

# 关于电磁场解析方法的一些认识

雷银照

(北京航空航天大学自动化科学与电气工程学院 北京 100191)

**摘要** 对电磁场解析方法进行了综述。指出了解析解的重要性: 能够直观揭示电磁场的变化规律, 不存在数值不稳定问题, 表达式能被他人重复导出, 表达形式具有科学美, 是数值解的基础, 并作为计算公式被广泛用于解决工程问题。介绍了几种常用解析方法: 分离变量法、复变函数法、格林函数法、积分变换法以及近似解析法。重点回顾了历史上的若干经典解析解: 兰帕-汤普森定理、范德堡公式、螺线管中心的均匀磁场表达式、放置式线圈的阻抗增量、Halbach 永磁体的磁场算法、脑磁测量基准计算公式、浅表面缺陷涡流场的三维渐近解析解、金属管道涡流场的三维解析解。给出了有助于解析求解的几本参考书。最后提出了今后需要进一步研究的一些问题: 用保角变换方法求解稳恒磁场、现有解析方法的综合使用、借鉴最新数学物理方法、瞬态涡流场的解析求解、微扰法中高阶导数项的求解、逆问题的解析求解。

**关键词:** 电磁场理论 解析方法 解析解 综述

**中图分类号:** TM15

## Reviews of Analytical Methods for Electromagnetic Fields

Lei Yinzhao

(School of Automation Science and Electrical Engineering Beihang University Beijing 100191 China)

**Abstract** This paper reviews the analytical methods for electromagnetic fields. Firstly, the importance of analytical solutions is pointed out, i. e. analytical solutions reveal the variation law of electromagnetic fields visually; there is no numerical instability; expressions can be derived repeatedly by others and their form is full of scientific beauty; they are the foundation of numerical solutions and widely used as calculation formulas to solve engineering problems. Secondly, several frequently-used analytical methods are introduced, such as the method of separation of variables, the complex variable function method, the Green function method, the integral transform method, and the approximate analytical method. Furthermore, some classical analytical solutions are reviewed, including the Lampard-Thompson theorem, the van der Pauw formula, the expression of the uniform magnetic field in the central zone of a solenoid coil, the analytical solution to the impedance variation of a probe coil above a conductive plate, calculation method for the magnetic field of the Halbach permanent-magnet, the standard calculation formula of the brain magnetic measurement, the three-dimensional asymptotic analytical solution to the eddy current field of a conductive plate with shallow surface defect, and the three-dimensional analytical solution to the eddy current field of a metal pipe. What's more, several reference books are selectively introduced to find analytical solutions. Finally, a number of problems are proposed for further study, containing applying conformal mapping method in solving problems of static magnetic field, integrating existing analytical methods, introducing latest methods of mathematical physics, analytically solving the transient eddy current field, deducing higher order derivative terms of the field quantity in the perturbation method, and analytically solving inverse problems.

**Keywords:** Electromagnetic field theory, analytical method, analytical solution, review

收稿日期 2016-07-01 改稿日期 2016-08-03

## 0 引言

自从麦克斯韦提出电磁场方程组后,宏观电磁场理论的框架就已基本建立。其后的发展就是基于电磁场方程组结合具体的介质和边界条件、利用数学方法求出电磁场的解,研究其特性和规律,为人类服务,因此电磁场解析方法在宏观电磁场理论的发展过程中占有重要地位,是近代电磁场理论的核心内容。

在很长一段时期内,解析求解局限在一维介质和二维介质中的电磁场,虽然也可以求出个别三维介质中的解析解,但都限于特殊的介质形状和场源分布。最近十多年,电磁场解析方法取得了巨大进步,已能够求出二维介质和三维场源的严格解析解、一些典型形状的三维介质的解析解和一大类问题的近似解析解。

本文对电磁场解析方法进行了综述。首先介绍了电磁场解的含义和解析解的重要性,然后分别介绍了几种常用的解析方法,重点介绍了历史上若干经典解析解,推荐了几本解析方法参考书,最后提出作者认为需要进一步研究的一些问题。

## 1 电磁场问题的解的含义

宏观电磁场问题满足麦克斯韦方程组。对于任意给定的宏观电磁场问题,结合边界条件和初始条件求解麦克斯韦方程组,如果能够得到使定解问题(含方程组、边界条件、初始条件)成立的一切值,这些值就是这个电磁场问题的解。

为了得到电磁场定解问题的解,求解方法大体上有实验研究、数值计算和解析分析三类,它们各有特点,并相互补充。实验研究方法中有使用真实电磁设备进行的直接测量的方法和通过使用具有数学相似性的模型来确定解的电模型方法。数值计算方法是通过对连续介质离散化,形成代数方程组并求解后,得到用数字表示的离散数值解。解析方法是通过数学中的代数方法或基于极限过程的方法(如微分法、积分法、复变函数法等)求解电磁场定解问题,得到由数学运算符号将表示数的字母或数字连结而成、可以运算的表达式。

## 2 解析解的重要性

概括地说,解析解具有以下重要作用:

1) 解析解能够直观揭示电磁场的变化规律。用解析方法得到的解析解能用显式表达,场量与参数之间

的依赖关系可以直观显示,这是其他解形式所不能替代的,这个独特优势使得解析解成为电磁场理论的核心内容,起着决定性的作用。

2) 解析解不存在数值不稳定问题。数值稳定性是指初始数值的微小扰动不会带来解的重大变化。原始测量中总有误差,如果使用数值法计算电磁场问题,则解依赖于介质或源区的剖分、约束方程的表达形式、计算格式等,从而影响解的数值稳定性。数值稳定性差的数值法会使求解失败,而且往往很难发现。与数值法不同,解析解的求解不需要介质剖分或场源剖分,不需要选取计算格式(微分型、积分型、迭代型等),计算量非常少,一般不会引起数值不稳定问题,计算结果可靠。特别是极端情况下的介质分布,例如介质尖端处或介质极薄情况下,数值解的可靠性无法得到保证,此时使用解析解就成为重要且可能是唯一的方法。

3) 解析解可被他人重复导出。解析解是在电磁场基本原理的基础上应用数学方法得到的,因此除了首次提出者外,其他人也可以独立地通过数学推导来确认过程和结果的正确性,在此基础上得到继承和发展。这是解析解的独特优势。可重复性是科学研究中的重要原则。如果一个结果不能被别人所重复,那么这个结果可能就是错误的,也不会被人接受。正因为解析解的可重复性,使得那些实用价值大、表达式简单的解析解广泛传播,成为电磁场理论的组成部分。

4) 解析解具有科学美。许多经典解析解的求解过程看起来并没有使用高深理论,读者也并非看不懂其中的理论细节,可是在运用了几个简单的关键步骤之后,所得结果往往超出预期,无论求解过程还是理论结果都让人惊叹。思路的巧妙、结果的简洁,体现了电磁场理论的无穷魅力。学习电磁场理论,享受这种“情理之中,意料之外”的美妙,是电磁场理论工作者几十年如一日长期研究的重要原因之一。

5) 解析解是数值解的基础。一方面,数值法计算过程中往往要借助于特殊情况下的解析解,例如积分型数值方法,需要用格林函数的解析解构成积分方程的核函数。另一方面,解析解的计算量极少,计算精度高,以解析解为基础可构成最优化学数学模型,从而能够快速数值计算电磁场的逆问题。此外,解析解还可用于校验数值解。数值解在求解过程中涉及剖分、高阶方程组求解等诸多步骤,再加上有的问题存在数值不稳定,使得计算结果的正确性难以保证,这时用解析解验证就是一个简单有效的办法。若数值解与解

析解不一致,那么数值解必然有误。

6) 作为计算公式被广泛用于解决工程问题。电磁场解析解在电气工程、计量、地球物理勘探、无损检测、生物电磁、工业设计等领域应用广泛,例如:①电机工程设计手册中的许多电场、磁场、电阻、电感、电容等的简洁计算式都来自电磁场解析解;②为了获得超导磁共振成像的强均匀磁场,一般是先根据磁场解析式进行线圈绕制、装配,而后进行微调;③在矿产勘探中,层状导体电磁场的解析解被用于电磁测深和检测装置的设计。

即使得到的是近似解析解也具有实用价值,例如完好铁磁管道在阶跃磁场激励下,管壁内的涡流具有级数形式的解析解<sup>[1]</sup>,经数学上的近似处理,涡流密度分量  $J$  可近似表示为指数衰减形式的解析解

$$J \approx F(x_1, x_2, \dots, x_n) e^{-t/\tau}$$

式中,  $F$  为铁磁管道参数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的函数;  $\tau$  为涡流扩散时间常量,  $\tau$  值的大小取决于管道的尺寸与电磁参数。如图1所示,  $\tau$  值不同,对应的检测线圈“感应电压-时间衰减曲线”的形状不同。这样,在未知铁磁管道电导率和磁导率的情况下,根据检测到的扩散时间常量与管道无腐蚀处的扩散时间常量的比较,即可检测出铁磁管道的壁厚减薄。无损检测工业界内著名的 RTD-INCOTEST<sup>[2]</sup> 脉冲涡流仪就是以此原理制成的。

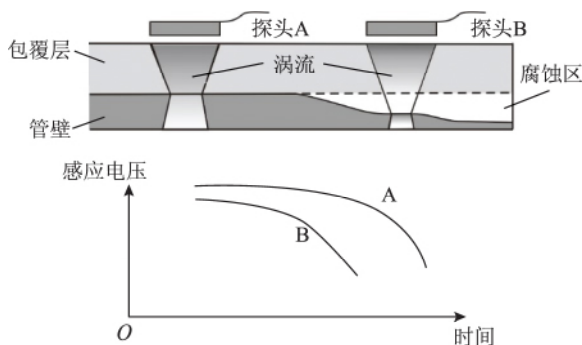


图1 探头线圈感应电压与铁磁管壁腐蚀深度的关系

Fig. 1 The relationship between the voltage induced in the coil and ferromagnetic pipe-wall erosion depth

