普通高等教育“十一五”国家级规划教材

工程力学习题解答

吴 莹　王元勋　杨新华　编

高等教育出版社

HIGHER EDUCATION PRESS

内 容 提 要

本解答是教育部“普通高等教育‘十一五’国家级重点教材”《工程力学》（陈传尧教授主编）（高等教育出版社出版）的全书习题解答。可作为高等学校、高职高专及成人教育院校工程力学课程的教学参考书，也可供工程技术人员和报考研究生者使用参考。

前　言

华中科技大学陈传尧教授编写《工程力学》教材已试用三年，历年来总有不少师生和其他读者向我们索取教材的习题解答。经高等教育出版社同意，华中科技大学土木工程与力学学院工程力学教研室吴莹副教授、王元勋教授、杨新华教授合作编写了本题解，以谢读者。

本书编写力求概念准确，叙述简明，解题步骤清晰，启发思维。宥于水平所限，书中疏漏与不足之处难免，敬请读者批评指正。

衷心感谢为这本教材的编写、试用、出版提供支持和方便的所有同志们。

编者

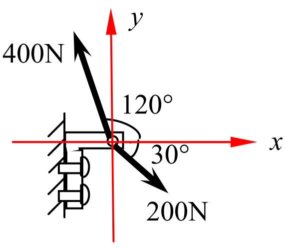
2008 年 12 月于华中科技大学

工程力学习题解答

目　　　　录

第二章　刚体静力学基本概念与理论

2-1　求图中作用在托架上的合力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}$。



习题 2-1 图

解：F_x=200cos30°　−400sin30°　=−26.8(N)

F_y=400cos30°　−200sin30°　=−246.4(N)

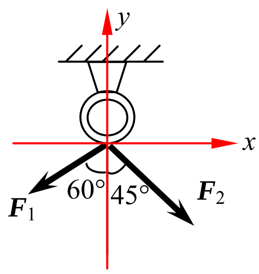
$$F_R = \sqrt{F_x^{\ 2} + F_y^{\ 2}} = \sqrt{(-26.8)^2 + (246.4)^2}$$

$$= 247.9(\mathrm{N})$$

$$tgx = \left|\frac{F_y}{F_x}\right| = 9.194$$

x=83.8°，根据 F_x、F_y 的正负判断合力 F_R 在第 II 象限。

2-2　已知 F_1=7kN，F_2=5kN, 求图中作用在耳环上的合力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}$。



习题 2-2 图

解：$F_x = F_1 \sin 60^\circ + F_2 \sin 45^\circ = -2.53(\mathrm{kN})$

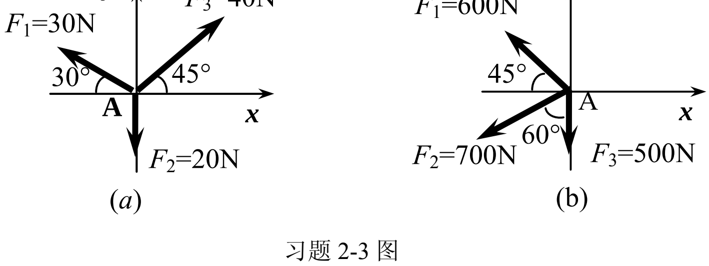
$$F_y = -F_1 \cos 60^\circ - F_2 \cos 45^\circ = -7.04(\mathrm{kN})$$

$$F_R = \sqrt{F_x^{\ 2} + F_y^{\ 2}} = 7.48(\mathrm{kN})$$

$$\mathrm{tg}x = \left|\frac{F_y}{F_x}\right| = 2.783$$

x=70.2°，根据 F_x、F_y 的正负判断合和在第III象限。

2-3　求图中汇交力系的合力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}$。



习题 2-3 图

解：（a）　$F_x = F_3 \cos 45^\circ - F_1 \cos 30^\circ = 2.31(\mathrm{N})$

$$F_y = F_1 \sin 30^\circ + F_3 \sin 45^\circ = -23.39(\text{N})$$

$$F_R = \sqrt{F_x^{\ 2} + F_y^{\ 2}} = 23.5(\text{N})$$

$$\text{tg}x = \left|\frac{F_y}{F_x}\right| = 10.078$$

x =84.33°，根据 F_x、F_y 的正负，判断合力在 I 象限。

（b） $$F_x = -F_1 \sin 45^\circ - F_2 \sin 60^\circ = -1030.5(\text{N})$$

$$F_y = F_1 \cos 45^\circ - F_2 \cos 60^\circ - F_3 = -425.7(\text{N})$$

$$F_R = \sqrt{F_x^{\ 2} + F_y^{\ 2}} = 1115(\text{N})$$

$$\text{tg}x = \left|\frac{F_y}{F_x}\right| = 0.413$$

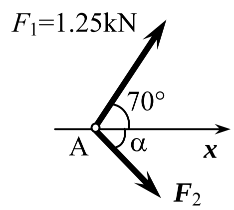
x =22.5°，根据 F_x、F_y 的正负判断合力在第Ⅲ象限。

2-4 求图中力 $\boldsymbol{F}_2$ 的大小和其方向角α。使 *a*)合力 F_R=1.5kN, 方向沿 *x* 轴。b)合力为零。

解：a) $$F_x = F_2 \cos\alpha + F_1 \cos 70^\circ = F_R = 1.5$$

$$F_y = F_1 \cos 70^\circ - F_2 \cos\alpha = 0$$

联立求解得：$F_2 = 1.59\,\text{kN}$，$\alpha = 47.6^\circ$



习题 2-4 图

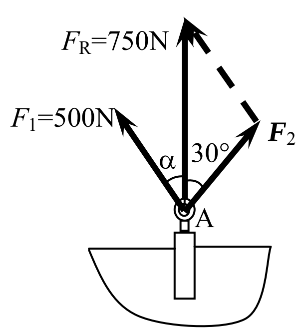
b) $$Fx = F_2 \cos\alpha + F_1 \cos 70^\circ = 0$$

$$F_y = F_1 \sin 70^\circ - F_2 \sin\alpha = 0$$

联立求解得：$F_2 = 1.25\,\text{kN}$，$\alpha = 110^\circ$

2-5 二力作用如图，F_1=500N。为提起木桩，欲使垂直向上的合力为 F_R=750N，且 $\boldsymbol{F}_2$ 力尽量小，试求力 $\boldsymbol{F}_2$ 的大小和 α 角。

解：在图示力三角形中，根据正弦定理



习题 2-5 图

$$\frac{F_R}{\sin(180^\circ - 30^\circ - \alpha)} = \frac{F_1}{\sin 30^\circ} \Rightarrow$$

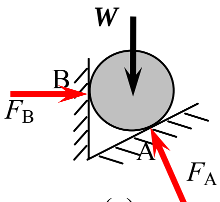
$$\sin(30^\circ + \alpha) = 0.75$$

$$\alpha = 18.6^\circ$$

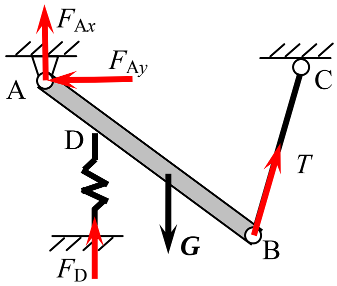
$$\frac{F_2}{\sin\alpha} = \frac{F_1}{\sin 60^\circ}$$

$$F_2 = 318.9(\mathrm{N})$$

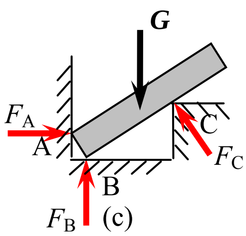
2-6 画出图中各物体的受力图。



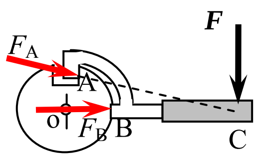
(a)



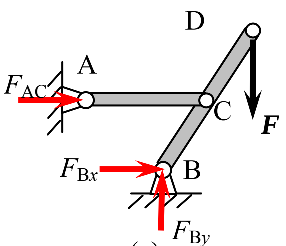
(b)



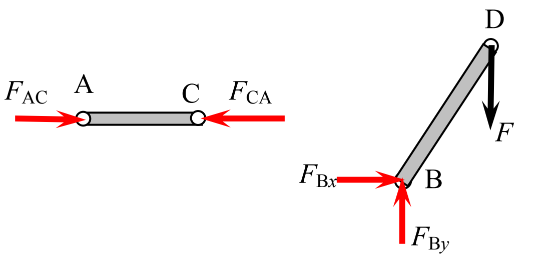
(c)

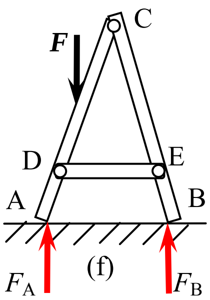


(d)

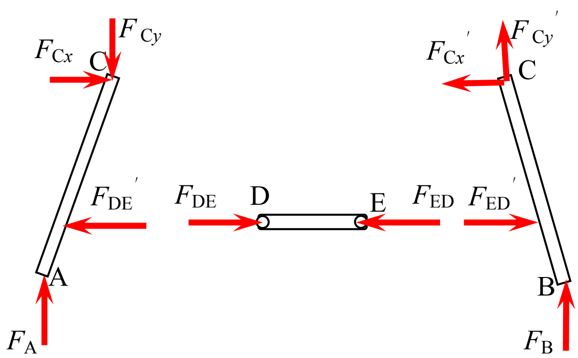


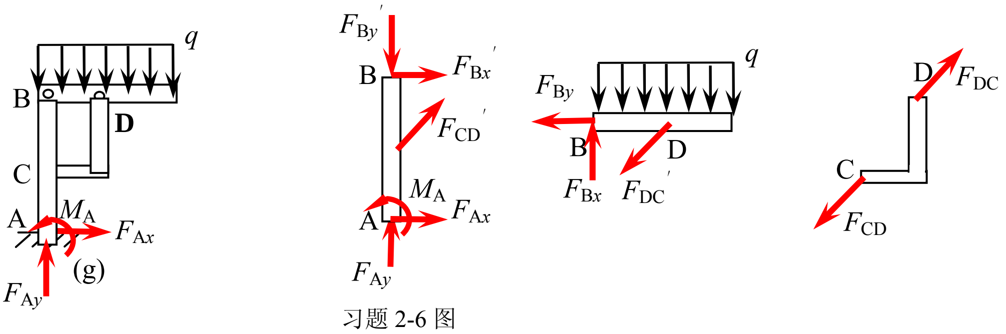
(e)





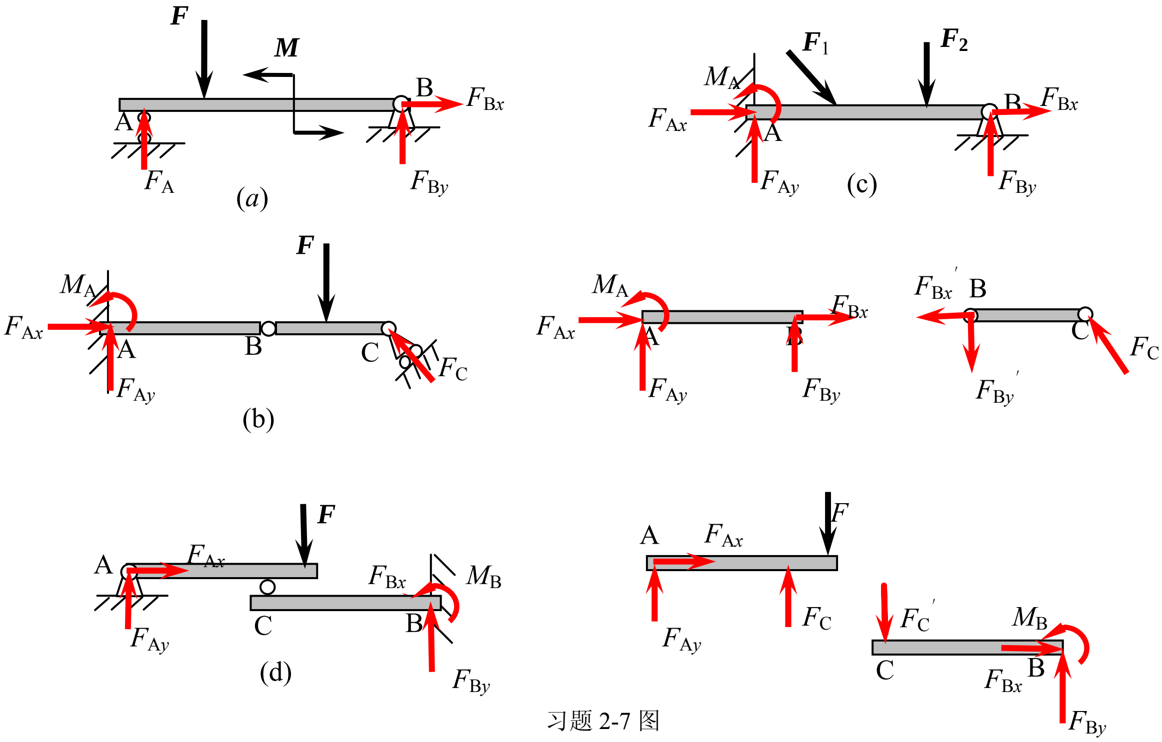
(f)





