1. 几个常用不等式

1) 算术几何平均不等式

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \le \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n};$$

2) Hölder不等式

$$\boldsymbol{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n}$$

$$\boldsymbol{\le \left(a_1^p + a_2^p + \cdots + a_n^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(b_1^q + b_2^q + \cdots + b_n^q\right)^{\frac{1}{q}}}$$

其中$\boldsymbol{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1}$

3) 凸函数不等式

$$f(\alpha x+(1-\alpha)y)\le \alpha f(x)+(1-\alpha)f(y), 0\le\alpha\le 1$$

4）Bernoulli不等式

$$x> -1, n\ge 1, (1+x)^n\ge 1+nx$$

5）$e^x\ge 1+x$

6）$\ln(1+x)\le x, x>-1$

2. 典型方法

1） 重要极限与L'Hospital法则

注意： （1）只适用于$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$型；

（2） 适当结合等价无穷小代换、换元等技巧

1 最简单情形

例1 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x-x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}$

分析：分母中$\sin^2 x\sim x^2$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2\cos^2 x}{x^4}$$

例2 求$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(\int_0^x e^{u^2}du\right)^2}{\int_0^x e^{2u^2}du}$（第六届决赛）

分析：$\frac{\infty}{\infty}$，涉及到变限积分求导数

解：$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\int_0^x e^{u^2}\,du\right)^2}{\int_0^x e^{2u^2}\,du}=\lim_{x\to\infty}\frac{2e^{x^2}\int_0^x e^{u^2}du}{e^{2x^2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2e^{x^2}}{2xe^{x^2}}=0$$

例3 已知$\lim_{x\to 0}\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^3$，

则$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=$ ______

分析：（1）$\frac{f(x)}{x}\to 0, as\ x\to 0$

（2）$\frac{x+\frac{f(x)}{x}}{x}\to 3, as\ x\to 0$

2 其他不定式

例4 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$（第二届决赛）

分析: 1^{∞}形式

思考1:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{1-\cos x}}$$

思考2:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{\sin x-x}{x}\right)^{\frac{x}{\sin x-x}}\right]^{\left(\frac{\sin x-x}{x(1-\cos x)}\right)}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x(1-\cos x)}}$$

例5 求极限$\lim\limits_{x\to0+}\left[\ln(x\ln a)\cdot\ln\frac{\ln ax}{\ln\frac{x}{a}}\right], a>1.$(第五届决赛)

分析：$\ln(x\ln a)\to\infty$ $\quad\frac{\ln ax}{\ln\frac{x}{a}}\to 1$

$$\ln\frac{\ln ax}{\ln\frac{x}{a}}=\ln\left(1+\left(\frac{\ln ax}{\ln\frac{x}{a}}-1\right)\right)\sim\frac{\ln ax-\ln\frac{x}{a}}{\ln\frac{x}{a}}=\frac{2\ln a}{\ln\frac{x}{a}}$$

$$\lim_{x\to0+}\left[\ln(x\ln a)\cdot\ln\frac{\ln ax}{\ln\frac{x}{a}}\right]=\lim_{x\to0+}\ln(x\ln a)\cdot\frac{2\ln a}{\ln\frac{x}{a}}$$

3 利用函数极限求数列极限

例6 计算极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\int_1^n ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$

分析：被积函数在$x\to\infty$时，$ln(1+\frac{1}{\sqrt{x}})\sim\frac{1}{\sqrt{x}}$,

故

$$\int_1^n ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx\to\infty$$

考虑对极限

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{t}}\int_1^t \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$$

用L'Hospital法则

2）利用TAYLOR展开

两个问题：

1. 什么时候考虑Taylor展开

2. 如何展开到合适的阶

Taylor展开与等价无穷小代换是一回事吗?

Taylor展开可以带来什么样的好处?

