2020数学竞赛模拟考试自测题（2）解答

一、（本题共 5 小题，每小题 6 分，共 30 分）解答下列各题，要求写出重要步骤。

1. 求 $I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$.

2. 求 $\int \arcsin x\arccos x dx.$.

3. 计算 $\iint\limits_D (x+y)dxdy$, 其中 $D: x^2+y^2\le x+y$.

4、 $f(x,y)$ 是 $\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\le 1\right\}$ 上连续可微函数，满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\sin\sqrt{x^2+y^2}$ ，

求积分

$$I=\iint_{x^2+y^2\le 1}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial f}{\partial y}\right)dxdy$$

5. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{a}{n\sqrt{n}}\cos\frac{2a}{n\sqrt{n}}\cdots\cos\frac{na}{n\sqrt{n}}$.

解 1. $I(\alpha)=\int_0^1\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}+\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$（后一积分作倒代换 $\mathrm{x}=\frac{1}{\mathrm{t}}$）

$$=\int_0^1\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}+\int_0^1\frac{x^\alpha dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}$$

2. 由分部积分有

$$\int\arcsin x\arccos x dx = x\arcsin x\arccos x-\int x\left(\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$$

$$=x\arcsin x\arccos x+\int(\arccos x-\arcsin x)d\sqrt{1-x^2}$$

$$=x\arcsin x\arccos x+(\arccos x-\arcsin x)\sqrt{1-x^2}-\int\sqrt{1-x^2}\left(\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$$

$$=x\arcsin x\arccos x+(\arccos x-\arcsin x)\sqrt{1-x^2}+2x+C.$$

3. 方法一、用极坐标. 因为 D 的边界的极坐标方程为 $r=\cos\theta+\sin\theta$,所以 D 的极坐标表示式为:

$$D:\begin{cases}0\le r\le\cos\theta+\sin\theta\\ -\dfrac{\pi}{4}\le\theta\le\dfrac{3\pi}{4}\end{cases}$$

故 $$\iint\limits_D (x+y)dxdy=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(\cos\theta+\sin\theta)d\theta\int_0^{\cos\theta+\sin\theta}r^2dr$$

$$=\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}[\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}+\theta)]^4d\theta=\frac{4}{3}\int_0^{\pi}\sin^4 tdt$$

$$=\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 tdt==\frac{8}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

方法二、用变量替换. 因为D的边界为（$x-\frac{1}{2})^2$+（$y-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{2}$.故令

$$x=\frac{1}{2}+u,y=\frac{1}{2}+v$$

则D变为$G:u^2+v^2\le\frac{1}{2}$.由于$|J|=\left\|\begin{matrix}1&0\\0&1\end{matrix}\right\|=1$,则

$$\iint\limits_D (x+y)dxdy=\iint\limits_G (u+\frac{1}{2}+v+\frac{1}{2})dudv$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(r\cos\theta+r\sin\theta+1)rdr=\frac{\pi}{2}.$$

4. 解：利用极坐标$x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$

$$I=\int_0^1 dr\int_0^{2\pi}\left(\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}\right)rd\theta=\int_0^1 dr\int_{x^2+y^2=r^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}dy-\frac{\partial f}{\partial y}dx\right)$$

$$=\int_0^1 dr\iint_{x^2+y^2\le r^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)dxdy=\int_0^1 dr\iint_{x^2+y^2\le r^2}\sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy$$

$$=\int_0^1 dr\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^r\rho\sin\rho d\rho=2\pi\int_0^1(-r\cos r+\sin r)dr=2-\sin 1-2\cos 1$$

5. 由 $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+o(x^3)(x\to 0)$，

$$\cos\frac{ka}{n\sqrt{n}}=1-\frac{(\frac{ka}{n\sqrt{n}})^2}{2!}+o((\frac{ka}{n\sqrt{n}})^3)=1-\frac{k^2a^2}{2n^3}+o((\frac{1}{n^3}))$$

$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)(x\to 0)$ 得

$$\ln\cos\frac{ka}{n\sqrt{n}}=\ln(1-\frac{k^2a^2}{2n^3}+o(\frac{1}{n^3}))=-\frac{k^2a^2}{2n^3}+o(\frac{1}{n^3})，\quad k=1,2,\cdots,n.$$

