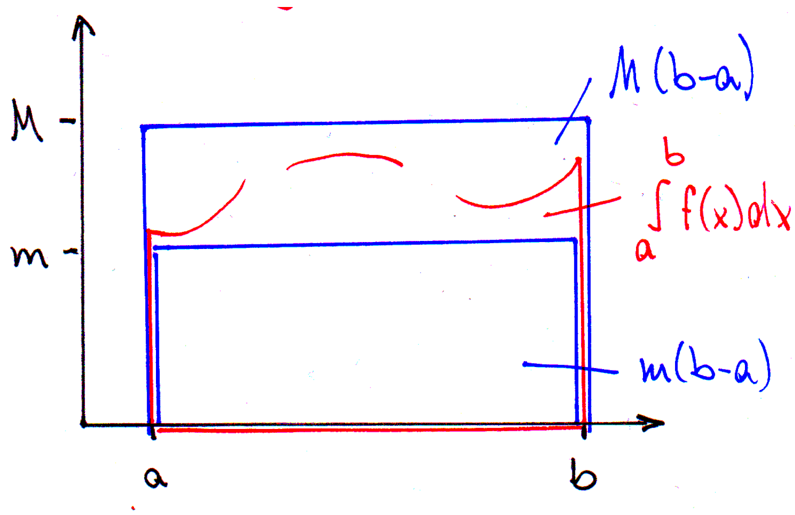


Abbildung 6.21: Integralabschätzung durch Minimum und Maximum

6.3.24 Satz
Mittelwertsatz
$f(x)$ sei stetig . Dann gibt es einen Punkt $a \leq x_0 \leq b$ mit

$$f(x_0) \cdot (b-a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

(Abbildung 6.22).

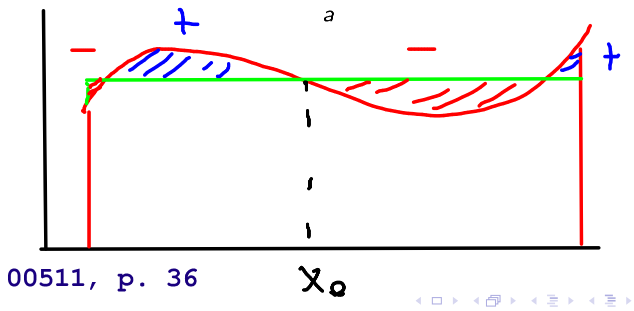


Abbildung 6.22: Mittelwertsatz für Integrale

6.3.25 Satz
Seien $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *integrierbar und* $f(x) \leq g(x)$ *für alle* $x \in [a, b]$. *Dann ist auch*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

6.3.26 Definition
Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *integrierbar* , $x_1, x_2 \in I$, $\quad x_1 > x_2$.
Sei $F(x)$ *Stammfunktion zu* $f(x)$:

$$\begin{aligned}\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx &= -\int_{x_2}^{x_1} f(x)\,dx \\ &= -(F(x_1) - F(x_2)) \\ &= F(x_2) - F(x_1).\end{aligned}$$

6.3.27 Beispiel

$$\begin{aligned}\int_0^{-\pi} \sin x\,dx &= (-\cos x)\Big|_0^{-\pi}\\ &= -\cos(-\pi) - (-\cos 0)\\ &= -(-1) - (-1)\\ &= 2.\end{aligned}$$

6.3.28 Bemerkung
Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbar auf einem abgeschlossenen Intervall, $a, b, c \in I$ (beliebig angeordnet).
Dann ist

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

6.3.29 Satz
Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, also integrierbar.
Dann ist

$$P(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

eine Stammfunktion zu $f(x)$ auf I.

Beweis

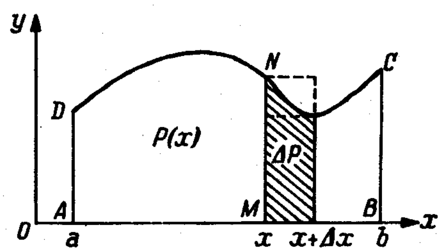


Abbildung 6.23: Stammfunktion durch bestimmtes Integral

In Abbildung 6.23 sei $P(x)$ der Flächeninhalt unterhalb der Kurve $f(x)$ zwischen den Punkten a und x auf der waagerechten Achse.

Wir betrachten den Zuwachs ΔP beim Übergang $x \to x + \Delta x$.

Auf $[x, x + \Delta x]$ sei $f_{\max}$ das Maximum und $f_{\min}$ das Minimum von f (existieren, da f stetig ist).

Dann ist $f_{\min}\,\Delta x \le \Delta P \le f_{\max}\,\Delta x$. Also ist

$$f_{\min} \le \frac{\Delta P}{\Delta x} \le f_{\max} \Longrightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta x} = f(x),$$

da $f_{\min} \to f(x), \quad f_{\max} \to f(x)$ für $\Delta x \to 0$ wegen der Stetigkeit von f.

6.3.30 Satz
Sei $f : I \to \mathbb{R}$ integrierbar und

$$P(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

a) P ist stetig auf I.

b) Ist $f(x)$ stetig in $x_0 \in I$, so ist $P(x)$ differenzierbar in x_0 und $P'(x_0) = f(x_0)$.

6.3.31 Beispiel
Stammfunktion zu $f(x) = x^2$:

$$F(x) = \int_0^x t^2\,dt = \frac{1}{3}t^3\Big|_0^x = \frac{1}{3}x^3.$$

6.3.32 Beispiel
Stammfunktion zu $f(x) = |x|$:

$$F(x) = \int_0^x |t|\,dt =$$

a) falls $x < 0$: $F(x) = \displaystyle\int_0^x -t\,dt = -\frac{1}{2}t^2\Big|_0^x = -\frac{1}{2}x^2$

b) falls $x \ge 0$: $F(x) = \displaystyle\int_0^x t\,dt = \frac{1}{2}t^2\Big|_0^x = \frac{1}{2}x^2$

d.h.

$$F(x) = \left\{\begin{array}{lccc} \frac{1}{2}x^2 & \text{für} & x \ge & 0 \\ -\frac{1}{2}x^2 & \text{für} & x < & 0 \end{array}\right\} = \frac{1}{2}x \cdot |x|.$$

6.3.2 Substitution bei bestimmten Integralen

6.3.33 Beispiel

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} 2x\,\sin(x^2)\,dx$$

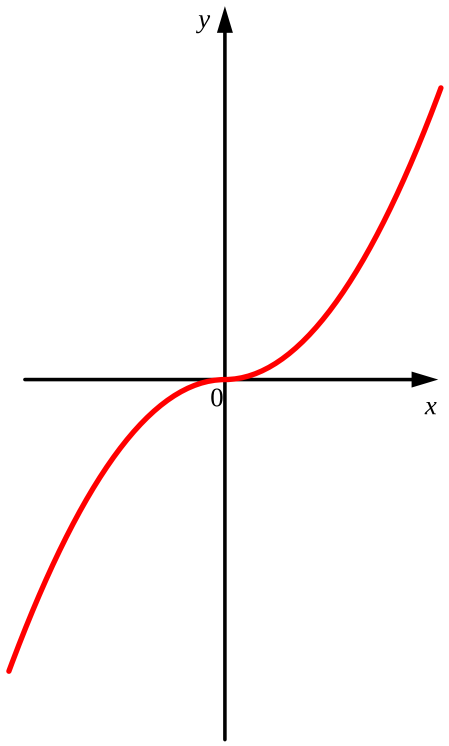


Abbildung 6.24: Stammfunktion von $|x|$

Lösung

a) Stammfunktion zu $2x\,\sin(x^2)$:

$$\int 2x\,\sin(x^2)\,dx = \int \sin u\,du = -\cos u = -\cos\left(x^2\right)$$

mit

$$u = x^2, \qquad \frac{du}{dx} = 2x, \qquad du = 2x\,dx.$$

b) Bestimmtes Integral:

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} 2x\,\sin(x^2)\,dx = -\cos(x^2)\Big|_{x=0}^{\sqrt{\pi}} = -\cos\pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2.$$

c) Alternative: Auswertung der Stammfunktion in der Variablen u :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \sin u \, du &= -\cos u \Big|_{u=0}^{\pi} \\
(&= -\cos(x^2)\Big|_{x=0}^{\sqrt{\pi}}) \\
&= -\cos\pi + \cos 0 \\
&= 2.
\end{aligned}$$

6.3.34 Satz
Es sei $f(u)$ stetig und $u : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit stetiger Ableitung $u'(x)$.
Es sei $W_u \subseteq D_f$.
Ferner sei $x_1, x_2 \in I$.
Dann ist

$$\int_{x_1}^{x_2} f(u(x)) \cdot \frac{du}{dx}(x)\, dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u)\, du$$

mit $u_1 = u(x_1)$, $\qquad u_2 = u(x_2)$.

6.3.35 Bemerkung
Die Formel für die Substitution gilt auch, wenn f nur integrierbar und u differenzierbar mit stetiger Ableitung und zusätzlich monoton ist.

6.3.36 Beispiel

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \, dx$$

Lösung
Substituiere

$$u = \sin x, \qquad \frac{du}{dx} = \cos x, \qquad du = \cos x \, dx$$

also

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \, dx &= \int_{\sin 0}^{\sin\frac{\pi}{2}} u^2 \, du \\
&= \int_0^1 u^2 \, du \\
&= \frac{1}{3} u^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

6.3.37 Beispiel

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-u^2}\,du$$

Lösung

Substituiere

$$u = \sin x, \qquad \frac{du}{dx} = \cos x, \qquad du = \cos x\,dx$$

:

$$u_1 = \sin x_1 = -1 \implies x_1 = -\frac{\pi}{2}$$

$$u_2 = \sin x_2 = 1 \implies x_2 = \frac{\pi}{2}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \sqrt{1-u^2}\,du &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 x} \cdot \cos(x)\,dx \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1+\cos 2x)\,dx \\
&= \frac{1}{2}(x+\sin x\cos x)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \left(\frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) \\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

6.3.38 Beispiel

$$\int_{2}^{3} \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx$$

Lösung

6.3.39 Beispiel

$$\int_1^4 \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx$$

Lösung

6.3.40 Beispiel

$$\int_1^2 x\,\ln x\,dx$$

Lösung

6.3.41 Satz
Sei $f : [0, a] \longrightarrow \mathbb{R}$ *integrierbar, dann ist*

$$\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-t)\,dt.$$

Beweis
Substituiere $x = a - t$.
Es ist $x_0 = 0 \iff t_0 = a, \quad x_1 = a \iff t_1 = 0$ und $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{dx}{dt} = -1$. Daher gilt:

$$\begin{aligned}\int_0^a f(x)\,dx &= \int_a^0 f(a-t)\cdot\frac{dx}{dt}\,dt \\ &= -\int_a^0 f(a-t)\,dt \quad = \quad \int_0^a f(a-t)\,dt.\end{aligned}$$

6.3.42 Satz
Sei $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *integrierbar, dann ist*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx.$$

Beweis

Nach dem vorigen Satz ist

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin(\frac{\pi}{2} - x))\,dx.$$

Wegen $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$ ergibt sich die Behauptung.

6.3.43 Satz
Sei $f : [-a, a] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbar, dann ist

a) $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx,$ *falls $f(x)$ gerade ist,*

b) $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0,$ *falls $f(x)$ ungerade ist.*

Beweis
Es gilt

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx. \tag{6.15}$$

Substituiere im ersten Integral $x = -t$.
Es ist $\dfrac{dx}{dt} = -1$, die Grenzen ändern ihr Vorzeichen:

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_a^0 f(-t)\cdot(-1)\,dt = \int_0^a f(-t)\,dt.$$

Eingesetzt in Gleichung (6.15) ergibt sich:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_0^a f(-t)\,dt + \int_0^a f(x)\,dx.$$

Bei geraden Funktionen ist $f(-t) = f(t)$ (die Summanden sind gleich),
bei ungeraden Funktionen ist $f(-t) = -f(t)$ (die Summanden heben sich auf).

6.3.44 Satz
Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ periodisch mit der Periode $\lambda > 0$ und integrierbar auf $[0, \lambda]$.
Dann ist f integrierbar auf jedem abgeschlossenen Intervall endlicher Länge und

$$\int_0^{\lambda} f(x)\,dx = \int_a^{a+\lambda} f(x)\,dx,$$

d. h., jedes Integral über ein beliebiges Intervall $[a, a+\lambda]$ von Periodenlänge ergibt denselben Wert.

Beweis

$$\int_a^{a+\lambda} f(x)\,dx = \int_a^0 f(x)\,dx + \int_0^\lambda f(x)\,dx + \int_\lambda^{a+\lambda} f(x)\,dx. \tag{6.16}$$

Substituiere im letzten Integral $x = t + \lambda$. Die Grenzen werden dann $t = 0$ und $t = a$, und es ist $dx = dt$, ferner $f(t+\lambda) = f(t)$ wegen der Periodizität von f:

$$\int_\lambda^{a+\lambda} f(x)\,dx = \int_0^a f(t+\lambda)\,dt = -\int_a^0 f(t)\,dt,$$

so dass der erste und dritte Summand in Gleichung (6.16) sich aufheben.

6.3.45 Definition
Für eine integrierbare λ-periodische Funktion $f(x)$ sind die reellen Fourierkoeffizienten *folgendermaßen definiert:*

$$a_k = \frac{2}{\lambda}\int_I f(x)\cos\frac{2k\pi}{\lambda}x\,dx, \quad k \in \mathbb{N}_0 \tag{6.17}$$

$$b_k = \frac{2}{\lambda}\int_I f(x)\sin\frac{2k\pi}{\lambda}x\,dx, \quad k \in \mathbb{N} \tag{6.18}$$

wobei I ein beliebiges Intervall von Periodenlänge λ ist.

6.3.46 Bemerkung
Für eine integrierbare λ-periodische Funktion $f(x)$ sind die

a) Kosinuskoeffizienten null, falls f ungerade Funktion ist

b) Sinuskoeffizienten null, falls f gerade ist.

Beweis
$f(x)$ sei ungerade:

$$a_k = \frac{2}{\lambda}\int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} \underbrace{f(x)\cdot\cos\frac{2k\pi}{\lambda}x}_{\text{ungerade Funktion}}\,dx = 0$$

Falls $f(x)$ gerade ist:

$$b_k = \frac{2}{\lambda}\int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} \underbrace{f(x)\cdot\sin\frac{2k\pi}{\lambda}x}_{\text{ungerade Funktion}}\,dx = 0$$

Die Behauptung folgt aus Satz 6.3.43.

6.3.47 Satz
Für eine integrierbare λ-periodische Funktion $f(x)$ ist die Fouriersumme das trigonometrische Polynom

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos \frac{2\pi kx}{\lambda} + b_k \sin \frac{2\pi kx}{\lambda})$$

mit den Fourierkoeffizienten a_k, b_k gemäß Definition 6.3.45.

Das Polynom enthält nur Sinussummanden, falls f ungerade ist und ist ein Kosinuspolynom, falls f gerade ist.

6.3.48 Satz
Falls f stückweise stetig mit endlichen Sprüngen ist, gilt

$$S_n(x) \to f(x) \quad (n \to \infty)$$

für die Stetigkeitsstellen $x \in \mathbb{R}$ von f und

$$S_n(x) \to \frac{1}{2}(f(x-) + f(x+)) \quad (n \to \infty)$$

an Sprungstellen $x \in \mathbb{R}$ von f.

(kein Beweis).

6.3.49 Beispiel
Berechne die Fouriersummen der 2π-periodischen Funktion $f(x) = x \quad (-\pi < x < \pi)$.

Lösung

Sinuskoeffizienten:

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin kx \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} x \sin kx \, dx \quad (x \sin kx \text{ ist gerade Funktion}) \end{aligned}$$

Kosinuskoeffizienten:

$$a_k = 0 \quad (x \cos kx \text{ ist ungerade Funktion})$$

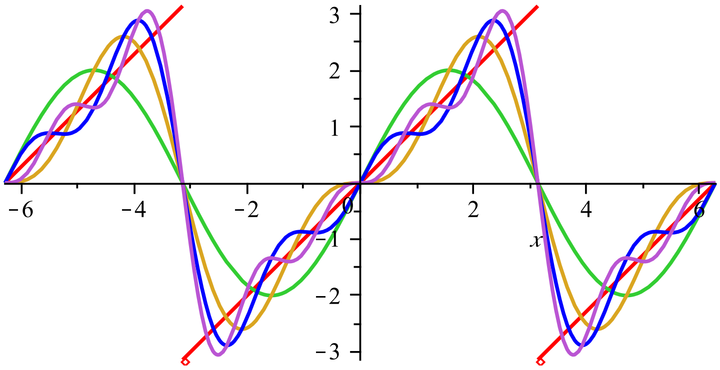


Abbildung 6.25: Fouriersummen vom Grad ≤ 4 der Sägezahnkurve

Sinuskoeffizienten: (partielle Integration $u = x$, $v' = \sin kx$)

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin kx\,dx \\
&= -\frac{2}{k\pi}x\cos kx\Big|_0^\pi + \frac{2}{k\pi}\int_0^\pi \cos kx\,dx \\
&= -\frac{2}{k\pi}x\cos kx\Big|_0^\pi + \frac{2}{k^2\pi}\sin kx\Big|_0^\pi \\
&= -\frac{2}{k\pi}\pi(-1)^k \\
&= \frac{2}{k}(-1)^{k+1}.
\end{aligned}$$

Die Fouriersumme ist daher

$$S_n(x) = 2\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin kx.$$

6.4 Uneigentliche Integrale

6.4.1 Definition
Es sei

$$f : [a,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$

auf jedem endlichen Intervall $[a,b]$ *mit* $b > a$ *integrierbar.*

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

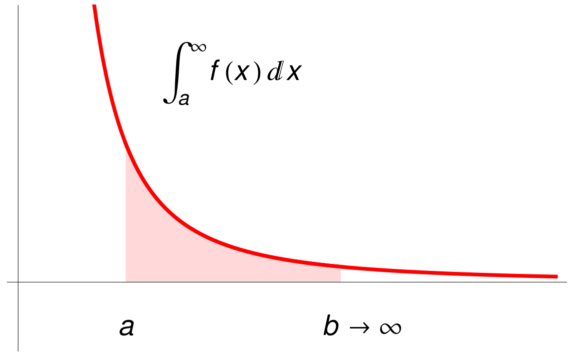


Abbildung 6.26: Uneigentliches Integral $\int_a^\infty f(x)\,dx$

heißt uneigentliches Integral von f (von a bis ∞), *falls der angegebene Grenzwert existiert (als endlicher oder unendlicher Wert).*

Falls $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx \in \mathbb{R}$, *so heißt das Integral* konvergent *und die Funktion* integrierbar auf $[a,\infty)$, *andernfalls (falls der Grenzwert nicht existiert oder nicht endlich ist) heißt das Integral* divergent.

6.4.2 Beispiel

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty 2^{-x}\,dx &= \lim_{b\to\infty}\int_0^b 2^{-x}\,dx \\
&= \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{(\ln 2)(-x)}\,dx \\
&= \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{\ln 2}\cdot e^{-(\ln 2)x}\Big|_0^b \\
&= \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{\ln 2}(e^{-(\ln 2)b}-1) \\
&= \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{\ln 2}((e^{\ln 2})^{-b}-1) \\
&= \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{\ln 2}(2^{-b}-1) \\
&= -\frac{1}{\ln 2}(0-1) \\
&= \frac{1}{\ln 2} \approx 1.443.
\end{aligned}$$

Veranschaulichung, dass die Fläche F zwischen $f(x) = 2^{-x}$ und x-Achse im Bereich $0 \leq x < \infty$ endliche Größe hat:

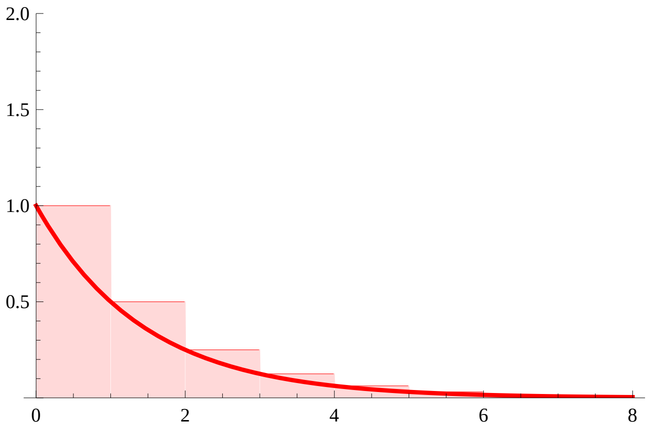


Abbildung 6.27: Obersumme zur Funktion 2^{-x}

Obersumme zur äquidistanten Unterteilung mit Schrittweite $h = 1$ (siehe Abbildung 6.27

$$OS(n) = \sum_{k=0}^{n} h \cdot f(k) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right).$$

(Geometrische Summe mit $x = \frac{1}{2}$, siehe Formel (2.1)).

Da alle Summanden positiv sind, ist die Summe streng monoton steigend:

$$OS(n) < \lim_{n\to\infty} OS(n) = 2 \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = 2.$$

Offensichtlich ist daher

$$\int_0^\infty 2^{-x}\,dx < 2.$$

6.4.3 Beispiel

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx &= \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx \\
&= \lim_{b\to\infty} (-x^{-1}\Big|_1^b) \\
&= \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{b} - (-\frac{1}{1}) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

6.4.4 Beispiel

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx &= \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x}\,dx\\ &= \lim_{b\to\infty} ln\,|x|\,\Big|_1^b\\ &= \lim_{b\to\infty} ln(b)-0\\ &= \infty\end{aligned}$$

d.h. das Integral divergiert.

Veranschaulichung

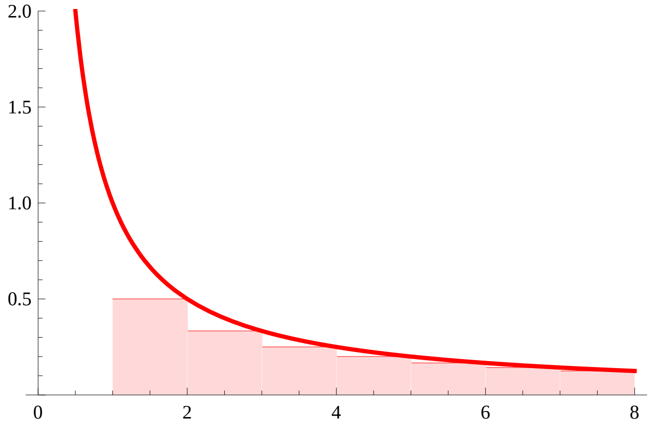


Abbildung 6.28: Untersumme zur Funktion $\frac{1}{x}$

Die Fläche F unter $f(x)=\frac{1}{x}$ für $1 \le x < \infty$ ist größer als die unendliche Rechtecksumme (vgl. Abbildung 6.28)

$$\begin{array}{ccccccccc} & F_1 & + & F_2+F_3 & + & F_4+F_5+F_6+F_7 & + & \cdots \\ = & \frac{1}{2} & + & \underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{\vee} & + & \underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}_{\vee} & + & \underbrace{\cdots} \\ > & \frac{1}{2} & + & \underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} & + & \underbrace{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}} & + & \underbrace{\cdots} \\ = & \frac{1}{2} & + & \frac{1}{2} & + & \frac{1}{2} & + & \cdots \end{array}$$

Es lassen sich beliebig viele Gruppen der Summe $> \frac{1}{2}$ bilden, also ist $F_1+F_2+\cdots=\infty$. Da $F > F_1+F_2+F_3+\cdots$ ist erst recht $F=\infty$.

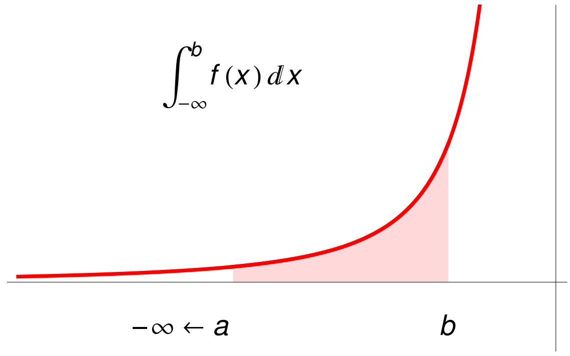


Abbildung 6.29: Uneigentliches Integral $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$

6.4.5 Satz
Sei $a > 0$. $\displaystyle\int_a^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ *konvergiert für $\alpha > 1$*

und divergiert (d.h. wird unendlich) für $\alpha \leq 1$.

6.4.6 Definition
Es sei

$$f : (-\infty, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

auf jedem endlichen Intervall $[a, b]$ mit $a < b$ integrierbar.

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

heißt uneigentliches Integral von f (von $-\infty$ bis a)*, falls der angegebene Grenzwert existiert.*

Falls $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx \in \mathbb{R}$*, so heißt das Integral* konvergent *und die Funktion* integrierbar auf $(-\infty, b]$*, andernfalls (falls der Grenzwert nicht existiert oder nicht endlich ist) heißt das Integral* divergent.

6.4.7 Definition
Es sei

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

auf jedem endlichen Intervall $[a, b]$ *integrierbar.*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)\,dx + \lim_{b\to\infty}\int_c^b f(x)\,dx$$

heißt uneigentliches Integral von f (von $-\infty$ bis ∞), *falls beide Grenzwerte (unabhängig voneinander) existieren* ($c \in \mathbb{R}$ *kann beliebig gewählt werden).*

Falls $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \in \mathbb{R}$, *so heißt das Integral* konvergent *und die Funktion* integrierbar auf $(-\infty, \infty)$, *andernfalls heißt das Integral* divergent.

6.4.8 Beispiel

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{0} x\cdot e^{-x^2}\,dx &= \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 x\cdot e^{-x^2}\,dx \\
(\textit{Subst. } u = x^2, &\qquad \frac{du}{dx} = 2x, \qquad du = 2x\,dx): \\
&= \lim_{a\to-\infty} -\frac{1}{2}\int_{a^2}^{0} e^{-u}\,du \\
&= \lim_{a\to-\infty} -\frac{1}{2}\int_{a^2}^{0} e^{-u}\,du \\
&= \lim_{a\to-\infty} -\frac{1}{2}e^{-u}\Big|_{u=a^2}^{0} \\
&= \lim_{a\to-\infty}\left(-\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}e^{-a^2}\right)\right) \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-\infty} = \quad -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

6.4.9 Beispiel

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |x|e^{-x^2}\,dx &= \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 (-x)e^{-x^2}\,dx + \lim_{b\to\infty}\int_0^b xe^{-x^2}\,dx \\
(Subst.\ u = x^2, &\qquad \frac{du}{dx} = 2x, \qquad du = 2x\,dx): \\
&= \lim_{a\to-\infty} -\frac{1}{2}\int_{a^2}^0 e^{-u}\,du + \lim_{b\to\infty}\frac{1}{2}\int_0^{b^2} e^{-u}\,du \\
&= \lim_{a\to-\infty}\frac{1}{2}e^{-u}\Big|_{u=a^2}^0 + \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{2}e^{-u}\Big|_{u=0}^{b^2} \\
&= \lim_{a\to-\infty}(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-a^2}) + \lim_{b\to\infty}(-\frac{1}{2}e^{-b^2} + \frac{1}{2}) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-\infty} - \frac{1}{2}e^{-\infty} + \frac{1}{2} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

6.4.10 Beispiel

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty}(1 + \frac{1}{x^2})\,dx &= \lim_{b\to\infty}(x - \frac{1}{x})\Big|_1^b \\
&= \lim_{b\to\infty}(b - \frac{1}{b}) - (1-1) \\
&= \infty
\end{aligned}$$

d.h. das Integral divergiert.

6.4.11 Beispiel

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} sin(x)\,dx &= \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 sin(x)\,dx + \lim_{b\to\infty}\int_0^b sin(x)\,dx \\
&= \lim_{a\to-\infty} -cos(x)\Big|_a^0 + \lim_{b\to\infty} -cos(x)\Big|_0^b \\
&= \lim_{a\to-\infty} -cos(0) + cos(a) + \lim_{b\to\infty} -cos(b) + cos(0).
\end{aligned}$$

existiert nicht, da a und b unabhängig voneinander gegen Unendlich gehen.

6.4.12 Definition
Es sei

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

auf jedem endlichen Intervall $[a, b]$ *integrierbar.*

$$V.p. \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{c\to\infty} \int_{-c}^{c} f(x)\, dx$$

heißt Cauchyscher Hauptwert ("valeur principal") *des uneigentlichen Integrals von* f*.*

6.4.13 Bemerkung

$$V.p. \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 0$$

für jede Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*, die auf endlichen Intervallen integrierbar und* ungerade *ist.*

Beweis
Es ist $\int_{-c}^{c} f(x)\, dx = 0$ für ungerade Funktionen,
daher ist auch

$$\lim_{c\to\infty} \int_{-c}^{c} f(x)\, dx = 0.$$

6.4.14 Beispiel

$$V.p. \int_{-\infty}^{\infty} \sin x\, dx = 0.$$

(Klar nach der vorigen Bemerkung, da $\sin x$ ungerade ist).

6.4.15 Beispiel
Das uneigentliche Integral

$$V.p. \int_{-\infty}^{\infty} \cos x\, dx$$

existiert nicht.

$$\begin{aligned}
\lim_{c\to\infty} \int_{-c}^{c} \cos x\, dx &= \lim_{c\to\infty} \sin x \Big|_{x=-c}^{c} \\
&= \lim_{c\to\infty} \sin c - \sin(-c) \\
&= \lim_{c\to\infty} 2 \sin c
\end{aligned}$$

existiert nicht (oszillierender Wert).

6.4.16 Beispiel

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x}{1+x^2}\,dx$$

Stammfunktion:

$$\begin{aligned}\int \frac{1+x}{1+x^2}\,dx &= \int \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int \frac{x}{1+x^2}\,dx \\ &= \arctan x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C\end{aligned}$$

Uneigentliches Integral:

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x}{1+x^2}\,dx \\ &= \lim_{a\to-\infty} \arctan x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_{x=a}^{0} + \lim_{b\to\infty} \arctan x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_{x=0}^{b} \\ &= \lim_{a\to-\infty} -\arctan a - \frac{1}{2}\ln(1+a^2) + \lim_{b\to\infty} \arctan b + \frac{1}{2}\ln(1+b^2) \\ &= -\infty + \infty \text{ (undef.)}\end{aligned}$$

Hauptwert:

$$\begin{aligned}&V.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x}{1+x^2}\,dx \\ &= \lim_{c\to\infty} \arctan x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_{x=-c}^{c} \\ &= \lim_{c\to\infty} \arctan c + \frac{1}{2}\ln(1+c^2) - \arctan(-c) - \frac{1}{2}\ln(1+c^2) \\ &= \lim_{c\to\infty} 2\arctan c \\ &= 2\cdot\frac{\pi}{2} \quad = \pi.\end{aligned}$$

6.4.17 Satz

a) $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ *hat höchstens dann einen endlichen Wert, wenn* $\lim_{x\to\infty} F(x)$ *existiert.*

b) Entsprechend ist für die Existenz von $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ *(als reeller, nicht unendlicher Wert) notwendig, daß* $\lim_{x\to-\infty} F(x)$ *existiert.*

c) *Für die Existenz von* $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ *ist die Existenz sowohl von* $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$ *als auch von* $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)$ *notwendig.*

6.5 Weitere uneigentliche Integrale

6.5.1 Beispiel

$$\int_{-1}^{8} \frac{1}{\sqrt[3]{|x|}}\,dx$$

Problem : Integrand hat Polstelle im Integrationsintervall bei $x = 0$ *(siehe Abbildung 6.30).*

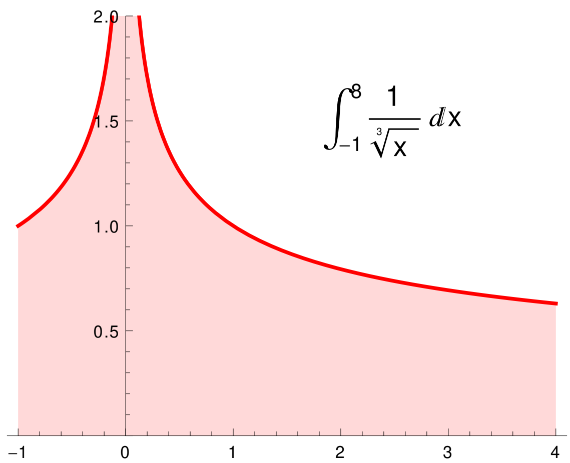


Abbildung 6.30: Integral mit Polstelle

6.5.2 Definition

Sei $f : D_f \to \mathbb{R}$ *Funktion mit unendlichem Sprung bei* $c \in [a, b]$, $D_f = [a, b] \setminus \{c\}$.

a) *Falls* $c = a$, *d. h.* $D_f = (a, b]$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$$

(siehe Abbildung 6.31).

b) *Falls* $c = b$, *d. h.* $D_f = [a, b)$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

(siehe Abbildung 6.32).

c) Falls $a < c < b$, d. h. $D_f = [a, c) \cup (c, b]$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon' \to 0+} \int_{c+\varepsilon'}^b f(x)\,dx$$

(mit zwei unabhängigen Grenzwerten, siehe Abbildung 6.33).

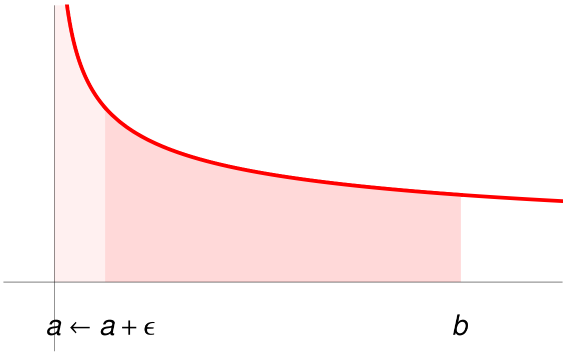


Abbildung 6.31: Integral über $[a, b]$ mit Polstelle bei a

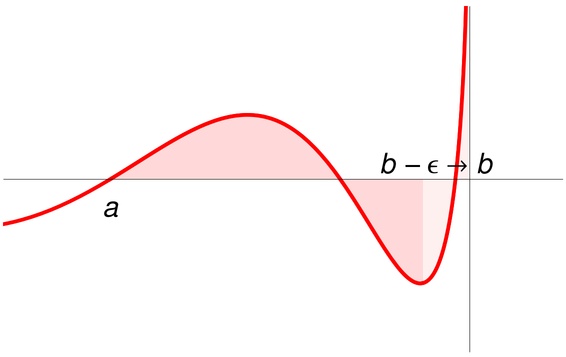


Abbildung 6.32: Integral über $[a, b]$ mit Polstelle bei b

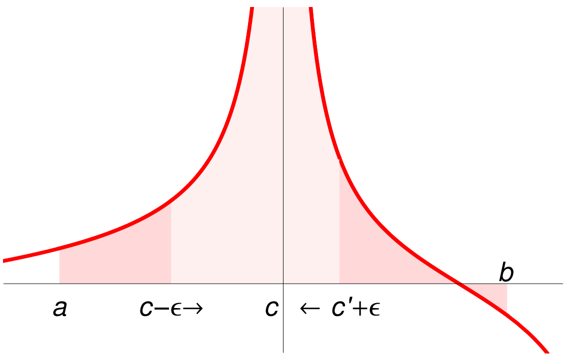


Abbildung 6.33: Integral über $[a, b]$ mit Polstelle im Innnern

6.5.3 Beispiel

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{8} \frac{1}{\sqrt[3]{|x|}}\,dx &= \lim_{\varepsilon\to 0-} \int_{-1}^{\varepsilon} \frac{1}{\sqrt[3]{-x}}\,dx + \lim_{\varepsilon'\to 0+} \int_{\varepsilon'}^{8} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0-} -\frac{3}{2}(-x)^{\frac{2}{3}}\Big|_{-1}^{\varepsilon} + \lim_{\varepsilon'\to 0+} \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\Big|_{\varepsilon'}^{8} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0-} \left(-\frac{3}{2}(-\varepsilon)^{\frac{2}{3}} + \frac{3}{2}\right) + \lim_{\varepsilon'\to 0+} \left(\frac{3}{2}\cdot 8^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2}\varepsilon'^{\frac{2}{3}}\right) \\
&= 0 + \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\cdot 4 - 0 \\
&= \frac{15}{2}.
\end{aligned}$$

6.5.4 Beispiel

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{1} \ln x\,dx &= \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\varepsilon}^{1} \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{\ln x}_{v}\,dx \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0+} \left(x\ln x\Big|_{\varepsilon}^{1} - \int_{\varepsilon}^{1} x\cdot\frac{1}{x}\,dx\right) \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0+} (0 - \varepsilon\ln\varepsilon - x\Big|_{\varepsilon}^{1}) \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0+} (0 - \varepsilon\ln\varepsilon - (1-\varepsilon)) \\
&= 0 - \lim_{\varepsilon\to 0+} \varepsilon\ln\varepsilon - 1 + 0 \\
&= -1 - \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{\ln\varepsilon}{\varepsilon^{-1}} \\
&= -1 - \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{\varepsilon^{-1}}{-\varepsilon^{-2}} \\
&= -1 - \lim_{\varepsilon\to 0+} (-\varepsilon) \\
&= -1.
\end{aligned}$$

6.5.5 Beispiel

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx &= \lim_{\varepsilon\to 0-}\int_{-1}^{\varepsilon}\frac{1}{x^2}\,dx + \lim_{\varepsilon'\to 0+}\int_{\varepsilon'}^{1}\frac{1}{x^2}\,dx \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0-} -x^{-1}\Big|_{-1}^{\varepsilon} + \lim_{\varepsilon'\to 0+} -x^{-1}\Big|_{\varepsilon'}^{1} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0-}(-\frac{1}{\varepsilon}-1) + \lim_{\varepsilon'\to 0+}(-1+\frac{1}{\varepsilon'}) \\
&= \infty + \infty \\
&= \infty
\end{aligned}$$

d.h. das Integral divergiert!

6.5.6 Bemerkung
Rechnung ohne Beachtung der Polstelle :

$$\int_{-1}^{1} x^{-2}\,dx = -x^{-1}\Big|_{-1}^{1} = -1-1 = -2. \leftarrow falsch!$$

Grund für den Fehler:
Unstetigkeit der Stammfunktion $-\frac{1}{x}$ *bei* $x = 0$.

Fazit: *Vor jeder Berechnung bestimmter Integrale Integrand auf Polstellen im Integrationsgebiet untersuchen!!*

6.6 Grenzen der Integralrechnung

6.6.1 Bemerkung
Integration kann zu komplizierteren Funktionenklassen führen :

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x}\,dx &= \ln|x| + C \\
\int \underbrace{\frac{1}{1+x^2}}_{rational}\,dx &= \underbrace{\arctan(x)}_{transzendent} + C
\end{aligned}$$

6.6.2 Definition

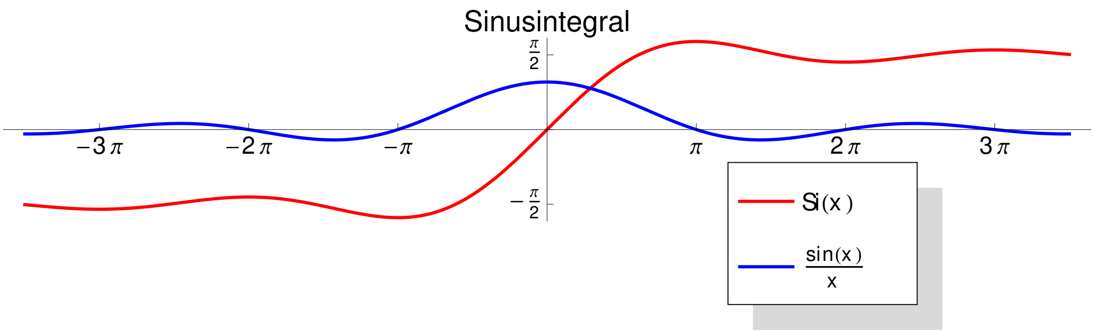
a) $\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt$

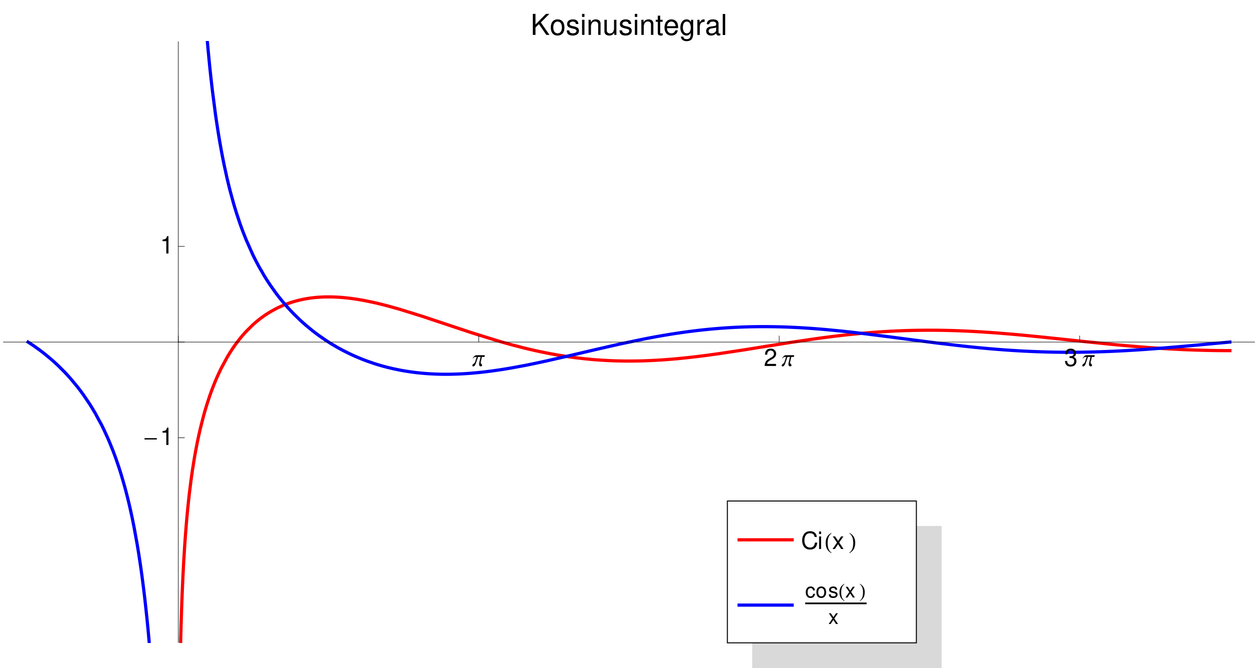
b) $\mathrm{Ci}(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\, dt$

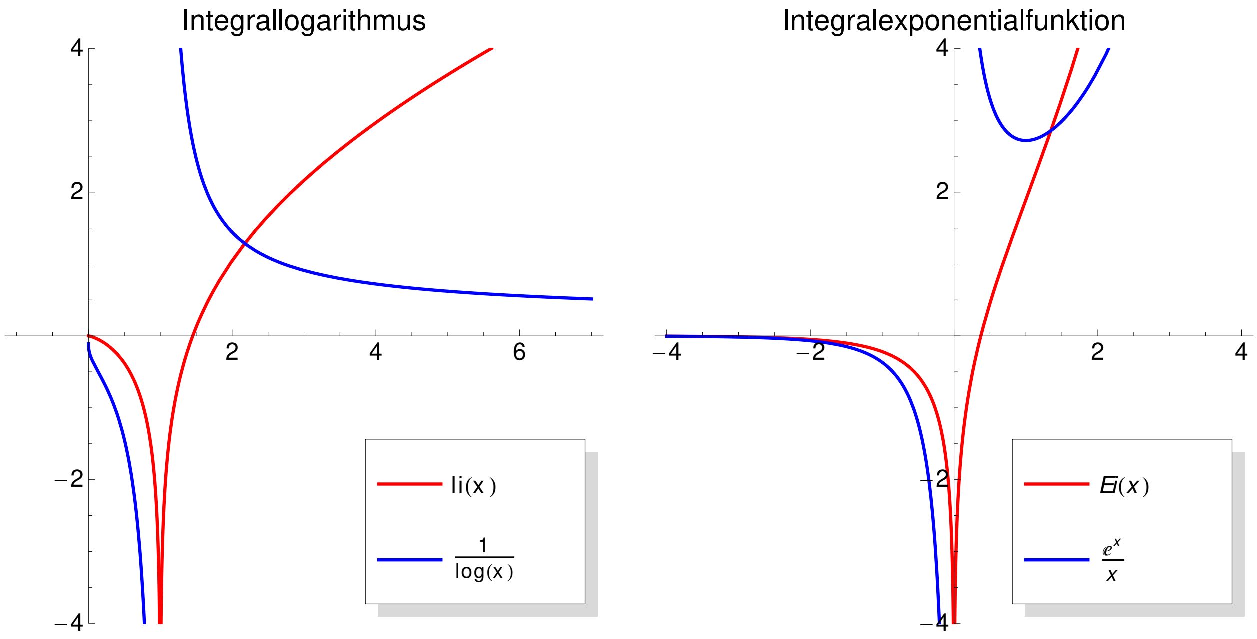
c) $\mathrm{Li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t}$

d) $\mathrm{Ei}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t}\, dt$

sind nicht-elementare Funktionen
(Integralsinus, -kosinus, -logarithmus, -exponentialfunktion).
Berechnung näherungsweise.







Mit diesen neuen Bezeichnungen werden einige weitere Stammfunktionen berechenbar:

6.6.3 Beispiel

$$\int \frac{\cos x}{x^3}\, dx$$

Lösung

Zweifache partielle Integration, beginnend mit $u' = x^{-3}, \quad v = \cos x$ ergibt:

$$\begin{aligned}
\int x^{-3} \cos x\, dx &= -\frac{1}{2}x^{-2} \cos x - \frac{1}{2}\int x^{-2} \sin x\, dx \\
&= -\frac{1}{2}x^{-2} \cos x - \frac{1}{2}\left(-x^{-1} \sin x + \int x^{-1} \cos x\, dx\right) \\
&= -\frac{1}{2}x^{-2} \cos x + \frac{1}{2}x^{-1} \sin x - \frac{1}{2}\int x^{-1} \cos x\, dx \\
&= -\frac{\cos x}{2x^2} + \frac{\sin x}{2x} - \frac{\mathrm{Ci}(x)}{2} + C
\end{aligned}$$

6.6.4 Beispiel

$$\int \frac{\sin x}{x^2 + 2x + 1}\, dx$$

Lösung

Partielle Integration, Substitution $u = x + 1$:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin x}{x^2+2x+1}\,dx &= \int (x+1)^{-2}\sin x\,dx \\
&= -(x+1)^{-1}\sin x + \int (x+1)^{-1}\cos x\,dx \\
&= -(x+1)^{-1}\sin x + \int u^{-1}\cos(u-1)\,du \\
&= -(x+1)^{-1}\sin x + \int u^{-1}(\cos u\cos 1 + \sin u \sin 1)\,du \\
&= -(x+1)^{-1}\sin x + \cos 1 \int u^{-1}\cos u\,du + \sin 1 \int u^{-1}\sin u\,du \\
&= -\frac{\sin x}{x+1} + \cos 1\ \mathrm{Ci}(u) + \sin 1\ \mathrm{Si}(u) + C \\
&= -\frac{\sin x}{x+1} + \cos 1\ \mathrm{Ci}(x+1) + \sin 1\ \mathrm{Si}(x+1) + C
\end{aligned}$$

6.6.5 Beispiel

$$\int e^{ax}\ln x\,dx$$

Lösung

Partielle Integration mit $u' = e^{ax}$, $\quad v = \ln x$, danach Substitution $t = ax$:

$$\begin{aligned}
\int e^{ax}\ln x\,dx &= \frac{1}{a}e^{ax}\ln x - \int \frac{e^{ax}}{ax}\,dx \\
&= \frac{1}{a}e^{ax}\ln x - \frac{1}{a}\int \frac{e^t}{t}\,dt \\
&= \frac{1}{a}e^{ax}\ln x - \frac{1}{a}\,\mathrm{Ei}(t) + C \\
&= \frac{1}{a}e^{ax}\ln x - \frac{1}{a}\,\mathrm{Ei}(ax) + C
\end{aligned}$$

6.6.6 Beispiel

$$\int \frac{x^m}{\ln x}\,dx$$

Lösung

1. Substitution $t = \ln x,\ x = e^t,\ dx = e^t\,dt$,
2. Substitution $u = (m+1)t,\ du = (m+1)\,dt$:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^m}{\ln x}\,dx &= \int \frac{e^{mt}}{t}\,e^t\,dt \\ &= (m+1)\int \frac{e^{(m+1)t}}{(m+1)t}\,dt \\ &= \int \frac{e^u}{u}\,du \\ &= \operatorname{Ei}(u) + C \\ &= \operatorname{Ei}((m+1)t) + C \\ &= \operatorname{Ei}((m+1)\ln x) + C.\end{aligned}$$

6.7 Numerische Integration

6.7.1 Satz
Näherungsweise Berechnung des bestimmten Integrals $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

Zu gegebenem $n \in \mathbb{N}$ *sei* $h = \dfrac{b-a}{n}$.
Dann ist

$$\{a,\ a+h,\ a+2h,\ \ldots, a+nh = b\} = \{a_k = a+kh : k = 0,\ldots,n\}$$

eine äquidistante Unterteilung von $I = [a,b]$.

$$\{a + \tfrac{1}{2}\,h,\ a+\tfrac{3}{2}\,h,\ \ldots,\ a+\tfrac{2n-1}{2}\,h\} = \{x_k = a + \left(k-\tfrac{1}{2}\right)h : k = 1,\ldots,n\}$$

sind die Mittelpunkte der Teilintervalle (siehe Abbildung 6.34).

