第 21 卷第 1 期(总第 115 期) 系 统 工 程 Vol. 21, No. 1
2003 年 1 月 Systems Engineering Jan. , 2003

文章编号: 1001-4098(2003)01-0105-05

AHP 方法中判断矩阵的标度扩展构造法*

黄德才, 郑河荣

(浙江工业大学 信息工程学院, 浙江 杭州 310014)

摘 要: AHP 在实际使用中常常因判断矩阵出现一致性检验错误而导致决策难产, 且这个问题至今没有得到根本性解决。本文通过实例分析说明, 导致一致性检验错误的根本原因是判断矩阵的传统构造方法存在严重缺陷, 它固化了选定的标度, 使原先有差别的候选方案在比较过程中失去差别, 因此, 本文提出一种新的判断矩阵构造方法——标度扩展法, 并证明该方法无论使用什么标度, 所构造的判断矩阵都是完全一致的, 故不需进行一致性检验且排序向量也容易获得, 从而提高 AHP 方法决策的可靠性, 并使 AHP 方法变得简便易用。

关键词: AHP 方法; 判断矩阵; 一致性检验; 标度扩展法

中图分类号: O223 **文献标识码**: A

1 引言

美国运筹学家 T. L. Saaty 在 20 世纪 70 年代提出的层次分析方法(Analytic Hierarchy Process, 简称 AHP)是综合定性与定量分析, 解决具有复杂层次结构的多目标决策问题的一种有效方法, 在社会, 经济和管理等许多领域得到了广泛应用。AHP 方法将人的主观判断为主的定性分析进行量化, 用数值来表示各个后选方案的差异, 以供决策参考。AHP 方法的一个关键步骤是: 根据某种判别标度(表 1 所示)构造一个具有满意一致性的判断矩阵 P, 则 P 的最大特征值对应的特征向量 $\omega=(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)^T$ 就是 n 个方案的重要性排序向量, 其分量 ω_i 就是第 i 个方案的重要性权值。然而, AHP 方法在决策过程中常常因判断矩阵不能通过一致性检验而导致决策难产, 给 AHP 方法的实际应用带来不小的困难, 且这个问题至今没有得到很好的解决。为了解决判断矩阵的一致性问题, 人们主要从以下两个方面进行了研究并取得不少研究结果。

(1) 矫正判断矩阵

即通过某种方法将没有通过一致性检验的判断矩阵改造为具有满意一致性的另一个矩阵, 因此这种方法也称为判断矩阵的修正。近些年来, 人们提出了各种各样改进判断矩阵的方法[1-3], 但这些方法几乎都是根据初始判断矩阵及其特征向量性质对其进行纯粹数学上的改造, 虽然能够将不一致的初始判断矩阵改造为具有满意一致性的另一个判断矩阵, 但是, 经过改造后的矩阵显然已不是原先专家给出的矩阵, 有时与初始判断矩阵相距甚远, 因此, 改造后的判断矩阵已不能真实反映决策专家的真实意愿, 且根据改造后的判断矩阵所作出的决策, 其可靠性和可信度是值得怀疑的。

(2) 提出新的判别尺度

AHP 中的判别尺度也称为标度。人们经过长期的研究发现, 标度方法选择不合适也是判断矩阵不一致性的重要原因之一。比如, 文献[4]就指出, Saaty 给出的 1～9 标度通常与评判者的实际想法不符, 因为该文对样本为 120 多个的问卷调查结果显示, 人们对判断"A 比 B 略微重要"的期望标度为 1.3, 而 Saaty 的 1～9 标度则为 3(表 1 中的第 1 种标度)。文献[5]还介绍了一个用 1～9 标度没有通过一致性检验, 但改用指数标度后顺利通过一致性检验