表面上看,大部分解析解是在一维或二维介质情况下得到的,而实际问题中又都是三维介质,这些解析解似乎只有理论意义而无实用价值。实际上这样的看法并不确切。以工业中广泛使用的涡流检测技术为例,用电磁涡流方法检测金属平板的厚度时,需要用透入深度公式  $d = 1/\sqrt{\pi f \sigma \mu}$  确定检测频率,虽然这个公式来源于半无限大导体内正弦均匀磁场的扩散方程的解,但是只要金属平板厚度大于5个透入深度,

有限厚平板完全可以看作无限厚,两者的电磁场具有相同的变化规律。再例如,在金属材料无损检测技术中常使用放置式探头线圈,为了避免金属材料边缘不连续对检测信号的干扰,需要被测金属表面是无限大平面,但实际的金属材料不可能满足这个条件,此时通过计算涡流密度的解析解可知,在激励频率几百 kHz 的前提下,只要被测点到导体边缘的距离大于3个探头直径,涡流密度就衰减到最大值的5%以下。这说明,对于直径2 mm的涡流探头,指甲盖那么大的平面就可以看作无限大平面。实用上,不可低估一维和二维解析解的作用。

### 3 常用解析方法

目前电磁场理论中已有多种解析方法,常用的有分离变量法、复变函数法、格林函数法、积分变换法、近似解析法(如微扰法、积分方程迭代法以及变分近似法等)。这些方法各有特点和适用范围,其中分离变量法、复变函数法以及近似解析法中的微扰法用处最大,也最重要。

#### 3.1 分离变量法

在数学上,利用线性方程的叠加原理,先寻找一串满足偏微分方程和齐次边界条件且可以表示为几个仅含部分变量的函数乘积形式的解,再适当地组合与叠加这些函数,最终得到原边值问题的解。这样的求解方法就是分离变量法<sup>[3]</sup>。分离变量法可将三维偏微分方程转换为三个常微分方程,它的核心是求解本征值问题并将一定函数类按某一正交函数系展开。简单地说,求解本征值问题就是求出含有未知参数的齐次微分方程在齐次边界条件下的非零解。求解本征值问题一方面可以确定本征值(即分离常量),并能够确定是离散的还是连续的,离散形式的本征值对应傅里叶级数形式的解,连续的本征值对应傅里叶积分形式的解;另一方面可以得到本征值问题的解函数,这些解函数都是正交函数,常见的有正弦函数和一些特殊函数(如贝塞尔函数、勒让德函数等,各类特殊函数的性质见文献[4])。展开成正交函数可以确定形式解中的待定系数,这其中要用到傅里叶级数的帕塞瓦尔定理和傅里叶变换的帕塞瓦尔定理。在求解过程中,混合使用其他分析方法,可以解决许多类型的电磁场问题,包括静态场、涡流场、脉冲场、高频场,不仅可以解析求解二维场,还可以解析求解一些三维场,应用十分广泛。分离变量法是所有电磁场解析方法中最常用、最基本、最重要的一种分析方法,它的求解过程具有典型意义。目前已发表的电磁场解析解大多是

基于分离变量法得到的。

### 3.2 复变函数法

利用复变函数理论中的保角变换可以求解许多平行平面电磁场问题。约束方程可以是拉普拉斯方程,也可以是亥姆霍兹方程;场区边界可以是多边形,也可以是任意形状。复变函数法能求解许多类型的场,例如静电场、稳恒电场、稳恒磁场、时谐场,所得解析解的形式往往都很简单。复变函数法能解析求解的典型问题有电容器的边缘场、多边形导体的电场、某些永磁机构的磁场、旋转电机气隙中的磁场<sup>[5]</sup>、电缆中的电磁场、波导中周期结构的电磁场,还可以求出电容、电阻、高频传输线的特性阻抗等。从目前情况看,这个方法能求出大大小小几百个电磁场问题,适用范围宽广,它的不足是难以求解三维电磁场问题。

复变函数法的理论基础是柯西-黎曼方程、保角变换理论以及许瓦兹-克里斯多弗变换,其核心是将一个区域保角变换到另一个区域。进行区域间的变换简单说就是化繁为简的需要。对于一些形状较为复杂的区域上的问题,直接在这个区域上解析求解往往比较麻烦和困难,甚至不可能求解。但在形状较为简单的区域上的同类问题,或者已有求解公式,或者求解变得较为容易。这样人们就会想到,能否找到一个将复杂区域变成简单区域的一一对应的可逆变换,若能找到这样的变换,则可将复杂区域上原来不可能直接求解的问题,通过区域的变换转换为较为简单的区域上的问题,得到解后再作逆变换即可得到原问题的解。有鉴于此,在复变函数法中,一个基本任务是,给定一个区域  $G$  及另一个区域  $D$ ,要寻找出将  $G$  保角变换成  $D$  的函数  $f(z)$  及唯一性条件。保角变换的理论基础是黎曼定理<sup>[6]</sup>。黎曼定理指出,除了整个平面或去掉一个点的平面外,任意一个单连通区域  $G$  必可通过一个解析函数双方单值并且保角地变换成另一个单连通区域。该定理只要符合单连通条件,总存在一个解析函数可以将一个任意复杂区域变换到一个直角坐标系的上半平面。但该定理并没有给出具体的解析函数,所以通常采取相反的途径,先研究数学中已有的各种解析函数,然后再结合实际边界形状选用这些解析函数。虽然许多情况下需要知道解析函数的具体形式,但有时仅知道这个解析函数存在即可,例如兰帕-汤普森定理(见式(1))的导出过程就是如此。

### 3.3 格林函数法

格林函数是单位点源在一定边界条件和(或)初始条件下所产生的电磁响应。单位点电荷的格林函数是一个标量函数,任意方向单位电流元的格林函数是并

矢格林函数。利用格林函数可按叠加原理求出任意分布场源所产生的场。求解步骤是:先求出电磁场边值问题对应的点源响应即格林函数,然后用格林积分公式,将用偏微分方程表示的边值问题转换为一个用体积分和面积分之和表示的等式,最后得到任意点场量用格林函数作为核函数表示的积分形式的显式解<sup>[3]</sup>。格林函数的最大用途之一是建立积分方程。如何求出格林函数是这个求解方法的关键。格林函数法的特点是能将同一类场函数都统一地用格林函数表示出来,而且可深入地揭示同一类问题的共同物理规律。

### 3.4 积分变换法

积分变换法中最常用的变换是傅里叶变换、拉普拉斯变换、汉克尔变换,变换对象是定解问题中的未知函数。当坐标变量的变化区间是  $(-\infty, \infty)$ ,适合用傅里叶变换;当坐标变量或时间变量的变化区间是  $(0, \infty)$ ,适合用拉普拉斯变换;在二维傅里叶变换情况下电磁场呈轴对称分布时适合用汉克尔变换。经过变换后,方程的维数下降了,方程简单了,偏微分方程变换成了常微分方程,求出常微分方程的解后再反变换,就得到原偏微分方程的解。积分变换法的特点是能减少定解问题中变量的数量,所得到的常常是有限形式的封闭解,而且求解方法也是标准化的,它的不足是反变换困难,因此手边最好有比较齐全的变换手册(如文献[7]),以备查阅。

### 3.5 近似法

许多电磁场问题,因为介质特性复杂和(或)边界形状复杂,很难得到严格解析解,因此发展近似解析方法就很有必要。只要近似程度足以满足实际要求,近似解的重要性丝毫不亚于严格解;另一方面,近似法的适用范围更大,许多难以得到严格解的问题,用近似法常常能够解决。

近似法中最重要的是微扰法<sup>[3]</sup>,也叫摄动法,它是一种普遍的求解方法。如果定解问题不能严格解出,但另一个跟它相差很小的定解问题已得到严格解,此时就可在严格解的基础上用微扰法求出近似解。在电磁场中,当求解因介质区域的微小变化而对应电磁场的变化时,就非常适合用微扰法。若场区  $G$  的边界  $\Gamma(\alpha)$  含有小参数  $\alpha$ ,当  $\alpha = 0$  时  $\Gamma(0)$  是规则区域(如平面、矩形、圆),设规则场区的解析解  $F_0$  已知。当  $|\alpha| \ll 1$  时,区域的变化可看作微扰,利用泰勒级数展开

$$F = F_0 + \alpha F_1 + \cdots \approx F_0 + \alpha F_1$$

代入原边值问题可得到微扰场  $F_1$  的新边值问题,求解这个新边值问题就可得到微扰场  $F_1$ 。它特别适用于求

解规则金属表面上裂纹的电磁场问题。

另一种常用的近似法是积分方程迭代法。它的典型应用是可以近似解析求解正弦涡流问题。利用并矢格林函数可将三维正弦涡流边值问题转换为如下的第二类弗雷德霍姆积分方程<sup>[8]</sup>

$$E(r) = E_0(r) + (\sigma_f - \sigma) \int_V G(r, r') \cdot E(r') dV(r')$$

式中,  $\sigma_f$  为介质  $V$  的电导率;  $\sigma$  为规则导体的电导率;  $E$  为介质  $V$  内涡流场的电场强度;  $E_0$  为规则导体涡流场中没有介质  $V$  时的电场强度;  $G(r, r')$  为并矢格林函数。由于  $G(r, r')$  的解析式前隐含含有系数  $1/(4\pi\sigma)$ , 所以上面的积分方程可以写成下面的算子方程

$$E = E_0 + \alpha KE$$

式中,  $|\alpha| = \frac{|\sigma - \sigma_f|}{4\pi\sigma} < 1$ ;  $K$  为积分算子。设想上式的解可表示成小参数  $\alpha$  的幂级数

$$E = E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n E_n$$

代入  $E = E_0 + \alpha KE$ , 比较两端  $\alpha$  的同次幂系数, 进一步就可求出各级近似解。

还有一种近似法是变分近似法。它将电磁场边值问题转换成与之等价的泛函极小值问题, 因为边值问题的解必使泛函取极小值, 所以可通过多级逼近的途径构造近似解函数, 将其代入变分问题就可以求出近似解析解。泛函是指函数的函数, 变分问题是指研究泛函的极值问题。这个方法的特点是几乎适用于任意边值问题<sup>[9]</sup>。