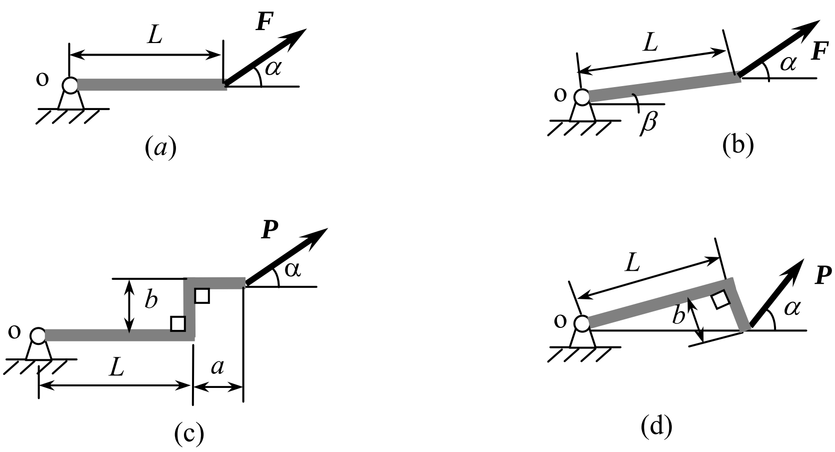
习题 2-6 图

2-7 画出图中各物体的受力图。



习题 2-7 图

2-8 试计算图中各种情况下 **F** 力对 o 点之矩。



习题 2-8 图

解：(a)　$F_{\mathrm{O}} = F \cdot \sin\alpha \cdot L$

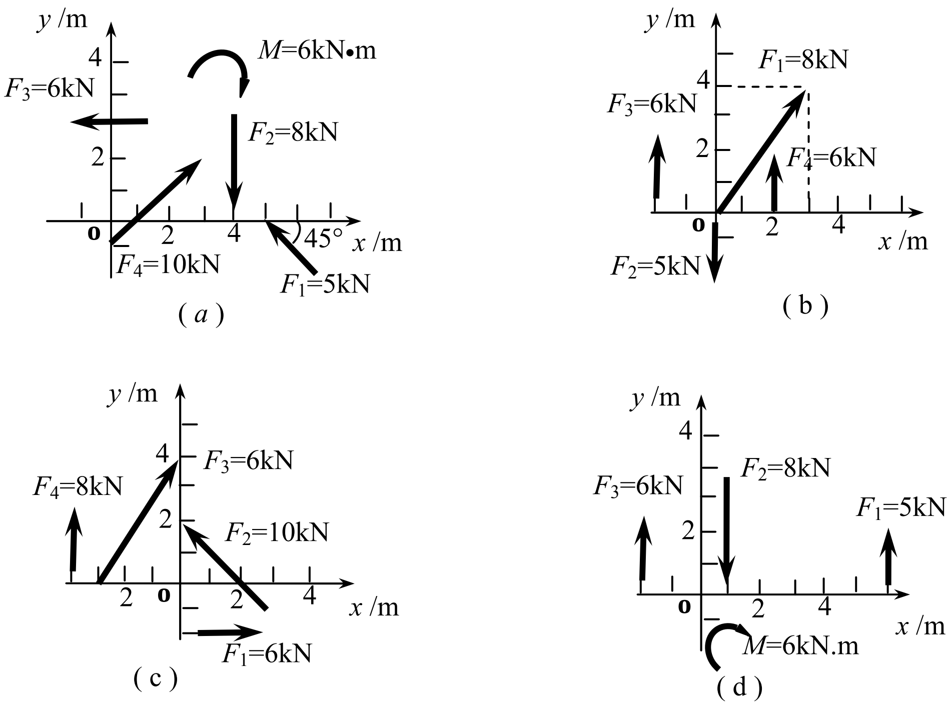
(b)　$F_{\mathrm{O}} = F \cdot \sin\alpha L$

(c)

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{O}} &= -F\cos\alpha \cdot b + F \cdot \sin\alpha(L+a) \\ &= F\sin\alpha(L+a) - F\cos\alpha \cdot b \end{aligned}$$

(d)　$F_{\mathrm{O}} = F \cdot \sqrt{L^2 + b^2} \cdot \sin\alpha$

2-9 求图中力系的合力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}$ 及其作用位置。



习题 2-9 图

解：(a)　将力向 O 点简化得

$$F_x = -F_1\cos 45^\circ - F_3 + F_4\cos 45^\circ = -2.47(\mathrm{kN})$$

$$F_y = F_1\sin 45^\circ + F_4\sin 45^\circ - F_2 = 2.61(\mathrm{kN})$$

$$F_R = \sqrt{F_x^{\ 2} + F_y^{\ 2}} = 3.59(\mathrm{kN})$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \left|\frac{F_y}{F_x}\right| = 1.057 \qquad \alpha = 46.59^\circ$$

主矢在第Ⅱ象限。

$$M_R = F_{1y} \times 5 - F_2 \times 4 + F_3 \times 3 + F_{4x} \times 1 - M = 4.75(\mathrm{kN \cdot m})$$

将主矢向右平移 h

$$h=\left|\frac{M_R}{F_R}\right|=1.32(\mathrm{m})$$

合力与主矢平行，距主矢 1.32m。

(b) 1） 将力向 O 点简化，得

$$F_y=6+6+8\times\frac{4}{5}-5=13.4(\mathrm{kN})$$

$$F_x=8\times\frac{3}{5}=4.8(\mathrm{kN})$$

$$F_R=\sqrt{F_x{}^2+F_y{}^2}=14.2(\mathrm{kN})$$

$$M_R=0$$

$$\mathrm{tg}\alpha=\left|\frac{F_y}{F_x}\right|=2.79$$

$$\alpha=70.28^\circ$$

2）平行移动力 F_R。移动距离

$$h=\frac{M_R}{F_R}=0$$

∴合力过 O 点，在 I 象限。

(c) 将力向 O 点简化，得

$$F_x=F_1-F_2\cos 45^\circ+F_3\times\frac{3}{5}=2.53(\mathrm{kN})$$

$$F_y=F_2\sin 45^\circ+F_3\times\frac{4}{5}+F_4=19.87(\mathrm{kN})$$

$$F_R=\sqrt{F_x{}^2+F_y{}^2}=20.03(\mathrm{kN})$$

$$\mathrm{tg}\alpha=\left|\frac{F_y}{F_x}\right|=7.85 \qquad \alpha=82.75^\circ$$

$$\begin{aligned}M_R&=6\times2+F_{2y}\times2-F_{3y}\times3-F_4\times4\\&=-20.26(\mathrm{kN\cdot m})\end{aligned}$$

将主矢平移 h

$$h=\frac{M_R}{F_R}=1.01(\mathrm{m})$$

合力为 20.03kN， 距 O 点 1.01m 与主矢平行。

(d) 1) 将力向 O 点简化，得

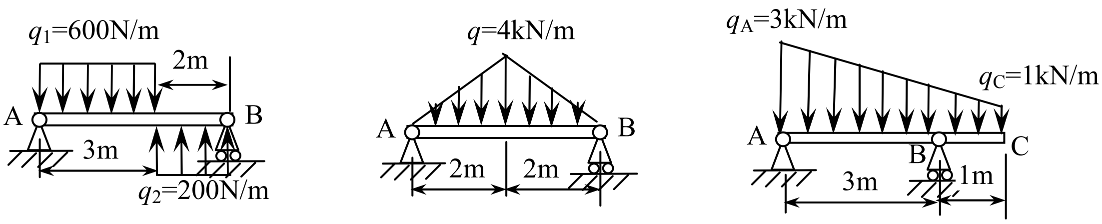
$$F_y = 6 + 5 - 8 = 3(\text{kN})$$
$$F_x = 0$$
$$F_R = \sqrt{{F_y}^2 + {F_x}^2} = 3(\text{kN})$$
$$\begin{aligned} M_R &= 5\times 6 - 8\times 1 - 6\times 2 - 6 \\ &= 4(\text{kN}\cdot\text{m}) \end{aligned}$$

2）平行移动主矢 F_R

$$h = \frac{4}{3} = 1.33$$

合力平行 y 轴，距 O 点 $\dfrac{4}{3}$ m

2-10 求图中作用在梁上的分布载荷的合力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}$ 及其作用位置。



(*a*)　　　　(b)　　　　(c)

习题 2-10 图

解：(a) 将力简化到 A 点，主矢为

$$F_R = q_1 \times 3 - q_2 \times 2 = 1400(\text{N})$$
$$\begin{aligned} M_R &= -q_1 \times 3 \times \frac{3}{2} + q_2 \times 2 \times 4 \\ &= 1100(\text{N}\cdot\text{m}) \end{aligned}$$

合力距 A 点

$$h = \frac{M_R}{F_R} = 0.79(\text{m})$$

合力作用在距 A 点 0.79m 的地方，方向向下。

(b) 将力简化到梁的中点

$$F_R = 2\times\frac{1}{2}\times 2\times 4 = 8(\mathrm{kN})$$

$M_R = 0$　　　　　合力距中点h=0(m)

∴合力作用在梁中点，方向向下。

(c)　合力大小为梯形的面积

$$F_R = \frac{1}{2}(q_{\mathrm{A}} + q_{\mathrm{C}})\times \mathrm{AC}$$
$$= 8(\mathrm{kN})$$

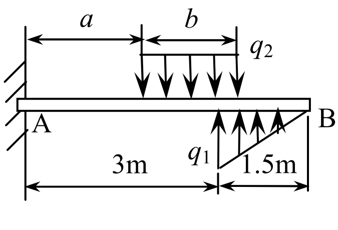
合力作用在梯形形心距 A 点为 h，根据合力矩定理得，

$$F_{Rh} = 2\times\frac{8}{3} + 6\times\frac{4}{3} = 13.33$$
$$h = 1.67(\mathrm{m})$$

合力大小 8kN ，方向向下，距 A 端 1.67m。

2-11 图示悬臂梁 AB 上作用着分布载荷，q_1=400N/m，q_2=900N/m, 若欲使作用在梁上的合力为零，求尺寸 a、b 的大小。

解：



习题 2-11 图

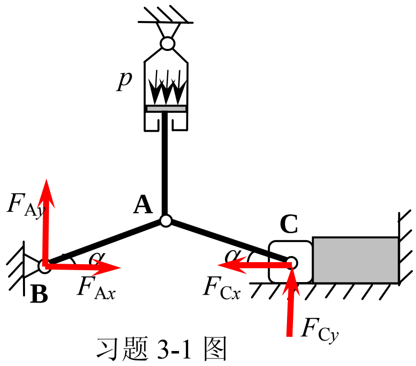
$$F_R = \frac{1}{2}\times 1.5\times q_1 - q_2\times b$$
$$= 300 - 900b = 0$$
$$b = \frac{1}{3}$$

利用合力矩定理,

$$M_{\mathrm{A}}(F_R) = 300\times(3+0.5)$$
$$-900b(a + \frac{1}{2}b) = 0$$
$$\therefore a = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$$

第三章 静力平衡问题

3-1 图示液压夹紧装置中，油缸活塞直径 D=120mm，压力 p=6N/mm^2，若 α=30°, 求工件 D 所受到的夹紧力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{D}}$。



习题 3-1 图

解：研究整体，画受力图

$$\sum F_x = 0 \qquad F_{\mathrm{B}x} - F_{\mathrm{C}x} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \qquad F_{\mathrm{B}y} + F_{\mathrm{C}y} - p(\frac{\pi}{4}D^2) = 0$$

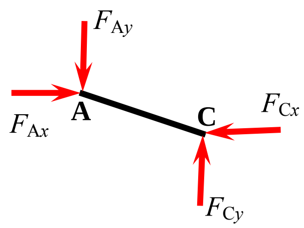
$$\sum M_{\mathrm{B}} = 0 \quad F_{\mathrm{C}y} \bullet 2\mathrm{AC}\cos\alpha - p(\frac{\pi}{4}D^2)\mathrm{AC}\cos\alpha = 0$$

$$\text{求解得}: F_{\mathrm{C}y} = 33.91(\mathrm{kN})$$

$$F_{\mathrm{C}x} = F_{\mathrm{B}x}$$

$$F_{\mathrm{B}y} = 33.91(\mathrm{kN})$$

再取AC杆为研究对象,受力如图

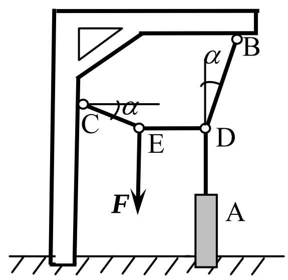


$$\sum M_{\mathrm{A}} = 0 \qquad F_{\mathrm{C}y} \bullet \mathrm{AC}\cos\alpha - F_{\mathrm{C}x} = 0$$

$$F_{\mathrm{C}x} = 58.74(\mathrm{kN})$$

$$\text{工件D受到了夹紧力} F_{\mathrm{D}} = F_{\mathrm{C}x} = 58.74\mathrm{kN}$$

3-2 图中为利用绳索拔桩的简易方法。若施加力 F=300N，α=0.1 弧度，求拔桩力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{AD}}$。（提示：$\alpha$ 较小时，有 tgα≈α）。



习题 3-2 图

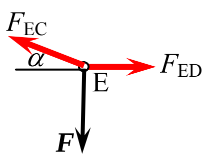
解：取节点 E 受力如图，平衡条件

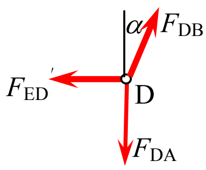
$$\sum F_y = 0 \qquad F_{\mathrm{EC}}.\sin\alpha = F$$

$$\sum F_x = 0 \qquad F_{\mathrm{EC}}.\cos\alpha = F_{\mathrm{ED}}$$

$$\text{求解得}: \frac{F}{F_{\mathrm{ED}}} = \mathrm{tg}\alpha \qquad F_{\mathrm{ED}} = 3000\mathrm{N}$$

取节点D





$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{\mathrm{DB}} \bullet \sin\alpha = F_{\mathrm{ED}}$$