6.7.2 Satz (Rechteckregel)

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} h\cdot f(x_k) = h\cdot\sum_{k=1}^{n} f\left(a + \left(k-\tfrac{1}{2}\right)h\right)$$

mit $h = \dfrac{b-a}{n}$ *ist eine Approximation des bestimmten Integrals.*

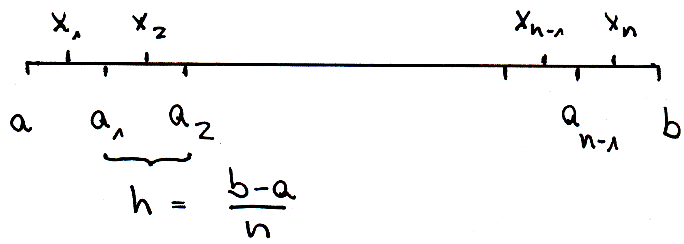


Abbildung 6.34: Äquidistante Unterteilung eines Intervalls mit Mittelpunkten x_k

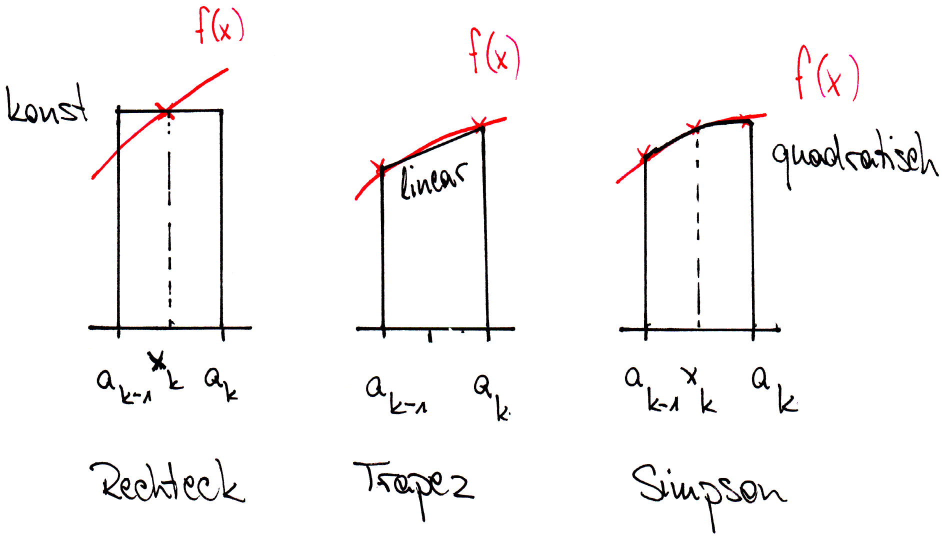


Abbildung 6.35: Approximation der Integralfläche durch Flächenstreifen

6.7.3 Satz (Trapezregel)
Inhalt der Trapezfläche über $[a_{k-1}, a_k]$:

$$F_k = h \cdot \frac{1}{2}(f(a_{k-1}) + f(a_k)).$$

Gesamtfläche:

$$\begin{aligned} F &= F_1 + F_2 + \cdots + F_n \\ &= \frac{h}{2}\left(f(a_0) + f(a_1) + f(a_1) + f(a_2) + \cdots + f(a_{n-1} + f(a_n)\right) \\ &= \frac{h}{2}\left(f(a_0) + 2f(a_1) + \cdots + 2f(a_{n-1}) + f(a_n)\right) \\ &= \frac{h}{2}(f(a_0) + f(a_n)) + h\sum_{k=1}^{n-1} f(a_k) \end{aligned}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}(f(a)+f(b)) + h\sum_{k=1}^{n-1} f(a+kh)$$

mit $h = \dfrac{b-a}{n}$.

6.7.4 Bemerkung

a) *Der Fehler der Integrationsregeln verhält sich etwa wie* $C \cdot h^2$ *(*C *abhängig von* $f(x)$*), d. h. Verdoppelung der Knoten verkleinert den Rechenfehler um einen Faktor* 4 *usw.*

b) *Der Fehler der Trapezregel ist etwa doppelt so groß wie der Fehler der Rechteckregel.*

6.7.5 Beispiel

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

a) *Rechteckregel mit* $n = 1, 2, 3$ *Teilintervallen.*

$$\begin{aligned}
R_1 &= 1 \cdot f(\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{4}\\
R_2 &= \frac{1}{2}\cdot(f(\frac{1}{4}) + f(\frac{3}{4})) = \frac{1}{2}(\frac{1}{16}+\frac{9}{16}) = \frac{10}{32} = 0.3125\\
R_3 &= \frac{1}{3}\cdot(f(\frac{1}{6}) + f(\frac{1}{2}) + f(\frac{5}{6})) = \frac{1}{3}(\frac{1}{36}+\frac{1}{4}+\frac{25}{36}) = \frac{1}{3}\cdot\frac{35}{36}\\
&= 0.32407\ldots
\end{aligned}$$

b) *Trapezregel mit* $n = 1, 2, 3$ *Teilintervallen.*

$$\begin{aligned}
T_1 &= \frac{1}{2}\cdot(f(0)+f(1)) = \frac{1}{2}\\
T_2 &= \frac{1}{4}\cdot(f(0)+2f(\frac{1}{2})+f(1)) = \frac{1}{4}(\frac{1}{2}+1) = 0.375\\
T_3 &= \frac{1}{6}\cdot(f(0)+2f(\frac{1}{3})+2f(\frac{2}{3})+f(1)) = \frac{1}{6}(\frac{2}{9}+\frac{8}{9}+1) = \frac{1}{6}\cdot\frac{19}{9}\\
&= 0.35185\ldots
\end{aligned}$$

6.7.6 Satz
Näherungsweise Berechnung von $\int_a^b f(x)\,dx$ *mit der Simpsonregel.*

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &\approx \sum_{k=0}^{n-1} s_k \\ &= \frac{h}{6}\left(f(a)+f(b)+4\sum_{k=1}^{n} f(a+(k-\frac{1}{2})h)+2\sum_{k=1}^{n-1} f(a+kh)\right)\end{aligned}$$

Beweis

Bei der Simpsonregel wird das Integrationsintervall $[a,b]$ in n Intervalle $[a_{k-1},a_k]$ aufgeteilt:

$$a_k = a+kh, \quad k=0,\ldots,n \quad \text{mit } h=\frac{b-a}{n}$$

Intervallmittelpunkte:

$$x_k = a+(k-\frac{1}{2})h, \quad k=1,\ldots,n.$$

$f(x)$ wird auf jedem Intervall $I_k=[a_{k-1},a_k]$ ersetzt durch eine Parabel

$$p_k(x) = A_k x^2 + B_k x + C_k$$

mit

$$\begin{aligned}p_k(a_{k-1}) &= y_{2k-2} = f(a_{k-1}),\\ p_k(x_k) &= y_{2k-1} = f(x_k),\\ p_k(a_k) &= y_{2k} = f(a_k).\end{aligned}$$

Statt $f(x)$ wird $p_k(x)$ integriert für jedes Intervall

$$I_k, \quad k=1,\ldots,n$$

und die Ergebnisse summiert.

Bestimmung der Teilintegrale $s_k = \int_{a_{k-1}}^{a_k} p_k(x)\,dx$:

Wir können jeweils annehmen, dass die Fläche unter der Parabel so verschoben ist, dass sie von $x=-h/2$ bis $x=h/2$ reicht, mit den Werten

$$\begin{aligned}p(-h/2) &= y_{2k-2},\\ p(0) &= y_{2k-1},\\ p(h/2) &= y_{2k}.\end{aligned}$$

Wir setzen $p(x) = Ax^2 + Bx + C$, die Koeffizienten bestimmen wir abhängig von den Interpolationsbedingungen später.

$$\begin{aligned} s_k = \int_{-h/2}^{h/2} p(x)\,dx &= \int_{-h/2}^{h/2} (Ax^2 + Bx + C)\,dx \\ &= \frac{1}{3}Ax^3 + \frac{1}{2}Bx^2 + Cx \Big|_{x=-h/2}^{h/2} \\ &= \frac{1}{12}Ah^3 + Ch. \end{aligned}$$

Auswertung der Interpolationsbedingungen gibt die Koeffizienten A und C:

$$\begin{aligned} p(-h/2) = \quad & y_{2k-2} &= A\frac{h^2}{4} - B\frac{h}{2} + C \\ p(0) = \quad & y_{2k-1} &= C \\ p(h/2) = \quad & y_{2k} &= A\frac{h^2}{4} + B\frac{h}{2} + C \end{aligned}$$

also ist

$$C = y_{2k-1}$$

und (Summe der ersten und dritten Gleichung)

$$\frac{1}{2}Ah^2 + 2C = y_{2k-2} + y_{2k},$$

d. h.

$$A = \frac{2}{h^2}(y_{2k-2} + y_{2k} - 2y_{2k-1})$$

und damit wiederum

$$s_k = \frac{1}{12}Ah^3 + Ch = \frac{h}{6}(y_{2k-2} + 4y_{2k-1} + y_{2k}).$$

Das Gesamtergebnis ist damit

$$\sum_{k=0}^{n-1} s_k = \frac{h}{6}\left(f(a) + f(b) + 4\sum_{k=1}^{n} f(a + (k - \frac{1}{2})h) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(a + kh) \right)$$

6.7.7 Bemerkung

Eine Obergrenze für den Fehler der Simpsonregel ist

$$\frac{(b-a)h^4}{180}\|f^{(4)}\|$$

($\|f^{(4)}\|$ bedeutet den Maximalwert des Betrags der vierten Ableitung von f). Insbesondere ist die Simpsonregel exakt für Polynome bis zum Grad 3.

Komplexe Zahlen
Lineare Algebra
Lineare Differentialgleichungen

Kapitel 7

Komplexe Zahlen

7.1 Definition und kartesische Form

Problemstellung: $x^2 = -1$ ist in $\mathbb{R}$ nicht lösbar.

7.1.1 Definition

a)

$$j = \sqrt{-1}$$

heißt imaginäre Einheit,
das Quadrat $j^2 = -1$ ist eine reelle Zahl.

b) Eine imaginäre Zahl

$$bj$$

ist das Produkt aus $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und der imaginären Einheit j.

7.1.2 Bemerkung

a) Lösungen von $x^2 = -1$:

$$x = j \text{ oder } x = -j$$

(vergleiche mit $x^2 = 2$).

b) Wurzeln aus anderen negativen Zahlen:

$$\begin{aligned} \sqrt{-9} &= \sqrt{9}\sqrt{-1} = 3j \\ \sqrt{-5} &= \sqrt{5}\sqrt{-1} = \sqrt{5}j \end{aligned}$$

7.1.3 Bemerkung

Lösungen beliebiger quadratischer Gleichungen mit Koeffizienten aus $\mathbb{R}$:

a) mit quadratischer Formel: $x^2 + px + q = 0 \iff x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$

b) quadratische Ergänzung: $x^2 + px + q = 0 \iff \underbrace{x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2}x + \frac{p^2}{4}}_{=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2} = -q + \frac{p^2}{4}$

7.1.4 Beispiel

a)

$$\begin{aligned} x^2 + x + 1 = 0 \quad &\iff \quad x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} \\ &\iff \quad x = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}j \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} x^2 + 4x + 8 = 0 \quad &\iff \quad x^2 + 2 \cdot 2x + 4 = -4 \\ &\iff \quad (x+2)^2 = -4 \\ &\iff \quad x = -2 \pm 2j. \end{aligned}$$

7.1.5 Definition (Komplexe Zahlen)

a) Eine Zahl

$$z = a + bj \quad \textit{mit } a, b \in \mathbb{R}$$

heißt komplexe Zahl.

b) $\operatorname{Re} z = a$ *heißt* Realteil,
$\operatorname{Im} z = b$ *heißt* Imaginärteil *von* z.

c) Die Menge aller komplexen Zahlen wird mit

$$\mathbb{C} := \{z : z = a + bj,\ a, b \in \mathbb{R}\}$$

bezeichnet.

7.1.6 Bemerkung

Die Darstellungsform $z = a + bj$ *einer komplexen Zahl heißt* kartesische Form.

Die trigonometrische oder Polarform wird in Abschnitt 7.2 eingeführt.

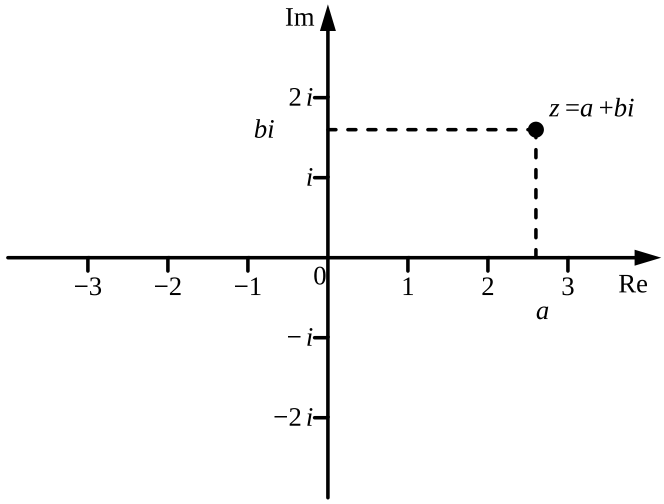


Abbildung 7.1: Gaußsche Zahlenebene

7.1.1 Graphische Darstellung

Eine komplexe Zahl $z = a + bj$ lässt sich in der sogenannten Gaußschen Zahlenebene darstellen, indem Real- und Imaginärteil als kartesische Koordinaten aufgefasst werden. Die Koordinatenachsen werden mit $\operatorname{Re} z$ und $\operatorname{Im} z$ bezeichnet (siehe Abbildung 7.1).

7.1.7 Beispiel
Zu den Zahlen

$$z_1 = 2 + j, \quad z_2 = 1 - j, \quad z_3 = -j, \quad z_4 = 3$$

gebe man die zugehörigen Punkte in der Gaußschen Zahlenebene an (Abbildung 7.2)

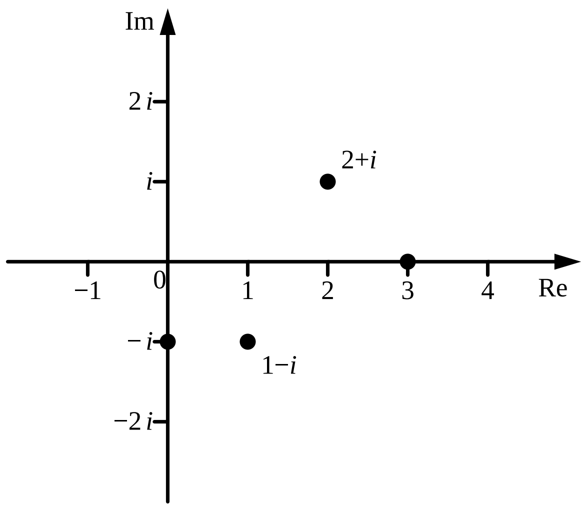


Abbildung 7.2: Darstellung der komplexen Zahlen $z_1 = 2 + j, z_2 = 1 - i, z_3 = -j, z_4 = 3$

7.1.2 Grundlegende Eigenschaften

7.1.8 Definition

a) *Zwei komplexe Zahlen heißen* gleich, *wenn sie in Real- und Imaginärteil übereinstimmen.*

b) *Die komplexe Zahl*

$$z^* = a - bj$$

heißt die zu $z = a + bj$ konjugiert komplexe Zahl *(siehe Abbildung 7.3).*

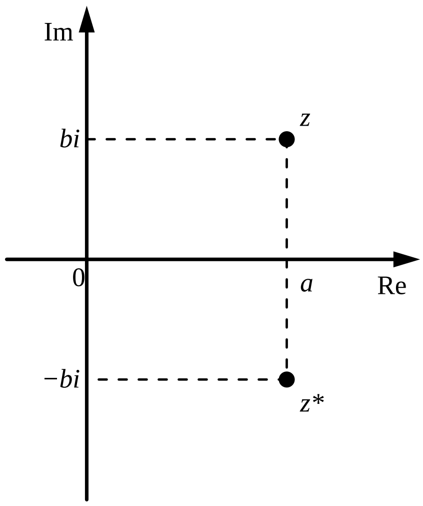


Abbildung 7.3: Konjugiert komplexe Zahl

7.1.9 Bemerkung

Sei $z = a + bj \in \mathbb{C}$. *Dann gilt:*

$$z \neq 0 \iff (a \neq 0 \text{ oder } b \neq 0) \iff a^2 + b^2 > 0$$

7.1.10 Bemerkung

a) *Die Vergleichsrelationen "größer", "kleiner" lassen sich zwischen komplexen Zahlen nicht definieren.*

b) $z \in \mathbb{C}$ *reell* $\iff \operatorname{Im} z = 0$, *d. h.* $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

c) $z \in \mathbb{C}$ *imaginär* $\iff \operatorname{Re} z = 0$

d) *Der Bildpunkt der konjugiert komplexen Zahl* z^* *ist in der Gaußschen Zahlenebene die Spiegelung von* z *an der reellen Achse (siehe Abbildung 7.3).*

e) $(z^*)^* = z$

f) $z = z^* \iff \operatorname{Im} z = 0 \iff z \in \mathbb{R}$

g) $z^* = -z \iff \operatorname{Re} z = 0 \iff z$ *imaginär*

7.1.3 Rechenoperationen

Im folgenden seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und

$$z = a + bj, \quad z_1 = a_1 + b_1 j, \quad z_2 = a_2 + b_2 j \in \mathbb{C}\,.$$

7.1.3.1 Multiplikation mit reeller Zahl

$$\alpha z = \alpha(a + bj) = \alpha a + \alpha bj$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\alpha z) &= \alpha \operatorname{Re} z \\ \operatorname{Im}(\alpha z) &= \alpha \operatorname{Im} z \end{aligned}$$

(siehe Abbildung 7.4).

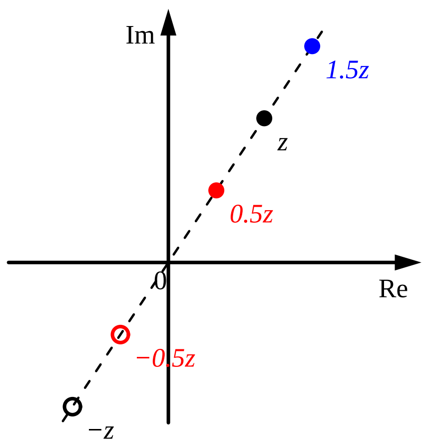


Abbildung 7.4: Multiplikation reeller mit komplexer Zahl

7.1.3.2 Addition, Subtraktion

$$\begin{aligned} z_1 \pm z_2 &= (a_1 + b_1 j) \pm (a_2 + b_2 j) \\ &= a_1 \pm a_2 + (b_1 \pm b_2) j \end{aligned}$$

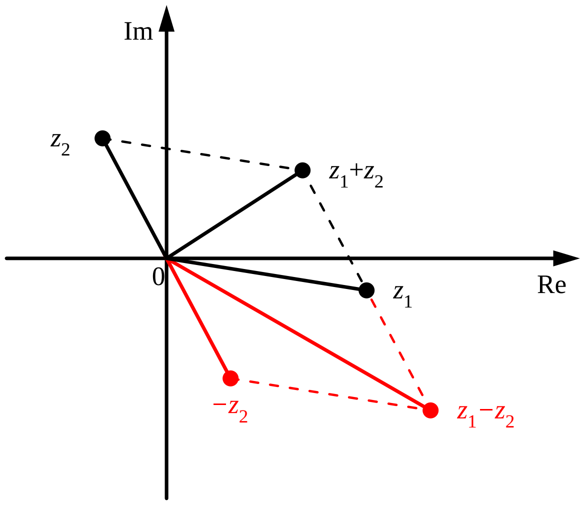


Abbildung 7.5: Komplexe Addition und Subtraktion

Es gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\,(z_1 \pm z_2) &= \mathrm{Re}\,z_1 \pm \mathrm{Re}\,z_2 \\ \mathrm{Im}\,(z_1 \pm z_2) &= \mathrm{Im}\,z_1 \pm \mathrm{Im}\,z_2 \end{aligned}$$

(siehe Abbildung 7.5).

7.1.3.3 Multiplikation

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a_1 + b_1 j)(a_2 + b_2 j) \\ &= a_1 a_2 + \underbrace{b_1 j b_2 j}_{j^2=-1} + a_1 b_2 j + b_1 j a_2 \\ &= a_1 a_2 - b_1 b_2 + (a_1 b_2 + b_1 a_2) j \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\,(z_1 z_2) &= \mathrm{Re}\,z_1\,\mathrm{Re}\,z_2 - \mathrm{Im}\,z_1\,\mathrm{Im}\,z_2 \\ \mathrm{Im}\,(z_1 z_2) &= \mathrm{Re}\,z_1\,\mathrm{Im}\,z_2 + \mathrm{Im}\,z_1\,\mathrm{Re}\,z_2 \end{aligned}$$

7.1.3.4 Spezialfälle

1. Multiplikation mit j

$$zj = aj + bj^2 = -b + aj$$

bedeutet geometrisch eine Linksdrehung um $\dfrac{\pi}{2}$ (siehe Abbildung 7.6).

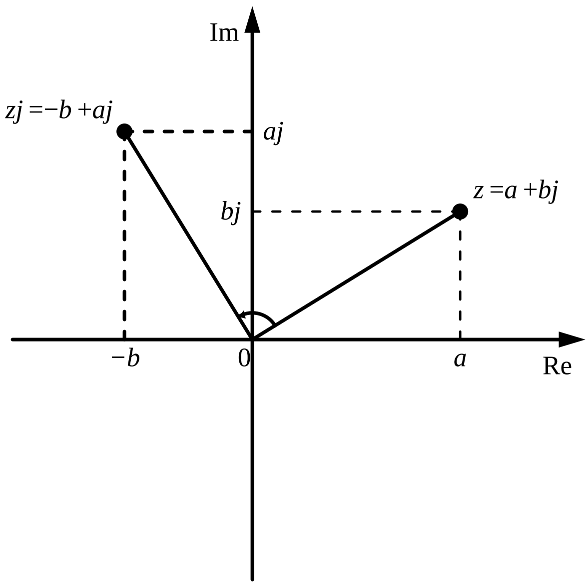


Abbildung 7.6: Multiplikation mit j

2. Produkt einer Zahl mit der konjugiert komplexen:

$$z\,z^* = (a+bj)(a-bj) = a^2 - (bj)^2 = \underbrace{a^2+b^2}_{\text{reell, } \geq 0}$$

7.1.3.5 Division

$z_2 \neq 0$

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{a_1+b_1j}{a_2+b_2j} \\
&= \frac{(a_1+b_1j)(a_2-b_2j)}{(a_2+b_2j)(a_2-b_2j)} \\
&= \frac{a_1a_2 - b_1b_2j^2 - a_1b_2j + b_1a_2j}{a_2^2 - b_2^2j^2} \\
&= \frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2} + \frac{b_1a_2-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}j
\end{aligned}$$

Spezialfälle:
1. Division durch j:

$$\frac{1}{j} = \frac{-j}{j\,(-j)} \quad = \quad -\frac{j}{1} = -j.$$

$$\frac{z}{j} = z\,(-j) \quad = \quad (a+bj)(-j) = b - aj.$$

bedeutet geometrisch eine Drehung um $-\frac{\pi}{2}$ (siehe Abbildung 7.7).

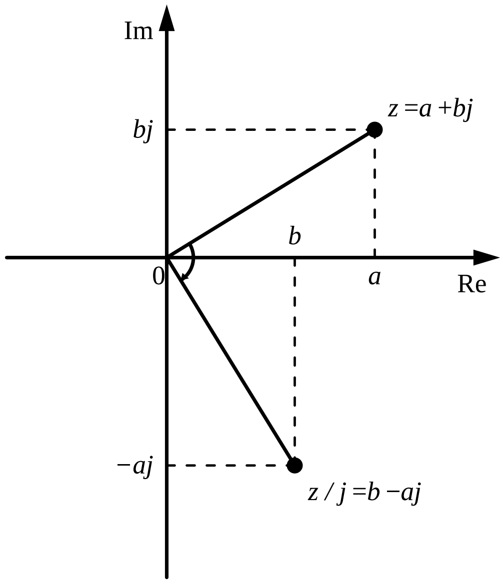


Abbildung 7.7: Division durch j

Spezialfälle:
2. Kehrwert:

$$\begin{aligned}\frac{1}{z} &= \frac{z^*}{zz^*} \\ &= \frac{1}{a^2+b^2} z^* \\ &= \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} j\end{aligned}$$

7.1.11 Satz
Es seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
Dann gilt:

a) $(z_1 + z_2)^* = {z_1}^* + {z_2}^*$

b) $(z_1 - z_2)^* = {z_1}^* - {z_2}^*$

c) $(z_1 \cdot z_2)^* = {z_1}^* \cdot {z_2}^*$

d) $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{{z_1}^*}{{z_2}^*}$

e) $\left(\dfrac{1}{z_2}\right)^* = \dfrac{1}{{z_2}^*}$

Beweis

Z. B. gilt für das komplexe Produkt mit
$z_1 = a_1 + b_1 j, \quad z_2 = a_2 + b_2 j, \quad a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
(z_1 \cdot z_2)^* &= (a_1 + b_1 j)(a_2 + b_2 j)^* \\
&= (a_1 a_2 - b_1 b_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) j)^* \\
&= a_1 a_2 - b_1 b_2 - (a_1 b_2 + a_2 b_1) j, \\
\\
{z_1}^* \cdot {z_2}^* &= (a_1 - b_1 j)(a_2 - b_2 j) \\
&= a_1 a_2 - b_1 b_2 - a_1 b_2 j - a_2 b_1 j.
\end{aligned}$$

7.1.12 Beispiel
$5(3 + j) =$

7.1.13 Beispiel
$(5 + 3j) + (2 - 4j) =$

7.1.14 Beispiel
$(3 + 2j)(4 - j) =$

7.1.15 Beispiel

a) $j^2 \ =$

b) $j^3 =$

c) $j^4 =$

d) $j^5 =$

7.1.16 Beispiel

$$\frac{7 - 2j}{2 + j} =$$

7.1.17 Beispiel

a) $j^{-1} =$

b) $j^{-2} =$

c) $j^{-3} =$

d) $j^{-4} =$

e) $j^{-5} =$

7.1.4 Betrag einer komplexen Zahl

7.1.18 Definition (Betrag einer komplexen Zahl)
Unter dem Betrag einer komplexen Zahl *versteht man den Abstand zum Ursprung in der Gaußschen Zahlenebene, d. h. (nach Pythagoras)*

$$|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} \tag{7.1}$$

(siehe Abbildung 7.8).

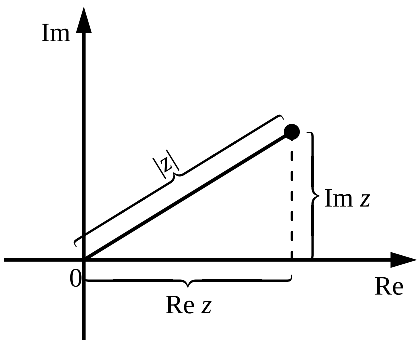


Abbildung 7.8: Betrag einer komplexen Zahl

7.1.19 Beispiel
Berechne die Beträge der komplexen Zahlen:

a) $z_1 = 3 + 4j, \quad |z_1| =$

b) $z_2 = -3 - 4j, \quad |z_2| =$

c) $z_3 = 3 - 4j, \quad |z_3| =$

d) $z_4 = -4j, \quad |z_4| =$

e) $z_5 = 4j, \quad |z_5| =$

f) $z_6 = -4, \quad |z_6| =$

7.1.20 Satz
Sei $z \in \mathbb{C}$. Dann gilt:

a) $|z| \in \mathbb{R}, \quad |z| \geq 0$

b) $|z| = 0 \iff z = 0$

c) $|z| = |z^*|$

d) $z\, z^* = |z|^2$

e) $z \in \mathbb{R} \Longrightarrow |z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2} = \sqrt{z^2} = \begin{cases} z \text{ für } z \geq 0 \\ -z \text{ für } z < 0 \end{cases}$

Beweis
Sei $z = a + bj \in \mathbb{C}$ mit $a, b, \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

a)
$$a^2 + b^2 \geq 0 \Longrightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0.$$

b)
$$|z| = 0 \iff a^2 + b^2 = 0 \iff a = b = 0.$$

c)
$$|z^*| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|.$$

d)
$$z\, z^* = (a + bj)(a - bj) = a^2 - (bj)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

7.1.21 Satz
Für den Betrag komplexer Zahlen $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt:

a) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

b) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

c) $\left|\dfrac{1}{z_1}\right| = \dfrac{1}{|z_1|}$

d) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ *(Dreiecksungleichung, vgl. (1.2))*

e) $|z_1 + z_2| \geq \big||z_1| - |z_2|\big|$ *(inv. Dreiecksungleichung, vgl. (1.3))*

Beweis

Sei $z_1 = x_1 + y_1 j, \quad z_2 = x_2 + y_2 j \in \mathbb{C}$ mit $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$.

a) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$:

Multiplikation: $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)j$.

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow |z_1 z_2|^2 &= (x_1 x_2 - y_1 y_2)^2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)^2 \\
&= x_1^2 x_2^2 - 2x_1 x_2 y_1 y_2 + y_1^2 y_2^2 \\
&\quad + x_1^2 y_2^2 + 2x_1 y_2 x_2 y_1 + x_2^2 y_1^2 \\
&= x_1^2 x_2^2 + y_1^2 y_2^2 + x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2, \\
|z_1|^2 |z_2|^2 &= (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) \\
&= x_1^2 x_2^2 + x_2^2 y_1^2 + x_1^2 y_2^2 + y_1^2 y_2^2.
\end{aligned}$$

Also ist $|z_1 z_2|^2 = |z_1|^2 |z_2|^2$, woraus die Behauptung folgt.

d), e) Anschaulich bedeuten die Ungleichungen, dass die Summe von zwei Seiten eines Dreiecks größer oder gleich der dritten, bzw. die Differenz zweier Seitenlängen nicht größer als die dritte ist (vgl. Abbildung 7.5 für die komplexe Addition).

Algebraische Herleitung der beiden Ungleichungen:

Da x_1, x_2, y_2, y_2 reell sind, gilt:

$$
\begin{aligned}
& 0 \leq (x_1y_2 - x_2y_1)^2 = x_1^2y_2^2 - 2x_1x_2y_1y_2 + x_2^2y_1^2 \\
\iff & 2x_1x_2y_1y_2 \leq x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 \\
\iff & x_1^2x_2^2 + 2x_1x_2y_1y_2 + y_1^2y_2^2 \leq x_1^2x_2^2 + x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 + y_1^2y_2^2 \\
\iff & (x_1x_2 + y_1y_2)^2 \leq x_1^2(x_2^2 + y_2^2) + y_1^2(x_2^2 + y_2^2) \\
\iff & (x_1x_2 + y_1y_2)^2 \leq (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) \\
\iff & |x_1x_2 + y_1y_2| \leq \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)} \\
\iff & -\sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)} \leq x_1x_2 + y_1y_2 \leq \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)} \\
\iff & -2\sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)} \leq 2x_1x_2 + 2y_1y_2 \leq 2\sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)} \\
\iff & x_1^2 + y_1^2 - 2\sqrt{(x_1^2 + x_2^2)(x_2^2 + y_2^2)} + x_2^2 + y_2^2 \leq x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + y_1^2 + 2y_1y_2 + y_2^2 \\
& \qquad \leq x_1^2 + y_1^2 + 2\sqrt{(x_1^2 + x_2^2)(x_2^2 + y_2^2)} + x_2^2 + y_2^2 \\
\iff & \left(\sqrt{x_1^2 + y_1^2} - \sqrt{x_2^2 + y_2^2}\right)^2 \leq (x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 \leq \left(\sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2}\right)^2 \\
\iff & \left|\sqrt{x_1^2 + y_1^2} - \sqrt{x_2^2 + y_2^2}\right| \leq \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2} \leq \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \\
\iff & \big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.
\end{aligned}
$$

7.1.22 Satz
Sei $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Die Menge

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$$

beschreibt in der Gaußschen Zahlenebene einen Kreis um 0 mit Radius r, d. h. die Menge aller $z \in \mathbb{C}$, die vom Ursprung höchstens den Abstand r haben.

7.1.23 Satz
Der Abstand zwischen zwei Punkten $z = a + bj$ und $z_1 = a_1 + b_1 j$ in der Gaußschen Zahlenebene beträgt nach Pythagoras:

$$\begin{aligned} d^2 &= (a - a_1)^2 + (b - b_1)^2 \\ \Longrightarrow d &= \sqrt{(a - a_1)^2 + (b - b_1)^2} \\ &= \sqrt{[\mathrm{Re}\,(z - z_1)]^2 + [\mathrm{Im}\,(z - z_1]^2} \\ &= |z - z_1| \end{aligned}$$

(siehe Abbildung 7.9).

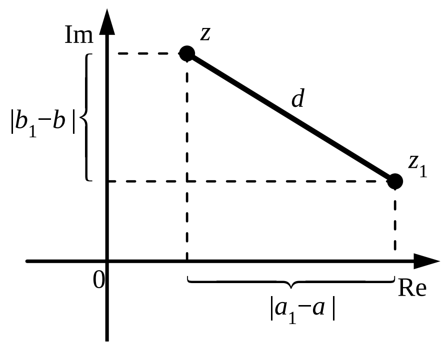


Abbildung 7.9: Abstand komplexer Zahlen

7.1.24 Satz
Sei $r \in \mathbb{R}, z_1 \in \mathbb{C}$. Die Menge

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - z_1| \leq r\}$$

beschreibt in der Gaußschen Zahlenebene einen Kreis um z_1 mit Radius r, d. h. die Menge aller $z \in \mathbb{C}$, die von z_1 höchstens den Abstand r haben (siehe Abbildung 7.10).

7.2 Polarform komplexer Zahlen

$$z = a + bj \in \mathbb{C}$$

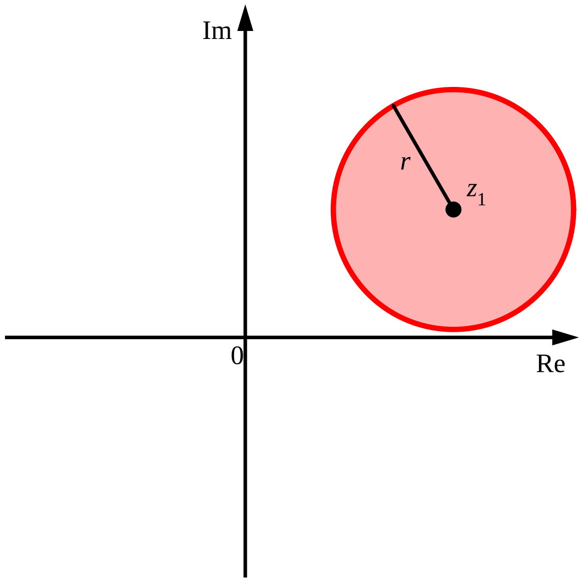


Abbildung 7.10: Kreis in der komplexen Ebene

lässt sich stets als

$$z = r(\cos\varphi + j\sin\varphi)$$

schreiben (φ, r wie in Abbildung 7.11).

Falls $z \neq 0$: eindeutige Darstellung für $r > 0$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$.

Dabei ist $r = |z|$ (vergleiche Abbildung 7.11 mit Abbildung 7.8).

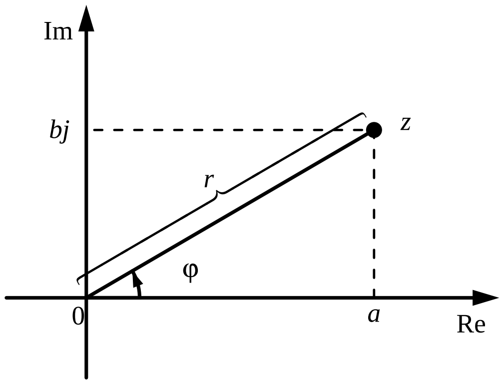


Abbildung 7.11: Komplexe Zahl in Polarform

7.2.1 Satz (Eulersche Identität)

$$e^{\varphi j} := \cos\varphi + j\sin\varphi \qquad \textit{für } \varphi \in \mathbb{R} \tag{7.2}$$

Beweis

a) Die Ableitung beider Funktionen nach der reellen Variablen φ verhalten sich gleich, Linke Seite:

$$f(x) = e^{xj} \Longrightarrow f'(x) = j\, e^{xj} = j\, f(x)$$

Rechte Seite:

$$\begin{aligned} g(x) &= \cos x + j \sin x \\ \Longrightarrow g'(x) &= -\sin x + j\, \cos x = j\, g(x). \end{aligned}$$

b) Die Werte bei $x = 0$ sind gleich: $f(0) = e^{0j} = e^0 = 1$
$g(0) = \cos 0 + j \sin 0 = 1$.

Damit sind sowohl $f(x)$ als auch $g(x)$ Lösung der Differentialgleichung $y' = j\, y$ mit der Anfangsbedingung $y(0) = 1$ (die jedoch eindeutig ist; Einzelheiten an anderer Stelle in Satz 10.4.9).

7.2.2 Satz
Es sei $\varphi \in \mathbb{R}$.
Dann ist für

$$e^{\varphi j} = \cos \varphi + j \sin \varphi :$$

a)

$$|e^{\varphi j}| = \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = 1$$

d. .h. $e^{\varphi j}$ ist der Punkt mit Winkel φ auf dem Einheitkreis der Gaußschen Zahlenebene.

b) $e^{\varphi_1 j} = e^{\varphi_2 j} \iff \varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$.

c)

$$\begin{aligned} \left(e^{\varphi j}\right)^* &= \cos \varphi - j \sin \varphi \\ &= \cos(-\varphi) + j \sin(-\varphi) \\ &= e^{-\varphi j} \end{aligned}$$

(Abbildung 7.12).

7.2.3 Definition
Polarform komplexer Zahlen:

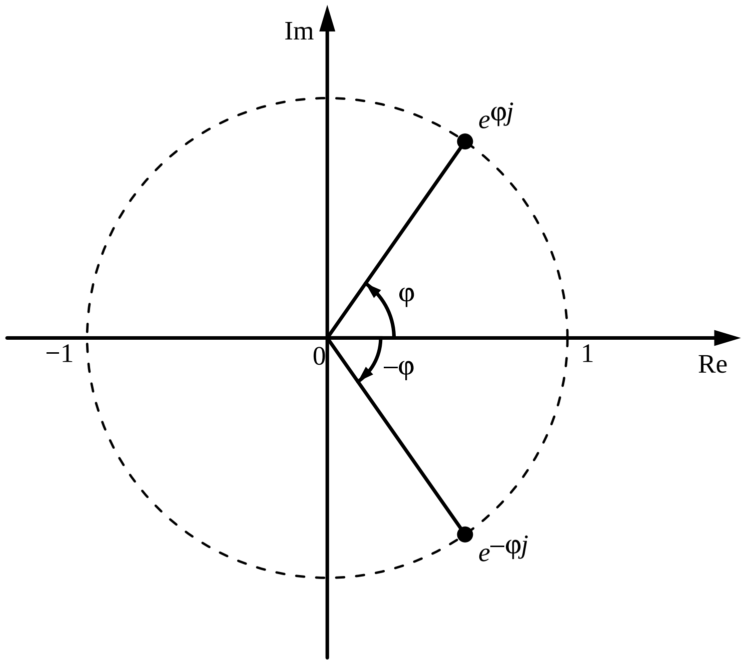


Abbildung 7.12: konjugiert komplexe Zahl in der Polarform

Sei

$$z = r\,(\cos\varphi + j\sin\varphi) = r\,e^{\varphi j} \in \mathbb{C}$$

mit $r \geq 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$ *(siehe Abbildung 7.11).*

a) r *heißt* Betrag *(oder* Modul*) von* z *(Bez.:* $|z|$, *siehe (7.1)).*

b) φ *heißt (ein)* Argument *(oder* Winkel*) von* z *(Bez:* $\operatorname{Arg} z$*).*

Falls $z \neq 0$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$:
$\varphi = \arg z$: Hauptwert *des Argumentes (Winkels) von* z *(eindeutige Darstellung für alle* $z \neq 0$*).*

7.2.1 Umwandlung von Polar- in kartesische Form

7.2.4 Satz
Gegeben mit $r \geq 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$*:*

$$\begin{aligned} z &= r\,e^{\varphi j} \\ &= r\,(\cos\varphi + j\sin\varphi) \\ &= r\cos\varphi + j\cdot r\sin\varphi \end{aligned}$$

also ist

$$\mathrm{Re}(z) = r\cos\varphi,$$
$$\mathrm{Im}(z) = r\sin\varphi.$$

7.2.2 Umwandlung von kartesischer in Polarform

7.2.5 Satz
Gegeben mit $a, b \in \mathbb{R}$:

$$z = a + bj.$$

Dann ist

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Ferner ist

$$\cos\varphi = \frac{a}{|z|} \tag{7.3}$$

Diese Formel ist nach dem Winkel φ aufzulösen (Umkehrfunktion zu cos*).*

7.2.6 Bemerkung (Arcuscosinus)

$$\cos: \; [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$$

ist streng monoton fallend und umkehrbar.

$$\arccos: \; [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$$

ist definiert durch

$$\arccos x = y \iff \cos y = x, \quad 0 \leq y \leq \pi$$

(siehe Abbildung 7.13).

Auflösung der Gleichung (7.3) durch Anwendung von arccos:

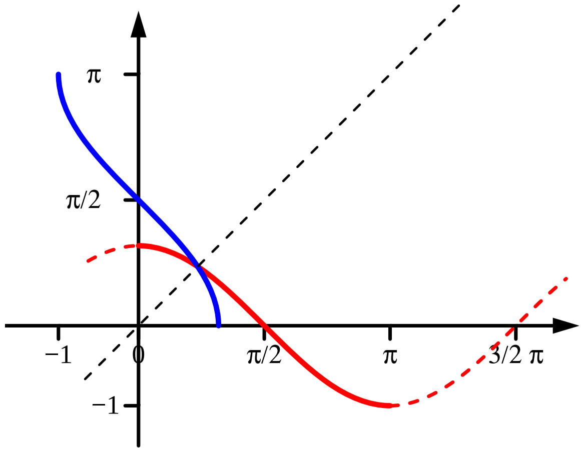
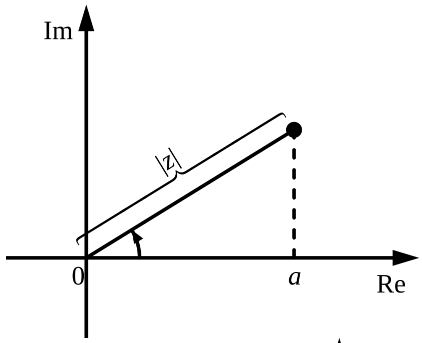


Abbildung 7.13: Cosinus, Arcuscosinus

Im 1. Quadrant:

$$\frac{a}{|z|} > 0 \iff 0 < \arccos\frac{a}{|z|} < \frac{\pi}{2}$$

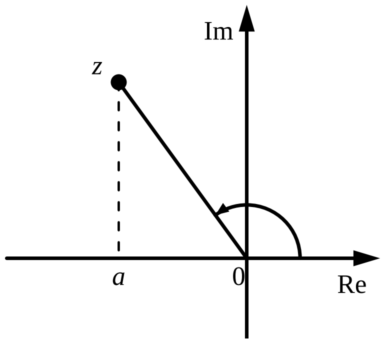
d. h. $\varphi := \arccos\frac{a}{|z|}$ ist der zutreffende Winkel.



Im 2. Quadrant:

$$\frac{a}{|z|} < 0 \iff \frac{\pi}{2} < \arccos\frac{a}{|z|} < \pi$$

Auch in diesem Fall ist $\varphi = \arccos\frac{a}{|z|}$ der richtige Winkel.



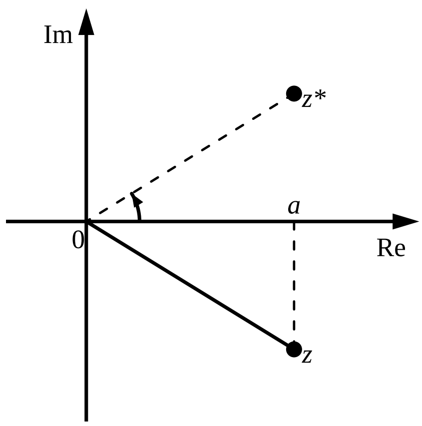
Im 4. Quadrant (3. entsprechend:)

$$\frac{a}{|z|} > 0 \iff 0 < \arccos\frac{a}{|z|} < \frac{\pi}{2}$$

Da der Winkel $\varphi < 0$ sein muss, liegt ein Fehler vor. Statt $\varphi < 0$ erhält man mit arccos den entsprechenden positiven Winkel

$$\arccos\frac{a}{|z|} = \varphi' = -\varphi,$$

dem die Zahl z^* entspricht. Dies liegt daran, dass z^* denselben Realteil und Betrag wie z hat.



7.2.7 Satz
Gegeben sei $z \in \mathbb{C}$.
Dann ist

$$|z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}.$$

Falls $z \neq 0$, d. h. $|z| \neq 0$ ist, dann gilt

$$\arg(z) = \begin{cases} \arccos \dfrac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} & \text{falls } \mathrm{Im}(z) \geq 0 \\ -\arccos \dfrac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} & \text{falls } \mathrm{Im}(z) < 0. \end{cases}$$

7.2.8 Beispiel

$$z = 5\left(\cos\frac{\pi}{3} + j\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

in kartesischer Form:

$$\begin{aligned} z &= 5\left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \frac{5}{2} + \frac{5}{2}\sqrt{3}j. \end{aligned}$$

7.2.9 Beispiel

$$z = \sqrt{2} \cdot e^{\frac{5}{4}\pi j}$$

in kartesischer Form:

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi + j\sin\frac{5}{4}\pi\right) \\ &= \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + j\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) \\ &= -1 - j. \end{aligned}$$

7.2.10 Beispiel

$$z = \sqrt{3} + j$$

in Polarform:

$$\begin{aligned}
|z| &= \sqrt{3+1} = 2, \\
\cos\varphi &= \frac{\operatorname{Re} z}{|z|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\
\Longrightarrow \arg z &= \varphi = \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}, \quad \textit{da } \operatorname{Im} z > 0.
\end{aligned}$$

7.2.11 Beispiel

$$z = \sqrt{5} - \sqrt{5}j$$

in Polarform:

$$\begin{aligned}
|z| &= \sqrt{5+5} = \sqrt{10}, \\
\arg z &= -\frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

(Punkt auf der 2. Winkelhalbierenden).