## 4 历史上的经典解析解

### 4.1 兰帕-汤普森定理

制作精密的标准电容器时, 希望影响电容量的几何尺寸变量越少越好, 因为变量越少, 制作标准电容器时只要严格控制这些变量的误差, 电容误差就会减少。虽然影响孤立球形电容器的几何尺寸变量只有直径, 但制作成标准电容器却有很多困难, 因为球形电容器需要支撑物, 还有充电导线和测量导线对电场的干扰, 这些因素都破坏了孤立球形电容公式成立的前提<sup>[10]</sup>。目前, 具有最高准确度的电容是用所谓“计算电容法”实现的。澳大利亚联邦科学与工业研究组织电工室的 D. G. Lampard 和 A. M. Thompson 两位学者经过持续几年的研究<sup>[11-14]</sup>, 得到了一个静电学定理, 称为兰帕-汤普森定理。它的内容是: 在一个截面为任意单连通形状的长直导体柱面上, 若用四个无限小绝缘间隙  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$ 、 $\delta$  将柱面分割为四部分(如图2所示), 则电极  $\alpha\beta$  与  $\gamma\delta$  间的单位长电容  $C_1$  和电极  $\alpha\delta$  与  $\beta\gamma$  间的单位长电容  $C_2$  满足关系式

$$2^{-C_1/C_0} + 2^{-C_2/C_0} = 1 \quad (1)$$

式中,  $C_0 = \frac{\epsilon}{\pi} \ln 2$ ,  $\epsilon$  为柱面所包围介质的电容率;  $C_1$  和  $C_2$  为交叉电容。

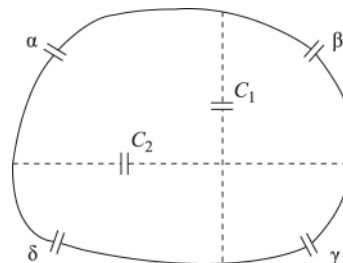


图2 交叉电容

Fig. 2 Cross-section of cylindrical capacitor

在导出这个定理的过程中, 关键是采用了复变函数理论中的黎曼定理<sup>[6]</sup>, 使得求解问题时不必寻找具体的保角变换解析函数, 就可直接将任意单连通横截面的柱面内部平面变为以平面直角坐标系的横轴为边界的上半平面, 从而只要求出横轴线段上的电荷, 就得到了这个静电学定理。兰帕-汤普森定理的表达式简单、形式优美, 它的成立与柱面形状无关。

设  $\bar{C} = \frac{C_1 + C_2}{2}$ ,  $\Delta C = C_1 - C_2$ , 利用泰勒级数展开

式, 式(1)可写成

$$\frac{\bar{C}}{C_0} = 1 + \frac{\ln 2}{8} \left( \frac{\Delta C}{C_0} \right)^2 - \frac{(\ln 2)^3}{192} \left( \frac{\Delta C}{C_0} \right)^4 + \frac{(\ln 2)^5}{2880} \left( \frac{\Delta C}{C_0} \right)^6 - \dots$$

当柱面轴向长度为  $l$  时, 交叉电容的总电容量为

$$C = \bar{C}l \approx C_0 l \quad (2)$$

可见, 总电容量只取决于一个轴向尺寸, 而且与常量  $C_0$  只差一个二阶小量, 所以用以上方法计算电容具有非常高的精度。自从兰帕-汤普森定理提出后, 许多人以此为基础做了大量工作, 发表了大量论文。目前, 计量用阻抗绝对测量就是用以上方法实现的, 例如中国计量科学研究院1978年采用以上方法高精度实现了阻抗的绝对测量<sup>[15]</sup>。

### 4.2 范德堡公式

均匀厚度薄膜的电阻测量广泛应用在半导体产业中, 常被用作评估半导体掺杂的结果。随着半导体产业的发展, 对薄膜电阻测量精度的要求越来越高。1958年范德堡提出了一种接触点位于被测样品边缘的电阻率测量方法<sup>[16]</sup>, 称为范德堡法, 具有操作简单、精度高的特点, 目前已广泛用于半导体材料的电阻率



测量、非铁磁性金属的电导率基准测量<sup>[17]</sup>等场合。该方法只要求接触点位于样品的边缘,对于探针的摆放没有特殊要求。

设被测样品厚度均匀,样品表面是单连通平面,接触点位于样品的边缘,且接触点足够小。如图3所示,取厚度为 $d$ 的任意形状片状样品,在其边缘取四个触点A、B、C、D。在任意相邻的两触点间连接一电流源,如点A连接正极,点B连接负极,AB间电流是 $I_{AB}$ ,测出另一对触点CD间电压 $U_{CD}$ ,计算 $R_1 = U_{CD}/I_{AB}$ ;然后在另一对触点CD间连接一电流源,如点C连接正极,点D连接负极,CD间电流是 $I_{CD}$ ,测出另一对触点AB间电压 $U_{AB}$ ,计算 $R_2 = U_{AB}/I_{CD}$ 。这样,该样品的电阻率为

$$\rho = \frac{\pi d}{\ln 2} \frac{R_1 + R_2}{2} F\left(\frac{R_1}{R_2}\right) \quad (3)$$

式(3)为范德堡公式,其中 $F(k)$ 为范德堡函数, $k = \frac{R_1}{R_2}$ ,它满足

$$2 \cosh \left[ \frac{k-1}{k+1} \frac{\ln 2}{F(k)} \right] = \exp \frac{\ln 2}{F(k)} \quad (4)$$

且 $F(1) = 1$ 。可见,范德堡函数 $F(k)$ 是 $k$ 的单变量函数,它的变化规律如图4所示。

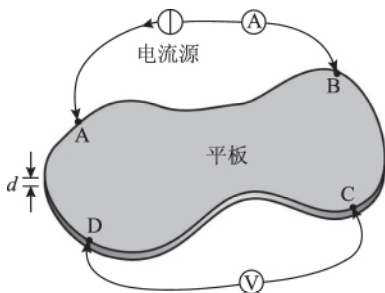


图3 范德堡法测量电阻率

Fig. 3 Resistivity measurement by method of Van der Pauw

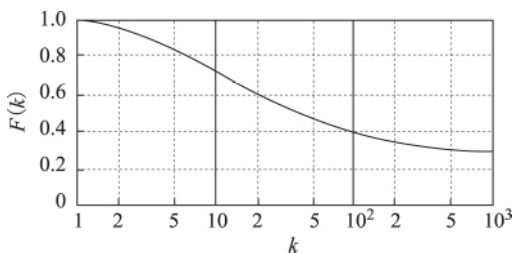


图4 范德堡函数

Fig. 4 Van der Pauw function

当测出 $R_1$ 和 $R_2$ 后,就可以计算出它们的比值,进而由式(4)求出范德堡函数的值。在此基础上,由

式(3)就可得到材料的电阻率。特别地,当平板有一条对称线,那么只需一次测量就可以确定电阻率,方法是将探针B和D置于对称线上,将探针A和C相对于该对称线对称放置,这时 $R_1 = R_2$ ,由式(3)可得

$$\rho = \frac{\pi d}{\ln 2} R_1 \quad (5)$$

导出范德堡公式的关键有两点:一是应用复变函数理论中的黎曼定理,将复平面 $z$ 上(如图3所示)单连通区域通过必然存在的解析函数 $w = f(z) = \phi + j\varphi$ 映射到复平面 $w$ 的上半平面,图3样品的边界映射为复平面 $w$ 的实轴;二是利用保角映射前后薄板厚度与其电导率的乘积保持不变下电流保持不变的性质。

需要注意,通过电路理论中的互易定理可以证明,交叉测量只能得到 $U_{BD}/I_{AC} = U_{AC}/I_{BD}$ ,而不能得到范德堡公式,从而无法测量电阻率。

#### 4.3 螺线管线圈中心的均匀磁场表达式

利用磁场进行科学实验时,除特殊情况外,常希望在一定空间内磁场是均匀的,例如目前用于人体全身诊断的磁共振断层扫描成像仪(Magnetic Resonance Imaging, MRI)中的磁体就是一台均匀磁场产生装置,磁场均匀程度越高,成像越清晰。均匀度因实验项目不同而有不同要求。使用均匀磁场不仅可以产生巨大的经济效益,而且还是探索物质世界奥秘的重要工具。

目前大多采用螺线管线圈的组合来实现高均匀磁场。它的理论基础是螺线管线圈内磁场的级数展开式<sup>[18,19]</sup>。如图5所示,均匀密绕螺线管线圈的内半径是 $a_1$ ,外半径是 $a_2$ ,长度是 $2b$ ,取球坐标系 $Or\theta\phi$ ,球心 $O$ 位于线圈的几何中心,线圈电流密度 $J$ 的方向与 $e_z$ 成右手螺旋关系。在以 $O$ 为球心、以 $r \leq a_1$ 为半径的空心球内,通过求解磁标位满足的拉普拉斯方程,可得任意点 $(r, \theta, \phi)$ 的磁通密度轴向分量

$$B_z(r, \theta) = \mu_0 a_1 J \left[ m_0(\alpha, \beta) + m_2(\alpha, \beta) \left( \frac{r}{a_1} \right)^2 P_2(u) + m_4(\alpha, \beta) \left( \frac{r}{a_1} \right)^4 P_4(u) + m_6(\alpha, \beta) \left( \frac{r}{a_1} \right)^6 P_6(u) + \dots \right] \quad (6)$$

