《高等工程电磁场》试题

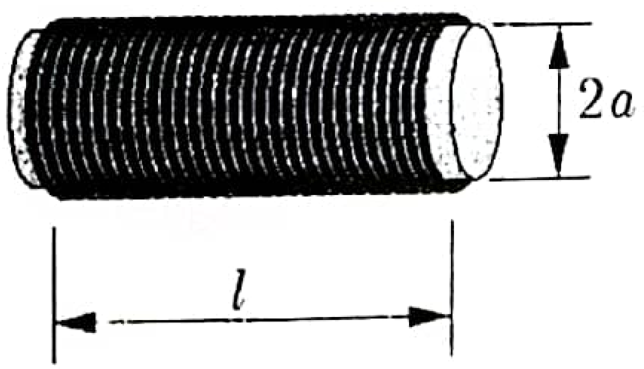
华中科技大学电气与电子工程学院研究生用

（2019 年 1 月 17 日）

1. 以电场强度 $\boldsymbol{E}$、电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 和电流密度 $\boldsymbol{J}$ 为基本物理量，写出电准静态场（瞬变电场）的基本方程，推导电位 φ 的支配方程，并讨论何种情况下可以视为静电场，何种情况下可以视为恒定电流场。

2. 如图所示，在金属圆棒外部均匀密绕一螺线管线圈。线圈中通有正弦交变电流，有效值为 I_0，角频率为 ω。试在低频近似（即集肤深度大于导体半径）和高频近似（即集肤深度远小于导体半径）两种情况下，分析导体涡流损耗功率对频率的依赖关系，并求线圈的入端阻抗。

   设：导体半径为 a，电导率为 γ，磁导率为 μ；线圈长度为 l，匝数为 N。线圈内半径与导体半径相等，忽略导线半径，不计导线电阻。另设线圈长度远大于其半径，从而可以忽略端部效应（即假定在线圈长度范围内磁场是均匀的，线圈长度范围以外磁场为 0）。



3. 描述一个在生活、学习或工作中遇到的困惑你或者你认为有价值的电磁场问题，简要说明理由。

2019年

1、在准静电场中麦克斯韦方程组为.

$$\begin{cases}\nabla\cdot D=\rho\\ \nabla\cdot B=0\\ \nabla\times H=J+\frac{\partial D}{\partial t}\\ \nabla\times E=-\frac{\partial B}{\partial t}\approx 0\end{cases}$$

$$\nabla\cdot\nabla\times H=\nabla\cdot\left(J+\frac{\partial D}{\partial t}\right)=\nabla\cdot\left(\gamma E+\varepsilon\frac{\partial E}{\partial t}\right)=\nabla\cdot\left[\gamma(-\nabla\varphi)+\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}(-\nabla\varphi)\right]=0$$

$\therefore$ $\Rightarrow \left(\gamma+\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\right)\nabla^2\varphi=0$

$\therefore$ 准静态场的支配方程：$\left(\gamma+\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\right)\nabla^2\varphi=0$

静电场是指观察者与电荷量不随时间发生变化的电荷相对静止时的场。恒定电场是自由电荷在电场作用下做宏观定向运动形成电流的导电媒质中的场称为电流场.

~~因为此在导电媒质以外的区域~~

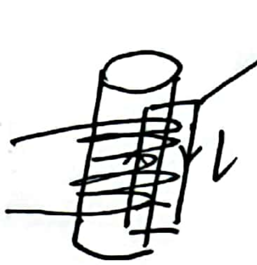
因此在导电媒质不形成电流，只存在面/体电荷时，应视为一个静电场。在导电媒质中存在电流，那么导电媒质内部应视为~~恒定~~电流场，而导电媒质以外的区域仍视为静电场.