* **收稿日期**: 2002-07-13
基金项目: 浙江省自然科学基金资助项目(601076)
作者简介: 黄德才, 浙江工业大学信息工程学院。

的例子，以此说明应该根据实际问题的不同情况选择合适的标度方法。除了 Saaty 的 1～9 标度外，人们新提出的标度主要有 0～2 三标度、-1～1 三标度、五标度制、9/9～9/1 标度、10/10～18/2 标度、指数标度[4-8]、比例标度[9]等。

虽然通过选择合理的标度通常可以解决判断矩阵的一致性检验错误问题，但在实践中，对不同的实际问题如何准确选择合理的标度却没有统一的标准，因此仍是一个悬而未决的困难问题。

从以上分析可知，矫正判断矩阵的方法虽然可以将没有通过一致性检验的判断矩阵改造为具有满意一致性的矩阵，但却偏离了专家的判断，其决策的可信度值得怀疑。选择合理的标度虽然可以解决判断矩阵的一致性问题，但如何选择却没有统一的标准，在实际应用中如何选择仍然是一个悬而未决的困难问题。本文将通过实例分析说明，AHP 法中判断矩阵一致性检验错误的根本原因是判断矩阵的传统构造方法存在缺陷所致。因此，本文提出了一个新的判断矩阵构造方法——标度扩展法。这个方法使用任何标度所构造的判断矩阵都是完全一致的，因而不需进行一致性检验且排序向量也容易获得，从而大大提高了 AHP 方法决策的可靠性，也使 AHP 方法变得简便易用。

2 实例分析

自层次分析方法被提出以来，人们对其进行了深入地研究，取得了大量的成果，但判断矩阵的构造方法仍然是传统方法：对方案进行两两比较的同时给出比较的标度值，并构造判断矩阵，且这种构造判断矩阵的方法和计算过程至今没有任何改变。为了计算方便，下面仅用 AHP 法中使用得最多的 1～9 标度、9/9～9/1 标度、文献[4]给出的期望标度和[9]中的比例标度来说明传统判断矩阵构造方法存在的缺陷。传统方法使用其他标度所构造的判断矩阵存在完全一样的问题，本文不再赘述。

表 1 1～9 标度、9/9～9/1 标度、比例标度和调查所得的期望标度

序号	名 称	相 同	略微重要	明显重要	强烈重要	绝对重要	通用格式
1	1～9 标度	1	3	5	7	9	k
2	9/9～9/1 标度	9/9(1)	9/7(1.286)	9/5(1.8)	9/3(3.0)	9/1(9.0)	9/(10-k)
3	比例标度	1	1.2	1.4	1.6	1.8	
4	期望标度	1	1.3	1.77	2.4	3.63	

例 1 设有 3 个方案 A、B、C，已知对于某一指标 H，A 比 B 绝对重要，B 比 C 绝对重要。按照传统的判别矩阵构造方法，对方案进行两比较，并根据表 1 给出的 1～9 标度，可得判断矩阵各个元素的值如下：由 A 比 B 绝对重要可得 $p_{12}=9$，由 B 比 C 绝对重要可得 $a_{23}=9$，显然，由三个方案之间重要程度的传递性可知，A 比 C 绝对绝对重要。但由于 1～9 标度方法中没有“绝对绝对重要”所对应的标度值，因此只能取 $p_{13}=9$，这样得到如下的判断矩阵 P.

$$P=\begin{pmatrix}1 & 9 & 9\\ \frac{1}{9} & 1 & 9\\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & 1\end{pmatrix},\quad P'=\begin{pmatrix}1 & 3.63 & 3.63\\ \frac{1}{3.63} & 1 & 3.63\\ \frac{1}{3.63} & \frac{1}{3.63} & 1\end{pmatrix}$$