7.2.12 Bemerkung
Sonderfälle: Polarform reeller Zahlen:

$$\begin{aligned}
a \geq 0: &\qquad a = a(\underbrace{\cos 0}_{=1} + j\underbrace{\sin 0}_{=0}) = a\,e^{0j} \\
a < 0: &\qquad a = |a|(\underbrace{\cos\pi}_{=-1} + j\underbrace{\sin\pi}_{=0}) = |a|e^{\pi j} = |a|\cdot(-1)
\end{aligned}$$

7.2.13 Bemerkung
Sonderfälle: Polarform rein imaginärer Zahlen $b\,j$ $(b \in \mathbb{R})$*:*

$$\begin{aligned}
j &= \left(\cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}j}. \\
j^* = -j &= \left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + j\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = e^{-\frac{\pi}{2}j}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b > 0: \quad b\,j &= b\,e^{\frac{\pi}{2}j} \\
b < 0: \quad b\,j &= |b|\,e^{-\frac{\pi}{2}j}.
\end{aligned}$$

7.2.14 Wiederholung (Vorkurs)
Additionstheoreme für trigonometrische Funktionen:

a) *Additionssätze*

(i) $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

(ii) $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

b) *Trigonometrischer Pythagoras*

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

c) *Doppelte Winkel*

(i) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

(ii) $\cos 2\alpha = \begin{cases} cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ 2\cos^2\alpha - 1 \\ 1 - 2\sin^2\alpha \end{cases}$

7.2.15 Bemerkung
Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\begin{aligned} e^{\alpha j} e^{\beta j} &= (\cos\alpha + j\sin\alpha)(\cos\beta + j\sin\beta) \\ &= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + j(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) \\ &= \cos(\alpha+\beta) + j\sin(\alpha+\beta) \\ &= e^{(\alpha+\beta)j}. \end{aligned}$$

7.2.16 Bemerkung
Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{e^{\alpha j}}{e^{\beta j}} &= \frac{e^{\alpha j}\left(e^{\beta j}\right)^*}{e^{\beta j}\left(e^{\beta j}\right)^*} \\ &= \frac{e^{\alpha j}\, e^{-\beta j}}{e^{\beta j}\, e^{-\beta j}} \\ &= \frac{e^{(\alpha-\beta)j}}{e^{(\beta-\beta)j}} \\ &= e^{(\alpha-\beta)j} \quad (= \cos(\alpha-\beta) + j\sin(\alpha-\beta)\,.) \end{aligned}$$

7.2.17 Satz
Sei

$$z = r\,(\cos\varphi + j\sin\varphi) = r\,e^{\varphi j} \in \mathbb{C}$$

mit $r \geq 0,\ \varphi \in \mathbb{R}$.
Dann ist

$$z^* = r\,(\cos\varphi - j\sin\varphi) = r\,e^{-\varphi j}$$

d. h.

$$\operatorname{Arg}(z^*) = -\operatorname{Arg}(z).$$

7.2.3 Multiplikation in Polarform

7.2.18 Satz (Multiplikation in Polarform)
Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ *in Polarform*

$$\begin{aligned} z_1 = r_1\,e^{\varphi_1 j} &= r_1(\cos\varphi_1 + j\sin\varphi_1), \\ z_2 = r_2\,e^{\varphi_2 j} &= r_2(\cos\varphi_2 + j\sin\varphi_2) \end{aligned}$$

gegeben.
Dann ist

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2\,e^{\varphi_1 j}\,e^{\varphi_2 j} \\ &= r_1 r_2\,e^{(\varphi_1+\varphi_2)j} \\ &= r_1 r_2\,(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + j\sin(\varphi_1+\varphi_2)) \end{aligned}$$

d. h.

$$\begin{aligned} |z_1 z_2| &= r_1 r_2 = |z_1| \cdot |z_2| \\ \operatorname{Arg}(z_1 z_2) &= \varphi_1 + \varphi_2 = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 \end{aligned}$$

(Normieren auf $(-\pi, \pi]$ *für Hauptwert).*

7.2.19 Beispiel

$$\begin{aligned}
z_1 &= 3\left(\cos\frac{3}{4}\pi + j\sin\frac{3}{4}\pi\right), \\
z_2 &= 2\left(\cos\frac{5}{12}\pi + j\sin\frac{5}{12}\pi\right) \\
\\
\Longrightarrow z_1 z_2 &= 6\left(\cos\frac{9+5}{12}\pi + j\sin\frac{9+5}{12}\pi\right) \\
&= 6\left(\cos\frac{14}{12}\pi + j\sin\frac{14}{12}\pi\right) \\
&= 6\left(\cos\frac{7}{6}\pi + j\sin\frac{7}{6}\pi\right) \\
&= 6\left(\cos\frac{-5}{6}\pi + j\sin\frac{-5}{6}\pi\right).
\end{aligned}$$

7.2.4 Division in Polarform

7.2.20 Satz (Division in Polarform)
Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ in Polarform

$$z_1 = r_1\, e^{\varphi_1 j}, \quad z_2 = r_2\, e^{\varphi_2 j}$$

gegeben.

Dann ist

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1\, e^{\varphi_1 j}}{r_2\, e^{\varphi_2 j}} = \frac{r_1}{r_2}\, e^{(\varphi_1 - \varphi_2) j}.$$

d. h.

$$\begin{aligned}
\left|\frac{z_1}{z_2}\right| &= \frac{|z_1|}{|z_2|} \\
\\
\operatorname{Arg}\frac{z_1}{z_2} &= \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2.
\end{aligned}$$

7.2.21 Bemerkung
Spezialfall Kehrwert

$$\begin{aligned} z &= r\,e^{\varphi j} = r(\cos\varphi + j\sin\varphi) \\ \Rightarrow \frac{1}{z} &= \frac{1}{r}e^{-\varphi j} \\ &= \frac{1}{r}(\cos(-\varphi) + j\sin(-\varphi)) \\ &= \frac{1}{r}(\cos\varphi - j\sin\varphi) \\ &= r^{-1}\,e^{-\varphi j} \qquad \left(= \frac{z^*}{|z|^2}\right). \end{aligned}$$

7.2.22 Beispiel
Division:

$$\begin{aligned} z_1 &= 5\left(\cos\frac{2}{3}\pi + j\sin\frac{2}{3}\pi\right) \\ z_2 &= 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + j\sin\frac{\pi}{6}\right) \\ \Longrightarrow \frac{z_1}{z_2} &= \frac{5}{3}\left(\cos\left(\frac{2}{3}\pi - \frac{\pi}{6}\right) + j\sin\left(\frac{2}{3}\pi - \frac{\pi}{6}\right)\right) \\ &= \frac{5}{3}\left(\cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \frac{5}{3}j. \end{aligned}$$

7.2.5 Potenzen in Polarform

$$\begin{aligned} z &= r\,e^{\varphi j} \\ \Longrightarrow z^2 &= r^2(e^{\varphi j})^2 = r^2\,e^{2\varphi j} \\ z^3 = z\,z^2 &= r\,r^2\,e^{\varphi j}\,e^{2\varphi j} \\ &= r^3\,e^{3\varphi j} \end{aligned}$$

Allgemeiner:

7.2.23 Satz
Für $n \in \mathbb{Z}$, $\quad z = r\,e^{j\varphi} = r\,(\cos\varphi + j\sin\varphi) \in \mathbb{C}$ *ist*

$$z^n \;=\; r^n\,e^{n\varphi j} \;=\; r^n\,(\cos n\varphi + j\sin n\varphi).$$

7.2.24 Satz (Formel von Moivre)
Spezialfall $r = 1$: Sei $z = e^{\varphi j}$. Dann ist

$$\begin{aligned} z^n &= (\cos\varphi + j\sin\varphi)^n \\ &= (e^{\varphi j})^n \\ &= e^{n\varphi j} \\ &= \cos n\varphi + j\sin n\varphi \end{aligned}$$

d. h.

$$(\cos\varphi + j\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + j\sin n\varphi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

7.2.25 Beispiel

a)

$$\begin{aligned} \cos 2\varphi + j\sin 2\varphi &= (\cos\varphi + j\sin\varphi)^2 \\ &= \cos^2\varphi - \sin^2\varphi + j\,2\sin\varphi\,\cos\varphi \quad \textit{(Binomischer Satz 1.4.13)} \end{aligned}$$

Vergleich der Realteile:

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$$

Vergleich der Imaginärteile:

$$\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\,\cos\varphi.$$

b)

$$\begin{aligned} \cos 3\varphi + j\sin 3\varphi &= (\cos\varphi + j\sin\varphi)^3 \\ &= \cos^3\varphi + 3j\cos^2\varphi\,\sin\varphi + 3j^2\cos\varphi\,\sin^2\varphi + j^3\sin^3\varphi \\ &\qquad \textit{(Binomischer Satz 1.4.13)} \\ &= \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\,\sin^2\varphi + 3j\cos^2\varphi\,\sin\varphi - j\sin^3\varphi \end{aligned}$$

Vergleich der Realteile:

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\,\sin^2\varphi$$

Vergleich der Imaginärteile:

$$\sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\,\sin\varphi - \sin^3\varphi.$$

usw. für höhere Winkelvielfache.

7.2.26 Beispiel
Berechne

$$z^6 = (1+j)^6$$

Polarform: $|z| = \sqrt{2}, \quad \arg z = \arctan 1 = \dfrac{\pi}{4}$*:*

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}j} \\ \Longrightarrow z^6 &= (\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}j})^6 \\ &= \left(\sqrt{2}\right)^6 e^{\frac{6}{4}\pi j} \\ &= 8\Big(\underbrace{\cos\frac{3}{2}\pi}_{0} + j\underbrace{\sin\frac{3}{2}\pi}_{-1}\Big) \\ &= -8j. \end{aligned}$$

(siehe Abbildung 7.14)

7.2.6 Wurzelziehen in Polarform

Gesucht:
Alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ von

$$z^n = w,$$

wobei

$$w = r\,e^{\varphi j} \in \mathbb{C}$$

und $n \in \mathbb{N}$ gegeben seien.
Betrachte zunächst

$$|w| = 1,$$

d.h.

$$w = e^{\varphi j}.$$

Dann muß $|z| = 1$ sein (sonst wäre auch $1 \neq |z|^n$, aber $|z|^n = |z^n| = |w| = 1$).

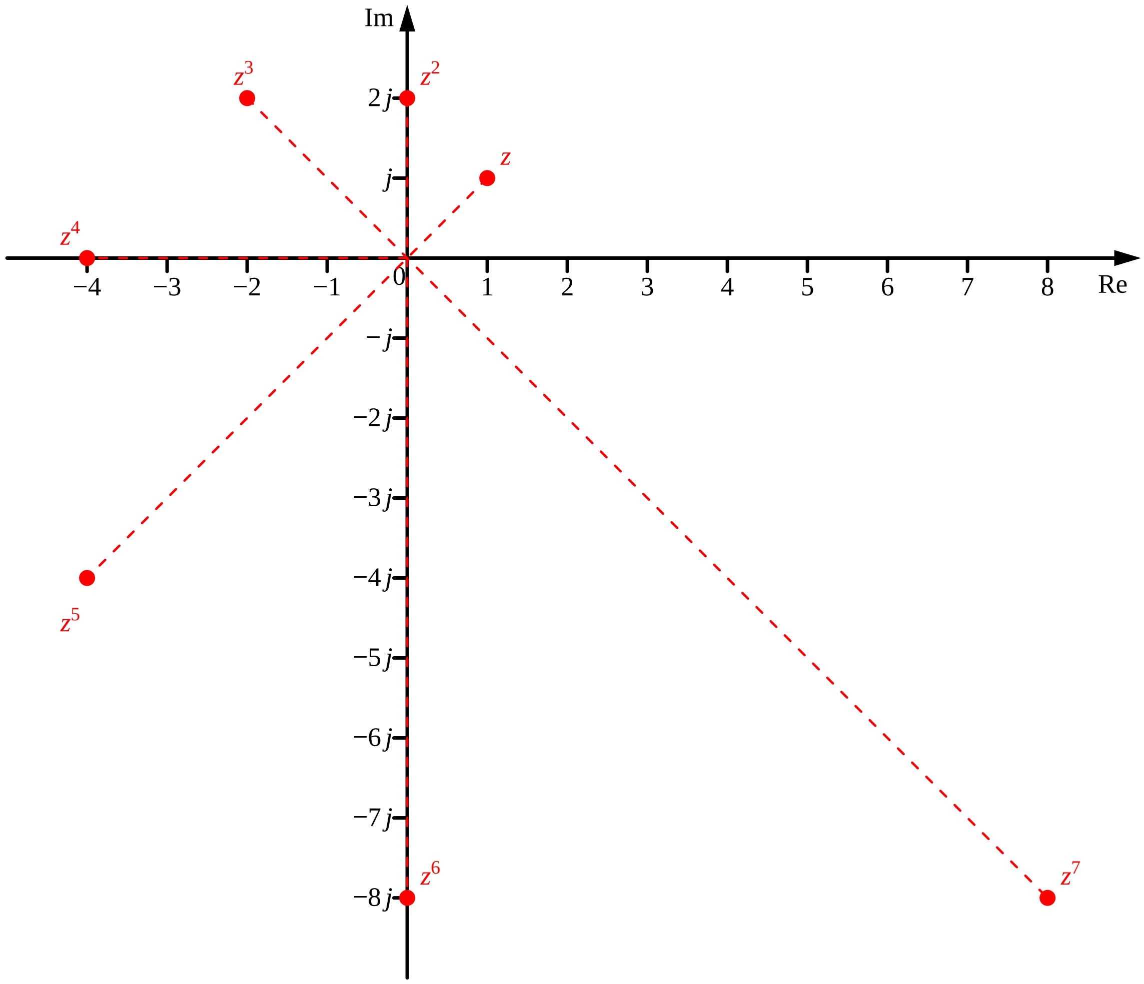


Abbildung 7.14: Potenzen von $1 + j$

Ansatz zur Lösung von $z^n = w$ in Polarform: Zahl auf dem Einheitskreis, also

$$
\begin{aligned}
z &= e^{\gamma j} \\
\Longrightarrow z^n &= e^{n\gamma j} \stackrel{!}{=} \quad w = e^{\varphi j} \\
\Longrightarrow n\gamma &= \varphi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \\
\Longrightarrow \gamma_k &= \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

Damit sind

$$z_k = e^{\frac{\varphi + 2\pi k}{n} j} = \cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + j \sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)$$

für $k \in \mathbb{Z}$ jeweils Lösungen von $z^n = w$, falls $|w| = 1$.

$$z_k = e^{\frac{\varphi + 2\pi k}{n} j}, k \in \mathbb{Z}$$

sind Lösungen von $z^n = w$, falls $w = e^{\varphi j}$.

Anzahl verschiedener Lösungen?
Betrachte z. B.:

$$\begin{aligned} z_n &= e^{(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi n}{n})j} \\ &= e^{\frac{\varphi}{n}j} \quad = \quad z_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= e^{(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi(n+1)}{n})j} \\ &= e^{(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n})j} \quad = \quad z_1 \end{aligned}$$

7.2.27 Satz
Seien

$$z_k = e^{\frac{\varphi+2\pi k}{n}j} (k \in \mathbb{Z})$$

die Lösungen von $z^n = e^{\varphi j}$.

a) $z_m = z_k \iff m - k = \mu n,\ \mu \in \mathbb{Z}.$

b) Es gibt genau n *verschiedene Lösungen, nämlich* $\{z_k : k = 0, 1, \ldots, n-1\}$.

c) Die Lösungen liegen auf dem Einheitskreis der Gaußschen Zahlenebene und bilden ein regelmäßiges n*-Eck (Abbildung 7.15).*

Beweis

$$\begin{aligned} z_m = z_k \quad &\iff \quad \left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi m}{n}\right) - \left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) = 2\pi\mu \\ &\iff \quad \frac{2\pi m}{n} - \frac{2\pi k}{n} = 2\pi\mu \\ &\iff \quad 2\pi m - 2\pi k = 2\pi\mu n. \end{aligned}$$

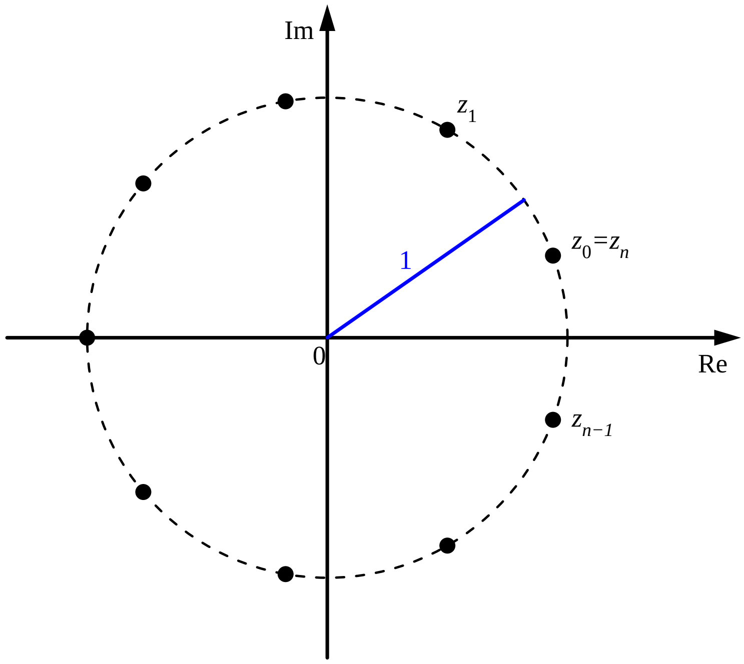


Abbildung 7.15: Lösungen von $z^n = e^{\varphi j}$

7.2.28 Satz

a) Die Gleichung $z^n = e^{\varphi j}$ hat n verschiedene Lösungen:

$$z_k = e^{\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) j}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

b) Die Gleichung $z^n = r\, e^{\varphi j}$ hat n verschiedene Lösungen:

$$z_k = \sqrt[n]{r}\, e^{\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) j}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

(Abbildung 7.16).

c) $z^n = 0 \iff z = 0$.

7.2.29 Bemerkung

Die Lösungen von $z^n = w$ liegen auf dem Kreis um 0, Radius $\sqrt[n]{|w|}$ und bilden die Ecken eines regelmäßigen n-Ecks.

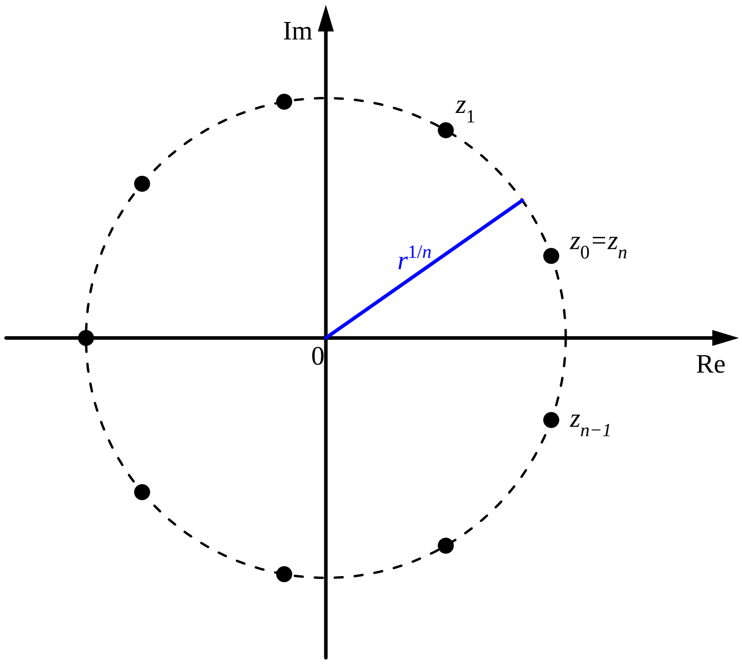


Abbildung 7.16: Lösungen von $z^n = r\, e^{\varphi j}$

7.2.30 Definition
Für $w = r\,(\cos\varphi + j\sin\varphi)$ *mit* $\varphi \in (-\pi, \pi]$ *heißt die Lösung*

$$\sqrt[n]{w} := \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + j\sin\frac{\varphi}{n}\right)$$

Hauptwert der n-ten Wurzel *(Lösung mit dem betragsmäßig kleinsten Winkel, z_0).*

7.2.31 Bemerkung
$\varphi = \arg w \in (-\pi, \pi] \iff \arg z_0 = \arg \sqrt[n]{w} \in \left(-\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n}\right]$.

7.2.32 Beispiel
Lösungen von $z^3 = -1$*:*
Polarform von -1*:*

$$-1 = (\cos\pi + j\sin\pi)$$

Also: $z^3 = -1$

$$\Longrightarrow z_k = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}\right), \qquad k = 0, 1, 2$$

$$z_0 = \cos\frac{\pi}{3} + j\sin\frac{\pi}{3} \qquad = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j$$

$$z_1 = \cos\pi + j\sin\pi \qquad = -1$$

$$z_2 = \cos\frac{5}{3}\pi + j\sin\frac{5}{3}\pi = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + j\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \qquad = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j$$

$$\Big(z_3 = \cos\frac{7}{3}\pi + j\sin\frac{7}{3}\pi = \cos\frac{\pi}{3} + j\sin\frac{\pi}{3} = z_0$$

$$z_4 = z_1, \quad \textit{usw.}\Big)$$

7.2.33 Bemerkung
Die Winkel der Lösungen sind nicht alle aus $(-\pi, \pi]$. *Z. B. ist* $\operatorname{Arg} z_2 = \frac{5}{3}\pi \notin (-\pi, \pi]$.

7.2.34 Beispiel
$z^9 = -1$ *mit* $-1 = (\cos\pi + j\sin\pi)$

$$\Rightarrow z_k \;=\; \cos\left(\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi k}{9}\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi k}{9}, \quad k = 0, 1, \ldots 8.\right)$$

Also (graphische Darstellung in Abbildung 7.15):

$$\begin{aligned}
z_0 &= \cos\left(\frac{\pi}{9}\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)\\
z_1 &= \cos\left(\frac{3}{9}\pi\right) + j\sin\left(\frac{3}{9}\pi\right)\\
z_2 &= \cos\left(\frac{5}{9}\pi\right) + j\sin\left(\frac{5}{9}\pi\right)\\
z_3 &= \cos\left(\frac{7}{9}\pi\right) + j\sin\left(\frac{7}{9}\pi\right)\\
z_4 &= \cos(\pi) + j\sin(\pi)\\
z_5 &= \cos\left(\frac{11}{9}\pi\right) + j\sin\left(\frac{11}{9}\pi\right) = \cos\left(-\frac{7}{9}\pi\right) + j\sin\left(\frac{7}{9}\pi\right)\\
z_6 &= \cos\left(\frac{13}{9}\pi\right) + j\sin\left(\frac{13}{9}\pi\right) = \cos\left(-\frac{5}{9}\pi\right) + j\sin\left(-\frac{5}{9}\pi\right)\\
z_7 &= \cos\left(\frac{15}{9}\pi\right) + j\sin\left(\frac{15}{9}\pi\right) = \cos\left(-\frac{3}{9}\pi\right) + j\sin\left(-\frac{3}{9}\pi\right)\\
z_8 &= \cos\left(\frac{17}{9}\pi\right) + j\sin\left(\frac{17}{9}\pi\right) = \cos\left(-\frac{1}{9}\pi\right) + j\sin\left(-\frac{1}{9}\pi\right)
\end{aligned}$$

7.2.35 Beispiel
$z^4 = 4$:

$$4 = 4(\cos 0 + j\sin 0)$$

$$\begin{aligned}
z_k &= \sqrt{2}\left(\cos\left(0 + \frac{2\pi k}{4}\right) + j\sin\left(0 + \frac{2\pi k}{4}\right)\right)\\
&= \sqrt{2}\left(\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) + j\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)\right), & k &= 0,1,2,3\\
z_0 &= \sqrt{2}\left(\cos 0 + j\sin 0\right) & &= \sqrt{2}\\
z_1 &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2}\right) & &= \sqrt{2}j\\
z_2 &= \sqrt{2}\left(\cos\pi + j\sin\pi\right) & &= -\sqrt{2}\\
z_3 &= \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + j\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) & &= -\sqrt{2}j
\end{aligned}$$

7.3 Quadratwurzeln aus komplexen Zahlen in kartesischer Darstellung

Gegeben: $z = a + b\,j \quad (a, b \in \mathbb{R})$.

Gesucht: $\sqrt{z} = a_1 + b_1\,j \quad (a_1, b_1 \in \mathbb{R})$.

In Polarkoordinaten ist

$$z = |z|(\cos\alpha + j\sin\alpha)$$

d. h.

$$\begin{aligned} a &= |z|\cos\alpha = \operatorname{Re} z \\ b &= |z|\sin\alpha = \operatorname{Im} z \quad (-\pi < \alpha \leq \pi) \end{aligned}$$

sowie

$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + j\sin\frac{\alpha}{2}\right)$$

d. h.

$$a_1 = \sqrt{|z|}\cos\frac{\alpha}{2} = \operatorname{Re}\sqrt{z} \tag{7.4}$$

$$b_1 = \sqrt{|z|}\sin\frac{\alpha}{2} = \operatorname{Im}\sqrt{z}. \tag{7.5}$$

7.3.1 Wiederholung (Sinus, Kosinus halber Winkel; Vorkurs)

a) $\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos\alpha)}$

b) $\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos\alpha)}$.

Es ist nach (7.4)

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\sqrt{z} &= \sqrt{|z|}\cos\frac{\alpha}{2} \\ &= \pm\sqrt{|z|}\sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos\alpha)} \\ &= \pm\sqrt{\frac{1}{2}(|z| + |z|\cos\alpha)} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}(|z| + \operatorname{Re} z)} \end{aligned}$$

(Minuszeichen fällt weg, da $\operatorname{Re}\sqrt{z} \geq 0$ gilt: $\left|\frac{\alpha}{2}\right| \leq \frac{\pi}{2}$).

Entsprechend ist nach (7.5):

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}\sqrt{z} &= \sqrt{|z|}\sin\frac{\alpha}{2} \\
&= \pm\sqrt{|z|}\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)} \\
&= \pm\sqrt{\frac{1}{2}(|z|-|z|\cos\alpha)} \\
&= \pm\sqrt{\frac{1}{2}(|z|-\operatorname{Re}z)}.
\end{aligned}$$

"+" für $\alpha \geq 0$, d. h. $\operatorname{Im} z \geq 0$,
"−" für $\alpha < 0$, d. h. $\operatorname{Im} z < 0$.

7.3.2 Satz
Quadratwurzeln aus komplexen Zahlen in kartesischer Darstellung

Gegeben sei $z = a + b\,j, \quad a, b \in \mathbb{R}$.

Berechne

$$\begin{aligned}
|z| &= \sqrt{a^2+b^2}, \\
a_1 &= \sqrt{\tfrac{1}{2}(|z|+a)}, \\
b_1 &= \begin{cases} \sqrt{\tfrac{1}{2}(|z|-a)} & \textit{falls } b \geq 0 \\ -\sqrt{\tfrac{1}{2}(|z|-a)} & \textit{falls } b < 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Dann ist

$$\sqrt{z} = a_1 + b_1 j.$$

7.3.3 Beispiel
Berechne $\sqrt{3+4j}$.

Lösung

$$z = a + bj = 3 + 4j$$

$$\Longrightarrow |z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5,$$

$$\operatorname{Re}\sqrt{z} = \sqrt{\frac{1}{2}(|z| + a)} = \sqrt{\frac{1}{2}(5+3)} = 2$$

$$\operatorname{Im}\sqrt{z} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(|z| - a)} = \sqrt{\frac{1}{2}(5-3)} = 1$$

$$\Longrightarrow \sqrt{z} = 2 + j.$$

7.3.4 Beispiel
Berechne $\sqrt{32 - 24j}$.

Lösung

$$z = a + bj = 32 - 24j$$

$$\Longrightarrow |z| = \sqrt{32^2 + 24^2} = \sqrt{1024 + 576} = \sqrt{1600} = 40,$$

$$\operatorname{Re}\sqrt{z} = \sqrt{\frac{1}{2}(|z| + a)} = \sqrt{\frac{1}{2}(40+32)} = 6$$

$$\operatorname{Im}\sqrt{z} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(|z| - a)} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(40-32)} = -2$$

$$\Longrightarrow \sqrt{z} = 6 - 2j.$$

7.4 Exponentialfunktion

7.4.1 Definition (Komplexe Exponentialfunktion)

$$\begin{aligned} \exp &: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ \exp(z) &= e^z = e^{x+yj} = e^x \cdot e^{yj} \\ &= e^x \cdot (\cos y + j \sin y) \\ &= e^x \cos y + j\, e^x \sin y \end{aligned}$$

heißt komplexe Exponentialfunktion *(dabei sei $z = x + yj, \quad x, y \in \mathbb{R}$).*

7.4.2 Bemerkung
Sei $z \in \mathbb{C}$, $z = x + yj$, $x, y \in \mathbb{R}$.

a) $\exp$ *ist $2\pi j$-periodisch:*

$$\begin{aligned} e^{x+yj+2\pi j} &= e^x \left(\cos(y + 2\pi) + j \sin(y + 2\pi)\right) \\ &= e^x \left(\cos y + j \sin y\right) \\ &= e^{x+yj} \end{aligned}$$

d. h. $\exp(z + 2\pi j) = \exp(z)$.

b) $\exp(z) \neq 0$ *für alle $z \in \mathbb{C}$:*

$$|e^{x+yj}| = |e^x| \cdot \underbrace{|e^{yj}|}_{=1} = e^x > 0.$$

7.4.3 Bemerkung
Graphische Darstellung der komplexen Exponentialfunktion

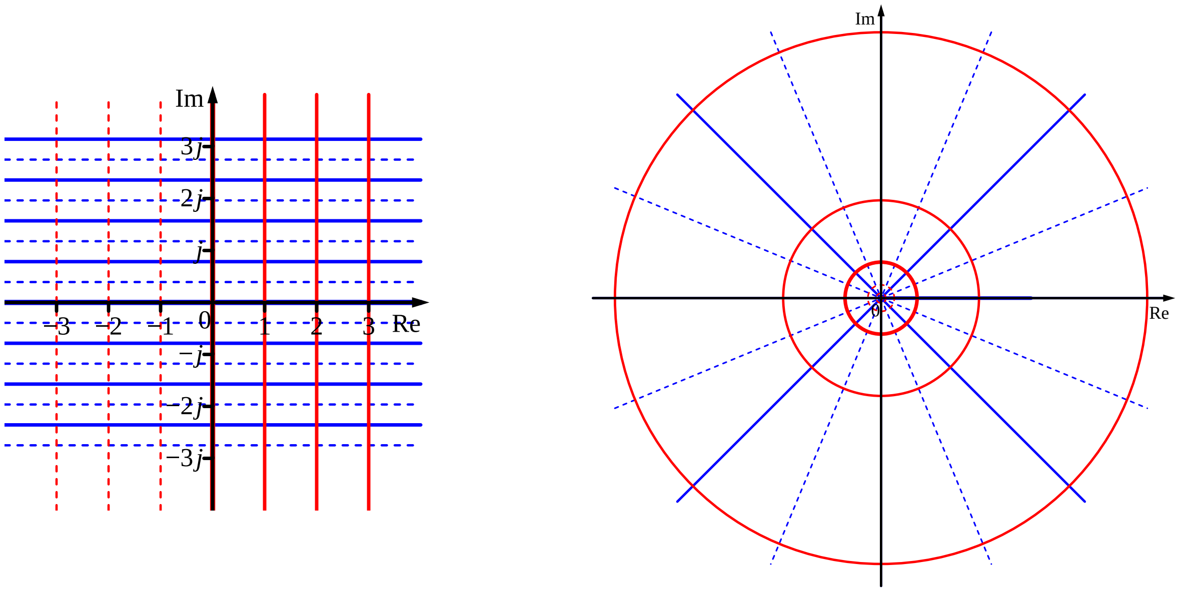
$$w = e^z = e^x \cdot e^{yj}$$

(der Funktionsgraph ist wie bei jeder komplexen Funktion vierdimensional, da $D_{\exp} = \mathbb{C}$, $W_{\exp} = \mathbb{C}$ jeweils zweidimensionale Mengen sind).

a) Parallelen zur reellen Achse werden auf vom Ursprung ausgehende Strahlen abgebildet (Winkel konstant).

b) Parallelen zur imaginären Achse werden auf Kreise um den Ursprung abgebildet (Betrag konstant).

(siehe Abbildung 7.17).



$x + yj$ $\qquad$ e^{x+yj}

Abbildung 7.17: Abbildung $z \to e^z$

7.4.4 Bemerkung
Darstellung der Funktion $\mathrm{Re}(\exp)\ :\ \mathbb{C} \to \mathbb{R}$

$$\mathrm{Re}(e^z) = \mathrm{Re}(e^x \cos y + je^x \sin y) = e^x \cos y$$

(dreidimensionale Figur, siehe Abbildung 7.18).

7.5 Logarithmus

7.5.1 Bemerkung
Jede Zahl $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *lässt sich als Wert* $w = \exp(z)$ *schreiben (mit* $\varphi = arg(w)$ *und* $z = x + yj$*):*

$$w = |w|\, e^{\varphi j} \stackrel{!}{=} e^{x+yj} = e^x \cdot e^{yj}$$

d. h.

$$\begin{aligned} e^x &= |w|, & e^{yj} &= e^{\varphi j} \\ \iff x &= \ln|w|, & y &= \arg(w) + 2\pi k. \end{aligned}$$

Eindeutigkeit der Darstellung:

$$\begin{aligned} & w = e^{x_1+y_1j} = e^{x_2+y_2j} \\ \iff \quad & 1 = \frac{e^{x_1+y_1j}}{e^{x_2+y_2j}} = e^{x_1+y_1j-(x_2+y_2j)} \\ \iff \quad & 1 = e^{x_1-x_2} \cdot e^{(y_1-y_2)j} \qquad \text{(Polardarstellung der Zahl 1)} \end{aligned}$$

Dann ist

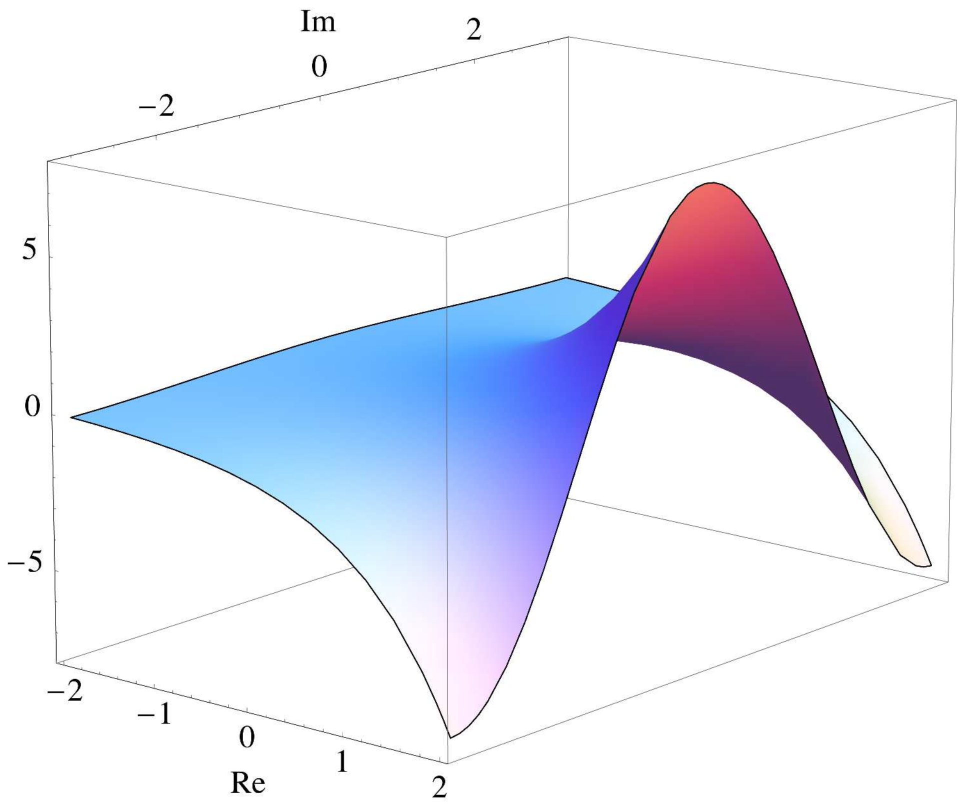


Abbildung 7.18: $z = x + yj \quad \to \quad w = \mathrm{Re}(e^z) = e^x \cos y$

a) $e^{x_1 - x_2} = 1$, also $x_1 - x_2 = 0$, d.h. $x_1 = x_2$

b) $y_1 - y_2 = 2\pi k,\ \ k \in \mathbb{Z}$, d.h. $y_2 = y_1 + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$.

Mehrdeutigkeit nur durch die Periodizität im Winkel von w.

7.5.2 Definition

a) Sei $z = r \cdot e^{\varphi j} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\varphi = \arg z$.

$$\begin{aligned} \mathrm{Ln}\, z &= \ln r + (\varphi + 2\pi k)j,\ k \in \mathbb{Z} \\ &= \ln |z| + \mathrm{Arg}\, z \end{aligned}$$

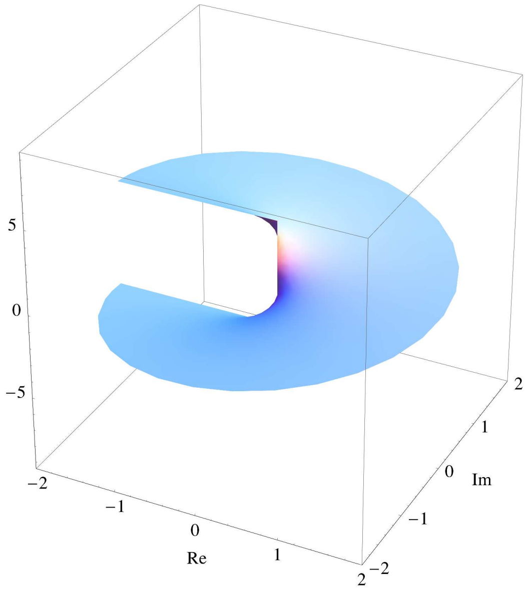
heißt (mehrdeutiger) komplexer Logarithmus *von z (siehe Abbildung 7.19).*

b)

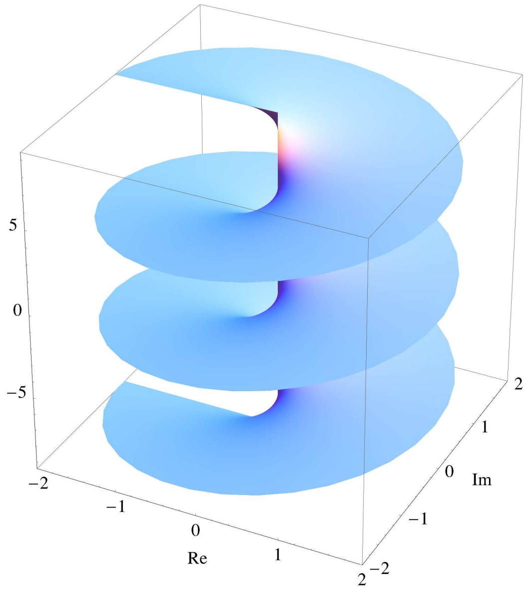
$$\ln z = \ln r + \varphi j = \ln |z| + j \arg z$$

heißt Hauptwert des Logarithmus *von z (siehe Abbildung 7.19).*

$\ln$*:* $\mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ *ist injektiv mit* $W_{\ln} = \{x + yj : x \in \mathbb{R}, -\pi < y \leq \pi\}$.



$\operatorname{Im}(\ln z)$



$\operatorname{Im}(\operatorname{Ln} z)$

Abbildung 7.19: Eindeutiger und mehrdeutiger komplexer Logarithmus (Imaginärteil)

Wenn eine komplexe Zahl in Polarform geschrieben ist, ergibt sich die Berechnung des komplexen Logarithmus mit den üblichen Logarithmus-Rechenregeln, die von reellen Zahlen bekannt sind:

7.5.3 Beispiel
$\ln(-\sqrt{27}+9j)$

$$\begin{aligned}\ln(-\sqrt{27}+9j) &= \ln(6\sqrt{3}\,e^{\frac{2}{3}\pi j}) \\ &= \ln(6\sqrt{3}) + \ln(e^{\frac{2}{3}\pi j}) \\ &= \ln(6\sqrt{3}) + \frac{2}{3}\pi j.\end{aligned}$$

Kapitel 8

Lineare Algebra

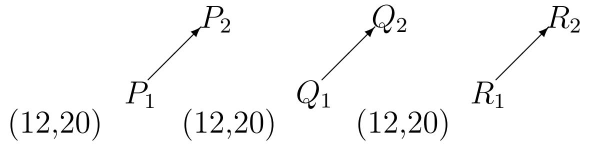
8.1 Vektoren

8.1.1 Grundlegende Definitionen

- *Skalare Größen:* z. B. Temperatur, Dichte, elektrische Ladungsmenge, Spannung zwischen zwei Punkten
  bestimmt durch Zahlenangabe (Skalar)
- *gerichtete Größen:* z. B. Kraft, Geschwindigkeit, elektrische, magnetische Feldstärke
  zusätzlich Richtungsangabe Pfeil mit bestimmter Länge und Richtung

8.1.1 Definition
Ein Vektor *ist eine Menge von Pfeilen mit gleicher Länge und gleicher Richtung.*
Jeder Pfeil eines Vektors heißt Repräsentant *des Vektors.*
Schreibweise für Vektoren:

$$\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}, \dots, \overrightarrow{PQ},\ \overrightarrow{PR}, \dots$$



$\overrightarrow{P_1P_2}$, $\overrightarrow{Q_1Q_2}$, $\overrightarrow{R_1R_2}$ sind Repräsentanten desselben Vektors.

Die Punkte P_1, Q_1, R_1 heißen *Angriffspunkte*,
die Punkte P_2, Q_2, R_2 heißen *Zielpunkte* des Vektor-Repräsentanten.

8.1.2 Bemerkung

a) Ein Vektor wird durch jeden seiner Repräsentanten eindeutig bestimmt.
Vereinfachung: Vektor = Repräsentant des Vektors.

b) Zwei Vektoren sind gleich, wenn sie die gleichen Pfeile enthalten.

8.1.3 Definition (Nullvektor)
Der Nullvektor $\vec{0}$ *ist der Vektor der Länge Null.*

8.1.4 Bemerkung
Der Nullvektor hat keine Richtung, es gibt (nur) einen Nullvektor.

8.1.2 Vektoren im rechtwinkligen Koordinatensystem

Vektoren lassen sich mit Hilfe rechtwinkliger Koordinatensysteme veranschaulichen.

Im $\mathbb{R}^2$: kartesisches Koordinatensystem, waagerechte Achse x_1, senkrechte Achse x_2 (siehe Abbildung 8.1).

Im $\mathbb{R}^3$: *rechtshändige Systeme*, d.h. die Koordinatenachsen x_1, x_2, x_3 werden in der gleichen Reihenfolge gewählt wie Daumen, Zeige- und Mittelfinger der rechten Hand (siehe Abbildung 8.2).

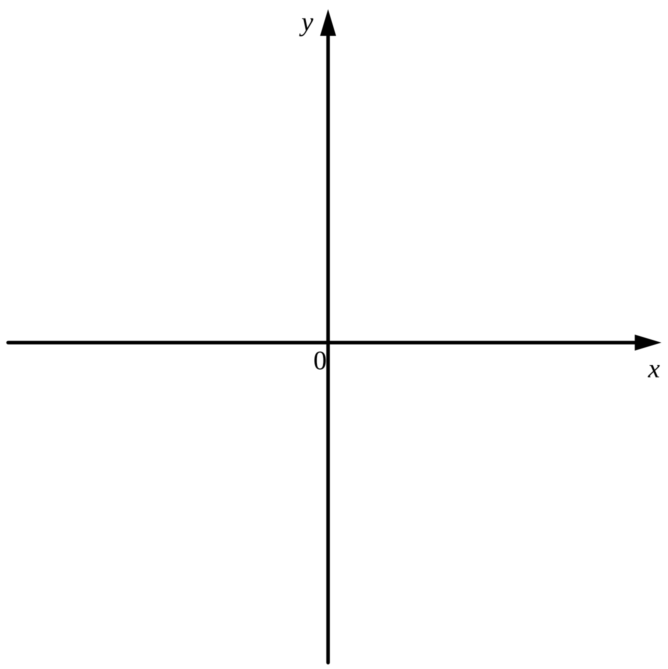


Abbildung 8.1: Koordinatensystem für zweidimensionale Vektoren

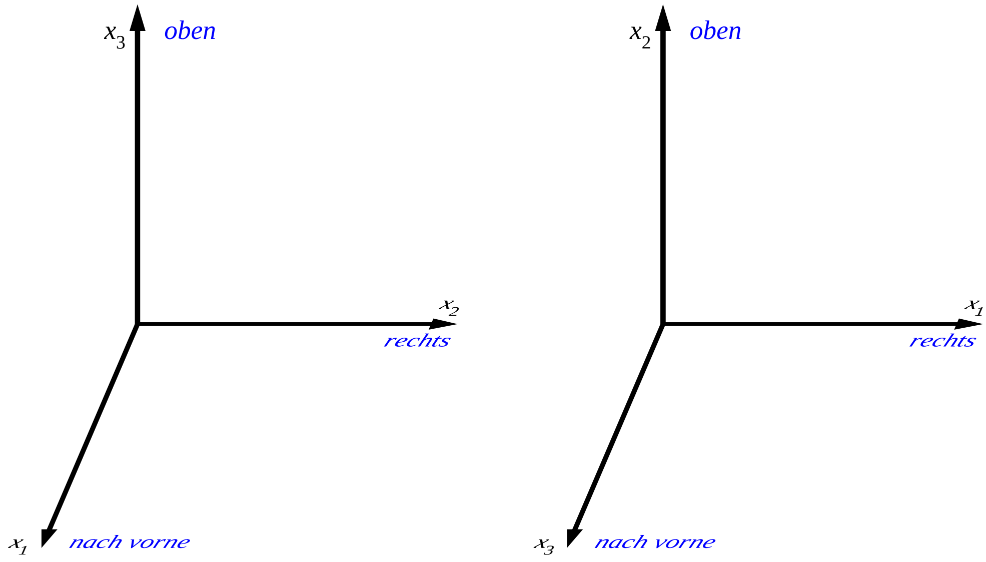


Abbildung 8.2: Koordinatensystem für dreidimensionale Vektoren

8.1.5 Definition (Ortsvektoren)
Pfeile mit Angriffspunkt im Nullpunkt heißen Ortsvektoren*.*

Angabe eines Vektors im Koordinatensystem: Angabe der Koordinaten des Zielpunktes des Ortsvektors (siehe Abbildung 8.3).

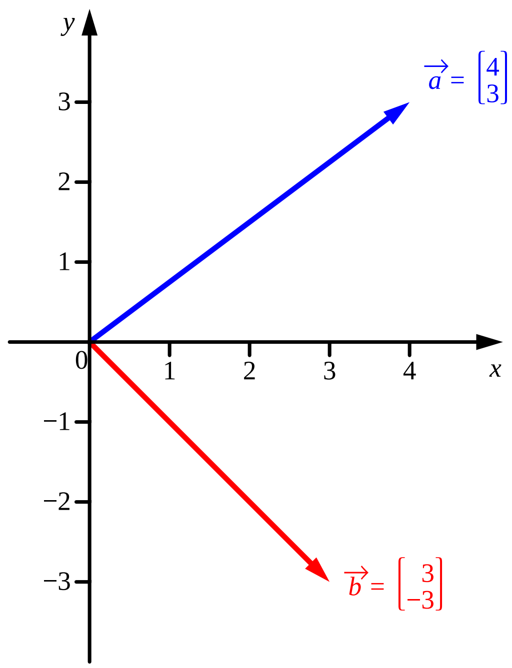


Abbildung 8.3: Ortsvektoren

8.1.6 Definition (Länge eines Vektors)
Unter dem Betrag*, der* Länge *oder der* Norm *eines Vektors $\vec{a}$ versteht man die Länge seiner Pfeile:*

$$\|\vec{a}\|_2.$$

8.1.7 Bemerkung

a) Im $\mathbb{R}^2$: Ortsvektor: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

Länge:

$$\|\vec{a}\|_2 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

(siehe Abbildung 8.4).

