概率论与数理统计练习册

华中科技大学概率统计课程组　编

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分学练习册(附《微积分学》习题解答、微积分学试卷及解答)/华中科技大学微积分学课程组　编.—武汉:华中科技大学出版社,2017.6

ISBN 978-7-5680-　　-

Ⅰ.①微…　Ⅱ.①华…　Ⅲ.①　　Ⅳ.①

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第　　号

微积分学练习册(附《微积分学》习题解答、微积分学试卷及解答)

华中科技大学微积分学课程组　编

Weijifenxue Lianxice(Fu《Weijifenxue》Xiti Jieda、Weijifenxue Shijuan Ji jieda)

策划编辑:周芬娜

责任编辑:周芬娜

封面设计:

责任校对:刘　竣

责任监印:

出版发行:华中科技大学出版社(中国·武汉)　　电话:(027)81321913

武汉市东湖新技术开发区华工科技园　　邮编:430223

录　　排:华中科技大学惠友文印中心

印　　刷:

开　　本:787mm×1092mm　1/16

印　　张:

字　　数:　千字

版　　次:2017 年 8 月第 1 版第 1 次印刷

定　　价:　元

本书若有印装质量问题,请向出版社营销中心调换

全国免费服务热线:400-6679-118　竭诚为您服务

练习一

班级	
学号	
姓名	

1. 设某公司参加竞标，$A=\{$第一次竞标成功$\}$，$B=\{$第二次竞标成功$\}$，求如下事件的表示：

$C=\{$两次竞标成功$\}=$______________；　$D=\{$两次竞标失败$\}=$______________；

$E=\{$恰有一次竞标成功$\}=$____________；$F=\{$至少有一次竞标成功$\}=$__________。

2. 设 X_n 表示某种群的第 n 代数目，记事件 $A_n=\{X_n=0\}$，$n=1,2,\cdots$，问 A_n 与 A_{n+1} 是什么关系？

3. 设 A,B,C 为随机事件，说明下列关系的含义。

(1) $ABC=A$：

(2) $A\cup B\cup C=A$：

(3) $AB\subset C$：

(4) $A\subset\overline{B}$：

(5) $A\subset\overline{B}\cup\overline{C}$：

(6) $A\overline{B}=\varnothing$：

4. 用事件的关系与运算证明下列等式成立。

(1) $A\cup B=A\overline{B}\cup B$；

(2) $[A-(AB)]\cup B=A\cup B$；

(3) $(A\cup B)-B=A-AB=A\overline{B}$；

(4) $(A\cup B)-AB=(A\overline{B})\cup(\overline{A}B)$。

5. 设 A,B 为两事件，

(1) 将 $A\cup B$ 表示成两个互不相容事件之和；

(2) 将 $A\cup B$ 表示成三个互不相容事件之和；

(3) $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个事件，将 $A_1\cup A_2\cdots\cup A_n$ 表示成 n 个两两互不相容事件之和。

6. 指出下列关系中哪些不成立。

(1) $A\overline{B}=A\cup\overline{B}$；

(2) 若 $AB=\varnothing$，$C\subset A$，则 $BC=\varnothing$；

(3) 若 $\overline{A}\subset\overline{B}$，则 $A\supset B$；

(4) $\overline{(A\cup B)C}=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$。

练习二

班级	
学号	
姓名	

1. 填空题。

(1) 设 $P(B)=0.3$，$P(A\cup B)=0.4$，则 $P(A\overline{B})=$________。

(2) 设 $P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})$，$P(A)=p$，则 $P(B)=$________。

(3) 设 $P(A)=0.7$，$P(A-B)=0.3$，则 $P(\overline{AB})=$________。

(4) 对任意两事件 A 和 B，$P(A-B)=$________。

(5) 设 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4}$，$P(AB)=0$，$P(AC)=P(BC)=\dfrac{1}{16}$，则 A,B,C 全不发生的概率为________，A,B,C 至少有一个事件发生的概率为________。

2. 在一幢十一层的大楼内，有 5 人在第一层进入电梯，假如每个人以相同的概率在随后的十层中的任一层走出电梯，求此 5 人在不同楼层走出电梯的概率。

3. 在边长为 3 的正方形内，随机地抛入一个半径为 1 的圆环，设圆环的圆心一定落入正方形内，求圆环能与正方形的边相交的概率。

4. 证明下列命题。

(1) 设 $P(A)=a$，$P(B)=b$，则 $P(A|B) \geqslant \frac{a+b-1}{b}$；

(2) 若 $P(A|B)>P(A)$，则 $P(B|A)>P(B)$；

(3) 设 $P(A)=p$，$0<p<1$，$P(B)=1-\sqrt{p}$，则 $P(\overline{A}\,\overline{B})>0$。

5. n 个座位依次从 1 号编到 n 号，将 1 至 n 的 n 个号码分给 n 个人，每人一个号码，这 n 个人随意坐到座位上，求至少有一个人手里的号码恰与座位号码相同的概率。

练习三

班级	
学号	
姓名	

1. 填空题。

(1) 随机事件 A,B 相互独立,已知只有 A 发生的概率和只有 B 发生的概率都等于 1/4,则 $P(A)=$____________,$P(B)=$____________。

(2) 一射手对同一目标射击 4 次,假设每次是否命中目标是相互独立的,已知至少命中一次的概率为 80/81,则该射手的命中率为____________。

(3) 设一仓库中有 10 箱同种规格的产品,其中由甲、乙、丙三厂出产的分别为 5 箱、3 箱、2 箱,三厂产品的次品率依次为 0.1,0.2,0.3。从这 10 箱中任取一箱,再从这一箱中任取一件为正品的概率 $P=$____________。

(4) 在一批同一规格的产品中,甲、乙厂生产的产品分别为 30%,70%,合格率分别为 98%,90%。①这批产品的合格率为____________,②设有一顾客买了一件,发现是次品,这件产品是甲厂生产的概率为____________。

2. 设 A,B,C 三个地区爆发了某种流行病,三个地区感染此病的比例分别为 1/6,1/4,1/3,现从这三个地区中任选一地区,再从该地区任抽取一人,

(1) 此人感染此病的概率是多少?

(2) 如果此人感染此病,此人选自 B 地区的概率是多少?

3. 某工厂的车床、钻床、刨床、铣床的台数之比为 9∶3∶2∶1,它们在一定时间内需要修理的概率之比为 1∶2∶3∶1,当一台机床需要修理时,求这台机床是车床的概率。

4. 设一个系统有 6 个控制器，当下面三个条件都满足时系统才正常：(1)第一个控制器正常；(2)第 2，3 个控制器至少有一个正常；(3)第 4，5，6 个控制器至少有 2 个正常。若各控制器相互独立，且每个控制器正常的概率为 2/3，求该系统正常的概率。

5. 设共有 10 张彩票，其中只有 2 张可获奖，甲、乙、丙三人依次抽取彩票一张，规则如下：每人抽出后不放回，若抽到中奖彩票就补入两张非中奖彩票，若抽到非中奖彩票就补入两张中奖彩票。甲、乙、丙三人中谁中奖的概率最大？