由于判断矩阵 P 的最大特征值为 $\lambda_{max}=3.5608$，其一致性指标 $CR(M)\geq 0.48>0.1$，所以矩阵 P 不具有满意的一致性，因此，用 AHP 方法无法从矩阵 P 计算出这 3 个方案的合理的重要性权值。造成这种情况的原因就是其传统的判断矩阵构造法固化了给定的标度，即标度在判断矩阵的构造过程中没有柔性，也不具备可扩展性，这样得到的判断矩阵使得原先有很大差别得方案 B、C 变得没有了差别，因为 P 的第 1 行说明 A 对 B 和 C 的标度值都是 9，所以它实际是标明了 B 和 C 是同等重要的，这显然与实际想要表达的意思不一致，且相差甚远。当然，我们可以利用判断矩阵的改进方法对 P 进行矫正，然而，经过改造后的矩阵已经不是原先专家给出的初始判断矩阵，有时与初始判断矩阵相距甚远。例如，对于矩阵 P，利用[3]中的方法可得出结论：造成 P 不一致的原因是 $p_{23}=9$ 太大，需要减小，而实际上的原因是 $p_{13}=9$ 太小，需要增大。当 $p_{13}=81$，相应 $p_{31}=1/81$ 时 P 才具有完全的一致性，这时的 P

才真正表达了使用 1～ 9 标度时 3 个方案的实际重要程度和相互关系, $p_{13}= 81$ 这个标度就是对 1～ 9 标度的一种扩展。对于这个例子, 不管选择指数标度或者其他任何一种已知标度, 按照传统方法构造的判断矩阵都会出现以上同样的问题, 比如选择期望标度, 传统方法得到的判断矩阵只能是上面的矩阵 P', 而这个矩阵仍然是不具有满意的一致性。

例 2　设有 4 个方案 A、B、C、D, 已知对于某一指标 H 而言, 它们的实际重要程度如下: A 比 B 略微重要, B 比 C 略微重要, 且 C 比 D 略微重要。根据方案之间重要程度的传递关系, 这 4 个方案对应的完全一致的判断矩阵只能是如下矩阵 Q, 但由于 1～ 9 标度中根本没有 27 这一标度值, 所以 q_{14} 也只能取 9, 但这时判断矩阵 Q 就不一致了。如果选择期望标度, 则完全一致的判断矩阵只能是如下的矩阵 Q', 但传统方法同样无法得到这个判断矩阵, 因为期望标度中没有 2.179 这个标度值。

$$Q=\begin{pmatrix}1 & 3 & 9 & 27\\ \frac{1}{3} & 1 & 3 & 9\\ \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & 1 & 3\\ \frac{1}{27} & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & 1\end{pmatrix},\quad Q'=\begin{pmatrix}1 & 1.3 & 1.69 & 2.179\\ \frac{1}{1.3} & 1 & 1.3 & 1.69\\ \frac{1}{1.69} & \frac{1}{1.3} & 1 & 1.3\\ \frac{1}{2.179} & \frac{1}{1.69} & \frac{1}{1.3} & 1\end{pmatrix}$$

为什么说判断矩阵 Q 是用选择 1～ 9 标度时, 真正能够反映 A、B、C、D 这 4 个方案重要程度的判断矩阵呢? 这正是我们分析并提出标度扩展法的关键问题所在。由 A 比 B 略微重要, B 比 C 略微重要, 且 C 比 D 略微重要的条件, 得知这 4 个方案的重要程度满足 $A\geq B\geq C\geq D$ 的关系, 根据表 1 所示的 1～ 9 标度, A 与 B 比较的标度值为 3, 即 A 的重要性是 B 的 3 倍, 由于 B 的重要性是 C 的 3 倍, 因此可知 A 的重要性是 C 的 9 倍, 同理可知 A 的重要性是 D 的 27 倍, B 的重要性是 D 的 9 倍等。也就是说, 当 4 个方案的重要程度满足 $A\geq B\geq C\geq D$ 的关系, 我们可以按照如下方法构造判断矩阵:

(1) 先分别将 A 与 B、B 与 C、C 与 D 进行比较, 得到判断矩阵 Q (或 Q') 中如下元素的值: $q_{12}= 3$, $q_{23}= 3$, $q_{34}= 3$ ($q'_{12}= 1.3$, $q'_{23}= 1.3$, $q'_{34}= 1.3$)。