3. 常用函数的Taylor展开式

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n+o(x^n)$$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$$

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{(-1)^{2n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1}+o(x^{2n})$$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2!}+\cdots$$

$$+\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$$

例1 求$\lim\limits_{n\to\infty} n[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}-e]$（首届决赛题）

分析：$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}=e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})$$

$$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=1-\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})$$

$$e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}=e\cdot e^{-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}=e[1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)+o\left(\frac{1}{n}\right)]$$

续

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} n[e\left(1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)-e]$$

$$= -\frac{1}{2}e$$

例2 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}[\left(x^3+\frac{x}{2}-\tan\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{1+x^6}]$(第三届决赛)

分析:

$$\tan\frac{1}{x}=\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^3}+o(\frac{1}{x^3})$$

$$e^{\frac{1}{x}}=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

$$\sqrt{1+x^6}=x^3\sqrt{1+\frac{1}{x^6}}=x^3(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^6}+o\left(\frac{1}{x^6}\right))$$

续

于是

$$\left(x^3+\frac{x}{2}-\tan\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{1+x^6}$$

$$=\left(x^3+\frac{x}{2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)$$

$$\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)$$

$$-x^3\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^6}+o\left(\frac{1}{x^6}\right)\right)$$

$$=x^3+x^2+x+\frac{2}{3}+o(1)-\left(x^3+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)$$

确定步骤无误，坚信自己的判断

例3 求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2(1-\ln(1+x))}{x}$(第三届预赛)

解：$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$

$$\frac{2}{x}\ln(1+x)=2-x+o(x)$$

$$(1+x)^{\frac{2}{x}}=e^{\frac{2}{x}\ln(1+x)}=e^2\cdot e^{-x+o(x)}$$

$$=e^2(1-x+o(x))$$

$$e^2(1-\ln(1+x))=e^2(1-x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2))$$

续

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2\big(1-\ln(1+x)\big)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^2\big(1-x+o(x)\big)-e^2\left(1-x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)}{x}$$

$$=0$$

例4 求$\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\sin\frac{k\pi}{n^2}$

分析：似乎像个Riemann和，似乎又差点什么

问题来了：由于$\frac{k}{n^2}$存在于正弦函数内，又无法表达成Riemann和！

$$\sin\frac{k\pi}{n^2}=\frac{k\pi}{n^2}+o\left(\frac{k}{n^2}\right)$$

续

解：$\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\sin\frac{k\pi}{n^2}$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}(1+\frac{k}{n})(\frac{k\pi}{n^2}+o\left(\frac{k}{n^2}\right))$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k\pi}{n^2}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k^2\pi}{n^3}+\sum_{k=1}^{n-1}o(\frac{k}{n^2})+\sum_{k=1}^{n-1}o(\frac{k^2}{n^3})$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{n(n-1)}{n^2}\pi+\frac{1}{6}\cdot\frac{n(n-1)(2n-1)}{n^3}\pi+o(1)$$

续

于是

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\sin\frac{k\pi}{n^2}=\frac{5}{6}\pi$$

变形：

求$\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\sin\frac{\pi}{n}$

求$\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+e^{\frac{k}{n}}\right)\sin\frac{k\pi}{n^2}$

例5 设函数$y=f(x)$二阶可导，且$f''(x)>0$，$f(0)=0$，$f'(0)=0$，求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3 f(u)}{f(x)\sin^3 u}$，其中$u$是曲线$y=f(x)$在点$P(x,f(x))$处的切线在$x$轴上的截距。（第四届预赛）

切记：莫慌，把题目读懂！

Q1: u是什么？怎么表达？有什么性质？

Q2: $f(u),\sin u$在$x\to 0$时有什么性质？

分析：首要问题是寻找u的表达式和性质

容易猜测到$u \to 0$当$x \to 0$时

或许会想到用L'Hospital法则（可以试一试）

解：

依题意，当$x > 0$时$f'(x) > 0$，
当$x < 0$时$f'(x) < 0$

由切线方程

$$y = f'(x)(t - x) + f(x)$$

得$u = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$。

考虑$f(0)$在x展开

$$0 = f(0) = f(x) - f'(x)x + o(x), x \to 0.$$

知

$$u = \frac{o(x)}{f'(x)} = \frac{o(x)}{x} \cdot \frac{x}{f'^{(x)}} \to 0 \cdot \frac{1}{f''(0)} = 0,$$