补充：准静态场下交界面条件：

$$\begin{cases}\varphi_1=\varphi_2\\ \varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}-\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}=\sigma\\ \gamma_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}-\gamma_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}=-\frac{\partial\sigma}{\partial t}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\varphi_1=\varphi_2\\ \gamma_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}-\gamma_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}-\varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\right)=0\end{cases}$$

边界条件：具体情况
$$\begin{cases}\varphi|_\Gamma=\text{常数}\ (\text{~~电力线与边界垂直~~})\\ \frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_S=0\ (\text{电力线与边界平行})\end{cases}$$

2. 设 $\dot{I} = I_0 \sin\omega t$



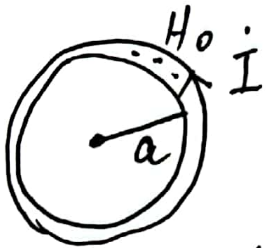
由 $\oint \dot{H} dl = \sum \dot{I}$ 可得

$$\dot{H}_0 l = N \cdot \dot{I}$$

$$\dot{H}_0 = \frac{N\dot{I}}{l}$$

~~幽~~控制方程为 $\nabla^2 \dot{H} + k\dot{H} = 0$ $\quad k = \sqrt{j\omega\mu\gamma}$

又∵



可知 $\dot{H}$ 只与 ρ 有关

∴展开得 $\frac{1}{\rho} \cdot \frac{d}{d\rho}\left(\rho \frac{d\dot{H}}{d\rho}\right) + k^2 \dot{H} = 0$

~~解得~~边界条件 $\begin{cases} \dot{H}\big|_{\rho=0} = \text{有限} \\ \dot{H}\big|_{\rho=a} = \dot{H}_0 \end{cases}$ 解得

$$\dot{H} = \frac{J_0(k\rho)}{J_0(ka)} \dot{H}_0 = \frac{J_0(k\rho)}{J_0(ka)} \cdot \frac{N\dot{I}}{l}$$

∴ $\dot{E} = \frac{1}{\gamma} \cdot \nabla \times \dot{H} = \frac{k}{\mu\gamma} \cdot \frac{N\dot{I}}{l} \cdot \frac{J_1(k\rho)}{J_0(ka)}$

则单位长度导体的复功率:

$$\tilde{P} = -\oint_s (\dot{E} \times \dot{H}^*) \cdot dS$$

解之得:

$$\tilde{P}=\begin{cases} j\dfrac{\omega\pi a^2\mu N^2}{l^2}\cdot I_0^2+\dfrac{\pi a^4\omega^2\mu^2\gamma N^2}{8l^2}\cdot I_0^2 & (\delta>a)\\[2ex] j\dfrac{2\pi aN^2\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\gamma}}}{l^2}I_0^2+\dfrac{2\pi aN^2\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\gamma}}}{l^2}\cdot I_0^2 & (\delta<\frac{a}{5})\end{cases}$$

（δ 为集肤深度，$\delta=\sqrt{\dfrac{2}{\omega\mu\gamma}}$）

由此 有功功率为

$$P=\begin{cases} \dfrac{\pi a^4\omega^2\mu^2\gamma N^2}{8l^2}\cdot I_0^2 & (\delta>a) & \propto\omega^2\\[2ex] \dfrac{2\pi aN^2\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\gamma}}}{l^2}\cdot I_0^2 & (\delta<\frac{a}{5}) & \propto\sqrt{\omega}\end{cases}$$

因此①低频近似情况下（$\delta>a$）时，涡流损耗 P 与 ω^2 成正比，

②高频近似情况下（$\delta<\frac{a}{5}$）时，涡流损耗 P 与 $\sqrt{\omega}$ 成正比。

由 $I^2R=P$ 可得线圈的入端阻抗 R 为

$$R=\begin{cases} \dfrac{\pi a^4\omega^2\mu^2\gamma N^2}{8l^2} & (\delta>a)\\[2ex] \dfrac{2\pi aN^2\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\gamma}}}{l^2} & (\delta<\frac{a}{5})\end{cases}$$