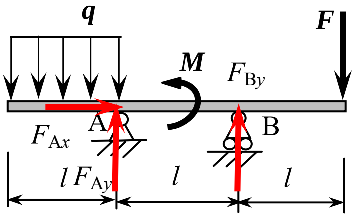
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{\mathrm{DB}} \bullet \cos\alpha = F_{\mathrm{DA}}$$

$$\text{求解得}: \frac{F_{\mathrm{ED}}}{F_{\mathrm{DA}}} = \mathrm{tg}\alpha$$

$$F_{\mathrm{DA}} = 30000\mathrm{N} = 30\mathrm{kN}$$

3-3 已知 q=20kN/m，F=20kN，M=16kN•m，l=0.8m，求梁 A、B 处的约束力。

解：受力分析如图所示，平衡方程

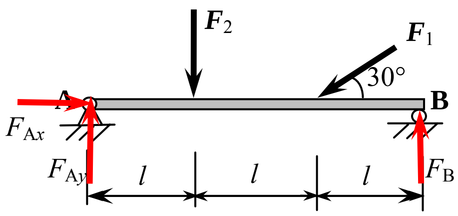


习题 3-3 图

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{Ax} = 0$$
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{Ay} + F_{By} - F - ql = 0$$
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow$$
$$M + F_{By} \times l - F \times 21 + ql \times \frac{1}{2} = 0$$
$$\text{求解得}: F_{By} = 12(\text{kN})$$
$$F_{Ay} = 24(\text{kN})$$
$$\text{A处的约束力} F_{By} = 0 \qquad F_{Ay} = 24(\text{kN})$$
$$\text{B处的约束力} F_{By} = 12(\text{kN})$$

3-4 若 F_2=2F_1，求图示梁 A、B 处的约束力。

解：研究整体，受力图如图所示。平衡条件

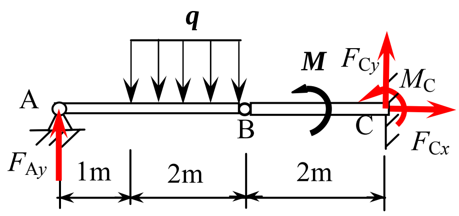


习题 3-4 图

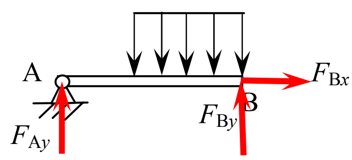
$$\sum F_x = 0 \qquad F_{Ax} - F_1 \cos 30^\circ = 0$$
$$\sum F_y = o \qquad F_{Ay} + F_B - F_2 - F_1 \sin 30^\circ = 0$$
$$\sum M_A = 0 \qquad F_2.l + F_{1y}.2l - F_B.3l = 0$$
求解得：
$$F_{Ax} = \frac{\sqrt{3}}{2} F_1$$
$$F_{Ay} = \frac{3}{2} F_1$$
$$F_B = F_1$$

3-5 图示梁 AB 与 BC 在 B 处用中间铰连接，受分布载荷 q=15kN/m 和集中力偶 M=20kN•m 作用，求各处约束力。

解：1）分析整体，受力如图所示，平衡条件



习题 3-5 图



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{Cx} = 0 \qquad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{Ay} + F_{Cy} - 28 = 0 \qquad (2)$$

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow -F_{Ay} \times 5 + q \times 2 \times 3 + M + M_C = 0 \qquad (3)$$

2)取AB为隔离体,受力如图示平衡条件:

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow F_{Ay} \times 3 = q \times 2 \times 1$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{Bx} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{By} = 20(\text{kN})$$

代入(2)(3)得:

$F_{Cy} = 20(\text{kN}) \qquad M_C = -60(\text{kN})$

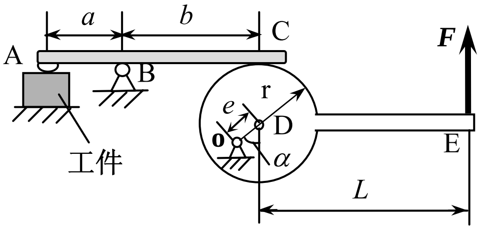
$\therefore$ A处的约束力 $F_{Ay} = 10(\text{kN})$

B处的约束力 $F_{Bx} = 0 \quad F_{By} = 20(\text{kN})$

C处的约束力 $F_{Cx} = 0 \quad F_{Cy} = 20(\text{kN})$

$M_C = -50(\text{kN} \cdot \text{m})$

3-6 偏心夹紧装置如图，利用手柄绕 O 点转动夹紧工件。手柄 DE 和压杆 AC 处于水平位置时，α=30°，偏心距 e=15mm，r=40mm，a=120mm，b=60mm，求在力 $\boldsymbol{F}$ 作用下，工件受到的夹紧力。



习题 3-6 图

解：（1）分析手柄，受力如图，平衡方程：

$$\sum M_O = 0$$

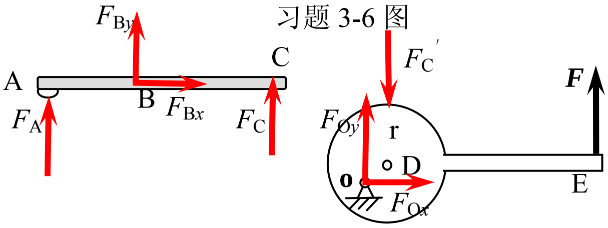
$$F(L + e\sin\alpha) = F_C.e\sin\alpha$$

$$F_C = 14.33F$$

(2)分析工件,受力如图

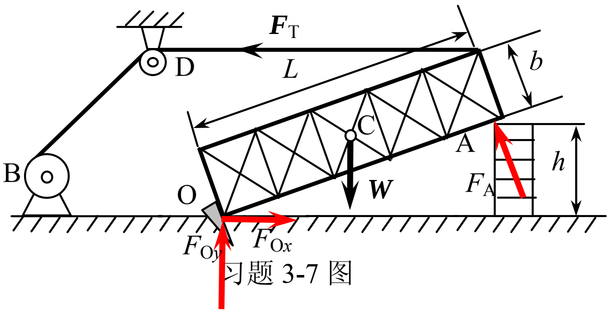
$$\sum M_B = 0 \Rightarrow F_A \times a = F_C \times b$$

$$F_A = 2F_C = 28.66F$$



工件受到的夹紧力为 28.66F。

3-7 塔架 L=10m，b=1.2m，重 W=200kN。为将其竖起，先在 O 端设基桩如图，再将 A 端垫高 h，然后用卷扬机起吊。若钢丝绳在图示位置时水平段最大拉力为 F_T=360kN, 求能吊起塔架的最小高度 h 及此时 O 处的反力。



习题 3-7 图

解：分析塔架当拉力为 F_T 最大时，塔架与 A 点的接触力为零。平稳条件：

$$\sum F_x = 0 \quad F_{Ox} - F_T = 0 \qquad (1)$$
$$\sum F_y = 0 \quad F_{Oy} - W = 0 \qquad (2)$$
$$\sum M_O = 0 \quad W \cdot x_1 = F_T(h + y_1) \qquad (3)$$
由此求得: $F_{Ox} = F_T = 360\text{kN} \qquad F_{Oy} = W = 200\text{kN}$

由(3)式 $x_1 = 1.8(h + y_1)$

$$x_1 = \frac{1}{2}\sqrt{L^2 - h^2} \qquad y_1 = b \cdot \frac{\sqrt{L^2 - h^2}}{L}$$

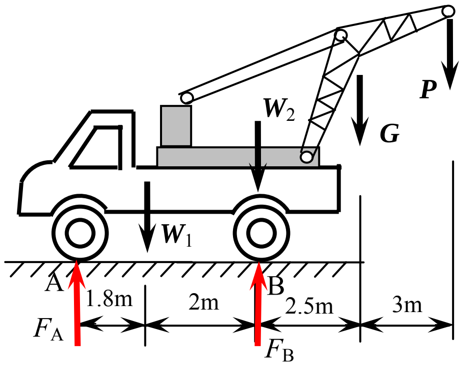
求解得 $h = 1.56(\text{m})$

$\therefore$ o处反力 $F_{Ox} = F_T = 360\text{kN}$，$F_{Oy} = 200\text{kN}$

能吊起塔架的最小高度 h=1.56m

3-8 汽车吊如图。车重 W_1=26kN，起吊装置重 W_2=31kN，作用线通过 B 点，起重臂重 G=4.5kN，求最大起重量 $\boldsymbol{P}_{max}$。

（提示：起重量大到临界状态时，A 处将脱离接触，约束力为零。）



习题 3-8 图

解：分析汽车吊的整体平衡受力如图，研究 P 最大的临界状态，A 处的约束力 F_A=0

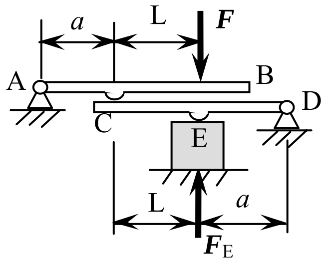
平衡条件: $\sum M_B = 0$

即 $W_1 \times 2 - G \times 2.5 - P \times 5.5 = 0$

求解得: $P = 7.41(\text{kN})$

该汽车吊所能起吊的最大重量为 7.41kN。

3-9 求图示夹紧装置中工件受到的夹紧力 $\boldsymbol{F}_E$。

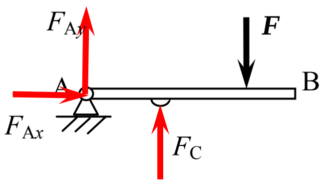


习题 3-9 图

解：1）分析 AB 受力图如图所示，平衡条件：

$$F_{Ax} = 0$$
$$F_{Ax} + F_C - F = 0$$
$$F_C \cdot a - F \cdot (a + L) = 0$$

求得: $F_C = F(1 + \dfrac{L}{a})$



2）分析 CD 杆，受力图如图所示，平衡条件：

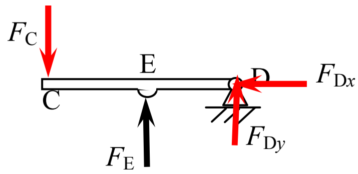
$$\sum M_{\mathrm{D}}=0 \qquad F_{\mathrm{C}}\cdot(a+L)=F_{\mathrm{E}}\cdot a$$

$$F_{\mathrm{E}}=F_{\mathrm{C}}\cdot(1+\frac{L}{a})$$

将F_{C}表达式代入得

$$F_{\mathrm{E}}=F(1+\frac{L}{a})^2$$

F_E为工件受到的夹紧力。



3-10 重 **W** 的物体置于斜面上，摩擦系数为 f， 受一与斜面平行的力 **F** 作用。 已知摩擦角 $\rho<\alpha$，求物体在斜面上保持平衡时，**F** 的最大值和最小值。

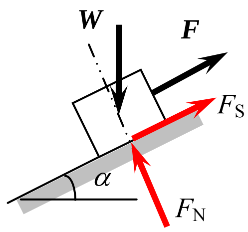
解：（1）求 F 的最大值，此时物体有上滑的趋势，受力图如下，平衡条件：

$$\sum F_{\mathrm{N}}=0 \qquad F_{\mathrm{N}}-W\cos\alpha=0$$

$$\sum F_{\mathrm{S}}=0 \qquad F_{\max}-F_{\mathrm{S}}-W\sin\alpha=0$$

$$F_{\mathrm{S}}=f\cdot F_{\mathrm{N}}$$

$$求解得:F_{\max}=W\sin\alpha+f\cdot W\cos\alpha$$



习题 3-10 图

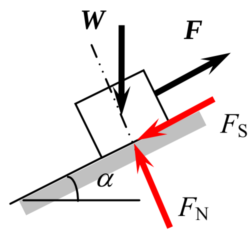
（2）求 F 的最小值，物体有下滑趋势，物体受力如图，平衡条件：

$$\sum F_{\mathrm{N}}=0 \qquad F_{\mathrm{N}}-\cos\alpha=0$$

$$\sum F_{\mathrm{s}}=0 \qquad F_{\min}+F_{\mathrm{S}}-W\sin\alpha=0$$

$$F_{\mathrm{S}}=f\cdot F_{\mathrm{N}}$$

$$求得:F_{\min}=W\sin\alpha-fW\cos\alpha$$



3-11 梯子 AB 长 L，重 W=200N，靠在光滑墙上，与地面间的摩擦系数为 f=0.25。要保证重 P=650N 的人爬至顶端 A 处不至滑倒，求最小角度 α。

解：分析梯子，受力如图所示梯子不滑倒，则梯子处于平衡状态，

平衡方程：

$$\sum F_x=0 \qquad F_{\mathrm{A}}=F_{\mathrm{S}}$$

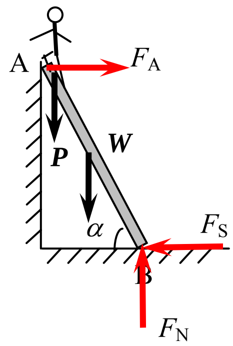
$$\sum F_y=0 \qquad P+W=F_{\mathrm{B}} \qquad F_B=850(\mathrm{N})$$

$$\sum M_{\mathrm{B}}=0 \qquad W\cdot\frac{1}{2}\cos\alpha-F_{\mathrm{A}}\cdot L\sin\alpha=0$$

$$F_{\mathrm{S}}=f\cdot F_{\mathrm{B}}=212.5(\mathrm{N})$$

$$联主求解得: \qquad \alpha=74.18$$

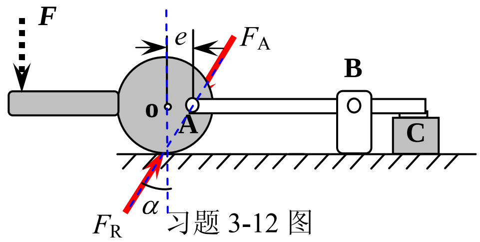
即梯子不到滑的最小高度 74.18°



习题 3-11 图

3-12 偏心夹具如图。偏心轮 O 直径为 D，与工作台面间摩擦系数为 f，施加 $\boldsymbol{F}$ 力后可夹紧工件，此时 OA 处于水平位置。欲使 $\boldsymbol{F}$ 力除去后，偏心轮不会自行松脱，试利用自锁原理确定偏心尺寸 e。