$$x \to 0.$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + o(x^2)$$

$$= \frac{1}{2}f''(0)x^2 + o(x^2), x \to 0$$

$$f(u) = f(0) + f'(0)u + \frac{1}{2}f''(0)u^2 + o(u^2)$$

$$= \frac{1}{2}f''(0)u^2 + o(u^2), x \to 0$$

$$\sin^3 u \sim u^3, x \to 0$$

$$f'(x) = f'(0) + f''(0)x + o(x), x \to 0$$

于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3 f(u)}{f(x)\sin^3 u}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3 f(u)}{f(x)u^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\frac{1}{2}f''(0)x^2+o(x^2)}\cdot\frac{\frac{1}{2}f''(0)u^2+o\left(u^2\right)}{u^2}\cdot\frac{x}{u}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x-\frac{f(x)}{f'(x)}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-\frac{f(x)}{xf'(x)}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{1 - \dfrac{\frac{1}{2} f''(0)x^2 + o(x^2)}{x\left(f''(0)x + o(x)\right)}}$$

$$= 2$$

3）夹挤定理

假设在c的某个去心邻域内满足

$$g(x) \le f(x) \le h(x)$$

并且

$$\lim_{x \to c} g(x) = \lim_{x \to c} h(x) = l$$

那么

$$\lim_{x \to c} f(x) = l$$

什么时候考虑用两边夹定理呢?

表达式不易计算

基本想法：突出主要，忽略次要

注意$\ln n$的增长速度

例1 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}$（第四届预赛）

1) $(\infty)^0$ 2) L'Hospital法则不适合

分析1：由$(n!)^{\frac{1}{n^2}}=e^{\frac{\ln n!}{n^2}}=e^{\frac{\ln 1+\ln 2+\cdots+\ln n}{n^2}}$

$$0\le\frac{\ln 1+\ln 2+\cdots+\ln n}{n^2}\le\frac{\ln n}{n}$$

分析2：$1\le(n!)^{\frac{1}{n^2}}\le n^{\frac{1}{n}}$

衰减速度

例2 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}\int_x^{x+1}\frac{sint}{\sqrt{t+cost}}dt$（4预赛）

分析：不要去试图将积分计算出来，估计它

分析：

$$-\frac{1}{\sqrt{x-1}}\le\int_x^{x+1}\frac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}dt\le\frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

例3 求$\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{a^{\frac{k}{n}}}{n+(a-1)k^{-1}}\,(a>1)$。

分析：有点像Riemann和，
然而表达式中出现k^{-1}

问题：k^{-1}对极限会产生怎样的影响?

解：由

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a^{\frac{k}{n}}}{n+(a-1)}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{a^{\frac{k}{n}}}{n+(a-1)k^{-1}}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{a^{\frac{k}{n}}}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{a^{\frac{k}{n}}}{n}=\int_{0}^{1}a^{x}dx=\frac{a-1}{\ln a}$$

续

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{a^{\frac{k}{n}}}{n+(a-1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+a-1}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{a^{\frac{k}{n}}}{n}$$

$$=\frac{a-1}{\ln a}$$

由夹挤定理，得

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{a^{\frac{k}{n}}}{n+(a-1)k^{-1}}=\frac{a-1}{\ln a}$$

4）单调有界

单调有界数列必有极限。

对于单调有界函数，也有相应的结论

例1 设$f(x)$在$[1,+\infty)$上连续可导，并且

$$f'(x)=\frac{1}{1+f^2(x)}\cdot\left[\sqrt{\frac{1}{x}}-\sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right]$$

证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在。（第四届决赛）

分析：貌似为微分方程，尝试求解$f(x)$乃是下下策

观察一下导函数值的特点：非负！

考虑$f(x)$的单调性和有界性

解：　由$\ln(1+x) \leq x$，当$x \geq -1$时，有$x \geq 1$时有

$$\sqrt{\frac{1}{x}} \geq \sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

续

于是$f'(x)\ge 0$，即$f(x)$是单调增函数。

显然，$f'(x)\le\sqrt{\frac{1}{x}}-\sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$

两边积分得

$$f(x)\le\int_1^x\left(\sqrt{\frac{1}{u}}-\sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{u}\right)}\right)du+f(1)$$

估计右边的积分

续

注意到，当$x \geq 1$时，

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\xi}\right)^3}\cdot\frac{1}{x^3}$$

$$\geq \frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}$$

$$\sqrt{\frac{1}{x}}-\sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\leq\sqrt{\frac{1}{x}}-\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{x}}\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{2x}}\right)$$