式中, $\alpha = a_2/a_1$ ;  $\beta = b/a_1$ ;  $P_n(u)$ 为 $u = \cos\theta$ 的勒让德函数; $m_n$ 为由线圈形状确定的系数,前四个系数分别为

$$m_0(\alpha \beta) = \beta \ln \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{1 + \sqrt{1 + \beta^2}}$$

$$m_2(\alpha \beta) = \frac{1}{2\beta} (c_1^{3/2} - c_3^{3/2})$$

$$m_4(\alpha \beta) = \frac{1}{12\beta^3} \left[ c_1^{3/2} \left( 1 + \frac{3}{2}c_2 + \frac{15}{2}c_2^2 \right) - c_3^{3/2} \left( 1 + \frac{3}{2}c_4 + \frac{15}{2}c_4^2 \right) \right]$$

$$m_6(\alpha \beta) = \frac{1}{30\beta^5} \left[ c_1^{3/2} \left( 1 + \frac{3}{2}c_2 + \frac{15}{8}c_2^2 - \frac{35}{4}c_2^3 + \frac{315}{8}c_2^4 \right) - c_3^{3/2} \left( 1 + \frac{3}{2}c_4 + \frac{15}{8}c_4^2 - \frac{35}{4}c_4^3 + \frac{315}{8}c_4^4 \right) \right]$$

$$\text{式中, } c_1 = \frac{1}{1 + \beta^2}; c_2 = \frac{\beta^2}{1 + \beta^2}; c_3 = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2}; c_4 = \frac{\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

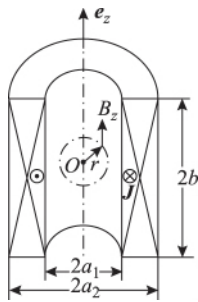


图5 螺线管中心附近磁场

Fig. 5 Magnetic field in the central zone of a solenoid coil

衡量球内磁场均匀性的指标为

$$\varepsilon(r, \theta) = \left| \frac{B_z(r, \theta) - B_{z0}}{B_{z0}} \right| \quad (7)$$

式中,  $B_{z0}$  为球心磁通密度。显然  $\varepsilon(r, \theta)$  越小, 磁场越均匀。

利用解析式(6)可得到由多个螺线管线圈组合而成的均匀磁场。图6所示的亥姆霍兹线圈是一种最简单的均匀磁场线圈, 它可以看作由两个同心螺线管线圈A和B组合而成, 两个线圈的内半径都是  $a_1$ , 外半径都是  $a_2$ , 它们的电流密度大小相等、方向相反。设线圈A的轴向长度是  $2b$ , 线圈B的轴向长度是  $2h$ ,  $\gamma = h/a_1$ , 在已知球心磁场  $B_{z0}$ 、内半径  $a_1$ 、尺寸  $b$  的前提下, 取

$$\begin{cases} \mu_0 a_1 J [m_0(\alpha \gamma) - m_0(\alpha \beta)] = B_{z0} \\ m_2(\alpha \gamma) - m_2(\alpha \beta) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

由方程组(8)解出比值  $\alpha$  和  $\gamma$  后计算

$$M_4(\alpha \beta \gamma) = m_4(\alpha \gamma) - m_4(\alpha \beta)$$

$$M_6(\alpha \beta \gamma) = m_6(\alpha \gamma) - m_6(\alpha \beta)$$

⋮

再利用式(6), 线圈A和B的磁场叠加后, 球内的轴向磁场变为

$$B_z(r, \theta) = B_{z0} + M_4(\alpha \beta \gamma) \left( \frac{r}{a_1} \right)^4 P_4(u) + M_6(\alpha \beta \gamma) \left( \frac{r}{a_1} \right)^6 P_6(u) + \dots \quad (9)$$

球内成为4阶均匀磁场

$$\varepsilon(r, \theta) \propto \left( \frac{r}{a_1} \right)^4 \quad (10)$$

类似地, 利用以上螺线管线圈的组合方法, 还可以形成6阶均匀磁场, 见文献[19]。

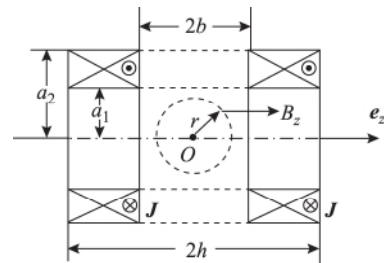


图6 亥姆霍兹线圈

Fig. 6 A Helmholtz coil

#### 4.4 放置式线圈的阻抗增量

涡流检测是工业无损检测方法的一种。它以电磁感应原理为基础, 在线圈中通入变化的电流后, 线圈产生的变化磁场在被测金属中感应涡流, 涡流又在金属外部产生电磁场, 通过检测该电磁场可间接了解材料的表面裂纹、电导率、表面涂层厚度、热处理状态、空洞、折叠、夹杂等。

涡流检测中, 探头线圈的阻抗增量最重要。利用阻抗增量可以做出阻抗平面图, 通过曲线的变化判断出材料特性以及材料表面状况。1968年, 美国橡树岭国家实验室学者 C. V. Dodd 等<sup>[20]</sup>使用分离变量法求解了通电圆环线圈的磁矢位解析解, 然后利用叠加原理得到了图7所示通电空心圆柱线圈在各区域的磁矢位, 由此得到了放置式线圈的阻抗  $Z$ , 通过减去无导体时的线圈阻抗  $Z_{air}$  后, 就得到了探头线圈的阻抗

增量

$$\Delta Z = j\omega\pi\mu n_c^2 \int_0^\infty \alpha^{-6} I^2(r_1, r_2, \alpha) (e^{-\alpha l_1} - e^{-\alpha l_2})^2 \cdot P(\alpha_1, \alpha_2, \rho) d\alpha \quad (11)$$

其中

$$I(r_1, r_2, \alpha) = \int_{r_1}^{r_2} x J_1(x) dx$$

$$\alpha_1 = \sqrt{\alpha^2 + j\omega\mu\sigma_1}$$

$$\alpha_2 = \sqrt{\alpha^2 + j\omega\mu\sigma_2}$$

$$P(\alpha_1, \alpha_2, \rho) = \frac{(\alpha + \alpha_1)(\alpha_1 - \alpha_2) + (\alpha - \alpha_1)(\alpha_2 + \alpha_1)e^{2\alpha_1 c}}{(\alpha - \alpha_1)(\alpha_1 - \alpha_2) + (\alpha + \alpha_1)(\alpha_2 + \alpha_1)e^{2\alpha_1 c}}$$

式中,  $\omega$  为电流角频率;  $\mu$  为导体的磁导率;  $n_c$  为线圈匝数密度 (匝数/面积);  $r_1$  和  $r_2$  分别为线圈的内、外半径;  $l_1$  和  $l_2$  分别为线圈下、上端面至导体表面的距离;  $c$  和  $\sigma_1$  分别为上层导体平板的厚度和电导率;  $\sigma_2$  为下层无限厚导体的电导率;  $J_1(x)$  为第一类贝塞尔函数。

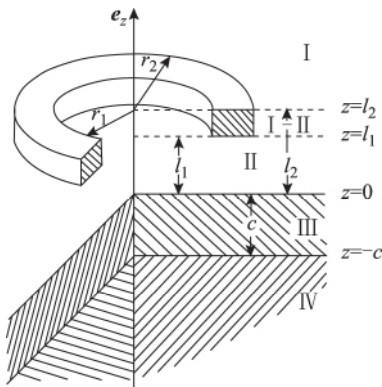


图 7 两层导体上方的放置式线圈

Fig. 7 Solenoid coil above a two-conductor plane

文献[20]对涡流检测理论和技术的发展起到了显著的推动作用。在此基础上,文献[21]给出了多层导体情况下被积函数中变量  $P$  的矩阵递推式,文献[22]求出了电导率随深度按双曲正切函数变化时线圈阻抗的解析式,文献[23]给出了阻抗增量高精度计算中积分限的确定方法和数值积分方法,文献[24]将式(11)的积分形式表达为便于快速计算的级数形式。1968 年日本东京大学学者尾上守夫<sup>[25]</sup>发表了解析求解螺线管线圈涡流场的论文,求解模型与文献[20]类似。相比较而言,文献[20]推导过程思路清晰,符号规范,可读性强,叙述更清楚,解析过程更容易理解,所以它的流传也更广,成为电磁无损检测领域中的一篇经典文献。

#### 4.5 Halbach 永磁体的磁场计算法

永磁体在应用中有许多特点,突出特点是磁场仅

与磁体形状有关,而与尺寸无关,因此巧妙地设计磁体形状,并按某种方式对永磁体充磁,就会获得独特的磁特性。图 8 是已知磁化矢量的长直中空圆柱永磁体的横截面,这个磁体俗称永磁魔环,它的内半径是  $r_1$ , 外半径是  $r_2$ , 以圆柱中心线为  $z$  轴建立圆柱坐标系  $O\rho\phi z$ , 已知磁化矢量  $\mathbf{M} = \mu_0^{-1} B_0 (e_\rho \cos \phi + e_\phi \sin \phi)$ , 其中  $B_0$  为剩磁。通过引入磁标位可以求解这个磁场的边值问题, 分别得到圆柱空腔内和圆柱外的磁场

$$\mathbf{B}_1 = e_x B_0 \ln \frac{r_2}{r_1} \quad 0 \leq \rho < r_1$$

$$\mathbf{B}_3 = \mathbf{0} \quad \rho > r_2$$

由此可以看出永磁魔环的神奇之处: 圆柱空腔内是均匀磁场; 当外半径与内半径之比  $r_2/r_1 > e$  时, 空腔磁通密度大于剩磁; 圆柱外无磁场; 完全由永磁体构成, 没有铁轭。它的磁场线分布如图 9 所示。

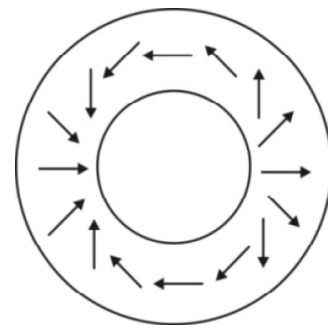


图 8 永磁魔环横截面上磁化矢量的分布

Fig. 8 Magnetization vector on the cross-section of the permanent-magnet magic ring