6. 设 A,B,C 为三个事件，证明：

(1) $P(A|B)=P(A|BC)P(C|B)+P(A|B\overline{C})P(\overline{C}|B)$；

(2) 若 A,B,C 两两独立，且 $P(BC)\neq 0$ 及 $P(A)=P(A|BC)$，则 A,B,C 相互独立。

练习四

班级	
学号	
姓名	

1. 将一颗骰子连掷 2 次，以 X 表示 2 次所得点数之和，求 X 的分布列，并验证它满足分布列的两条基本性质。

2. 箱中有 8 个同样的球，编号为 1，2，…，8，从中任取 3 个球，以 X 表示 3 个球的最小号码，试求 X 的分布列，并作出 X 分布列的图形和 X 分布函数的图形。

3. 在 50 件同类产品中有 5 件次品，从中任取 5 件，一次取一件，不放回抽样，以 X 表示 5 次取出的次品个数，求 X 的分布列。

4．设 10 件产品中有 2 件次品，每次抽取一件，不放回抽样，直到取到正品为止。设 X 为抽取次数，求：(1) X 的分布列；(2) X 的分布函数；(3) $P(X=3.5)$，$P(X>-2)$ 及 $P(1<X<3)$。

5．下列函数中，指出可以作为随机变量分布函数的函数。

(1) $F(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$；

(2) $F(x)=\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2\pi}\arctan x$；

(3) $F(x)=\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}$；

(4) $F(x)=\begin{cases} 0, & x\leqslant 0, \\ \dfrac{x}{1+x}, & x>0; \end{cases}$

(5) $F(x)=\begin{cases} 0, & x<-1, \\ \dfrac{x^3}{2}+\dfrac{1}{2}, & -1\leqslant x<1, \\ 1, & x\geqslant 1。 \end{cases}$

练习五

班级	
学号	
姓名	

1．掷一枚不均匀的硬币，设出现正面的概率为 $p(0<p<1)$，设 X 为一直掷到正、反面都出现所需的投掷次数，求 X 的分布列。

2．某地区有 5 个加油站，调查表明在任一时刻每个加油站被使用的概率为 0.1，问在同一时刻，

（1）恰有 2 个加油站被使用的概率是多少？

（2）至少有 3 个加油站被使用的概率是多少？

（3）至多有 3 个加油站被使用的概率是多少？

3．设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布，证明：

（1）$P(X=k+1)=\dfrac{\lambda}{k+1}P(X=k)$；

(2) $P(X=k+2)=\frac{\lambda^2}{(k+2)(k+1)}P(X=k)$;

(3) 若 λ 为整数，则当 $k=\lambda$ 时，$P(X=k)$ 为最大值。

4. 设一批产品的合格率为 3/4，现逐一进行检验，记 X 为首次检验到合格品时所检验的产品件数，求 X 的分布列。

5. 某防御系统由多个雷达网组成，任何一个雷达网发现导弹进入的概率为 0.8。问：(1)为确保系统发现导弹进入的概率达到 0.9999，需要多少个雷达网？(2)要使至少有两个雷达网发现导弹进入的概率达到 0.9999，需要多少个雷达网？(3)若系统只保留 3 个雷达网，则单个雷达网发现目标的概率提高到多少，才能取得和(1)一样的效力？

练习六

班级	
学号	
姓名	

1. 设连续型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} A+Be^{-\frac{x^2}{2}}, & x\geqslant 0, \\ 0, & x<0, \end{cases}$$

求：(1) A,B；(2) 随机变量 X 的概率密度函数；(3) $P(\sqrt{\ln 4}<X<\sqrt{\ln 9})$。

2. 设连续型随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} Ax^2e^{-\lambda x}, & x\geqslant 0, \\ 0, & x<0, \end{cases}$$

其中 $\lambda>0$ 为参数，求：(1) A；(2) 随机变量 X 的分布函数；(3) $P(0<X<\frac{1}{\lambda})$。

3. 某城市每天用电量不超过一千万度，以 X 表示每天的实际用电量（千万度），其密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}12x(1-x)^2, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$$

若该城市每天供电仅有 800 万度，求供电量不够需要的概率，连续三天中至少有一天供电不足的概率又是多少？

4. 设随机变量 $X\sim N(108,9)$，求：(1) $P(101.1<X<117.6)$；(2)使 $P(X<a)=0.90$ 的 a；(3)使 $P(|X-a|>a)=0.01$ 的 a。

5. 公共汽车门高度是按男子与车门碰头的机会在 0.01 以下设计的，设男子身高（单位：cm）$X\sim N(170,36)$，问应如何选择车门的高度？

练习七

班级	
学号	
姓名	

1. 设随机变量 X 的分布列为

X	-3	-1	0	1	2
P	0.1	0.2	0.25	0.2	0.25

试求：(1) $Y_1=-2X+1$ 的分布列；(2) $Y_2=2X^2-3$ 的分布列。

2. 设随机变量 $X\sim U(0,1)$，求：(1) $Y=\mathrm{e}^X$ 的密度；(2) $Y=-2\ln X$ 的密度。

3. 设随机变量 $X\sim N(0,1)$，求：(1) $Y=2X^2+1$ 的密度；(2) $Y=|X|$ 的密度。

4. 设随机变量 $X\sim U\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，求 $Y=\cos X$ 的密度函数 $f(y)$。

5. 设随机变量 X 的密度为

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\frac{1}{e^{x}+e^{-x}}\quad(-\infty<x<+\infty),$$

求随机变量 $Y=g(X)$ 的分布列，其中

$$g(x)=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 1, & x\geqslant 0。\end{cases}$$

练习八

班级	
学号	
姓名	

1. 从 1,2,3,4 中任取一数 X,再从 $1,\cdots,X$ 任取一数 Y,求:(1)(X,Y)的联合分布列;(2)$P(X=Y)$。

2. 袋中有 3 个白球,2 个红球,1 个黑球,若从中任取 2 个球,设其中白球个数为 X,红球个数为 Y,求 (X,Y)的联合分布列。

3. 已知 (X,Y)联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}4xy, & 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

求:(1)$P(X+Y<1)$;(2)(X,Y)的联合分布函数。

4. 设随机变量 (X,Y) 的联合分布函数为

$$F(x,y)=A\left(B+\arctan\frac{x}{2}\right)\left(C+\arctan\frac{y}{3}\right),$$

求常数 A,B,C 及 (X,Y) 的联合概率密度。

5. 在区间 $(0,1)$ 中随机地取两个数 X 和 Y，求方程 $x^2+Xx+Y=0$ 有实根和有重根的概率。

练习九

班级	
学号	
姓名	

1. 设 (X,Y) 服从区域 $D=\{(x,y) \mid 0<y<|x|<1\}$ 上的均匀分布，求 X 和 Y 的边缘密度。

2. 设随机变量 (X,Y) 具有下列密度函数，求边缘密度函数 $f_X(x)$，$f_Y(y)$ 与条件密度函数 $f_{Y|X}(y|x)$。

(1) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{3}{2}x, & 0<x<1,-x<y<x, \\ 0, & \text{其他。} \end{cases}$

(2) $f(x,y)=\begin{cases} 1, & 0\leqslant x\leqslant 2,\max\{0,x-1\}\leqslant y\leqslant \min\{1,x\}, \\ 0, & \text{其他。} \end{cases}$

3．设 (X,Y)服从矩形 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 1\}$上的均匀分布，记

$$U=\begin{cases}0, & X\leqslant Y,\\ 1, & X>Y,\end{cases}\qquad V=\begin{cases}0, & X\leqslant 2Y,\\ 1, & X>2Y,\end{cases}$$

求 (U,V)的联合分布列。

4．设 X,Y 相互独立且均服从正态分布 $N(0,1)$，以 $f(x,y)$表示 (X,Y)的联合密度，(1)证明函数

$$g(x,y)=\begin{cases}f(x,y)+\dfrac{xy}{100}, & x^2+y^2\leqslant 1,\\ f(x,y), & x^2+y^2>1\end{cases}$$