解：分析偏心轮 偏心轮在与地面接触处受到法向压力和摩擦力作用，铰 A 处受到约束力作用，偏心轮平衡，则这两处的合力必然为平衡力系，如图，自锁条件为：



习题 3-12 图

$$\alpha \le \rho \qquad \mathrm{tg}\rho = f$$

$$\mathrm{tg}\alpha \le \mathrm{tg}\rho$$

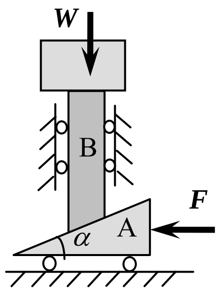
在ΔOAC中 $\mathrm{tg}\alpha = \mathrm{OA}/\mathrm{OC} = e/(\frac{d}{2}) \le f$

$$\therefore \quad e \le f \cdot \frac{d}{2}$$

3-13 尖劈顶重装置如图。斜面间摩擦系数为 f=tgρ。试确定：

a)不使重物 $\boldsymbol{W}$ 下滑的最小 F 值。

b)能升起重物 $\boldsymbol{W}$ 的最小 F 值。



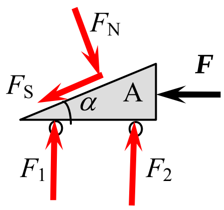
习题 3-13 图

解：整体受力分析如图,

$$F_1 + F_2 = W$$

分析小车:

1）不使重物 W 下滑，摩擦力指向左下方，平衡条件得：



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_N \sin\alpha - F_S \cos - F = 0$$

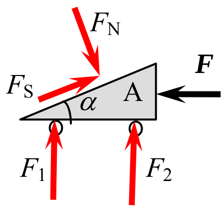
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_1 + N_2 - F_N \cos\alpha - F_S \sin\alpha = 0$$

$$F_S = f \cdot F_N$$

求解得：$F_s = \dfrac{F(\sin - f\cos\alpha)}{\cos + \mathrm{tg}\rho\cos\alpha}$

$$= \frac{F(\sin\alpha - \mathrm{tg}\rho\sin\alpha)}{(\cos + \mathrm{tg}\rho\sin\alpha)}$$

2）能使重物升起，摩擦力指向右上，则

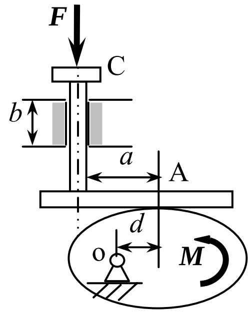


$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_S \cos\alpha + F_N \sin\alpha - F = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_1 + F_2 + F_S \sin\alpha - F_N \cos\alpha = 0$$

求得：$F_S = \dfrac{\sin\alpha f \cos\alpha}{\cos\alpha - f\sin\alpha}$

3-14 凸轮机构如图。凸轮在力偶 $\boldsymbol{M}$ 作用下可绕 O 点转动。推杆可在滑道内上下滑动，摩擦系数为 f。假设推杆与凸轮在 A 点为光滑接触，为保证滑道不卡住推杆，试设计滑道的尺寸 b。



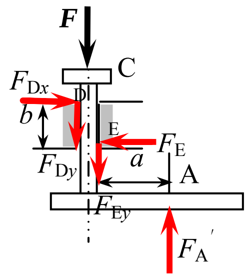
习题 3-14 图

解：分析推杆将要滑动的临界状态，分析凸轮，

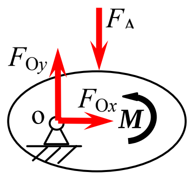
$$\sum M_{\mathrm{O}}=0 \Rightarrow F_{\mathrm{A}}\cdot d=M \qquad F_{\mathrm{A}}=\frac{M}{d}$$

分析推杆：

（1）推杆有上滑趋势，左上右下两点与滑道接触受力分析如图，由平衡条件得：



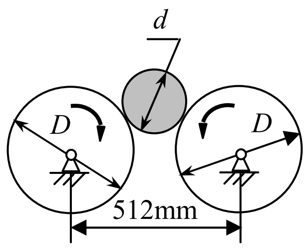
$$\sum F_x=0 \Rightarrow F_{\mathrm{D}x}=F_{\mathrm{E}x}$$
$$\sum F_y=0 \Rightarrow F_{\mathrm{D}y}+F_{\mathrm{E}y}+F=F_{\mathrm{A}}$$
$$\sum M_A=0 \Rightarrow F\cdot a-F_{\mathrm{D}x}\cdot b+F_{\mathrm{D}y}\cdot a+F_{\mathrm{E}y}\cdot a=0$$
$$F_{\mathrm{D}x}=f\cdot F_{\mathrm{D}y} \qquad F_{\mathrm{E}x}=f\cdot F_{\mathrm{E}y}$$
$$\text{求解得}: b=\frac{2maf}{m-Fd}$$



（2）同理推杆有下滑趋势时不会被卡住，求解得：$b=\dfrac{2maf}{m-Fd}$

$\therefore$ 为保证滑道不卡住 $\qquad b\le\dfrac{2maf}{m-Fd}$

3-15 图示为辊式破碎机简图。轧辊直径 D=500mm, 相对匀速转动以破碎球形物料若物料与轧辊间摩擦系数为 f=0.3, 求能进入轧辊破碎的最大物料直径 d。(物料重量不计)

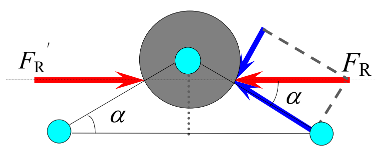


习题 3-15 图

解：分析物料：物料与左轮接触处受法向压力与摩擦力作用，与右轮接触处也同样受到法向压力和摩擦力的作用。物料平衡，两处的全反力 F_{R} 必然大小相等，方向相反，在一条直线上，如图所示。临界状态时：

$$\mathrm{tg}x=f=0.3$$
$$\alpha=16.7^{\circ}$$

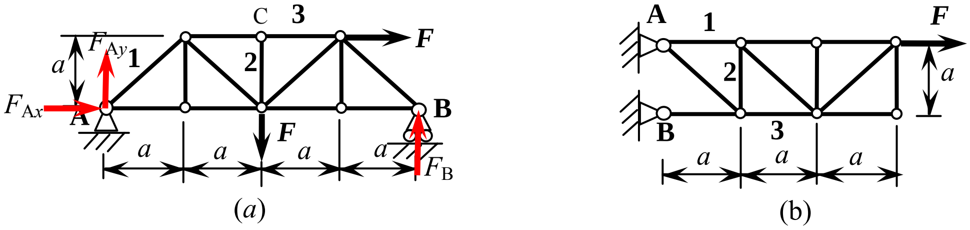
由几何关系：$\cos\alpha=\dfrac{1}{2}/(\dfrac{d}{2}+\dfrac{D}{2})$



求解得：$d\le 34\mathrm{mm}$

轧辊破碎的最大物料直径为 34mm。

3-16 求图示桁架中 1、2、3 杆的内力。



习题 3-16 图

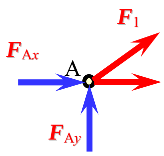
(a) 解：1）求支座反力

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{Ax} + F = 0$$
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{Ay} + F_B - F = 0$$
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow F_B \cdot 4a - F \cdot 2a - F \cdot a = 0$$

求解得：$F_{Ax} = -F \qquad F_{Ay} = \dfrac{1}{4}F$

$$F_B = \frac{3}{4}F$$

2）分析节点 A，受力如图，

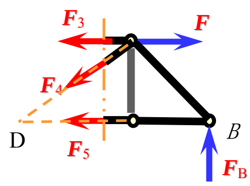


平衡条件：$\sum F_y = 0 \Rightarrow$

$$F_1 \sin 45^\circ + F_{Ay} = 0 \Rightarrow$$
$$F_1 = -\frac{\sqrt{2}}{4}F$$

根据节点 C 平衡条件得 $\Rightarrow F_2 = 0$

3）截面法切开桁架，取隔离体，如图所示，

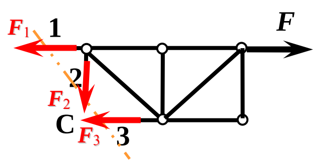


$$\sum M_D = 0 \Rightarrow F_B \cdot 2a + F_3 \cdot a - Fa = 0$$
$$\Rightarrow F_3 = -0.5F$$

杆1, 2, 3的内力为，

$$F_1 = -\frac{\sqrt{2}}{4}F \qquad F_2 = 0 \qquad F_3 = -0.5F$$

（b）解：用截面法载取桁架如图



由平衡条件得：

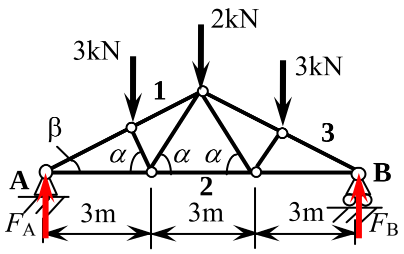
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_1 + F_3 = F$$
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_2 + F = 0$$
$$\sum M_c = 0 \Rightarrow F_1 \cdot a - F \cdot a - F \cdot 2a = 0$$

求解得：$F_1 = 3F$(拉)

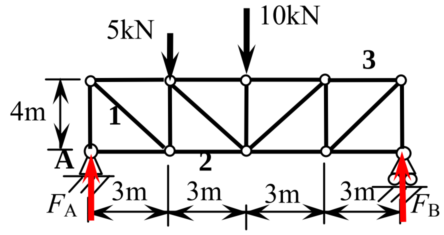
$F_2 = -F$(压)

$F_3 = -2F$(压)

3-17 计算图示桁架中指定杆的内力，请指出杆件受拉还是受压？ (α=60°, β=30°)



(a)



(b)

习题 3-17 图

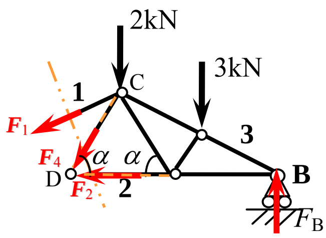
(a) 解：1）求约束反力，

F_A=F_B=4（kN）

2）用截面法求 1、2 杆内力，用假想截面截取桁架如图

由平衡条件得：

$\sum M_C=0$



$$F_B\times4.5-3\times\frac{4.5}{2}-F_2\times1.5\text{tg}\alpha=0$$

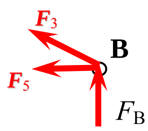
$$F_2=4.33(\text{kN})(\text{拉力})$$

$$\sum M_D=0\Rightarrow$$

$$F_B\times6-3\times3.75-2\times1.5+F_1\times\frac{3}{2}=0$$

$$F_1=-6.5(\text{kN})(\text{压力})$$

3) 求杆 3 内力，研究节点 B，受力如图，由平衡条件得，



$$\sum F_y=0\qquad F_3\cdot\sin\beta+F_B=0$$

$$F_3=-8(\text{kN})(\text{压力})$$

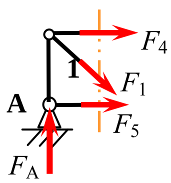
$$\therefore \text{杆}1,2,3\text{内力分别为}$$

$$F_1=-6.5(\text{kN})(\text{压力})$$

$$F_2=4.33(\text{kN})(\text{压力})$$

$$F_3=-8(\text{kN})(\text{压力})$$

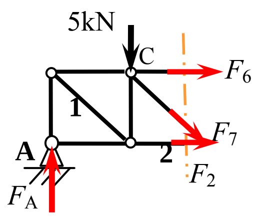
(b) 解：1) 求支座反力，



$$\sum M_A=0\quad F_B\times12-5\times3-10\times6=0\Rightarrow F_B=6.25(\text{kN})$$

$$\sum F_y=0\quad F_A+F_B-5-10=0\Rightarrow F_A=8.75(\text{kN})$$

2) 求 1 杆内力，用截面截取桁架如图，由平衡条件得，



$$\sum F_y=0\Rightarrow F_A-F_1\cos\alpha=0\quad\Rightarrow F_1=10.94(\text{kN})$$

3) 求杆 2 的内力，用截面法截取桁架如图，由平衡条件得，

$\sum M_C = 0 \Rightarrow F_2 \times 4 - F_A \times 3 = 0 \qquad F_2 = 6.56(\mathrm{kN})$

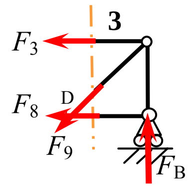
4）求杆3内力，用截面法截取桁架如图，由平衡条件得，

$\sum M_D = 0 \Rightarrow F_B \times 3 - F_3 \times 4 = 0 \qquad F_3 = -4.69(\mathrm{kN})$

$\therefore$ 杆1、2、3的内力分别为，

$F_1 = 10.94(\mathrm{kN})$(拉力) $\qquad F_2 = 6.56(\mathrm{kN})$(拉力)

$F_3 = -4.69(\mathrm{kN})$(压力)



3-18 传动轴如图。AC=CD=DB=200mm，C 轮直径 d_1=100mm， D 轮直径 d_2=50mm，圆柱齿轮压力角α为 20°，已知作用在大齿轮上的力 F_1=2kN，求轴匀速转动时小齿轮传递的力 F_2 及二端轴承的约束力。

解：受力分析如图，由平衡方程得，

$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{Ax} - F_1 \sin\alpha + F_2 \cos\alpha + F_{Bx} = 0$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{Ay} = 0$

$\sum F_z = 0 \Rightarrow F_{Az} + F_1 \cos\alpha - F_2 \sin\alpha + F_{Bz} = 0$

$\sum M_x = 0 \Rightarrow F_1 \cos\cdot \mathrm{AC} - F_2 \sin\alpha \cdot \mathrm{AD} + F_{Bz} \cdot \mathrm{AB}=0$