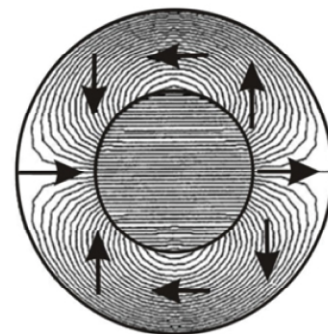


图 9 永磁魔环的磁场线

Fig. 9 Magnetic flux density line of the permanent-magnet magic ring

1979 年, 美国劳伦斯伯克利实验室的学者 K. Halbach<sup>[26]</sup>巧妙地将魔环磁体空腔中的 1 对极扩展为任意  $N$  对极, 并给出了简单的磁场计算式; 同时为了便于工程实现, 提出将圆柱沿圆周等分割, 分别对每一等分按不同方向充磁, 之后再按磁化规律组装。K. Halbach 的分析思路是:



首先把剩磁矢量  $B_0$  表示成复数形式

$$B_0(z) = B_{0x}(x, y) + jB_{0y}(x, y)$$

式中,  $z = x + jy = re^{j\varphi}$ , 利用长直线电流的磁场公式, 可得任意点  $z_0 = x_0 + jy_0$  处磁通密度的共轭复数

$$B^*(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_D \frac{B_0(z)}{(z_0 - z)^2} dx dy = b_1 + b_2 z_0 + \cdots + b_n z_0^{n-1} + \cdots$$

式中

$$b_n = \frac{n}{2\pi} \int_D \frac{B_0(z)}{z^{n+1}} dx dy$$

积分区域  $D$  是中空圆柱永磁体的圆环横截面。展开式中常数项  $b_1$  对应于 1 对极磁场, 一次项  $b_2 z_0$  对应于 2 对极磁场, 以此类推,  $b_n z_0^{n-1}$  对应于  $n$  对极磁场。为了在圆柱磁体的空腔产生  $N$  对极磁场, 需要使  $B^*$  的展开式中对应于  $n = N$  的那一项  $b_N z_0^{N-1}$  的系数  $b_N$  尽可能大, 而其他系数尽可能小。为此, 记  $z = re^{j\varphi}$  和剩磁  $B_0(z) = B_0 e^{j\beta(\varphi)}$  ( $B_0$  是正常数), 这样  $n = N$  时, 有

$$b_N = \frac{B_0 N}{2\pi} \int_D \frac{e^{j[\beta(\varphi) - (N+1)\varphi]}}{r^{N+1}} r dr d\varphi$$

可见, 要使  $b_N$  的实数取得最大值, 永磁体内的磁化方向就需要满足  $\beta(\varphi) = (N+1)\varphi$ 。在此基础上, 可得  $n \neq N$  时  $b_n = 0$ , 从而求出磁体空腔任意点的复磁通密度为

$$N = 1 \text{ 时: } B^*(z_0) = B_0 \ln \frac{r_2}{r_1}$$

$$N > 1 \text{ 时: } B^*(z_0) = \frac{B_0 N}{N-1} \left[ 1 - \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^{N-1} \right] \left( \frac{z_0}{r_1} \right)^{N-1}$$

K. Halbach 的分析巧妙, 结果简单, 实现也不困难, 具有十分重要的理论价值和实用价值。目前以提出者姓名命名的 Halbach 磁体已在核磁共振、永磁电机、磁浮交通等领域得到广泛应用。

#### 4.6 脑磁测量基准计算公式

脑磁测量是通过测量头部周围由脑神经活动产生的微弱磁场, 来反演获得脑神经活动部位信息的技术。在反演之前, 首先需要计算脑内偶极子电流元在测量线圈上感应的输出信号。为了快速、准确地计算头部周围磁场, 1987 年由芬兰赫尔辛基技术大学低温实验室学者 J. Sarvas<sup>[27]</sup> 基于线性、均匀多层同心导体球模型, 导出了一个球内任意位置电流元在多层导体球外任意点产生磁通密度的简单封闭代数式, 称为 Sarvas 公式。它的内容是:

取球心位于球坐标系  $Or\theta\phi$  的原点, 球内电流元

$Q = J_s \Delta V$  位于  $r'$ , 球外任意点  $r$  处的磁通密度为

$$B(r) = \frac{\mu_0}{4\pi F^2} [FQ \times r' - (Q \times r') \cdot r \nabla F] \quad (12)$$

式中,  $R = r - r'$ ;  $R^\circ = R/R$ ;  $F = R(rR + r \cdot R)$ ;  $\nabla F = (R^2 r^{-1} + 2r + 2R + r \cdot R^\circ) r - (2r + R + r \cdot R^\circ) r'$ 。

式(12)导出的关键是利用磁场径向分量  $B_r$  表示磁标位(参考点在无限远处)

$$\varphi_m(r) = \mu_0^{-1} \int_0^\infty B_r(r + te_r) dt \quad (13)$$

式(13)是这篇论文的精华。可以证明,  $B_r$  仅由电流元产生, 而与球内传导电流无关。利用毕奥-萨伐尔定律求出显式  $B_r$  后, 再由  $B = -\mu_0 \nabla \varphi_m$  可得到球外磁场。

Sarvas 公式的导出具有重要的科学意义, 主要体现在以下几个方面:

1) 解的形式极其简单, 仅用加减乘除四则运算的代数式就能计算球外磁场。作为对比, 除了长直线电流和无限大平面电流等几种特殊分布的电流具有形式简单的磁场表达式外, 大部分磁场问题的计算都比较复杂。

2) 多层同心导体球的外部磁场只与外源  $Q$  有关, 而与导体球中的传导电流、导体球分层数、各层电导率无关。

3) 已知磁通密度的一个分量, 能得到整个磁场分布。

4) 导出过程提供了一种求解此类电磁场问题的分析方法。文献[28]在此基础上进一步拓展, 导出了低频电流元激励下球内感应电场的解析解。

5) 一流的研究工作并不必然与高深的数学相联系。

Sarvas 公式具有重要的实用价值, 可用于研究生物电磁学问题, 用于反演病灶等效电流源的位置、分布及其活动情况<sup>[29]</sup>。目前 Sarvas 公式已成为脑磁测量领域的基准计算公式。

#### 4.7 浅表面缺陷涡流场的三维渐近解析解

电磁场理论发展到今天, 解析方法已取得了极大进步, 典型的进展是 E. Uzal 等<sup>[30]</sup> 求出了图 10 所示涡流问题的渐近解析解。均匀半空间非磁性导体的表面上方有一个垂直放置的通有正弦电流的空心圆柱线圈, 导体表面有一个三维浅表面真空凹陷, 在图示直角坐标系  $Oxyz$  中, 线圈对称轴是  $z$  轴, 其正向垂直向下,  $z < 0$  是真空区域 1,  $z > 0$  是区域 2, 包含缺陷表面在内的导体表面方程为  $z = \alpha f(x, y)$ , 其中参数  $|\alpha| \ll 1$ 。

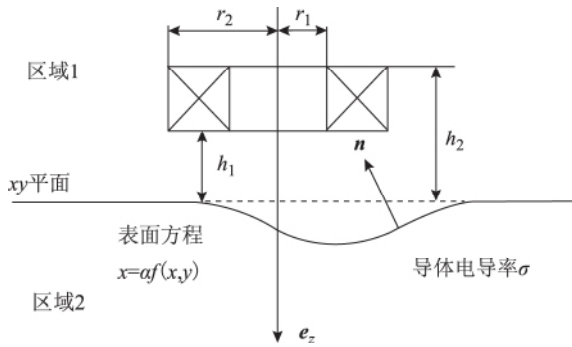


图 10 三维浅表面缺陷的涡流场

Fig. 10 Solenoid coil over the surface flaw

图 10 中, 电场的约束方程为

$$\nabla^2 E - j\omega\sigma\mu E = j\omega\mu J_s \quad (14)$$

在导体表面  $z = \alpha f(x, y)$  上, 电场满足以下两个边界条件

$$n \times (E^{(1)} - E^{(2)}) = 0 \quad (15)$$

$$n \times [\nabla \times (E^{(1)} - E^{(2)})] = 0 \quad (16)$$

式中,  $E^{(1)}$  为真空区域 1 的电场强度;  $E^{(2)}$  为导体区域 2 的电场强度;  $n$  为导体表面上的法向单位矢量, 则

$$n(\alpha) = \frac{\alpha \frac{\partial f}{\partial x} e_x + \alpha \frac{\partial f}{\partial y} e_y - e_z}{\sqrt{\left(\alpha \frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\alpha \frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}} \quad (17)$$

由于参数  $\alpha = 0$  时的电场  $E_0$  是半无限大导体平面上方放置式通电线圈激励的电场, 即没有缺陷的电场, 而且  $\alpha$  很小, 所以  $\alpha \neq 0$  时电场  $E$  的主部是  $E_0$ , 这样可将  $E$  按泰勒级数展开

$$E = E_0 + \alpha E_1 + o_E(\alpha^2) \quad (18)$$

式中,  $o_E(\alpha^2)$  为高阶小量。将式(18)代入方程(14), 忽略高阶小量, 可得  $E_1$  的约束方程

$$\nabla^2 E_1 - j\omega\sigma\mu E_1 = 0 \quad (19)$$

同样, 将  $n(\alpha)$  展开成泰勒级数

$$n(\alpha) = -e_z + \alpha \frac{\partial f}{\partial x} e_x + \alpha \frac{\partial f}{\partial y} e_y + o_n(\alpha^2) \quad (20)$$

忽略高阶小量  $o_n(\alpha^2)$ , 代入边界条件(15)、(16)整理后, 可知只要以下两个边界条件

$$e_z \times \Delta E_1 = \left( \frac{\partial f}{\partial x} e_x + \frac{\partial f}{\partial y} e_y \right) \times \Delta E_0 - f e_z \times \Delta \left( \frac{\partial E_0}{\partial z} \right) \quad (21)$$

$$\nabla \times \Delta E_1 = -f \nabla \times \Delta \left( \frac{\partial E_0}{\partial z} \right) - \nabla f \times \Delta \left( \frac{\partial E_0}{\partial z} \right) \quad (22)$$

