一类分母为平方的分式的不定积分

制作人：吴洁

数学与统计学院

问题：

1. $\int \frac{\cos x + x\sin x}{(x+\cos x)^2}dx$

2. $\int \frac{x + \sin x\cos x}{(\cos x - x\sin x)^2}dx$

被积函数的特点：

（1）既含有三角函数，又含有 x；

（2）分母出现了平方.

回顾

如果 $f(x), g(x)$ 均可导，且 $g(x) \neq 0$，

则 $[\frac{f(x)}{g(x)}]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

以及 $\int F'(x)dx = F(x) + C$

1. $\int \frac{\cos x + x\sin x}{(x+\cos x)^2}dx$

解：

因 $\left(\frac{x}{x+\cos x}\right)' = \frac{\cos x + x\sin x}{(x+\cos x)^2}$

故 $\int \frac{\cos x + x\sin x}{(x+\cos x)^2}dx = \frac{x}{x+\cos x} + C$

考察 $\left(\frac{x}{x+\cos x}\right)'$

$$= \frac{x+\cos x - x + x\sin x}{(x+\cos x)^2}$$

2. $\int \frac{x+\sin x\cos x}{(\cos x - x\sin x)^2}dx$

解： 恒等变形

$$\frac{x+\sin x\cos x}{(\cos x - x\sin x)^2} = \frac{x\sec^2 x + \tan x}{(1-x\tan x)^2}$$

因 $(\frac{1}{1-x\tan x})' = \frac{\tan x + x\sec^2 x}{(1-x\tan x)^2}$

故 $\int \frac{x+\sin x\cos x}{(\cos x - x\sin x)^2}dx = \frac{1}{1-x\tan x} + C$

$$(\frac{1}{\cos x - x\sin x})' = \frac{2\sin x + x\cos x}{(\cos x - x\sin x)^2}$$

$$(\frac{x}{\cos x - x\sin x})'$$

$$= \frac{\cos x - x\sin x + x(2\sin x + x\cos x)}{(\cos x - x\sin x)^2}$$

$$\frac{x+\sin x\cos x}{(\cos x - x\sin x)^2} = \frac{x+\sin x\cos x}{\cos^2 x(1-x\tan x)^2}$$

$$= \frac{x\sec^2 x + \tan x}{(1-x\tan x)^2}$$

$$(\frac{1}{1-x\tan x})' = \frac{\tan x + x\sec^2 x}{(1-x\tan x)^2}$$

小结:

积分与求导互为逆运算。当被积函数具有某种特征时，

可以逆向思考，考察被积函数是哪个函数求导的结果。

练习题

1. $\int \frac{f(x)-xf'(x)}{f^2(x)}dx$； 2. $\int \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}dx$.