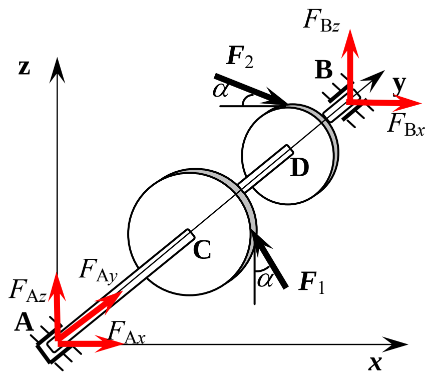
$\sum M_y = 0 \Rightarrow F_1 \cos\alpha \cdot \dfrac{d_1}{2} - F_2 \cos\alpha \cdot \dfrac{d_2}{2} = 0$

$\sum M_z = 0 \Rightarrow F_1 \sin\alpha \cdot \mathrm{AC} - F_2 \cos\alpha \cdot \mathrm{AD} - F_{Bx} \cdot \mathrm{AB} = 0$

求解得：$F_{Ax} = -0.79(\mathrm{kN}) \qquad F_{Ay} = 0$

$F_{Az} = 0.801(\mathrm{kN}) \qquad F_{Bx} = -2.28(\mathrm{kN})$

$F_{Bz} = 0.29(\mathrm{kN}) \qquad F_2 = 4(\mathrm{kN})$



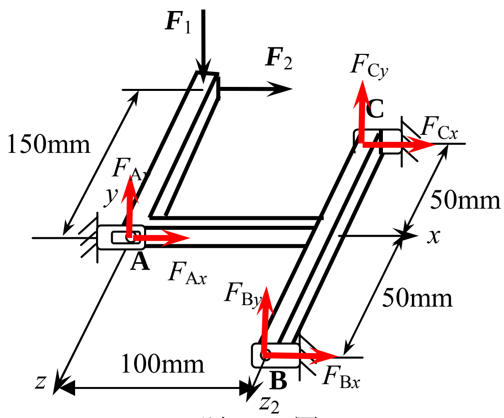
习题 3-18 图

3-19 图中钢架由三个固定销支承在 A、B、C 支座处，受力 F_1=100kN，F_2=50kN 作用，求各处约束力。

解：建立坐标系如图，进行受力分析，画出受力图如图，

z 方向无外荷载，各约束处 z 方向反力为零。

由平衡方程得：



习题 3-19 图

$$\sum F_x = 0 \qquad F_{Ax} + F_{Bx} + F_{Cx} + F_2 = 0$$
$$\sum F_y = 0 \qquad F_{Ay} + F_{By} + F_{Cy} - F_1 = 0$$
$$\sum F_z = 0(\text{自然满足})$$
$$\sum M_x = 0 \qquad F_{By} \times 50 - F_{Cy} \times 50 + F_1 \times 150 = 0$$
$$\sum M_y = 0 \qquad F_{Bx} \times 50 - F_{Cx} \times 50 - F_2 \times 150 = 0$$
$$\sum M_{z2} = 0 \qquad F_{Ay} \times 100 - F_1 \times 100 = 0$$

考虑到三铰装配时，在其中一铰(A)

的x方向留间隙， $\therefore F_{Ax} = 0$

求解得各处的约束反力:

$F_{AX} = 0 \qquad F_{Ay} = 100\text{kN} \qquad F_{Bx} = 10\text{kN} \qquad F_{By} = -150\text{kN}$

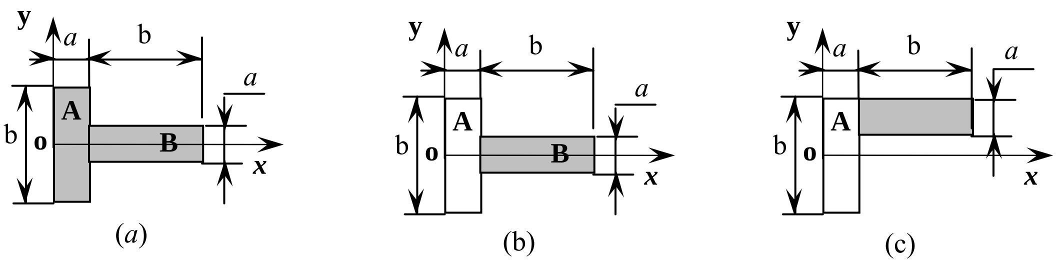
$F_{Cx} = -100\text{kN} \qquad F_{Cy} = 150\text{kN}$

3-20 试确定下述由 AB 二均质部分组成之物体的重心坐标 x_C 和 y_C。

a) 物体关于 x 轴对称，且单位体积的重量$\gamma_A=\gamma_B$。

b) 物体关于 x 轴对称，单位体积的重量$\gamma_A=\gamma_B/2$。

c) 物体无对称轴，单位体积的重量$\gamma_A=\gamma_B/2$。



习题 3-20 图

(a) 解：设物体 A、B 的厚度为 1

$$W_A = ab \times 1 \times \gamma_A \qquad W_B = ab \times \gamma_B \times 1$$
$$W = W_A + W_B = 2ab\gamma_A$$

由合力距定理得，

$$W \cdot x_C = W_A \cdot \frac{a}{2} + W_B(a + \frac{b}{2})$$
$$x_C = \frac{3}{4}a + \frac{b}{4}$$

物体的重心为 $(\frac{3}{4}a + \frac{b}{4}，0)$

(b) 解：

$W_A = ab\gamma_A \qquad W_B = ab\gamma_A$

$W = W_A + W_B = 3ab\gamma_A$

由合力矩定理得，

$$W\,x_C = W_A \cdot \frac{a}{2} + W_B(a + \frac{b}{2})$$

$$x_C = \frac{5a}{6} + \frac{b}{3}$$

物体的重心为$(\frac{5a}{6} + \frac{6}{3},\ 0)$

(c) 解：

$W_A = ab\gamma_A \qquad W_B = ab\gamma_A$

$W = ab\gamma_A + ab\gamma_B = 3ab\gamma_A$

由合力矩定理得，

$$W\,x_C = W_A \cdot \frac{a}{2} + W_B(a + \frac{b}{2})$$

$$x_C = \frac{5a}{6} + \frac{b}{3}$$

将物体转90°如图所示，

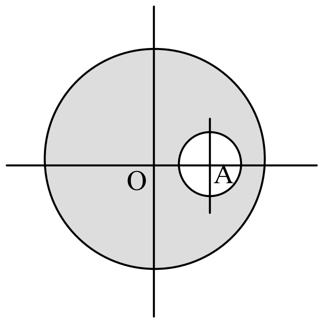
由合力矩定理得，

$$W \cdot y_C = W_A \times 0 + W_B(\frac{b}{2} - \frac{a}{2})$$

$$y_C = \frac{1}{3}(b - a)$$

物体重心为$(\frac{5a}{6} + \frac{b}{3},\quad \frac{b}{3} - \frac{a}{3})$

3-21 直径为 D 的大圆盘，比重γ，在 A 处挖有一直径为 d 的圆孔。若 d=OA=D/4，试确定带孔圆盘的重心位置。



习题 3-21 图

解：设大园盘重量为 W_1，小园盘重量为 W_2

$$W = W_1 - W_2 = \frac{\pi}{4}D^2 \cdot \gamma - \frac{\pi}{4}d^2 \cdot \gamma$$

$$= \frac{15}{64}\pi D^2 \cdot \gamma$$

设重心距O点为x_C,根据合力矩定理得，

$W \cdot x_C = W_1 \cdot x_1 - W_2 \cdot x_2$

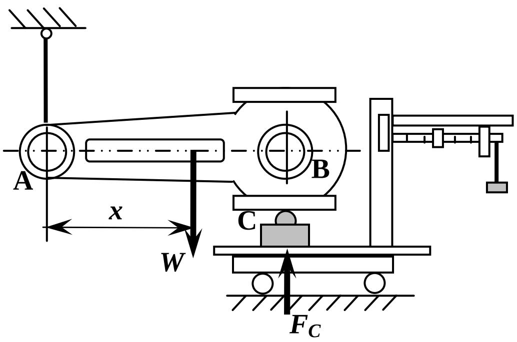
$x_1 = 0 \qquad x_2 = \mathrm{OA}$

$$\therefore x_C = -\frac{W_1}{W} \cdot \mathrm{OA} = -\frac{D}{60}$$

$\therefore$ 重心位置为 $(-\frac{D}{60},\ 0)$

3-22 用称重法求图示连杆的重心时，将连杆小头 A 支撑或悬挂，大头 B 置于磅秤上，调整轴线 AB 至水平，由磅秤读出 C 处的反力 $\boldsymbol{F}_C$。C 与 B 在同一铅垂线上，AB=L，若 F_C=0.7W，试确定其重心到 A 点的距离 x。

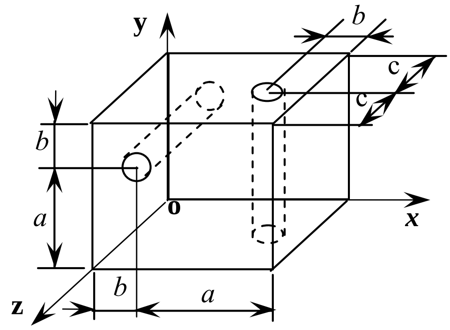
解：



习题 3-22 图

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow$$
$$F_C \cdot AB - W \cdot x = 0$$
$$\Rightarrow 0.7W \cdot L = W \cdot x$$
$$x = 0.7L$$
$\therefore$ 重心到A点的距离为0.7L

3-23 木块中钻有直径为 d=20mm 的二孔，如图所示。若 a=60mm，b=20mm，c=40mm，试确定块体重心的坐标。



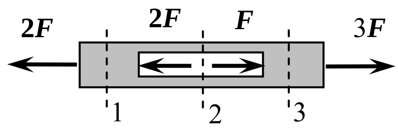
习题 3-23 图

解：设正方体木块的重量为 W_1，去掉的孔的重量分别为 W_2，W_3

$$W_1 = (a+b)^3 \cdot \gamma = 512000\gamma$$
$$W_2 = \frac{\pi}{2} d^2 \cdot (a+b) \cdot \gamma = 25120\gamma = W_3$$
总重：$W = W_1 - W_2 - W_3$
$\quad = 461760\gamma$
设重力距点(x_C, z_C)，根据合力距定理得，
$$W \cdot x_C = W_1 \times 40 - W_2 \times 20 - W_3 \times 60$$
$$W \cdot z_C = W_1 \times 40 - W_2 \times 40 - W_3 \times 40$$
$$\Rightarrow x_C = 40 \qquad z_C = 40$$
将立方体转90°，同理可求出x_C，
$$y_C = 38.9$$
$\therefore$ 该立方体的重心为：(40, 38.9, 40)

第四章　变形体静力学基础

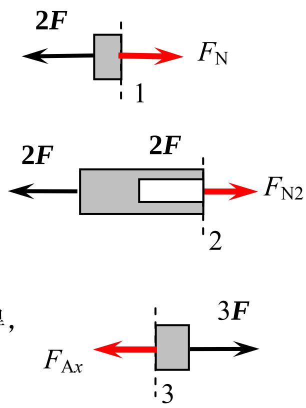
4-1 试用截面法求指定截面上内力。



(*a*)

（a）解：截面 1：沿截面 1 将杆件截开，取右段为隔离体，由平衡方程得，

F_{N1}-2F=0　　　F_{N1}=2F

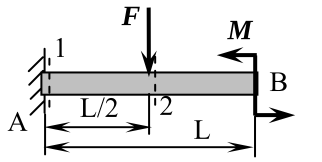


截面 2：沿截面 2 截开杆件，取左段为隔离体，取左段为隔离体，由平衡方程得，

F_{N2}=4F

截面 3：沿截面 3 截开杆件，取右段为隔离体，由平衡方程得，

F_{N3}=3F



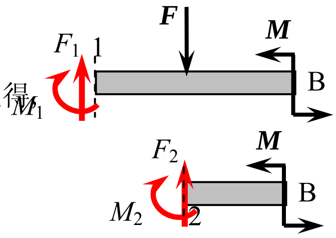
(b)

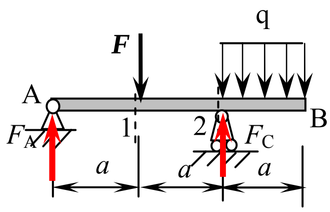
（b）解：截面 1：沿截面截开杆件，取右段为隔离体，由平衡方程得：

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_1 = F$$
$$\sum M_1 = 0 \Rightarrow M_1 + F \cdot L - M = 0$$
$$M_1 = M - F \cdot L$$

截面2：沿截面2截开杆件，取右段为隔离体，由平衡方程得，

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_2 = 0$$
$$\sum M_2 = 0 \Rightarrow M_2 = M$$





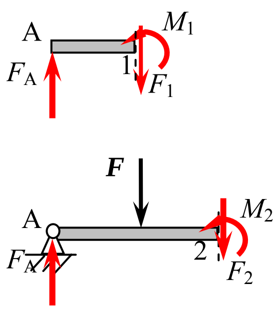
(c)

（c）解：1）求支座反力

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_A + F_C = F + q \cdot a$$
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow F_C \cdot 2a - F \cdot a - q \cdot a \cdot \frac{5}{2}a = 0$$
$$\therefore F_C = \frac{F}{2} + \frac{5}{4}qa \qquad F_A = \frac{F}{2} - \frac{1}{4}qa$$