成立, 边界条件(15)、(16)必然成立。式中记号  $\Delta E = E^{(1)} - E^{(2)}$ 。式(21)和式(22)中  $z = 0$ , 且  $E_0 = E_0(\rho, z) e_\phi$  是已知项, 求解方法与文献[20]中求解磁矢位方法一

样, 其表达式为

$$E_0^{(1)} = -j\omega\mu_0 J_s \int_0^\infty \frac{P(\lambda)}{2\lambda} (e^{-\lambda h_1} - e^{-\lambda h_2}) \cdot$$

$$J_1(\lambda \rho) \left( e^{-\lambda z} + \frac{\lambda - u}{\lambda + u} e^{\lambda z} \right) d\lambda$$

$$E_0^{(2)} = -j\omega\mu_0 J_s \int_0^\infty \frac{P(\lambda)}{\lambda + u} (e^{-\lambda h_1} - e^{-\lambda h_2}) J_1(\lambda \rho) e^{-u z} d\lambda$$

式中,  $P(\lambda) = \int_{r_1}^{r_2} x J_1(\lambda x) dx$ ;  $u = \sqrt{\lambda^2 + j\omega\mu_0 \sigma}$ 。

用二维傅里叶变换方法求解方程(19), 再结合  $z = 0$  时的两个边界条件(21)和(22), 就可完全得到  $E_1$  的解析解, 从而可求出任意点的三维电场解析解  $E = E_0 + \alpha E_1$ 。基于此, 进一步可得到浅表面缺陷对应的线圈阻抗增量

$$\Delta Z = \frac{\alpha n_c^2}{\sigma} \int_0^\infty \rho [G(\rho)]^2 S(\rho) d\rho \quad (23)$$

其中

$$G(\rho) = \int_0^\infty P(\lambda) (u - \lambda) (e^{-\lambda h_1} - e^{-\lambda h_2}) J_1(\lambda \rho) d\lambda$$

$$S(\rho) = \int_0^{2\pi} f(\rho, \phi) d\phi$$

式中,  $n_c$  为线圈匝数密度;  $f(\rho, \phi)$  为  $f(x, y)$  的极坐标形式。

文献[30]的基本思路是将三维浅表面缺陷当作导体的一个扰动, 用泰勒级数将约束方程和边界条件分别在平面  $z = 0$  上展开, 它的主部是一个轴对称涡流场的解, 一阶导数项是导体缺陷对应的扰动解。扰动参数相对于线圈半径越小, 解析解的准确度越高。

#### 4.8 金属管道涡流场的三维解析解

对于涡流场的解析求解而言, 由二维场扩展到三维场, 不仅增加了几何复杂性, 而且三维场不再具有对称性, 场的变化与场点的三个坐标都有关, 因此求解难度大大增加。

通过大量的求解实践发现, 选取修正磁矢位  $A^*$  为求解对象解析求解二维涡流场最简便<sup>[31]</sup>。但对于三维涡流场, 场源外  $A^*$  的三个垂直分量通过方程  $\nabla \cdot A^* = 0$  耦合在一起、出现分量无法分离的情况, 难以得到三个垂直分量的二阶常微分方程。另一方面, 场源外  $\nabla \cdot A^* = 0$  说明  $A^*$  的三个垂直分量中只有两个独立, 而且在场源外的面单连通区域内必存在一个矢量  $W$ , 满足  $A^* = \nabla \times W$ 。在研究涡流和电磁辐射时, 为了将分量分离, 方便的做法是将  $W$  分解成两个相互垂直的分量, 每个分量可由一标量函数给出<sup>[1]</sup>

$$W = e W_a + e \times \nabla W_b \quad (24)$$

式中,  $e$  为一个常矢量;  $W_a$  和  $W_b$  是两个独立的标量。

因磁通密度  $\mathbf{B} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{W})$ , 所以矢量  $\mathbf{W}$  称为二阶磁矢位。利用场源外方程  $\nabla^2 \mathbf{A}^* + k^2 \mathbf{A}^* = \mathbf{0}$ , 可得两个独立标量分别满足  $\nabla^2 W_a + k^2 W_a = 0$  和  $\nabla^2 W_b + k^2 W_b = 0$ , 其中  $k^2 = \omega\mu(\omega\varepsilon - j\sigma)$ 。

在圆柱坐标系  $O\rho\phi z$  中, 只有轴向单位矢量  $\mathbf{e}_z$  是常矢量, 因此  $\mathbf{e} = \mathbf{e}_z$ 。此时

$$\mathbf{B} = \nabla \frac{\partial W_a}{\partial z} + k^2 (\mathbf{e}_z \times \nabla W_b + W_a \mathbf{e}_z) \quad (25)$$

分析表明, 用二阶磁矢位解析求解某些三维涡流场具有独特的优势。它的典型应用是求解图 11 所示金属管道外任意位置线圈激励的涡流场解析解, 金属管道是二维分布, 通电线圈  $C$  是三维分布, 任意点的电磁场是场点三个坐标分量的函数。这个问题的解析难度主要取决于导体的性质和形状, 所以应基于导体结构和形状特点选取合适的坐标系。能够得到这个三维问题解析解的关键做法是: 将电磁场看作入射场与涡流场的叠加, 这样就可以将问题分解, 化繁为简, 大大降低了求解难度; 然后根据电磁场互易定理, 用导体外表面的场量表示线圈阻抗增量, 同时根据法拉第感应定律写出涡流场引起的线圈阻抗增量; 最后对比这两个阻抗增量, 就可确定各个场区的电磁场<sup>[32]</sup>。具体求解过程是:

1) 以管道轴线为  $z$  轴建立圆柱坐标系  $O\rho\phi z$ , 写出  $W_a$  和  $W_b$  的通解。

2) 将管道外侧真空中的场  $W_a$  看作涡流产生的场  $W_{aed}$  与无限大真空中通电线圈单独产生的场  $W_{ac}$  的叠加

$$W_a(\rho, \phi, z) = W_{aed}(\rho, \phi, z) + W_{ac}(\rho, \phi, z) \quad (26)$$

其中

$$W_{aed} = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} D_m K_m(\rho|\lambda|) e^{jm\phi} e^{i\lambda z} d\lambda$$

$$W_{ac} = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m I_m(\rho|\lambda|) e^{jm\phi} e^{i\lambda z} d\lambda$$

3) 分别写出管道内表面  $\rho = r_1$  和外表面  $\rho = r_2$  满足的磁通密度法向分量相等和磁场强度切向分量相等的边界条件<sup>[33]</sup>, 得到通解中各个待定系数满足的方程组。

4) 利用电磁场理论中的互易定理写出涡流场对应的线圈阻抗, 再写出线圈两端因涡流场产生的感应电压相量  $U(j\omega)$  对应的线圈阻抗, 由这两个阻抗相等, 可得

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{\partial W_{ac}}{\partial z} \frac{\partial^2 W_a}{\partial \rho \partial z} - \frac{\partial W_a}{\partial z} \frac{\partial^2 W_{ac}}{\partial \rho \partial z} \right) d\phi = \frac{\mu_0 I}{r_2} \int_{S_l} \nabla \left( \frac{\partial W_{aed}}{\partial z} \right) \cdot d\mathbf{S} \quad (27)$$

由此可求出只有通电线圈时管道外壁附近的电磁场,

进一步可求出全部场区的电磁场。

5) 写出阻抗增量表达式<sup>[34]</sup>

$$\Delta Z = -\frac{j\mu_0 \omega}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{I_m(r_2|\lambda|)}{K_m(r_2|\lambda|)} F(r_1, r_2, k, m, \lambda) d\lambda \quad (28)$$

式中,  $I_m$  和  $K_m$  分别为第一类和第二类变形贝塞尔函数;  $F(r_1, r_2, k, m, \lambda)$  为已知函数。

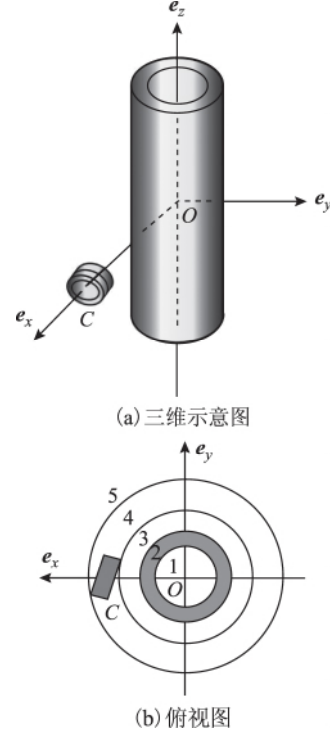


图 11 金属管道外任意位置线圈

Fig. 11 Solenoid coil optionally positioned outside a metal pipe

以上解析解可用于计算管道外任意位置线圈的阻抗增量, 包括平行放置<sup>[34]</sup>、垂直放置<sup>[35]</sup>、矩形弯曲<sup>[36]</sup>、偏心弯曲等形式的线圈<sup>[37]</sup>。对于如图 12 所示的线圈位于导体内洞的情形, 按照以上推导思路, 同样可得到阻抗增量解析式<sup>[38]</sup>。

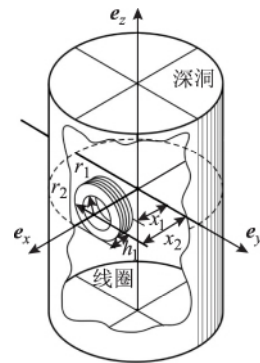


图 12 导体狭窄深洞中的水平线圈(此图取自文献[38])

Fig. 12 Horizontal solenoid coil in a borehole

(Fig. 12 is taken from [38])

