# 齐次函数的相关问题

吴洁

1. 设 $f(x,y,z)$ 是可微的 $n$ 次齐次函数，则其偏导数 $f_x(x,y,z)$，$f_y(x,y,z)$，$f_z(x,y,z)$ 均是 $(n-1)$ 次齐次函数。

证　在 $f(tx,ty,tz)=t^n f(x,y,z)$ 两边对 $x$ 求偏导：$t f_{tx}(tx,ty,tz)=t^n f_x(x,y,z)$

即 $f_{tx}(tx,ty,tz)=t^{n-1} f_x(x,y,z)$，故 $f_x(x,y,z)$ 是 $(n-1)$ 次齐次函数，同理可知 $f_y(x,y,z)$，$f_z(x,y,z)$ 也是 $(n-1)$ 次齐次函数。

2. 设 $f(x,y,z)$ 是可微的 $n$ 次齐次函数，$z=z(x,y)$ 是由方程 $f(x,y,z)=0$ 确定的隐函数，则 $z(x,y)$ 是一次齐次函数。

证　我们知道：若 $f(x,y)$ 为可微函数，则 $f(x,y)$ 为 $n$ 次齐次函数的充要条件是

$$x f_x(x,y)+y f_y(x,y)=n f(x,y).$$

因此，只需证明 $xz_x(x,y)+yz_y(x,y)=z(x,y)$.

在 $f(x,y,z(x,y))=0$ 两边分别对 $x$，$y$ 求偏导：

$$f_x+f_z\cdot z_x(x,y)=0;\quad f_y+f_z\cdot z_y(x,y)=0,$$

于是

$$x f_x+y f_y+f_z\cdot[xz_x(x,y)+yz_y(x,y)]=0,$$

因 $f(x,y,z)$ 是 $n$ 次齐次函数，所以

$$x f_x(x,y,z(x,y))+y f_y(x,y,z(x,y))+z f_z(x,y,z(x,y))=n f(x,y,z(x,y))=0,$$

对比可得　$xz_x(x,y)+yz_y(x,y)=z(x,y)$.

3. 设 $f(x,y)$ 为具有二阶连续偏导数的二次齐次函数，即对任何 $x,y,t$ 成立

$$f(tx,ty)=t^2 f(x,y)。$$

（1）证明：$\left(x\dfrac{\partial}{\partial x}+y\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x,y)=2f(x,y)$；

（2）设 $D$ 是由 $L$： $x^2+y^2=4$ 所围成的闭区域，证明：

$$\oint_L f(x,y)ds=\iint_D \operatorname{div}(\operatorname{grad} f(x,y))d\sigma .$$

**证** （1）在 $f(tx,ty)=t^2 f(x,y)$ 两边对 $t$ 求导：

$$x f_1(tx,ty)+y f_2(tx,ty)=2t f(x,y) ,$$

继续对 $t$ 求导：

$$x[x f_{11}(tx,ty)+y f_{12}(tx,ty)]+y[x f_{21}(tx,ty)+y f_{22}(tx,ty)=2 f(x,y) ,$$

两边同乘 $t^2$，有

$$tx[tx f_{11}(tx,ty)+ty f_{12}(tx,ty)]+ty[tx f_{21}(tx,ty)+ty f_{22}(tx,ty)=2t^2 f(x,y)=2f(tx,ty)$$

令 $t=1$，得

$$x^2 f_{xx}(x,y)+2xy f_{xy}(x,y)+y^2 f_{yy}(x,y)=2f(x,y) .$$

（2）由 $x f_1(tx,ty)+y f_2(tx,ty)=2t f(x,y)$ 得

$$tx f_1(tx,ty)+ty f_2(tx,ty)=2t^2 f(x,y) ,$$

即 $$x f_x(x,y)+y f_y(x,y)=2f(x,y) .$$

又 $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f(x,y))=f_{xx}(x,y)+f_{yy}(x,y)$ ，故

$$\oint_L f(x,y)ds=\frac{1}{2}\oint_L [x f_x(x,y)+y f_y(x,y)]ds$$

$$=\oint_L [f_x(x,y),f_y(x,y)]\cdot \boldsymbol{n}^\circ ds=\oint_L f_x(x,y)dy-f_y(x,y)dx$$

（$L$ 上任意点处的外法矢 $\boldsymbol{n}=\{\cos\alpha ds,\sin\alpha ds\}=\{dy,-dx\}$，《微积分学》下 P170，例 8）

$$=\iint_D [f_{xx}(x,y)+f_{yy}(x,y)]dxdy=\iint_D \operatorname{div}(\operatorname{grad} f(x,y))dxdy .$$

注 本题第一问有更一般的结论：

设 $f(x,y,z)$ 为具有二阶连续偏导数的 $n$ 次齐次函数，则

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f(x,y,z)=n(n-1)f(x,y,z) .$$

4. 设$F(x,y,z)$的各偏导数连续，且在$P_0(x_0,y_0,z_0)$处的偏导数不全为$0$（即$\{F_x,F_y,F_z\}\neq\{0,0,0\}$）又$F(x,y,z)$是$n$次齐次函数，求曲面$F(x,y,z)=C$（$C$为常数）在$P_0$处的切平面方程。

解 曲面在$P_0$处的切平面方程为

$$F_x(P_0)(x-x_0)+F_y(P_0)(y-y_0)+F_z(P_0)(z-z_0)=0,$$

因$F(x,y,z)$是$n$次齐次函数，所以

$$F_x(P_0)x_0+F_y(P_0)y_0+F_z(P_0)z_0=nF=nC,$$

因此，$xF_x(P_0)+yF_y(P_0)+zF_z(P_0)=nC$为所求。

5. 设$S$：$x^2+y^2+z^2=1$，$f(x,y,z)$是具有二阶连续偏导数的$n$次齐次函数，则

$$\iint_S f(x,y,z)dS=\frac{1}{n}\iiint_V \Delta f\,dxdydz,$$

其中$V$：$x^2+y^2+z^2\leq 1$，$\Delta f=f_{xx}+f_{yy}+f_{zz}$.

证 因$f(x,y,z)$是$n$次齐次函数，所以$xf_x+yf_y+zf_z=nf$，所以

$$\iint_S f(x,y,z)dS=\frac{1}{n}\iint_S (xf_x+yf_y+zf_z)dS,$$

而球面上任意一点$(x,y,z)$的外法线方向余弦$\cos\alpha=x,\cos\beta=y,\cos\gamma=z$，所以

$$\text{上式}=\frac{1}{n}\iint_S(\cos\alpha f_x+\cos\beta f_y+\cos\gamma f_z)dS$$

$$=\frac{1}{n}\iint_S f_xdydz+f_ydzdx+f_zdxdy$$

$$=\frac{1}{n}\iiint_V \Delta f\,dxdydz.$$