2) 截面 1：沿截面 1 截开杆件，取左段为隔离体，根据平衡条件得：

$$F_1 = F_A \qquad M_1 = (\frac{F}{2} - \frac{1}{4}qa)a$$

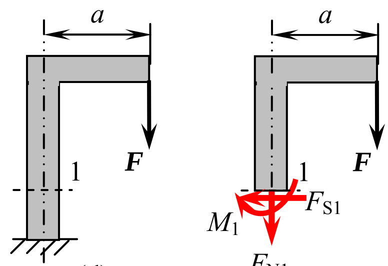


截面 2：沿截面 2 截开杆件，取左段为隔离体，根据平

衡条件得：

$$F_2=-\frac{F}{2}-\frac{1}{4}qa \qquad M_2=-\frac{1}{2}qa^2$$

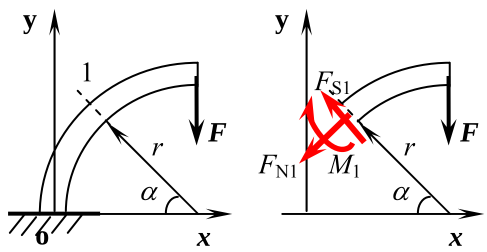
（d）解：沿截面 1 将杆件截开，取上半部分为隔离体，根据平衡方程得，



(d)

$$\begin{aligned}
&\sum F_x=0\Rightarrow F_{S1}=0\\
&\sum F_y=0\Rightarrow F+F_{N1}=0\\
&\sum M_1=0\Rightarrow F\cdot a+M_1=0\\
&\text{求解得}:F_{N1}=-1 \qquad F_{S1}=0\\
&\qquad M_1=Fa
\end{aligned}$$

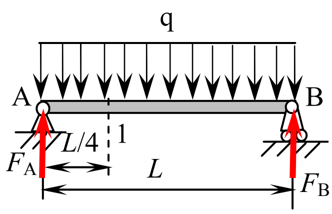
（e）解：沿截面 1 将杆件截开，取上部分为隔离体，根据平衡方程得，



(e)

$$\begin{aligned}
&\sum F_N=0 \qquad F_{N1}+F\cos\alpha=0\\
&\sum F_t=0 \qquad F_{S1}-F\sin\alpha=0\\
&\sum M_1=0 \qquad M_1+Fr\cos\alpha=0\\
&\text{求解得}:F_{N1}=-F\cos\alpha \qquad F_{S1}=F\sin\alpha\\
&\qquad M_1=-Fr\cos\alpha
\end{aligned}$$

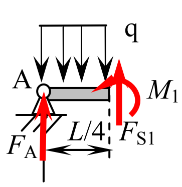
（f）解：求支座反力，根据平衡方程得，



(f)

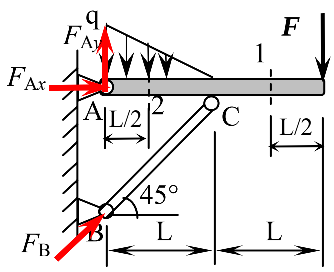
$$\begin{aligned}
&\sum F_y=0 \qquad F_A+F_B=q\cdot L\\
&\sum M_A=0 \qquad F_B\cdot L-q\cdot L\cdot\frac{L}{2}=0\\
&\therefore F_A=F_B=\frac{1}{2}qL
\end{aligned}$$

用截面截开杆件，取左段为隔离体，由平衡方程得，



$$\begin{aligned}
&\sum F_y=0 \qquad F_A-q\cdot\frac{1}{4}+F_{S1}=0\\
&\sum M_1=0 \qquad F_A\cdot\frac{L}{4}-q\cdot\frac{L}{4}\cdot\frac{L}{8}-M_1=0\\
&\text{求解得}:F_{S1}=-\frac{1}{4}qL \qquad M_1=\frac{3}{32}qL^2
\end{aligned}$$

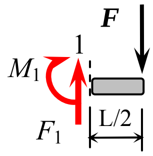
（g）解：求约束反力，由平衡方程得，



(g)

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow F \cdot 2L + \frac{1}{2}q \cdot L \times \frac{L}{3} - F_B \cdot L\cos 45^\circ = 0$$

$$F_B = \sqrt{2}F + \frac{\sqrt{2}}{6}qL$$

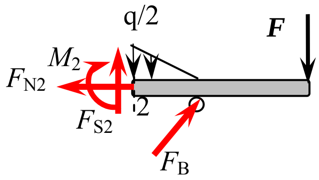


截面 1：沿截面 1 截开杆件，取右段为隔离体，由平衡方程得，

$$\sum F_y = 0 \ \Rightarrow \ F_{S1} = F$$

$$\sum M_1 = 0 \Rightarrow M1 = -F \cdot \frac{L}{2}$$

沿截面2截开杆件,取右段为隔离体，由平衡方程得:



$$\sum F_x = 0 \qquad F_{Bx} - F_{N2} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \qquad F_{By} + F_{S2} - F - \frac{1}{2} \times \frac{q}{2} \cdot \frac{L}{2} = 0$$

$$\sum M_2 = 0 \qquad F_{By} \cdot L - F \cdot 2L - \frac{1}{2} \cdot \frac{q}{2} \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{L}{6} + M_2 = 0$$

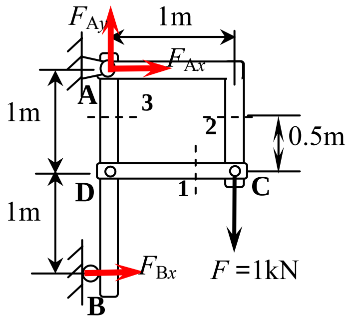
求解得:

$$F_{N2} = 2F + \frac{1}{6}qL$$

$$F_{S2} = -F - \frac{1}{24}qL$$

$$M_2 = -\frac{7}{48}qL^2$$

（h）解:1) 求约束力，整体受力图如图所示，



(h)

$$\sum F_x = 0 \qquad F_{Ax} + F_{Bx} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \qquad F_{Ay} - F = 0$$

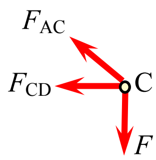
$$\sum M_A = 0 \qquad F_{Bx} \times 2 - F \times 1 = 0$$

解得: $F_{Bx} = 1\text{kN}$

$F_{Ax} = -1\text{kN}$

$F_{Ay} = 2\text{kN}$

研究铰链C，受力如图所示,根据平衡条件得，

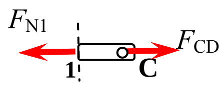


$$\sum F_y = F - F_{AC}\sin 45^\circ = 0 \qquad F_{AC} = \sqrt{2}(\text{kN})$$

$$\sum F_x = F_{AC}\cos 45^\circ + F_{CD} = 0 \qquad F_{CD} = -1(\text{kN})$$

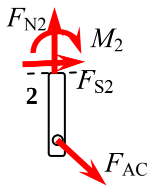
2) 各截面内力

截面 1: 沿截面将 CD 截开,取右段为隔离体，由平衡条件得:



$$F_{N1} = F_{CD} = -1(\text{kN})$$

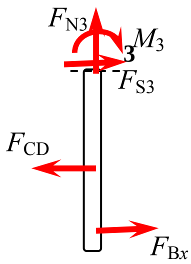
截面 2: 沿截面 2 将 AC 截开,取下段为隔离体，由平衡条件得:



$$\sum F_x = 0 \qquad F_{S2} + F_{AC}\cos 45^\circ = 0$$
$$\sum F_y = 0 \qquad F_{N2} - F_{AC}\sin 45^\circ = 0$$
$$\sum M_2 = 0 \qquad M_2 - F_{AC}\cos 45^\circ \times 0.5 = 0$$

求解得：$F_{N2} = 1\text{kN} \qquad F_{S2} = -1\text{kN} \qquad M_2 = 0.5\text{kN}\cdot\text{m}$

截面3：用截面截开杆件AB，取下段为隔离体，平衡方程：

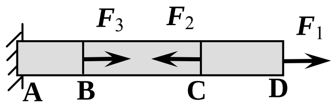


$$F_{N3} = 0$$
$$F_{S3} - F_{CD} + F_{Bx} = 0$$
$$F_{CD} \times 0.5 + M_3 - F_{Bx} \times 1.5 = 0$$

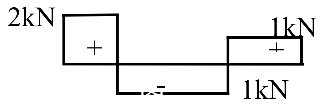
求解得：$F_{N3} = 0$；$F_{S3} = 0$；$M_3 = 1\text{kN}$

4-2 图示等直杆截面面积 $A=5\text{cm}^2$，F_1=1kN，F_2=2kN，F_3=3kN。试画出轴力图并求图中各截面应力。

（a）解:1) 画轴力图如图



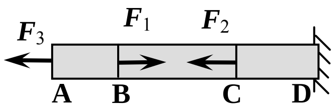
(a)



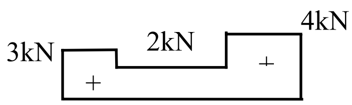
2) 各段的应力为，

$$\sigma_{CD} = \frac{F_{CD}}{A} = \frac{1000}{500} = 2(\text{MPa})(\text{拉})$$
$$\sigma_{BC} = 2\text{MPa}(\text{压})$$
$$\sigma_{AB} = \frac{F_{AB}}{A} = \frac{2000}{500} = 4(\text{MPa})$$

（b）解:1) 画轴力图如图所示.



(b)



2) 各段的应力为，

$$\sigma_{AB} = \frac{F_{AB}}{A} = \frac{3000}{500} = 6(\text{MPa})$$
$$\sigma_{BC} = \frac{F_{BC}}{A} = \frac{2000}{500} = 4(\text{MPa})$$
$$\sigma_{CD} = \frac{F_{CD}}{A} = \frac{4000}{500} = 8(\text{MPa})$$

上述各段应力均为拉应力。

4-3 若题 4-2 中杆 AB=CD=0.5m，材料为铜合金，$E_{铜}$=100GPa；杆中段 BC=1m，材料为铝合金，$E_{铝}$=70GPa。求杆的总伸长。

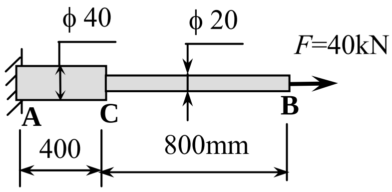
解: 题 4-2(a)

$$\Delta l = \Delta l_{AB} + \Delta l_{BC} + \Delta l_{CD} = \frac{F_{AB}\cdot l_{AB}}{E_{铜}A} + \frac{F_{BC}\cdot l_{BC}}{E_{铝}\cdot A} + \frac{F_{CD}\cdot l_{CD}}{E_{铜}\cdot A}$$
$$= \frac{2000\times 500}{100\times 10^3\times 500} - \frac{1000\times 1000}{70\times 10^3\times 500} + \frac{1000\times 500}{100\times 10^3\times 500}$$
$$= 0.02 - 0.029 + 0.02 = 0.011(\text{mm})$$

题 4-2(b)

$$
\begin{aligned}
\Delta l &= \Delta l_{AB} + \Delta l_{BC} + \Delta l_{CD} \\
&= \frac{3000\times 500}{100\times 10^3\times 500} + \frac{2000\times 1000}{70\times 10^3\times 500} + \frac{4000\times 500}{100\times 10^3\times 500} \\
&= 0.03 + 0.057 + 0.04 = 0.127(\mathrm{mm})
\end{aligned}
$$

4-4 圆截面台阶轴受力如图，材料的弹性模量 E=200×10^{3}MPa，画轴力图，求各段应力、应变和杆的伸长ΔL_{AB}。



习题 4-4 图

解：轴力图如图所示，各段的应力为，

$$\sigma_{AC} = \frac{F_N}{A_{AC}} = \frac{4000}{\frac{\pi}{4}\times 40^2} = 31.85\mathrm{MPa}$$

$$\sigma_{BC} = \frac{F_N}{A_{BC}} = \frac{4000}{\frac{\pi}{4}\times 20^2} = 127.39\mathrm{MPa}$$

各段应变为，

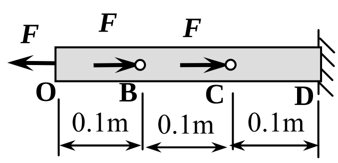
$$\varepsilon_{AC} = \frac{\sigma_{AC}}{E} = 1.59\times 10^{-4}$$

$$\varepsilon_{BC} = \frac{\sigma_{BC}}{E} = 6.37\times 10^{-4}$$

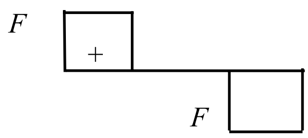
杆的伸长为，

$$
\begin{aligned}
\Delta l_{AB} &= \Delta l_{AC} + \Delta l_{BC} \\
&= \varepsilon_{AC}\cdot l_{AC} + \varepsilon_{BC}\cdot l_{BC} \\
&= 0.57(\mathrm{mm})
\end{aligned}
$$

4-5 杆 OD 横截面面积 A=10cm^2，弹性模量 E=200GPa，F=50kN。画轴力图，求各段应力及杆端 O 处的位移。



习 题 4-5



解： 1) 画轴力图如图所示。

2) 各段的应力为，

$$\sigma_{OB} = \frac{F}{A} = \frac{50000}{1000} = 50(\mathrm{MPa})(拉)$$

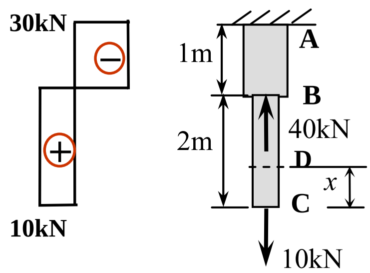
$$\sigma_{BC} = 0$$

$$\sigma_{CD} = \frac{F}{A} = 50(\mathrm{MPa})(压)$$

3)O处的位移为，

$$\Delta_O = \Delta l_{OD} = \Delta l_{OB} + \Delta l_{BC} - \Delta l_{CD} = 0$$

4-6 图示杆中 AB 段截面面积为 A_1=200mm^2，BC 段截面面积为 A_2=100mm^2，材料弹性模量 E=200GPa。求截面 B、C 的位移和位移为零的横截面位置 x。



习题 4-6 图

解: 作 AC 杆件轴力图, BC 段受拉，AB 段受压，

B 截面位移为，

$$\Delta_B = \Delta l_{AB} = \frac{F_{NAB} \cdot l_{AB}}{EA_1}$$
$$= \frac{30\times10^3 \times 1000}{200\times10^3\times200} = 0.75(\text{mm})$$