是一个二维概率密度函数；(2)若 (U,V)有密度 $g(x,y)$，证明 U,V 都服从标准正态分布，但 (U,V)不服从二维正态分布。

班级	
学号	
姓名	

练习十

1. 若 X,Y 相互独立，且 $X\sim P(\lambda_1)$，$Y\sim P(\lambda_2)$，(1)证明 $X+Y\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$；(2)求在已知 $X+Y=m$ 的条件下，X 的条件分布。

2. 设 X,Y 相互独立，且分别服从参数为 λ 和 μ 的指数分布，求 $Z=\frac{1}{2}(X-Y)$ 的密度函数。

3. 若 X,Y 独立，均服从 $N(0,1)$，求 $Z=\frac{X}{Y}$ 的密度。

4. 设 (X,Y)的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} x+y, & 0\leqslant x,y\leqslant 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

求 $Z=X+Y$ 的密度。

5. 若 $X\sim U(0,1)$，Y 的分布列为

Y	-1	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

，且 X,Y 独立，求 $Z=X+Y$ 的密度。

6. 设随机变量 (X,Y)服从矩形 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 1\}$上的均匀分布，求边长为 X 和 Y 的矩形周长 L 及面积 S 的概率密度。

练习十一

班级	
学号	
姓名	

1. 填空题。

(1) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$，且二次方程 $y^2+4y+X=0$ 无实根的概率为 $\frac{1}{2}$，则 $\mu=$____________。

(2) 设 X 表示 3 次独立重复射击命中目标的次数，每次射中目标的概率为 0.4，则 $E(X-1)^2=$____________。

2. 设连续型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ a+b\arcsin x, & -1\leqslant x<1,\\ 1, & x\geqslant 1,\end{cases}$$

试确定常数 a,b，并求 EX.

3. 对一大批产品逐一随机检查，一旦发现废品，则立即停止检查，认为这批产品不合格，若抽查到第 n_0 件仍未发现废品，则立即停止检查认为质量合格，设产品的废品率为 p，问平均每批产品要检查多少件?

4. 设一点随机地落在中心在原点、半径为 R 的圆内，求落点横坐标 X 的数学期望。

5. 一商店经销某种商品，每周进货的数量 X 与顾客对该种商品的需求量 Y 是相互独立的随机变量，且都服从区间[10，20]上的均匀分布，商店每销售出一单位商品可获利 1000 元；若需求量超过进货量，商店可以从其他商店调剂供应，这时每单位商品获利 500 元，试求此商店经销该种商品每周所得利润的期望值。

6. 设 X_1，X_2 是独立同分布的正值连续型随机变量，试证明

$$E\left(\frac{X_1}{X_1+X_2}\right)=E\left(\frac{X_2}{X_1+X_2}\right)=\frac{1}{2}。$$

练习十二

班级	
学号	
姓名	

1. 填空题：

(1) 假设 $X \sim P(\lambda)$，如果 $E[(X-2)(X-1)]=1$，那么 $P(X=2)=$______________；

(2) 假设 $X \sim E(\lambda)$，则 $P(X > EX^2)=$______________；

(3) 已知连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2x-1}$，则 X 的数学期望 $\mu=$______________，方差 $\sigma^2=$______________。

2. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{b}{a}(a-|x|), & |x|<a, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

且方差 $DX=1$，求常数 a 和 b。

3. 在长为 l 的线段上任取两点，试求两点间距离的期望及方差。

4. 流水作业线上生产的每一个产品为不合格品的概率为 p,当生产出 k 个不合格品时即停工检修一次,求两次检修之间产品总数的期望与方差。

5. 设随机变量 X 的概率分布密度为 $f(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}$,$-\infty<x<+\infty$,求 X 的数学期望 EX 和方差 DX。

6. 设随机变量 X 服从柯西分布,概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)},\quad -\infty<x<+\infty,$$

令 $Y=\min\{|X|,1\}$,求 EY。

练习十三

班级	
学号	
姓名	

1. 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} x+y, & 0<x<k, 0<y<1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

试确定常数 k，并求 $\mathrm{Cov}(X,Y)$。

2. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} 1+x, & -1<x\leqslant 0, \\ 1-x, & 0\leqslant x<1, \\ 0, & \text{其他}。 \end{cases} \quad \text{且 } Y=\begin{cases} 0, & X<0, \\ 1, & X\geqslant 0, \end{cases} \quad Z=\begin{cases} 0, & X<\frac{1}{2}, \\ 1, & X\geqslant \frac{1}{2}。 \end{cases}$$

试求：(1) (Y,Z) 的联合概率分布；(2) $D(Y+Z)$。

3. 设连续型随机变量 $\zeta\sim U(0,2\pi)$，$X=\cos\zeta$，$Y=\sin\zeta$。

(1) 试求 X,Y 的相关系数 ρ；

(2) X,Y 是否独立？是否相关？为什么？

4．设随机变量 X 具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^m}{m!}e^{-x}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$$

其中 m 为正整数。利用切比雪夫不等式证明 $P(0<X<2(m+1))\geqslant\dfrac{m}{m+1}$。

5．$X_1,X_2,\cdots,X_n$是独立同分布且方差有限的随机变量，设 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，证明：$X_i-\overline{X}$ 与 $X_j-\overline{X}(i\neq j)$的相关系数为$-\dfrac{1}{n-1}$。

练习十四

班级	
学号	
姓名	

1. 填空题：

(1) 设随机变量序列 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 独立同分布，且具有数学期望和方差：$E(X)=\mu$，$D(X)=\sigma^2>0, i=1,2,\cdots$。则当 n 充分大时，$\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ 的分布函数 $P\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i \leqslant x\right)$ 近似等于__________。

(2) 伯努利大数定律表明，独立重复伯努利试验的次数 n 无限增大时，事件 A 发生的频率依概率收敛到__________；辛钦大数定律表明，对独立同分布且期望 μ 存在的随机变量序列，其前 n 个随机变量的算术平均值依概率收敛到__________。

2. 设 $\{X_n\}$ 为相互独立的随机变量序列，且 $P(X_n=\pm 2^n)=2^{-(2n+1)}, P(X_n=0)=1-2^{-2n}, n=1,2,\cdots$。证明 $\{X_n\}$ 服从大数定律且 $\left\{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right\}$ 依概率收敛到 0。

3. 计算器进行加法运算时，把每个加数取为最接近于它的整数来计算。设所有的取整误差是独立的，且在[−0.5,0.5]上服从均匀分布.(1)若将 1500 个数相加，问误差总和超过 15 的概率是多少？(2)最多有几个数相加可使得误差总和的绝对值小于 10 的概率不小于 0.90？

4. 设某地区已有一小型停车场，现拟筹建一大型停车场。统计资料表明，该地区日平均停车 $n=1600$ 辆，且估计有 3/4 的车将停放在新建的停车场。在规划新停车场时，要求空车位达到 200 或 200 以上的概率不超过 0.1，问应设计多少个停车车位为好？

练习十五

班级	
学号	
姓名	

1. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，μ 已知，σ 未知，(X_1, X_2, X_3) 是取自 X 的样本，观测值为 $(-3, 1, 2)$。

