Flett 中值定理及相关问题

问题 1 设函数 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $g(a)=0$，$\int_a^b g(t)\mathrm{d}t=0$，试证：存在 $\xi\in(a,b)$，使

$$g(\xi)=\frac{1}{\xi-a}\int_a^\xi g(t)\mathrm{d}t .$$

证 作辅助函数

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-a}\displaystyle\int_a^x g(t)\mathrm{d}t, a<x\le b,\\ 0, \qquad\qquad\qquad x=a,\end{cases}$$

因 $\lim\limits_{x\to a^+}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{1}{x-a}\displaystyle\int_a^x g(t)\mathrm{d}t=\lim\limits_{x\to a^+}g(x)=g(a)=0=\varphi(a)$，故 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $\varphi(a)=\varphi(b)=0$，由 **Rolle** 定理知：$\exists\xi\in(a,b)$，使 $\varphi'(\xi)=0$，即

$$g(\xi)=\frac{1}{\xi-a}\int_a^\xi g(t)\mathrm{d}t .$$

众所周知，$g(x)$ 的平均值函数 $\varphi(x)$ 相比 $g(x)$ 要少许多不规则性. 几何上，若曲线 $y=g(x)$ 震荡，上述结果表明曲线 $y=g(x)$ 与 $y=\varphi(x)$ 皆从 $(a,0)$ 点出发，必在某点 $(\xi,g(\xi))$ 回合.

问题 2 设函数 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $g(a)=0$，$g(b)=0$，试证：存在 $\xi\in(a,b)$，使

$$g(\xi)=\frac{1}{\xi-a}\int_a^\xi g(t)\mathrm{d}t .$$

证 若存在子区间 $[a,c]\subset[a,b]$，其上 $g(x)\equiv 0$，则结论自明.

设 $g(x)\ne 0, x\in(a,c)$，而 $g(c)=0, a<c\le b$. 不妨设 $g(x)>0$，则 $g(x)$ 在 $[a,c]$ 上的最大值 M 必在开区间 (a,c) 内某点 x_0 点取得.

作辅助函数 $F(x)=g(x)-\dfrac{1}{x-a}\displaystyle\int_a^x g(t)\mathrm{d}t$，则

$$F(x_0)=g(x_0)-\frac{1}{x_0-a}\int_a^{x_0}g(t)\mathrm{d}t>0\ ,$$

$$F(c)=g(c)-\frac{1}{c-a}\int_a^{c}g(t)\mathrm{d}t=-\frac{1}{c-a}\int_a^{c}g(t)\mathrm{d}t<0\ ,$$

由连续函数的介值定理知$\exists\xi\in(a,c)$，使$F(\xi)=0$，即$g(\xi)=\dfrac{1}{\xi-a}\displaystyle\int_a^{\xi}g(t)\mathrm{d}t$.

Flett 中值定理：设$f(x)$在$[a,b]$上可微，且$f'(a)=f'(b)$，则存在$\xi\in(a,b)$使

$$f'(\xi)=\frac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}.$$

证 以下假定$f'(a)=f'(b)=0$（不然考虑函数$f(x)-xf'(a)$），作辅助函数

$$\psi(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}, & a<x\le b,\\ 0, & x=a,\end{cases}$$

则$\psi(x)$在$[a,b]$上连续，在$(a,b]$上可微，且

$$\psi'(x)=\frac{f'(x)}{x-a}-\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2},\quad a<x\le b.$$

若$\psi(b)=0$，则由 **Rolle** 定理知$\exists\xi\in(a,b)$，使$\psi'(\xi)=0$，即$f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}$.

若$\psi(b)>0$，则$\psi'(b)=\dfrac{f'(b)}{b-a}-\dfrac{f(b)-f(a)}{(b-a)^2}=-\dfrac{\psi(b)}{b-a}<0$，必存在$x_1\in(b-\delta,b)$，

$\psi(x_1)>\psi(b)(>0=\psi(a))$，又由介值定理存在$x_2\in(a,x_1)$，使得$\psi(x_2)=\psi(b)$，依然由由 **Rolle** 定理得结论.

若$\psi(b)<0$，类似证明.