

求 $\int x \arctan x \ln(x^2 + 1) dx$ 。

解：

注意到：

$$\begin{aligned} & \int x \ln(x^2 + 1) dx \\ &= \frac{(x^2 + 1) \ln(x^2 + 1) - x^2}{2} + C \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} & \int x \arctan x \ln(x^2 + 1) dx \\ &= \int \arctan x d\left(\frac{(x^2 + 1) \ln(x^2 + 1) - x^2}{2}\right) \\ &= \arctan x \times \frac{(x^2 + 1) \ln(x^2 + 1) - x^2}{2} - \int \frac{(x^2 + 1) \ln(x^2 + 1) - x^2}{2} d\arctan x \end{aligned}$$

下面请自行完成。

这种方法我称之为进阶的凑微分法，如果一个不定积分比较复杂，但其中的一部分的不定积分目测可以求，那么我们可以先求出其中一部分的不定积分，然后使用凑微分法。常见的凑微分法往往是用于那种一眼就能看出的凑微分，进阶的凑微分法意味着你通过计算来得到凑微分。