文章编号: 1000-6788(2002)11-0039-05

计算层次分析法中排序权值的加速遗传算法

金菊良[1], 魏一鸣[2], 付　强[3], 丁　晶[3]

(1. 合肥工业大学土木建筑工程学院, 安徽 合肥 230009; 2. 中国科学院科技政策与管理科学研究所, 北京 100080; 3. 四川大学水电学院, 四川 成都 610065)

摘要: 为处理AHP 中判断矩阵的一致性问题, 直接从判断矩阵的定义出发, 提出用加速遗传算法同时计算AHP 中各要素的排序权值和检验判断矩阵一致性的新方法(AGA-AHP). 理论分析和实例分析的初步结果说明: AGA-AHP 法直观、可行且有效, 计算结果稳定、精度高, 在各系统工程实践中具有重要的理论意义和应用价值.

关键词: 层次分析法; 遗传算法; 复杂系统; 排序

中图分类号: D223　　**文献标识码**: A

Accelerating Genetic Algorithm for Computing Rank Weights in Analytic Hierarchy Process

JIN Ju-liang[1], WEI Yi-ming[2], FU Qiang[3], DING Jing[3]

(1. College of Civil Engineering, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China; 2. Institute of Policy & Management, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China; 3. College of Hydro-electricity, Sichuan University, Chengdu 610065, China)

Abstract: In order to deal with the consistency problem of judgement matrix in AHP, a new method, named accelerating genetic algorithm, is presented to compute rank weights and check the consistency of judgement matrix at the same time in this paper. The results of theoretical analysis and case study show that the new method is visual, feasible and effective, that its computational results are both stability and high precision, and that it possesses important theoretical meaning and broad application value in different systems engineering practice.

Key words: analytic hierarchy process; genetic algorithm; complex system; rank

在工程技术、社会经济、科学管理等复杂系统中许多要素是难以定量描述的, 评价这些系统的目标准则一般有多个. 层次分析法(Analytic Hierarchy Process, 简称AHP) 是评价这些复杂系统有效的简便方法, 它将决策人的思维过程数学化, 将人的主观判断为主的定性分析进行定量化, 帮助决策者保持思维过程的一致性, 将各种决策方案之间的差异数值化, 从而为选择最优方案提供易于被人接受的决策依据, 因而在各系统工程实践中得到了极为广泛的应用. AHP 法在实用中存在的主要问题是判断矩阵的一致性问题, 这也是目前AHP 理论研究的热点和难点[1, 2]. 为此, 本文把判断矩阵的一致性问题归结为一非线性优化问题, 提出用加速遗传算法(Accelerating Genetic Algorithm, 简称AGA)[3]计算层次分析中的排序权值(该方法简称AGA-AHP), 并进行了初步的理论分析和实例分析.

1　计算层次分析法中排序权值的加速遗传算法(AGA-AHP)

AGA-AHP 包括如下 5 个基本步骤:

收稿日期: 2001-05-08

资助项目: 国家自然科学基金和长江水利委员会联合资助(50099620); 国家自然科学基金(49871018); 安徽省自然科学基金(01045102)

作者简介: 金菊良(1966-), 男, 江苏吴江人, 合肥工业大学教授, 博士, 主要从事水资源系统工程研究

步骤 1 对所评价的复杂系统建立层次结构模型. 不失一般性, 这里的层次结构模型由从上到下的目标层 A、准则层 B 和方案层 C 组成. A 层为系统的总目标, 只有一个要素. C 层为要选用的实现系统总目标的 m 个决策方案 $C_1, C_2, \cdots, C_m$. B 层为评价这些方案实现总目标的程度的 n 个准则 $B_1, B_2, \cdots, B_n$. 这里, 各层次中的目标、准则和决策方案统称为系统要素.

步骤 2 对 B 层、C 层的要素, 分别以各自的上一级层次的要素为准则进行两两比较, 通常采用 1- 9 级及其倒数的评定标度来描述人们对各要素相对的重要性, 得到 B 层的判断矩阵为 $B = \{b_{ij} | i, j = 1 \sim n\}_{n\times n}$, 元素 b_{ij} 表示从判断准则 A 角度考虑要素 B_i 对要素 B_j 的相对重要性. 对应于 B 层要素 B_k 的 C 层的判断矩阵为 $\{c_{ij}^k | i, j = 1 \sim m; k = 1 \sim n\}_{m\times m}$.