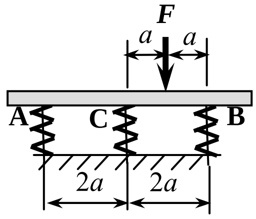
C截面的位移为，

$$\Delta_C = \Delta l_{AC} = \Delta l_{BC} - \Delta l_{AB}$$
$$= \frac{F_{NBC} \cdot l_{BC}}{EA_2} - 0.75 = 0.25(\text{mm})$$

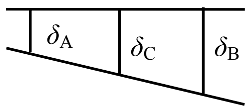
位移为零的截面为，

$$\Delta_D = \Delta l_{AD} = \Delta l_{BD} - \Delta l_{AB} = 0$$
$$\Delta l_{BD} = \frac{F_{NBC} \cdot l_{BD}}{EA_2} = \frac{10\times10^3(2000 - x)}{EA_2}$$
$$\therefore \frac{10000(2000 - x)}{200\times10^3\times100} = 0.75$$
$$x = 0.5(\text{m})$$

4-7 图示钢性梁 AB 置于三个相同的弹簧上，弹簧刚度为 k，力 ***F*** 作用于图示位置，求平衡时弹簧 A、B、C 处所受的力。



习题 4-7 图



解:受力分析如图所示, 根据平衡方程得,

$$F_A + F_B + F_C = F$$
$$F_C \times 2a + F_B \times 4a = F \times 3a$$

(2)变形协调条件

$$\delta_A + \delta_B = 2\delta_C$$

(3)力与变形的物理关系

$$F_A = k\cdot\delta_A \qquad F_B = k\cdot\delta_B \qquad F_C = k\cdot\delta_C$$

联立求解得:

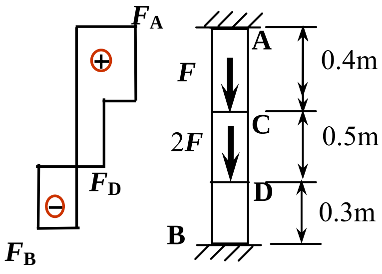
$$F_A = \frac{1}{12}F \qquad F_B = \frac{7}{12}F \qquad F_C = \frac{F}{3}$$

平衡时弹簧A, B, C处所受力为,

A处$\frac{1}{12}F$　　B处$\frac{7}{12}F$　　C处$\frac{F}{3}$

4-8 杆二端固定，横截面面积为 A=10cm^2，F=100kN，弹性模量 E=200GPa。求各段应力。

解：受力分析如图，建立平衡方程，



习题 4-8 图

$$F_A + F_B = F + 2F = 3F$$

(2)变形协调条件，

$$\delta_{AC} + \delta_{CD} + \delta_{DB} = 0$$

(3)力与变形的物理关系，

$$\delta_{AD} = \frac{F_A \times 0.4}{EA} \qquad \delta_{CD} = \frac{(F_A - F)\times 0.5}{EA}$$

$$\delta_{BD} = \frac{-F_B \times 0.3}{EA}$$

联立求解得：$F_A = \frac{7}{6}F = 116.7\text{kN}$

$F_B = 183.3\text{kN}$

(4)各段的应力为，

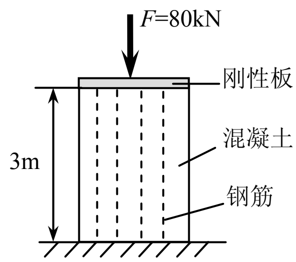
AC段: $\sigma_{AC} = \frac{F_A}{A} = 116.7\text{MPa}$(拉)

CD段：$\sigma_{CD} = \frac{(F_A - F)}{A} = 6.7\text{MPa}$(拉)

BD段：$\sigma_{BD} = \frac{F_B}{A} = 183.3\text{MPa}$(压)

4-9 钢筋混凝土立柱的矩形截面尺寸为 0.5m×1m，用均匀布置的 8 根φ20 的钢筋增强。钢筋 E_1=200GPa，混凝土 E_2=20GPa，受力如图。求钢筋和混凝土内的应力。

解：设钢筋的内力 F_{N1}，混凝土内力为 F_{N2}，



习题 4-9 图

$$F_{N1} + F_{N2} = F$$

变形条件：$\Delta l_1 = \Delta l_2$

物理关系：$\Delta l_1 = \frac{F_{N1}\, l}{E_1 A_1} \qquad \Delta l_2 = \frac{F_{N2}\, l}{E_2 A_2}$

$$A_1 = 8\times\frac{\pi}{4}d^2 \qquad A_2 = 0.5\times 1 - A_1$$

联立求解得：$F_{N1} = 38.5\text{kN}$

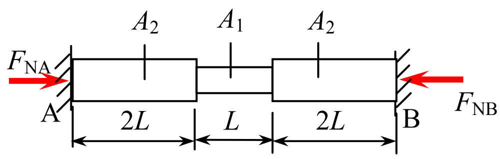
$F_{N2} = 761.4\text{kN}$

钢筋应力: $\sigma_1 = \frac{F_{N1}}{A_1} = 15.3\text{MPa}$(压)

混凝地应力：$\sigma_2 = \frac{F_{N2}}{A_2} = 1.53\text{MPa}$(压)

4-10 钢管二端固支如图。截面面积 A_1=1cm^2，A_2=2cm^2，L=100mm，弹性模量 E=200GPa，材料的线膨胀系数为α=12.5×10^{-6}(1/C°)，试求温度升高 30°时杆内的最大应力。

解: 温度升高时, 杆件 AB 要伸长，由于两端固定约束限制其伸长，引起约束力作用, 受力图如图所示。



习题 4-10 图

(1) 平衡方程

$F_{NA} = F_{NB} = F_N$

(2)变形协调条件

$2\Delta l_2 + \Delta l_1 = \Delta l_T$

(3)力与变形的物理关系

$\Delta l_T = \alpha \cdot \Delta T \cdot \Delta l_1 = \dfrac{F_N \cdot L}{EA_1} \qquad \Delta l_2 = \dfrac{F_N \cdot 2L}{EA_2}$

联立求解得:

$F_N = 125\text{kN}$

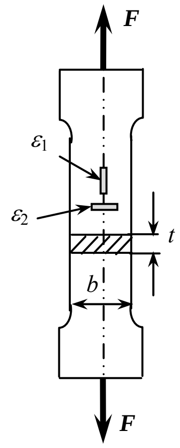
杆内最大应力发生在中间段,

$\sigma_{\max} = \dfrac{F_N}{A_1} = 125\text{MPa}(压)$

第五章 材料的力学性能

5-1 平板拉伸试件如图。横截面尺寸为 b=30mm，t=4mm，在纵、横向各贴一电阻应变片测量应变。试验时每增加拉力ΔF=3kN，测得的纵、横向应变增量为$\Delta\varepsilon_1=120\times10^{-6}$，$\Delta\varepsilon_2=-38\times10^{-6}$， 求所试材料的弹性模量 E、泊松比μ，和 F=3kN 时的体积变化率$\Delta V/V_0$。

解: 应力增量:



习题 5-1 图

$$\Delta\sigma=\frac{\Delta F}{A}=\frac{3000}{30\times4}=25\text{MPa}$$

$$\because \Delta\sigma=E\cdot\Delta\varepsilon \qquad \therefore E=\frac{\Delta\sigma}{\Delta\varepsilon}=\frac{\Delta\sigma}{\Delta\varepsilon_1}$$

$$E=\frac{25}{120\times10^{-6}}=208.3\text{GPa}$$

$$\mu=-\frac{\Delta\varepsilon_2}{\Delta\varepsilon_1}=\frac{38\times10^{-6}}{120\times10^{-6}}=0.317$$

$$\frac{\Delta V}{V_0}=(1-2M)\cdot\varepsilon=4.4\times10^{-5}$$

5-2 如果工程应变 e=0.2%或 1%，试估计真应力σ、真应变ε与工程应力 S、工程应变 e 的差别有多大?

解:真应力σ= $\dfrac{F_{\mathrm{N}}}{A}$ 假定均匀变形阶段体积不变$A_0l_0=Al$

$$\therefore \sigma=\frac{A_{\mathrm{N}}l}{A_0l_0}=\frac{F_{\mathrm{N}}}{A_0}[(l_0+\Delta l)/l_0]=S(1-e)$$

真应力与工程应力的差别 $\dfrac{\sigma-S}{S}=e=0.2\%或1\%$

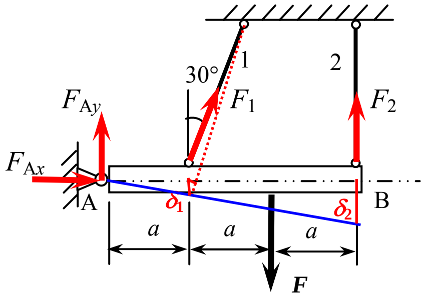
真应变 $\varepsilon=\int_{l_0}^{l}d\varepsilon=\int_{l_0}^{l}\frac{dl}{l}=\ln(\frac{l}{l_0})=\ln\frac{l+\Delta l}{l_0}=\ln(1+e)$

$$=e-\frac{e^2}{2}+\frac{e^3}{3}-...\approx e-\frac{e^2}{2}$$

与工程应变的差别: $\dfrac{e-\varepsilon}{e}=\dfrac{e}{2}=0.1\%或0.5\%$

5-3 图示结构中 AB 为刚性梁，二拉杆截面面积为 A，材料均为弹性–理想塑性，弹性模量为 E，屈服应力为σ_{ys}。杆 1 长度为 L，求结构的屈服载荷 F_{S}和极限载荷 F_{U}。

解: 受力分析如图所示，建立平衡方程得，



习题 5-3 图

$$F_{Ay}+F_1\cos 30^{\circ}+F_2=F$$

$$F_{Ax}+F_1\sin 30^{\circ}=0$$

$$F_1\cos 30^{\circ}\times a+F_2\times 3a+F\cdot 2a=0$$

变形协调条件：$3\delta_1/\cos 30^{\circ}=\delta_2$

力与变形的物理关系：$\delta_1=\dfrac{F_1\cdot L}{EA}$

$$\delta_2=\frac{F_2\cdot L\cos 30^{\circ}}{EA}$$

求解得：$F_1=\dfrac{4F}{\sqrt{3}+24}$

$$F_2=\frac{16F}{\sqrt{3}+24}$$

$\because F_2>F_1\qquad\therefore$ 杆2先屈服

$$F_2=\sigma_{ys}\cdot A=\frac{16F_S}{\sqrt{3}+24}$$

$$\therefore F_S=\frac{\sqrt{3}+24}{16}\sigma_{ys}\cdot A=(\frac{\sqrt{3}}{16}+\frac{3}{2})\sigma_{ys}\cdot A$$

结构到达极限状态时，杆1也进入屈服

$F_1=\sigma_{ys}\cdot A\qquad\qquad F_2=\sigma_{ys}\cdot A$

平衡条件：$\dfrac{\sqrt{3}}{2}F_1+3F_2=2F$

$$\therefore F_U=(\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3}{2})\sigma_{ys}\cdot A$$

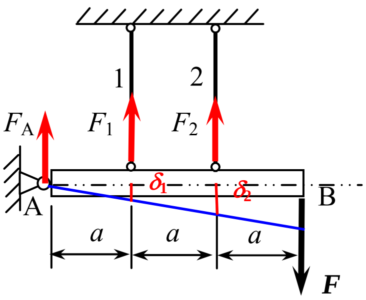
5-4 图中 AB 为刚性梁。杆 1、2 的截面积 A 相同，材料也相同，弹性模量为 E。

a) 应力—应变关系用线弹性模型，即σ=Eε。求二杆内力。

b) 若材料应力—应变关系用非线性弹性模型$\sigma=k\varepsilon^n$，再求各杆内力。

c) 若材料为弹性理想塑性，试求该结构的屈服载荷 F_S 和极限载荷 F_U。

解: a) 分析 AB 杆件的受力，由平衡方程得，



习题 5-4 图

$F_1 + F_2 + F_A = F$

$F_1 \cdot a + F_2 \cdot 2a = F \cdot 3a$

变形协调条件：$2\delta_1 = \delta_2$

力与变形的物理关系：$\delta_1 = \dfrac{F_1 l}{EA}$；$\delta_2 = \dfrac{F_2 l}{EA}$

联立求解得：

$F_1 = \dfrac{3}{5}F$；$F_2 = \dfrac{6}{5}F$

b）若材料应力--应变关系采用$\sigma = k\varepsilon^n$

则平衡条件：$\begin{cases} F_1 + F_2 + F_A = F \\ F_1 \cdot a + F_2 \cdot 2a = F \cdot 3a \end{cases}$

变形协调条件：$2\delta_1 = \delta_2$

$\dfrac{F_1}{A} = k(\dfrac{\delta_1}{l})^n$；$\dfrac{F_2}{A} = k(\dfrac{\delta_2}{l})^n$

联立求解得：$F_1 = \dfrac{3F}{1+2^{n+1}}$；　$F_2 = \dfrac{2^n \cdot 3F}{1+2^{n+1}}$

c)求结构的屈服载荷和极限载荷

$\because F_2 > F_1$　　$\therefore$ 杆2先发生屈服

$\sigma_2 = \sigma_{ys}$　　$\because F_2 = \dfrac{6}{5}F = \sigma_2 \cdot A$

$\therefore \dfrac{6}{5}F_S = \sigma_{ys} \cdot A \Rightarrow F_S = \dfrac{5}{6}A \cdot \sigma_{ys}$