续

$$1-\sqrt{1-\frac{1}{2x}}=\frac{1}{2x}\cdot\frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{1}{2x}}}\le\frac{1}{2x}$$

于是

$$f(x)\le\int_1^x\frac{1}{2u^{\frac{3}{2}}}du+f(1)\le 1+f(1)$$

即$f(x)$有界。综上，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在。

例2 设$x_1>0, x_{n+1}=x_n^2+x_n (n=1,2,\cdots)$.求

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}+\cdots+\frac{1}{x_n+1}\right).$$

分析：将表达式化简，设法改写$\frac{1}{x_k+1}$

$$x_{n+1}=x_n^2+x_n=x_n(x_n+1)$$

$$\frac{1}{x_n(x_n+1)}=\frac{1}{x_{n+1}},\quad \frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_n+1}=\frac{1}{x_{n+1}}$$

续

解：由

$$\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_n+1}=\frac{1}{x_{n+1}}$$

对下标求和

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{x_k}-\frac{1}{x_k+1}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_{k+1}}$$

得

$$\frac{1}{x_1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k+1}=\frac{1}{x_{n+1}}$$

问题转化为 x_n 的极限

续（考虑x_{n+1}的极限）

显然$\{x_n\}$为单调增数列，若此数列有界，则极限

$$l = \lim_{n\to+\infty} x_n > 0$$

存在，并且有$l = l^2 + l$。从而$l = 0$，矛盾。

可见$\{x_n\}$无界，即有$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$。

于是

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}+\cdots+\frac{1}{x_n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{x_1} - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_{n+1}} = \frac{1}{x_1}$$

5）Stolz定理

定理　设$\{x_n\}$严格单调增加，且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$。

若

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}=a$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}=a$$

定理 设$\{x_n\}$严格单调，且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$。若

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}=a$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}=a$$

例1 设$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$为数列，a,λ为有限数，求证:

1）如果$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，则$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = a$;

2）如果存在正整数p，使得$\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_{n+p} - a_n\right) = \lambda$，

则$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \frac{\lambda}{p}$（第三届预赛）

解：1)

由$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，对$\forall\varepsilon > 0$，$\exists N_1$，使得当$n > N_1$时

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

同时$\{a_n\}$有界，即$\exists M > 0$，使得$|a_n| \le M$，$\forall n$.

续

于是当$n>N_1$时

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right|\le\frac{N_1}{n}(M+|a|)+\frac{n-N_1}{n}\varepsilon$$

可见，存在$N>N_1$，使得当$n>N$时

$$\frac{N_1}{n}(M+|a|)<\varepsilon$$

从而$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当$n>N$时

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right|<2\varepsilon$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$$

续

2） 设$n=kp+r_n$，其中$0\le r_n<p$。则

$$\frac{a_n}{n}=\frac{a_n-a_{n-p}+a_{n-p}-a_{n-2p}+\cdots+a_{p+r_n}-a_{r_n}}{n}+\frac{a_{r_n}}{n}$$

$$=\frac{a_n-a_{n-p}+a_{n-p}-a_{n-2p}+\cdots+a_{p+r_n}-a_{r_n}}{k}\cdot\frac{1}{\frac{kp+r_n}{k}}+\frac{a_{r_n}}{n}$$

这里令$a_0=0$

续

由于$\{a_i\}_{i=0}^{p-1}$有界，于是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{r_n}}{n}=0$$

而当$n\to\infty$时，$k\to\infty$，故$\lim_{k\to\infty}\frac{kp+r_n}{k-1}=p$。

最后利用1），即有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{\lambda}{p}$$

例2 设$0 < x_1 < 1$，$x_{n+1} = x_n(1 - x_n)$，$n = 1, 2, \cdots$

证明：（1）$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$；（2）$\lim\limits_{n\to\infty} n x_n = 1$。

解：

(1) 首先容易用归纳法证明对任意n，$0 < x_n < 1$。

于是$x_{n+1} < x_n$，可见$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$存在。进一步