(1) 写出样本 (X_1, X_2, X_3) 的联合概率密度；

(2) 求样本的经验分布函数；

(3) 指出 $X_1+X_2+X_3$，$X_1-\mu$，$\sum_{i=1}^{3}\frac{X_i}{\sigma}$，$\min\{X_1, X_2, X_3\}$ 中哪些是统计量？哪些不是？

2. 设 $(X_1, X_2, \cdots, X_5)$ 是取自总体 $X \sim N(12, 2^2)$ 的样本，求：

(1) $P(\max(X_1, X_2, \cdots, X_5) > 15)$；

(2) $P(\min(X_1, X_2, \cdots, X_5) < 10)$；

(3) $P(\max(X_1, X_2, \cdots, X_5) < 15, \min(X_1, X_2, \cdots, X_5) < 10)$。

3. 设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是取自总体 $X\sim B(1,p)$的样本，$\overline{X}$ 和 S^2是其样本均值与样本方差，计算 $E\overline{X},D\overline{X},ES^2$ 和 $P(n\overline{X}=k)$。

4. 设总体 $X\sim N(20,3)$，从 X 中分别抽取容量为 10，15 的两个相互独立的样本，求两样本均值之差的绝对值大于 0.3 的概率。

练习十六

班级	
学号	
姓名	

1. 填空题。

(1) 设 $X \sim t(n)$，则 $\dfrac{1}{X^2} \sim$ ____________。

(2) 设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$为来自总体$\chi^2(10)$的样本，则统计量 $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i \sim$ ____________。

(3) 设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是取自正态总体$N(0,1)$的样本，$\overline{X}$和S^2分别为样本均值和样本方差，则当$a =$ ____________，$b =$ ____________时，$a\overline{X}^2 + bS^2$服从χ^2分布，且自由度为____________，$DS^2 =$ ____________。

2. 设$(X_1, X_2, \cdots, X_5)$是取自总体$X \sim N(0, 2^2)$的样本，求常数a, b使得$a(X_1 + X_2)^2 + b(X_3 + X_4 - X_5)^2$服从$\chi^2$分布，并指出其自由度。

3. 设 X,Y 相互独立,且均服从正态分布 $N(0,3^2)$,$(X_1,X_2,\cdots,X_9)$和$(Y_1,Y_2,\cdots,Y_9)$分别为取自 X 和 Y 的样本,求 $U=\sum\limits_{i=1}^{9}X_i\Big/\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{9}Y_i^2}$ 的分布。

4. 设$(X_1,X_2,\cdots,X_9)$是取自正态总体 X 的样本,令 $Y_1=\dfrac{1}{6}\sum\limits_{i=1}^{6}X_i$,$Y_2=\dfrac{1}{3}\sum\limits_{i=7}^{9}X_i$,$S^2=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=7}^{9}(X_i-Y_2)^2$,$Z=\dfrac{Y_1-Y_2}{S}$,求 $P(Z>1.33)$。

练习十七

班级	
学号	
姓名	

1．填空题。

(1) 从一批电子元件中抽取 8 个进行寿命测试，得到寿命观测值（单位：h）为 1050，1100，1130，1040，1250，1300，1200，1080，则这批元件的平均寿命的矩估计值为____________，寿命分布标准差的矩估计值为____________。

(2) 设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} e^{-(x-\theta)}, & x\geqslant\theta, \\ 0, & x<\theta, \end{cases}$ $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是来自总体 X 的样本，则未知参数 θ 的矩估计量为____________。

(3) 设总体 $X\sim B(1,p)$，p 为未知参数，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为来自总体 X 的样本，则 p 的极大似然估计为____________，p^2 的极大似然估计为____________。

2．设总体 X 的分布列为

$$P(X=k)=(k-1)\theta^2(1-\theta)^{k-2},k=2,3,\cdots,0<\theta<1,$$

试求未知参数 θ 的矩估计量。

3．设总体 X 的分布列为

X	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

其中 $\theta(0<\theta<1)$ 为未知参数。已知取得了样本观察值 $x_1=1,x_2=2,x_3=1$，求 θ 的极大似然估计值。

4. 设总体 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x-\mu}{\theta}}, & x\geqslant\mu,\\ 0, & x<\mu,\end{cases}$$

其中 $\theta>0$，求未知参数 μ,θ 的矩估计量和极大似然估计量。

5. 设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是正态总体 $N(1,\sigma^2)$ 的样本，σ^2 未知。对给定的 t，求 $\theta=P(\overline{X}<t)$ 的极大似然估计。

练习十八

班级	
学号	
姓名	

1. 填空题。

(1) $\overline{X}$ 与 S^2 是来自总体 $X\sim B(m,p)$ 的样本均值和样本方差，样本容量为 n，若用 $\overline{X}+kS^2$ 作为 mp^2 的无偏估计，则 $k=$__________。

(2) 设 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 都是 θ 的无偏估计，且 $2D(\hat{\theta}_1)=D(\hat{\theta}_2)=\sigma^2$，构造一个新无偏估计 $\hat{\theta}=c\hat{\theta}_1+(1-c)\hat{\theta}_2$，$0\leqslant c\leqslant 1$。如果 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 相互独立，为使 $D(\hat{\theta})$ 达到最小，应有 $c=$__________。

(3) 在天平上重复称量一重为 a 的物品，假设各次称量结果相互独立，且都服从正态分布 $N(a,0.2^2)$，若以 $\overline{X}_n$ 表示 n 次称量结果的算术平均值，则为使 $P(|\overline{X}_n-a|<0.1)\geqslant 0.95$，$n$ 至少为__________。

(4) 设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的一个样本，其中 μ 和 σ^2 未知，随机变量 L 是参数 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间的长度，则 $E(L^2)=$__________。

2. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是 X 的样本，试确定常数 c，使 $c\sum\limits_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$ 为 σ^2 的无偏估计。

3. 设总体 X 服从参数为 $1/\theta$ 的指数分布，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是 X 的样本，证明 $nZ=n[\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)]$ 是 θ 的无偏估计。

4. 设总体 $X \sim U(\theta, 2\theta)$，其中未知参数 $\theta > 0$，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是 X 的样本，$\overline{X}$ 为样本均值，试证明 $\hat{\theta} = \frac{2}{3}\overline{X}$ 是参数 θ 的一致无偏估计量。

5. 某批牛奶中被混入了一种有害物质，现从中抽取 10 盒进行检测，得到每公斤牛奶中该有害物质的含量如下(单位：毫克/公斤)：

0.86　1.53　1.57　1.81　0.99　1.09　1.29　1.78　1.29　1.58

假设可以认为这批牛奶中该有害物质的含量服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，试求：

(1) 含量均值 μ 的置信水平为 90%的置信区间；

(2) 含量标准差 σ 的置信水平为 90%的置信区间。

6. 从一批灯泡中随机地抽取 16 只作试验，测得灯泡的平均寿命 $\overline{x} = 1509$(小时)，标准差 $s = 32.226$(小时)。若灯泡的寿命服从正态分布。试求灯泡平均寿命的置信水平为 95%的单侧置信下限。

部 分 答 案

练习一

1. $C=AB$；$D=\overline{A}\,\overline{B}$；$E=A\overline{B}\cup\overline{A}B$；$F=A\cup B$。

2. $A_n\subset A_{n+1}$。

3. (1)A 发生，则 B 与 C 必同时发生；(2)B 发生或 C 发生，均导致 A 发生；(3)A 与 B 同时发生必导致 C 发生；(4)A 发生则 B 必不发生；(5)A 发生必导致 B 与 C 不会同时发生；(6)A发生则 B 必发生。