以上三维解析方法的典型应用是金属管道的无损检测,检测参数有管道电导率<sup>[39]</sup>、包覆层厚度、镀层厚度、管道外径等<sup>[40]</sup>;当线圈激励采用脉冲电流时,可检测金属管道壁厚的变化,用于铁磁管道的内壁腐蚀检测。文献[41~42]通过求解铁磁管道外放置式线圈脉冲电流激励下的感应电压解析式,研制了能够检测铁磁管道参数的脉冲涡流装置,可以检测最大壁厚 30 mm、最大包覆层厚度 80 mm 的铁磁管道壁厚的腐蚀变化,具有检测可靠、精度高、速度快的特点,目前尚未见到同类检测装置。

## 5 解析方法参考书

表面上看,电磁场解析方法似乎只属于电磁场问题,本质上任何一个电磁场解析解都是电磁场理论与数学方法相结合的产物。下面给出作者视野范围内、有助于求出电磁场解析解的几本参考书。从这些参考书中大约可以看出解析解的演变历史、涉及范围和理论深度。

《静电力和电动力学》<sup>[1]</sup>:一本系统介绍电磁场基本原理和分析方法的专著,内容包括静态场、涡流场、辐射场以及带电粒子的运动等,尤其在静电场、特殊函数、涡流场、波导管和谐振腔等部分,内容丰富。全书解析求解的问题约 280 多个,书中习题约 780 个,分章列出了大量参考文献,几乎涵盖了电磁场理论的方方面面,可以说这相当于一本解析解手册,因此,至今为止被国内外电磁场解析解论文所广泛引用。该书是作者 W. R. 斯迈思根据给物理、电气工程、地球物理和数学专业的研究生开课的讲义而编成的,第一、二和三版分别完成于 1939 年、1950 年和 1968 年。该书是第三版的中译本。第二版序言中说“成功地解决电学问题取决于物理上的而不是数学上的洞察力,这是作者从第一版的教学实践中所证实的结论,实践证明,电气专业和物理专业的研究生解决电学问题的能力远远超过数学专业的研究生”。这句话引起了本文作者的强烈共鸣,同时也回答了谁来做电磁场解析解最合适的问题。

《详解电磁学演習》<sup>[43]</sup>(详解电磁学习题集):这是一本日本学者撰写的电磁场理论习题集,内容涵盖静电场、稳恒电场、稳恒磁场、电磁感应、电磁波、运动介质中的电磁场、带电粒子和等离子体等,习题总数约 1 000 道,内容丰富,可作为电磁场解析解的入门书。该书自 1970 年出版以来,深受读者欢迎,截至 2010 年已印刷 138 次。

《微波理论与技术》<sup>[44]</sup>:该书整理、汇编了大量文献资料,煌煌百万字,其中许多是作者自己的研究

成果。书中详细解析求解了许多重要的电磁场边值问题,涉及范围广,既有静态场问题,也有时谐场问题,推导过程严谨、清晰,极具参考价值,例如用复变函数法与分离变量法相结合,研究了稳恒磁场中任意截面载流导体的磁场问题,给出了一般性结论,分析方法极富启发性,是一本高水平的解析方法参考书。该书作者、我国学者林为干在电磁场解析解方面做出了许多卓越的工作,为学科发展留下了宝贵财富。

《高压静电场(增订版)》<sup>[10]</sup>:这是在 1962 年初版的基础上,1987 年出版的增订版。书中针对 30 多个静电场问题,综合介绍了各种静电场解析方法,详细给出了求解过程和解析解,物理概念清楚,推导繁简适度。该书不仅细致地反映了静电场的分析方法,同时也反映了作者解广润 1962 年 32 岁时就已具备扎实的理论基础,可以说这是中国学者在静电场解析方法方面的一本代表作。

《Eddy Currents in Linear Conducting Media》<sup>[45]</sup>(线性导体中的涡流):一本不可多得的研究涡流场解析解的学术专著,由两位希腊学者撰写。作者之一、萨洛尼卡大学的 E. E. Kriezis 教授带领的研究团队在电磁场解析解上做出了大量杰出工作。该书简要介绍了分离变量法、变分法、扩散方程的积分形式,分别研究了线分布电流激励下平板导体、平行线电流激励下有限长圆筒导体、圆环电流激励下同轴圆筒导体、旋转电流激励下同轴圆筒导体、圆环电流激励下运动导体、脉冲电流激励下平板导体中的涡流分布,详细给出了解析求解过程,有的给出了应用实例,具有重要的参考价值。

《时谐电磁场解析方法》<sup>[31]</sup>:这是本文作者的拙作,总结了作者的部分工作,核心内容是重新表述了时变电磁场初边值问题,重新给出了解的唯一性定理,在此基础上研究了便于解析求解的时谐场方程、边界条件以及无限远条件,并论证了修正磁矢位的无需规范性。另外还叙述了作者在解析解计算方面的工作。该书对正确写出时谐场边值问题和解析解的精确计算可能有帮助。

《Equations in Mathematical Physics》<sup>[46]</sup>(数学物理方程):该书分别解析求解了椭圆问题(对应于静态场)、双曲问题(对应于辐射场)和抛物线问题(对应于涡流场),解析方法涉及分离变量法、复变函数法、格林函数法、行波法、积分变换法、驻波法等。这本书的最大特点是大量求解了各种边值问题,将各种解析方法融合在求解过程中,显示了作者高超的数学分析能力。本文作者 1990 年在解析求解超导球的电磁场

边值问题时,遇到了一个当时无法解析求解的微分方程  $r^2 R'' + 2rR' + [n(n+1) + \alpha r^2]R = 0$ , 后来从该书获得启发,才得到了一般解<sup>[47]</sup>。该书原本是俄文,由俄罗斯学者撰写,是俄罗斯科学院出版的《物理数学丛书》中的一本,它推导过程详细、清晰,易懂,易用,因此2001年被一家西方出版社译为英文出版。

《Eddy Current Canonical Problems》<sup>[48]</sup>(典型涡流问题):一本基本代表当今涡流电磁场解析水平的学术专著,由两位希腊学者撰写,萨洛尼卡大学的E. E. Kriezis也是作者之一。该书以电磁无损检测技术为背景,简要介绍了涡流检测模型、二阶磁矢位的约束方程及其边界条件、电磁无损检测中检测线圈的阻抗增量,分别深入研究了时谐均匀磁场激励下均匀半空间导体表面带有裂纹、理想裂纹、任意截面狭长槽、矩形截面狭长槽的涡流场解析解,分别解析求解了放置式线圈激励下多层平板导体、非均匀半空间导体的涡流场,对有限半径的半无限长同轴圆柱、线圈的同轴圆柱磁心、线圈的同轴屏蔽罩、半空间导体上的同轴圆孔等轴对称涡流问题分别求出了强制齐次边界条件下的解析解,尤其是分别得到了平板导体上方任意位置线圈激励下和三维导体边缘处涡流问题的解析解。

需要特别强调的是,除了以上几本参考书外,国内外还出版了大量优秀的解析解书籍,例如文献[49-51],可以选择参考。

## 6 值得进一步研究的几个问题

### 6.1 用保角变换方法求解稳恒磁场问题

目前,用复变函数法解析求解的电磁场问题多数是静电场问题,对于稳恒磁场问题仅有几种典型问题的求解,应用尚不广泛。复变函数法在解决稳恒磁场问题上所呈现的独特优势尚不明显,今后可能需要研究。

### 6.2 现有解析方法的综合应用

从目前已有的解析解来看,对于一维或二维问题,一般只需要一种解析方法就能求解;对于三维问题,常需要结合多种方法才能求解。今后在不增加新的解析方法的情况下,将目前已有的解析方法和近似解析方法综合使用,估计能够解析求解许多三维电磁场问题。

### 6.3 借鉴最新数学物理方法

在数学物理方程中,已发展出多种解析求解方法或近似解析方法,例如如何将不受方程类型限制的脉冲谱技术求解方法<sup>[3]</sup>与电磁场问题结合就值得关注。经常关注该领域的发展,及时将其中的研究成果和分析方法引入电磁场理论中,是保持电磁场理论持续活力的一个有效手段,也是电磁场工作者实现创新发展

的一个途径。

### 6.4 瞬态涡流场的解析求解

一般而言,涡流场的解析求解是所有电磁场解析求解中最困难的。这是由于静态场的场源频率是零,场量满足拉普拉斯方程,方程简单;对于高频场,导体中的电磁场趋于零,导体的影响忽略不计,只需考虑导体以外场区;涡流场则不同,场源频率处于中间范围,必须研究导体内的电磁场,这使得涡流问题的求解难于静态场,也难于高频场,求解过程使用的基本理论和方法多,数学变换的要求高,表达式也最复杂。涡流问题分为稳态问题和瞬态问题。稳态问题存在透入深度的概念,目前已有较多的解析解;但对于瞬态解析解问题,历史上研究不多,只在地球物理勘探等领域有少量涉及,尽管如此,这些解就已对解决实际问题起到了显著的推动作用。今后可以先从二维瞬态涡流问题入手求解,以后逐渐扩展到三维瞬态涡流问题。

### 6.5 微扰法中高阶导数项的求解

目前微扰法求解的是泰勒展开式中一阶导数项,如果能够进一步求出二阶或三阶导数项甚至更高阶导数项,则微扰法的适用范围会大大扩展,许多问题都可以得到高精度的解析解。

### 6.6 逆问题的解析求解

现在电磁场解析方法的应用主流是求解定解问题中的场量,如果能够从定解问题中解析求解出逆问题,则会大大扩展电磁场理论的应用范围。这些逆问题包括系数逆问题、场源逆问题和边界形状逆问题。例如目前工业界急需解决的多层导体测厚问题,当层厚在20微米量级时涡流检测的精度低,如果能够得到分层厚度逆问题的解析解,将会解决一大类这样的实际问题,即使只得到了近似解析解,也会对实际检测起到很大的帮助作用。

## 7 结语

为了电磁场理论和应用的深入发展,在作者的认识范围内,本文对电磁场解析方法进行了综述,重点叙述了历史上若干经典解析解,并提出了今后需要进一步研究的一些问题。

电磁场理论博大精深,其中解析方法和解析解涉及范围广,内容丰富,国内外学术杂志上不断有高水平解析解论文发表,很难做出全面、准确的评述,例如由于作者不懂俄语,俄罗斯学者的工作基本没有涉及,而长期以来俄罗斯以及前苏联在解析解方面的工作独树一帜,因此本文内容一定不全面,一些观点可