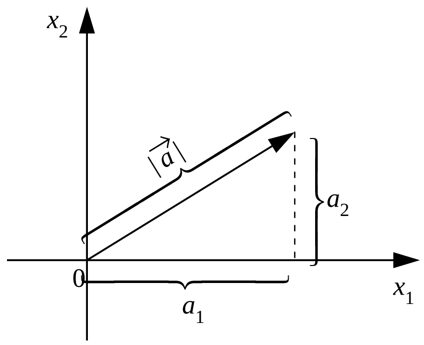


Abbildung 8.4: Norm eines Vektors in $\mathbb{R}^2$

b) Im $\mathbb{R}^3$: Ortsvektor: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

Länge:

$$\|\vec{a}\|_2 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\,,$$

denn mit Pythagoras gilt (siehe Abbildung 8.5):

$$d^2 = a_1^2 + a_2^2,$$

$$|\vec{a}|^2 = d^2 + a_3^2$$

$$\Longrightarrow \quad \|\vec{a}\|_2 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

c) Im $\mathbb{R}^n$: Ortsvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$,

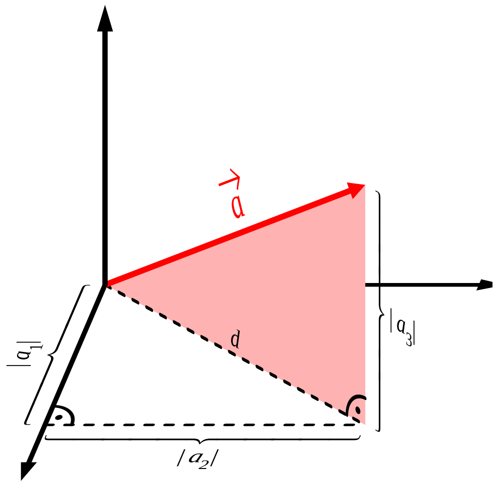


Abbildung 8.5: Norm eines dreidimensionalen Ortsvektors

Länge:

$$\left\|\vec{a}\right\|_2 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

In Kurzschreibweise:

$$\vec{a} = \Big(a_k\Big)_{k=1,\ldots,n}, \qquad \left\|\vec{a}\right\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}$$

8.1.8 Beispiel *Länge von* $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$*:*

$$\left\|\vec{a}\right\|_2 = \sqrt{9 + 16 + 25} = 5\sqrt{2}.$$

8.1.3 Rechenoperationen für Vektoren

8.1.3.1 Addition/Subtraktion

$\vec{a} \pm \vec{b}$

Geometrisch (siehe Abbildung 8.6)

Rechnerisch:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\vec{a} + \vec{b} = \Big(a_k\Big)_{k=1,\ldots,n} + \Big(b_k\Big)_{k=1,\ldots,n} = \Big(a_k + b_k\Big)_{k=1,\ldots,n}.$$

Subtraktion geometrisch (siehe Abbildung 8.7)

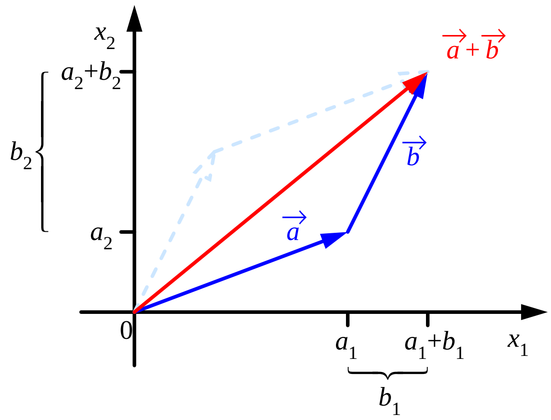


Abbildung 8.6: Vektoraddition

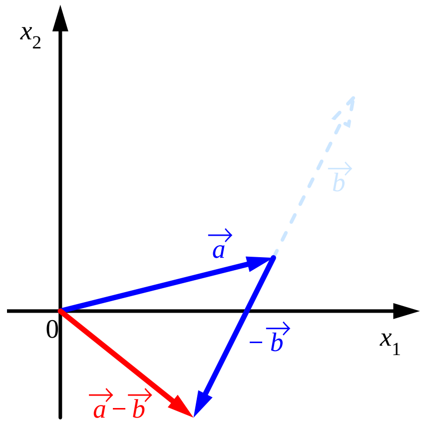


Abbildung 8.7: Vektorsubtraktion

Rechnerisch:

$$\vec{a}-\vec{b}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1-b_1 \\ a_2-b_2 \\ \vdots \\ a_n-b_n \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\vec{a}-\vec{b}=\Big(a_k\Big)_{k=1,\dots,n}-\Big(b_k\Big)_{k=1,\dots,n}=\Big(a_k-b_k\Big)_{k=1,\dots,n}.$$

8.1.3.2 Multiplikation mit einem Skalar

$$p\cdot\vec{a},\quad \vec{a}\cdot p,\quad p\in\mathbb{R}$$

Die Länge von $p\,\vec{a}$ bzw $\vec{a}\cdot p$ beträgt $|p|\cdot\left\|\vec{a}\right\|_2$,

$$\text{Richtung von } p\cdot\vec{a} \text{ bzw. } \vec{a}\cdot p \text{ ist } \begin{cases} \text{die Richtung von } \vec{a}, \text{ falls } p>0 \\ \text{entgegengesetzt zu } \vec{a}, \text{ falls } p<0 \end{cases}$$

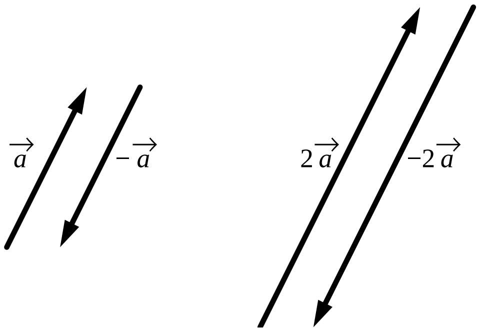


Abbildung 8.8: Multiplikation Vektor mit Skalar

Geometrisch (siehe Abbildung 8.8)
Rechnerisch:

$$p \cdot \vec{a} = p \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \cdot a_1 \\ p \cdot a_2 \\ \vdots \\ p \cdot a_n \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot p = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot p = \begin{pmatrix} a_1 \cdot p \\ a_2 \cdot p \\ \vdots \\ a_n \cdot p \end{pmatrix}$$

bzw.

$$p\,\vec{a} = p\left(a_k\right)_{k=1,\ldots,n} = \left(p\,a_k\right)_{k=1,\ldots,n}.$$

8.1.9 Beispiel

Für $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ *gilt:*

$$\frac{1}{2}\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1,5 \end{pmatrix}, \quad -\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad -2\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

(siehe Abbildung 8.9).

8.1.10 Beispiel

Für $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ *und* $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ *gilt:*

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 1-4 \\ -2+5 \\ 0+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 1+4 \\ -2-5 \\ 0-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

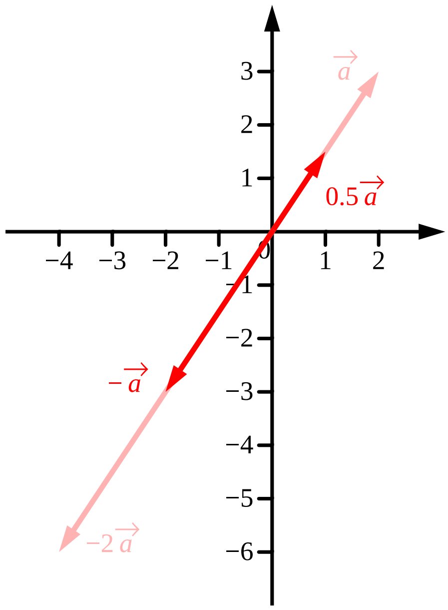


Abbildung 8.9: Vielfache des Vektors

8.1.11 Satz (Rechenregeln)

a) Kommutativgesetz: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

b) Neutrales Element: $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$

c) Inverses Element: $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$

d) Assoziativgesetz: $\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}$

e) Kommutativgesetz: $p\,\vec{a}=\vec{a}\cdot p$

f) Assoziativgesetz: $p\,(q\,\vec{a})=(pq)\,\vec{a}$

g) Distributivgesetze:

$$\begin{aligned}(p+q)\,\vec{a} &= p\,\vec{a}+q\,\vec{a}\\ p\left(\vec{a}+\vec{b}\right) &= p\,\vec{a}+p\,\vec{b}\end{aligned}$$

h) Dreiecksungleichung: $\left\|\vec{a}+\vec{b}\right\|_2 \leq \left\|\vec{a}\right\|_2+\left\|\vec{b}\right\|_2$

i) Betrag: $\left\|p\,\vec{a}\right\|_2=|p|\cdot\left\|\vec{a}\right\|_2$

8.1.12 Definition (Einheitsvektor)
Ein Vektor, dessen Betrag (Länge) gleich 1 ist, heißt Einheitsvektor.

8.1.13 Bemerkung
Ist $\vec{a} \neq \vec{0}$, so erhält man den Einheitsvektor in Richtung von $\vec{a}$ durch Multiplikation mit $p = \frac{1}{\|\vec{a}\|_2}$:

$$\vec{a}^0 = \frac{1}{\|\vec{a}\|_2} \cdot \vec{a}\,,$$

denn:

$\vec{a}^0$ hat die Richtung von $\vec{a}$, da $\frac{1}{\|\vec{a}\|_2} > 0$.

Für den Betrag gilt

$$\|\vec{a}^0\|_2 = \|\frac{1}{\|\vec{a}\|_2}\,\vec{a}\|_2 = \frac{1}{\|\vec{a}\|_2}\,\|\vec{a}\|_2 = 1.$$

8.1.14 Beispiel

Für $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ gilt:

$$\|\vec{a}\|_2 = \sqrt{9+16+25} = 5\sqrt{2} \quad \text{und} \quad \vec{a}^0 = \frac{\sqrt{2}}{10}\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

8.1.15 Bezeichnung (Kartesische Basisvektoren)
Die Einheitsvektoren in Richtung der Koordinatenachsen heißen kartesische Basisvektoren.

a) Im $\mathbb{R}^2$ (siehe Abbildung 8.10):

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Im $\mathbb{R}^3$ (siehe Abbildung 8.11):

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c) *Im $\mathbb{R}^n$: Beim k-ten Einheitsvektor ist die k-te Komponente 1, alle anderen sind* 0.

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots \quad , \quad \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

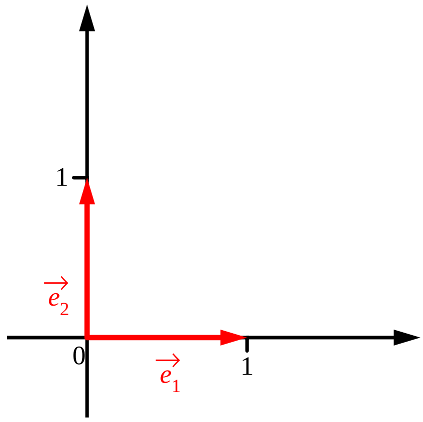


Abbildung 8.10: Einheitsvektoren in $\mathbb{R}^2$

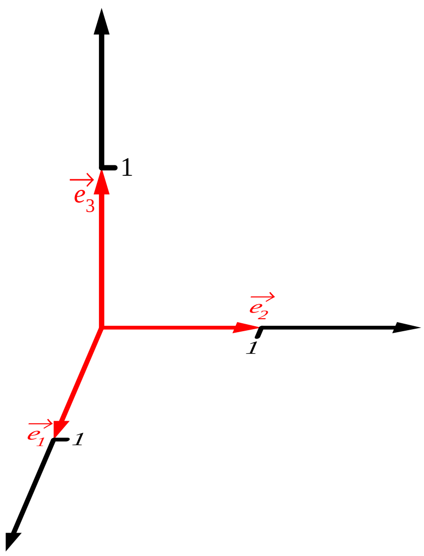


Abbildung 8.11: Einheitsvektoren in $\mathbb{R}^3$

8.1.16 Definition
Für $k, l \in \mathbb{N}$ sei

$$\delta_{k,l} := \begin{cases} 1 & \text{falls } k = l \\ 0 & \text{falls } k \neq l. \end{cases}$$

Der Ausdruck heißt Kronecker-Delta-Symbol.

8.1.17 Bemerkung
Für $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$, und $\vec{e}_k \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\vec{e}_k = \left(\delta_{k,l}\right)_{l=1,\ldots n}.$$

8.1.18 Definition (Linearkombination)
Gegeben seien Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$ und Skalare $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$.
Dann heißt

$$\vec{v} = \sum_{m=1}^{k} a_m \vec{v}_m$$

Linearkombination *der Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$.*

8.1.19 Satz (Basisdarstellung)
Jeder Vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ läßt sich als Linearkombination (d. h. Summe von Vielfachen) der kartesischen Basisvektoren darstellen:

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + \cdots + a_n\vec{e}_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\vec{e}_k.$$

Beweis:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + a_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

8.1.20 Beispiel

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ -0.5 \\ 2 \end{pmatrix} = 1.5 \cdot \vec{e}_1 - 0.5 \cdot \vec{e}_2 + 2 \cdot \vec{e}_3$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 4 \cdot \vec{e}_1 - 1 \cdot \vec{e}_2 + 3 \cdot \vec{e}_4 + 2 \cdot \vec{e}_5.$$

8.1.3.3 Inneres Produkt (Skalarprodukt)

Kartesische Koordinaten:
senkrechte Projektion des Vektors auf die Achsen (siehe Abbildung 8.12)

$$a_1 = \left\|\vec{a}\right\|_2 \cdot \cos \angle(\vec{e}_1, \vec{a})$$

$$a_2 = \left\|\vec{a}\right\|_2 \cdot \cos \angle(\vec{e}_2, \vec{a})$$

Im $\mathbb{R}^3$ ist zusätzlich noch: $a_3 = \left\|\vec{a}\right\|_2 \cdot \cos \angle(\vec{e}_3, \vec{a})$.

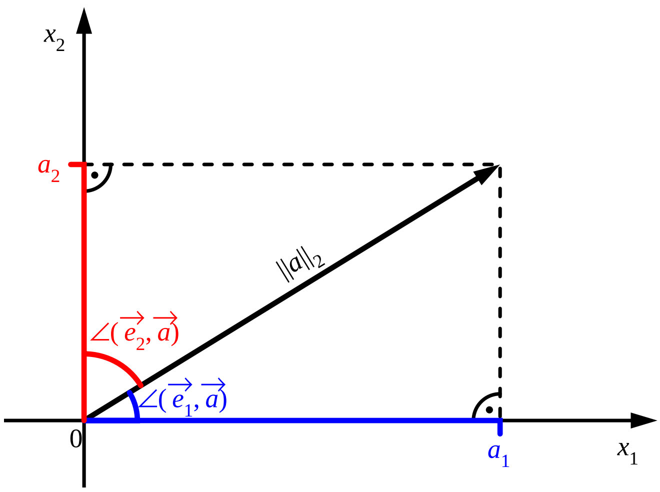


Abbildung 8.12: Projektion eines Vektors auf die Achsen

8.1.21 Definition (Inneres Produkt, Skalarprodukt)
Das innere Produkt *(Skalarprodukt) zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist definiert durch*

a)

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle := \left\|\vec{a}\right\|_2 \cdot \left\|\vec{b}\right\|_2 \cdot \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$$

b)

$$\langle \vec{a}, \vec{0} \rangle := 0.$$

c) Orthogonalität von Vektoren:

$$\vec{a} \perp \vec{b} :\iff \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$$

d. h. $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\pi}{2}$ *oder* $\vec{a} = \vec{0}$ *oder* $\vec{b} = \vec{0}$.

In allen diesen Fällen nennen wir $\vec{a}$ *und* $\vec{b}$ orthogonal *(bzw.* $\vec{a}$ *senkrecht zu* $\vec{b}$*).*

8.1.22 Bemerkung

a) Das innere Produkt

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\|_2 \cdot \|\vec{b}\|_2 \cdot \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$$

zweier Vektoren ist eine reelle Zahl (kann negativ sein).

b) Ist $\vec{b}$ *einer der Einheitsvektoren, so ergeben sich die oben genannten Darstellungen der Koordinaten:*

$$a_k = \|\vec{a}\|_2 \cdot \cos \angle(\vec{a}, \vec{e}_k) = \langle \vec{a}, \vec{e}_k \rangle, \quad k = 1, 2, \ldots$$

c)

$$\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = \|\vec{a}\|_2 \cdot \|\vec{a}\|_2 \cdot \cos \angle(\vec{a}, \vec{a}) = \|\vec{a}\|_2^2.$$

8.1.23 Satz

Senkrechte Projektion $\vec{c}$ *von* $\vec{a}$ *auf* $\vec{b}$ *(siehe Abbildung 8.13):*

Richtung des Vektors $\vec{c}$*: parallel zu* $\vec{b}$

Länge des Vektors $\vec{c}$*:*

$$\|\vec{a}\|_2 \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\|\vec{b}\|_2} \tag{8.1}$$

Daher ist

$$\begin{aligned} \vec{c} &= \|\vec{a}\|_2 \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) \cdot \vec{b}^0 \\ &= \|\vec{a}\|_2 \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) \frac{1}{\|\vec{b}\|_2} \cdot \vec{b} \\ &= \frac{\|\vec{a}\|_2 \|\vec{b}\|_2 \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})}{\|\vec{b}\|_2^2} \cdot \vec{b} \\ &= \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\|\vec{b}\|_2^2} \cdot \vec{b} \quad = \quad \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\langle \vec{b}, \vec{b} \rangle} \cdot \vec{b}. \end{aligned}$$

Entsprechend ist

$$\frac{\langle\vec{a},\vec{b}\rangle}{\left\|\vec{a}\right\|_2^2}\cdot\vec{a} \quad = \quad \frac{\langle\vec{a},\vec{b}\rangle}{\langle\vec{a},\vec{a}\rangle}\cdot\vec{a}$$

die senkrechte Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$ (siehe Abbildung 8.14).

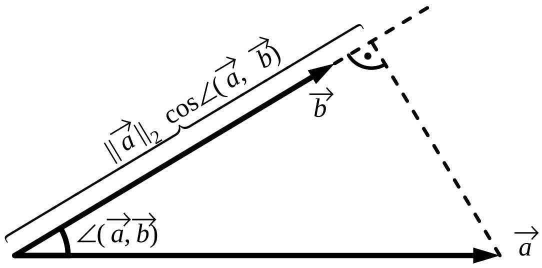


Abbildung 8.13: senkrechte Projektion eines Vektors auf einen anderen

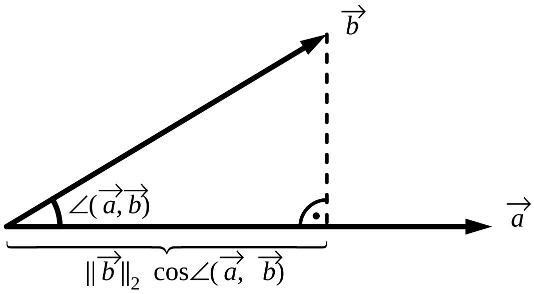


Abbildung 8.14: Projektion eines Vektors, umgekehrter Fall

8.1.24 Satz (Rechenregeln inneres Produkt)

a) *Kommutativgesetz:* $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle = \langle\vec{b},\vec{a}\rangle$

b) *Für alle* $p\in\mathbb{R}$ *gilt:* $p\langle\vec{a},\vec{b}\rangle = \langle p\vec{a},\vec{b}\rangle = \langle\vec{a},p\vec{b}\rangle$

c) *Distributivgesetz:* $\langle\vec{a}+\vec{b},\vec{c}\rangle = \langle\vec{a},\vec{c}\rangle + \langle\vec{b},\vec{c}\rangle$

d) *Orthogonalität:* $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle = 0 \iff \vec{a}\perp\vec{b}$

e) *Vektorlänge, inneres Produkt:* $\left\|\vec{a}\right\|_2 = \sqrt{\langle\vec{a},\vec{a}\rangle}$

f) *Cauchy-Schwarzsche Ungleichung:* $|\langle\vec{a},\vec{b}\rangle| \leq \left\|\vec{a}\right\|_2 \cdot \left\|\vec{b}\right\|_2$

$$\begin{aligned} \textit{da} \quad |\langle\vec{a},\vec{b}\rangle| &= \left|\left\|\vec{a}\right\|_2 \cdot \left\|\vec{b}\right\|_2 \cdot \cos\angle(\vec{a},\vec{b})\right| \\ &= \underbrace{\left\|\vec{a}\right\|_2}_{\geq 0} \cdot \underbrace{\left\|\vec{b}\right\|_2}_{\geq 0} \cdot \underbrace{|\cos\angle(\vec{a},\vec{b})|}_{\leq 1} \\ &\leq \left\|\vec{a}\right\|_2 \cdot \left\|\vec{b}\right\|_2. \end{aligned}$$

8.1.25 Satz
Berechnung des inneren Produkts (kartesische Koordinaten):

a) *Kartesische Einheitsvektoren sind paarweise orthogonal, daher gilt in* $\mathbb{R}^n$*:*

$$\langle\vec{e}_k,\vec{e}_l\rangle = \delta_{k,l} = \begin{cases} 1 & , \textit{ falls } k = l \\ 0 & , \textit{ falls } k \neq l \end{cases}$$

b) *Inneres Produkt in* $\mathbb{R}^2$*:*

$$\begin{aligned} \langle\vec{a},\vec{b}\rangle &= \langle a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2,\ b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2\rangle \\ &= a_1b_1\underbrace{\langle\vec{e}_1,\vec{e}_1\rangle}_{=1} + a_1b_2\underbrace{\langle\vec{e}_1,\vec{e}_2\rangle}_{=0} + a_2b_1\underbrace{\langle\vec{e}_2,\vec{e}_1\rangle}_{=0} + a_2b_2\underbrace{\langle\vec{e}_2,\vec{e}_2\rangle}_{=1} \\ &= a_1b_1 + a_2b_2 \end{aligned}$$

c) *Inneres Produkt in* $\mathbb{R}^3$*:*

$$\begin{aligned} \langle\vec{a},\vec{b}\rangle &= \langle a_1\cdot\vec{e_1} + a_2\cdot\vec{e_2} + a_3\cdot\vec{e_3},\ \ b_1\cdot\vec{e_1} + b_2\cdot\vec{e_2} + b_3\cdot\vec{e_3}\rangle \\ &= a_1b_1\underbrace{\langle\vec{e_1},\vec{e_1}\rangle}_{=1} + a_2b_2\underbrace{\langle\vec{e_2},\vec{e_2}\rangle}_{=1} + a_3b_3\underbrace{\langle\vec{e_3},\vec{e_3}\rangle}_{=1} \\ &= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \end{aligned}$$

d) *Allgemein gilt in* $\mathbb{R}^n$*:*

$$\langle\vec{a},\vec{b}\rangle = a_1b_1 + a_2b_2 \ldots + a_nb_n = \sum_{k=1}^{n} a_kb_k$$

8.1.26 Satz

$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff a_1b_1 + a_2b_2 \ldots + a_nb_n = 0$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \vec{a} \perp \vec{b} &\iff \angle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\pi}{2} \\ &\iff \cos(\vec{a},\vec{b}) = 0 \\ &\iff 0 = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a},\vec{b}) = \langle \vec{a},\vec{b} \rangle = a_1b_1 + a_2b_2 \ldots + a_nb_n \end{aligned}$$

8.1.27 Beispiel

Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *und* $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ b_3 \end{pmatrix}$. *Bestimme* b_3*, so dass* $\vec{a} \perp \vec{b}$*.*

Lösung

$$\begin{aligned} \vec{a} \perp \vec{b} &\iff \langle \vec{a},\vec{b} \rangle = 0 \\ &\iff 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot b_3 = 0 \\ &\iff b_3 = -2. \end{aligned}$$

8.1.28 Bemerkung (Senkrechte Richtung)

Sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

a) Es ist

$$\vec{a}_\perp := \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

ein Vektor senkrecht zu $\vec{a}$ *und*

$$\|\vec{a}_\perp\|_2 = \|\vec{a}\|_2.$$

b) Ebenso ist

$$-\vec{a}_\perp = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

senkrecht zu $\vec{a}$*.*

Beweis

i) $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \end{pmatrix}$ da $\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \end{pmatrix} \rangle = a_1 a_2 - a_2 a_1 = 0.$

ii) $\|\vec{a}_\perp\|_2 = \sqrt{a_2^2 + (-a_1)^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \|\vec{a}\|_2.$

8.1.3.4 Vektorielles (äußeres oder Kreuz-) Produkt im $\mathbb{R}^3$

8.1.29 Wiederholung
Drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$ bilden in der angegebenen Reihenfolge ein rechtshändiges System, *wenn man sie in dieser Reihenfolge Daumen, Zeige- und Mittelfinger der rechten Hand zuordnen kann.*

8.1.30 Beispiel
Die Vektoren $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ bilden ein rechtshändiges System, siehe Abbildung 8.2.

8.1.31 Definition (Kreuzprodukt)

a) *Seien $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ und $\vec{a} \neq c\,\vec{b} \quad (c \in \mathbb{R})$.*

Das Kreuzprodukt *oder* vektorielle Produkt

$$\vec{a} \times \vec{b} \in \mathbb{R}^3$$

von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist definiert durch

(i) $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{a}$ *und* $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{b}$

(ii) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$ *bilden ein rechtshändiges System*

(iii) $\|\vec{a} \times \vec{b}\|_2 = \|\vec{a}\|_2 \|\vec{b}\|_2 \sin \angle(\vec{a}, \vec{b})$ *(Winkel $< \pi$ nehmen)*

b) *Für $\vec{a} = \vec{0}$ oder $\vec{b} = \vec{0}$ oder $\vec{a} = c \cdot \vec{b}$, $c \in \mathbb{R}$ ist $\vec{a} \times \vec{b}$ definiert als $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.*

8.1.32 Bemerkung

Die Länge von $\vec{a} \times \vec{b}$ ist gleich dem Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms:

In Abbildung 8.15 ist

$$\frac{h}{\|\vec{b}\|_2} = \sin \angle(\vec{a}, \vec{b}) \iff h = \|\vec{b}\|_2 \sin \angle(\vec{a}, \vec{b}).$$

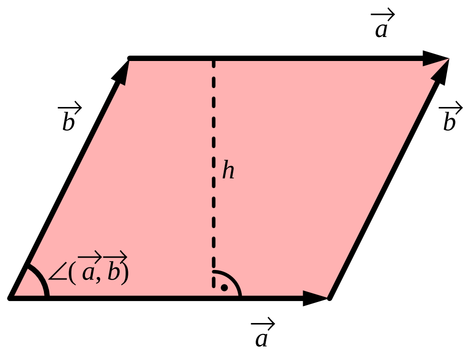


Abbildung 8.15: Flächeninhalt des Parallelogramms

Damit ist nach Definition 8.1.31

$$\left\|\vec{a} \times \vec{b}\right\|_2 = \left\|\vec{a}\right\|_2 \left\|\vec{b}\right\|_2 \sin \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \left\|\vec{a}\right\|_2 h.$$

Dies ist die Parallelogrammfläche (Grundseite mal Höhe).

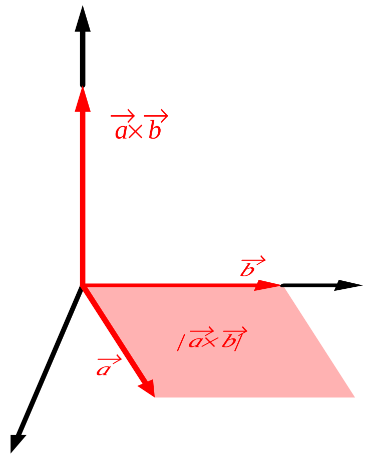


Abbildung 8.16: Kreuzprodukt

8.1.33 Beispiel

$$\vec{e_1} \times \vec{e_2} = \vec{e_3}\,,$$

denn:

a)

$$\vec{e_3} \perp \vec{e_1} \; \textit{und} \; \vec{e_3} \perp \vec{e_2}$$

b) $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ *bilden ein rechtshändiges System.*

c)

$$\underbrace{\left\|\vec{e_1}\right\|_2}_{=1} \cdot \underbrace{\left\|\vec{e_2}\right\|_2}_{=1} \cdot \sin \underbrace{\angle(\vec{e_1}, \vec{e_2})}_{=\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} = 1 = \left\|\vec{e_3}\right\|_2$$

Ebenso:

$$\vec{e_2} \times \vec{e_3} = \vec{e_1}$$

und

$$\vec{e_3} \times \vec{e_1} = \vec{e_2}.$$

8.1.34 Satz (Rechenregeln Kreuzprodukt)

a) $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$.

Insbesondere ist $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$.

b) Distributivgesetze:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) &= \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} \\ (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} &= \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} \end{aligned}$$

c) Für $c \in \mathbb{R}$ *gilt:*

$$c \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (c\,\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (c\,\vec{b})$$

8.1.35 Bemerkung

Das Kreuzprodukt ist antikommutativ *und* nicht assoziativ*.*

Das folgende Beispiel zeigt, dass das Kreuzprodukt nicht assoziativ ist:

8.1.36 Beispiel

a) $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 =$

b) $\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 =$

c) $\vec{e}_3 \times \vec{e}_2 =$

d) $(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) \times \vec{e}_2 =$

e) $\vec{e}_1 \times (\vec{e}_2 \times \vec{e}_2) =$

8.1.37 Satz
Berechnung des vektoriellen Produktes in kartesischen Koordinaten

$$\begin{aligned}
\vec{a}\times\vec{b} &= (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3)\times(b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3) \\
&= a_1b_1\underbrace{(\vec{e}_1\times\vec{e}_1)}_{=\vec{0}} + a_1b_2\underbrace{(\vec{e}_1\times\vec{e}_2)}_{=\vec{e}_3} + a_1b_3\underbrace{(\vec{e}_1\times\vec{e}_3)}_{=-\vec{e}_2} \\
&\quad + a_2b_1\underbrace{(\vec{e}_2\times\vec{e}_1)}_{=-\vec{e}_3} + a_2b_2\underbrace{(\vec{e}_2\times\vec{e}_2)}_{=\vec{0}} + a_2b_3\underbrace{(\vec{e}_2\times\vec{e}_3)}_{=\vec{e}_1} \\
&\quad + a_3b_1\underbrace{(\vec{e}_3\times\vec{e}_1)}_{=\vec{e}_2} + a_3b_2\underbrace{(\vec{e}_3\times\vec{e}_2)}_{=-\vec{e}_1} + a_3b_3\underbrace{(\vec{e}_3\times\vec{e}_3)}_{=\vec{0}} \\
&= (a_2b_3 - a_3b_2)\,\vec{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\,\vec{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\,\vec{e}_3.
\end{aligned}$$

8.1.38 Beispiel

Für $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ *und* $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ *gilt:*

$$\begin{aligned}
\vec{a}\times\vec{b} &= (a_2b_3 - a_3b_2)\,\vec{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\,\vec{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\,\vec{e}_3 \\
&= -20\,\vec{e}_1 + (8+1)\vec{e}_2 + 5\,\vec{e}_3 \\
&= \begin{pmatrix} -20 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Einheitsvektor senkrecht zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

$$\frac{\vec{a}\times\vec{b}}{\left\|\vec{a}\times\vec{b}\right\|_2} = \frac{1}{\sqrt{400+81+25}}\cdot\begin{pmatrix} -20 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{506}}\cdot\begin{pmatrix} -20 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

8.1.3.5 Spatprodukt

8.1.39 Definition (Spatprodukt)
Für $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in\mathbb{R}^3$ ist das Spatprodukt *der Vektoren definiert durch*

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] := \langle\vec{a}\times\vec{b},\vec{c}\rangle.$$

8.1.40 Satz (Rechenregeln Spatprodukt)

a) $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3.$

b) $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}](= \langle \vec{a}\times\vec{b},\vec{c}\rangle) = \langle \vec{a},\vec{b}\times\vec{c}\rangle$

c) $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = [\vec{b},\vec{c},\vec{a}] = [\vec{c},\vec{a},\vec{b}]$

d) $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = -[\vec{b},\vec{a},\vec{c}]$ *etc.*

e) $[\vec{a}_1+\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c}] = [\vec{a}_1,\vec{b},\vec{c}] + [\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c}]$ *etc.*

f) $[r\,\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = r[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$ *etc.*

Beweis

Zu a):

$$\begin{aligned}\langle \vec{a}\times\vec{b},\vec{c}\rangle &= \langle \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \rangle \\ &= a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 + a_1b_2c_3 - a_2b_1c_3\end{aligned}$$

8.1.41 Bemerkung

Geometrisch ist $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$ das Volumen des von den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Spats, siehe Abbildung 8.17:

a) Das Volumen ist Grundfläche A mal Höhe h.

b) Es gilt: $A = \left\|\vec{a}\times\vec{b}\right\|_2$ (siehe Bemerkung 8.1.32).

c) $h = \left\|\vec{c}\right\|_2 \cos\angle(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c})$ (Projektion von $\vec{c}$ auf die senkrechte Richtung).

$$\begin{aligned}\Longrightarrow V = A\,h &= \left\|\vec{a}\times\vec{b}\right\|_2 \left\|\vec{c}\right\|_2 \left|\cos\angle(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c})\right| \\ &= \left|\langle \vec{a}\times\vec{b},\vec{c}\rangle\right|.\end{aligned}$$

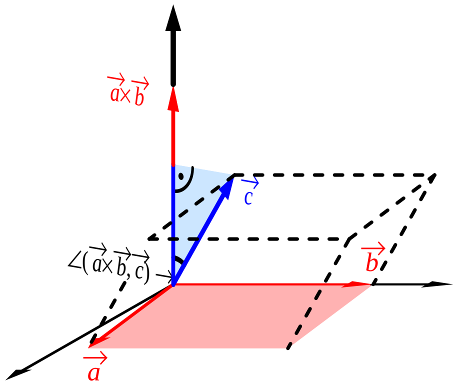


Abbildung 8.17: Spatprodukt

8.1.42 Beispiel
Spatprodukt aus $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1.5 \end{pmatrix}$ *und* $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2.5 \\ 3 \end{pmatrix}$:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \cdot 1.5 - 4 \cdot 0 \\ 0 - 2 \cdot 1.5 \\ 2 \cdot 4 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.5 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] &= \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle = \langle \begin{pmatrix} -1.5 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2.5 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle \\ &= -1.5 \cdot 1 - 3 \cdot 2.5 + 8 \cdot 3 \\ &= 15. \end{aligned}$$

8.2 Determinanten

8.2.1 Determinante zweiter Ordnung

8.2.1 Beispiel
Seien $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$*. Bestimme Fläche des Parallelogramms, das die Vektoren* $\vec{a}, \vec{b}$ *aufspannen (Abbildung 8.18)*

Lösung

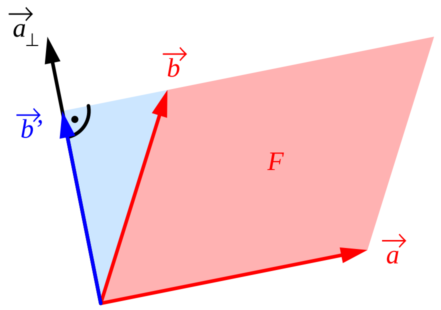


Abbildung 8.18: Parallelogramm in $\mathbb{R}^2$

$$\vec{a}_\perp = \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \end{pmatrix} \qquad \text{(Bemerkung 8.1.28)}$$

$$F = \|\vec{a}\|_2 \, \|\vec{b}'\|_2 \quad \text{mit } \vec{b}' = \frac{\langle \vec{b}, \vec{a}_\perp \rangle}{\|\vec{a}_\perp\|_2^2}\, \vec{a}_\perp \qquad \text{(Satz 8.1.23, Proj. von } \vec{b} \text{ auf } \vec{a}_\perp\text{)}$$

$$\iff F = \|\vec{a}\|_2 \, \frac{\langle \vec{b}, \vec{a}_\perp \rangle}{\|\vec{a}_\perp\|_2^2} \, \|\vec{a}_\perp\|_2$$

$$= \langle \vec{b}, \vec{a}_\perp \rangle \qquad \text{(da } \|\vec{a}\|_2 = \|\vec{a}_\perp\|_2\text{)}$$

$$\iff F = b_1(-a_2) + b_2 a_1 = \quad a_1 b_2 - a_2 b_1 .$$

8.2.2 Bezeichnung (Determinante 2. Ordnung)
Seien $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$).

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} := a_1 b_2 - a_2 b_1$$

heißt Determinante zweiter Ordnung.

8.2.3 Bemerkung

a) *Die Determinante ist eine reelle (bzw.) komplexe Zahl.*

b) *Der Betrag ist der Flächeninhalt des von den zweidimensionalen Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.*

c) *Das Vorzeichen ist positiv, wenn $\vec{a}$, $\vec{b}$ die gleiche Orientierung wie die kanonische Basis $\vec{e}_1, \vec{e}_2 \in \mathbb{R}^2$ (bzw. $\mathbb{C}^2$) haben (Abbildung 8.19).*

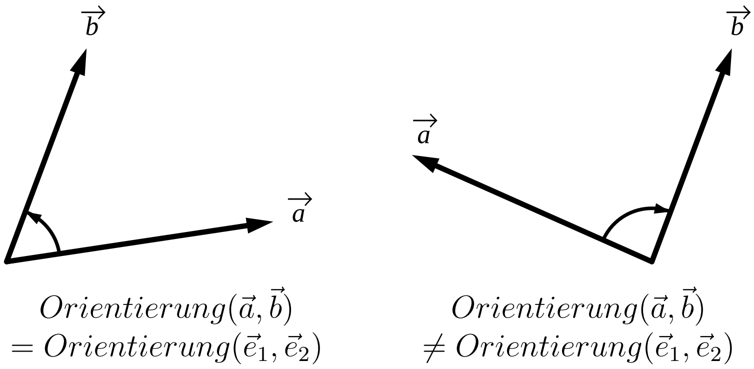


Abbildung 8.19: Mögliche Orientierungen von Vektorbasen in $\mathbb{R}^2$

8.2.2 Determinante dritter Ordnung

8.2.4 Wiederholung
Volumen des von den Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ aufgespannten Spats:

$$\begin{aligned}[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] &= \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle \\ &= a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 \\ &\quad - a_3 b_2 c_1 - a_2 b_1 c_3 - a_1 b_3 c_2\end{aligned}$$

8.2.5 Bezeichnung (Determinante 3. Ordnung, Regel von Sarrus)
Seien $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$).

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} := a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_2 b_1 c_3 - a_1 b_3 c_2$$

heißt Determinante dritter Ordnung.
Der Wert ist gleich dem Spatprodukt der Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

8.2.6 Bemerkung

a) Die Determinante ist eine reelle (bzw.) komplexe Zahl.

b) Der Betrag ist das Volumen des von den Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aufgespannten Spats.

c) Das Vorzeichen ist positiv, wenn $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ die gleiche Orientierung wie die kanonische Basis $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ haben, d. h. wenn sie ein Rechtssystem bilden.

d) Rechenschema (Merkregel):

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array}\right. \quad = \quad a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2$$

8.2.7 Beispiel

$$\left|\begin{array}{rrr|rr} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right.$$
$$= 1 + 4 + 6 + 1 + 6 - 4 = 14$$

8.2.3 Determinante allgemeiner Ordnung

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $a_{k,l} \in \mathbb{K} \quad (k = 1, \ldots, n;\ l = 1, \ldots, n)$.

$$D = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,l} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,l} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k,1} & a_{k,2} & \cdots & a_{k,l} & \cdots & a_{k,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,l} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} \in \mathbb{K}$$

wobei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

$a_{k,l}$ steht im Kreuzungspunkt der k-ten Zeile und der l-ten Spalte.

Berechnung: rekursiv, siehe unten.

8.2.8 Definition

Streicht man die k-te Zeile und die l-te Spalte im Schema einer Determinante D der Ordnung n, so erhält man eine Unterdeterminante $D_{k,l}$ von $(n-1)$-ter Ordnung.

Multiplikation mit dem Vorzeichenfaktor $(-1)^{k+l}$ liefert $A_{k,l} = (-1)^{k+l} D_{k,l}$.

$A_{k,l}$ heißt algebraisches Komplement *des Elementes $a_{k,l}$.*

8.2.9 Beispiel

$$D = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & 7 & 9 \\ -1 & 3 & 15 \\ -2 & -1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

$$A_{1,1} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 3 & 15 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

$$A_{2,3} = (-1)^5 \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & 7 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}$$

8.2.10 Beispiel

$$D = \begin{vmatrix} 7 & 9 & 5 & 3 \\ -2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 9 & -8 & 7 & -6 \end{vmatrix}$$

$$A_{4,1} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 9 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}, \qquad A_{2,4} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 7 & 9 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 9 & -8 & 7 \end{vmatrix}.$$

8.2.11 Bemerkung
Der Vorzeichenfaktor $(-1)^{k+l}$ *von* $A_{k,l}$ *lässt sich dem folgenden "Schachbrettmuster"entnehmen.*

$$\begin{vmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

8.2.12 Satz (Entwicklungssatz von Laplace)
a) Entwicklung nach der k*-ten Zeile:*

Für jeden festen Zeilenindex $k \in \{1, \ldots, n\}$ *gilt*

$$D = \sum_{l=1}^{n} a_{k,l} A_{k,l}$$

b) Entwicklung nach der l-ten Spalte:
Für jeden festen Spaltenindex $l \in \{1, \ldots, n\}$ gilt

$$D = \sum_{k=1}^{n} a_{k,l} A_{k,l}$$

Insbesondere ist der Wert von D unabhängig von den gewählten Zeilen oder Spalten.

8.2.13 Beispiel

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Entwicklung nach der dritten Zeile

$$\begin{aligned} D &= -1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -(-4-1) - 3(-2-2) + (1-4) \\ &= 5 + 12 - 3 \\ &= 14 \end{aligned}$$

8.2.14 Beispiel

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Entwicklung nach der zweiten Spalte

$$\begin{aligned} D &= -2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \\ &= -2(2-2) + 1(1+1) - 3(-2-2) \\ &= 2 + 12 \\ &= 14 \end{aligned}$$

8.2.15 Beispiel

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & -3 \\ 4 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

Entwicklung nach der ersten Zeile

$$\begin{aligned}
D &= \underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix}}_{\text{Entw. n. 1.Spalte}} + \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}}_{\text{Entw. n. 1.Zeile}} \\
&= 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\
&= 3(-2+2) + 2(-2+6) + 2(-2+2) - 1(-8+1) - 3(8-1) \\
&= -6.
\end{aligned}$$

8.2.16 Satz (Rechenregeln für Determinanten)

a) *Schreibt man in einer Determinante die Zeilen als Spalten auf, so bleibt der Wert gleich.*

b) *Vertauscht man in einer Determinante zwei Zeilen (Spalten) miteinander, so ändert sich das Vorzeichen.*

c) *Eine Determinante wird mit einer reellen Zahl multipliziert, indem alle Elemente entweder* einer *Zeile oder* einer *Spalte mit dieser Zahl multipliziert werden.*

d) *Addition eines Vielfachen einer Zeile (Spalte) zu einer anderen Zeile (Spalte) läßt den Wert der Determinante unverändert.*

e) *Sind alle Elemente einer Zeile (Spalte) Null, so hat die Determinante den Wert Null.*

f) *Sind zwei Zeilen (Spalten) zueinander proportional (oder gleich), dann ist die Determinante Null.*

g) *Hat die Determinante Dreiecksgestalt, d.h.*

$$D = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{vmatrix} \quad bzw. \quad D = \begin{vmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix},$$

so ist ihr Wert gleich dem Produkt der Diagonalelemente, d. h.

$$D = a_{1,1} \cdot a_{2,2} \cdot \cdots \cdot a_{n,n}.$$

8.2.17 Beispiel

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$$

8.2.18 Beispiel

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 7 & 2 \end{vmatrix}$$

8.2.19 Beispiel

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -5 \\ 1 & 6 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 3 & 3 & 9 \\ 2 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

8.2.20 Beispiel

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

8.2.21 Beispiel

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

8.2.22 Beispiel

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 7 & 10 \end{vmatrix} = 0$$

8.2.23 Beispiel

$$\begin{vmatrix} 1 & e & \pi \\ 0 & 2 & 10^{1000} \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

8.2.24 Beispiel
Berechne

$$\begin{vmatrix} 1050 & 550 \\ 168 & 88 \end{vmatrix} = 50 \cdot \begin{vmatrix} 21 & 11 \\ 168 & 88 \end{vmatrix} = 50 \cdot \begin{vmatrix} 21 & 11 \\ 8 \cdot 21 & 8 \cdot 11 \end{vmatrix} = 0$$

8.2.25 Beispiel

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & -7 & 9 \end{vmatrix} = 7(3-7) = -28.$$

8.2.26 Beispiel

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 27.$$

8.2.27 Beispiel

$$\begin{vmatrix} 1 & c & -b \\ -c & 1 & a \\ b & -a & 1 \end{vmatrix} = 1 + a^2 + b^2 + c^2.$$

8.2.28 Beispiel

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -7.$$

8.2.29 Beispiel

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix} = abcd + ab + ad + cd + 1.$$

8.3 Matrizen

8.3.1 Grundbegriffe

8.3.1 Definition (Matrix)
Ein rechteckiges Schema von $m \cdot n$ Elementen (aus $\mathbb{R}$ bzw.$\mathbb{C}$) mit m Zeilen und n Spalten heißt $(m \times n)$–Matrix.

$$\begin{array}{cc} A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,l} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,l} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{k,1} & a_{k,2} & \dots & \boxed{a_{k,l}} & \dots & a_{k,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,l} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} & \leftarrow k\text{-te Zeile} \\ \uparrow & \\ l\text{-te Spalte} & \end{array}$$

Ist A eine $(n \times n)$-Matrix, so heißt A auch quadratische Matrix.

8.3.2 Bezeichnung
Ist A eine $(n \times n)$-Matrix mit Werten aus $\mathbb{K}$, so ist

$$\det(A) \in \mathbb{K}$$

die Determinante aus den Einträgen von A.

8.3.3 Bemerkung
Vektoren $\vec{a} \in \mathbb{K}^n$ sind einspaltige Matrizen.

8.3.4 Bezeichnung

a) $\mathbb{R}^{m \times n}$*: Menge aller reellen $(m \times n)$-Matrizen*

b) $\mathbb{C}^{m \times n}$*: Menge aller komplexen $(m \times n)$-Matrizen.*

c) $\mathbb{K}^{m \times n}$*: Menge aller $(m \times n)$-Matrizen ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).*

d) Sei $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{m \times n}$.

$a_{k,l}$ *heißt Matrixelement,*
k *Zeilenindex,* l *Spaltenindex,*
m *Zeilenzahl,* n *Spaltenzahl.*

e) $a_{k,l}$ *steht im Kreuzungspunkt der* k*-ten Zeile und der* l*-ten Spalte.*

f) Schreibweisen: $A = \Big(a_{k,l}\Big)_{\substack{k=1,\ldots,m \\ l=1,\ldots,n}} = (a_{k,l})$.

8.3.5 Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 6 & -3 & -1 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

A ist eine reelle quadratische (3×3)*–Matrix,* $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.
Matrixelemente sind z.B.

$$a_{1,1} = \quad , \quad a_{2,1} = \quad , \quad a_{3,2} = \quad .$$

8.3.6 Definition (Gleichheit von Matrizen)
Seien A, B *Matrizen. Dann heißt*

$$A = B,$$

wenn A *und* B *gleiche Größe haben, d. h.*

$$A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$$

und

$$a_{k,l} = b_{k,l} \quad \text{für jedes } k = 1, \ldots, m \quad \text{und } l = 1, \ldots, n.$$

8.3.7 Beispiel
Explizite Form von $A = \Big((k+1)^l\Big)_{\substack{k=0,\ldots,3 \\ l=0,\ldots,3}} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$.

$$A =$$

8.3.8 Beispiel (Matrix der Sinustransformation)
Sei $N = 4$.

Explizite Form von $A = \left(\sin\frac{\mu\nu\pi}{N}\right)_{\substack{\mu=1,\dots,N-1\\ \nu=1,\dots,N-1}} \in \mathbb{R}^{(N-1)\times(N-1)}$.

$$A =$$

8.3.9 Beispiel (Matrix der Fouriertransformation)
Sei $N = 4$.

Explizite Form von $A = \left(e^{\frac{2\pi\mu\nu j}{N}}\right)_{\substack{\mu=0,\dots,N-1\\ \nu=0,\dots,N-1}} \in \mathbb{C}^{N\times N}$.

$$A =$$

8.3.10 Bemerkung
Aus einer Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{m\times n}$$

lassen sich

a) n Spaltenvektoren bilden:

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{m,2} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \vec{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m$$

b) m Zeilenvektoren bilden:

$$\vec{a}^1 = (a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{1,n}), \quad \dots, \quad \vec{a}^m = (a_{m,1}, a_{m,2}, \dots, a_{m,n}) \in \mathbb{K}^{1\times n}.$$

D. h.

$$A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \dots & \vec{a}_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{---} & \vec{a}^1 & \text{---} \\ \text{---} & \vec{a}^2 & \text{---} \\ & \vdots & \\ \text{---} & \vec{a}^m & \text{---} \end{pmatrix}$$

8.3.11 Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Spaltenvektoren:

$$\vec{a}_1 =$$

Zeilenvektoren:

$$\vec{a}^1 =$$

8.3.12 Definition (Transponierte Matrix)
Sei $A = (a_{k,l}) \in \mathbb{K}^{m\times n}$.

a) Die zu A transponierte Matrix $A^\top$ *geht aus A durch Vertauschung der Zeilen und Spalten hervor:*

$$A^\top = \left(a_{l,k}\right)_{\substack{k=1,\dots,n\\ l=1,\dots,m}} \in \mathbb{K}^{n\times m}. \tag{8.2}$$

b) Mit A^* *bezeichnet man die zu A konjugiert transponierte Matrix:*

$$A^* = (a^*_{k,l})^\top = \left(a^*_{l,k}\right)_{\substack{k=1,\dots,n\\ l=1,\dots,m}} \in \mathbb{K}^{n\times m}. \tag{8.3}$$

8.3.13 Bemerkung
Bei reellen Matrizen sind die beiden Rechenoperationen (8.2) und (8.3) gleich.

8.3.14 Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^\top =$$

$$(A^\top)^\top = \quad .$$

8.3.15 Beispiel

$$B = \begin{pmatrix} 2j & 1-j & 3+2j \\ -2+j & 2 & 7-4j \end{pmatrix}$$

$$B^\top = \qquad\qquad B^* =$$

$$(B^*)^* =$$

8.3.16 Beispiel

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ \frac{1}{2} \\ -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^4 \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{a}^\top =$$

8.3.17 Satz
Sei $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$.

a) $\left(A^\top\right)^\top = A$

b) $(A^*)^* = A$

c) $A \in \mathbb{R}^{m\times n} \iff A^* = A^\top$.