5. (1)$A\cup(B-A)$；(2)$(A-B)\cup(B-A)\cup AB$；

(3)令 $A_i'=A_i-(\bigcup_{k=1}^{i-1}A_k)$，则 $A_1',A_2',\cdots,A_n'$两两互不相容，且$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\bigcup_{i=1}^{n}A_i'$。

6. (1),(4)不成立。

练习二

1. (1)0.1；(2)$1-p$；(3)0.6；(4)$P(A)-P(AB)$；(5)3/8,5/8。

2. $A_{10}^5/10^5$。

3. 8/9。

5. $1-\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n!}$。

练习三

1. (1)1/2,1/2；(2)2/3；(3)0.83；(4)92.4%,7.89%。

2. (1)1/4；(2)1/3。

3. 9/22。

4. 320/729。

5. 2/10,17/55,41/110。

练习四

1. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \frac{1}{36} & \frac{1}{18} & \frac{1}{12} & \frac{1}{9} & \frac{5}{36} & \frac{1}{6} & \frac{5}{36} & \frac{1}{9} & \frac{1}{12} & \frac{1}{18} & \frac{1}{36} \end{bmatrix}$。

2. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{21}{56} & \frac{15}{56} & \frac{10}{56} & \frac{6}{56} & \frac{3}{56} & \frac{1}{56} \end{bmatrix}$。

3. $P(X=k)=\dfrac{C_5^k C_{45}^{5-k}}{C_{50}^5}$，$k=0,1,2,3,4,5$。

4. (1)$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{36}{45} & \frac{8}{45} & \frac{1}{45} \end{bmatrix}$；(2)$F(x)=\begin{cases} 0, & x<1, \\ 4/5, & 1\leqslant x<2, \\ 44/45, & 2\leqslant x<3, \\ 1, & x\geqslant 3; \end{cases}$ (3)0,1,8/45。

5. (3)、(4)、(5)是。

练习五

1. $q^{k-1}p+p^{k-1}q$，$k=2,3,\cdots$，$p+q=1$。

2. (1)$C_5^2(0.1)^2(0.9)^3$；(2)$C_5^3(0.1)^3(0.9)^2+C_5^4(0.1)^4(0.9)+(0.1)^5$；

(3)$1-[C_5^4(0.1)^4(0.9)+(0.1)^5]$。

4. $P(X=k)=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{k-1}\dfrac{3}{4}$，$k=1,2,\cdots$。

5. (1)6；(2)8；(3)0.95358。

练习六

1. (1)$A=1$，$B=-1$；(2)$f(x)=\begin{cases} x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}, & x\geqslant 0, \\ 0, & x<0; \end{cases}$ (3)1/6。

2. (1)$A=\lambda^3/2$；(2)$F(x)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{2}(\lambda^2x^2+2\lambda x+2)\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0;\end{cases}$ (3)$1-\dfrac{5}{2}\mathrm{e}^{-1}$。

3. 0.0272,0.0794。

4. (1)0.9886；(2)$a=111.84$；(3)$a=57.495$。

5. 184。

练习七

1. (1)$\begin{bmatrix}-3 & -1 & 1 & 3 & 7\\ 0.25 & 0.2 & 0.25 & 0.2 & 0.1\end{bmatrix}$；(2)$\begin{bmatrix}-3 & -1 & 5 & 15\\ 0.25 & 0.4 & 0.25 & 0.1\end{bmatrix}$。

2. (1)$f_Y(y)=\begin{cases}1/y, & 1<y<\mathrm{e},\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$ (2)$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-y/2}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0。\end{cases}$

3. (1)$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{\pi(y-1)}}\mathrm{e}^{-\frac{y-1}{4}}, & y>1,\\ 0, & y\leqslant 1;\end{cases}$ (2)$f_Y(y)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\mathrm{e}^{-y^2/2}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0。\end{cases}$

4. $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}。\end{cases}$

5. $\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1/2 & 1/2\end{bmatrix}$。

练习八

1. (1)

$X \backslash Y$	1	2	3	4
1	1/4	0	0	0
2	1/8	1/8	0	0
3	1/12	1/12	1/12	0
4	1/16	1/16	1/16	1/16

；(2)25/48。

2.

$X \backslash Y$	0	1	2
0	0	2/15	1/15
1	3/15	6/15	0
2	3/15	0	0

3. (1)1/6；(2)$F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0\text{ 或 }y<0,\\ x^2y^2, & 0\leqslant x,y<1,\\ x^2, & 0\leqslant x<1,y\geqslant 1,\\ y^2, & x\geqslant 1,0\leqslant y<1,\\ 1, & x,y\geqslant 1。\end{cases}$

4. $A=\dfrac{1}{\pi^2}$,$B=C=\dfrac{\pi}{2}$,$f(x,y)=\dfrac{6}{\pi^2(4+x^2)(9+y^2)}$。

5. 1/12,0。

练习九

1. $f_X(x)=\begin{cases}|x|, & |x|<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ $f_Y(y)=\begin{cases}2(1-y), & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}。\end{cases}$

2. (1) $f_X(x)=\begin{cases}3x^2, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{3}{4}(1-y^2), & |y|<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$

对 $0<x<1$, $f(y|x)=\begin{cases}\frac{1}{2x}, & 0<x<1, -x<y<x,\\ 0, & \text{其他}。\end{cases}$

(2) $f_X(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-x, & 1<x\leqslant 2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ $f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0\leqslant y\leqslant 1,\\ 0 & \text{其他},\end{cases}$

对 $0<x<1$, $f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}1/x, & 0<y<x,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 对 $1<x<2$, $f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}1/(2-x), & x-1<y<1,\\ 0, & \text{其他}。\end{cases}$

3.

U \ V	0	1
0	1/4	0
1	1/4	1/2

练习十

1. (2) $B\left(m,\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)$。

2. $f_Z(z)=\begin{cases}\frac{2\mu\lambda}{\mu+\lambda}e^{2\mu z}, & z<0,\\ \frac{2\mu\lambda}{\mu+\lambda}e^{-2\lambda z}, & z\geqslant 0。\end{cases}$

3. $f_Z(z)=\frac{1}{\pi(1+z^2)}$。

4. $f_Z(z)=\begin{cases}z^2, & 0\leqslant z\leqslant 1,\\ z(2-z), & 1<z\leqslant 2,\\ 0, & \text{其他}。\end{cases}$

5. $f_Z(z)=\begin{cases}1/2, & -1<z<0,\\ 1/3, & 0\leqslant z<1,\\ 1/6, & 1\leqslant z<2,\\ 0, & \text{其他}。\end{cases}$

6. $f_L(x)=\begin{cases}x/8, & 0<x<2,\\ 1/4, & 2\leqslant x<4,\\ (6-x)/8, & 4\leqslant x<6,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ $f_S(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(\ln 2-\ln x), & 0<x<2,\\ 0, & \text{其他}。\end{cases}$

练习十一

1. (1)4；(2)0.76。
2. $a=1/2, b=1/\pi, EX=0$。
3. $\frac{1-(1-p)^{n_0}}{p}$。
4. 0。
5. ≈ 14166.67。

练习十二

1. (1) $\frac{1}{2e}$；(2) $e^{-2/\lambda}$；(3) 1, 1/2。
2. $a=\sqrt{6}, b=1/\sqrt{6}$。
3. $l/3, l^2/18$。