步骤 3 层次各要素的单排序及其一致性检验, 就是要确定同一层次各要素对于上一层次某要素的相对重要性的排序权值并检验各判断矩阵的一致性. 设 B 层各要素的单排序权值为 $w_k, k = 1 \sim n$, 且满足 $w_k > 0$ 和 $\sum_{k=1}^{n} w_k = 1$. 根据判断矩阵 B 的定义, 理论上有

$$b_{ij} = w_i / w_j, \qquad i, j = 1 \sim n \tag{1}$$

这时矩阵 B 具有如下性质: ①$b_{ii} = w_i / w_i = 1$; ②$b_{ji} = w_j / w_i = 1 / b_{ij}$; ③$b_{ij} b_{jk} = (w_i / w_j)(w_j / w_k) = w_i / w_k = b_{ik}$. 其中: 称性质①为判断矩阵的单位性; 称性质②为判断矩阵的倒数性; 称性质③为判断矩阵的一致性条件, 它表示相互关系可以定量传递. 例如, 若要素 i 比要素 j 重要 2 倍, 要素 j 比要素 k 重要 3 倍, 则要素 i 比要素 k 重要 6 倍. 性质③也是性质①和性质②的充分条件: 因为 $b_{ii} b_{ii} = b_{ii}$, 所以 $b_{ii} = 1$; 又因为 $b_{ji} b_{ij} = b_{jj} = 1$, 所以 $b_{ji} = 1 / b_{ij}$.

现在的问题就是已知判断矩阵 $B = \{b_{ij}\}_{n\times n}$, 来推求各要素的单排序权值 $\{w_k | k = 1 \sim n\}$. 若判断矩阵 B 满足式(1), 决策者能精确度量 w_i / w_j, 即 $b_{ij} = w_i / w_j$, 判断矩阵 B 具有完全的一致性, 于是有

$$\sum_{k=1}^{n} (b_{ik} w_k) = \sum_{k=1}^{n} (w_i / w_k) w_k = n w_i, \quad i = 1 \sim n \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{n} (b_{ik} w_k) - n w_i \right| = 0 \tag{3}$$

式中, $|\ |$ 为取绝对值. 由于实际系统的复杂性、人们认识上的多样性以及主观上的片面性和不稳定性, 系统要素的重要性度量没有统一和确切的标尺, 决策者不可能精确度量 w_i / w_j, 只能对它们进行估计判断. 判断矩阵 B 的一致性程度主要取决于判断者对系统各要素的把握程度, 对各要素优劣认识得越清楚, 一致性程度就越高, 而评价各要素的优劣正是 AHP 法所要解决的问题. 正因为人们对系统各要素的优劣不是很清楚, 才需要采用 AHP 法去作出评价, 以更清楚地认识各要素, 否则就没必要用 AHP 法. 因此, 判断矩阵 B 的一致性条件不满足是客观存在、无法完全消除的, AHP 法只要求判断矩阵 B 具有满意的一致性, 以适应实际中各种复杂系统.

显然, 式(3)左端的值越小则判断矩阵 B 的一致性程度就越高, 当式(3)成立时判断矩阵 B 具有完全的一致性. 基于此, B 层各要素的单排序及其一致性检验问题可以归结为如下优化问题:

$$\min CIF(n) = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{n} (b_{ik} w_k) - n w_i \right| / n \tag{4}$$

$$\text{s.t.} \quad w_k > 0, \qquad k = 1 \sim n$$

$$\sum_{k=1}^{n} w_k = 1$$

式中, $CIF(n)$ 为一致性指标函数(Consistency Index Function), 单排序权值 $w_k (k = 1 \sim n)$ 为优化变量, 其余符号同前. 当判断矩阵 B 具有完全的一致性时, 式(1)成立, 从而式(4)取全局最小值 $CIF(n) = 0$, 又根据约束条件 $\sum_{k=1}^{n} w_k = 1$ 知, 该全局最小值是唯一的.

式(4)是一个常规方法较难处理的非线性优化问题. 模拟生物优胜劣汰规则与群体内部染色体信息交换机制的加速遗传算法(AGA), 是一种通用的全局优化方法, 用它来求解该问题则十分简便而有效.

AGA 的具体算法可参见文献[3]. 当 $CIF(n)$ 值小于某一标准值时, 可认为判断矩阵 B 具有满意的一致性, 据此计算的各要素的单排序权值 w_k 是可以接受的; 否则就需要反复调整判断矩阵 B, 直到具有满意的一致性为止.

