导数与偏导数

基本概念

一元函数导数： $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

左导数： $f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0 -} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

右导数： $f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0 +} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

高阶导数

基本概念

多元函数偏导数

全微分

方向导数，梯度

基本计算

1. 导数的四则运算

2. 复合函数求导数或偏导数

3. 参数方程确定的函数求导数或偏导数

4. 隐函数求导数或偏导数

5. 相应地求高阶导数或偏导数

6. 求某一固定点的高阶导数

7. 方向导数的计算

历届试题

1. (7th final) 设 $f(t)$ 二阶连续可导，且 $f(t)\neq 0$，若

$$\begin{cases} x=\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s, \\ y=f(t), \end{cases} \text{则} \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\underline{\qquad}.$$

分析：

$$\frac{dy}{dt}=f'(t) \qquad \frac{dx}{dt}=f(t) \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{f'(t)}{f(t)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{f''(t)f(t)-\left(f'(t)\right)^2}{f^2(t)}}{f(t)}=\frac{f''(t)f(t)-\left(f'(t)\right)^2}{f^3(t)}$$

历届试题

2.(6th) 设 $y = y(x)$ 由 $x = \int_1^{y-x} \sin^2\left(\frac{\pi t}{4}\right) \mathrm{d}t$ 所确定，则

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = \underline{\qquad\qquad}.$$

分析： **隐函数求导数**

$$1 = \sin^2\left(\frac{\pi(y-x)}{4}\right)(y'-1)$$

$$y(0) = 1$$

$$y'(0) = 3$$

历届试题

3.(7th) **第三题：(12 分)** 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内二次可导，且存在常数 α,β，使得对于 $\forall x\in(a,b)$，有

$$f'(x)=\alpha f(x)+\beta f''(x),$$

则 $f(x)$ 在 (a,b) 内无穷次可导.

(注意考虑问题的全面性)

历届试题

4. (8th)设 $f(x)=e^{x}\sin 2x$，则 $f^{(4)}(0)=$ __________.

历届试题

5.(2nd)

第三题：(15 分)设 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=2t+t^2 \\ y=\psi(t) \end{cases}(t>-1)$ 所确定. 且 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{3}{4(1+t)}$，其中 $\psi(t)$ 具有二阶导数，曲线 $y=\psi(t)$ 与 $y=\int_1^{t^2} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u+\dfrac{3}{2e}$ 在 $t=1$ 处相切. 求函数 $\psi(t)$.

历届试题

6.(8th)

3．设 $f(x)$ 有连续导数，且 $f(1)=2$．记 $z=f\left(e^{x}y^{2}\right)$，若 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=z$，$f(x)$ 在 $x>0$ 的表达式为________________.

历届试题

7.(2nd) (4) 设 $f(t)$ 有二阶连续导数，$r=\sqrt{x^2+y^2}$，$g(x,y)=f\left(\frac{1}{r}\right)$，

求 $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

历届试题

8.(3rd)

第五题：(15 分)设 $z=z(x,y)$ 是由方程

$$F\left(z+\frac{1}{x}, z-\frac{1}{y}\right)=0$$

确定的隐函数，且具有连续的二阶偏导数，求证：

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x}-y^2\frac{\partial z}{\partial y}=1,$$

$$x^3\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+xy(x-y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-y^3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2=0.$$

历届试题

9.(4th) 3. 已知函数 $z=u(x,y)e^{ax+by}$，且 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$，确定常数 a,b，使函数 $z=z(x,y)$ 满足方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}+z=0.$$

10.(9th)

3．设 $w=f\left(u,v\right)$ 具有二阶连续偏导数，且

$$u=x-cy, v=x+cy,$$

其中 c 为非零常数，则 $w_{xx}-\dfrac{1}{c^2}w_{yy}=$_____________。

11.(3rd final)

3．设函数 $f(x,y)$ 有二阶连续偏导数，满足 $f_y\neq 0$ 且

$$f_x^{\ 2}f_{yy}-2f_xf_yf_{xy}+f_y^{\ 2}f_{xx}=0,$$

$y=y\left(x,z\right)$ 是由方程 $z=f(x,y)$ 所确定的函数，求 $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$.

历届试题

12.(4th final) 2、设 $f(u,v)$ 具有连续偏导数，且满足

$$f_u(u,v)+f_v(u,v)=uv,$$

求 $y(x)=e^{-2x}f(x,x)$ 所满足的一阶微分方程，并求其通解.

历届试题

13.(10th final) (4) 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F(x-y,z)=0$ 确定，其中 $F(u,v)$ 具有连续二阶偏导数，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=$________

历届试题

14.(5th final)

3. 设$F(x,y,z)$,$G(x,y,z)$有连续偏导数，$\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}\neq 0$，

曲线$\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0\end{cases}$过点$P_0(x_0,y_0,z_0)$．记$\Gamma$在$xOy$面上

的投影曲线为S．求S上过点(x_0,y_0)的切线方程.

历届试题

15.(6th final) 二、（本题 12 分）设 $\vec{l}_j, j=1,2,\cdots,n$ 是平面上点 P_0 处的 $n\geq 2$ 各方向向量，相邻两个向量之间的夹角为 $\frac{2\pi}{n}$. 若函数 $f(x,y)$ 在点 P_0 有连续偏导，证明：$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f(P_0)}{\partial \vec{l}_i}=0.$

思考题

16. 求证：在实轴上不存在可微函数$f(x)$，使其满足

$$f\big(f(x)\big) = -x^3 + x^2 + 1$$

证明：若存在这样的函数$f(x)$。则有

$$f\left(-x^3 + x^2 + 1\right) = f\left(f\big(f(x)\big)\right) = -f^3(x) + f^2(x) + 1$$

取$x = 1$，有

$$f(1) = -f^3(1) + f^2(1) + 1$$

易得$f(1) = 1$。

对$f\big(f(x)\big) = -x^3 + x^2 + 1$ 两边求导

思考题

$$f'\big(f(x)\big)f'(x)=-3x^2+2x$$

令$x=1$，则有

$$f'\big(f(1)\big)f'(1)=f'(1)f'(1)=-1$$

矛盾！证毕。

思考题

17. 设$y = 1/\sqrt{1-x^2}\arcsin x$.

(1) 证明：$(1-x^2)y' - xy - 1 = 0$;

(2) 证明：$(1-x^2)y^{(n+1)} - (2n+1)xy^{(n)} - n^2y^{(n-1)} = 0$;

(3) 求$y^{(n)}(0)$.

思考题