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n(1 - x_n)$$

即有$l = l(1 - l)$。简单的讨论知$l = 0$。

续

（2）利用Stolz定理

$$\lim_{n\to\infty} nx_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{x_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n-1}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{x_n x_{n-1}}{x_{n-1} - x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n-1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} (1 - x_{n-1}) = 1$$

例3 设数列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - x_{n-2}) = 0$，求证

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n - x_{n-1}}{n} = 0$$

证 由Stolz定理即有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n - x_{n-1}}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(x_n - x_{n-1}) - (x_{n-1} - x_{n-2})}{n-(n-1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}(x_n - x_{n-2}) = 0$$

例4 设$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.已知

$$\lim_{n\to\infty}(H_n - \ln n) = \gamma$$

又知

$$\lim_{n\to\infty} n\big(A - n(H_n - \ln n - \gamma)\big) = B$$

其中A, B为两常数.求A, B.

让γ消失?

分析：首先将问题清晰化

$$\lim_{n\to\infty}(H_n - \ln n) = \gamma \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}(H_n - \ln n - \gamma) = 0$$

$$H_n - \ln n - \gamma = A\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

思路一：利用Stolz定理

$$\lim_{n\to\infty} n\left(H_n - \ln n - \gamma\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{H_n - \ln n - \gamma}{\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} - \ln n + \ln(n-1)}{\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

思路二：利用递推关系

$$H_n - \ln n - \gamma = A\frac{1}{n} - B\frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$$

$$H_{n+1} - \ln(n+1) - \gamma = A\frac{1}{n+1} - B\frac{1}{(n+1)^2} + o(\frac{1}{(n+1)^2})$$

$$\frac{1}{n+1} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = A\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) - B\left(\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

6）Riemann和化为定积分

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n} f(x_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx$$

1〉作适当的分割

2〉选适当的点

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k$$

例1 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$（第二届决赛）

分析：n个规律项的和，考虑与Riemann和的关系

解：由

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}$$

有

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln 2$$

注：一个等式

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln n+\gamma_n$$

其中$\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n=\gamma$为常数，称为Euler数。

例2 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}}{n}$

分析：连乘似乎很难处理

通过取对数，化为求和

解：取对数

$$\frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}}{n}=e^{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{n})=\int_0^1\ln(1+x)dx=2\ln 2-1$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}}{n}$$

$$=e^{2\ln 2-1}=\frac{4}{e}$$

7）杂题

例1 设D是平面上由光滑封闭曲线围成的有界区域，其面积为$A > 0$，函数$f(x, y)$在该区域及其边界上连续且$f(x, y) > 0$。记$J_n = \left(\frac{1}{A}\iint_D f^{\frac{1}{n}}(x, y)d\sigma\right)^n$.

则极限$\lim\limits_{n\to\infty} J_n =$ _______(第六届决赛)

分析：注意此题与之前一道题的区别

容易看出：在$n \to \infty$时，被积函数得极限为1

于是，极限本质上是1^∞形式

续

解：易知$\lim\limits_{n\to\infty} f^{\frac{1}{n}}(x,y)=1$，对所有$(x,y)\in D$

由

$$\left(\frac{1}{A}\iint_D f^{\frac{1}{n}}(x,y)d\sigma\right)^n$$

$$=\left[\left(\frac{1}{A}\iint_D f^{\frac{1}{n}}(x,y)d\sigma\right)^{\frac{1}{\frac{1}{A}\iint_D f^{\frac{1}{n}}(x,y)d\sigma-1}}\right]^{n\left(\frac{1}{A}\iint_D f^{\frac{1}{n}}(x,y)d\sigma-1\right)}$$

续

注意到

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{A}\iint_D f^{\frac{1}{n}}(x,y)d\sigma\right)^{\frac{1}{\frac{1}{A}\iint_D f^{\frac{1}{n}}(x,y)d\sigma-1}}=e$$

考虑指数部分极限

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{A}\iint_D f^{\frac{1}{n}}(x,y)d\sigma-1\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{A}\iint_D n(f^{\frac{1}{n}}(x,y)-1)d\sigma$$

$$=\frac{1}{A}\iint_D \lim_{n\to\infty} n(f^{\frac{1}{n}}(x,y)-1)d\sigma=\frac{1}{A}\iint_D \ln f(x,y)d\sigma$$