同理, 由 C 层各判断矩阵 $\{c_{ij}^k\}_{m\times m}$, 可确定 C 层各要素 i 对于 B 层 k 要素的单排序权值 w_i^k, $i=1\sim m$, 以及相应的一致性指标函数 $CIF^k(m)$, $k=1\sim n$. 当 $CIF^k(m)$ 值小于某一标准值时, 可认为判断矩阵 $\{c_{ij}^k\}_{m\times m}$ 具有满意的一致性, 据此计算的各要素的单排序权值 w_i^k 是可以接受的; 否则就需要反复调整判断矩阵 $\{c_{ij}^k\}_{m\times m}$, 直到具有满意的一致性为止.

步骤 4　层次总排序及其一致性检验, 即确定同一层次各要素对于最高层(A 层次)要素的排序权值并检验各判断矩阵的一致性. 这一过程是从最高层次到最低层次逐层进行的. 这里, B 层各要素的单排序权值 $w_k(k=1\sim n)$ 和一致性指标函数 $CIF(n)$ 同时也是 B 层总排序权值和总排序一致性指标函数. C 层各要素的总排序权值为 $w_i^A=\sum_{k=1}^{n}w_k w_i^k(i=1\sim m)$, 总排序一致性指标函数为 $CIF^A(m)=\sum_{k=1}^{n}w_k GIF^k(m)$. 当 $CIF^A(m)$ 值小于某一标准值时, 可认为层次总排序结果具有满意的一致性, 据此计算的各要素的总排序权值 w_i^A 是可以接受的; 否则就需要反复调整有关判断矩阵, 直到具有满意的一致性为止.

步骤 5　根据 C 层各要素的总排序权值 $w_i^A(i=1\sim m)$ 确定各决策方案的优选排序, 从而为决策者选择最优方案提供科学的决策依据.

2　AGA-AHP 的理论分析

1) AGA-AHP 法与 AHP 中其它排序权值计算方法的对比分析. 层次分析法的主要思想就是, 将待评价的复杂系统的各要素按其关联隶属关系建立递阶层次模型, 构造两两比较的判断矩阵, 并据此求解各要素重要性的排序权值和检验判断矩阵的一致性, 其中, AHP 中判断矩阵排序权值的合理计算是成功应用层次分析法的关键. 目前常用的方法有[4-6]: a) 行和正规化法; b) 列和求逆法; c) 和积法; d) 特征值法; e) 梯度特征值法; f) 对数回归法; g) 最小平方法; h) 最小偏差法等. 其中, 方法 a), b), c) 因只考虑判断矩阵一行或一列的影响, 所以计算精度不高, 常作为其它方法的迭代初值. 方法 d) 是目前最常用的方法, 它计算判断矩阵的最大特征根所对应的特征向量并归一化后即作为排序权值, 该法的不足是, 在权值计算时没有考虑判断矩阵的一致性条件, 权值计算与判断矩阵的一致性检验是分开进行的, 判断矩阵一旦确定, 权值和一致性指标就随之确定、无法改善, 因此是一种"被动"方法; 另外, 当判断矩阵一致性程度很差时, 求解特征值很困难. 方法 e) 除具有方法 d) 的上述缺点外, 当判断矩阵不完全一致时, 矩阵元素所处的位置对计算结果的影响是不同的.

AGA-AHP 法和方法 f), g), h) 都是利用判断矩阵所有元素的信息, 并根据尽可能满足式(1) 的一致性条件而构造相应的优化问题来推求排序权值, 在理论上是相互等价的. 因此, AGA-AHP 具有层次分析法中合理的排序方法应具有的置换不变性、相容性、对称性和完全协调性等优良性质[6]. 这 4 种方法对处理不完全一致性甚至残缺判断矩阵和群体专家判断矩阵适应性强, 这些方法把权值计算与判断矩阵的一致性检验结合起来, 在一致性指标最小化下推求权值, 在判断矩阵已定的情况下, 通过调整各要素的权值来改进一致性指标值, 因此是一类"主动"方法.

但在实际求解时, AGA-AHP 法与方法 f), g), h) 有所不同. 后三者在求解相应的优化问题中都存在 w_i/w_j, 即所求解的排序权值 w_j 出现在分母中, 当所求的某个排序权值很小时容易产生较大的计算误差, 使得计算结果稳定性差; 而 AGA-AHP 法不存在这种问题, 是一种稳健的方法, 后面的灵敏度分析将进一步检验这一点.