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \iff \vec{a}^\top = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{1\times n}$.

8.3.18 Definition (Symmetrische Matrix)
Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$.

a) A heißt symmetrisch*, wenn gilt*

$$A^\top = A,$$

d. h.

$$a_{k,l} = a_{l,k} \quad \textit{für jedes } k = 1, \ldots, n \quad \textit{und } l = 1, \ldots, n\,.$$

b) A heißt schiefsymmetrisch *oder antisymmetrisch, wenn*

$$A^\top = -A,$$

d. h.

$$a_{k,l} = -a_{l,k} \quad \textit{für jedes } k = 1, \ldots, n \quad \textit{und } l = 1, \ldots, n\,.$$

8.3.19 Beispiel

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 7 & 9 \\ 5 & 9 & 3 \end{pmatrix}$ *ist*

b) $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -5 \\ -2 & 0 & 9 \\ 5 & -9 & 0 \end{pmatrix}$ *ist*

8.3.20 Bemerkung

a) *Ist* $A \in \mathbb{K}^{m\times 1} = \mathbb{K}^m$, *d. h.*

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix},$$

dann ist A *eine Spaltenmatrix (ein Spaltenvektor).*

b) *Ist* $A \in \mathbb{K}^{1\times n}$, *d. h.*

$$A = (a_1, a_2, \ldots a_n),$$

dann ist A *eine Zeilenmatrix (ein Zeilenvektor).*

8.3.21 Definition

a) $N \in \mathbb{K}^{m\times n}$ *heißt* Nullmatrix, *wenn alle Matrixelemente Null sind.*
Bez.: $N_{m,n}$.

b) $E \in \mathbb{K}^{n\times n}$ *heißt* Einheitsmatrix, *wenn*
$e_{k,k} = 1$ *für* $k = 1, \ldots, n$ *und* $e_{k,l} = 0$ *für* $k \neq l$ *gilt,*
d. h. $e_{k,l} = \delta_{k,l}$ *(siehe Definition 8.1.16) und*

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bezeichnung: E_n.

8.3.22 Beispiel

$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *ist die* 3×3*–Einheitsmatrix.*

8.3.23 Bemerkung

a) In den Zeilen bzw. Spalten der Einheitsmatrix stehen die kanonischen Einheitsvektoren.

b) E spielt bei der Matrixmultiplikation die Rolle des neutralen Elements (wie 1 bei der Multiplikation von Zahlen).

8.3.24 Definition (Reguläre Matrix)
Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ heißt regulär, *wenn ihre Determinante*

$$\det A \neq 0$$

ist, sonst singulär.

8.3.2 Rechenoperationen für Matrizen

8.3.25 Definition
Seien $A, B \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $p \in \mathbb{K}$.

Summe, Differenz *und* Multiplikation mit Skalar *sind elementweise definiert durch*

a)
$$A + B := (a_{k,l} + b_{k,l}) \in \mathbb{K}^{m \times n}$$

b)
$$A - B := (a_{k,l} - b_{k,l}) \in \mathbb{K}^{m \times n}$$

c)
$$p\,A := (p\,a_{k,l}) \in \mathbb{K}^{m \times n}$$

8.3.26 Beispiel
Für

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 6 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

gilt:

$$A + B \;=$$

$$A - B \;=$$

$$3\,A \;=$$

8.3.27 Beispiel

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \\ -7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Berechne

$$B = \frac{1}{2}(A + A^\top) = \qquad\qquad , \quad C = \frac{1}{2}(A - A^\top) = \qquad\qquad ,$$

$$B + C =$$

8.3.28 Satz
Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$.

a) Dann ist $B := \frac{1}{2}(A + A^\top)$ *symmetrisch,*

b) $C := \frac{1}{2}(A - A^\top)$ *ist schiefsymmetrisch,*

c) Es gilt $A = B + C$ *(eindeutige Zerlegung in symmetrischen und schiefsymmetrischen Teil).*

8.3.29 Satz (Rechenregeln Matrizen)

a) Kommutativgesetz:

$$A + B = B + A$$

b) Assoziativgesetz:

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

c) Assoziativgesetz:

$$(p \cdot q) \cdot A = p \cdot (q \cdot A)$$

d) Distributivgesetze:

$$\begin{aligned} (p+q) \cdot A &= p \cdot A + q \cdot A \\ p(A+B) &= p \cdot A + p \cdot B \end{aligned}$$

8.3.30 Definition (Multiplikation von Matrizen)
Seien $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ und $B \in \mathbb{K}^{n\times p}$.

$$A \cdot B := C = (c_{k,l}) \in \mathbb{K}^{m\times p}$$

mit

$$\begin{aligned} c_{k,l} &= \langle \vec{a}^k, \vec{b}_l \rangle \\ &= a_{k,1}b_{1,l} + a_{k,2}b_{2,l} + \cdots + a_{k,n}b_{n,l} \\ &= \sum_{\nu=1}^{n} a_{k,\nu}b_{\nu,l} \qquad \text{für } k = 1, \ldots, m, \quad l = 1, \ldots, p. \end{aligned}$$

wobei $\vec{a}^k$ den k-ten Zeilenvektor von A und $\vec{b}_l$ den l-ten Spaltenvektor von B bezeichnet.

8.3.31 Bemerkung

a) Die Spaltenzahl von A muß mit der Zeilenzahl von B übereinstimmen.

b) Die Produktmatrix hat die Zeilenzahl von A und die Spaltenzahl von B.

c) Schematische Darstellung des Matrixprodukts:

$$\begin{pmatrix} — & \vec{a}^1 & — \\ — & \vec{a}^2 & — \\ & \vdots & \\ — & \vec{a}^m & — \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \ldots & \vec{b}_p \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

die zu folgendem Rechenschema ("Falk-Schema") führt:

$$
\begin{array}{cccc|ccccc}
 & & & & b_{1,1} & \dots & b_{1,l} & \dots & b_{1,p} \\
 & & & & b_{2,1} & \dots & b_{2,l} & \dots & b_{2,p} \\
 & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & b_{n,1} & \dots & b_{n,l} & \dots & b_{n,p} \\
\hline
a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & & & & & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & & \downarrow & & \\
a_{k,1} & a_{k,2} & \dots & a_{k,n} & & \rightarrow & \boxed{c_{k,l}} & & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & & & & \\
a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} & & & & &
\end{array}
$$

8.3.32 Beispiel
Für

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

ist

a)

$$A \cdot B =$$

b)

$$B \cdot A =$$

8.3.33 Bemerkung
Im allgemeinen ist $A \cdot B \neq B \cdot A$ (falls beide Produkte überhaupt definiert sind).

8.3.34 Bemerkung
Für $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ und Einheitsmatrizen E_m, E_n sowie Nullmatrizen $N_{l,m}, N_{n,l}$ gilt:

$$E_m \cdot A = A \cdot E_n = A$$

$$N_{l,m} \cdot A = N_{l,n} \text{ und } A \cdot N_{n,l} = N_{m,l}$$

8.3.35 Bemerkung
Die Multipikation einer Matrix $A = \left(a_{k,l}\right) \in \mathbb{K}^{m \times n}$ mit einem Spaltenvektor $\vec{x} = \left(x_l\right) \in \mathbb{K}^n$ ergibt die Linearkombination der Spaltenvektoren von A mit den Skalaren x_l:

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \dots & \vec{a}_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{m} \begin{pmatrix} | \\ \vec{a}_k \\ | \end{pmatrix} x_k = \sum_{k=1}^{m} x_k \vec{a}_k.$$

8.3.36 Satz (Rechenregeln)

a) *Assoziativgesetz:*
Sei $A \in \mathbb{K}^{l\times m}, B \in \mathbb{K}^{m\times n}, C \in \mathbb{K}^{n\times p}$.
Dann gilt:

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

b) *Distributivgesetze:*
Für $A \in \mathbb{K}^{l\times m}$ *und* $B, C \in \mathbb{K}^{m\times n}$ *ist*

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C.$$

Für $A, B \in \mathbb{K}^{l\times m}$ *und* $C \in \mathbb{K}^{m\times n}$ *ist*

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C.$$

8.3.37 Beispiel
Für $\vec{e}_2 \in \mathbb{R}^3, \quad \vec{e}_3 \in \mathbb{R}^5$ *berechne*

$$\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3^{\top} =$$

8.3.38 Bemerkung
Für $\vec{e}_k \in \mathbb{R}^m, \quad \vec{e}_l \in \mathbb{R}^n$ *gilt*

$$\vec{e}_k \cdot \vec{e}_l^{\top} = A = (a_{\mu,\nu}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

mit

$$a_{\mu,\nu} = \begin{cases} 1 & \text{falls } k = \mu \text{ und } l = \nu \\ 0 & \text{in allen anderen Fällen.} \end{cases}$$

d. h. es ist $a_{\mu,\nu} = \delta_{k,\mu}\, \delta_{l,\nu}$.

Die Matrix hat einen Eintrag 1 *(in Zeile* k*, Spalte* l*) und ist sonst Null.*

8.3.39 Definition (Inverse Matrix)
Seien $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ *quadratische Matrizen. Gilt*

$$A \cdot B = E_n,$$

so heißt B inverse Matrix *zu* A. *Man schreibt dann*

$$B = A^{-1}.$$

8.3.40 Satz
Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ quadratische Matrix. Dann gilt:

a) *A regulär (siehe Definition 8.3.24) $\iff$ Die inverse Matrix A^{-1} existiert.*

b) *A singulär $\iff$ Zu A existiert keine Inverse.*

c) *Existiert A^{-1}, dann ist*
$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E_n$$
d. h.
$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A.$$

8.3.41 Beispiel
Berechne die Inverse zu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Lösung

Matrixanwendungen:

8.4 Lineare Gleichungssysteme

8.4.1 Definition
Seien $a_1, a_2, b \in \mathbb{R}$.

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = b \tag{8.4}$$

heißt lineare Gleichung *mit Unbekannten $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.*
a_1, a_2*:* Koeffizienten*,* b*:* Konstante.

8.4.2 Bemerkung
Die Lösungsmenge der linearen Gleichung (8.4) bleibt gleich, wenn die Gleichung mit $\alpha \neq 0$ multipliziert wird:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = b \iff \alpha a_1 x_1 + \alpha a_2 x_2 = \alpha b$$

8.4.3 Definition
Falls $a_1 \neq 0$ oder $a_2 \neq 0$, gibt es eine äquivalente lineare Gleichung zu (8.4) mit

$$a_1^2 + a_2^2 = 1 \quad \textit{und} \quad b \geq 0,$$

diese heißt Hessesche Normalform *der Gleichung.*

8.4.4 Beispiel
Bestimme die Hessesche Normalform zu

a) $3x_1 + 4x_2 = -5$

b) $x_2 = -5x_1 + 3$

c) $3x_1 + 6 = 0$

8.4.5 Satz
Es sei die lineare Gleichung (8.4) in Hessescher Normalform gegeben.
Mit $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ *lässt sich die Gleichung (8.4) schreiben als*

$$\langle \vec{a}, \vec{x} \rangle = b \iff \vec{a}^\top \cdot \vec{x} = b$$

$\vec{a}$ *ist ein Einheitsvektor.*

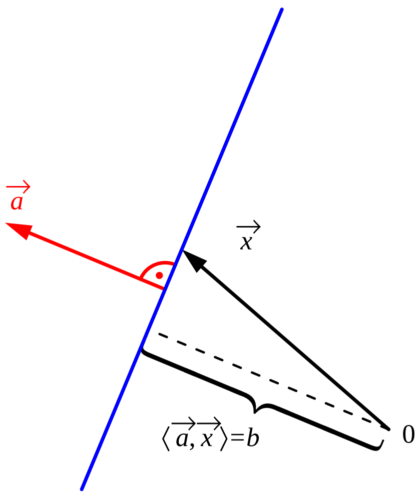


Abbildung 8.20: Geradengleichung, Hesseform

Lösungsmenge sind alle Vektoren $\vec{x}$, so dass die Projektion von $\vec{x}$ auf die Richtung $\vec{a}$ die Länge b hat (siehe Abbildung 8.20).

Die Zielpunkte dieser Vektoren $\vec{x}$ bilden die Gerade senkrecht zu $\vec{a}$ und im Abstand b zum Ursprung.

8.4.6 Folgerung

Seien $a_1, a_2, b \in \mathbb{R}$.

Sei

$$\mathbb{L} = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : a_1x_1 + a_2x_2 = b\}$$

die Lösungsmenge der linearen Gleichung

$$a_1x_1 + a_2x_2 = b.$$

a) *Falls $a_1 \neq 0$ oder $a_2 \neq 0$,*
so ist $\mathbb{L}$ eine Gerade senkrecht zu $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$.

b) *Falls $a_1 = a_2 = 0$ und $b \neq 0$, so ist $\mathbb{L} = \{\}$.*

c) *Falls $a_1 = a_2 = b = 0$, so ist $\mathbb{L} = \mathbb{R}^2$.*

8.4.7 Beispiel
Lösungsmenge von

$$x_1 + 3x_2 = -2.$$

Lösung
Auflösen nach einer der Variablen:

8.4.8 Folgerung
Ein lineares Gleichungssystem *mit 2 Gleichungen und 2 Unbekannten*

$$a_{1,1}\,x_1 + a_{1,2}\,x_2 = b_1$$

$$a_{2,1}\,x_1 + a_{2,2}\,x_2 = b_2$$

hat als mögliche Lösungsmengen

a) *eine eindeutige Lösung* $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

b) *keine Lösung*

c) *unendlich viele Lösungen (ganz* $\mathbb{R}^2$*)*

d) *unendlich viele Lösungen* $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ *auf einer Geraden in* $\mathbb{R}^2$*.*

Beweis
Eine Gleichung hat als Lösungsmenge eine Gerade, die leere Menge oder $\mathbb{R}^2$ (Folgerung 8.4.6).
Der Durchschnitt solcher zwei Lösungsmengen kann die angegebenen Formen a) - d) haben.

8.4.9 Beispiel

a) $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 - x_2 &= 0 \end{aligned}$ *ist eindeutig lösbar (siehe Abbildung 8.21 links)*

b) $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned}$ *ist unlösbar (siehe Abbildung 8.21 Mitte)*

c) $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned}$ *hat unendlich viele Lösungen (siehe Abbildung 8.21 rechts).*

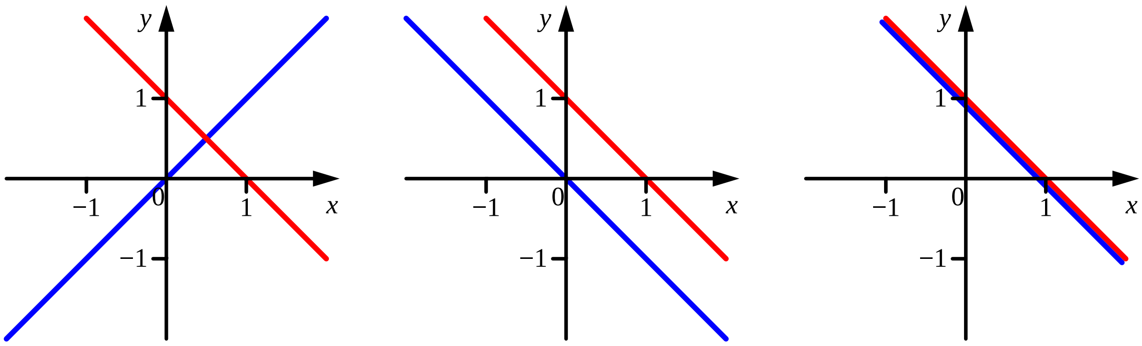


Abbildung 8.21: Lösungsmöglichkeiten bei zwei linearen Gleichungen in $\mathbb{R}^2$

8.4.10 Definition
Seien $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta \in \mathbb{R}$.

a) Lineare Gleichung *mit Unbekannten $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$:*

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = \beta.$$

b) Hessesche Normalform *der Gleichung ist die äquivalente Gleichung*

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = b$$

mit $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$ und $b \geq 0$.

8.4.11 Bemerkung
Hessesche Normalform vektoriell in $\mathbb{R}^3$:

$$\langle \vec{a}, \vec{x} \rangle = b \quad \text{bzw.} \quad \vec{a}^\top \cdot \vec{x} = b$$

$$\text{mit } \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \|\vec{a}\|_2 = 1, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad b \geq 0.$$

Beschreibt eine Ebene senkrecht zu $\vec{a}$, im Abstand b zum Ursprung, siehe Abbildung 8.22.

8.4.12 Beispiel
Berechne die Hessesche Normalform von

$$x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -3.$$

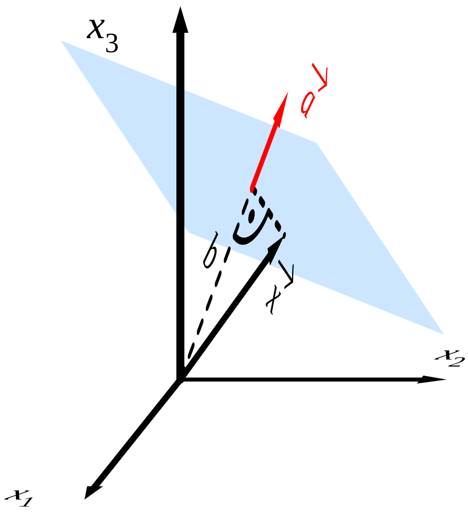


Abbildung 8.22: Ebene im $\mathbb{R}^3$, Hesseform

8.4.13 Beispiel
Lösungsmenge von

$$x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -3.$$

Lösung
Auflösen nach einer Variablen, die anderen sind frei wählbar.

8.4.14 Folgerung
Ein lineares Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 3 Unbekannten

$$a_{1,1}\, x_1 + a_{1,2}\, x_2 + a_{1,3}\, x_3 = b_1$$
$$a_{2,1}\, x_1 + a_{2,2}\, x_2 + a_{2,3}\, x_3 = b_2$$

hat als mögliche Lösungsmengen

a) keine Lösung,

b) unendlich viele Lösungen, Gerade in $\mathbb{R}^3$,

c) unendlich viele Lösungen, Ebene in $\mathbb{R}^3$,

d) unendlich viele Lösungen (ganz $\mathbb{R}^3$).

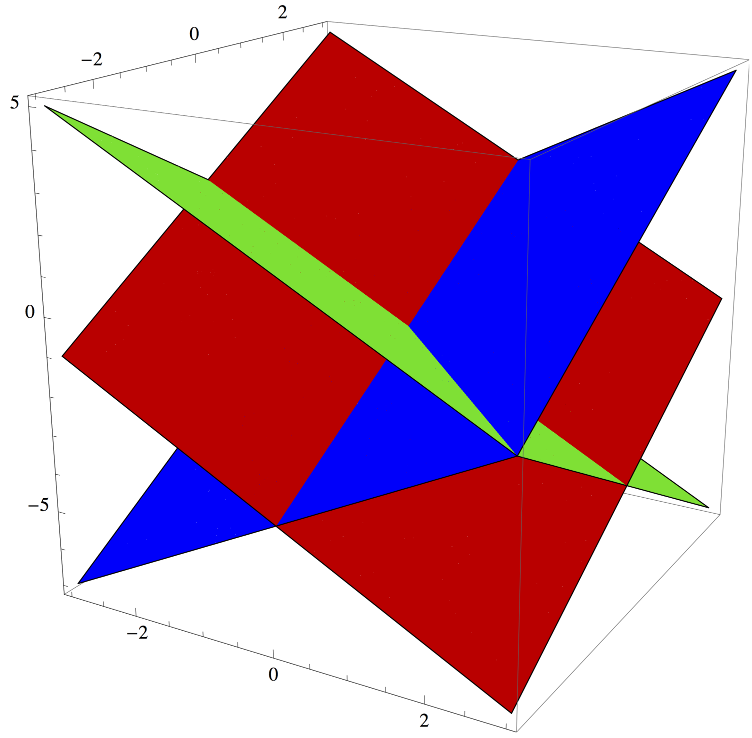


Abbildung 8.23: Drei Ebenen, ein gemeinsamer (Schnitt-)punkt

8.4.15 Folgerung
Ein lineares Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 3 Unbekannten

$$a_{1,1}\,x_1 + a_{1,2}\,x_2 + a_{1,3}\,x_3 = b_1$$

$$a_{2,1}\,x_1 + a_{2,2}\,x_2 + a_{2,3}\,x_3 = b_2$$

$$a_{3,1}\,x_1 + a_{3,2}\,x_2 + a_{3,3}\,x_3 = b_3$$

hat als mögliche Lösungsmengen

a) keine Lösung,

b) eindeutige Lösung,

c) unendlich viele Lösungen, Gerade in $\mathbb{R}^3$*,*

d) unendlich viele Lösungen, Ebene in $\mathbb{R}^3$*,*

e) unendlich viele Lösungen (ganz $\mathbb{R}^3$*).*

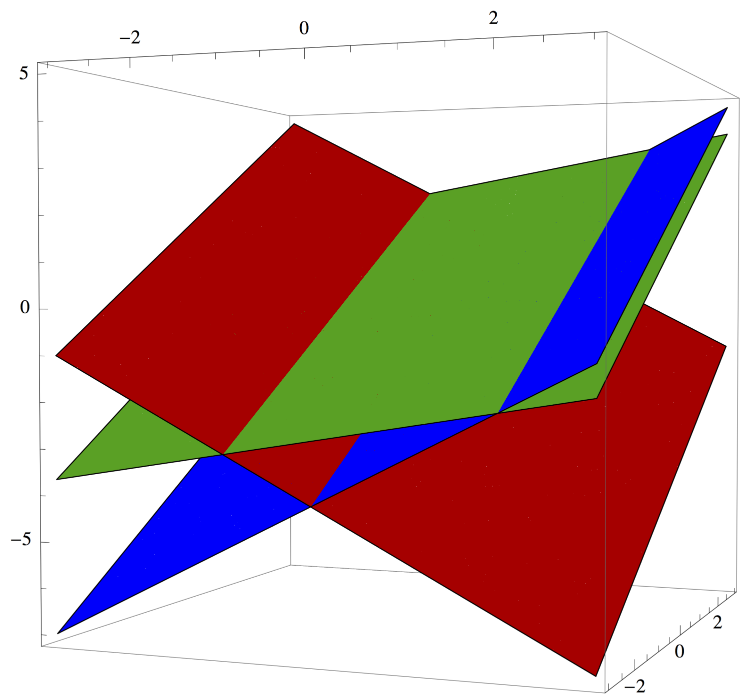


Abbildung 8.24: Drei Ebenen, kein gemeinsamer Punkt (parallele Schnittgeraden)

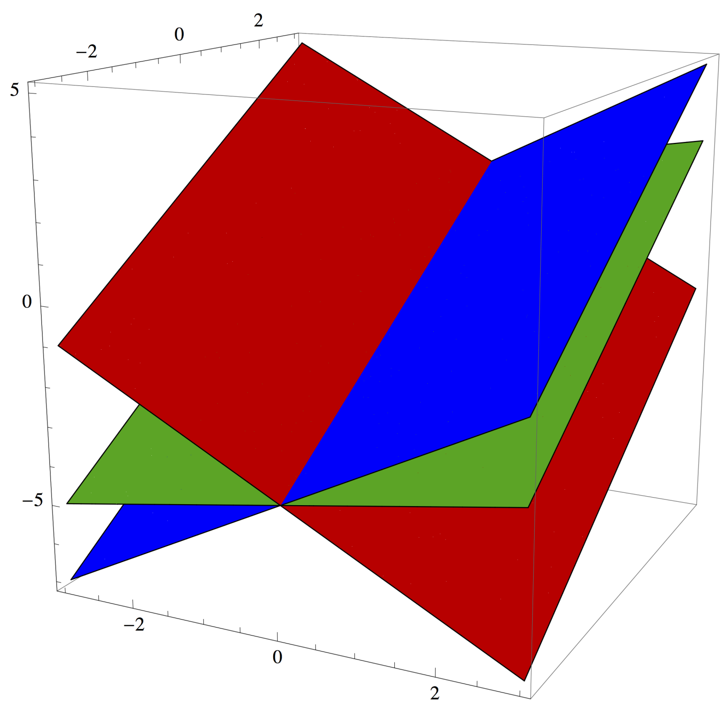


Abbildung 8.25: Drei Ebenen, gemeinsame Schnittgerade

8.4.16 Bemerkung
Lineares Gleichungssystem, Matrixschreibweise:

$$a_{1,1}\,x_1 + a_{1,2}\,x_2 + a_{1,3}\,x_3 = b_1$$
$$a_{2,1}\,x_1 + a_{2,2}\,x_2 + a_{2,3}\,x_3 = b_2$$
$$a_{3,1}\,x_1 + a_{3,2}\,x_2 + a_{3,3}\,x_3 = b_3$$

ist äquivalent zu

$$\begin{array}{l} \langle \vec{a}^1, \vec{x}\rangle = b_1 \\ \langle \vec{a}^2, \vec{x}\rangle = b_2 \\ \langle \vec{a}^3, \vec{x}\rangle = b_3 \end{array} \qquad \textit{mit } \vec{a}^k = \begin{pmatrix} a_{k,1} \\ a_{k,2} \\ a_{k,3} \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

8.4.17 Beispiel
Schreibe in Matrixform:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ -2\,x_1 & + & x_2 & + & 3\,x_3 & = & -\frac{1}{6} \\ 4\,x_1 & & & - & 9\,x_3 & = & \frac{1}{2} \end{array}$$

Lösung

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

8.4.18 Definition
Ein lineares Gleichungssystem *hat die Form:*

$$\begin{array}{l} a_{1,1}\,x_1 + a_{1,2}\,x_2 + \cdots + a_{1,n}\,x_n = b_1 \\ a_{2,1}\,x_1 + a_{2,2}\,x_2 + \cdots + a_{2,n}\,x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m,1}\,x_1 + a_{m,2}\,x_2 + \cdots + a_{m,n}\,x_n = b_m \end{array}$$

oder äquivalent

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

mit $A = \left(a_{k,l}\right)_{\substack{k=1,\ldots,m\\ l=1,\ldots,n}}, \quad \vec{x} = \left(x_l\right)_{l=1,\ldots,n}, \quad \vec{b} = \left(b_k\right)_{k=1,\ldots,m}$.

$a_{k,l} \in \mathbb{R}$: Koeffizienten, $x_l \in \mathbb{R}$: Variablen, $b_k \in \mathbb{R}$: Konstanten *des Systems.*

8.4.19 Definition
Es sei

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b} \tag{8.5}$$

ein lineares Gleichungssystem mit

$$A = \left(a_{i,k}\right)_{\substack{i=1,\ldots,m\\ k=1,\ldots,n}}, \quad \vec{x} = \left(x_k\right)_{k=1,\ldots,n}, \quad \vec{b} = \left(b_i\right)_{i=1,\ldots,m}.$$

a)

$$\mathbb{L} := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : A \cdot \vec{x} = \vec{b}\}$$

heißt Lösungsmenge *oder* allgemeine Lösung *von (8.5).*

b) Jeder Vektor $\vec{z} \in \mathbb{L}$ *heißt* partikuläre Lösung.

c) Ist $\vec{b} = 0$, *so heißt (8.5)* homogen, *sonst* inhomogen.

8.4.20 Satz
a) Ein homogenes lineares Gleichungssystem (8.5) hat stets die Lösung

$$\vec{x} = \vec{0} \in \mathbb{R}^n$$

(triviale Lösung *).*

b) Die allgemeine Lösung eines inhomogenen System ergibt sich aus einer partikulären Lösung $\vec{z}_0 \in \mathbb{R}^n$ *(d. h.* $A \cdot \vec{z}_0 = \vec{b}$*) und der allgemeinen Lösung des homogenen Gleichungssystems als*

$$\mathbb{L} = \{\vec{z} \in \mathbb{R}^n \ : \ \vec{z} = \vec{z}_0 + \vec{x}, \ A \cdot \vec{x} = \vec{0}\}.$$

Beweis

a) Sei $\vec{z}_0$ eine Lösung des inhomogenen Systems und $\vec{x}$ eine des homogenen, d. h.

$$A \cdot \vec{z}_0 = \vec{b}, \quad A \cdot \vec{x} = \vec{0}.$$

Für $\vec{z} := \vec{z}_0 + \vec{x}$ gilt dann

$$A \cdot \vec{z} = A \cdot (\vec{z}_0 + \vec{x}) = A\,\vec{z}_0 + A\,\vec{x} = \vec{b} + \vec{0} = \vec{b},$$

d. h. $\vec{z}$ ist ebenfalls Lösung des inhomogenen Gleichungssystems.

b) Ist andererseits $\vec{z}_1$ eine weitere Lösung des inhomogenen Gleichungssystems, dann gilt für $\vec{x} := \vec{z}_0 - \vec{z}_1$:

$$A \cdot \vec{x} = A \cdot (\vec{z}_0 - \vec{z}_1) = A\,\vec{z}_0 - A\,\vec{z}_1 = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0},$$

d. h.

$$\vec{z}_1 = \vec{z}_0 + \vec{x} \text{ mit } A\,\vec{x} = \vec{0}.$$

8.4.21 Bemerkung
Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulär, d. h. A^{-1} existiert, dann gilt:

$$\begin{array}{rrcl} & A\,\vec{x} & = & \vec{b} \\ \Longleftrightarrow & A^{-1}\,(A\,\vec{x}) & = & A^{-1}\,\vec{b} \\ \Longleftrightarrow & (A^{-1}\,A)\;\vec{x} & = & A^{-1}\,\vec{b} \\ \Longleftrightarrow & \vec{x} & = & A^{-1}\,\vec{b}\,, \end{array}$$

d.h. das lineare Gleichungssystem ist eindeutig lösbar und die Lösung ist

$$\vec{x} \;=\; A^{-1} \cdot \vec{b}.$$

8.4.22 Beispiel
Die eindeutig bestimmte Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist

$$\vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

(vgl. Beispiel 8.3.41).

8.4.23 Beispiel (Addition von Gleichungen)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \iff \begin{array}{rcr} x_1 + x_2 + x_3 & = & 1 \\ -2\,x_1 + x_2 + 3\,x_3 & = & -\frac{1}{6} \\ 4\,x_1 - 9\,x_3 & = & \frac{1}{2} \end{array}$$

Multipliziere von links mit $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Lösung

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & -13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{13}{6} \\ -\frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

d. h.

$$\begin{array}{rcr} x_1 + x_2 + x_3 & = & 1 \\ -2\,x_1 + x_2 + 3\,x_3 & = & -\frac{1}{6} \\ 4\,x_1 - 9\,x_3 & = & \frac{1}{2} \end{array} \iff \begin{array}{rcr} x_1 + x_2 + x_3 & = & 1 \\ 3\,x_2 - 4\,x_3 & = & -\frac{13}{6} \\ -\,4\,x_2 - 9\,x_3 & = & -\frac{7}{2} \end{array}$$

Die Einträge 2 und -4 in der ersten Spalte haben die Wirkung, dass das Doppelte der ersten Gleichung auf die zweite addiert wird. Ferner wird das Vierfache der ersten Zeile von der dritten subtrahiert. Die Gleichungen vereinfachen sich (enthalten die Variable x_1 nicht mehr).

8.4.24 Beispiel
Multipliziere

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & -13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{13}{6} \\ -\frac{7}{2} \end{pmatrix} \iff \begin{array}{rcr} x_1 + x_2 + x_3 & = & 1 \\ 3\,x_2 - 4\,x_3 & = & -\frac{13}{6} \\ -\,4\,x_2 - 9\,x_3 & = & -\frac{7}{2} \end{array}$$

von links mit $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Lösung

Die Multiplikation macht die Addition von Gleichungen in Beispiel 8.4.23 wieder rückgängig (Inverse Operation). Die Gleichungssysteme vor und nach der Umformung sind daher äquivalent.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \iff \begin{array}{rcr} x_1 + x_2 + x_3 & = & 1 \\ -2\,x_1 + x_2 + 3\,x_3 & = & -\frac{1}{6} \\ 4\,x_1 - 9\,x_3 & = & \frac{1}{2} \end{array}$$

8.4.25 Satz (Rechenregeln für lineare Gleichungssysteme)
Es sei

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

ein lineares Gleichungssystem.

Folgende Rechenoperationen ändern die Lösungsmenge nicht:

a) Addieren des Vielfachen einer Gleichung zu einer anderen.

b) Multiplikation einer Gleichung mit einem Faktor $\neq 0$.

c) Vertauschen von zwei Gleichungen.

Beweis
a) Vertauschen von Gleichungen: Multiplikation (von links) mit Permutationsmatrix (Einheitsmatrix mit zwei vertauschten Zeilen):

$$P = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & 1 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & 1 & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{Zeile } i \\ \\ \leftarrow \text{Zeile } k \\ \\ \\ \end{array}$$

Inverse Operation: Multiplikation mit $P^{-1} = P$.

b) Zeilenoperationen: Multiplikation (von links) mit

$$M := M_{c_2,\ldots,c_m} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ c_2 & \ddots & & & \\ c_3 & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ c_m & & & & 1 \end{pmatrix}$$

addiert das c_2-fache der ersten zur zweiten Gleichung,
das c_3-fache der ersten zur dritten Gleichung usw.

Inverse Operation: Multiplikation mit $M^{-1} = M_{-c_2,\ldots,-c_m}$.

8.5 Gaußsches Eliminationsverfahren

Explizite Lösung linearer Gleichungssysteme

a) beliebiger Größe (m Gleichungen, n Unbekannte)

b) und Art (eindeutig lösbar, unlösbar, unendlich viele Lösungen)

durch systematische Zeilenoperationen.

Grundlegender Algorithmus für die meisten Aufgabenstellungen der linearen Algebra:

- Lösung linearer Gleichungssysteme
- Matrixgleichungen, Matrixinverse
- Matrixrang
- lineare Abhängigkeit, Basis

  ...

8.5.1 Lösung linearer Gleichungssysteme

Grundidee:

a) Gleichungssystem in *Dreiecks-* (oder allgemeiner *gestaffelte*) Form bringen:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a_{1,1}\,x_1 & + & a_{1,2}\,x_2 & + & \cdots & + & a_{1,n}\,x_n & = & b_1 & (1) \\
 & & a_{2,2}\,x_2 & + & \cdots & + & a_{2,n}\,x_n & = & b_2 & (2) \\
 & & & & \ddots & & \vdots & & & \\
 & & & & & & a_{n,n}\,x_n & = & b_n & (n)
\end{array}$$

b) Lösung durch Rückwärtseinsetzen:

$$\begin{array}{rl}
(n): & x_n = \dfrac{b_n}{a_{n,n}} \\[2ex]
(n-1): & a_{n-1,n-1}\,x_{n-1} = b_{n-1} - a_{n-1,n}\,x_n \\
 & \vdots \\
(1): & x_1 = \ldots
\end{array}$$

8.5.1 Bezeichnung
Schreibweise für Rechenoperationen in Gleichungssystemen (siehe Satz 8.4.25):

a) *Addiere gleichung1 zu gleichung2*
(gleichung1 wird nicht verändert, gleichung2 wird ersetzt):

$$\begin{array}{ll} \textit{gleichung1} & \\ \textit{gleichung2} & + \end{array}$$

b) *Addiere das a-fache von gleichung1 zu gleichung2*
(gleichung1 wird nicht verändert, gleichung2 wird ersetzt):

$$\begin{array}{ll} \textit{gleichung1} & \cdot a \\ \textit{gleichung2} & + \end{array}$$

c) *Multipliziere gleichung1 mit a:*

$$\textit{gleichung1} \mid \cdot a$$

d) *Vertausche gleichung1 mit gleichung2:*

$$\begin{array}{l} \textit{gleichung1} \\ \textit{gleichung2} \end{array}$$

8.5.2 Beispiel

$$\begin{array}{rrrcrll} x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 1 & \cdot 2 & \cdot(-4) \\ -2\,x_1 & +x_2 & +3\,x_3 & = & -\frac{1}{6} & + & \\ 4\,x_1 & & -9\,x_3 & = & \frac{1}{2} & & + \end{array}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{array}{rrrcrl} x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 1 & \\ & 3\,x_2 & +5\,x_3 & = & \frac{11}{6} & \cdot\frac{4}{3} \\ & -4\,x_2 & -13\,x_3 & = & -\frac{7}{2} & + \end{array}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{array}{rrrcrl} x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 1 & (i) \\ & 3\,x_2 & +5\,x_3 & = & \frac{11}{6} & (ii) \\ & & -\frac{19}{3}\,x_3 & = & -\frac{19}{18} & (iii) \end{array}$$

$$\Longleftrightarrow \; (iii): \; x_3 = \frac{1}{6}, \quad (ii): \; 3\,x_2 = \frac{11}{6} - \frac{5}{6} = 1, \quad (i): \; x_1 = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

8.5.3 Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Rechenschema:

$$\begin{array}{ccc|cll} 1 & 1 & 1 & 2 & \cdot(-2) & \cdot(-3) \\ 2 & 3 & 1 & -1 & + & \\ 3 & 1 & 4 & 13 & & + \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{ccc|cl} 1 & 1 & 1 & 2 & \\ 0 & 1 & -1 & -5 & \cdot 2 \\ 0 & -2 & 1 & 7 & + \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{l} x_3 = 3 \\ x_2 = -5 + x_3 = -2 \\ x_1 = 2 - x_2 - x_3 = 1. \end{array}$$

Rücksubstitution innerhalb des Rechenschemas:

$$\begin{array}{ccc|cl} 1 & 1 & 1 & 2 & \\ 0 & 1 & -1 & -5 & \\ 0 & 0 & -1 & -3 & \mid \cdot (-1) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|cll} 1 & 1 & 1 & 2 & & + \\ 0 & 1 & -1 & -5 & + & \\ 0 & 0 & 1 & 3 & & \cdot(-1) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|cl} 1 & 1 & 0 & -1 & + \\ 0 & 1 & 0 & -2 & \cdot(-1) \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 3. \end{array}$$

Ergebnis:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 13 \end{pmatrix}$$

hat die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \{(1, -2, 3)\}$$

oder in Vektorschreibweise:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

8.5.4 Beispiel
Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Rechenschema:

$$\begin{array}{ccc|cl} 3 & 1 & 2 & 2 & | \cdot \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & 1 & 1 & \\ 3 & -2 & 5 & -1 & \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{ccc|cl} 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \cdot(-2) \quad \cdot(-3) \\ 2 & 1 & 1 & 1 & \leftarrow + \\ 3 & -2 & 5 & -1 & \leftarrow \quad + \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{ccc|cl} 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & | \cdot (3) \\ 0 & -3 & 3 & -3 & \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{ccc|cl} 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \\ 0 & 1 & -1 & -1 & \cdot 3 \\ 0 & -3 & 3 & -3 & \leftarrow + \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}$$

Letzte Gleichung:

$$0\,x_1 + 0\,x_2 + 0\,x_3 = -6$$

nicht lösbar, d. h.

$$\mathbb{L} = \{\} .$$

8.5.5 Bemerkung

a) Tritt in der Durchführung des Gaußschen Eliminationsverfahrens eine Zeile

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & \ldots & 0 & b \end{array}$$

d. h. eine Gleichung

$$0\,x_1 + \cdots + 0\,x_n = b$$

mit $b \neq 0$ auf, so ist das Gleichungssystem unlösbar.

b) Tritt eine Zeile

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & \ldots & 0 & 0 \end{array}$$

d. h. eine Gleichung

$$0\,x_1 + \cdots + 0\,x_n = 0$$

auf, so wird sie weggelassen.

8.5.6 Beispiel
Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & z & = & 1 \\ 4x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & + & & & z & = & -1 \end{array} \iff \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Rechenschema

$$\begin{array}{ccc|cl} 2 & 1 & 1 & 1 & \cdot(-2)\quad \cdot(-1) \\ 4 & 1 & 2 & 0 & \leftarrow + \\ 2 & 0 & 1 & -1 & \leftarrow + \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{ccc|cl} 2 & 1 & 1 & 1 & \\ 0 & -1 & 0 & -2 & \cdot(-1) \\ 0 & -1 & 0 & -2 & \leftarrow + \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{ccc|cl} 2 & 1 & 1 & 1 & \mid \cdot\,(\frac{1}{2}) \\ 0 & -1 & 0 & -2 & \mid \cdot\,(-1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}$$

Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccl} x & + & \frac{1}{2}y & + & \frac{1}{2}z = \frac{1}{2} \\ & & y & & = 2 \end{array}$$

ist lösbar für beliebige Werte des (freien) Parameters z:

$$z \in \mathbb{R} \text{ (bel.)}, \quad y = 2, \quad x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}z.$$

Rücksubstitution mit Rechenschema:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & t \end{array} \quad {}^{+}\ \cdot(-\tfrac{1}{2}) \quad {}^{+}\ \cdot(-\tfrac{1}{2})$$

$$\longrightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}t \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & t \end{array}$$

Lösungsmenge des Gleichungssystems:

$$\mathbb{L} = \{(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t, 2, t) :\ t \in \mathbb{R}\}$$

Vektorschreibweise:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lösungsmenge: Gerade im $\mathbb{R}^3$.

8.5.2 Gaußalgorithmus

- Gestaffelte Form (spaltenweise Reduktion des Gleichungssystems, Addition von Vielfachen von Gleichungen auf weiter unten stehende):

$$\begin{array}{cccccccccccc|c}
\bullet & \star & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \star & d_1 \\
0 & \bullet & \star & \star & \star & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \star & d_2 \\
0 & \dots & \dots & 0 & \bullet & \star & \dots & \dots & \dots & \dots & \star & d_3 \\
0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \bullet & \star & \dots & \dots & \dots & \star & d_4 \\
\vdots & & & & & \ddots & \ddots & & & & \vdots & \vdots \\
\vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \bullet & \star & \dots & \star & d_r \\
0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & d_{r+1} \\
\vdots & & & & & & & \vdots & & & \vdots & \vdots \\
0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & d_m
\end{array}$$

  $\bullet$: Wert $\neq 0$, $\quad \star : bel.Wert.$

- *Keine* Lösung, falls $(d_{r+1}, d_{r+2}, \dots, d_m) \neq (0, \dots, 0)$.
- Anderenfalls: Für jede Spalte ohne "$\bullet$" eine Gleichung mit freiem Parameter einführen:

$$0 \quad \dots \quad 0 \;\; 1 \;\; 0 \quad \dots \quad 0 \quad | \quad t_k$$

- Das Gleichungssystem hat nun Dreiecksform
  (Koeffizienten $\neq 0$ auf der Diagonale).
  Ist eindeutig lösbar,
  Lösung enthält die freien Parameter t_k.

- Zeilenvertauschungen können notwendig sein.

8.5.7 Beispiel

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
x_1 & - & 3x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & = & -1 \\
-2x_1 & + & 6x_2 & - & 10x_3 & + & 4x_4 & = & 2 \\
3x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & - & 10x_4 & = & -19 \\
x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & = & -5
\end{array}$$

Rechenschema

$$\left.\begin{array}{rrrr|r}
1 & -3 & 5 & -2 & -1 \\
-2 & 6 & -10 & 4 & 2 \\
3 & -1 & 3 & -10 & -19 \\
1 & -1 & 2 & -3 & -5
\end{array}\right.$$

$$\longrightarrow \begin{array}{rrrr|r}
1 & -3 & 5 & -2 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 8 & -12 & -4 & -16 \\
0 & 2 & -3 & -1 & -4
\end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{rrrr|r}
1 & -3 & 5 & -2 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 8 & -12 & -4 & -16 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{rrrr|r}
1 & -3 & 5 & -2 & -1 \\
0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -2
\end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{rrrr|c}
1 & -3 & 5 & -2 & -1 \\
0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -2 \\
0 & 0 & 1 & 0 & s \\
0 & 0 & 0 & 1 & t
\end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{rrrr|c}
1 & -3 & 5 & 0 & -1+2t \\
0 & 1 & -\frac{3}{2} & 0 & -2+\frac{t}{2} \\
0 & 0 & 1 & 0 & s \\
0 & 0 & 0 & 1 & t
\end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{cccc|cl} 1 & -3 & 0 & 0 & -1+2t-5s & \leftarrow + \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2+\frac{t}{2}+\frac{3}{2}s & \cdot 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & s & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t & \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -7+\frac{7}{2}t-\frac{s}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2+\frac{t}{2}+\frac{3}{2}s \\ 0 & 0 & 1 & 0 & s \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t \end{array}$$

Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$\mathbb{L} = \{(-\frac{1}{2}s+\frac{7}{2}t-7,\ \frac{3}{2}s+\frac{1}{2}t-2,\ s,\ t) :\ s,t \in \mathbb{R}\}$$

Vektorschreibweise

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1/2 \\ 3/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 7/2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s,t \in \mathbb{R}.$$

Lösung hängt von zwei frei wählbaren Parametern s und t ab.

8.5.8 Beispiel

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & + & 6x_3 & + & 2x_4 & - & 5x_5 & = & -1 \\ & & & & & & x_4 & - & 3x_5 & = & 2 \\ & & x_2 & - & 4x_3 & + & x_4 & & & = & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc|cl} 2 & -3 & 6 & 2 & -5 & -1 & \mid \cdot \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & \leftarrow \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & \leftarrow \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{ccccc|c} 1 & -\frac{3}{2} & 3 & 1 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{ccccc|cll} 1 & -\frac{3}{2} & 3 & 1 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & \leftarrow & + \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & s & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & \leftarrow + & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & t & \cdot 3 & \cdot \frac{5}{2} \end{array}$$

$$\longrightarrow \left.\begin{array}{ccccc|c} 1 & -\frac{3}{2} & 3 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}+\frac{5}{2}t \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & s \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2+3t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right.$$

$$\longrightarrow \left.\begin{array}{ccccc|c} 1 & -\frac{3}{2} & 3 & 0 & 0 & -\frac{5}{2}-\frac{1}{2}t \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & -1-3t \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & s \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2+3t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right.$$

$$\longrightarrow \left.\begin{array}{ccccc|c} 1 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{2}-\frac{1}{2}t-3s \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1-3t+4s \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & s \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2+3t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right.$$

$$\longrightarrow \left.\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4-5t+3s \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1-3t+4s \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & s \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2+3t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right.$$

Lösung:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

8.5.9 Beispiel

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & -9 \\ -2x_1 & + & 4x_2 & - & 4x_3 & & & = & 12 \\ 3x_1 & - & 5x_2 & + & 12x_3 & + & 7x_4 & = & -35 \\ & & 2x_2 & + & 10x_3 & + & 12x_4 & = & -28 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 & -9 \\ -2 & 4 & -4 & 0 & 12 \\ 3 & -5 & 12 & 7 & -35 \\ 0 & 2 & 10 & 12 & -28 \end{array} \quad \cdot 2 \quad \cdot(-3) \quad + \quad +$$

$$\longrightarrow \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & -8 \\ 0 & 2 & 10 & 12 & -28 \end{array} \quad \cdot(-2) \quad +$$

$$\longrightarrow \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 & -9 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & -12 \end{array} \quad \cdot(-2) \;\Big|\; \cdot \tfrac{1}{2} \quad +$$

$$\longrightarrow \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 & -9 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t \end{array} \quad + \quad + \quad + \quad \cdot(-1) \quad \cdot(-4) \quad \cdot(-1)$$

$$\longrightarrow \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 & -9-t \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -8-4t \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3-t \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t \end{array} \quad + \quad + \quad \cdot(-3) \quad \cdot(-3)$$

$$\longrightarrow \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 2t \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1-t \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3-t \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t \end{array} \quad + \quad \cdot 2$$

$$\longrightarrow \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1-t \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3-t \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t \end{array}$$

Lösungsmenge des Gleichungssystems:

$$\mathbb{L} = \{(2,\ 1-t,\ -3-t,\ t) :\ t \in \mathbb{R}\}$$

Vektorschreibweise: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

8.5.3 Lösen von Matrixgleichungen

8.5.10 Wiederholung

- Lineare Gleichung: *Seien* $\vec{a}, \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ *:*

$$\langle \vec{a}, \vec{x} \rangle = b \iff (a_1, \ldots, a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b$$

  ist eine lineare Gleichung.

- Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \ldots & a_{2,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

  (2 Gleichungen, n Unbekannte).

8.5.11 Bemerkung

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \ldots & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} \\ \vdots & \vdots \\ x_{n,1} & x_{n,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ \vdots & \vdots \\ b_{m,1} & b_{m,2} \end{pmatrix}$$

ist äquivalent zu 2 linearen Gleichungssystemen mit gleicher Koeffizientenmatrix $A = \left(a_{k,l} \right)$*:*

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \ldots & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,i} \\ \vdots \\ x_{n,i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{1,i} \\ \vdots \\ b_{m,i} \end{pmatrix} \qquad i = 1, 2.$$

8.5.12 Satz

Eine Matrixgleichung *der Form*

$$A \cdot X = B$$

mit $A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ X \in \mathbb{R}^{n\times l},\ B \in \mathbb{R}^{m\times l}$ ist äquivalent zu l linearen Gleichungssystemen (je m Gleichungen, n Unbekannte)

$$A \cdot \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \dots & \vec{x}_p \\ | & | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \dots & \vec{b}_p \\ | & | & & | \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} A\cdot\vec{x}_1 & = & \vec{b}_1 \\ A\cdot\vec{x}_2 & = & \vec{b}_2 \\ & \vdots & \\ A\cdot\vec{x}_p & = & \vec{b}_p \end{array} \right.$$

Lösung durch Gaußalgorithmus mit mehrfacher rechter Seite.

