2020年数学竞赛模拟自测（1）解答

一、（本题共5小题，每小题6分，共30分）解答下列各题，要求写出重要步骤。

1．求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{\sin^2 x}\ln(1+t)dt}{e^{2x^2}-2e^{x^2}+1}$。

2．求函数$f(x)=2^x-1-x^2$在实轴上的零点的个数。

3. 计算曲面积分$I=\oiint_{\Sigma}\left(\dfrac{dydz}{x}+\dfrac{dzdx}{y}+z^7dxdy\right)$，其中$\boldsymbol{\Sigma}$为椭球面外侧，其方程为

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

4．设平面区域$D=\left\{(x,y)\middle|x^3\le y\le 1,-1\le x\le 1\right\}$，$f(x)$是定义在$[-a,a]\,(a\ge 1)$上的任意连续函数，求$I=\iint\limits_D 2y[(x+1)f(x)+(x-1)f(-x)]dxdy$。

5．设$\{a_n\}$是一极限为0的单调减少的正数数列，且$b_n=a_n-2a_{n+1}+a_{n+2}\ge 0$，求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}nb_n$的和。

解：1．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{\sin^2 x}\ln(1+t)dt}{e^{2x^2}-2e^{x^2}+1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{\sin^2 x}\ln(1+t)dt}{(e^{x^2}-1)^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{\sin^2 x}\ln(1+t)dt}{x^4}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin^2 x)\cdot\sin 2x}{4x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cdot 2x}{4x^3}=\dfrac{1}{2}$。

2．$x=0,x=1$显然是$f(x)$的零点.

因$f''(x)=2^x\ln^2 2-2=0$只有一个零点，由Rello定理知$f(x)$至多只有三个零点.

又因$f(1)=0\ f'(1)<0\quad f'(4)>0$，从而$f(x)$在$[1,4]$内至多只有一个零点$x=x_0>1$，

所以$f(x)$有三个零点$x_1=0,x_2=1,x_3=x_0$.

3．$I_1=\oiint_{\Sigma}\dfrac{dydz}{x}=2\iint_{D_{yz}}\dfrac{dydz}{a\sqrt{1-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}}}$，其中$D_{yz}:\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1$.

令 $\begin{cases}y=br\cos\theta\\ z=cr\sin\theta\end{cases}$，则区域$D_{yz}:\begin{cases}0\le r\le 1\\ 0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$

所以 $I_1 = 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{bcrdr}{a\sqrt{1-r^2}} = \frac{4bc\pi}{a}\int_0^1 \frac{rdr}{\sqrt{1-r^2}} = \frac{4bc\pi}{a}.$

由对称性，得 $I_2 = \oiint_\Sigma \frac{dzdx}{y} = \frac{4ac\pi}{b}$.

由高斯公式，有

$$I_3 = \oiint_\Sigma z^7 dxdy = \iiint_\Omega 7z^6 dxdydz = 14\int_0^c z^6 \cdot \pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)dz = \frac{4}{9}\pi abc^7.$$

将三个结果加起来，则有

$$I = \frac{4\pi bc}{a} + \frac{4\pi ac}{b} + \frac{4\pi abc^7}{9} = 4\pi abc\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{c^6}{9}\right).$$

4. 因 $f(x)+f(-x)$、$f(x)-f(-x)$ 分别为偶函数与奇函数，所以 $x[f(x)+f(-x)]$ 为奇函数，

$$x[f(x)+f(-x)]+f(x)-f(-x)=(x+1)f(x)+(x-1)f(-x)$$

也为奇函数，于是

$$I = \int_{-1}^1 [(x+1)f(x)+(x-1)f(-x)]dx\int_{x^3}^1 2ydy$$
$$= \int_{-1}^1 (1-x^6)[(x+1)f(x)+(x-1)f(-x)]dx = 0 \text{ 。}$$

5. 记 $c_n = a_n - a_{n+1}$，则 $b_n = c_n - c_{n+1}$，且 $c_n \ge 0$ 以 0 为极限。

$$\sum_{i=m}^\infty b_i = c_m = a_m - a_{m+1}\text{；}\ \sum_{n=1}^\infty nb_n = \sum_{n=1}^\infty\sum_{i=n}^\infty b_n = \sum_{n=1}^\infty (a_n - a_{n+1}) = a_1 \text{ 。}$$

二、（14 分）设 $f(x)$ 定义在长度不小于 2 的一个区间里，且 $|f(x)| \le 1$ 及 $|f''(x)| \le 1$. 求证：

$|f'(x)| \le 2$.

证明：不失一般性，不妨认为 $f(x)$ 定义在区间 $[-1,1]$，由 Taylor 公式，对于

$\forall x \in [-1,1]$，我们有

$$f(1) = f(x) + (1-x)f'(x) + \frac{1}{2}(1-x)^2 f''(\xi)$$

$$f(-1) = f(x) + (-1-x)f'(x) + \frac{1}{2}(-1-x)^2 f''(\eta)$$

其中 $\xi \in (x,1), \eta \in (-1,x)$. 由此可得

$$f(1)-f(-1)=2f'(x)+\frac{1}{2}(1-x)^2 f''(\xi)-\frac{1}{2}(1+x)^2 f''(\eta);$$

注意$\left|f(x)\right|\le 1,\left|f''(x)\right|\le 1$, 我们有

$$2\left|f'(x)\right|\le\left|f(1)\right|+\left|f(-1)\right|+\frac{1}{2}(1-x)^2\left|f''(\xi)\right|+\frac{1}{2}(1+x)^2\left|f''(\eta)\right|$$

$$\le 2+\frac{1}{2}(1-x)^2+\frac{1}{2}(1+x)^2=3+x^2\le 4$$

$$\Rightarrow\left|f'(x)\right|\le 2.$$

三、（12 分）设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，开区间 (a,b) 内二阶可导， $f(a)=f(b)=0$，$\int_a^b f(x)dx=0$ 。证明:

