

基础知识介绍：如何计算 $\sum_{i=1}^n i^k (k \in N_+)$

以 $k = 2$ 为例，注意到：

$$i^3 - (i-1)^3 = 3i^2 - 3i + 1$$

对 i 从1到 n 求和，有：

$$\sum_{i=1}^n [i^3 - (i-1)^3] = 3 \sum_{i=1}^n i^2 - 3 \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n 1$$

计算，得：

$$n^3 = 3 \sum_{i=1}^n i^2 - \frac{3n(n+1)}{2} + n$$

移项，化简得：

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

同理，可计算 $k = 3$ 的情况：

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\sum_{i=1}^n i \right)^2$$

具体计算留给大家自己来完成。