8.5.13 Beispiel
Gegeben seien die beiden Gleichungssysteme

$$\begin{array}{rcrcl} x_{11} & + & x_{21} & + & x_{31} = 3 \\ x_{11} & + & 2x_{21} & & = 3 \\ & & 3x_{21} & + & x_{31} = 4 \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rcrcl} x_{12} & + & x_{22} & + & x_{32} = 6 \\ x_{12} & + & 2x_{22} & & = 5 \\ & & 3x_{22} & + & x_{32} = 9 \end{array}$$

Äquivalent: Matrixgleichung

$$A \cdot X = B$$

$$\text{mit } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 5 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 5 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$$

Lösung

$$\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 9 \end{array} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}$$

Lösung des ersten Gleichungssystems: $\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

Lösung des zweiten Gleichungssystems: $\begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

8.5.4 Berechnung inverser Matrizen

8.5.14 Vorbemerkung

Sei $A \in \mathbb{R}^n$. Gesucht ist eine Matrix $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$, so daß $A \cdot X = E_n$ gilt, d. h.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix} = E_n$$

Seien $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ die Spaltenvektoren der Matrix X. Es sind also die n linearen Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} A \cdot \vec{x}_1 &= \vec{e}_1 \\ A \cdot \vec{x}_2 &= \vec{e}_2 \\ &\vdots \\ A \cdot \vec{x}_n &= \vec{e}_n \end{aligned}$$

zu lösen.

Die Lösungsvektoren $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ ergeben im Falle der Lösbarkeit die Einträge der inversen Matrix, sonst ist A nicht invertierbar.

8.5.15 Beispiel

Für $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -8 & 4 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *ist die Inverse A^{-1} gesucht.*

Gauß-Algorithmus für $A \cdot X = E_4$:

$$\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -7 & 0 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 4 & -7 & 0 & 8 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 2 & -3 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1
\end{array}
\begin{array}{l}
\\
\cdot(-4) \quad \cdot(-2) \\
+ \\
\quad\quad +
\end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1
\end{array}
\begin{array}{l}
\\
\quad\quad + \\
\cdot(-1) \quad \cdot 2 \\
+
\end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -4 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & -7 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1
\end{array}$$

Ergebnis

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -8 & 4 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ist invertierbar,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 & 0 \\ 2 & 2 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

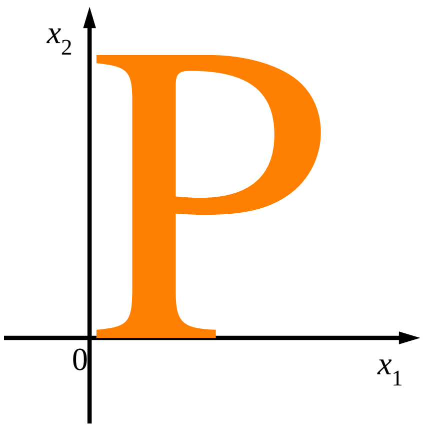
8.6 Anwendungsbeispiele Matrizen, Lineare Gleichungssysteme

8.6.1 Definition
Eine Funktion $f : M \to N$ zwischen Mengen, die keine Zahlen sind, wird auch Abbildung *oder* Transformation *genannt*
(z. B. wenn M, N Mengen von Funktionen oder Vektoren sind).

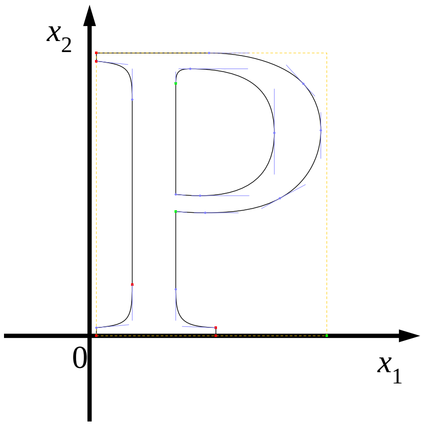
Im Folgenden: Abbildungen zwischen Vektormengen

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

(oder allgemeiner $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$).
8.6.2 Beispiel
Computersatzsystem
Zeichen in Objektkoordinatensystem:



Vollständig festgelegt durch endlich viele Konstruktionspunkte (Objektkoordinaten):

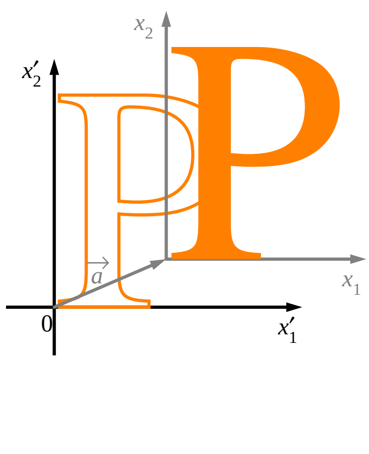


Endpunkte von geraden Linien,
Punkte und Tangenten für kubische Parameterkurven

$$\begin{pmatrix} P(t) \\ Q(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0,1]$$

Typische Operationen mit Zeichen in einem Textsatzsystem:

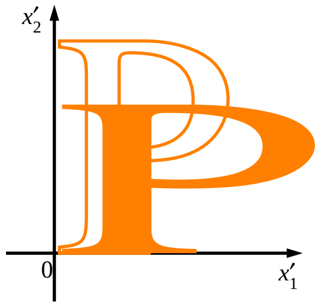
a) Verschiebung des Objekts:



$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{x}' = \vec{x} + \vec{a}$$

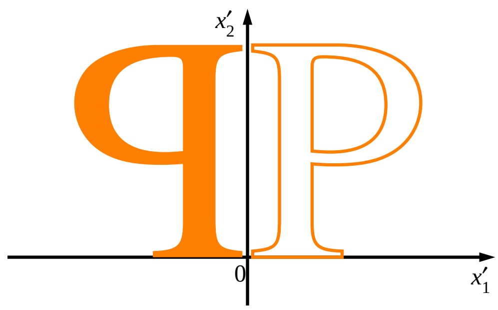
$\vec{x}'$: Weltkoordinaten
$\vec{x}$: Objektkoordinaten
$\vec{a}$: Verschiebungsvektor

b) Skalierung des Objekts:



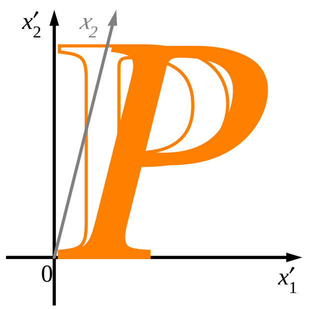
$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1\, x_1 \\ s_2\, x_2 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{x}' = \begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{pmatrix} \vec{x}$$

c) Spiegelung:



$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}$$

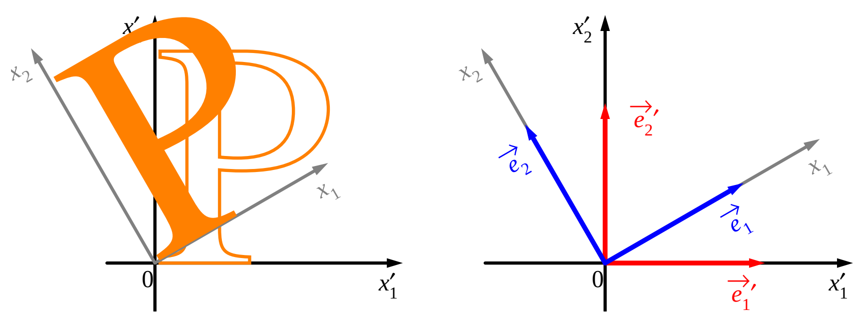
d) Scherung:



$$\begin{aligned}\vec{e}_1 &= \vec{e}_1^{\,\prime} \\ \vec{e}_2 &= h\,\vec{e}_1^{\,\prime} + \vec{e}_2^{\,\prime} \qquad (\text{z. B. } h = \tfrac{1}{6})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 &= \vec{e}_1^{\,\prime} \\ \vec{e}_2 &= h\,\vec{e}_1^{\,\prime} + \vec{e}_2^{\,\prime} \\ \\ \vec{x} &= x_1'\vec{e}_1^{\,\prime} + x_2'\vec{e}_2^{\,\prime} \\ &= x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 \\ &= x_1\vec{e}_1^{\,\prime} + x_2(h\,\vec{e}_1^{\,\prime} + \vec{e}_2^{\,\prime}) \\ &= \underbrace{(x_1 + h\,x_2)}_{x_1'}\,\vec{e}_1^{\,\prime} + \underbrace{x_2}_{x_2'}\,\vec{e}_2^{\,\prime} \\ \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

e) Drehung:



$$\begin{aligned}\vec{e}_1 &= \cos\alpha\,\vec{e}_1^{\,\prime} + \sin\alpha\,\vec{e}_2^{\,\prime} \\ \vec{e}_2 &= -\sin\alpha\,\vec{e}_1^{\,\prime} + \cos\alpha\,\vec{e}_2^{\,\prime}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 &= \cos\alpha\,\vec{e}_1' + \sin\alpha\,\vec{e}_2' \\ \vec{e}_2 &= -\sin\alpha\,\vec{e}_1' + \cos\alpha\,\vec{e}_2'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{x} &= x_1'\vec{e}_1' + x_2'\vec{e}_2' \\ &= x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 \\ &= x_1(\cos\alpha\,\vec{e}_1' + \sin\alpha\,\vec{e}_2') + x_2(-\sin\alpha\,\vec{e}_1' + \cos\alpha\,\vec{e}_2') \\ &= \underbrace{(x_1\cos\alpha - x_2\sin\alpha)}_{x_1'}\vec{e}_1' + \underbrace{(x_1\sin\alpha + x_2\cos\alpha)}_{x_2'}\vec{e}_2' \\ \iff \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Zusammenfassung:
Alle Transformationen sind von der Art

$$\vec{x}' = M\vec{x} + \vec{a}\,:$$

Verschiebung:	$\vec{x}' = \vec{x} + \vec{a}$
Skalierung:	$\vec{x}' = \left(\begin{smallmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{smallmatrix}\right)\vec{x}$
Spiegelung an der y-Achse:	$\vec{x}' = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\vec{x}$
Scherung:	$\vec{x}' = \left(\begin{smallmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\vec{x}$
Drehung um 0:	$\vec{x}' = \left(\begin{smallmatrix} c & -s \\ s & c \end{smallmatrix}\right)\vec{x}$

8.6.3 Bemerkung
Transformationen der Form

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} \\ m_{2,1} & m_{2,2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

lassen sich mit homogenen Koordinaten *als reine Matrixmultiplikation schreiben:*

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & a_1 \\ m_{2,1} & m_{2,2} & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

8.6.4 Bemerkung
Eine Transformation, die durch eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ dargestellt wird, wird durch die inverse Matrix M^{-1} wieder rückgängig gemacht, z. B.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8.6.5 Bemerkung
Hintereinanderausführen von Transformationen entspricht Matrixmultiplikationen, z. B. Spiegelung an der ersten Winkelhalbierenden:

a) *Drehung um $\frac{\pi}{4}$ (Winkelhalbierende $\to$ x_2-Achse)*

b) *Spiegelung an x_2-Achse*

c) *Drehung um $-\frac{\pi}{4}$*

$$M \quad = \quad D(-\frac{\pi}{4}) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} D(\frac{\pi}{4})$$

mit $D(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

8.6.6 Beispiel
RBG- (Computerbildschirm) und YUV-Farbmodell (PAL-, NTSC-Farbfernsehen)

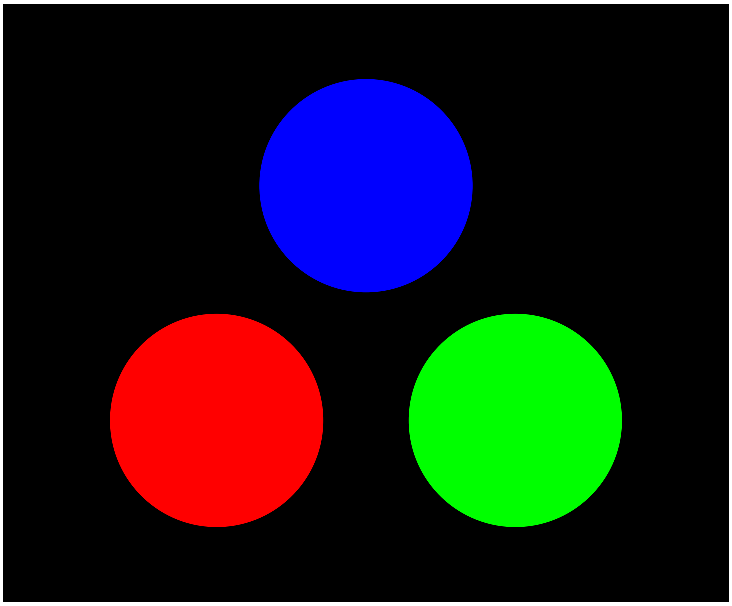


Abbildung 8.26: unterschiedliche wahrgenommene Helligkeiten von Rot, Grün, Blau

Definierende Gleichungen:

$$y := 0{,}299 \cdot r + 0{,}587 \cdot g + 0{,}114 \cdot b \tag{8.6}$$

$$u := 0{,}493 \cdot (b - y) \tag{8.7}$$

$$v := 0{,}877 \cdot (r - y) \tag{8.8}$$

y: Luminanz (Helligkeit, siehe Abbildung 8.28),
u, v: Chroma (Farbe, siehe Abbildung 8.27).

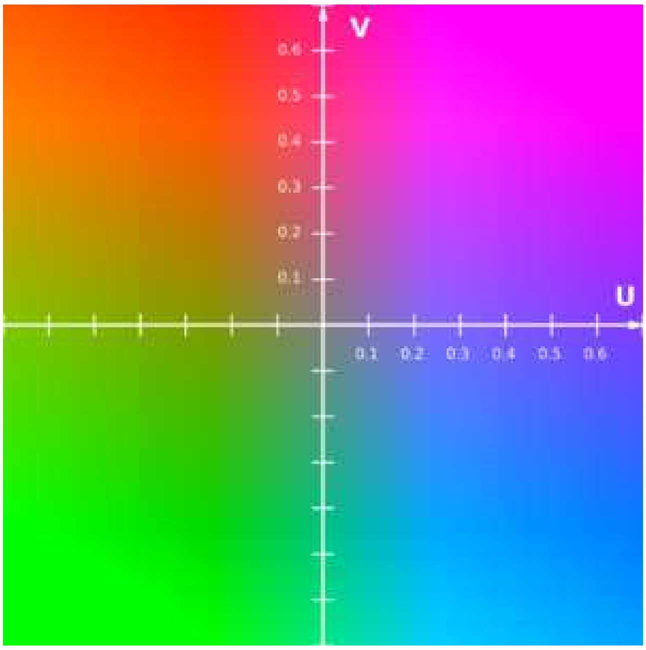


Abbildung 8.27: YUV-Farbmodell, Parameter $(u, v) \in [-1, 1]^2$

Gesucht: Matrixform

$$\begin{pmatrix} y \\ u \\ v \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} r \\ g \\ b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} r \\ g \\ b \end{pmatrix} = \mathbf{B} \begin{pmatrix} y \\ u \\ v \end{pmatrix}$$

Es ist

a) Gleichung (8.6) in Matrixform

$$\begin{pmatrix} y \\ r \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.299 & 0.587 & 0.114 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ g \\ b \end{pmatrix} = \mathbf{A}_1 \begin{pmatrix} r \\ g \\ b \end{pmatrix} \tag{8.9}$$

b) Gleichungen (8.7), (8.8) in Matrixform

$$\begin{pmatrix} y \\ b - y \\ r - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ r \\ b \end{pmatrix} = \mathbf{A}_2 \begin{pmatrix} y \\ r \\ b \end{pmatrix} \tag{8.10}$$

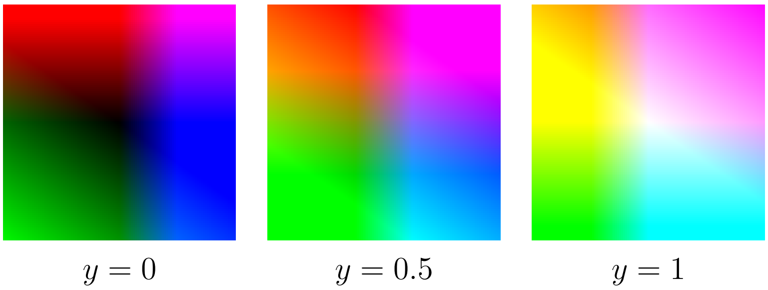


Abbildung 8.28: YUV-Farbmodell, Wirkung des Parameters $0 \leq y \leq 1$

c)
$$\begin{pmatrix} y \\ u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.493 & 0 \\ 0 & 0 & 0.877 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ b-y \\ r-y \end{pmatrix} = \mathbf{A}_3 \begin{pmatrix} y \\ b-y \\ r-y \end{pmatrix} \tag{8.11}$$

Gleichungen (8.9), (8.10), (8.11) ineinander eingesetzt:

$$\begin{pmatrix} y \\ u \\ v \end{pmatrix} = \mathbf{A}_3 \begin{pmatrix} y \\ b-y \\ r-y \end{pmatrix} = \mathbf{A}_3\mathbf{A}_2 \begin{pmatrix} y \\ r \\ b \end{pmatrix} = \mathbf{A}_3\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1 \begin{pmatrix} r \\ g \\ b \end{pmatrix}$$

d. h. die Transformationsmatrix ist

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_3\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.493 & 0 \\ 0 & 0 & 0.877 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.299 & 0.587 & 0.114 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ergebnis:

a) Mit

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_3\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0.299 & 0.587 & 0.114 \\ -0.147 & -0.289 & 0.437 \\ 0.615 & -0.515 & -0.100 \end{pmatrix}$$

gilt

$$\begin{pmatrix} y \\ u \\ v \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} r \\ g \\ b \end{pmatrix}$$

b) Die inverse Transformation ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} r \\ g \\ b \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} y \\ u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1.140 \\ 1 & -0.394 & -0.581 \\ 1 & 2.028 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ u \\ v \end{pmatrix}.$$

8.6.7 Beispiel (PageRank-Algorithmus)

Bewertung und Sortierung von Suchergebnissen im WWW.
Mathematisch: Lineares Gleichungssystem und dessen Lösung.
Autor: L. Page, S. Brin (ca. 1995), US. Pat. 6,799,176 B1 (2004)

Abbildung 8.29: Larry Page, Sergey Brin, Gründer von Google

$$\mathcal{W} = \{s_i : i = 1, \ldots, N\} \qquad \textit{Menge der Html-Seiten im Internet}$$

$$\mathcal{L} \subset \mathcal{W} \times \mathcal{W} \qquad \textit{Link-Relation:}$$

$(s_i, s_k) \in \mathcal{L} \iff$ *von Seite* s_k *gibt es einen Link auf Seite* s_i*.*

Eine Seite s_i *wird umso höher bewertet, je mehr Links auf sie verweisen (direkt oder indirekt).*

Zufallssurfer: Wenn er sich auf einer Seite s_k befindet:

a) klickt er mit Wahrscheinlichkeit d einen Link auf der Seite (gleichverteilt)

b) andernfalls (Wahrscheinlichkeit $1 - d$) gibt er die Adresse einer ganz anderen Seite ein (alle N Möglichkeiten gleich häufig).

Trefferhäufigkeit für die Zielseite s_i:

$$p_i = \sum_{(s_i, s_k) \in \mathcal{L}} \frac{d\, p_k}{n_k} + \frac{1-d}{N}$$

(n_k: Anzahl der Seiten auf die s_k unmittelbarverweist.)
In Matrixform:

$$\begin{aligned} \vec{p} = A\vec{p} + \vec{b} \quad &\iff \quad E_N\vec{p} = A\vec{p} + \vec{b} \\ &\iff \quad (E_N - A)\vec{p} = \vec{b} \end{aligned}$$

PageRank-Algorithmus für den Dämpfungsfaktor d:

Das Gewicht der Internetseite s_k ist p_k, wobei

$$(E_N - A)\vec{p} = \vec{b}$$

mit

$$A = (a_{i,k}), \quad a_{i,k} = \begin{cases} d/n_k & \text{falls } (s_i, s_k) \in \mathcal{L} \\ 0 & \text{falls } (s_i, s_k) \notin \mathcal{L} \end{cases}$$

$$E_N : \quad \text{Einheitsmatrix,}$$

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_N \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \frac{1-d}{N} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

8.6.8 Beispiel

Bewertung des minimalen Netzes aus drei verlinkte Seiten (s. Skizze 8.30)

Setze z. B. $d = 0.28$ *(Wahrscheinlichkeit für Weitersurfen auf der Seite):*

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{d}{2} & d \\ d & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{2} & 0 \end{pmatrix}, \\
E_3 - A &= \begin{pmatrix} 1 & -0.14 & -0.28 \\ -0.28 & 1 & 0 \\ 0 & -0.14 & 1 \end{pmatrix}, \\
\vec{b} &= \begin{pmatrix} 0.24 \\ 0.24 \\ 0.24 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -0.14 & -0.28 \\ -0.28 & 1 & 0 \\ 0 & -0.14 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.24 \\ 0.24 \\ 0.24 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \quad p_1 \approx 0.397, \quad p_2 \approx 0.385, \quad p_3 \approx 0.218\ .$$

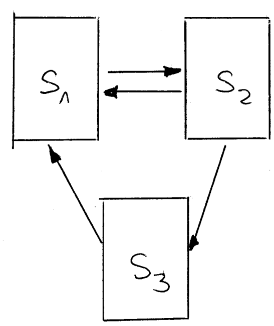


Abbildung 8.30: Html-Seiten

Kapitel 9

Lineare Algebra, zweiter Teil

9.1 Vektorraum

9.1.1 Definition
Es sei V eine Menge (von Vektoren) und

$$+ : V \times V \to V$$

eine Abbildung (Vektoraddition).

$\mathbb{K}$ *sei entweder die Menge der reellen oder die Menge der komplexen Zahlen, d. h.*

$$\mathbb{K} = \mathbb{R} \quad \textit{oder} \quad \mathbb{K} = \mathbb{C}.$$

Ferner sei

$$\cdot \quad : \mathbb{K} \times V \to V$$

eine Abbildung (Multiplikation von Vektoren mit Skalaren).

Dann heißt

$$(V, \mathbb{K}, +, \cdot) \ \textit{ein } \mathbb{K}\textit{-Vektorraum}$$

(oder kurz Vektorraum), wenn folgende Axiome (Rechenregeln) erfüllt sind:

a) Für die Vektoraddition:

- *(i)* $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \quad (\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V)$
- *(ii)* $\vec{v}_1 + (\vec{v}_2 + \vec{v}_3) = (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + \vec{v}_3 \quad (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in V)$
- *(iii) Es gibt einen Vektor* $\vec{0} \in V$*, so dass* $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v} \quad (\vec{v} \in V)$
- *(iv) Zu jedem Vektor* $\vec{v} \in V$ *gibt es einen Vektor* $-\vec{v} \in V$*, so dass* $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$

b) für die Multiplikation mit Skalaren:

- *(i)* $a \cdot (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = a \cdot \vec{v}_1 + a \cdot \vec{v}_2 \quad (a \in \mathbb{K},\ \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V)$
- *(ii)* $(a_1 + a_2) \cdot \vec{v} = a_1 \cdot \vec{v} + a_2 \cdot \vec{v} \quad (a_1, a_2 \in \mathbb{K},\ \vec{v} \in V)$
- *(iii)* $(a_1 \cdot a_2) \cdot \vec{v} = a_1 \cdot (a_2 \cdot \vec{v}) \quad (a_1, a_2 \in \mathbb{K},\ \vec{v} \in V)$
- *(iv)* $1 \cdot \vec{v} = \vec{v} \quad (\vec{v} \in V)$.

9.1.2 Bezeichnung

a) Ein $\mathbb{R}$*-Vektorraum heißt auch* reeller Vektorraum, *und ein* $\mathbb{C}$*-Vektorraum* komplexer Vektorraum.

b) Wir sprechen auch abkürzend vom Vektorraum V *statt vom Vektorraum* $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$. *- Den Multiplikationspunkt lassen wir in Formeln häufig weg.*

9.1.3 Satz

Es sei $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ *ein* $\mathbb{K}$*-Vektorraum. Dann gilt:*

a) $a \cdot \vec{0} = \vec{0} \quad (a \in K)$

b) $0 \cdot \vec{v} = \vec{0} \quad (\vec{v} \in V)$

c) $a \in \mathbb{K}, \ \ \vec{v} \in V, \ \ a \cdot \vec{v} = \vec{0} \implies a = 0$ *oder* $\vec{v} = \vec{0}$

d) Für jedes Skalar $a \in \mathbb{K}$ *und jeden Vektor* $\vec{v} \in V$ *gilt* $(-a)\vec{v} = a(-\vec{v}) = -(a\vec{v})$

e) $a \in \mathbb{K}, \ \ \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V : a(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = a\vec{v}_1 - a\vec{v}_2.$

Beweis

Beispielhaft für a) und c):

Zu a) Es gilt:

$$\vec{0} = \vec{0} + \vec{0},$$

daher ist für beliebiges $a \in \mathbb{K}$:

$$a \cdot \vec{0} = a(\vec{0} + \vec{0}) = a \cdot \vec{0} + a \cdot \vec{0}.$$

Addiert man auf beiden Seiten der Gleichung den Vektor $-(a \cdot \vec{0})$, so ergibt sich auf der linken Seite:

$$a \cdot \vec{0} + -(a \cdot \vec{0}) = \vec{0}$$

auf der rechten Seite

$$(a \cdot \vec{0} + a \cdot \vec{0}) + -(a \cdot \vec{0}) = a \cdot \vec{0} + \underbrace{(a \cdot \vec{0} + -(a \cdot \vec{0}))}_{=\vec{0}} = a \cdot \vec{0}.$$

Zu c): Sei $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, ferner $\vec{v} \in V$ und $a \cdot \vec{v} = \vec{0}$.

Zu zeigen ist $\vec{v} = \vec{0}$:

$$\vec{v} = 1 \cdot \vec{v} = (a^{-1}a)\vec{v} = a^{-1}(a\vec{v}).$$

Voraussetzungsgemäß ist

$$a\vec{v} = \vec{0},$$

daher gilt nach 1. für diesen Ausdruck:

$$\vec{v} = a^{-1}(a\vec{v}) = a^{-1} \cdot \vec{0} = \vec{0},$$

was zu zeigen war.

9.1.4 Beispiel
Reelle und komplexe Vektorräume:

a) $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n$ *mit der Vektoraddition und Multiplikation mit Skalaren* $a \in \mathbb{R}$

b) $\mathbb{C}^n$

c) Matrizen $\mathbb{R}^{m\times n}$ *oder* $\mathbb{C}^{m\times n}$ *mit Matrixaddition und Multiplikation mit Skalaren*

d) Unendliche Zahlenfolgen: $\mathbb{R}^\infty$ *(elementweise Addition und Multiplikation mit reellen Zahlen).*

Beweis
Wir zeigen z. B., dass $\mathbb{C}^{m\times n}$ Vektorraum ist und weisen die Regeln aus Definition 9.1.1 nach:
Seien $A, B, C \in \mathbb{C}^{m\times n}$ mit

$$A = \Big(a_{k,l}\Big)_{\substack{k=1,\dots,m\\ l=1,\dots,n}}, B = \Big(b_{k,l}\Big)_{\substack{k=1,\dots,m\\ l=1,\dots,n}}, C = \Big(c_{k,l}\Big)_{\substack{k=1,\dots,m\\ l=1,\dots,n}}.$$

Kommutativität, Assoziativität der Matrixaddition folgen aus den Gesetzen für die Addition in $\mathbb{C}$:
Zu a) (i)

$$\begin{aligned} A + B &= \Big(a_{k,l}\Big) + \Big(b_{k,l}\Big) = \Big(a_{k,l} + b_{k,l}\Big) \\ &= \Big(b_{k,l} + a_{k,l}\Big) = B + A. \end{aligned}$$

Zu a) (ii)

$$\begin{aligned} A + (B + C) &= \Big(a_{k,l}\Big) + \Big(b_{k,l} + c_{k,l}\Big) = \Big(a_{k,l} + (b_{k,l} + c_{k,l})\Big) \\ &= \Big((a_{k,l} + b_{k,l}) + c_{k,l}\Big) = (A + B) + C. \end{aligned}$$

Zu a) (iii)
Die Nullmatrix $N = \Big(0\Big)_{\substack{k=1,\dots,m\\ l=1,\dots,n}} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ ist das neutrale Element der Matrixaddition:

$$A + N = \Big(a_{k,l} + 0\Big) = A.$$

Zu a) (iv)
$-A = \Big(- a_{k,l} \Big)_{\substack{k=1,\dots,m \\ l=1,\dots,n}} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ ist die additive Inverse zu A:

$$A + (-A) = \Big(a_{k,l} + (-a_{k,l})\Big) = \Big(0\Big) = N.$$

Axiome für die Multiplikation mit Skalaren folgen aus Distributivgesetz etc. in $\mathbb{C}$. Seien dazu $p, q \in \mathbb{C}$.

Zu b) (i)

$$\begin{aligned} p\cdot(A+B) &= p\cdot\Big(\Big(a_{k,l}\Big) + \Big(b_{k,l}\Big)\Big) = p\,\Big(a_{k,l} + b_{k,l}\Big) \\ &= \Big(p\,(a_{k,l} + b_{k,l})\Big) = \Big(p\,a_{k,l} + p\,b_{k,l}\Big) \\ &= \Big(p\,a_{k,l}\Big) + \Big(p\,b_{k,l}\Big) = p\,\Big(a_{k,l}\Big) + p\,\Big(b_{k,l}\Big) \\ &= p\,A + p\,B. \end{aligned}$$

b) (ii) – (iv) entsprechend:

$$\begin{aligned} (p+q)A &= \Big((p+q)\,a_{k,l}\Big) = \Big(p\,a_{k,l} + q\,a_{k,l}\Big) = pA + qA \\ (pq)A &= \Big((pq)\,a_{k,l}\Big) = \Big(p(q\,a_{k,l})\Big) = p\,(qA) \\ 1\cdot A &= \Big(1\cdot a_{k,l}\Big) = A. \end{aligned}$$

9.1.5 Beispiel
Sei D eine Menge und

$$V = \{f : D \to \mathbb{K}\}$$

(Menge aller Funktionen mit Definitionsbereich D).

Die Funktionen

$$f+g,\quad a\cdot f : D \to \mathbb{K}$$

sind definiert durch (vgl. Definition 2.7.1):

$$\begin{aligned} f+g &: D \to \mathbb{K} \\ &\quad (f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad (x \in D) \\ a\cdot f &: D \to \mathbb{K} \\ &\quad (a\cdot f)(x) = a\,f(x) \quad (x \in D) \end{aligned}$$

Dann ist $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

Beweis

Kommutativ-, Assoziativ-, Distributivgesetze ergeben sich sofort aus den entsprechenden Rechenregeln in $\mathbb{K}$, z. B. ist für $f_1, f_2 \in V$, $a \in \mathbb{K}$:

$$a \cdot (f_1 + f_2) = af_1 + af_2,$$

weil für jedes $x \in D$ gilt:

$$(a \cdot (f_1 + f_2))(x) = a(f_1(x) + f_2(x)) = af_1(x) + af_2(x)$$

usw.

Das neutrale Element der Addition ist die Funktion $0 : D \to \mathbb{K}$ mit $0(x) = 0$.

Zu $f \in V$ ist die additiv Inverse $-f \in V$ mit $(-f)(x) = -f(x) \quad (x \in D)$.

9.2 Unterraum

9.2.1 Definition

Sei $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $U \subseteq V$.

U heißt Unterraum *von V, wenn $(U, \mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Vektorraum ist.*

9.2.2 Satz

U ist Unterraum von V, wenn U nicht leer ist und eine der beiden folgenden äquivalenten Bedingungen gilt:

a)

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in U, a \in \mathbb{K} \Longrightarrow \vec{v}_1 + \vec{v}_2,\ a\vec{v}_1 \in U \tag{9.1}$$

(d. h. U ist abgeschlossen gegenüber Vektorsummen und skalaren Vielfachen).

b)

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in U, a_1, a_2 \in \mathbb{K} \Longrightarrow a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 \in U \tag{9.2}$$

(d. h. U ist abgeschlossen gegenüber Linearkombinationen).

9.2.3 Beispiel

a)

$$U = \{\vec{0}\}$$

ist für jeden Vektorraum V ein Unterraum.

b)

$$U = \{A \in \mathbb{K}^{n\times n} : A = \left(a_{k,l}\right), a_{k,l} = 0 \ \ (k > l)\}$$

obere Dreiecksmatrizen.

c)

$$U = \{A \in \mathbb{K}^{n\times n} : A = A^\top\}$$

symmetrische Matrizen.

d)

$$U = \{A \in \mathbb{K}^{n\times n} : A = -A^\top\}$$

schiefsymmetrische Matrizen.

e)

$$\mathbb{K}_0^\infty = \{(a_n) \in \mathbb{K}^\infty : a_n \neq 0 \textit{ nur endlich oft}\}$$

Folgen mit endlichem Träger.

9.2.4 Satz (Lösungsmengen homogener linearer Gleichungssysteme)
Sei $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, sei $\vec{0} \in \mathbb{K}^n$.
Dann ist

$$U = \{\vec{x} \in \mathbb{K}^m : A\vec{x} = \vec{0}\}.$$

ein Unterraum von $\mathbb{K}^m$.

Beweis
Wir zeigen, dass das Kriterium (9.1) erfüllt ist:

a) Seien $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in U$, d. h. $A\vec{x}_1 = \vec{0}, \quad A\vec{x}_2 = \vec{0}$.

Wegen

$$A(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = A\vec{x}_1 + A\vec{x}_2 = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$

ist

$$\vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in U.$$

b) Sei $a \in \mathbb{R}$. Wegen

$$A(a\vec{x}_1) = a(A\vec{x}_1) = a\vec{0} = \vec{0}$$

ist auch

$$a\vec{x}_1 \in U.$$

9.2.5 Beispiel

$$U = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_3 = -x_1 - x_2\} \textit{ ist ein Unterraum von } \mathbb{R}^3.$$

Beweis

U ist Lösungsmenge der homogenen linearen Gleichung

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$\iff \quad (1 \quad 1 \quad 1)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Die Behauptung ergibt sich aus Satz 9.2.4.

Bem.: U besteht aus allen Vektoren, die zu $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ orthogonal sind.

9.2.6 Beispiel

$U = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$ *ist kein Unterraum von* $\mathbb{R}^3$.

Beweis

Z. B. sind die Einheitsvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2 \in U$, nicht aber $\vec{x} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,
da $x_1 + x_2 + x_3 \neq 1$.

(U ist Lösungsmenge eines inhomogenen linearen Gleichungssystems).

9.2.7 Beispiel

$U = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : \det(A) = 0\}$ *ist kein Unterraum.*

Beweis

Für die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gilt:

$$A, B \in U.$$

Es ist jedoch $A + B = E_2$ (Einheitsmatrix)
und $\det(E_2) = 1 \neq 0$.

9.2.8 Beispiel (Funktionenunterräume)

a) Polynome:

$$U = \{P : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \quad n \in \mathbb{N}\}$$

b) trigonometrische Polynome:

$$U = \{P : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : P(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)\}$$

c) stetige (differenzierbare, integrierbare) Funktionen

9.2.9 Satz (Lösungsmengen homogener linearer Dgl.)
Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $p, q \in \mathbb{R}$.

$$V = \{y : I \to \mathbb{R} : f \text{ zwei Mal differenzierbar}\}.$$

Dann ist

$$U = \{y \in V : y'' + py' + qy = 0\}$$

Unterraum von V.

Beweis

a) Seien $y_1, y_2 \in U$, d. h.

$$\begin{aligned} y_1'' + py_1' + qy_1 &= 0 \\ y_2'' + py_2' + qy_2 &= 0 \end{aligned}$$

Dann gilt für die Summe

$$\begin{aligned} y_1'' + py_1' + qy_1 + y_2'' + py_2' + qy_2 &= 0 \\ \iff (y_1 + y_2)'' + p(y_1 + y_2)' + q(y_1 + y_2) &= 0 \\ \iff (y_1 + y_2) \in U. \end{aligned}$$

b) Sei außerdem $a \in \mathbb{R}$. Es ist dann

$$\begin{aligned} a(y_1'' + py_1' + qy_1) &= 0 \\ \iff (ay_1)'' + p(ay_1)' + q(ay_1) = 0 \\ \iff (ay_1) \in U. \end{aligned}$$

9.2.10 Beispiel (Unterräume)

a) Mengen gerader (oder ungerader) Funktionen in den genannten Funktionenräumen

b) (trig., algebraische) Polynome mit festem Maximalgrad

c) Menge der Funktionen (oder Polynome) mit fester Nullstelle x_0

d) $\lambda \in \mathbb{R}$: Periodische Funktionen mit Periode λ

9.3 Spann, Basis, Dimension

9.3.1 Linearkombination

9.3.1 Wiederholung
Es seien $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m \in V$ *Vektoren eines Vektorraums und* $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{K}$ *skalare Werte.*

a) *Dann heißt*

$$\vec{v} := \sum_{k=1}^{m} a_k \vec{v}_k$$

Linearkombination *der Vektoren* $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$ *(siehe Definition 8.1.18).*

b) *Falls* $\vec{v}, \vec{v}_k \in \mathbb{K}^n$*, so gilt für diese Linearkombination die Darstellung als Matrixprodukt*

$$\vec{v} = \sum_{k=1}^{m} a_k \vec{v}_k = V\vec{a} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \ldots & \vec{v}_m \\ | & | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \tag{9.3}$$

(siehe Bemerkung 8.3.35).

9.3.2 Beispiel
$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ *ist Linearkombination von* $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *und* $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

9.3.3 Beispiel
$f(x) = (1+x)^3$ *ist Linearkombination von* $y_k(x) = x^k \quad (k = 0, \ldots 3)$.

9.3.4 Beispiel

Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$.
Berechne, ob sich $\vec{x}$ *als Linearkombination von* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *schreiben lässt.*

Ansatz: $\quad \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{x}$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Lösung (Gaußelimination): $\alpha = 4, \quad \beta = -1, \quad \gamma = 4$.

9.3.5 Definition
Es sei $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $M \subseteq V$ eine Menge von Vektoren.
Dann ist die Menge aller Linearkombinationen aus M

$$\operatorname{span} M := \{\vec{v} = \sum_{k=1}^{m} a_k \vec{v}_k : m \in \mathbb{N}, a_1, \dots, a_m \in \mathbb{K}, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m \in M\}$$

ein Unterraum von V. Er heißt der von M aufgespannte Unterraum.

9.3.6 Beispiel
Sei $V = \mathbb{R}^6$ und

$$M = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6 : |x_1| + |x_2| + |x_3| = 1, \quad |x_4| + |x_5| + |x_6| = 0\}.$$

Dann ist

$$\operatorname{span} M = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6 : x_4 = x_5 = x_6 = 0\} \quad (= \mathbb{R}^3 \times \{0\}^3)$$

Beweis
$|x_4| + |x_5| + |x_6| = 0 \iff x_4 = x_5 = x_6 = 0,$
ferner sind die Einheitsvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \in M$, damit ist auch $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$ ein Element von $\operatorname{span} M$.

9.3.2 Lineare Unabhängigkeit

9.3.7 Definition
Vektoren $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ eines Vektorraums V heißen linear abhängig*, wenn einer der Vektoren sich als Linearkombination der anderen schreiben lässt, d. h.*

$$\vec{v}_{k_0} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq k_0}}^{m} a_k \vec{v}_k \quad \text{für ein } k_0 \in \{1, \dots, m\}$$

d. h. es gibt $a_1, \dots, a_m$, nicht alle null, so dass

$$\sum_{k=1}^{m} a_k \vec{v}_k = \vec{0}.$$

9.3.8 Definition
Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$ eines Vektorraums V heißen linear unabhängig*, wenn aus*

$$\sum_{k=1}^{m} a_k \vec{v}_k = \vec{0}$$

folgt:

$$a_1 = \ldots = a_m = 0,$$

d. h. dass eine Linearkombination aus diesen Vektoren nur $\vec{0}$ ist, falls alle auftretenden Skalare 0 sind.

9.3.9 Satz
Wenn $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m \in V$ linear unabhängig sind $\vec{v} \in V$ und

$$\vec{v} = \sum_{k=1}^{m} a_k \vec{v}_k = \sum_{k=1}^{m} b_k \vec{v}_k,$$

so folgt:

$$a_1 = b_1, \ldots, a_m = b_m$$

(Eindeutigkeit der Darstellung als Linearkombination).

Beweis

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m} a_k \vec{v}_k = \sum_{k=1}^{m} b_k \vec{v}_k \quad &\Longleftrightarrow \quad \vec{0} = \sum_{k=1}^{m} a_k \vec{v}_k - \sum_{k=1}^{m} b_k \vec{v}_k \\
&\Longleftrightarrow \quad \vec{0} = \sum_{k=1}^{m} (a_k \vec{v}_k - b_k \vec{v}_k) \\
&\Longleftrightarrow \quad \vec{0} = \sum_{k=1}^{m} (a_k - b_k) \vec{v}_k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \quad a_1 - b_1 = \cdots = a_m - b_m = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad a_1 = b_1, \ldots,\ a_m = b_m.
\end{aligned}$$

9.3.10 Beispiel (Lineare (Un-)Abhängigkeit von Vektoren)

Bestimme, ob $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ -6 \\ -5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ *linear unabhängig sind.*

Lösung

Wenn die Vektorgleichung $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$ nur die triviale Lösung hat, sind die Vektoren linear unabhängig, sonst abhängig.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 10 \\ 0 & -3 & -6 \\ -1 & -3 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gaußelimination ergibt: $\alpha = \gamma, \quad \beta = -2\gamma, \quad \gamma \in \mathbb{R}$ beliebig,
d. h. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sind linear abhängig.

9.3.11 Satz
Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$ eines Vektorraums V sind linear abhängig, wenn einer der Vektoren der Nullvektor ist.

Beweis

Sei ohne Einschränkung $\vec{v}_m = \vec{0}$.
Wähle $a_1 = a_2 = \cdots = a_{m-1} = 0, a_m = 1$. Dann ist

$$\sum_{k=1}^{m} a_k\vec{v}_k = 0 \cdot \vec{v}_1 + 0 \cdot \vec{v}_2 + \cdots + 0 \cdot \vec{v}_{m-1} + 1 \cdot \vec{0} = \vec{0},$$

aber nicht alle Skalare sind null (a_m nämlich nicht).

9.3.12 Satz
Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ sind linear unabhängig, wenn sie paarweise orthogonal sind ($\langle \vec{v}_k, \vec{v}_l \rangle = 0$ für $k \neq l$).

Beweis

Sei $1 \leq l \leq m$ und $\vec{0} = \sum_{k=1}^{m} a_k\vec{v}_k$.

Wir zeigen, dass $a_l = 0$ gilt:

$$\begin{aligned} 0 = \langle \vec{0}, \vec{v}_l \rangle &= \langle \sum_{k=1}^{m} a_k \vec{v}_k, \vec{v}_l \rangle \\ &= \sum_{k=1}^{m} a_k \langle \vec{v}_k, \vec{v}_l \rangle \\ &= a_l \langle \vec{v}_l, \vec{v}_l \rangle. \end{aligned}$$

Nun ist $\langle \vec{v}_l, \vec{v}_l \rangle = \|\vec{v}_l\|^2 \neq 0$, also gilt $a_l = 0$.

9.3.13 Vorbemerkung

a)

$$\int_0^{2\pi} \cos kx \cos lx \, dx = \begin{cases} 0 & (k \neq l) \\ \pi & (k = l \neq 0) \\ 2\pi & (k = l = 0) \end{cases} \qquad \text{für } k, l \in \mathbb{N}_0 \tag{9.4}$$

b)

$$\int_0^{2\pi} \sin kx \sin lx \, dx = \begin{cases} 0 & (k \neq l) \\ \pi & (k = l) \end{cases} \qquad \text{für } k, l \in \mathbb{N} \tag{9.5}$$

c)

$$\int_0^{2\pi} \cos kx \sin lx \, dx = 0 \quad \text{für } k \in \mathbb{N}_0, l \in \mathbb{N} \tag{9.6}$$

(Orthogonalität der trigonometrischen Funktionen bezüglich des inneren Produkts

$$\langle f, g \rangle := \int_I f(x) g(x) \, dx$$

für Funktionen)

Beweis

i) Additionstheoreme:

$$\begin{aligned} \cos a \cos b &= \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b)), \\ \sin a \sin b &= \frac{1}{2}(\cos(a+b) - \cos(a-b)), \\ \sin a \cos b &= \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b)). \end{aligned}$$

Damit ist z. B. im Falle der Formel (9.4):

$$\int_0^{2\pi} \cos kx \cos lx \, dx = \frac{1}{2} \left(\int_0^{2\pi} \cos(k+l)x \, dx + \int_0^{2\pi} \cos(k-l)x \, dx \right)$$

ii) Setze zur Abkürzung $m := k + l$ bzw. $m := k - l$. Es ist $m \in \mathbb{Z}$.

Für $m \neq 0$ gilt: $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos mx\, dx = \frac{1}{m} \sin mx \Big|_0^{2\pi} = 0.$

Für $m = 0$ gilt: $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos mx\, dx = \int_0^{2\pi} 1\, dx = 2\pi.$

iii) Insgesamt für $k, l \in \mathbb{N}_0$:

(Es ist $k + l = 0$ nur für $k = l = 0$ und $k - l = 0$ für $k = l$):

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(\int_0^{2\pi} \cos(k+l)x\, dx + \int_0^{2\pi} \cos(k-l)x\, dx\right) \\
= \;&\frac{1}{2}\left(\left\{\begin{array}{cc} 2\pi & (k = l = 0) \\ 0 & \text{sonst} \end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{cc} 2\pi & (k = l) \\ 0 & (k \neq l) \end{array}\right\}\right) \\
= \;&\left\{\begin{array}{cc} 2\pi & (k = l = 0) \\ \pi & (k = l \neq 0) \\ 0 & (k \neq l) \end{array}\right\}.
\end{aligned}$$

Die Formeln (9.5) und (9.6) zeigt man entsprechend.

9.3.14 Beispiel (Lineare (Un-)Abhängigkeit von Funktionen)
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sind die Funktionen

$$\{\cos kx : k = 0, \ldots, n\} \cup \{\sin kx : k = 1, \ldots, n\}$$

linear unabhängig.

Beweis
Sei

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin kx = 0.$$

Zu zeigen ist

$$a_0 = a_1 = \cdots = a_n = b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0.$$

Da $f(x) = 0$, ist auch

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos lx\, dx = 0 \quad \text{und} \quad \int_0^{2\pi} f(x) \sin lx\, dx = 0$$

für beliebiges $l \in \mathbb{N}_0$.

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_0^{2\pi} f(x) \cos lx \, dx \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin kx \right) \cos lx \, dx \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos kx \cos lx \, dx}_{\neq 0 \text{ nur für } k=l} + \sum_{k=1}^{n} b_k \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin kx \cos lx \, dx}_{=0} \\
&= \begin{cases} \pi\, a_l & (l \neq 0) \\ 2\pi\, a_l & (l = 0) \end{cases} \\
\Longrightarrow \quad & a_l = 0.
\end{aligned}
$$

Gezeigt ist

$$0 = \int_0^{2\pi} f(x) \cos lx \, dx = (2)\pi\, a_l \qquad \Longrightarrow a_l = 0.$$

Entsprechend zeigt man

$$0 = \int_0^{2\pi} f(x) \sin lx \, dx = \pi\, b_l \qquad \Longrightarrow b_l = 0.$$

– Verallgemeinerung der linearen Unabhängigkeit auf eine unendliche Zahl von Vektoren:

9.3.15 Definition
Eine Teilmenge $B \subset V$ eines Vektorraums heißt linear unabhängige Menge *, wenn beliebig gewählte endlich viele unterschiedliche Vektoren aus B jeweils linear unabhängig sind.*

9.3.16 Satz
Wenn $B \subset V$ linear unabhängige Menge ist, dann auch jede Teilmenge von $B' \subseteq B$.

9.3.17 Beispiel
Die Funktionen

$$1, \cos x, \cos 2x, \ldots, \sin x, \sin 2x, \ldots$$

sind eine unendliche, linear unabhängige Menge.

9.3.18 Beispiel
Die Funktionen

$$y_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$y_k(x) = x^k$$

bilden eine linear unabhängige Menge

$$B = \{y_k : k \in \mathbb{N}_0\}$$

von Funktionen, die den Raum der Polynome aufspannt.