于是 $$\sum_{k=1}^{n}\ln\cos\frac{ka}{n\sqrt{n}}=-\frac{a^2}{2}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2+o(\frac{1}{n^3})=-\frac{a^2}{2}\frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+o(\frac{1}{n^3}).$$

所以 $$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\cos\frac{ka}{n\sqrt{n}}=-\frac{a^2}{6}.$$

故 $$\lim_{n\to\infty}\cos\frac{a}{n\sqrt{n}}\cos\frac{2a}{n\sqrt{n}}\cdots\cos\frac{na}{n\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}e^{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\cos\frac{ka}{n\sqrt{n}}}=e^{-\frac{a^2}{6}}.$$

二、（10 分）（1）证明方程 $x^n+x^{n-1}+\cdots+x=1$ （$n>1$ 为整数）在区间 $(\frac{1}{2},1)$ 内有且仅有一个实根；（2）记（1）中的实根为 x_n，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求此极限。

证（1）设 $f(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x-1$ （$n>1$），则 $f(x)$ 在 $[\frac{1}{2},1]$ 上连续，且

$$f(\frac{1}{2})=\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}}-1=-\frac{1}{2^n}<0，\quad f(1)=n-1>0，$$

由闭区间上连续函数的介值定理，$\exists\xi\in(\frac{1}{2},1)$，使 $f(\xi)=0$。当 $x\in(\frac{1}{2},1)$，因

$$f'(x)=nx^{n-1}+(n-1)x^{n-2}+\cdots+2x+1>0，$$

故则 $f(x)$ 在 $[\frac{1}{2},1]$ 上单调增加。综上所述，方程 $f(x)=0$ 在 $(\frac{1}{2},1)$ 内有且仅有一个实根。

（2）由 $x_n\in(\frac{1}{2},1)$ 知数列 $\{x_n\}$ 有界，又

$$x_n^n+x_n^{n-1}+\cdots+x_n=1，$$

$$x_{n+1}^{n+1}+x_{n+1}^{n}+x_{n+1}^{n-1}+\cdots+x_{n+1}=1，$$

因 $x_{n+1}^{n+1}>0$，所以 $x_n^n+x_n^{n-1}+\cdots+x_n>x_{n+1}^n+x_{n+1}^{n-1}+\cdots+x_{n+1}$，于是有 $x_n>x_{n+1}$，$n=1,2,\cdots$，

综上所述，数列 $\{x_n\}$ 单调有界，故 $\{x_n\}$ 收敛。记 $a=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，由于 $\frac{x_n-x_n^{n+1}}{1-x_n}=1$，令 $n\to\infty$ 并注意到 $\frac{1}{2}<x_n<x_1<1$，有 $\frac{a}{1-a}=1$，解得 $a=\frac{1}{2}$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}$。

三、（10 分）设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，它们在 $(-\infty,+\infty)$ 上分别存在有限的极限，又设

当$x\in(-\infty,+\infty)$时，$g'(x)\neq 0$.证明:$\exists\xi\in(-\infty,+\infty)$,使得

$$\frac{f(+\infty)-f(-\infty)}{g(+\infty)-g(-\infty)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

证: 令 $x=\tan t,t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，定义

$$F(t)=f(\tan t)\,,G(t)=g(\tan t)\,,$$

则 $F(-\frac{\pi}{2})=\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}^{+}}f(\tan t)=f(-\infty)\,;F(\frac{\pi}{2})=\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}^{-}}f(\tan t)=f(+\infty)\,;$

$$G(-\frac{\pi}{2})=\lim_{t\to\frac{\pi}{2}^{+}}g(\tan t)=g(-\infty)\,;\;G(\frac{\pi}{2})=\lim_{t\to\frac{\pi}{2}^{-}}g(\tan t)=g(+\infty)\,.$$