(2) 根据各个方案重要程度之间的传递关系, 可得 A 与 C 比较的标度 $q_{13}= q_{12}\times q_{23}= 9$, A 与 D 比较的标度为 $q_{14}= q_{12}\times q_{23}\times q_{34}= 27$, B 与 D 比较的标度为 $q_{24}= q_{23}\times q_{34}= 9$ ($q'_{13}= q'_{12}\times q'_{23}= 1.69$, $q'_{14}= 2.179$, $q'_{24}= 1.69$)。

(3) 令 $q_{ij}= 1/q_{ji}$ ($q'_{ij}= 1/q'_{ji}$), 其中 $i>j$, 即主对角先以下的元素是主对角线以上的对称元素的倒数。

以上步骤正是下一节将要介绍的判断矩阵构造新方法——标度扩展法的基本思想。

3　标度扩展法

众所周知, 对于方案数为 n 的决策问题, 判断矩阵的传统构造方法在对方案进行两两比较时同时确定其标度值, 即决策专家一共需要确定判断矩阵中 $n(n-1)/2$ 个元素值, 也就是确定判断矩阵的上三角部分的元素值。但从例 2 可知, 如果 n 个方案的重要程度满足 $X_1\geq X_2\geq\cdots\geq X_n$, 则只要比较方案 X_i 与方案 X_{i+1} 的重要性并确定其权值即可 ($i= 1, 2, \cdots, n-1$), 而判断矩阵中其他元素的值可通过重要程度的传递性计算获得。对于任意给定的 n 个候选方案, 我们可以先对其进行两两比较, 并按照重要程度的不减方式排序, 设所得顺序为 $X_1\geq X_2\geq\cdots\geq X_n$, 然后再对 $i= 1, 2, \cdots, n-1$, 确定方案 X_i 与方案 X_{i+1} 的重要性权值, 最后按照方案间重要程度的传递性计算出判断矩阵中其他元素的值, 这就是判断矩阵标度扩展构造法的基本思想。由此可得判断矩阵的标度扩展构造法(简称 CE 算法) 的计算步骤如下:

Step 0　(1) 输入候选方案数 n、候选方案 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 和选定的标度;

(2) 定义判断矩阵 $P= (p_{ij})_{n\times n}$ 且 $p_{ij}= 0$ ($i, j= 1, 2, \cdots, n$) 和特征向量 $W= (w_1, w_2, \cdots, w_n)^T$ 且 $w_i= 0$ ($i= 1, 2, \cdots, n$)。

Step 1　(1) 对 n 个方案进行两两比较, 按重要程度的不减方式排序, 不失一般性, 设排序后的顺序为 $X_1\geq X_2\geq\cdots\geq X_n$;

(2) 对 $i= 1, 2, \cdots, n-1$, 将 X_i 与 X_{i+1} 进行比较, 并将其对应的标度值记为 t_i.

Step 2　构造判断矩阵 P:

(1) 令 $i= 1$, $j= 1$;

(2) 若 $i > n$, 转 Step 3;

(3) 若 $j = i$, 置 $p_{ii} = 1$; 否则, 置 $p_{ij} = t_i \times t_{i+1} \times \cdots \times t_{j-1}$, $p_{ji} = 1/p_{ij}$;

(4) $j = j + 1$;

(5) 若 $j \le n$, 转 Step 2 之 (3), 否则 $i = i + 1$, 转 Step 2 之 (2)。

Step 3 计算排序向量 W, 对 $i = 1, 2, \cdots, n$,

若 $i = n$, 置 $w_i = 1$, 否则置 $w_i = t_i \times t_{i+1} \times \cdots \times t_{n-1}$.

Step 4 (1) 输出判断矩阵 P 和对应排序向量 W;

(2) 结束。

定理 1 由 CE 算法构造的判断矩阵 P 是完全一致的且其排序向量为 $(t_1t_2\cdots t_{n-1}, t_2t_3\cdots t_{n-1}, \cdots, t_{n-1}, 1)^T$.