4. $k/p,\dfrac{k(1-p)}{p^2}$。

5. 0,2。

6. $\dfrac{\ln 2}{\pi}+\dfrac{1}{2}$。

练习十三

1. 1,$-1/144$。

2. (1)$P(Y=0,Z=0)=\dfrac{1}{2}$,$P(Y=0,Z=1)=0$,$P(Y=1,Z=0)=\dfrac{3}{8}$,$P(Y=1,Z=1)=\dfrac{1}{8}$;(2)$\dfrac{31}{64}$。

3. (1)$\rho=0$;(2)不独立。

练习十四

1. (1)$\Phi\left(\dfrac{x-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right)$;(2)事件 A 的概率 $P(A)$,μ。

3. (1)0.09;(2)443。

4. 1377。

练习十五

1. (1)$(2\pi\sigma^2)^{3/2}\exp\{-\dfrac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{3}(x_i-\mu)^2\}$;(2)$F(x)=\begin{cases}0, & x<-3,\\ 1/3, & -3\leqslant x<1,\\ 2/3, & 1\leqslant x<2,\\ 1, & x\geqslant 2;\end{cases}$ (3)除 $\sum\limits_{i=1}^{3}\dfrac{X_i}{\sigma}$外都是。

2. (1)0.2923;(2)0.5784;(3)0.4290。

3. $p,p(1-p)/n,p(1-p),C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$。

4. 0.6714。

练习十六

1. (1)$F(n,1)$;(2)$\chi^2(10n)$;(3)$n,n-1,n$,$2/(n-1)$。

2. 1/8,1/12,2。

3. $t(9)$。

4. 0.1。

练习十七

1. (1)1143.75,89.8523;(2)$\overline{X}-1$;(3)$\overline{X},\overline{X}^2$。

2. $2/\overline{X}$。

3. 5/6。

4. $\widetilde{S},\overline{X}-\widetilde{S},X_1^*$,$\overline{X}-X_1^*$。

5. $\Phi\left(\dfrac{t-1}{\hat{\sigma}}\right)$,其中 $\hat{\sigma}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-1)^2$。

练习十八

1. (1)-1;(2)$\dfrac{2}{3}$;(3)16;(4)$\dfrac{4\sigma^2}{n}t_{\alpha/2}^2(n-1)$。

2. $[2(n-1)]^{-1}$。

5. (1)(1.189,1.569);(2)(0.239,0.539)。

6. 1494.9。

试卷一　概率论与数理统计试题(闭卷)

得分	评卷人

一、填空题(每小题 3 分,共 21 分)

1. 设 A、B 为随机事件,已知 $P(A)=0.3, P(B)=0.7, P(B|A)=0.4$,则 $P(A\cup\overline{B})=$ ______。

2. 设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布,则 $P(X=EX^2)=$ ______。

3. 设 X 和 Y 为两个随机变量,且 $DX=1, DY=2, \mathrm{Cov}(X,Y)=0$,则随机变量 $X-2Y$ 的方差是______。

4. 设随机变量 $X\sim B(2,0.1)$,则 $E(2^X)=$ ______。

5. 设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为来自正态总体 $N(0,9)$的简单随机样本,$\overline{X}, S^2$ 分别为样本均值和样本方差,则$\dfrac{n\overline{X}^2}{S^2}$服从______分布。

6. 设长方形 $ABCD$ 的长 $AB=10$ cm,宽 $BC=5$ cm,在长方形 $ABCD$ 内任取一点 E,则 $P(\angle AEB\geqslant\dfrac{\pi}{2})=$ ______。

7. 设有来自总体 $X\sim N(\mu,0.9^2)$的容量为 9 的简单随机样本,样本均值 $\overline{X}=6$,则未知参数 μ 的置信水平为 0.95 的单侧置信区间的下限为______。($\Phi(1.64)=0.95$)。

得分	评卷人

二、单项选择题(每小题 3 分,共 18 分)

1. 下列叙述中不正确的是(　　)。

(A) 若 $P(A)=1, P(B)=1$,则 $P(AB)$不一定等于 1

(B) 若 $X\sim\chi^2(n)$,则 $\lim\limits_{n\to+\infty}P\left(\dfrac{X-n}{\sqrt{2n}}\leqslant x\right)=\Phi(x)$

(C) 当随机变量 X,Y 同分布时,$P(X=Y)=1$ 不一定成立

(D) 通过增加样本容量可提高区间估计的精度

2. 设$(X_1,X_2,\cdots,X_{10})$为来自总体 $X\sim E(1)$的样本,则 $D\overline{X}, ES^2$ 分别为(　　)。

(A) 1,1　　(B) 0.1,1　　(C) 0.1,2　　(D) 1,0.2

3. 设二维随机变量$(X,Y)\sim N(1,2,1,1,0.5)$,则 X 的概率密度函数值 $f_X(1)$为(　　)。

(A) $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$　　(B) $\dfrac{1}{2\pi}$　　(C) $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-1}$　　(D) $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-1/2}$

4．对随机变量 X,Y，假设相应的矩都存在，则下列不等式不成立的是(　　)。

(A) $(EXY)^2\leqslant EX^2EY^2$　　(B) $EX^2\leqslant(EX)^2$

(C) $E(X-C)^2\geqslant DX$　　(D) $P(|X-EX|<\varepsilon)\geqslant 1-\dfrac{DX}{\varepsilon^2}$

5．设总体 $X\sim B(1,p)$，(X_1,X_2,X_3)是该总体的样本，$U=X_1+X_2$，$V=2X_3$，则(　　)。

(A) $U=V$　　(B) $P(U=V)=1$　　(C) $DU=DV$　　(D) $EU=EV$

6．下列叙述中正确的是(　　)。

(1) 二维正态分布的边缘分布是正态分布，条件分布也是正态分布

(2) 二维正态分布的边缘分布是正态分布，但条件分布不是正态分布

(3) 二维均匀分布的边缘分布是均匀分布，条件分布是均匀分布

(4) 二维均匀分布的边缘分布不一定是均匀分布，但条件分布是均匀分布

(A) (1),(3)　　(B) (2),(3)　　(C) (1),(4)　　(D) (2)(4)

得分	评卷人

三、(12 分)资料显示，在出口罐头导致索赔的事件中，有 50%是质量问题，30%是数量问题，20%是包装问题。不经过法律诉讼而通过协商解决的索赔事件中，质量问题占 40%，数量问题占 60%，包装问题占 75%。(1)索赔事件通过协商解决的概率是多少？(2)已知一索赔事件通过协商解决了，求该事件不是包装问题的概率。

得分	评卷人

四、(8 分)河北某中学一宿舍楼按 400 名学生的规模建造，该校学生每天洗漱时间是有规定的，按每人在规定的时间内大约有 10%的时间占用一个水龙头计算，为能以 95%的概率保证用水需要，该宿舍至少要安装多少个水龙头？（假设每人用水情况相互独立，$\Phi(1.645)=0.95$）

得分	评卷人

五、(12 分)设随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(x+y)\mathrm{e}^{-(x+y)}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他。}\end{cases}$$

(1)求边缘概率密度 $f_X(x)$与 $f_Y(y)$；(2)X 与 Y 是否独立，为什么？(3)求 $Z=X+Y$ 的概率密度。

得分	评卷人

六、(10 分)将一枚均匀骰子重复独立抛掷 100 次，X 表示出现 1 点的次数，Y 表示出现 2 点的次数。(1)分别写出 X 和 Y 的分布；(2)$X+Y$ 表示什么事件发生的次数？它的分布列是什么？(3)试利用(1)与(2)的结果求 $\mathrm{Cov}(X,Y)$。