故$F(t),G(t)$在$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$上连续,在$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$内可导,且$G'(t)=g'(\tan t)\cdot\sec^2 t\neq 0$,由Cauchy中值定理,$\exists\eta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$,使得

$$\frac{F(\frac{\pi}{2})-F(-\frac{\pi}{2})}{G(\frac{\pi}{2})-G(-\frac{\pi}{2})}=\frac{F'(\eta)}{G'(\eta)}=\frac{f'(\tan t)\cdot\sec^2 t}{g'(\tan t)\cdot\sec^2 t}=\frac{f'(\tan t)}{g'(\tan t)}\,.$$

令 $\xi=\tan\eta\in(-\infty,+\infty)$,上式即为

$$\frac{f(+\infty)-f(-\infty)}{g(+\infty)-g(-\infty)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\,.$$

四、（12 分）证明：多项式$\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(2x-x^2)^k-2x^k}{k}$能被$x^{n+1}$整除。

证：方法一、 由 $\ln(1+x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k+o(x^n)$，$\ln(1-x)=-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}x^k+o(x^n)$，

得 $-\ln(1-x)^2=-2\ln(1-x)=-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{2}{k}x^k+o(x^n)$，

$$-\ln(1-x)^2=-\ln(1-2x+x^2)=-\sum_{k=1}^{n}\frac{(2x-x^2)^k}{k}+o(x^n)\,,$$

两式相减得：

$$0=\sum_{k=1}^{n}\frac{(2x-x^2)^k-2x^k}{k}+o(x^n)\,.$$

所以 $$\sum_{k=1}^{n}\frac{(2x-x^2)^k-2x^k}{k}=o(x^n)(x\to 0).$$

右边是 x 的多项式，不含 $1,x,x^2,\cdots x^n$ 各项，故 $\sum_{k=1}^{n}\frac{(2x-x^2)^k-2x^k}{k}$ 能被 x^{n+1} 整除。

方法二、令 $f(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(2x-x^2)^k-2x^k}{k}$，因为 $f(0)=0$,所以 $f(x)$ 能被 x 整除.故令

$$f(x)=a_r x^r+a_{r+1}x^{r+1}+\cdots+a_{2n}x^{2n},r\geq 1,a_r\neq 0.\text{由}$$

$$f'(x)=\sum_{k=1}^{n}[(2-2x)(2x-x^2)^{k-1}-2x^{k-1}]$$

$$=(2-2x)\cdot\frac{1-(2x-x^2)^n}{1-(2x-x^2)}-\frac{2(1-x^n)}{1-x}$$

$$=\frac{2-2(2-x)^n x^n-2+2x^n}{1-x}=\frac{2x^n[1-(2-x)^n]}{1-x}$$

$$=2x^n\,\frac{(1-(2-x))[1+(2-x)+(2-x)^2+\cdots+(2-x)^{n-1}]}{1-x}$$

$$=-2x^n[1+(2-x)+(2-x)^2+\cdots+(2-x)^{n-1}]$$

知，$f'(x)$ 能被 x^n 整除.

但 $$f'(x)=ra_r x^{r-1}+(r+1)a_{r+1}x^r+\cdots+2na_{2n}x^{2n-1}.$$

所以 $r-1\geq n$,$r\geq n+1$,故 $\sum_{k=1}^{n}\frac{(2x-x^2)^k-2x^k}{k}$ 能被 x^{n+1} 整除。

五、（12 分）记 $I(r)=\int_0^{\pi}\ln(1-2r\cos x+r^2)dx$，$0<r<1$ ，证明 $2I(r)=I(r^2)$，并求 $I(r)$。

解 $I(r)=\int_0^{\pi}\ln(1-2r\cos x+r^2)dx=\int_0^{\pi}\ln(1+2r\cos x+r^2)dx$（代换 $x=\pi-t$ ）

$$2I(r)=\int_0^{\pi}\left[\ln(1-2r\cos x+r^2)+\ln(1-2r\cos x+r^2)\right]dx$$

$$=\int_0^{\pi}\ln(1-2r^2\cos 2x+r^4)dx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\ln(1-2r^2\cos x+r^4)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\ln(1-2r^2\cos x+r^4)dx\text{（周期性）}$$

$$=\int_0^{\pi}\ln(1-2r^2\cos x+r^4)dx\text{（偶函数）}=I(r^2)\text{。}$$

依次规律有 $I(r)=\frac{1}{2}I(r^2)=\cdots=\frac{1}{2^n}I(r^{2^n})$，故 $I(r)=0$。

注意 $I(1)=0$，若 $r>1, I(r)=2\pi\ln r$。

六、(12 分) 设曲线 $y=f(x)$ 有渐近线,且 $f''(x)>0$,证明:函数 $y=f(x)$ 的图象从上方趋近于此渐近线.