证明 设判断矩阵为 P, 根据 CE 算法 Step 1 之 (1) 可得 n 个方案的重要性排序为 $X_1 \ge X_2 \ge \cdots \ge X_n$, 由 Step 1 之 (2) 得 X_i 与 X_{i+1} 比较的标度值 t_i, 根据 Step 3 得矩阵 P 如下:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_1t_2 & t_1t_2t_3 & t_1t_2t_3t_4 & \cdots & t_1t_2\cdots t_{n-1} \\ \frac{1}{t_1} & 1 & t_2 & t_2t_3 & t_2t_3t_4 & \cdots & t_2t_3\cdots t_{n-1} \\ \frac{1}{t_1t_2} & \frac{1}{t_2} & 1 & t_3 & t_3t_4 & \cdots & t_3t_4\cdots t_{n-1} \\ \frac{1}{t_1t_2t_3} & \frac{1}{t_2t_3} & \frac{1}{t_3} & 1 & t_4 & \cdots & t_4t_5\cdots t_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{t_1t_2\cdots t_{n-2}} & \frac{1}{t_2t_3\cdots t_{n-2}} & \frac{1}{t_3t_4\cdots t_{n-2}} & \frac{1}{t_4t_5\cdots t_{n-2}} & 1 & \cdots & t_{n-1} \\ \frac{1}{t_1t_2\cdots t_{n-1}} & \frac{1}{t_2t_3\cdots t_{n-1}} & \frac{1}{t_3t_4\cdots t_{n-1}} & \frac{1}{t_4t_5\cdots t_{n-1}} & \frac{1}{t_5\cdots t_{n-1}} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

由于矩阵 P 满足 $p_{ij} = 1/p_{ji}$, 所以 A 是一个正互反矩阵, 显然, 矩阵 P 的任意两行成比例, 故根据文献[2]的证明可知 P 是一个具有完全一致性的正互反矩阵, 因此, 其最大特征值为 n. 设 P 关于特征值 n 的特征向量为 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n)^T$, 则有

$$PX = nX$$

即有如下的线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + t_1x_2 + t_1t_2x_3 + \cdots + t_1t_2\cdots t_{n-1}x_n = nx_1 \\ \frac{1}{t_1}x_1 + x_2 + t_2x_3 + \cdots + t_2\cdots t_{n-1}x_n = nx_2 \\ \quad \cdots\cdots \\ \frac{1}{t_1t_2\cdots t_{n-1}}x_1 + \frac{1}{t_2t_3\cdots t_{n-1}}x_2 + \frac{1}{t_3\cdots t_{n-1}}x_3 + \cdots + x_n = nx_n \end{cases}$$

对以上第 $i\,(i = 2, 3, \cdots, n)$ 个线性方程乘上 $t_1t_2\cdots t_{i-1}$ 后, 所有方程的左边都相同, 故可得

$$x_1 = t_1x_2,\ x_2 = t_2x_3,\ \cdots,\ x_{n-1} = t_{n-1}x_n$$

令 $x_n = 1$, 则得 $X = (t_1t_2\cdots t_{n-1}, t_2t_3\cdots t_{n-1}, \cdots, t_{n-1}, 1)^T$, 这就完成了定理的证明。

定理 1 表明, 由标度扩展构造法构造判断矩阵是完全一致的, 且获得的各方案的重要性权重能真正反映方案的重要程度和相互关系, 并能保证方案间重要程度的传递性和相对重要性不变。