AGA-AHP 法直接根据判断矩阵的定义导出描述判断矩阵一致性程度的一致性指标函数, 而目前 AHP 法常把判断矩阵的最大特征根与判断矩阵的阶数的差异来度量判断矩阵的一致性指标, 可见, 前者的指标比后者的指标更为直观和合理.

2) 判断矩阵具有满意一致性的判别分析. 对于不同阶数 n 的判断矩阵, 其一致性指标函数 $CIF(n)$ 值也不同. 为了度量判断矩阵是否具有满意的一致性, 这里引入判断矩阵的平均随机一致性指标函数

$RIF(n)$ 值 $RIF(n)$ 值是用随机的方法分别对 1～ n 阶各构造 500 个随机判断矩阵, 它们满足判断矩阵的单位性和倒数性, 但不保证判断矩阵满足一致性条件, 计算这些矩阵的一致性指标函数值, 然后平均即得, 参见表 1. 可见, $RIF(n)$ 值在 1.6～ 2.0 之间 经大量的实例计算, 我们初步认为, 当判断矩阵的一致性指标函数 $CIF(n)$ 值小于 0.10 时, 可认为该判断矩阵具有满意的一致性.

表 1 判断矩阵平均随机一致性指标函数 $RIF(n)$ 值

阶数 n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$RIF(n)$	0.00	0.00	1.62	1.64	1.98	1.86	1.69	1.81	1.95

3 AGA-AHP 的实例分析

现用 AGA-AHP 法和其它方法计算如下 3 个判断矩阵的排序权值, 结果见表 2. 表 2 中, EM 为特征值法, LDM 为最小偏差法, GLSM 为广义最小平方法, LSM 为最小平方法, CLSM 为改进的最小平方法. 表 3 给出了用 AGA 计算判断矩阵 B_2 的排序权值的过程.

$$B_1=\begin{bmatrix}1&1&3&3\\1&1&3&3\\1/3&1/3&1&1\\1/3&1/3&1&1\end{bmatrix},\quad B_2=\begin{bmatrix}1&3&5&4&7\\1/3&1&3&2&5\\1/5&1/3&1&1/2&3\\1/4&1/2&2&1&3\\1/7&1/5&1/3&1/3&1\end{bmatrix},\quad B_3=\begin{bmatrix}1&1/7&1/2&1/8&2\\7&1&3&1&8\\2&1/3&1&1/4&5\\8&1&4&1&5\\1/2&1/8&1/5&1/5&1\end{bmatrix}$$

表 2 用 AGA-AHP 法与其它方法计算判断矩阵排序权值的结果

计算排序权值的方法	判断矩阵	排序权值					一致性指标函数值
		w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	
EM [6]	B_1	0.3750	0.3750	0.1250	0.1250		0.0000
LDM [6]	B_1	0.3750	0.3750	0.1250	0.1250		0.0000
GLSM [6]	B_1	0.3750	0.3750	0.1250	0.1250		0.0000
AGA-AHP	B_1	0.3750	0.3750	0.1250	0.1250		0.0000
EM [6]	B_2	0.4925	0.2306	0.0931	0.1369	0.0468	0.0253
LDM [6]	B_2	0.4903	0.2321	0.0926	0.1385	0.0464	0.0258
GLSM [6]	B_2	0.4928	0.2270	0.0929	0.1395	0.0477	0.0288
AGA-AHP	B_2	0.4982	0.2310	0.0923	0.1371	0.0414	0.0058
EM [4]	B_3	0.0612	0.3743	0.1342	0.3869	0.0434	0.0362
LSM [4]	B_3	0.0522	0.3957	0.1402	0.3581	0.0530	0.0714
CLSM [4]	B_3	0.0664	0.3925	0.1364	0.3618	0.0421	0.0560
AGA-AHP	B_3	0.0606	0.3771	0.1320	0.3935	0.0368	0.0075

表 3 用 AGA 计算判断矩阵 B_2 的排序权值

加速次数	优秀个体的变化区间					最小一致性指标函数值
	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	
1	0.0000, 1.0000	0.0000, 1.0000	0.0000, 1.0000	0.0000, 1.0000	0.0000, 1.0000	0.1156
5	0.4916, 0.5077	0.2134, 0.2381	0.0861, 0.0992	0.1253, 0.1446	0.0379, 0.0491	0.0075
10	0.4980, 0.4983	0.2309, 0.2313	0.0915, 0.0925	0.1368, 0.1373	0.0413, 0.0420	0.0058
AGA 结果	0.4982	0.2310	0.0923	0.1371	0.0414	0.0058