1)至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=f(\xi)$；

2)至少存在一点 $\eta\in(a,b),\eta\ne\xi$，使得 $f''(\eta)=f(\eta)$。

证明：1）由积分中值定理 $\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a)=0,\quad\therefore f(c)=0$

设 $G(x)=e^{-x}f(x)\quad G(a)=G(b)=G(c)=0$

所以 $\exists\xi_1\in(a,c)\quad\exists\xi_2\in(c,b)$ 使 $G'(\xi_1)=G'(\xi_2)=0$

$G'(x)=e^{-x}[f'(x)-f(x)]=0\quad\therefore f'(\xi_1)=f(\xi_1),f'(\xi_2)=f(\xi_2)$

2）设 $F(x)=e^{x}[f'(x)-f(x)]\quad F(\xi_1)=F(\xi_2)$

由 Rello 定理 $\exists\eta\in(\xi_1,\xi_2)$ 使 $F'(\eta)=0$，所以 $\exists\eta\in(a,b),\eta\ne\xi$，使得 $f''(\eta)=f(\eta)$。

四、（12 分）证明：$\int_0^\pi xa^{\sin x}dx\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^{-\cos x}dx\ge\frac{\pi^3}{4}$（$a>0$ 是常数）.

解：令$x=\frac{\pi}{2}+t$,则

$$\int_0^\pi xa^{\sin x}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\frac{\pi}{2}+t)a^{\cos t}dt=\frac{\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}a^{\cos t}dt+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}ta^{\cos t}dt$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^{\cos t}dt+0=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^{\cos t}dt.$$

用$S-C$不等式:

$$\int_0^{\pi} xa^{\sin x}dx \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^{-\cos x}dx = \pi(\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^{\cos x}dx)(\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^{-\cos x}dx)$$

$$\geq \pi(\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^{\frac{\cos x}{2}} a^{-\frac{\cos x}{2}} dx)^2 = \frac{\pi^3}{4}.$$

五、（12 分）从原点向椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的切平面作垂线，求垂足的轨迹.

解：椭球面在点 (x_0, y_0, z_0) 处的切平面方程为

$\frac{x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{y_0}{b^2}(y-y_0)+\frac{z_0}{c^2}(z-z_0)=0$，即 $\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y+\frac{z_0}{c^2}z=1$，

过原点向切平面所引垂线方程为

$\frac{x}{\frac{x_0}{a^2}}=\frac{y}{\frac{y_0}{b^2}}=\frac{z}{\frac{z_0}{c^2}}$，其参数形式为 $x=\frac{x_0}{a^2}t, y=\frac{y_0}{b^2}t, z=\frac{z_0}{c^2}t$，

代入切平面方程，求得与切平面的交点为

$$x=\frac{x_0/a^2}{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}+\frac{z_0^2}{c^4}}, y=\frac{y_0/b^2}{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}+\frac{z_0^2}{c^4}}, z=\frac{z_0/c^2}{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}+\frac{z_0^2}{c^4}}$$

于是 $x^2+y^2+z^2=\frac{1}{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}+\frac{z_0^2}{c^4}}$（注意右边是非零正数）

又 $a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2=\frac{1}{(\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}+\frac{z_0^2}{c^4})^2}(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2})=\frac{1}{(\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}+\frac{z_0^2}{c^4})^2}$

所以垂足的轨迹方程为 $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2$ （$x^2+y^2+z^2\neq 0$）。

六、（12 分）设连续可微函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F(xz-y, x-yz)=0$（其中 $F(u,v)$ 有连续偏导数）唯一确定，L 为正向单位圆周。试求：

$I=\oint_L (xz^2+2yz)dy-(2xz+yz^2)dx$ （第三届决赛原题）

解：令 $Q=xz^2+2yz, P=-(2xz+yz^2)$，则

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=2(xz+y)\frac{\partial z}{\partial x}+2(x+yz)\frac{\partial z}{\partial y}+2z^2$$

利用 Green 公式，有

$$I = 2\iint_{x^2+y^2\le 1}\left[(xz+y)\frac{\partial z}{\partial x}+(x+yz)\frac{\partial z}{\partial y}+z^2\right]dxdy\text{；}$$

方程 $F=0$ 对 x 求导，得

$$\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\right)F_u+\left(1-y\frac{\partial z}{\partial y}\right)F_v=0\text{，即}\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{zF_u+F_v}{xF_u-yF_v}\text{；}$$

同理可得 $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{F_u+zF_v}{xF_u-yF_v}$。于是可得

$(xz+y)\frac{\partial z}{\partial x}+(x+yz)\frac{\partial z}{\partial y}=1-z^2$；所以

$I=\oint_L (xz^2+2yz)dy-(2xz+yz^2)dx=2\iint_{x^2+y^2\le 1}dxdy=2\pi$ 。

七、（10 分）判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx$ 的敛散性。

解 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx-\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^n xdx$

记 $u_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx \quad v_n=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^n xdx$，$u_n$ 单调减少的，

$u_n^2>u_nu_{n+1}=\frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{n!!}{(n+1)!!}\frac{\pi}{2}=\frac{1}{n+1}\frac{\pi}{2}$，$u_n>\frac{1}{\sqrt{n+1}}$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散。另外 $v_n<\left(\frac{1}{2}\right)^n\frac{\pi}{6}$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛。

综上得原级数发散。