Beweis

Definitionsgemäß lässt sich jedes Polynom als Linearkombination der $y_k(x) = x^k$ (mit endlich vielen Summanden) schreiben.

Zu zeigen ist, dass die $y_k(x)$ linear unabhängig sind.

Sei dazu (mit beliebig großem $n \in \mathbb{N}$)

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k y_k(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = 0.$$

Alle Ableitungen von $p(x)$ sind Null, insbesondere

$$\begin{aligned} 0 = p(0) &= a_0 \\ 0 = p'(0) &= a_1 \\ 0 = p''(0) &= 2a_2 \\ 0 = p'''(0) &= 6a_3 \\ &\ldots \\ 0 = p^{(n)}(0) &= n!a_n \\ \Longrightarrow a_0 = a_1 = \cdots = a_n &= 0. \end{aligned}$$

9.3.3 Vektorraumbasis, Dimension

9.3.19 Definition
Sei $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Vektorraum und $B \subset V$.

B heißt Basis *von V, wenn*

a) *B linear unabhängig ist*

b) $\operatorname{span} B = V$.

9.3.20 Beispiel
Sei

$$V = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}.$$

Die Bedingung an $\vec{x} \in V$ lautet äquivalent: $x_4 = -x_1 - x_2 - x_3$.

Daher ist z. B. $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ eine Basis:

$$\vec{x} = x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + x_3\vec{v}_3 \quad \text{für alle } \vec{x} \in V,$$

$$\vec{0} = x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + x_3\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ -x_1 - x_2 - x_3 \end{pmatrix} \Longrightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0.$$

9.3.21 Beispiel
Für die Funktionen

$$y_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$y_k(x) = x^k$$

bildet die Menge

$$B = \{y_k : k \in \mathbb{N}_0\}$$

eine Basis für den Raum der Polynome.

9.3.22 Beispiel
Die Folgen der "Einheitsimpulse"

$$e_k = (\delta_{k,l})_{l \in \mathbb{N}} \text{ mit } \delta_{k,l} = \begin{cases} 1 & (k = l) \\ 0 & (k \neq l) \end{cases}$$

also

$$\begin{aligned} e_1 &= (1,0,0,0,\ldots) \\ e_2 &= (0,1,0,0,\ldots) \\ e_3 &= (0,0,1,0,\ldots) \\ & \ldots \end{aligned}$$

bilden eine Basis für den Raum der Folgen mit endlichem Träger $\mathbb{R}_0^\infty$ *(bzw.* $\mathbb{C}_0^\infty$*).*

9.3.23 Satz

a) Alle Basen eines Vektorraums V *haben die gleiche Anzahl* $n \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ *von Vektoren.*

b) $\dim V = n$ *wird die Dimension des Vektorraums* V *genannt.*

c) Bei gegebener Basis $B \subset V$ *lässt sich jeder Vektor* $\vec{v} \in V \setminus \{\vec{0}\}$ *auf genau eine Weise als Linearkombination von Vektoren der Basis schreiben:*

zu jedem $\vec{v} \in V \backslash \{\vec{0}\}$ *existieren eindeutig* $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m \in B$ *und* $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{K} \backslash \{0\}$, *so dass*

$$\vec{v} = \sum_{k=1}^{m} a_k \vec{v}_k.$$

9.4 Kern, Bild, Rang von Matrizen

9.4.1 Definition

Sei $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$.

a) $\ker A = \{\vec{x} \in \mathbb{K}^n : A\vec{x} = \vec{0}\}$*:* Kern *der Matrix* A

b) $\operatorname{Im} A = \{\vec{y} \in \mathbb{K}^m : \vec{y} = A\vec{x},\ \vec{x} \in \mathbb{K}^n\}$*:* Bild(raum) *der Matrix* A.

9.4.2 Satz
Sei $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$.

$$\operatorname{Im} A = \operatorname{span}\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\} \subseteq \mathbb{K}^m$$

ist Unterraum
($\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ seien die Spaltenvektoren der Matrix A).

Beweis

$$\begin{aligned} & \vec{y} \in \operatorname{Im} A \\ \iff \; & \vec{y} = A\vec{x} \;=\; \begin{pmatrix} | & & | \\ \vec{a}_1 & \cdots & \vec{a}_n \\ | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ & \phantom{\vec{y} = A\vec{x}} \;=\; x_1\vec{a}_1 + \cdots + x_n\vec{a}_n \quad \text{mit beliebigen } x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}. \end{aligned}$$

siehe (9.3).

9.4.3 Satz
Sei $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$.

$$\ker A = \{\vec{x} \in \mathbb{K}^n : \vec{x} \perp \vec{a}^k, \quad k = 1, \ldots m\} \subseteq \mathbb{K}^n$$

ist Unterraum ($\vec{a}^1, \ldots, \vec{a}^m$ seien die Zeilenvektoren der Matrix A).

Beweis

$$\begin{aligned} & \vec{x} \in \ker A \\ \iff \quad & \vec{0} = A\vec{x} = \begin{pmatrix} - & \vec{a}^1 & - \\ & \vdots & \\ - & \vec{a}^m & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | \\ \vec{x} \\ | \end{pmatrix} \\ \iff \quad & \vec{a}^k \cdot \vec{x} = 0, \quad k = 1, \ldots, n \\ \iff \quad & \langle \vec{a}^k, \vec{x} \rangle = 0, \quad k = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

9.4.4 Satz (Lösung linearer Gleichungssysteme)
Sei $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ *und*

$$A\vec{x} = \vec{b} \tag{9.7}$$

a) *Die Menge aller Lösungen des* homogenen Gleichungssystems

$$A\vec{x}_h = \vec{0}$$

ist

$$\vec{x}_h \in \ker A \subseteq \mathbb{K}^n.$$

b) *Das* inhomogene Gleichungssystem *(9.7) ist genau dann lösbar, wenn* $\vec{b} \in \mathrm{Im}(A)$.

c) *Es sei das inhomogene Gleichungssystem (9.7) lösbar und* $\vec{x}_p \in \mathbb{K}^n$ *eine partikuläre Lösung:*

$$A\vec{x}_p = \vec{b}.$$

Dann ist die Gesamtmenge aller Lösungen von (9.7) die Menge

$$\vec{x} = \vec{x}_p + \vec{x}_h, \quad \vec{x}_h \in \ker(A).$$

9.4.5 Definition
Sei $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$.
$\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in \mathbb{K}^m$ *seien die Spaltenvektoren der Matrix* A,
$\vec{a}^1, \ldots, \vec{a}^m \in \mathbb{K}^n$ *seien die Zeilenvektoren der Matrix* A*:*

$$A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \ldots & \vec{a}_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} — & \vec{a}^1 & — \\ — & \vec{a}^2 & — \\ & \vdots & \\ — & \vec{a}^m & — \end{pmatrix}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \operatorname{rang} A &:= \dim(\operatorname{span}\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\}) \\ &= \dim(\operatorname{span}\{\vec{a}^1, \ldots, \vec{a}^m\}). \end{aligned}$$

der Rang der Matrix A.

9.4.6 Satz
Sei $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$.

Es ist

$$n = \dim\ker(A) + \operatorname{rang}(A).$$

Beweis

Sei $\dim\ker(A) = k$.

Sei $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \in \mathbb{K}^n$ eine Basis, so dass $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \in \ker(A)$ Basis des Unterraums ist.

Dann sind $A\vec{v}_{k+1}, \dots A\vec{v}_n \in \mathbb{K}^m$ linear unabhängig, also eine Basis von $\operatorname{Im}(A)$.

Daher ist $\operatorname{rang}(A) = \dim\operatorname{Im}(A) = n - k$.

9.4.7 Beispiel
Berechne den Rang von

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & -4 & -7 & -3 \\ 3 & 8 & 1 & -7 & -8 \end{pmatrix}.$$

Man bringt die Matrix durch Zeilenumformungen mit dem Gaußverfahren auf Dreiecksform. 2 Zeilen $\neq 0$, Rang $= 2$.

9.4.8 Beispiel
Bestimme den Kern von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & -4 & -7 & -3 \\ 3 & 8 & 1 & -7 & -8 \end{pmatrix}.$$

Lösung

Löse das zug. homogene lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 3 & 1 & -2 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & -1 & -4 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & -7 & -3 & 0 \\ 3 & 8 & 1 & -7 & -8 & 0 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{rrrrr|r} 1 & 3 & 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & t_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & t_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & t_5 \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2t_3 - t_4 + t_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & t_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & t_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & t_5 \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5t_3 + 5t_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2t_3 - t_4 + t_5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & t_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & t_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & t_5 \end{array}$$

Ergebnis:

$$\ker(A) = \operatorname{span}\{ \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}.$$

9.4.9 Beispiel

Bestimme das Bild von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & -4 & -7 & -3 \\ 3 & 8 & 1 & -7 & -8 \end{pmatrix}.$$

Lösung

Im(A) ist der von den Spalten von A aufgespannte Raum.

Schreibe die Spalten als Zeilen, danach Reduktion mit Gaußschem Eliminationsverfahren:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 8 \\ 1 & 3 & -4 & 1 \\ -2 & -1 & -7 & -7 \\ -3 & -4 & -3 & -8 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & -6 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Die nach Reduktion übrig gebliebenen (Zeilen)vektoren spannen den Bildraum auf:

$$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-3\\-1\end{pmatrix}\}.$$

9.5 Eigenvektoren und Eigenwerte

9.5.1 Bemerkung

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix, dann ist für jeden Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ auch $\vec{y} = A\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

Normalerweise zeigen $\vec{x}$ und $\vec{y}$ in verschiedene Richtungen.

Eigenvektoren der Matrix A sind solche Vektoren, wo $\vec{x}\|\vec{y}$ ist.

9.5.2 Definition

Es sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ und $\vec{x} \in \mathbb{K}^n \setminus \{\vec{0}\}$. Ferner sei $\lambda \in \mathbb{K}$.

$\vec{x}$ heißt Eigenvektor *von A und λ zugehöriger* Eigenwert*, wenn*

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}.$$

9.5.3 Satz

Es sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$.

a) Die Eigenwerte von A sind die Lösungen $\lambda \in \mathbb{K}$ der Polynomgleichung

$$\det(A - \lambda E_n) = 0$$

wobei $E_n \in \mathbb{K}^{n\times n}$ die Einheitsmatrix bedeutet.

b) Zu einem gegebenen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{K}$ der Matrix A sind die Eigenvektoren die Lösungen $\vec{x} \in \mathbb{K}^n \setminus \{\vec{0}\}$ des linearen Gleichungssystems

$$(A - \lambda E_n)\vec{x} = \vec{0}.$$

c) Die Menge der Eigenvektoren zu jedem Eigenwert bildet (zusammen mit $\vec{0}$) jeweils einen Unterraum von $\mathbb{K}^n$.

Beweis

$$\begin{aligned} A\vec{x} = \lambda\vec{x} \quad &\Longleftrightarrow \quad A\vec{x} = \lambda E_n\vec{x} \\ &\Longleftrightarrow \quad (A - \lambda E_n)\vec{x} = \vec{0}. \end{aligned}$$

Es gibt eine Lösung $\vec{x} \neq \vec{0}$, wenn die quadratische Matrix $A - \lambda E_n$ singulär ist (andernfalls gibt es nur $\vec{0}$ als Lösung).

Dies bedeutet wiederum, dass die Determinante der Matrix 0 ist.

Die Unterraumeigenschaft folgt aus Satz 9.2.4.

9.5.4 Beispiel

Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & \frac{5}{2} & -5 \\ 4 & 3 & -2 \\ 2 & \frac{9}{2} & -7 \end{pmatrix}.$$

Lösung

a) Eigenwerte:

$$\det(A - \lambda E_3) = 0 \Longleftrightarrow \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & \frac{5}{2} & -5 \\ 4 & 3-\lambda & -2 \\ 2 & \frac{9}{2} & -7-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} \Longleftrightarrow \quad & (4-\lambda)(3-\lambda)(-7-\lambda) + \frac{5}{2} \cdot (-2) \cdot 2 + (-5) \cdot 4 \cdot \frac{9}{2} \\ & -(-5)(3-\lambda) \cdot 2 - (4-\lambda)(-2) \cdot \frac{9}{2} - \frac{5}{2} \cdot 4 \cdot (-7-\lambda) = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & -\lambda^3 + 28\lambda - 48 = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & \lambda \in \{-6, 2, 4\} \quad \text{(z. B. mit Hornerschema).} \end{aligned}$$

b) Eigenvektoren für $\lambda = -6$: $\quad A\vec{x} = -6\vec{x} = -6E_3\vec{x}$

$$\Longleftrightarrow (A + 6E_3)\vec{x} = \vec{0} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 10 & \frac{5}{2} & -5 \\ 4 & 9 & -2 \\ 2 & \frac{9}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gaußsches Eliminationsverfahren (schreibe letzte Gleichung als erste):

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & \frac{9}{2} & -1 & 0 \\ 10 & \frac{5}{2} & -5 & 0 \\ 4 & 9 & -2 & 0 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc|c} 2 & \frac{9}{2} & -1 & 0 \\ 0 & -20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{9}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2}z \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z \end{array}$$

c) Eigenvektoren für $\lambda = 2$:

$$(A - 2E_3)\vec{x} = \vec{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & \frac{5}{2} & -5 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & \frac{9}{2} & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gaußsches Eliminationsverfahren:

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & \frac{5}{2} & -5 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & \frac{9}{2} & -9 & 0 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc|c} 2 & \frac{5}{2} & -5 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{5}{4} & -\frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{5}{4} & 0 & \frac{5}{2}z \\ 0 & 1 & 0 & 2z \\ 0 & 0 & 1 & z \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2z \\ 0 & 0 & 1 & z \end{array}$$

d) Eigenvektoren für $\lambda = 4$:

$$(A - 4E_3)\vec{x} = \vec{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{2} & -5 \\ 4 & -1 & -2 \\ 2 & \frac{9}{2} & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gaußsches Eliminationsverfahren (schreibe letzte Gleichung als erste):

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & \frac{9}{2} & -11 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & -5 & 0 \\ 4 & -1 & -2 & 0 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{9}{4} & -\frac{11}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & -5 & 0 \\ 0 & -10 & 20 & 0 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{9}{4} & -\frac{11}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{9}{4} & 0 & \frac{11}{2}z \\ 0 & 1 & 0 & 2z \\ 0 & 0 & 1 & z \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & z \\ 0 & 1 & 0 & 2z \\ 0 & 0 & 1 & z \end{array}$$

e) Ergebnis: Für $A = \begin{pmatrix} 4 & \frac{5}{2} & -5 \\ 4 & 3 & -2 \\ 2 & \frac{9}{2} & -7 \end{pmatrix}$ sind die ...

... Eigenwerte: $\quad 0 = \det(A - \lambda E_3) = -\lambda^3 + 28\lambda - 48 \iff \lambda \in \{-6, 2, 4\}$

... Eigenvektoren für $\lambda = -6$: $\quad \vec{x} = z \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

... Eigenvektoren für $\lambda = 2$: $\quad \vec{x} = z \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\ldots \text{Eigenvektoren für } \lambda = 4: \quad \vec{x} = z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

9.5.5 Beispiel

Für das zweimaschige Netzwerk mit je einem Kondensator und einer Spule seien die Bezeichnungen wie in Abbildung 9.1 angegeben. Gesucht sind die möglichen Spannungsverläufe $u_1(t)$ und $u_2(t)$ ohne Einwirkung einer äußeren Störung.

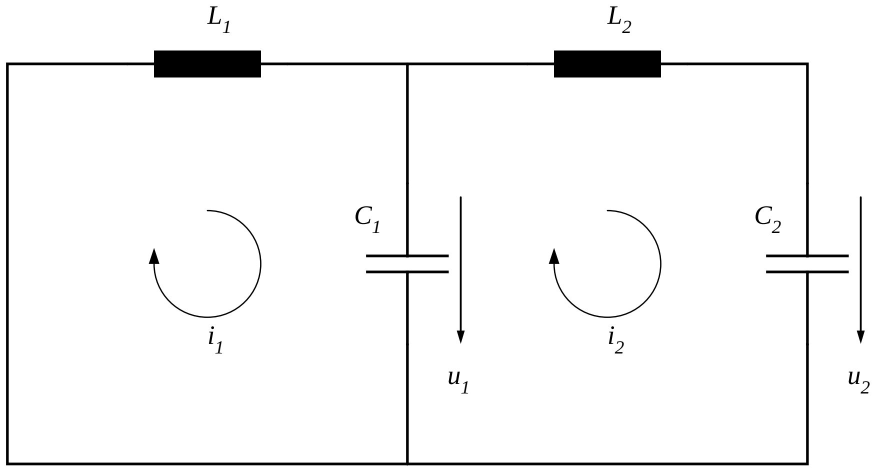


Abbildung 9.1: Zweimaschiges L-C-Netzwerk

Lösung

a) In der linken Masche gibt es Spannungsabfälle bei L_1 und C_1, die sich zu null addieren, daher fällt an L_1 die Spannung $-u_1$ ab (rechtsherum gezählt), und es gilt:

$$-u_1 = L_1 i_1'. \tag{9.8}$$

b) Der durch C_1 fließende Strom (von oben nach unten) ist $i_1 - i_2$, daher gilt:

$$i_1 - i_2 = C_1 u_1'. \tag{9.9}$$

c) In der rechten Masche ergibt ein Umlauf, dass die Spannung an L_2 den Wert $u_1 - u_2$ hat (rechtsherum), für L_2 gilt daher:

$$u_1 - u_2 = L_2 i_2'. \tag{9.10}$$

d) Schließlich ist

$$i_2 = C_2 u_2'. \tag{9.11}$$

Löse Gleichungen (9.9) und (9.11) nach i_1', i_2' auf und setze in (9.8) und (9.10) ein, um ein Dgl.-System für u_1, u_2 zu erhalten:

Aus (9.9) folgt:

$$i_1 = C_1 u_1' + i_2 = C_1 u_1' + C_2 u_2' \Longrightarrow i_1' = C_1 u_1'' + C_2 u_2''.$$

Aus (9.11):

$$i_2' = C_2 u_2''.$$

Eingesetzt in (9.8) und (9.10):

$$-u_1 = L_1(C_1 u_1'' + C_2 u_2'') \iff u_1'' = \frac{1}{L_1 C_1}(-u_1 - L_1 C_2 u_2'')$$

$$u_1 - u_2 = L_2 C_2 u_2'' \iff u_2'' = \frac{1}{L_2 C_2}(u_1 - u_2).$$

Wir haben:

$$\begin{aligned} u_1'' &= \frac{1}{L_1 C_1}\left(-u_1 - \frac{L_1}{L_2}(u_1 - u_2)\right) \\ &= -\left(\frac{1}{L_1 C_1} + \frac{1}{L_2 C_1}\right) u_1 + \frac{1}{L_2 C_1} u_2 \\ u_2'' &= \frac{1}{L_2 C_2} u_1 - \frac{1}{L_2 C_2} u_2 \end{aligned}$$

Matrixform:

$$\vec{u}\,'' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{L_1 C_1} - \frac{1}{L_2 C_1} & \frac{1}{L_2 C_1} \\ \frac{1}{L_2 C_2} & -\frac{1}{L_2 C_2} \end{pmatrix} \vec{u} = A\vec{u}$$

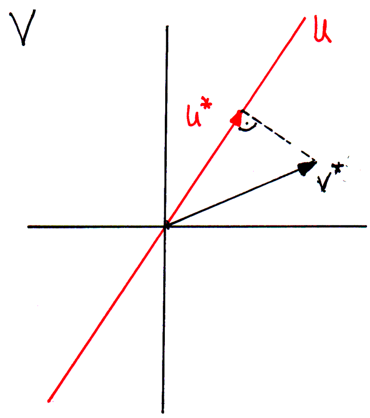
Mit Ansatz $u_1(t) = U_1 e^{\omega t}$ und $u_2(t) = U_2 e^{\omega t}$, d. h. $\vec{u} = \vec{U} e^{\omega t}$ ist

$$\vec{u}\,'' = \omega^2 \vec{U} e^{\omega t} \iff \omega^2 \vec{U} = A\vec{U}.$$

Es ergibt sich für den Ansatz also, dass ω^2 Eigenwert und $\vec{U}$ zugehöriger Eigenvektor der Matrix A sein muss.

9.6 Kleinste-Quadrate-Methode

Es sei V ein Vektorraum
mit innerem Produkt $\langle v_1, v_2\rangle$
und Norm $\|v\|_2 = \sqrt{\langle v, v\rangle}$.



$U \subset V$ sei Unterraum ($\dim U < \infty$).

Gesucht ist zu $v^* \in V$:

Beste Approximation $u^* \in U$,
d. h.

$$\|v^* - u^*\|_2 \overset{!}{=} \min .$$

Bedingung dafür:

$$v^* - u^* \perp U$$

$$\text{d. h.} \quad \langle v^* - u^*, u\rangle = 0 \quad \text{für alle } u \in U$$

$$\Longleftrightarrow \quad \langle v^*, u\rangle = \langle u^*, u\rangle \quad (u \in U).$$

V Vektorraum, $v^* \in V$, $U \subset V$ Unterraum.

$u_1, \dots, u_n \in U$ sei Basis.

Gesucht ist $u^* = \sum_{l=1}^{n} a_l u_l$ so dass

$$\begin{aligned}
& \langle u, u^*\rangle = \langle u, v^*\rangle \quad (u \in U) \\
\Longleftrightarrow \quad & \langle u_k, u^*\rangle = \langle u_k, v^*\rangle \quad (k = 1, \dots, n) \\
\Longleftrightarrow \quad & \langle u_k, \sum_{l=1}^{n} a_l u_l\rangle = \langle u_k, v^*\rangle \\
\Longleftrightarrow \quad & \sum_{l=1}^{n} a_l \langle u_k, u_l\rangle = \langle u_k, v^*\rangle .
\end{aligned}$$

(lineares Gleichungssystem für $a_1, \dots, a_n$).

9.6.1 Satz
Es sei V ein Vektorraum und $U = \operatorname{span}\{u_1, \dots, u_n\}$ Unterraum.
Die beste Approximation (gemäß der kleinste-Quadrate-Methode) zu gegebenem $v^* \in V$ im Unterraum U ist

$$u^* = \sum_{l=1}^{n} a_l u_l$$

wobei

$$\mathbf{M}\mathbf{a} = \mathbf{v}$$

mit

$$\mathbf{M} = \Big(\langle u_k, u_l\rangle\Big)_{\substack{k=1,\dots,n,\\ l=1,\dots,n}}, \ \mathbf{a} = \Big(a_l\Big)_{l=1,\dots,n}, \ \mathbf{v} = \Big(\langle u_k, v^*\rangle\Big)_{k=1,\dots,n}.$$

$\mathbf{M}$ *heißt* Gramsche Matrix .

9.6.2 Beispiel
Gegeben seien Wertepaare

t_ν	*0.1*	*0.2*	...	*1.0*
$x(t_\nu)$	*0.702*	*0.752*	...	*0.997*

Gesucht: Gerade $u(t) = at + b$.

Inneres Produkt: $\langle x, u\rangle = \sum_{\nu=1}^{10} x(t_\nu)u(t_\nu)$.

Unterraum: $U = \operatorname{span}\{u_0(t) = 1, u_1(t) = t\}$.

Gram-Matrix: $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \langle 1,1\rangle & \langle 1,t\rangle \\ \langle t,1\rangle & \langle t,t\rangle \end{pmatrix}$,

$$\begin{array}{lclclcl} \langle 1,1\rangle & = & \sum 1 = 10 & & \langle x,1\rangle & = & \sum x(t_\nu) = 8.507 \\ \langle 1,t\rangle & = & \sum 1\cdot\frac{\nu}{10} = 5.5 & & \langle x,t\rangle & = & \sum x(t_\nu)\, t_\nu = 4.945 \\ \langle t,t\rangle & = & \sum \frac{\nu^2}{100} = 3.85 & & & & \end{array}$$

9.6.3 Beispiel
Gegeben seien Wertepaare

$$(t_\nu, x(t_\nu)), \quad \nu = 1, \dots, n.$$

Gesucht: Polynom $u(t) = a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0$ *mit* $u(t_\nu) \approx x(t_\nu)$.

Inneres Produkt: $\langle x, u\rangle = \sum_{\nu=1}^{n} x(t_\nu)u(t_\nu)$.

Unterraum: $U = \operatorname{span}\{u_0(t) = 1,\ u_1(t) = t,\ u_2(t) = t^2,\ u_3(t) = t^3\}$.

Lineares Gleichungssystem: $\mathbf{M} = \Big(\langle u_k, u_l\rangle\Big)_{\substack{k=0,\dots,3,\\ l=0,\dots,3}}$, $\langle u_k, u_l\rangle = \sum_{\nu=1}^n t_\nu^{k+l}$, $v_l = \langle x, u_l\rangle = \sum_{k=1}^n x(t_k)t_k^l$.

Kapitel 10

Lineare Differentialgleichungen

10.1 Grundbegriffe

10.1.1 Definition

a) Eine gewöhnliche Differentialgleichung *(Dgl.) ist eine Gleichung in den Variablen:*

$$x, y = y(x),\ y' = y'(x),\ y'' = y''(x),\ \dots, y^{(n)} = y^{(n)}(x).$$

b) *(i)* $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ *heißt* Differentialgleichung in impliziter Form.

(ii) $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ *heißt* Differentialgleichung in expliziter Form.

c) Eine Differentialgleichung heißt von n-ter Ordnung*, falls* $y^{(n)}$ *höchste auftretende Ableitung ist.*

10.1.2 Beispiel

a) $y''x^4 - y = 0$

b) $y' = 4x^2 + y$

10.1.3 Bemerkung

Eine Differentialgleichung mit

$$y = y(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

heißt partielle Differentialgleichung *(wird hier nicht behandelt).*

10.1.4 Definition

a) *Eine Differentialgleichung heißt* linear*, wenn sie die Form*

$$a_n\, y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + \cdots + a_2\, y'' + a_1\, y' + a_0\, y = b$$

d. h.

$$\sum_{k=0}^{n} a_k\, y^{(k)} = b$$

hat.

a_k *und* b *können Funktionen von* x *oder Konstante (reelle Zahlen) sein.*

b) *Eine lineare Differentialgleichung mit* $b = 0$ *heißt* homogen*. Falls* $b \neq 0$ *ist, so heißt die Differentialgleichung* inhomogen*.*

c) b *heißt* Störfunktion*.*

10.1.5 Beispiel

Differentialgleichungen klassifizieren:

a) $x^4 y'' - y = 0$

b) $(4x^2 y^3)y' = 0$

c) $y' - 2x = 0$

d) $y' = 4x^2 + y$

10.2 Lösungen von Differentialgleichungen

10.2.1 Definition

$y(x)$ *heißt* Lösung *(oder* Lösungsfunktion *oder* Lösungsintegral*) einer Differentialgleichung* n*-ter Ordnung, wenn*

a) $y(x)$ n*-mal differenzierbar ist und*

b) $y(x)$, $y'(x)$, $\ldots$, $y^{(n)}(x)$ *die Differentialgleichung für jedes* $x \in D_y$ *erfüllen.*

10.2.2 Beispiel

$$y'' + y = 0$$

$$\begin{aligned} y = \sin x, \quad y' &= \cos x, \quad y'' = -\sin x \implies y'' + y = 0 \\ y = \cos x, \quad y' &= -\sin x, \quad y'' = -\cos x \implies y'' + y = 0. \end{aligned}$$

Allgemein:

$$y(x) = a \sin x + b \cos x \qquad \text{mit } a, b \in \mathbb{R}$$

ist Lösung von $y'' + y = 0$:

$$y'' = (a \sin x + b \cos x)'' = (a \cos x - b \sin x)' = -a \sin x - b \cos x$$

10.2.3 Beispiel

a) $y' = \dfrac{2x}{x^2+1}$.

$$y = \int y'\,dx = \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \ln(x^2+1) + C.$$

b) $y'' = 6x + 2$.

$$\begin{aligned} y' = \int y''\,dx &= \int (6x+2)\,dx = 3x^2 + 2x + C \\ y = \int y'\,dx &= \int (3x^2 + 2x + C)\,dx = x^3 + x^2 + Cx + D \end{aligned}$$

10.2.4 Satz
Die allgemeine Lösung einer Differentialgleichung n-ter Ordnung enthält n Integrationskonstanten.

10.2.5 Definition
Klassifikation der Lösungen einer Differentialgleichung n-ter Ordnung.

a) $y(x) = y(x, C_1, \ldots, C_n)$: allgemeine Lösung:
enthält n Parameter, für die reelle Zahlen eingesetzt werden.

b) $y = y(x)$: partikuläre Lösung:
Entsteht aus der allgemeinen Lösung durch Einsetzen von Zahlen für die Integrationskonstanten C_k.

10.2.6 Bemerkung
Zur Bestimmung der Integrationskonstanten einer Differentialgleichung können Werte für die Lösungsfunktion y oder Ableitungen an einzelnen Stellen x vorgegeben sein.

10.2.7 Definition

a) *Eine Differentialgleichung mit vorgeschriebenen Werten $y(x_0), y'(x_0), \dots$ an einer einzigen Stelle $x_0 \in D_y$ heißt* Anfangswertproblem *(AWP).*

b) *Eine Differentialgleichung mit vorgeschriebenen Werten $y^{(k_i)}(x_i)$ an mehreren Stellen $x_i \in D_y$ heißt* Randwertproblem *(RWP).*

10.2.8 Bemerkung
Typischer Spezialfall: $y : [a, b] \to \mathbb{R}$.

a) *Anfangswertproblem:*

$$y(a), y'(a), y''(a), \dots$$

sind vorgeschrieben.

b) *Randwertproblem:*
Einige der Werte

$$y(a), y'(a), y''(a), \dots, y(b), y'(b), y''(b), \dots$$

sind vorgeschrieben.

10.2.9 Beispiel

$$y'' = 2, \quad y(3) = 2, \quad y'(3) = 0.$$

Anfangswertproblem:
Allgemeine Lösung:

$$y' = 2x + C_1 \Longrightarrow y = x^2 + C_1 x + C_2.$$

Anfangswerte:

$$\begin{aligned} y(3) = 2 \quad &\Longleftrightarrow \quad 9 + C_1 \cdot 3 + C_2 = 2 \\ y'(3) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad 6 + C_1 = 0 \\ &\Longrightarrow \quad C_1 = -6, \quad C_2 = 11 \end{aligned}$$

Lösung des Anfangswertproblems:

$$y(x) = x^2 - 6x + 11.$$

10.2.10 Beispiel

$$y'' = -2, \quad y(1) = 2, \quad y(2) = 1.$$

Randwertproblem:
Allgemeine Lösung:

$$y'(x) = -2x + C_1 \quad \Longrightarrow \quad y = -x^2 + C_1 x + C_2.$$

Randbedingungen:

$$\begin{aligned} y(1) = 2 &\iff -1 + C_1 \cdot 1 + C_2 = 2 \\ y(2) = 1 &\iff -4 + C_1 \cdot 2 + C_2 = 1 \\ &\Longrightarrow C_1 = 2, \quad C_2 = 1 \end{aligned}$$

Lösung des Randwertproblems:

$$y(x) = -x^2 + 2x + 1.$$

10.3 Trennung der Variablen

Problemklasse: Differentialgleichungen erster Ordnung der Form

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

mit $f(x)$ stetig auf I_x, $g(y)$ stetig auf I_y und $g(y) \neq 0$ auf I_y ($I_x, I_y \subseteq \mathbb{R}$ sind Intervalle).
Lösungsmethode für $y' = f(x) \cdot g(y)$:

a) Division durch $g(y)(\neq 0)$:

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{g(y)} = f(x) \Longrightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx.$$

b) Integration beider Seiten:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx.$$

c) Mit $G(y) = \displaystyle\int \frac{dy}{g(y)}$ und $F(x) = \displaystyle\int f(x)\,dx$ ist die allgemeine Lösung:

$$G(y) = F(x) + C.$$

d) Die gefundene Lösung ist implizit in y. Wenn möglich: Auflösen nach y.

10.3.1 Beispiel
$y' \sin x = y \cos x$

a) Variablentrennung:

$$\frac{y'}{y} = \frac{\cos x}{\sin x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \cot x \, dx$$

b) Integration:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \cot x \, dx$$

c) Allgemeine Lösung:

$$\ln |y| = \ln |\sin x| + C$$

d) Auflösen nach y:

$$\begin{aligned} & |y| = e^{\ln |\sin x| + C} \\ \iff \quad & |y| = A \cdot |\sin x|, \quad A = e^C \in (0, \infty) \\ \iff \quad & y = B \cdot \sin x, \quad B = \pm A \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

10.3.2 Beispiel
$y' + xy^3 = 0$

a) Variablentrennung:

$$y' = -xy^3 \iff \frac{y'}{y^3} = -x \, dx$$

b) Integration:

$$\int \frac{dy}{y^3} = \int -x \, dx$$

c) Allgemeine Lösung:

$$-\frac{1}{2} y^{-2} = -\frac{1}{2} x^2 + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

d) Auflösen nach y:

$$y^{-2} = x^2 - 2C \quad \iff \quad y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + C'}}, \quad C' = -2C \in \mathbb{R}$$

10.3.3 Beispiel

$$\sqrt{y} = y'$$

a) Variablentrennung:

$$y^{\frac{1}{2}} = \frac{dy}{dx} \iff dx = y^{-\frac{1}{2}} \, dy$$

b) Integration:

$$\int y^{-\frac{1}{2}} \, dy = \int dx$$

c) Allgemeine Lösung:

$$2y^{\frac{1}{4}} = x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

d) Auflösen nach y:

$$y = \frac{1}{4}(x + C)^2, \quad C \in \mathbb{R}$$

10.3.4 Beispiel

$$(1 + e^x)\, y\, y' = e^x$$

a) Variablentrennung:

$$(1 + e^x)\, y\, y' = e^x \iff y\, dy = \frac{e^x}{1 + e^x} dx$$

b) Integration (Substitution $u = e^x$, $\frac{du}{u} = dx$):

$$\int y\, dy = \int \frac{e^x}{1 + e^x} dx = \int \frac{u}{1 + u} \frac{du}{u}$$

c) Allgemeine Lösung:

$$\frac{1}{2} y^2 = \ln(1 + u) + C = \ln(1 + e^x) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

d) Auflösen nach y:

$$y = \sqrt{2 \ln(1 + e^x) + C}, \quad C \in \mathbb{R}$$

10.3.5 Beispiel

$$y' \sin x = y \ln y$$

a) Variablentrennung:

$$\frac{dy}{y \ln y} = \frac{dx}{\sin x}$$

b) Integration (Substitution $u = \ln y, \quad t = \tan \frac{x}{2}$):

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{1 + t^2}{2t} \frac{2\, dt}{1 + t^2} = \int \frac{dt}{t}$$

c) Allgemeine Lösung:

$$\ln u = \ln t + C \iff u = t \cdot K$$

d) Auflösen nach y:

$$y = e^u = e^{K \cdot t} = e^{K \tan \frac{x}{2}}, \quad K \in \mathbb{R}$$

10.3.6 Beispiel

$$\frac{xy'}{1+y} - \frac{y}{1+x} = 0$$

a) Variablentrennung:

$$\frac{x\,\frac{dy}{dx}}{1+y} = \frac{y}{1+x} \iff \frac{dy}{y(1+y)} = \frac{dx}{x(1+x)}$$

b) Integration:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{y(1+y)}\,dy &= \int \left(\frac{1+y}{y(1+y)} - \frac{y}{y(1+y)}\right) dy \\
&= \int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{1+y}\right) dy \\
&= \ln y - \ln(1+y) + C \\
&= \ln \frac{y}{1+y} + C \quad \text{(für } x \text{ ebenso).}
\end{aligned}$$

c) Allgemeine Lösung:

$$\ln \frac{y}{1+y} = \ln \frac{x}{1+x} + C \iff \frac{y}{1+y} = \frac{x}{1+x} \cdot e^C$$

Auflösen nach y:

$$\begin{aligned}
\frac{y}{1+y} = \frac{x}{1+x} \cdot e^C \quad &\iff \quad \frac{1+y}{1+y} - \frac{1}{1+y} = \frac{x}{1+x} \cdot K \\
&\iff \quad 1 - \frac{1}{1+y} = \frac{x}{1+x} \cdot K \\
&\iff \quad \frac{1}{1+y} = 1 - \frac{x}{1+x} \cdot K \\
&\iff \quad \frac{1}{1+y} = \frac{1+x}{1+x} - \frac{x}{1+x} \cdot K \\
&\iff \quad \frac{1}{1+y} = \frac{1+x-Kx}{1+x} \\
&\iff \quad 1+y = \frac{1+x}{1+x-Kx} \\
&\iff \quad y = \frac{1+x}{1+x-Kx} - 1.
\end{aligned}$$

10.4 Lösungsmethoden für lineare Differentialgleichungen

10.4.1 Lineare Differentialgleichung 1. Ordnung

$$a(x)y' + b(x)y = c(x)$$

10.4.1.1 Allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$a(x) \cdot y' + b(x) \cdot y = 0$$

$$a(x) \cdot y' + b(x) \cdot y = 0$$

Methode: Trennung der Variablen

$$\begin{aligned} a(x) \cdot \frac{dy}{dx} + b(x) \cdot y = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad a(x) \cdot \frac{dy}{dx} = -b(x) \cdot y \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{dy}{y} = -\frac{b(x)}{a(x)}\, dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \quad \int \frac{1}{y}\, dy = -\int \frac{b(x)}{a(x)}\, dx + K^* \\ &\Longrightarrow \quad \ln|y| = -\int \frac{b(x)}{a(x)}\, dx + K^* \\ &\Longrightarrow \quad |y| = e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}\, dx} \cdot e^{K^*}, \quad K^* \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow \quad y = K \cdot e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}\, dx}, \quad K = \pm e^{K^*} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

10.4.1 Beispiel

$$y' + \frac{y}{x} = 0$$

Trennung der Variablen:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \\
&\Longrightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} \\
&\Longleftrightarrow \quad \ln|y| = -\ln|x| + K^* \\
&\Longrightarrow \quad y = e^{-\ln|x|} \cdot K = \frac{1}{x} \cdot K, \quad K(= \pm e^{K^*}) \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Probe:

$$y' = \left(\frac{K}{x}\right)' = -\frac{K}{x^2} \Longrightarrow y' + \frac{y}{x} = -\frac{K}{x^2} + \frac{K}{x} \cdot \frac{1}{x} = 0$$

10.4.1.2 Allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$a(x) \cdot y' + b(x) \cdot y = c(x) \tag{10.1}$$

Methode: *Variation der Konstanten*

Sei $\eta(x)$ Lösung der homogenen Differentialgleichung, d. h.

$$a(x) \cdot \eta'(x) + b(x) \cdot \eta(x) = 0$$

Lösungsansatz für inhomogene Differentialgleichung:

$$y(x) = K(x) \cdot \eta(x) \tag{10.2}$$

Dann ist

$$y'(x) = K'(x) \cdot \eta(x) + K(x) \cdot \eta'(x)$$

eingesetzt in die inhomogene Differentialgleichung (10.1):

$$\begin{aligned}
& a(x)(K'(x) \cdot \eta(x) + K(x) \cdot \eta'(x)) + b(x) \cdot K(x) \cdot \eta(x) = c(x) \\
\Longleftrightarrow \quad & a(x) \cdot \eta(x) \cdot K'(x) + \underbrace{(a(x) \cdot \eta'(x) + b(x) \cdot \eta(x))}_{=0} K(x) = c(x) \\
\Longrightarrow \quad & K'(x) = \frac{c(x)}{a(x) \cdot \eta(x)} \\
\Longrightarrow \quad & K(x) = \int \frac{c(x)}{a(x) \cdot \eta(x)}\, dx + K_1, \quad K_1 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (10.1) ergibt sich durch Einsetzen von $K(x)$ in (10.2):

$$\begin{aligned}
y(x) &= K(x) \cdot \eta(x) \\
&= \eta(x) \cdot \int \frac{c(x)}{a(x)\,\eta(x)}\, dx + K_1 \cdot \eta(x), \quad K_1 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Es ist

$$\eta(x) \cdot \int \frac{c(x)}{a(x)\,\eta(x)}\,dx :$$

partikuläre Lösung der inhomogenen Dgl.

und

$$K_1 \cdot \eta(x)$$

allgemeine Lösung der homogenen Dgl.

10.4.2 Satz

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$a(x) \cdot y' + b(x) \cdot y = c(x)$$

ist die Summe aus der allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung und einer partikulären Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.

10.4.3 Beispiel

$$y' + \frac{y}{x} = \sin x$$

Lösung

a) Lösung der homogenen Dgl. (Bsp. 10.4.1): $y(x) = \dfrac{K}{x}$.

b) *Variation der Konstanten:*

Ansatzfunktion $y(x) = \dfrac{K(x)}{x} \Longrightarrow y'(x) = \dfrac{K'(x) \cdot x - K(x)}{x^2}$

c) Einsetzen in die Differentialgleichung:

$$\frac{K'(x)x - K(x)}{x^2} + \frac{K(x)}{x^2} = \sin x \quad \Longrightarrow \quad K'(x) = x \sin x$$

$$\Longrightarrow K(x) = \int x \sin x \, dx \quad = \quad -x \cos x + \sin x + K_1$$

d) Lösung der inhomogenen Differentialgleichung:

$$y(x) = \frac{K(x)}{x} = \frac{\sin x}{x} - \cos x + \frac{K_1}{x}.$$

10.4.4 Beispiel
$x\,y' + 3y = x^2$

10.4.5 Beispiel
$y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$

10.4.6 Beispiel
$y' + y\cos x = \sin x \cos x$

10.4.7 Beispiel
$(y^2-6x)y'+2y = 0$ *ist linear als Dgl. der Funktion* $x(y)$: $\quad \dfrac{dx}{dy} = \dfrac{y^2-6x}{-2y}$

10.4.8 Beispiel
$(x-2xy-y^2)y' + y^2 = 0$ *ist linear als Dgl. der Funktion* $x(y)$.

– Bei Differentialgleichungen mit *konstanten Koeffizienten*

$$a \cdot y' + b \cdot y = c(x), \quad a, b \in \mathbb{R}$$

gibt es folgende Vereinfachungen:

10.4.9 Satz
Die homogene lineare Dgl. erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten $ay' + b \cdot y = 0$, $b \in \mathbb{R}$, *hat die Lösung*

$$y(x) = C \cdot e^{-\frac{b}{a} \cdot x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Lösung der *inhomogenen* linearen Dgl. 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten $ay' + by = c(x)$:

Tabellen für Ansätze in Abhängigkeit von der Gestalt der Störfunktion:

Störfunktion $c(x)$	Ansatzfunktion $y(x)$
$a_0 + a_1x + \dots a_nx^n$	$A_0 + A_1x + \cdots + A_nx^n$
$\alpha e^{\gamma x}$	$\begin{cases} A\,e^{\gamma x} & \text{, falls } \gamma \neq -\frac{b}{a} \\ Ax\,e^{\gamma x} & \text{, falls } \gamma = -\frac{b}{a} \quad (*) \end{cases}$
$\alpha\ \sin(\omega x) + \beta\ \cos(\omega x)$	$A\ \sin(\omega x) + B\ \cos(\omega x)$
$e^{\gamma x}(\alpha\ \sin(\omega x) + \beta\ \cos(\omega x))$	$e^{\gamma x}(A\ \sin(\omega x) + B\ \cos(\omega x))$

$(*)$ sogenannter *Resonanzfall.*

10.4.10 Beispiel

$$y' + 4y = 3x + 2$$

Lösung

a) Homogene Dgl.: $y' + 4y = 0$.
Nach Satz 10.4.9 ist die allgemeine Lösung:

$$y(x) = C \cdot e^{-4x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

b) Ansatz nach Tabelle für die inhomogene Dgl. $y' + 4y = 3x + 2$:

$$y = B_0 + B_1 x \quad \Longrightarrow \quad y' = B_1.$$

c) Einsetzen in Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} \underbrace{B_1}_{y'} + \underbrace{4(B_0 + B_1 x)}_{4y} &= 3x + 2 \\ \Longleftrightarrow \ B_1 + 4B_0 + 4B_1 x &= 3x + 2 \end{aligned}$$

d) Koeffizientenvergleich: $B_1 + 4B_0 = 2 \quad$ sowie $\quad 4B_1 = 3$,
also

$$B_1 = \frac{3}{4}, \quad B_0 = \frac{5}{16}.$$

e) Allgemeine Lösung:

$$y(x) = Ke^{-4x} + \frac{3}{4}x + \frac{5}{16}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

10.4.11 Beispiel

$$-2y' + y = e^{-x} \cos 2\pi x$$

Lösung

a) Homogene Dgl.:

$$-2y' + y = 0.$$

Nach Satz 10.4.9 ist die allgemeine Lösung:

$$y_h(x) = C \cdot e^{\frac{1}{2}x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

b) Ansatz nach Tabelle für die inhomogene Dgl. $-2y' + y = e^{-x}\cos 2\pi x$:

$$\begin{aligned} y &= e^{-x}(A\sin 2\pi x + B\cos 2\pi x) \\ \Longrightarrow y' &= -e^{-x}(A\sin 2\pi x + B\cos 2\pi x) \\ &\quad + e^{-x}(2\pi A\cos 2\pi x - 2\pi B\sin 2\pi x) \\ &= e^{-x}((-A - 2\pi B)\sin 2\pi x + (2\pi A - B)\cos 2\pi x) \end{aligned}$$

c) Einsetzen in Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} -2e^{-x}((-A - 2\pi B)\sin 2\pi x + (2\pi A - B)\cos 2\pi x) & \\ + e^{-x}(A\sin 2\pi x + B\cos 2\pi x) &= e^{-x}\cos 2\pi x \end{aligned}$$

d) Koeffizientenvergleich:
Koeffizient von $e^{-x}\sin 2\pi x$: $0 = 3A + 4\pi B$
Koeffizient von $e^{-x}\cos 2\pi x$: $1 = 3B - 4\pi A$.

$$\begin{array}{rcrcl} 3A & + & 4\pi B & = & 0 \\ -4\pi A & + & 3B & = & 1 \end{array} \Longrightarrow \quad A = \frac{-4\pi}{9+16\pi^2}, \quad B = \frac{3}{9+16\pi^2}$$

e) Partikuläre Lösung gemäß Ansatz:

$$y_p = e^{-x}\left(\frac{-4\pi}{9+16\pi^2}\sin 2\pi x + \frac{3}{9+16\pi^2}\cos 2\pi x\right).$$

f) Allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned} y &= y_h + y_p \\ &= C\cdot e^{\frac{1}{2}x} + e^{-x}\left(\frac{-4\pi}{9+16\pi^2}\sin 2\pi x + \frac{3}{9+16\pi^2}\cos 2\pi x\right) \quad (C \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

10.4.12 Beispiel

$$y' + by = 2e^{-bx}$$

Lösung

a) Allgemeine Lösung homogene Dgl.: $y_h = Ce^{-bx}, \quad C \in \mathbb{R}$.

b) Ansatz inhomogen (Resonanzfall): $y_p = Ax\,e^{-bx} \cdots \Longrightarrow A = 2$.

c) Allgemeine Lösung inhomogene Dgl.:

$$y = y_h + y_p = (2x + C)\,e^{-bx}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

10.4.13 Beispiel

$$xy' - y = x^2\cos x$$

Lösung

a) *Homogene Dgl.:* $xy' - y = 0$, Variablentrennung:

$$\begin{aligned} x\,\frac{dy}{dx} = y \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{y}\,dy = \frac{1}{x}\,dx \\ &\Longleftrightarrow \quad \int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{1}{x}\,dx \\ &\Longleftrightarrow \quad \ln|y| = \ln|x| + K^* \\ &\Longleftrightarrow \quad e^{\ln|y|} = e^{\ln|x|} \cdot e^{K^*} \\ &\Longrightarrow \quad y = Kx, \quad K \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

b) *Inhomogene Dgl.:* $xy' - y = x^2 \cos x$
Variation der Konstanten (keine konstanten Koeffizienten):

$$y = K(x) \cdot x \quad \Longrightarrow \quad y' = K'(x) \cdot x + K(x).$$

c) Einsetzen:

$$\begin{aligned} x(K'(x)\,x + K(x)) - K(x)\,x &= x^2 \cos x \\ \Longleftrightarrow x^2 K'(x) &= x^2 \cos x \\ \Longleftrightarrow K'(x) &= \cos x \\ \Longleftrightarrow K(x) &= \sin x + K_1 \end{aligned}$$

d) Lösung der inhomogenen Differentialgleichung:

$$y = K(x)\,x = x\,\sin x + K_1 x, \quad K_1 \in \mathbb{R}.$$

10.4.2 Lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Diese Klasse von Dgl. hat die Form

$$a \cdot y''(x) + b \cdot y'(x) + c \cdot y(x) = g(x) \qquad \text{mit } a, b, c \in \mathbb{R}$$

Allgemeine Lösung ist die Summe aus
der *allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung*
und einer *partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung.*

10.4.2.1 Allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

10.4.14 Satz
Die Dgl.

$$a\,y'' + b\,y' + c\,y = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

hat die allgemeine Lösung

$$y(x) = C_1\,y_1(x) + C_2\,y_2(x) \quad \textit{mit } C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

falls $y_1(x)$, $y_2(x)$ zwei linear unabhängige partikuläre Lösungen sind.