得分	评卷人

七、(8 分) 设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为取自总体 X 的简单随机样本，X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

求 θ 的极大似然估计 $\hat{\theta}_L$。

得分	评卷人

八、(11 分) 设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为取自总体 X 的简单随机样本，X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{6x}{\theta^3}(\theta-x), & 0\leqslant x\leqslant \theta,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

求参数 θ 的矩估计 $\hat{\theta}_M$，并证明它是 θ 的无偏、一致估计量。

试卷二　概率论与数理统计试题(闭卷)

得分	评卷人

一、填空题(每小题 3 分,共 18 分)

1. 设随机事件 A 与 B 相互独立,且 $P(A)=0.4$,$P(B)=0.7$,则 $P(\overline{A}\,\overline{B})=$____________。

2. 某人进行独立重复观测试验,设每次试验观测到某现象的概率是 $p(0<p<1)$,则此人 4 次试验恰好观测到该现象 2 次的概率是____________。

3. 设连续型随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)=A\mathrm{e}^{-|x|}$,则常数 $A=$____________。

4. 设随机变量 $X\sim N(2,1)$,则 $E(\mathrm{e}^{X})=$____________。

5. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自正态分布总体 $N(0,1)$的简单随机样本,则 $\dfrac{(n-1)X_1^2}{\sum\limits_{i=2}^{n}X_i^2}$ 服从____________分布。

6. 设有来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$的容量为 9 的简单随机样本,样本均值 $\overline{X}=5$,样本标准差 $S=2.215$,已知 $t_{0.025}(8)=2.30$,则未知参数 μ 的置信水平为 0.95 的双侧置信区间为____________。

得分	评卷人

二、单项选择题(每题 3 分,共 15 分)

1. 下列命题正确的是(　　)。

(A) 概率为 1 的事件与任意事件独立

(B) 若两事件独立,则两事件一定不相容

(C) 若两事件不相容,则两事件一定独立

(D) 若两事件独立,则其和的概率等于概率的和

2. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=P(X\leqslant x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 0.3, & 0\leqslant x<1,\\ 0.7, & 1\leqslant x<2,\\ 1, & 2\leqslant x,\end{cases}$ 则 $DX=$(　　)。

(A) 1　　(B) 0.6　　(C) 1.6　　(D) 2

3. 设随机变量 $Y=|X|$,其中 X 的分布列为 $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1/3 & 2/3\end{pmatrix}$,则 X 与 Y 的相关系数为(　　)。

(A) -0.5　　(B) 0　　(C) -1　　(D) 0.5

4. 设方差 DX, DY 为非零数，且 $E(XY)=E(X)E(Y)$，则有(　　)。

(A) X 与 Y 相互独立　　(B) X 与 Y 不相关

(C) $D(XY)=DX \cdot DY$　　(D) $D(X-Y)=DX-DY$

5. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自正态总体 $N(0,1)$的简单随机样本，则统计量 $T=(n-1)S^2+n\overline{X}^2$服从的分布为(　　)。

(A) $\chi^2(n)$　　(B) $\chi^2(2n-1)$　　(C) $\chi^2(n-1)$　　(D) $\chi^2(n+1)$

得分	评卷人

三、(10 分)对某高校本科、硕士、博士毕业生就业意向的调查表明，这三类毕业生的比例是 6∶3∶1，而在这三类毕业生中愿意去西部地区工作的比例分别是 30%，20%和 10%。现有一名愿意去西部地区工作的毕业生，求他是本科生的概率。

得分	评卷人

四、(10 分)设某染色体能分裂成 k 个染色体的概率为

$$p(k,\lambda)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k=0,1,2,\cdots,$$

而一个分裂的染色体能恢复原状的概率为 q。

(1) 以 Y 记分裂的所有染色体中恢复原状的染色体的个数，试证明 Y 服从参数为 λq 的泊松分布；

(2) 求 $Z=e^Y$的分布。

得分	评卷人

五、(10 分) 设随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3x}{2}, & 0<x<1, -x<y<x,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

求给定 $X=x$ $(0<x<1)$ 时，Y 的条件密度函数 $f_{Y|X}(y|x)$。

得分	评卷人

六、(14 分) 设随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1, 0<y<2x,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

求：(1) $U=2X+Y$ 的数学期望；(2) $V=X+Y$ 的概率密度函数。

得分	评卷人

七、(9 分)某高校有 8000 间本科生宿舍，七月份每间宿舍在八点至二十二点间使用空调的概率都是 0.7(每间宿舍是否使用空调是独立的)。求在该时段有 5700 间以上的宿舍使用空调的概率(可用 $\Phi(\cdot)$表示)。在不查表的情况下，估计该概率是否小于 0.1?

得分	评卷人

八、(14 分)设总体 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-2(x-\theta)}, & x\geqslant\theta,\\ 0, & x<\theta,\end{cases}\quad \theta \text{ 为未知参数},$$

$X_1,X_2,\cdots,X_n$为取自该总体的简单随机样本。

(1) 求参数 θ 的矩估计$\hat{\theta}_M$和极大似然估计$\hat{\theta}_L$；

(2) 验证$\hat{\theta}_M$和$\hat{\theta}_L$的无偏性。

试卷三　概率论与数理统计试题(闭卷)

得分	评卷人

一、填空题(每空3分,共30分)

1. 已知 $P(A)=0.6$,$P(B)=0.5$,$P(A|\overline{B})=0.8$,则 $P(\overline{A}B)=$____________。

2. 设某同学有数学书12本,英语书6本,专业书30本。现从中取6本,则恰好每种书各取到两本的概率为____________。(列出式子即可)

3. 设某业务员每天接到的电话次数 $X\sim P(\lambda)$,已知在 n 天中共接到 $3n$ 个电话,则参数 λ 的极大似然估计为____________。

4. 设 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}1, 0<x<1, -x<y<x, \\ 0, \quad 其他,\end{cases}$ 则 $P(X=Y)=$____________;边缘密度 $f_X(x)=$____________。

5. 设 $(X,Y)\sim N(1,-1,2^2,3^2,0.5)$,则 $D(2X-Y)=$____________。

6. 设 $\overline{X}$ 和 $S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 为取自正态总体 $X\sim N(0,\sigma^2)$ 的样本均值和样本方差,则 $E\left(\dfrac{\overline{X}}{S}\right)=$____________。

7. 设随机变量 $F\sim F(m,n)$,则 $F^{-1}\sim$____________。

8. 已知事件 A 在 n 次独立实验中发生了 m 次,则事件 A 的概率 p 的矩估计为____________。

9. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为取自总体 $X\sim U(a,3)$ 的样本,则参数 a 的极大似然估计为____________。

得分	评卷人

二、选择题(每小题2分,计10分)

1. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0, \\ \dfrac{1}{3}(1+\sin x), & 0\leqslant x<\dfrac{\pi}{2}, \\ 1, & x\geqslant\dfrac{\pi}{2},\end{cases}$ 则 X 为(　　)。

(A) 离散型随机变量　　(B) 连续型随机变量

(C) 混合型随机变量

2. 设 $\overline{X}$ 为取自指数分布总体 $X\sim E(\lambda)$ 的样本均值,则(　　)。

(A) $P(\overline{X}=1/\lambda)=0$　　(B) $1/\overline{X}$ 是 λ 的无偏估计

(C) $P(\overline{X}=1/\lambda)=1$

3．设随机变量 X 的方差 $DX=\sigma^2>0$，则(　　)。

(A) $P\{|X-EX|\leqslant 3\sigma\}\geqslant 8/9$　　(B) $P\{|X-EX|\geqslant 3\sigma\}\leqslant 1/9$