下面给出一个使用比例标度的例子来进一步说明标度扩展构造法的优点。

例 3 设有 A、B、C、D 等 4 个方案, 对于某一指标 H 而言, 按照 CE 算法 Step 1 之 (1) 将其两两比较并按照重要程度不减方式排序为 $A \ge B \ge C \ge D$, 假设按照 Step 1 之 (2) 对相邻两个方案进行比较得知: A 比 B 略微重要, B 比 C 明显重要, C 比 D 绝对重要, 根据比例标度和 Step 2 有 $p_{12} = 1.2$, $p_{23} = 1.4$, $p_{34} = 1.8$, 故其判断矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1.2 & 1.68 & 3.024 \\ \frac{1}{1.2} & 1 & 1.4 & 2.52 \\ \frac{1}{1.68} & \frac{1}{1.4} & 1 & 1.8 \\ \frac{1}{3.024} & \frac{1}{2.52} & \frac{1}{1.8} & 1 \end{pmatrix}$$

矩阵 P 的特征向量为 $(3.024, 1.68, 1, 2, 1)^T$, 1-范数规范化向量为 $(0.438, 0.243, 0.174, 0.145)^T$, 其每个分量就是 A、B、C、D 这 4 个方案的重要性权值。

4　结束语

AHP 方法虽然在社会, 经济和管理等许多领域得到广泛应用, 但判断矩阵的一致性问题一直没有得到很好的解决, 因此给 AHP 的实际应用带来不少困难。本文通过分析发现 AHP 方法中判断矩阵一致性检验错误的根本原因是判断矩阵的构造方法存在缺陷所致, 因此提出了一个新的判断矩阵构造方法——标度扩展法, 并证明该方法无论使用何种标度, 所构造的判断矩阵都是完全一致的, 因而不需进行一致性检验且排序向量也容易获得, 从而提高了 AHP 方法决策的可靠性, 也使 AHP 方法变得简便易用。

参考文献:

[1] Ma W Y, etal. A practical approach to modifiying pairwise matrices and two oriteria of modificatory effectiveness[J]. Journal of Systems Science and Systems Engineering, 1993, 2(4): 334~338.
[2] 刘万里, 雷治军. 关于 AHP 中判断矩阵校正方法的研究[J]. 系统工程理论与实践, 1997, 17(6): 30~39.
[3] 李梅霞. AHP 中判断矩阵一致性改进的一种新方法[J]. 系统工程理论与实践, 2000, 20(2): 122~125.
[4] 何堃. 层次分析法的标度研究[J]. 系统工程理论与实践, 1997, 17(6): 58~61.
[5] 陈迁, 王浣尘. AHP 方法判别尺度的合理定义[J]. 系统工程, 1996, 14(5): 18~20.
[6] 侯岳衡, 沈德家. 指数标度及其几种标度的比较[J]. 系统工程理论与实践, 1995, 15(10): 24~26.
[7] 徐泽水. 关于层次分析中几种标度的模拟评估[J]. 系统工程理论与实践, 2000, 20(2): 122~125.
[8] 杜栋. 基于 0.1~0.9 标度的 AHP 再研究[J]. 系统工程与电子技术, 2001, 23(5): 36~38.
[9] 黄德才, 胥琳. AHP 法中判断矩阵的比例标度构造法[J]. 控制与决策, 2002, 17(4).

Scale-Extending Method for Constructing Judgment Matrix in the Analytic Hierarchy Process

HUANG De-cai, Zheng He-rong
(College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310032, China)

Abstract: The judgment matrices in AHP often can not pass the consistency checking, which leads decision-making to failure in practice, and the problem has not been solved ultimately yet. The examples in this paper illustrate that the main factor of the consistency checking error of the judgment matrix is the serious fault existed in the traditional method for constructing judgment matrix. It makes the judgment scales unchangeable, results the candidate projects which are difference in practice become no difference in the process of constructing judgment matrix. A new method for constructing judgment matrix, called scale-extended method, is presented in this paper. It is proved that the judgment matrices are always full consistency constructed by the new method using whatever judgment scales. So it does not need consistency checking and the importance weight vector can be got easily. The new method enhances the reliability of decision-making of AHP, and makes the AHP simple and easy use.

Key words: AHP; Comparison Matrix; Consistency Checking; Scale-Extending