续

综上

$$J_n = e^{\frac{1}{A}\iint_D \ln f(x,y)d\sigma}$$

例2 设$a_n=\frac{1}{1+\frac{1}{1}}+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{1}{n+\frac{1}{n}}-\ln\frac{n}{\sqrt{2}}$。试证：

a_n存在极限，并证明此极限在0与$\frac{1}{2}$之间。

分析：先讨论极限的存在性，估计a_n

单调性：

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n+1+\frac{1}{n+1}}-\ln(1+\frac{1}{n})$$

$$\leq\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<0$$

估计a_n：函数$\frac{1}{x+\frac{1}{x}}$在$x \geq 1$时的单调性，利用定积分估计

$$\int_{n}^{n+1} \frac{1}{x+\frac{1}{x}} dx \leq \frac{1}{n+\frac{1}{n}} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{x+\frac{1}{x}} dx$$

因此有

$$\int_{2}^{n+1} \frac{1}{x+\frac{1}{x}} dx \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k+\frac{1}{k}} \leq \int_{1}^{n} \frac{1}{x+\frac{1}{x}} dx$$

即

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln\left((n+1)^2+1\right)-\frac{1}{2}\ln 5-\ln\frac{n}{\sqrt{2}}$$
$$\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+\frac{1}{k}}-\ln\frac{n}{\sqrt{2}}\leq$$
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln\left(n^2+1\right)-\frac{1}{2}\ln 2-\ln\frac{n}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln\left((n+1)^2+1\right)-\frac{1}{2}\ln 5-\ln\frac{n}{\sqrt{2}}$$

$$\geq\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\ln\frac{(n+1)^2+1}{n^2}\geq 0$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln\left(n^2+1\right)-\frac{1}{2}\ln 2-\ln\frac{n}{\sqrt{2}}$$

$$\leq\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\to\frac{1}{2}$$

例3 设$f(x)$在$(a,+\infty)$上可导，$|f'(x)|$单调下降，且$\lim_{x\to+\infty} f(x)$存在。求证：$\lim_{x\to+\infty} xf'(x)=0$

分析：函数与导数建立联系

$\lim_{x\to+\infty} f(x)$意味着$f(2x)-f(x)\to 0$

解：由拉格朗日中值定理，存在$\xi\in(\frac{x}{2},x)$使得

$$f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)=f'(\xi)\frac{x}{2}$$

又根据$|f'(x)|$的单调性

$$\left|f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)\right|=\left|f'(\xi)\frac{x}{2}\right|\geq\frac{1}{2}|xf'(x)|$$

而

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)\right)=0$$

即有

$$\lim_{x\to+\infty}\left|f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)\right|=0$$

从而

$$\lim_{x\to+\infty}|xf'(x)|=0$$

故

$$\lim_{x\to+\infty}xf'(x)=0$$

例4 设$x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$，求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

分析:

$$\frac{k}{(k+1)!}=\frac{k+1-1}{(k+1)!}=\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}$$

解: 由

$$x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}\right)=1-\frac{1}{(n+1)!}$$

故

$$\lim_{n\to\infty}x_n=1$$

例5 设$f(x)$在点$x=0$处二阶可导，且$f(0)=f'(0)=0$，求极限$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(\ln(1+x))-f(x)}{x^3}$

分析: 1. 容易想到使用L'Hospital法则

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(\ln(1+x))-f(x)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{f'\big(\ln(1+x)\big)\cdot\frac{1}{1+x}-f'(x)}{3x^2}$$

2. 由于$f(0)=f'(0)=0$，考虑Taylor展开

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(0)x^2+o(x^2)$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$$

$$f\big(\ln(1+x)\big)=f\left(x-\frac{1}{2}x^2+o\left(x^2\right)\right)$$

$$=\frac{1}{2}f''(0)\left(x-\frac{1}{2}x^2+o\left(x^2\right)\right)^2+o\left(\left(x-\frac{1}{2}x^2+o\left(x^2\right)\right)^2\right)$$

问题：无法将

$$\boldsymbol{o}(\boldsymbol{x}^2)-\boldsymbol{o}\left(\left(\boldsymbol{x}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{o}(\boldsymbol{x}^2)\right)^2\right)$$

与 $\boldsymbol{o}(\boldsymbol{x}^3)$作比较!