($y_1(x), y_2(x)$ sind linear unabhängig, falls
weder $y_1(x) = Ky_2(x)$
noch $y_2(x) = Ky_1(x)$ mit $K \in \mathbb{R}$ gilt.)

Es sind zwei linear unabhängige Lösungen von

$$a\,y'' + b\,y' + c\,y = 0 \tag{10.3}$$

zu suchen.

Lösungsansatz:

$$y = e^{\lambda x} \implies y' = \lambda e^{\lambda x} \tag{10.4}$$
$$\implies y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

Eingesetzt in (10.3):

$$a\lambda^2 e^{\lambda x} + b\lambda e^{\lambda x} + ce^{\lambda x} = 0$$
$$\iff (a\lambda^2 + b\lambda + c)e^{\lambda x} = 0$$
$$\iff a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \tag{10.5}$$

heißt *charakteristische Gleichung der Differentialgleichung.*

10.4.2.2 Lösungsmöglichkeiten für die charakteristische Gleichung

a) 1. Lösungsmöglichkeit: $\lambda_1 \neq \lambda_2$ reell.
Lösungen
$$\eta_1(x) = e^{\lambda_1 x}, \quad \eta_2(x) = e^{\lambda_2 x}$$
sind linear unabhängig, und
$$y(x) = K_1 e^{\lambda_1 x} + K_2 e^{\lambda_2 x}, \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R}$$
ist allgemeine Lösung der homogenen Dgl.

b) 2. Lösungsmöglichkeit für die char. Gleichung $\quad a\lambda^2 + b\lambda + c = 0.$

Komplexe Lösungen:

$$\lambda^2 + \frac{b}{a}\lambda + \frac{c}{a} = 0 \iff \lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

$$\iff \lambda = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad \text{und} \quad \frac{p^2}{4} - q < 0 \quad \text{bei komplexer Lösung}$$

$$\iff \lambda = \alpha \pm \beta j \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

$$\lambda_1 = \alpha + j\beta,\ \lambda_2 = \alpha - j\beta$$

(konjugiert komplexe Lösungen).

Lösungen gem. Ansatz (10.5):

$$\eta_1(x) = e^{(\alpha+j\beta)x}, \quad \eta_2(x) = e^{(\alpha-j\beta)x}.$$

Umwandlung der komplexen in reelle Lösungen:

$$\begin{aligned} \eta_1(x) &= e^{(\alpha+j\beta)x} = e^{\alpha x}e^{j\beta x}, \\ \eta_2(x) &= e^{(\alpha-j\beta)x} = e^{\alpha x}e^{-j\beta x}. \end{aligned}$$

(i)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\eta_1 + \eta_2) &= \frac{1}{2}e^{\alpha x}(e^{j\beta x} + e^{-j\beta x}) \\ &= e^{\alpha x}\cos\beta x \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2j}(\eta_1 - \eta_2) &= \frac{1}{2j}e^{\alpha x}(e^{j\beta x} - e^{-j\beta x}) \\ &= e^{\alpha x}\sin\beta x \end{aligned}$$

Allgemeine Lösung der homogenen Dgl. (10.3) im Falle komplexer Lösungen der charakteristischen Gleichung ist

$$y = e^{\alpha x}(K_1\sin\beta x + K_2\cos\beta x), \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R}.$$

c) 3. Lösungsmöglichkeit für die char. Gleichung: zusammenfallende reelle Lösungen.

$$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{p}{2} = -\frac{b}{2a}. \tag{10.6}$$

Eine Lösung ist $y = e^{\lambda x}$.

Ansatz Variation der Konstanten, um eine zweite Lösung zu finden

$$\begin{aligned}
y &= K(x)e^{\lambda x} \\[2ex]
y' &= K'(x)e^{\lambda x} + \lambda K(x)e^{\lambda x} \\
&= (K'(x) + \lambda K(x))e^{\lambda x} \\[2ex]
y'' &= (K''(x) + \lambda K'(x))e^{\lambda x} + (K'(x) + \lambda K(x))\lambda e^{\lambda x} \\
&= (K''(x) + 2\lambda K'(x) + \lambda^2 K(x))e^{\lambda x}
\end{aligned}$$

Einsetzen der Ansatzfunktion und ihrer Ableitungen in die homogene Dgl. (10.3):

$$\begin{aligned}
& a\,y'' + b\,y' + c\,y = 0 \\
\iff\quad & a(K''(x) + 2\lambda K'(x) + \lambda^2 K(x))e^{\lambda x} \\
& \qquad\qquad + b(K'(x) + \lambda K(x))e^{\lambda x} + cK(x)\,e^{\lambda x} = 0 \\
\iff\quad & a\,K''(x) + \underbrace{(2\lambda a + b)}_{=0 \quad \text{nach (10.6)}} K'(x) + \underbrace{(a\lambda^2 + b\lambda + c)}_{=0 \quad \text{nach (10.5)}} K(x) = 0 \\
\implies\quad & K''(x) = 0 \\
\iff\quad & K'(x) = K_1 \\
\iff\quad & K(x) = K_1 x + K_2
\end{aligned}$$

Allgemeine Lösung der Differentialgleichung in diesem Fall:

$$y = (K_1 x + K_2)e^{\lambda x}, \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R}.$$

10.4.15 Satz

Zwei linear unabhängige Lösungen von

$$a\,y'' + b\,y' + c\,y = 0$$

ergeben sich über die charakteristische Gleichung

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \tag{10.7}$$

wie folgt:

a) Falls (10.7) zwei reelle Lösungen $\lambda_1 \neq \lambda_2$ hat:

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 x},$$

b) Falls (10.7) konjugiert komplexe Lösungen $\lambda = \alpha \pm \beta j$ hat:

$$y_1 = e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad y_2 = e^{\alpha x} \cos \beta x,$$

c) Falls (10.7) eine doppelte reelle Lösung λ hat:

$$y_1 = e^{\lambda x}, \quad y_2 = x\, e^{\lambda x}.$$

10.4.16 Beispiel

$$y'' + 6y' + 25y = 0$$

Charakteristische Gleichung:

$$\lambda^2 + 6\lambda + 25 = 0$$

$$\Longleftrightarrow \lambda = -3 \pm \sqrt{9 - 25} = -3 \pm 4j.$$

Lösungen der Differentialgleichung:

$$y_1 = e^{-3x} \cos 4x, \quad y_2 = e^{-3x} \sin 4x.$$

10.4.17 Beispiel

$$y'' - 4y = 0$$

Charakteristische Gleichung:

$$\lambda^2 - 4 = 0.$$

Lösungen:

$$y_1(x) = e^{2x}, \quad y_2(x) = e^{-2x}.$$

10.4.18 Beispiel

$$y'' - 4y' = 0$$

Charakteristische Gleichung:

$$\lambda^2 - 4\lambda = 0.$$

Lösungen:

$$y_1(x) = e^{4x}, \quad y_2(x) = 1.$$

10.4.19 Beispiel

$$y'' + 6y' + 9y = 0$$

Charakteristische Gleichung: $(\lambda + 3)^2 = 0.$
Lösungen:

$$y_1(x) = e^{-3x}, \quad y_2(x) = xe^{-3x}.$$

10.4.2.3 Allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

10.4.20 Satz
Lösungen inhomogener linearer Differentialgleichungen 2. Ordnung:
Seien $y_1(x), y_2(x)$ linear unabhängige Lösungen der homogenen Differentialgleichung

$$a\,y'' + b\,y' + c\,y = 0 \quad (a, b, c \in \mathbb{R})$$

Dann ist die allgemeine Lösung von

$$a\,y'' + b\,y' + c\,y = f(x)$$

gegeben durch (Variationsansatz)

$$y(x) = A(x)\,y_1(x) + B(x)\,y_2(x)$$

mit

$$A'(x)\,y_1(x) + B'(x)\,y_2(x) \;=\; 0 \qquad (10.8)$$

$$A'(x)\,y_1'(x) + B'(x)y_2'(x) \;=\; f(x) \qquad (10.9)$$

(Lineares Gleichungssystem für A', B').

10.4.21 Beispiel

$$y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x^3}$$

Lösung

a) Charakteristische Gleichung:

$$\begin{aligned} & \lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & (\lambda + 2)^2 = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & \lambda = -2 \quad \text{(reell, doppelte Nullstelle)} \end{aligned}$$

b) Lösungen der homogenen Dgl.:

$$y_1(x) = e^{-2x}, \quad y_2(x) = x\,e^{-2x}$$

bzw.

$$y(x) = K_1 y_1(x) + K_2 y_2(x) = (K_1 + K_2 x)e^{-2x}.$$

c) Inhomogene Dgl. $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{e^{-2x}}{x^3}$.

Ansatz :

$$y = A(x)\, e^{-2x} + B(x)\, x\, e^{-2x} \tag{10.10}$$

mit

$$\begin{array}{lrcl} (i) & A'(x)\, e^{-2x} + \quad B'(x)\, x\, e^{-2x} & = & 0 \\ (ii) & -2A'(x)\, e^{-2x} + B'(x)\,(e^{-2x} - 2x\, e^{2x}) & = & \dfrac{e^{-2x}}{x^3} \\ 2(i) + (ii) & B'(x)\, e^{-2x} & = & \dfrac{e^{-2x}}{x^3} \end{array}$$

$$\Longrightarrow B'(x) = x^{-3}, \quad B(x) = \int x^{-3} dx = -\frac{1}{2} x^{-2} + C_2 \tag{10.11}$$

und mit (i) folgt:

$$A'(x) = -B'(x)x = -x^{-2}, \quad A(x) = -\int x^{-2} dx = x^{-1} + C_1 \tag{10.12}$$

d) Ergebnis:

Die Lösungen (10.11), (10.12) in den Variationsansatz (10.10) eingesetzt ergibt:

$$\begin{aligned} y &= A(x)\, e^{-2x} + B(x)\, x\, e^{-2x} \\ &= (x^{-1} + C_1)e^{-2x} + (-\frac{1}{2}x^{-2} + C_2)xe^{-2x} \\ &= x^{-1}e^{-2x} + C_1 e^{-2x} - \frac{1}{2}x^{-1}e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} \\ &= \frac{1}{2}x^{-1}e^{-2x} + C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

10.4.22 Beispiel

$$y'' + y = \frac{2}{\cos x}, \quad |x| < \frac{\pi}{2}$$

Lösung

a) Charakteristische Gleichung:

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \lambda = \pm j \quad \text{(konj. komplex)}$$

b) Lösungen der homogenen Dgl.:

$$y_1(x) = \cos x, \quad y_2(x) = \sin x$$

bzw.

$$y(x) = K_1 y_1(x) + K_2 y_2(x) = K_1 \cos x + K_2 \sin x.$$

c) Inhomogene Dgl. $y'' + y = \dfrac{2}{\cos x}$.

Ansatz :

$$y = A(x)\ \cos x + B(x)\ \sin x \tag{10.13}$$

mit

$$\begin{array}{lrcl} (i) & A'(x)\ \cos x + B'(x)\ \sin x & = & 0 \\ (ii) & -A'(x)\ \sin x + B'(x)\ \cos x & = & \dfrac{2}{\cos x} \\ (i)\cdot \sin x + (ii)\cdot \cos x : & B'(x) & = & 2 \end{array}$$

$$\Longrightarrow B'(x) = 2, \quad B(x) = 2x + C_2 \tag{10.14}$$

Mit (i) folgt:

$$A'(x) = -B'(x)\tan x = -2\tan x,$$

$$A(x) = -2\int \frac{\sin x}{\cos x}dx = 2\ln|\cos x| + C_1 \tag{10.15}$$

d) Ergebnis:
Die Lösungen (10.14), (10.15) in den Variationsansatz (10.13) eingesetzt ergibt:

$$\begin{aligned} y(x) &= A(x)\cos x + B(x)\sin x \\ &= C_1\cos x + C_2\sin x + 2\cos x\ \ln\ |\cos x| + 2x\ \sin x \end{aligned}$$

10.4.23 Beispiel

$$y'' + 3y' + 2y = (1 + e^x)^{-1}$$

Lösung

a) Charakteristische Gleichung:

$$\begin{aligned} & \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & (\lambda+1)(\lambda+2) = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & \lambda = -1 \text{ oder } \lambda = -2 \end{aligned}$$

b) Lösungen der homogenen Dgl.:

$$y_1(x) = e^{-x}, \quad y_2(x) = e^{-2x}$$

bzw.

$$y(x) = K_1e^{-x} + K_2e^{-2x}$$

c) Inhomogene Dgl. $y'' + 3y' + 2y = (1 + e^x)^{-1}$.
Ansatz : $y = A(x)\, e^{-x} + B(x)\, e^{-2x}$ mit

$$\begin{array}{lrcl} (i) & A'(x)\, e^{-x} + B'(x)\, e^{-2x} & = & 0 \\ (ii) & -A'(x)\, e^{-x} - 2B'(x)\, e^{-2x} & = & \dfrac{1}{1+e^x} \end{array}$$

$$2(i) + (ii): \quad A'(x)\, e^{-x} = \frac{1}{1+e^x} \iff A(x) = \int \frac{e^x}{1+e^x}\, dx$$

$$(i) + (ii): \quad -B'(x)\, e^{-2x} = \frac{1}{1+e^x} \iff B(x) = -\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\, dx$$

d) Ergebnis: $y = A(x)\, e^{-x} + B(x)\, e^{-2x}$ mit

$$\begin{aligned} A(x) &= \int \frac{e^x}{1+e^x} dx = \int \frac{u}{1+u} \frac{du}{u} = \int \frac{1}{1+u} du \\ &= \ln(1+u) + C_1 \quad = \quad \ln(1+e^x) + C_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(x) &= -\int \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx = -\int \frac{u^2}{1+u} \frac{du}{u} \\ &= -\int \frac{u}{1+u} du = -\int \left(\frac{u+1}{1+u} - \frac{1}{1+u} \right) du \\ &= -u + \ln(1+u) + C_2 = -e^x + \ln(1+e^x) + C_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow y &= C_1 e^{-x} + e^{-x} \ln(1+e^x) \\ &+ C_2 e^{-2x} + e^{-2x} \ln(1+e^x) - e^{-x} \\ &= C_1' e^{-x} + C_2 e^{-2x} + (1 + e^{-x})\, e^{-x} \ln(1+e^x), \quad C_1', C_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

10.4.2.4 Tabellenansätze für gebräuchliche Störfunktionen

Ansatz für eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung:

$$y'' + p\, y' + q\, y = g(x).$$

Seien λ_1, λ_2 die Lösungen der charakteristischen Gleichung

$$\lambda^2 + p\, \lambda + q = 0.$$

In Abhängigkeit von der charakteristischen Gleichung und der Störfunktion wird nach folgender Tabelle ein Lösungsansatz (für eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung) gemacht:

Störfunktion $g(x)$	Ansatz $y_p(x)$
$g(x) = P(x)$	$y(x) = \begin{cases} Q(x), & q \neq 0 \\ x\,Q(x), & p \neq 0, q = 0 \\ x^2\,Q(x), & p = q = 0 \end{cases}$
$g(x) = ae^{cx}$	$y(x) = \begin{cases} A\,e^{cx}, & c \neq \lambda_1 \text{ und } c \neq \lambda_2 \\ A\,x\,e^{cx}, & c = \lambda_1 \text{ und } c \neq \lambda_2 \\ A\,x^2\,e^{cx}, & c = \lambda_1 = \lambda_2 \end{cases}$
$g(x) = a\sin(\omega x) + b\cos(\omega x), \quad \omega \neq 0$	$y(x) = \begin{cases} A\sin(\omega x) + B\cos(\omega x), \\ \quad j\omega \neq \lambda_1 \text{ und } j\omega \neq \lambda_2 \\ x\,\left(A\sin(\omega x) + B\cos(\omega x)\right), \\ \quad j\omega = \lambda_1 \text{ oder } j\omega = \lambda_2 \end{cases}$
$g(x) = e^{cx}\,\big(a\sin(\omega x) + b\cos(\omega x)\big), \quad \omega \neq 0$	$y(x) = \begin{cases} e^{cx}\,\left(A\sin(\omega x) + B\cos(\omega x)\right), \\ \quad c + j\omega \neq \lambda_1 \text{ und } c + j\omega \neq \lambda_2 \\ x\,e^{cx}\,\left(A\sin(\omega x) + B\cos(\omega x)\right), \\ \quad c + j\omega = \lambda_1 \text{ oder } c + j\omega = \lambda_2 \end{cases}$
$g(x) =$ $P_1(x)\sin(\omega x) + P_2(x)\cos(\omega x), \quad \omega \neq 0$	$y(x) = \begin{cases} Q_1(x)\sin(\omega x) + Q_2(x)\cos(\omega x), \\ \quad j\omega \neq \lambda_1 \text{ und } j\omega \neq \lambda_2 \\ x\,\left(Q_1(x)\sin(\omega x) + Q_2(x)\cos(\omega x)\right), \\ \quad j\omega = \lambda_1 \text{ oder } j\omega = \lambda_2 \end{cases}$
$g(x) = P(x)\,e^{cx}$	$y(x) = \begin{cases} Q(x)\,e^{cx}, & c \neq \lambda_1 \text{ und } c \neq \lambda_2 \\ x\,Q(x)\,e^{cx}, & c = \lambda_1 \text{ und } c \neq \lambda_2 \\ x^2\,Q(x)\,e^{cx}, & c = \lambda_1 = \lambda_2 \end{cases}$
$g(x) =$ $e^{cx}\,\big(P_1(x)\sin(\omega x) + P_2(x)\cos(\omega x)\big), \quad \omega \neq 0$	$y(x) = \begin{cases} e^{cx}\,\left(Q_1(x)\sin(\omega x) + Q_2(x)\cos(\omega x)\right), \\ \quad c + j\omega \neq \lambda_1 \text{ und } c + j\omega \neq \lambda_2 \\ x\,e^{cx}\,\left(Q_1(x)\sin(\omega x) + Q_2(x)\cos(\omega x)\right), \\ \quad c + j\omega = \lambda_1 \text{ oder } c + j\omega = \lambda_2 \end{cases}$

Dabei seien $P(x), P_1(x), P_2(x), \quad Q(x), Q_1(x), Q_2(x)$: Polynome vom Grad n
$P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n, \quad Q(x) = A_0 + A_1x + \cdots + A_nx^n$ etc.)

10.4.24 Beispiel

$$y'' - 4y = 2x^2$$

Lösung

a) Homogene Dgl., char. Gleichung: $\lambda^2 - 4 = 0 \iff \lambda = \pm 2$.
   Lösung der homogenen Dgl.:

$$y_h(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x}.$$

b) Ansatz für partikuläre Lösung der inhomog. Dgl.:

$$\begin{aligned} y_p(x) &= A_0 + A_1 x + A_2 x^2 \\ \Longrightarrow y'(x) &= A_1 + 2A_2 x \\ \Longrightarrow y''(x) &= 2A_2 \end{aligned}$$

   Einsetzen in Differentialgleichung:

$$2A_2 - 4A_0 - 4A_1 x - 4A_2 x^2 = 2x^2$$

c) Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned} 2A_2 - 4A_0 = 0 & \\ -4A_1 = 0 &\Longrightarrow A_1 = 0 \\ -4A_2 = 2 &\Longrightarrow A_2 = -\frac{1}{2} \\ &\Longrightarrow A_0 = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

d) Partikuläre Lösung:

$$y_p(x) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2}x^2$$

e) Ergebnis:

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h(x) + y_p(x) \\ &= C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}x^2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

10.4.25 Beispiel

$$y'' - 2y' + y = e^{2x}$$

Lösung

a) Homogene Dgl., char. Gleichung: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \iff \lambda = 1$.
Lösung der homogenen Dgl.:

$$y_h(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x.$$

b) Ansatz für partikuläre Lösung der inhomog. Dgl.: $y_p(x) = Ae^{2x}$
Partikuläre Lösung:

$$y_p(x) = e^{2x}.$$

c) Allgemeine Lösung:

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + e^{2x}$$

10.4.26 Beispiel

$$y'' + 6y' = 36x^3$$

Lösung

a) Homogene Dgl., char. Gleichung: $\lambda^2 + 6\lambda = 0 \iff \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -6$.
Lösung der homogenen Dgl.: $y_h(x) = C_1 + C_2 e^{-6x}$.

b) Ansatz für partikuläre Lösung der inhomog. Dgl.: $y_p(x) = A_0 x + A_1 x^2 + A_2 x^3 + A_3 x^4$
Partikuläre Lösung: $y_p(x) = -\frac{1}{6}x + \frac{1}{2}x^2 - x^3 + \frac{3}{2}x^4$

c) Allgemeine Lösung:

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{-6x} - \frac{1}{6}x + \frac{1}{2}x^2 - x^3 + \frac{3}{2}x^4$$

10.4.27 Beispiel

$$\ddot{x} + k^2 x = 2k \sin kt$$

Lösung

a) Homogene Dgl., char. Gleichung: $\lambda^2 + k^2 = 0 \iff \lambda = \pm kj$.
Lösung der homogenen Dgl.:

$$y_h(x) = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt.$$

b) Ansatz für partikuläre Lösung der inhomog. Dgl.: $y_p(x) = t\,(A \cos kt + B \sin kt)$
Partikuläre Lösung:

$$y_p(x) = -t \cos kt$$

c) Allgemeine Lösung:

$$y(x) = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt - t \cos kt$$

10.4.28 Beispiel

$$y'' - 4y' + 13y = e^{2x} \sin 3x$$

Lösung

a) Homogene Dgl., char. Gleichung: $\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0 \iff \lambda = 2 \pm 3j$.
Lösung der homogenen Dgl.:

$$y_h(x) = C_1 e^{2x} \cos 3x + C_2 e^{2x} \sin 3x.$$

b) Ansatz für partikuläre Lösung der inhomog. Dgl.:

$$\begin{aligned}
y_p(x) &= Ax\, e^{2x} \cos 3x + Bx\, e^{2x} \sin 3x \\
y_p'(x) &= Ae^{2x} \cos 3x + 2Ax\, e^{2x} \cos 3x - 3Ax\, e^{2x} \sin 3x \\
&+ B\, e^{2x} \sin 3x + 2Bx\, e^{2x} \sin 3x + 3Bx\, e^{2x} \cos 3x \\
y_p''(x) &= 4Ae^{2x} \cos 3x - 5Ax\, e^{2x} \cos 3x - 12Ax\, e^{2x} \sin 3x - 6A\, e^{2x} \sin 3x \\
&+ 4B\, e^{2x} \sin 3x + 6B\, e^{2x} \cos 3x - 5Bx\, e^{2x} \sin 3x + 12Bx\, e^{2x} \cos 3x
\end{aligned}$$

c) Einsetzen in Differentialgleichung $y_p'' - 4y_p' + 13y_p = e^{2x} \sin 3x$ ergibt:

$$\begin{aligned}
y_p'' - 4y_p' + 13y_p \quad &= \quad e^{2x} \sin 3x \\
\iff 4Ae^{2x} \cos 3x - 5Ax\, e^{2x} \cos 3x - 12Ax\, e^{2x} \sin 3x - 6A\, e^{2x} \sin 3x \\
+ 4B\, e^{2x} \sin 3x + 6B\, e^{2x} \cos 3x - 5Bx\, e^{2x} \sin 3x + 12Bx\, e^{2x} \cos 3x \\
- 4(Ae^{2x} \cos 3x + 2Ax\, e^{2x} \cos 3x - 3Ax\, e^{2x} \sin 3x \\
+ B\, e^{2x} \sin 3x + 2Bx\, e^{2x} \sin 3x + 3Bx\, e^{2x} \cos 3x) \\
+ 13(Ax\, e^{2x} \cos 3x + Bx\, e^{2x} \sin 3x) \quad &= \quad e^{2x} \sin 3x \\
\iff (4A + 6B - 4A)\, e^{2x} \cos 3x + (-6A + 4B - 4B)\, e^{2x} \sin 3x \\
+ (-5A + 12B - 8A - 12B + 13A)\, x\, e^{2x} \cos 3x \\
+ (12A - 5B - 12A - 8B + 13B)\, x\, e^{2x} \sin 3x \quad &= \quad e^{2x} \sin 3x \\
\iff 6B\, e^{2x} \cos 3x - 6A\, e^{2x} \sin 3x \quad &= \quad e^{2x} \sin 3x
\end{aligned}$$

d) Koeffizientenvergleich: $B = 0, \quad A = -\dfrac{1}{6}$. Koeffizienten: $A = -\dfrac{1}{6}, \quad B = 0$:

$$y_p(x) = Ax\, e^{2x} \cos 3x + Bx\, e^{2x} \sin 3x$$

Partikuläre Lösung:

$$y_p(x) = -\frac{1}{6} x\, e^{2x} \cos 3x$$

e) Allgemeine Lösung der Dgl.

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 e^{2x}\cos 3x + C_2 e^{2x}\sin 3x - \frac{1}{6}x\, e^{2x}\cos 3x$$

10.4.29 Beispiel

$$y''' - 7y'' + 6y' = \cos x$$

Lösung

Betrachte die Aufgabe als Dgl. in $z := y'$:

$$z'' - 7z' + 6z = \cos x.$$

a) Homogene Dgl. für $z = y'$, char. Gleichung: $\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0 \iff \lambda = 1,\ \lambda = 6.$
Lösung der homogenen Dgl.: $z_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{6x}$.

b) Ansatz für partikuläre Lösung der inhomog. Dgl.: $z_p(x) = A\cos x + B\sin x$
Partikuläre Lösung: $z_p(x) = \frac{5}{74}\cos x - \frac{7}{74}\sin x$

c) Allgemeine Lösung $z(x) = C_1 e^x + C_2 e^{6x} + \frac{5}{74}\cos x - \frac{7}{74}\sin x$:

$$y(x) = \int z(x)\, dx = C_1 e^x + C_2' e^{6x} + C_3 + \frac{5}{74}\sin x + \frac{7}{74}\cos x$$

10.4.30 Beispiel

$$y^{(4)} + y'' = x(1-x)^2$$

Lösung

a) Homogene Dgl. $(z = y'')$, char. Gleichung: $\lambda^2 + 1 = 0 \iff \lambda = \pm j.$
Lösung der homogenen Dgl.:

$$z_h(x) = C_1\cos x + C_2\sin x.$$

b) Ansatz für partikuläre Lösung der inhomog. Dgl.: $z_p(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3$
Partikuläre Lösung:

$$z_p(x) = 4 - 5x - 2x^2 + x^3$$

c) Allgemeine Lösung $z(x) = C_1\cos x + C_2\sin x + 4 - 5x - 2x^2 + x^3$:

$$y(x) = C_1\cos x + C_2\sin x + C_3 + C_4 x + 2x^2 - \frac{5}{6}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{20}x^5$$

– Besteht die Störfunktion aus mehreren verschiedenartigen *Summanden*, so ist der folgende Satz anwendbar:

10.4.31 Satz (Überlagerungssatz)
Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}$.
Sei $y_{p,1}(x)$ eine Lösung der Dgl.

$$a\,y'' + b\,y' + c\,y = g_1(x)$$

und $y_{p,2}(x)$ eine Lösung von

$$a\,y'' + b\,y' + c\,y = g_2(x).$$

Dann ist $y_p(x) = y_{p,1}(x) + y_{p,2}(x)$ eine Lösung von

$$a\,y'' + b\,y' + c\,y = g_1(x) + g_2(x).$$

10.4.32 Beispiel

$$\ddot{y} - \dot{y} - 6y = 2\cosh 2t$$

Lösung

a) Homogene Dgl., char. Gleichung: $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0 \iff \lambda = 3, \lambda = -2$.
Lösung der homogenen Dgl.:

$$y_h(x) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-2t}.$$

b) Die Störfunktion ist $2\cosh 2t = e^{2t} + e^{-2t}$.

c) Erster Ansatz für partikuläre Lösung der inhomogenen Dgl.: $y_{p,1}(t) = Ate^{-2t}$
Erste partikuläre Lösung: $y_{p,1}(t) = -\frac{1}{5}te^{-2t}$

d) Zweiter Ansatz für partikuläre Lösung der inhomogenen Dgl.: $y_{p,2}(t) = Ae^{2t}$
Zweite partikuläre Lösung: $y_{p,2}(t) = -\frac{1}{4}e^{2t}$

e) Allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned} y(t) &= y_h(t) + y_{p,1}(t) + y_{p,2}(t) \\ &= C_1 e^{3t} + C_2 e^{-2t} - \frac{1}{5} t\, e^{-2t} - \frac{1}{4} e^{2t} \end{aligned}$$

10.4.33 Beispiel

$$y'' - 2y' - 8y = 4 + 3e^{4x} - 18xe^{2x}$$

Lösung

a) Homogene Dgl., char. Gleichung: $\lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0 \iff \lambda = -2, \lambda = 4$.
Lösung der homogenen Dgl.:

$$y_h(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{4x}.$$

b) Ansatz für partikuläre Lösung der inhomogenen Dgl.:

$$y_p(x) = A + Bx\, e^{4x} + (C + Dx)e^{2x}$$

c) Partikuläre Lösung:

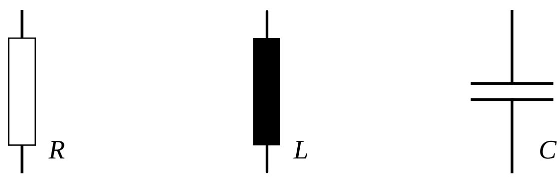
$$y_p(x) = -\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}x\right) e^{4x} + \left(\frac{9}{4}x + \frac{9}{16}\right) e^{2x}$$

d) Allgemeine Lösung:

$$y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{4x} - \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) x\, e^{4x} + \left(\frac{9}{4}x + \frac{9}{16}\right) e^{2x}$$

10.5 Elektrische Schaltungen und Differentialgleichungen

Ohmscher Widerstand, Kapazität, Induktivität:
Zusammenhang zwischen Stromstärke und Spannung mit Hilfe von Ableitungen



$$U = R\,i \qquad U = L\,\frac{di}{dt} \qquad i = C\,\frac{dU}{dt}$$

10.5.1 Beispiel
Die Schaltung in Abbildung 10.1
sei für $t < 0$ spannungsfrei
und habe für $t \geq 0$ konstante Spannung U_q.
Gesucht: Spannungs- und Stromverlauf an der Spule

$$U_L(t), \quad i_L(t).$$

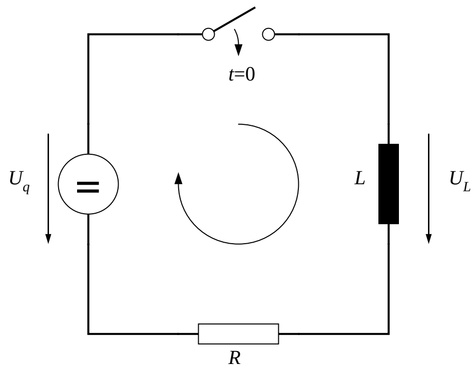


Abbildung 10.1: Zu Beispiel 10.5.1

Lösung

a) Aufstellen der Gleichung:

Summe der Spannungen bei einmaligem Umlauf:

$$U_L + R \cdot i - U_q = 0.$$

Induktionsgesetz:

$$U_L = L\,\frac{di}{dt}$$

Lineare inhomogene Differentialgleichung

$$L\,\frac{di}{dt} + R \cdot i = U_q. \tag{10.16}$$

i:	gesuchte Funktion,
R, L:	gegebene konstante Koeffizienten,
U_q:	Störfunktion.

b) Zugehörige *homogene Differentialgleichung:*

$$L\,\frac{di}{dt} + R \cdot i = 0.$$

c) Trennung der Variablen:

$$\begin{aligned}
\frac{di}{i} = -\frac{R}{L}dt \quad &\Longleftrightarrow \quad \int \frac{di}{i} = -\frac{R}{L}\int dt \\
&\Longleftrightarrow \quad \ln|i| = -\frac{R}{L}t + c \\
&\Longleftrightarrow \quad i = K\,e^{-\frac{R}{L}t}
\end{aligned}$$

d) Inhomogene Differentialgleichung, Variationsansatz:

$$i(t) = K(t)\, e^{-\frac{R}{L}t}$$

Es ist

$$\frac{di}{dt} = \dot{K}(t)\, e^{-\frac{R}{L}t} - \frac{R}{L} K(t)\, e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Eingesetzt in die inhomogene Differentialgleichung:

$$L\, \dot{K}(t)\, e^{-\frac{R}{L}t} - R\, K(t)\, e^{-\frac{R}{L}t} + R\, K(t)\, e^{-\frac{R}{L}t} = U_q$$

$$\Longleftrightarrow \quad L\, \dot{K}(t)\, e^{-\frac{R}{L}t} = U_q$$

$$\Longleftrightarrow \quad \dot{K}(t) = \frac{U_q}{L}\, e^{\frac{R}{L}t}$$

$$\Longleftrightarrow \quad K(t) = \frac{U_q}{L} \int e^{\frac{R}{L}t}\, dt$$

$$\Longleftrightarrow \quad K(t) = \frac{U_q}{L}\, \frac{L}{R}\, e^{\frac{R}{L}t} + k$$

e) Lösung der inhomogenen Dgl.:

$$i(t) = K(t)\, e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{U_q}{R} + k\, e^{-\frac{R}{L}t}$$

f) Anfangsbedingung:

$$i(0) = 0: \qquad \frac{U_q}{R} + k\, e^0 = 0$$

$$\Longrightarrow \qquad k = -\frac{U_q}{R}$$

$$\Longrightarrow \qquad i(t) = \frac{U_q}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

10.5.2 Beispiel

Unverzweigter Schaltkreis: Kondensator C, Spule L, Widerstand R (Abbildung 10.3).
Schalter werde zu $t = 0$ geschlossen.
Vorher: $U_C(t) = U_0$ $(t < 0)$.
Bestimme $U_C(t)$, $U_L(t)$, $U_R(t)$, $i(t)$.

Lösung

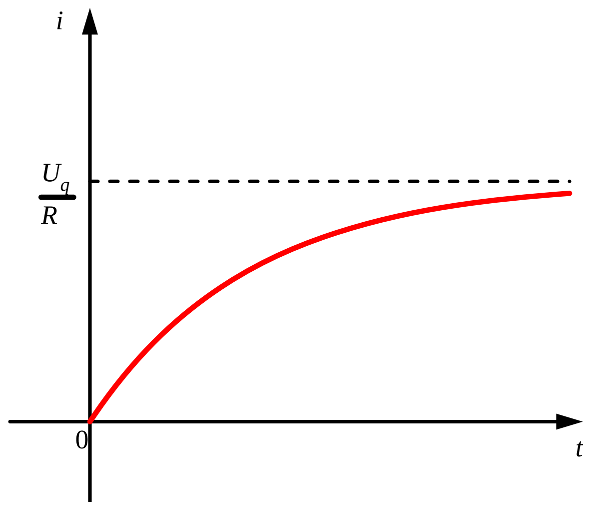


Abbildung 10.2: Beispiel 10.5.1, Schematischer Verlauf von $i(t)$

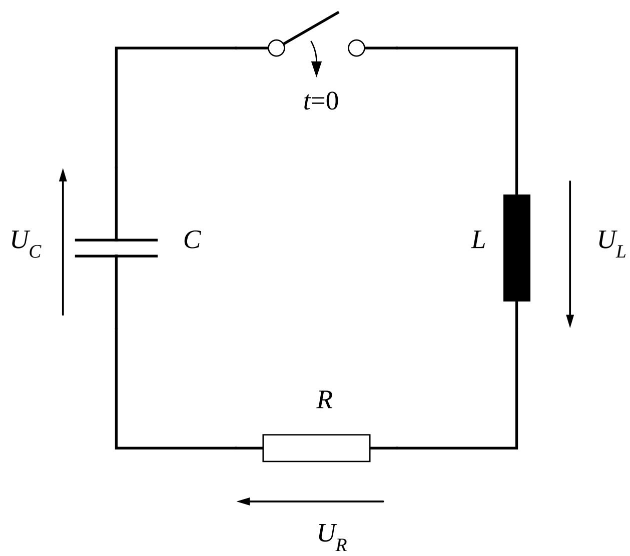


Abbildung 10.3: gedämpfter Schwingkreis

a) Aufstellen der Dgl:

Es gilt

$$U_C + U_L + U_R = 0.$$

Spannung, Strom bei R, L, C:

$$U_R = R \cdot i, \quad U_L = L\,\frac{di}{dt}, \quad C\,\frac{dU_C}{dt} = i.$$

$$\begin{aligned} U_C + U_R + U_L &= 0 \\ \Longleftrightarrow U_C &= -U_R - U_L \\ &= -R \cdot i - L \frac{di}{dt} \\ &= -R\,C \frac{dU_C}{dt} - L\,C \frac{d^2 U_C}{dt^2} \end{aligned}$$

b)

$$U_C = -R\,C \frac{dU_C}{dt} - L\,C \frac{d^2 U_C}{dt^2}$$

ist eine lineare homogene Dgl. zweiter Ordnung für $U_C(t)$,
Standardform:

$$\begin{aligned} L\,C \frac{d^2 U_C}{dt^2} + R\,C \frac{dU_C}{dt} + U_C &= 0 \\ \Longleftrightarrow \frac{d^2 U_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dU_C}{dt} + \frac{1}{LC} U_C &= 0 \end{aligned}$$

Charakteristische Gleichung:

$$\lambda^2 + \frac{R}{L} \lambda + \frac{1}{LC} = 0$$

$$\begin{aligned} \Longleftrightarrow \lambda &= -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} \\ &= -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2 C - 4L}{4L^2 C}} \end{aligned}$$

c) Es sind drei Fälle zu unterscheiden:

(i) $R^2 C < 4L$:

Schwingung

$$U_C(t) = e^{-a\,t} \left(U_1 \sin \omega t + U_0 \cos \omega t \right).$$

mit Dämpfungsfaktor $a = \dfrac{R}{2L}$

und Frequenz $\omega = \sqrt{\dfrac{4L - R^2 C}{4L^2 C}}$.

Für den Fall $R = 0$ ergibt sich eine ungedämpfte Schwingung.

(ii) $R^2C = 4L$: aperiodischer Grenzfall mit

$$U_C(t) = e^{-a\,t}(U_1 t + U_0), \quad a = \frac{R}{2L}$$

(iii) $R^2C > 4L$: Lösung

$$U_C(t) = U_1 e^{-a_1 t} + U_2 e^{-a_2 t}$$

mit $a_1 = \frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2C - 4L}{4L^2C}}$ und $a_2 = \frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2C - 4L}{4L^2C}}$.

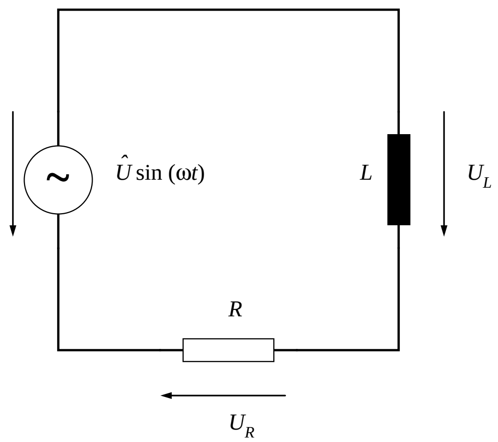


Abbildung 10.4: Widerstand und Induktivität in Reihe mit Wechselspannungsquelle

10.5.3 Beispiel
Wechselstromkreis, Widerstand R, Induktivität L, Reihenschaltung (siehe Abbildung 10.4)

$$L\frac{di}{dt} + Ri = \hat{U}\sin(\omega t)$$

Lösung

a) Homogene Lösung:

$$\begin{aligned} L\frac{di}{dt} + Ri = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{di}{i} = -\frac{R}{L}dt \\ &\Longrightarrow \quad \ln|i| = -\frac{R}{L}t + C \\ &\Longrightarrow \quad i = Ke^{-\frac{R}{L}t}, \quad K \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

b) Partikuläre inhomogene Lösung:

Ansatz nach Tabelle

$$\begin{aligned} i(t) &= A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) \\ \frac{di}{dt} &= \omega(A\cos(\omega t) - B\sin(\omega t)) \end{aligned}$$

in die Differentialgleichung eingesetzt:

$$\begin{aligned} & L\omega(A\cos(\omega t) - B\sin(\omega t)) \\ & \qquad + AR\sin(\omega t) + BR\cos(\omega t) = \hat{U}\sin(\omega t) \\ \iff & (-BL\omega + AR)\sin(\omega t) \\ & \qquad + (AL\omega + BR)\cos(\omega t) = \hat{U}\sin(\omega t) \\ \iff & -BL\omega + AR = \hat{U}, \quad AL\omega + BR = 0 \\ \iff & A = \frac{\hat{U}R}{R^2 + L^2\omega^2}, \quad B = -\frac{\hat{U}L\omega}{R^2 + L^2\omega^2}. \end{aligned}$$

c) Die Lösung ist daher

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{\hat{U}R}{R^2 + L^2\omega^2}\sin(\omega t) - \frac{\hat{U}L\omega}{R^2 + L^2\omega^2}\cos(\omega t)) + Ke^{-\frac{R}{L}t} \quad (K \in \mathbb{R}) \\ &= \hat{U}\sin(\omega t - \alpha) + Ke^{-\frac{R}{L}t} \quad (K \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

mit $\tan\alpha = \dfrac{L\omega}{R}$ (Umwandlung gemäß Satz 2.7.12).

10.5.4 Beispiel

Wechselspannungsquelle, Kondensator C und Widerstand R in Reihe. (siehe Bild 10.5).

Es gelte $U_C(0) = U_0$.

Die Spannungsquelle soll eine Spannung $U_q(t) = \hat{U}\sin(\omega t)$ liefern.

Lösung

Da der Stromkreis unverzweigt ist, gilt

$$i_C = i_R = i,$$

also wegen

$$i_C = C\frac{dU_C}{dt}$$

bei einem Maschenumlauf:

$$\begin{aligned} U_C + U_R = U_q &\iff U_C + R\,i = \hat{U}\sin(\omega t) \\ &\iff U_C + R\,C\frac{dU_C}{dt} = \hat{U}\sin(\omega t) \qquad (10.17) \end{aligned}$$

Dies ist eine inhomogene Dgl. erster Ordnung für U_C.

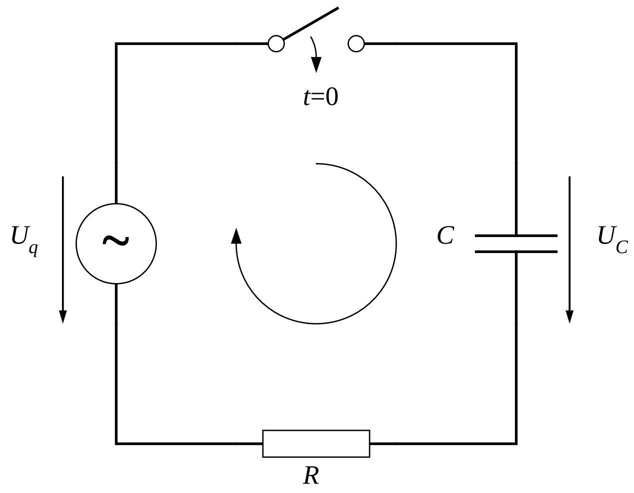


Abbildung 10.5: Wechselspannungskreis

a) Lösung der zugehörigen homogenen Dgl nach Satz 10.4.9:

$$U_h(t) = U_1 \cdot e^{-\frac{1}{RC}t}, \quad U_1 \in \mathbb{R}. \tag{10.18}$$

b) Ansatz für die inhomogene Dgl. nach Tabelle:

$$U_p(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) \Longrightarrow \dot{U}_C(t) = A\omega\cos(\omega t) - B\omega\sin(\omega t).$$

Eingesetzt in (10.17) ergibt sich:

$$A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) + ARC\omega\cos(\omega t) - BRC\omega\sin(\omega t) = \hat{U}\sin(\omega t)$$

$$\Longleftrightarrow \quad (A - RC\omega B)\sin(\omega t) + (RC\omega A + B)\cos(\omega t) = \hat{U}\sin(\omega t)$$

Koeffizientenvergleich:

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{array}{rcrcl} A & - & RC\omega B & = & \hat{U} \\ RC\omega A & + & B & = & 0 \end{array}$$

$$\Longleftrightarrow \quad A = \frac{\hat{U}}{(RC\omega)^2 + 1}, \quad B = -\frac{RC\omega\hat{U}}{(RC\omega)^2 + 1}.$$

die gefundene partikuläre Lösung ist daher

$$U_p(t) = \frac{\hat{U}}{(RC\omega)^2 + 1}\sin(\omega t) - \frac{RC\omega\hat{U}}{(RC\omega)^2 + 1}\cos(\omega t).$$

c) Allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung (10.17):

$$\begin{aligned} U_C(t) &= U_h(t) + U_p(t) \\ &= U_1 \cdot e^{-\frac{1}{RC}t} + \frac{\hat{U}}{(RC\omega)^2+1}\sin(\omega t) - \frac{RC\omega\hat{U}}{(RC\omega)^2+1}\cos(\omega t). \end{aligned}$$

Die Integrationskonstante (der freie Parameter) ist U_1, alle anderen Parameter sind mit der Aufgabenstellung gegebene Konstanten.

d) Es ist noch die Anfangsbedingung $U_C(0) = U_0$ zu berücksichtigen:

$$U_0 = U_1 - \frac{RC\omega\hat{U}}{(RC\omega)^2+1} \iff U_1 = U_0 + \frac{RC\omega\hat{U}}{(RC\omega)^2+1}.$$

e) Lösung der Aufgabe:

$$\begin{aligned} U_C(t) &= \left(U_0 + \frac{RC\omega\hat{U}}{(RC\omega)^2+1}\right) e^{-\frac{1}{RC}t} \\ &\quad + \frac{\hat{U}}{(RC\omega)^2+1}\sin(\omega t) - \frac{RC\omega\hat{U}}{(RC\omega)^2+1}\cos(\omega t) \\ &= \left(U_0 + \frac{RC\omega\hat{U}}{(RC\omega)^2+1}\right) e^{-\frac{1}{RC}t} + \hat{U}\sin(\omega t - \varphi) \end{aligned}$$

mit $\tan\varphi = RC\omega$ (Phasenverschiebung gemäß Satz 2.7.12).

Literaturverzeichnis

[1] Lothar Papula
Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Band 1
ISBN 978-3-8348-1749-5
Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Band 2
ISBN 978-3-8348-1589-7
Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Band 3
ISBN 978-3-8348-1227-8
Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Anwendungsbeispiele
ISBN 978-3-8348-1583-5
Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Klausur- und Übungsaufgaben
ISBN 978-3-8348-1305-3
Mathematische Formelsammlung für Ingenieure und Naturwissenschaftler
ISBN 978-3-8348-0757-1
Vieweg Verlag `http://www.springer-vieweg.de`

[2] Michael Knorrenschild
Mathematik für Ingenieure 1
ISBN 978-3-446-41346-7
Fachbuchverlag Leipzig `http://www.hanser.de`

[3] Mike Scherner, Torsten Volland
Analysis 1 für das erste Semester
ISBN 978-3-8273-7318-2
Pearson Studium `http://www.pearson-studium.de`

[4] Mike Scherner, Torsten Senkbeil
Lineare Algebra für das erste Semester
ISBN 978-3-8273-7207-9
pearson Studium `http://www.pearson-studium.de`

[5] Albert Fetzer, Heiner Fränkel
Mathematik 1, Lehrbuch für ingenieurwissenschaftliche Studiengänge
ISBN 978-3-642-24112-3
Mathematik 2, Lehrbuch für ingenieurwissenschaftliche Studiengänge
ISBN 978-3-642-24114-7
Springer-Verlag `http://www.springer-vieweg.de`

[6] Peter Stingl
Mathematik für Fachhochschulen

ISBN 978-3-446-42065-6
Hanser-Verlag http://www.hanser.de

[7] Wolfgang Brauch, Hans–J. Dreyer, Wolfhart Haacke
Mathematik für Ingenieure
ISBN 978-3-8351-0073-2
Teubner Verlag http://www.springer-vieweg.de

[8] Wolfgang Preuss, Günter Wenisch
Lehr– und Übungsbuch Mathematik, Band 1
ISBN 978-3-446-22083-6
Lehr– und Übungsbuch Mathematik, Band 2
ISBN 978-3-446-22290-8
Hanser-Verlag http://www.hanser.de

[9] Merziger, Wirth
Repetitorium Höhere Mathematik
ISBN 978-3-923923-34-2
Binomi-Verlag, Springe http://www.binomi.de

[10] Ilja N. Bronstein, Konstantin A. Semendjajew
Taschenbuch der Mathematik mit CD-ROM
ISBN 978-3-8171-2017-8
Verlag Harri Deutsch http://www.harri-deutsch.de