微积分（一）下第 12 周第三次课作业答案与提示

(散度与旋度、Gauss 公式)

1. 填空：

1) 设矢量场 $\boldsymbol{A}=x^2\boldsymbol{i}+yz\boldsymbol{j}+zx\boldsymbol{k}$，则 $\operatorname{div}\boldsymbol{A}\big|_{(1,1,2)}=\underline{5}$ ，，$\mathbf{rot}\boldsymbol{A}\big|_{(1,1,2)}=\underline{-\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}}$.

2) 设 $f(x,y,z)=x^3y^4z^2$，则其梯度场的散度在 $(1,1,1,)$ 处的值为 $\underline{20}$.

3) 设 $\boldsymbol{F}=\{x,y,z\}$，$I=\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$，$S$ 取外侧，当 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 时，

$I=\underline{4\pi R^3}$；当 S 为 $0\le x\le 1, 0\le y\le 1, 0\le z\le 1$ 之表面时，$I=\underline{3}$.

2. 设 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$（$R>0$）的外侧，求

1）$I=\oiint_S \dfrac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$；　　答案：$4\pi R^2$

2）$I=\oiint_S x^3dydz+y^2dzdx+zdxdy$.　　答案：$\dfrac{4}{5}\pi R^5+\dfrac{4}{3}\pi R^3$

3. 求 $I=\oiint_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$，其中

1）S 是立方体 V：$0\le x\le a, 0\le y\le a, 0\le z\le a$ 的全表面外侧；　　答案：$3a^4$

2）S 是由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=1$ 所围立体的表面外侧.　　答案：$\dfrac{\pi}{2}$

4.计算 $I=\iint\limits_S (1-x^2)dydz+4xydzdx-2xzdxdy, S$ 是 xoy 平面上的曲线 $\begin{cases}x=e^y\\ z=0\end{cases}$（$0\le y\le a$）绕 x 轴旋转一周所成的旋转曲面，其法矢量与 x 轴正向夹角为钝角的一侧.

答案：$(e^{2a}-1)\pi a^2$

5.计算 $I=\iint\limits_S \dfrac{axdydz+(z+a)^2dxdy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 其中 S 为下半球面 $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧 $(a>0)$.

答案：$-\dfrac{\pi}{2}a^3$

6.计算 $I=\iint\limits_{S}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)dS, S$ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的外侧，$\cos\alpha$，$\cos\beta,\cos\gamma$ 是其法矢量的方向余弦. 答案：$4\pi R^3$

7.求矢量 $\boldsymbol{A}=xy\boldsymbol{i}+yz\boldsymbol{j}+xz\boldsymbol{k}$ 沿上半球面 S：$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 上侧穿过 S 的通量 $\boldsymbol{\Phi}$.

答案：$\dfrac{1}{4}\pi R^4$