没有体现出$\ln(\mathbf{1}+\boldsymbol{x})$与$\boldsymbol{x}$间的关系。

解法一 利用微分中值定理，存在$\ln(1+x)<\xi<x$

$$f\big(\ln(1+x)\big)-f(x)=f'(\xi)(\ln(1+x)-x)$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(\ln(1+x))-f(x)}{x^3}=\lim_{x\to0^+}f'(\xi)\cdot\frac{\ln(1+x)-x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{f'(\xi)}{\xi}\cdot\frac{\xi}{x}\cdot\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=-\frac{1}{2}f''(0)$$

解法二 利用Taylor展开

$$f(t)=f(0)+f'(0)t+\frac{1}{2}f''(0)t^2+o\left(t^2\right)=\frac{1}{2}f''(0)t^2+o(t^2)$$

$$f(\ln(1+x))-f(x)=\int_x^{\ln(1+x)} f'(t)dt$$

$$=\int_x^{\ln(1+x)}\left(\frac{1}{2}f''(0)t^2+o\left(t^2\right)\right)dt$$

$$\int_{x}^{\ln(1+x)} \frac{1}{2} f''(0) t^2 dt = \frac{1}{2} f''(0) \left(\left(\ln(1+x)\right)^2 - x^2 \right)$$

$$\left| \int_{x}^{\ln(1+x)} o\left(t^2\right) dt \right| \le \frac{1}{3} \varepsilon x^3$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\int_{x}^{ln(1+x)} \frac{1}{2} f''(0) t^2 dt}{x^3} = \frac{1}{2} f''(0) \lim_{x \to 0^+} \frac{\left(\ln(1+x)\right)^2 - x^2}{x^3}$$

$$= -\frac{1}{2} f''(0)$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_x^{\ln(1+x)} o(t^2)\,dt}{x^3}=0$$

例6 计算极限

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\int_0^1\left(1-x^2\right)^n\ln(2+x)\,dx}{\int_0^1(1-x^2)^n dx}$$

例 设f在$[a,b]$上非负连续，严格单增，且存在$x_n\in[a,b]$使得$[f(x_n)]^n=\frac{1}{b-a}\int_a^b[f(x)]^n dx$，求$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$（第六届预赛）

分析： “解出”x_n

$$x_n=f^{-1}\left(\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b[f(x)]^n dx\right)^{\frac{1}{n}}\right)$$

考察$\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b[f(x)]^n dx\right)^{\frac{1}{n}}$以及$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b[f(x)]^n dx\right)^{\frac{1}{n}}$

例 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x t|\sin t|dt}{x^2}$

例4 设D是平面上由光滑封闭曲线围成的有界区域，其面积为$A > 0$，函数$f(x, y)$在该区域及其边界上连续且$f(x, y) > 0$。记$J_n = \left(\frac{1}{A}\iint_D f^n(x, y)d\sigma\right)^{\frac{1}{n}}$.

求极限$\lim\limits_{n\to\infty} J_n$。

分析：回顾下面的极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_1^n + a_2^n + \cdots + a_p^n\right)^{\frac{1}{n}}$$

解：记$M = \max\limits_{(x,y)\in D} f(x)$则有对$\forall\varepsilon > 0$，$\exists D_\varepsilon \subset D$，使得

$$M - \varepsilon \le f(x) \le M, \forall(x, y) \in D_\varepsilon$$

续

记D_ε的面积为A_ε，则有

$$(M-\varepsilon)\left(\frac{A_\varepsilon}{A}\right)^{\frac{1}{n}} \le J_n \le M$$

令$n \to \infty$，得

$$M-\varepsilon \le \lim_{n\to\infty} J_n \le M$$

由ε的任意性，即知

$$\lim_{n\to\infty} J_n = M\ ?$$

由于$n\to\infty$时$\left(\frac{A_\varepsilon}{A}\right)^{\frac{1}{n}}\to 1$.故存在$N$,当$n>N$时

$$\left(\frac{A_\varepsilon}{A}\right)^{\frac{1}{n}}>1-\varepsilon$$

即有

$$J_n\geq(M-\varepsilon)(1-\varepsilon)>M-(M+1)\varepsilon$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}J_n=M$$