(C) $P\{|X-EX|\geqslant 3\sigma\}>1/9$

4．设总体 X 服从几何分布 $G(0.8)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自 X 的样本，$\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，则 $D(\overline{X})=$(　　)。

(A) $\dfrac{5}{4n}$　　(B) $\dfrac{5}{16}$　　(C) $\dfrac{5}{16n}$

5．设正态总体的 X 数学期望 $EX=\mu$，$\overline{X}$ 为取自 X 的样本均值，则 $\overline{X}^2$ 为 μ^2 的(　　)。

(A) 无偏估计　　(B) 矩估计　　(C) 上述都不对

得分	评卷人

三、(10 分) 设袋中有外形相同的红球 a 个、白球 b 个，现每次从中取出一球观测颜色后放回，再放入 c 个同色球。分别求第一、二、三次取到红球的概率。

得分	评卷人

四、(10 分)设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<1, \\ 2(x-1)\mathrm{e}^{-(x-1)^2}, & x\geqslant 1, \end{cases}$$

求:(1)X 的分布函数 $F(x)$;(2)$Y=(X-1)^2$ 的概率密度。

得分	评卷人

五、(10 分)设随机变量 X、Y、Z 独立同分布于 $B(1,0.5)$。

求:(1)$\xi=(X-2Y+Z)^2$ 的分布列;(2)数学期望 $E\xi$ 和方差 $D\xi$。

得分	评卷人

六、(10 分)设导弹弹着点(X,Y)在区域 $G=\{(x,y):x^2+y^2\leqslant 100\}$ 上服从均匀分布。

(1) 试求边缘密度 $f_X(x)$,$f_Y(y)$;

(2) 判断 X 与 Y 是否相关,是否独立,并说明理由;

(3) 求弹着点到目标(原点)的平均距离。

得分	评卷人

七、(10 分)设英语考试有 100 道选择题,每题四个选项中只有一个正确,答对得 1 分。某学生用蒙的方法(即随机选一项作为答案)答题,试用精确分布和中心极限定理两种方法分别求该生能考过 60 分(含 60 分)的概率。(列出式子即可)

得分	评卷人

八、(10 分)设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$,μ,σ^2 为未知参数,求 σ^2 的置信度为 95%的双侧置信区间,并求置信区间长度的期望和方差。(分位数用符号表示)

试卷四　概率论与数理统计试题(闭卷)

得分	评卷人

一、填空题(每小题 3 分,计 18 分)

1. 设 $P(A)=0.9$,$P(A-B)=0.3$,则 $P(AB)=$____________。

2. 某大学有 10000 辆自行车,编号从 00001 到 10000,编号中含"8"为"幸运号码",偶遇一自行车,其编号为"幸运号码"的概率为____________。

3. 设随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}3x^2, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

对 X 进行 3 次观测,Y 表示观测值不大于 0.5 的次数,则 $P(Y>2)=$____________。

4. 设随机变量 $X\sim E(2)$,则 $E(e^X)=$____________。

5. 掷一枚均匀的骰子 10000 次,X 表示掷出奇数点的次数,由切比雪夫不等式估计知 $P(4900<X<5100)$____________。

6. 从某校随机抽取 50 名学生,其中 17 岁 5 人,18 岁 5 人,19 岁 25 人,20 岁 15 人,则该校学生年龄的样本均值为____________,样本方差为____________。

得分	评卷人

二、选择题(每题 3 分,共 15 分)

1. 设 A,B 为随机事件,且 $P(AB)=1$,则下列结论错误的是(　　)。

(A) AB 不一定是必然事件　　(B) A 和 B 至少有一个是必然事件

(C) A 和 B 不可能互不相容　　(D) A 和 B 可以互相独立

2. 设 $f_1(x)$为 $N(0,1)$的概率密度,$f_2(x)$为 $U(-1,2)$的概率密度,若函数

$$f(x)=\begin{cases}af_1(x), & x\leqslant 0,\\ bf_2(x), & x>0。\end{cases}$$

为概率密度,则有(　　)。

(A) $3a+b=2$　　(B) $3a-4b=6$

(C) $3a+4b=6$　　(D) $3a-b=2$

3. 设随机变量 $X\sim N(1,\sigma^2)$,则随着 σ 的增大,概率 $P(10|X-1|\geqslant 9\sigma)$(　　).

(A) 单调增大　　(B) 单调减小

(C) 不能确定　　(D) 保持不变

4. 将一枚均匀硬币重复投掷 2014 次，以 X 和 Y 分别表示正面向上和反面向上的次数，则 X 和 Y 的相关系数为(　　)。

(A) 0　　(B) 1　　(C) -1　　(D) 0.5

5. 设随机变量 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim\chi^2(n)$，且 X 和 Y 互相独立，又 $T=\dfrac{\sqrt{Y/n}}{X}$，则(　　)。

(A) $T^2\sim F(n,1)$　　(B) $T^2\sim t(n)$

(C) $T^2\sim\chi^2(n-1)$　　(D) $T^2\sim F(1,n)$

得分	评卷人

三、(10 分)某安检系统进行安检时，非危险人物被系统误认为危险人物的概率是 0.02；而危险人物被系统误认为非危险人物的概率是 0.05。假设接受安检的人中有 96%为非危险人物。

(1) 现有某人被检查后认为是非危险人物，求他确实是非危险人物的概率；

(2) 如果要求对危险人物检出的概率超过 0.999，至少需设置多少道这样的检查关卡？

得分	评卷人

四、(10 分)设随机变量 X 与 Y 都只取值 $-1,1$，满足 $P(X=1)=\dfrac{1}{2}$，$P(Y=1\mid X=1)=P(Y=-1\mid X=-1)=\dfrac{1}{3}$，求：(1)$(X,Y)$的联合分布；(2)$\mathrm{Cov}(X,Y)$。

得分	评卷人

五、(15 分)设二维随机变量(X,Y)在区域：$\{0<x<a,0<y<b\}$上服从均匀分布。(1)求(X,Y)的联合概率密度及边缘概率密度；(2)已知$DX=12,DY=36$，求参数a、b；(3)判断随机变量X与Y是否相互独立。

得分	评卷人

六、(10 分)设(X,Y)的联合密度

$$f(x,y)=\begin{cases}A\cos(x+y), & -\frac{\pi}{4}<x,y<\frac{\pi}{4},\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

求：(1)$P(X<Y)$；(2)$X+Y$密度函数。

得分	评卷人

七、(10 分)某学校一个食堂为提高服务质量，需对本食堂的就餐率 p 进行调查。计划在用过午餐的同学中随机调查 n 名同学，以 X 表示其中在本食堂用餐的学生人数。若要求以 95％的概率保证调查所得的就餐频率与 p 之间误差的绝对值不超过 10％，则 n 应取多大？（注：$\Phi(1.96)=0.975$，$\Phi(1.65)=0.95$）

得分	评卷人

八、(12 分)设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} e^{\theta-x}, & x\geqslant\theta, \\ 0, & x<\theta, \end{cases}$ $\theta>1$ 为未知参数。设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为取自该总体的一个样本。(1)试求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_1$ 和极大似然估计量 $\hat{\theta}_2$；(2)试讨论 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 的无偏性。