能偏颇, 仅供读者参考。

### 参考文献

- [1] (美) W. R. 斯迈思. 静电学和电动力学[M]. 戴世强译. 北京: 科学出版社, 1981.
- [2] Cameron W. RTD-INCOTEST for the Detection of Corrosion under Insulation [EB/OL]. [2011-09-10]. [http://www.pndt.com.au/files/brochure/40\\_INCOTESTTechnicalPaper.pdf](http://www.pndt.com.au/files/brochure/40_INCOTESTTechnicalPaper.pdf).
- [3] 程建春. 数学物理方程及其近似方法[M]. 北京: 科学出版社, 2004.
- [4] Abramowitz M, Stegun I A. Handbook of mathematical functions[M]. New York: Dover Publications, 1972.
- [5] M. A. 拉夫连季耶夫, Б. B. 沙巴特. 复变函数论方法[M]. 6版. 施祥林, 等译. 北京: 高等教育出版社, 2006.
- [6] И. И. 普利瓦洛夫. 复变函数引论[M]. 闵嗣鹤, 等译. 北京: 人民教育出版社, 1956.
- [7] Bateman H. Tables of integral transforms( volume I and volume II) [M]. Compiled by the Staff of the Bateman Manuscript Project. New York: McGraw-Hill, 1954.
- [8] 雷银照, 马信山. 三维探伤涡流场的研究与线圈阻抗的计算[J]. 中国电机工程学报, 1996, 16(5): 1-6. Lei Yinzhaoh, Ma Xinshan. Approach to three-dimensional eddy current problems and calculation of the coil impedance for nondestructive testing[J]. Proceedings of the CSEE, 1996, 16(5): 1-6.
- [9] 刘鹏程. 电磁场解析方法[M]. 北京: 电子工业出版社, 1995.
- [10] 解广润. 高压静电场(增订版)[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1987.
- [11] Thompson A M, Lampard D G. A new theorem in electrostatics and its application to calculable standards of capacitance[J]. Nature, 1956, 177: 888.
- [12] Lampard D G. A new theorem in electrostatics with applications to calculable standards of capacitance[J]. Proceedings IEE, Monograph No. 216M, 1957, 104C: 271-280.
- [13] Thompson A M. The cylindrical cross-capacitor as a calculable standard[J]. Proceedings IEE, Paper No. 2887M, 1959, 106B: 307-310.
- [14] Lampard D G, Cutkosky R D. Some results on the cross-capacitances per unit length of cylindrical three-terminal capacitors with thin dielectric films on their electrodes[J]. Proceedings IEE, Monograph No. 351M, 1960, 107C: 112-119.
- [15] 陈士衡, 唐统一, 张钟华, 等. 近代电磁测量[M]. 北京: 中国计量出版社, 1992.
- [16] Van der Pauw L J A. A method of measuring specific resistivity and Hall effect of discs of arbitrary shape[J]. Philips Research Reports, 1958, 13(1): 1-9.
- [17] 何朝来, 陆祖良, 刘松银. 一种新颖的交叉电导率测量原理[J]. 现代计量测试, 1995(1): 23-26. He Chaolai, Lu Zuliang, Liu Songyin. A novel principle to measure the cross conductance[J]. Modern Measurement and Test, 1995(1): 23-26.
- [18] Montgomery D B. Solenoid magnet design [M]. New York: Wiley-Interscience, 1969.
- [19] 雷银照. 轴对称线圈磁场计算[M]. 北京: 中国计量出版社, 1991.
- [20] Dodd C V, Deeds W E. Analytical solutions to eddy-current probe-coil problems[J]. Journal of Applied Physics, 1968, 39(6): 2829-2838.
- [21] Cheng C C, Dodd C V, Deeds W E. General analysis of probe coils near stratified conductors[J]. International Journal of Nondestructive Test, 1971(3): 109-130.
- [22] Uzal E, Moulder J C, Mitra S, et al. Impedance of coils over layered metals with continuously variable conductivity and permeability: theory and experiment [J]. Journal of Applied Physics, 1993, 74(3): 2076-2089.
- [23] 雷银照, 马信山. 涡流线圈的阻抗计算[J]. 电工技术学报, 1996, 11(1): 17-20. Lei Yinzhaoh, Ma Xinshan. Calculation of impedance in an eddy-current coil by numerical integration method[J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 1996, 11(1): 17-20.
- [24] Theodoulidis T, Kriezis E E. Series expansions in eddy current nondestructive evaluation models [J]. Journal of Materials Processing Technology, 2005, 161: 343-347.
- [25] 尾上守夫. 導体に近接した有限長ソレノイドコイルの解析[J]. 電気学会雑誌, 1968, 10(961): 162-170.
- [26] Halbach K. Design of permanent multipole magnets with oriented rare earth cobalt material[J]. Nuclear Instruments and Methods, 1980, 169: 1-10.
- [27] Sarvas J. Basic mathematical and electromagnetic concepts of the biomagnetic inverse problem[J]. Physics in Medicine and Biology, 1987, 32(1): 11-22.
- [28] 北野充大, 濱田昌司, 小林哲生. 低周波ダイポール磁界印加時の導体球内誘導電界の解析式[J]. 電気学会論文誌 A, 2007, 127(6): 346-354.
- [29] Van Uitert R, Weinstein D, Johnson C. Volume

- currents in forward and magnetoencephalographic simulations using realistic head models [J]. *Annals of Biomedical Engineering*, 2003, 31: 21-31.
- [30] Uzal E, Kaya M O, Ozkol I. Impedance of a cylindrical coil over an infinite metallic half-space with shallow surface features [J]. *Journal of Applied Physics*, 1999, 86(4): 2311-2317.
- [31] 雷银照. 时谐电磁场解析方法 [M]. 北京: 科学出版社, 2000.
- [32] Theodoulidis T P. Analytical modeling of wobble in eddy current tube testing with bobbin coils [J]. *Research in Nondestructive Evaluation*, 2002, 14(2): 111-126.
- [33] 雷银照, 熊华俊, 王书彬. 线性瞬态涡流场定解问题中的法向边界条件与解的唯一性 [J]. *中国电机工程学报*, 2003, 23(4): 81-85.
- Lei Yinzha, Xiong Huajun, Wang Shubing. The normal interface condition and the uniqueness of solution to the linear transient eddy current definite solution problem [J]. *Proceedings of the CSEE*, 2003, 23(4): 81-85.
- [34] 毛雪飞. 金属管道涡流电磁场的解析解及其在无损检测中的应用 [D]. 北京: 北京航空航天大学, 2014.
- [35] Mao Xuefei, Lei Yinzha. Analytical solutions to eddy current field excited by a probe coil near a conductive pipe [J]. *NDT & E International*, 2013, 54: 69-74.
- [36] Burke S K, Ditchburn R J, Theodoulidis T P. Impedance of curved rectangular spiral coils around a conductive cylinder [J]. *Journal of Applied Physics*, 2008, 104: 014912.
- [37] 毛雪飞, 雷银照. 金属管道外放置式偏心弯曲矩形线圈涡流场的解析解 [J]. *电工技术学报*, 2012, 27(9): 153-159.
- Mao Xuefei, Lei Yinzha. Analytical solutions for the eddy current field due to an air-cored eccentric curved rectangular probe coil on the outside of a metal pipe [J]. *Transactions of China Electrotechnical Society*, 2012, 27(9): 153-159.
- [38] Burke S K, Theodoulidis T P. Impedance of a horizontal coil in a borehole: a model for eddy-current borehole probes [J]. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 2004, 37(3): 485-494.
- [39] Chen Xingle, Lei Yinzha. Electrical conductivity measurement of ferromagnetic metallic materials using pulsed eddy current method [J]. *NDT & E International*, 2015, 75: 33-38.
- [40] Mao Xuefei, Lei Yinzha. Thickness measurement of metal pipe using swept-frequency eddy current testing [J]. *NDT&E International*, 2016, 78: 10-19.
- [41] 陈兴乐, 雷银照. 一种测量铁磁构件壁厚相对变化量的脉冲涡流检测方法: 中国, 201410617338.1 [P]. 2014-11-06.
- [42] 雷银照, 陈兴乐. 一种基于带铁芯线圈探头的脉冲涡流电磁无损检测方法: 中国, 201410386784.6 [P]. 2014-08-07.
- [43] 後藤憲一, 山崎修一郎. 詳解電磁気学演習 [M]. 東京: 共立出版, 1970.
- [44] 林为干. 微波理论与技术 [M]. 北京: 科学出版社, 1979.
- [45] Tegopoulos J A, Kriezis E E. Eddy currents in linear conducting media [M]. Amsterdam: Elsevier, 1985.
- [46] Pikulin V P, Pohozaev S I. Equations in mathematical physics [M]. Basel: Birkhauser Verlag, 2001.
- [47] 雷银照. 电磁场 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2008.
- [48] Theodoulidis T P, Kriezis E E. Eddy current canonical problems (with applications to nondestructive evaluation) [M]. Forsyth, GA, USA: Tech Science Press, 2006.
- [49] 林为干, 符果行, 邬琳若, 等. 电磁场理论 (修订本) [M]. 北京: 人民邮电出版社, 1996.
- [50] Kaufman A A, Keller G V. Frequency and transient soundings [M]. Amsterdam: Elsevier Science Publishes B. V., 1983.
- [51] Nabighian M N. Electromagnetic methods in applied geophysics—theory (Volume 1) [M]. Tulsa, OK, USA: Society of Exploration Geophysicists, 1988.

#### 作者简介

雷银照 男, 1956年生, 工学博士, 教授, 研究方向为电磁场理论及其应用、电磁无损检测方法与技术、中国电气史。

E-mail: leiyinzha@buaa.edu.cn (通信作者)