证: 由题意,知此渐近线为水平渐近线或斜渐近线,设其方程为 $y=ax+b$.令 $F(x)=f(x)-ax-b$,不妨设 $x\in(0,+\infty)$,则

$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-ax-b]=0,$$

且 $F''(x)=f''(x)>0$,所以 $F'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上严格单调增加.

$\forall x_0\in(0,+\infty)$,若 $F'(x_0)>0$,在 $[x_0,x]$ 用 L--中值定理,$\exists\xi\in(x_0,x)$,使得

$$F(x)=F(x_0)+F'(\xi)(x-x_0)>F(x_0)+F'(x_0)(x-x_0)$$

令 $x\to+\infty$,得 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$,与 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0$ 矛盾,所以,对 $\forall x\in(0,+\infty)$,有 $F'(x)\le 0$,因此,$F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调减少.

又对 $\forall x_1\in(0,+\infty)$,若 $F(x_1)<0$,则 $x>x_1$ 时

$$F(x)\le F(x_1)<0$$

故 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)\le F(x_1)<0$,这与 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0$ 矛盾; 若 $F(x_1)=0$,因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0$,所以,当 $x>x_0$ 时, $F(x)\equiv 0$,此时, $F'(x)=0$,这与 $F''(x)>0$ 矛盾.故对 $\forall x\in(0,+\infty)$, $F(x)>0$,即 $f(x)>ax+b$,因此, 函数 $y=f(x)$ 的图象从上方趋近于此渐近线.

七、(14 分) 设

$$f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(1+\cos\frac{x}{n}+\cos\frac{2x}{n}+\cdots+\cos\frac{n-1}{n}x), x>0\\ \lim\limits_{n\to\infty}[1+\frac{1}{n!}(\int_0^1\sqrt{1+x^3+x^5}dx)^n], & x=0\\ f(-x), & x<0\end{cases}$$

(1)讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的可导性;

(2)求 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的最大值.

解: (1)当$x>0$时, $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(1+\cos\frac{x}{n}+\cos\frac{2x}{n}+\cdots+\cos\frac{n-1}{n}x)$

$$=\frac{1}{x}\lim_{n\to\infty}(1+\cos\frac{x}{n}+\cos\frac{2x}{n}+\cdots+\cos\frac{n-1}{n}x)\frac{x}{n}$$

$$=\frac{1}{x}\int_0^x\cos xdx=\frac{\sin x}{x},$$

当 $x=0$ 时, $f(0)=\lim\limits_{n\to\infty}[1+\frac{1}{n!}(\int_0^1\sqrt{1+x^3+x^5}dx)^n]$, 记 $a=\int_0^1\sqrt{1+x^3+x^5}dx$,显然 $1<a<\sqrt{3}$,考虑级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n!}$,因为

$$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{a^n}=\frac{a}{n+1}\to 0(n\to\infty)$$

根据比值判别法知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n!}$收敛,由级数收敛的必要条件得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}(\int_0^1\sqrt{1+x^3+x^5}dx)^n=0,$$

所以$f(0)=1$.

当$x<0$时,$f(x)=f(-x)=\frac{\sin(-x)}{-x}=\frac{\sin x}{x}$.故

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}-1}{x}=0$$

即$f(x)$在$x=0$处可导.

(2) 当 $0<x\le\pi$ 时, $f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$, 令 $g(x)=x\cos x-\sin x$,则 $g'=-x\sin x\le 0$且仅当$x=\pi$时$g'(x)=0$,所以$g\downarrow$,$g(x)<g(0)=0$,所以$f'(x)<0$,$f\downarrow$.又 $f(x)$为偶函数,所以$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上的最大值为$f(0)=1$.