表 2, 表 3 说明: 1) 当判断矩阵满足一致性条件时(如 B_1), AGA-AHP 法取得了与其它方法完全相同

的排序权值. 2)AGA 只要求提供目标函数的数值信息, 不要求优化问题是否线性、多峰、可微、凸性等其它信息, 是一种通用的全局优化新方法. AGA 在排序权值可能取值的区间[0, 1]内进行快速自适应全局优化搜索, 求解精度高, 计算结果稳定. AGA 对高维判断矩阵的计算适应性强.

现以上述判断矩阵B_1为例, 对AGA-AHP 法进行灵敏度分析. 设相对变动比率为a, 矩阵B_1的任一上三角元素值为b_{ij}, 在$[b_{ij}-ab_{ij}, b_{ij}+ab_{ij}]$区间上随机抽取 100 个$b_{ij}$新值, 若新值不落在[1/9, 9]区间, 则重新随机抽取, 直到满足为止; 对应这些新值b_{ij}的下三角元素值为$b_{ji}=1/b_{ij}$. 这样可生成 100 个B_1的随机变动的判断矩阵, 然后统一用AGA-AHP 法求它们的排序权值, 并与原判断矩阵B_1的排序权值进行比较分析. 表 4 给出了在相对变动比率 a 分别取 20% 和 50% 条件下的对比结果, 这些随机变动的判断矩阵的一致性指标函数值分别在 0.003 和 0.03 以下, 因此均认为这些随机判断矩阵具有满意的一致性.

表 4　判断矩阵B_1的AGA-AHP 法灵敏度分析结果

B_1要素	B_1的排序权值	100 个B_1的随机变动的判断矩阵排序权值							
		$a=20\%$下均值	$a=50\%$下均值	$a=20\%$下标准差	$a=50\%$下标准差	$a=20\%$下平均绝对误差	$a=50\%$下平均绝对误差	$a=20\%$下平均相对误差	$a=50\%$下平均相对误差
1	0.3750	0.3762	0.3741	0.0178	0.0454	0.0138	0.0353	0.0369	0.0940
2	0.3750	0.3739	0.3739	0.0168	0.0434	0.0138	0.0358	0.0367	0.0955
3	0.1250	0.1244	0.1234	0.0075	0.0214	0.0062	0.0178	0.0494	0.1422
4	0.1250	0.1255	0.1286	0.0084	0.0248	0.0069	0.0201	0.0555	0.1610

从表 4 各分析指标看, 在相对变动比率a分别取 20% 和 50% 情况下用AGA-AHP 法所求的排序权值与原判断矩阵B_1的排序权值十分接近, 说明根据式(4) 用AGA-AHP 法计算的排序权值具有稳定性.

4　结论

层次分析法(AHP)是系统工程中十分典型的定性分析与定量分析综合集成方法, 在各种实际复杂系统综合评价和多目标决策中得到了广泛的应用. 针对AHP 中判断矩阵的一致性问题, 本文提出用加速遗传算法同时计算AHP 中各要素的排序权值和检验判断矩阵一致性的新方法(AGA-AHP). 初步的理论分析和实例分析表明, AGA-AHP 法的计算结果稳定, 精度明显高于目前常用的其它AHP 法的相应结果.

参考文献:

[1]　陈来安, 陆军令. 系统工程原理与应用[M]. 北京: 学术期刊出版社, 1988.
[2]　汪应洛. 系统工程(第 2 版)[M]. 北京: 机械工业出版社, 2001.
[3]　金菊良, 丁晶. 遗传算法及其在水科学中的应用[M]. 成都: 四川大学出版社, 2000.
[4]　王莲芬. 层次分析法中排序权数的计算方法[J]. 系统工程理论与实践, 1987, 7(2): 31-37.
[5]　王莲芬. 梯度特征向量排序法的推导与改进[J]. 系统工程理论与实践, 1989, 9(2): 17-21.
[6]　徐泽水. 层次分析中判断矩阵排序的新方法——广义最小平方法[J]. 系统工程理论与实践, 1998, 18(9): 38-43.