两杆都屈服时，$\sigma_1 = \sigma_{ys}$；$\sigma_2 = \sigma_{ys}$

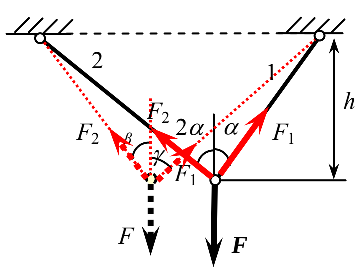
平衡方程：$F_1 \cdot a + F_2 \cdot 2a = F \cdot 3a$

$A \cdot \sigma_{ys} \cdot a + \sigma_{ys} \cdot A \cdot 2a = F_U \cdot 3a$

$\therefore F_U = A \cdot \sigma_{ys}$

5-5* 图中二杆截面积均为 A，α=30°，若材料为弹性–理想塑性，弹性模量为 E，屈服应力为σ_{ys}，求结构的屈服载荷 F_S。试讨论载荷 F 超过屈服载荷 F_S 后杆系的变形、再平衡情况并求杆系能承受的最终极限载荷 F_U。

解：(1) 考虑结点的平衡，由平衡方程得，



习题 5-5 图

$$F_1\cos\alpha+F_2\cos2\alpha=F$$
$$F_1\sin\alpha=F_2\sin2\alpha$$

求解得：$F_1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}F$

$$F_2=\frac{1}{2}F$$

$\therefore F_1>F_2$　　$\therefore$ 杆1先屈服

杆1屈服时　$\sigma_1=\sigma_{ys}$

$$\therefore F_1=\sigma_1\cdot A=\sigma_{ys}\cdot A=\frac{\sqrt{3}}{2}F_S$$

结构屈服载荷：$F_S=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\sigma_{ys}\cdot A$

(2)　载荷F超过屈服载荷F_S后，杆系产生大变形，变形后两杆与竖向线的夹向分别为β，γ；　再平衡时取节点分析其受力，　由平衡方程得，

$$F_1\cos\gamma+F_2\cos\beta=F$$
$$F_1\sin\gamma=F_2\sin\beta$$

当杆2屈服时　$F_2=\sigma_2\cdot A=\sigma_{ys}\cdot A$

$$F_1=\sigma_1\cdot A=\sigma_{ys}\cdot A$$

代入平衡方程得：$\beta=\gamma$

$$F_U=2\sigma_{ys}\cdot A\cdot\cos\gamma$$

由几何关系确定γ，

$$AB=htg\alpha+htg2\alpha=\frac{4\sqrt{3}}{3}h$$

$$AC=\frac{h}{\cos2\alpha}=2h$$

$$CD=\sqrt{AC^2-(\frac{AB}{2})^2}=\sqrt{\frac{8}{3}}h$$

$$\cos\gamma=\frac{CD}{AC}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

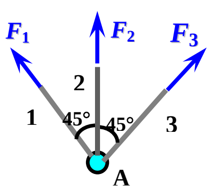
$$\therefore F_U=2A\sigma_{ys}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}=1.63A\cdot\sigma_{ys}$$

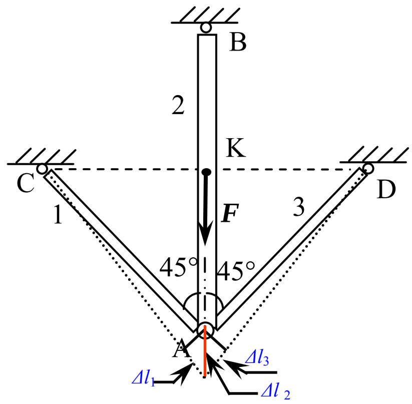
5-6 图中各杆截面积均为 A，AK=BK=L，材料为弹性理想塑性, 弹性模量为 E，屈服应力为 σ_{ys}。

1）材料为线性弹性，求各杆的内力。

2）材料为弹性理想塑性，求结构的屈服载荷 F_S 和极限载荷 F_U。

解: 1) 研究节点 A, 受力如图所示，由平衡方程得，





习题 5-6 图

$F_1 \sin 45^\circ = F_3 \sin 45^\circ$

$F_1 \cos 45^\circ + F_2 + F_3 \cos 45^\circ = 0$

变形协调条件:

$\Delta l_1 = \Delta l_3 = \Delta l_2 \cos 45^\circ$

力与变形的物理关示

$\Delta l_1 = \dfrac{F_1 \cdot \mathrm{AC}}{EA} \qquad \Delta l_2 = \Delta l_{\mathrm{Ak}} + \Delta l_{\mathrm{BK}}$

$\Delta l_{\mathrm{AK}} = \dfrac{F_2 \cdot l}{EA} \qquad \Delta l_{\mathrm{BK}} = \dfrac{(F_2 + F)l}{EA}$

联立求解得:

$$F_1 = F_3 = \frac{(\sqrt{2}-1)F}{2}$$

$$F_2 = F_{\mathrm{AK}} = \frac{(\sqrt{2}-2)F}{2}$$

$$F_{\mathrm{BK}} = \frac{\sqrt{2}}{2} F$$

2) 求屈服载荷和极限载荷

$\because F_{\mathrm{BK}} > F_1 \qquad \therefore$ BK段先屈服，

此时 $F_{\mathrm{BK}} = \sigma_{ys} \cdot A = \dfrac{\sqrt{2}}{2} F_{\mathrm{S}}$

$\therefore F_{\mathrm{S}} = \sqrt{2}\sigma_{ys} \cdot A$

极限载荷：当结构整体进入极限状态时,

因塑性变形而丧失承载能力，极限状态下，

$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_{ys}$

$F_1 = F_2 = F_3 = \sigma_{ys} \cdot A$

研究整体，由平衡方程得，

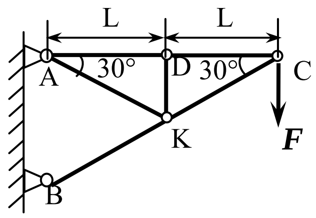
$2F_1 \cos 45^\circ + F_2 = F$

$$\begin{aligned}\therefore F_{\mathrm{U}} &= 2\sigma_{ys} \cdot A \cos 45^\circ + \sigma_{ys} \cdot A \\ &= (\sqrt{2}+1)\sigma_{ys} \cdot A\end{aligned}$$

第六章 强度与连接件设计

6-1 图示桁架中各杆材料相同，其许用拉应力$[\sigma]_{拉}$=160MPa，许用压应力$[\sigma]_{压}$=100MPa，F=100kN，试计算杆 AD、DK 和 BK 所需的最小截面面积。

解：首先计算杆 AD, DK 和 BK 的内力。用截面切开杆 AD, AK 和 BK，取隔离体如图，建立平衡方程，



习题 6-1 图

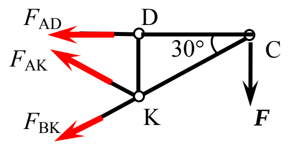
$$\sum M_K = 0 \Rightarrow F_{AD} \cdot DK - F \cdot DC = 0$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow F_{BK} \cdot AC \cdot \sin 30^\circ + F \cdot AC = 0$$

$$\text{求得}: F_{AD} = 173.5\text{kN} \qquad F_{Bk} = -200\text{kN}$$

由节点D确定$F_{DK} = 0$

(2)由强度条件确定各杆面积



AD杆：$\dfrac{F_{AD}}{A_{AD}} \le [\sigma]_{拉} \Rightarrow A_{AD} \ge 10.8\text{cm}^2$

DK杆：$A_{DK} = 0$

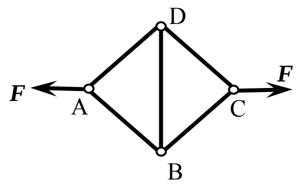
BK杆：$\dfrac{F_{BK}}{A_{BK}} \le [\sigma]_{压} \Rightarrow A_{BK} \ge 20\text{cm}^2$

6-2 铰接正方形铸铁框架如图，边长 a=100mm，各杆横截面面积均为 A=20mm^2。材料许用应力为$[\sigma]_{拉}$=80MPa，$[\sigma]_{压}$=240MPa，试计算框架所能承受的最大载荷 F_{max}。

解: (1) 确定各杆的内力，分析节点 A，由平衡方程得，

$$F_{AD}\sin 45^\circ - F_{AB}\sin 45^\circ = 0$$

$$F - F_{AD}\cos 45^\circ - F_{AB}\cos 45^\circ = 0$$

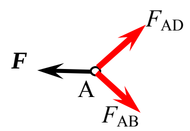


习题 6-2 图

$$\text{求解}: F_{AD} = \frac{\sqrt{2}}{2}F = F_{AB}$$

同理分析节点C

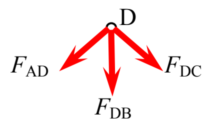
求得：$F_{DC} = F_{CB} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}F$



分析节点D, 由平衡方程得,

$$2F_{AD} \cdot \cos 45^\circ + F_{DB} = 0$$

$$F_{DB} = -\sqrt{2}F$$



(2)根据强度条件确定框架所能承受的载荷，

受拉各杆：$\dfrac{F_{AD}}{A_{AD}} \le [\sigma]_{拉}$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}F \le [\sigma]_{拉} \cdot A_{AD} \Rightarrow F \le 2.26\text{kN}$$

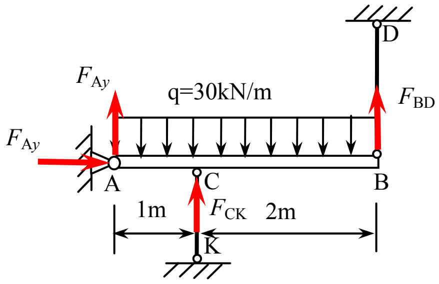
受压BD杆：$\dfrac{F_{BD}}{A_{BD}} \le [\sigma]_{压}$

$$\sqrt{2}F \le [\sigma]_{压} \cdot A_{BD} \Rightarrow F \le 3.39\text{kN}$$

$\therefore$ 框架所能承受的最大载荷 $F_{max} = 2.26\text{kN}$

6-3 图中 AB 为刚性杆，拉杆 BD 和撑杆 CK 材料及截面面积均相同，BD=1.5m，CK=1m，$[\sigma]$=160MPa，E=200GPa，试设计二杆的截面面积。

解：(1) 求 BD、CK 杆的内力，分析 AB 杆，由平衡方程得，



习题 6-3 图

$$F_{Ax}=0;$$
$$F_{Ay}+F_{CK}+F_{BD}=q\cdot AB$$
$$F_{CK}\cdot AC+F_{BD}\cdot AB-q\cdot AB\cdot\frac{AB}{2}=0$$
$$\text{变形协调条件}:3\delta_{CK}=\delta_{BD}$$
$$\text{力与变形物理关系}:\delta_{CK}=\frac{F_{CK}\cdot CK}{EA}$$
$$\delta_{BD}=\frac{F_{BD}\cdot BD}{EA}$$
$$\text{联立求解得}:F_{CK}=\frac{135}{7}\text{kN}$$
$$F_{BD}=\frac{270}{7}\text{kN}$$

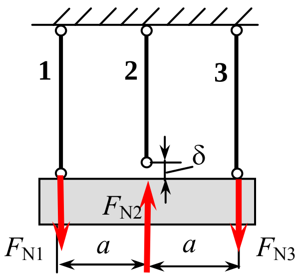
(2)根据强度条件设计面积

$$A_{CK}\geq\frac{F_{CK}}{[\sigma]}\Rightarrow A_{CK}\geq 121\text{mm}^2$$
$$A_{BD}\geq\frac{F_{BD}}{[\sigma]}\Rightarrow A_{BD}\geq 241\text{mm}^2$$

6-4 图中刚性梁由三根长为 L=1m 的拉杆吊挂，杆截面面积均为 2cm^2, 材料许用应力为 $[\sigma]$=120MPa，若其中一根杆尺寸短了 0.05%L，按下述二种情况安装后，试计算各杆应力并校核其强度。

a) 短杆置于中间（图 *a*）。

b) 短杆置于一边（图 b）。



(*a*)

解：*a*) 分析刚性梁，受力图如图所示，由平衡分程得，

$$F_{N1}+F_{N3}=F_{N2}$$
$$F_{N2}\cdot a=F_{N3}\cdot 2a$$
$$\text{变形协调条件}:\delta_3+\delta_2=0.05\%L$$
$$\delta_2=\frac{F_{N2}L}{EA}\qquad\delta_3=\frac{F_{N3}L}{EA}$$
$$\text{联立求解得}:F_{N1}=6666.67N$$
$$F_{N2}=13333.33N$$
$$F_{N3}=6666.67N$$
$$\text{各杆的应力}:\sigma_1=\sigma_3=\frac{F_{N1}}{A}=33.3\text{MPa}<[\sigma]$$
$$\sigma_2=\frac{F_{N2}}{A}=66.7\text{MPa}<[\sigma]$$

满足强度条件.

解：b) 刚性梁的受力图如图所示，由平衡条件得，

$$F_{N1}+F_{N3}=F_{N2}$$
$$F_{N2}\cdot a=F_{N3}\cdot a$$
变形协调条件：$2\delta_2+\delta_1=\delta-\delta_3$

$$\delta_1=\frac{F_{N1}L}{EA}\qquad \delta_2=\frac{F_{N2}L}{EA}\qquad \delta_3=\frac{F_{N3}L}{EA}$$

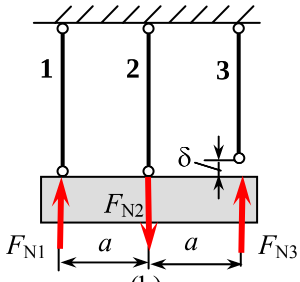
联立求解得：$F_{N1}=\dfrac{\delta EA}{6L}=3333.3N$

$$F_{N3}=\frac{\delta EA}{6L}=3333.3N$$
$$F_{N2}=2F_{N3}=6666.7N$$

各杆应力：$\sigma_1=\sigma_3=\dfrac{F_{N1}}{A}=16.7\text{MPa}<[\sigma]$

$$\sigma_2=\frac{F_{N2}}{A}=33.4\text{MPa}<[\sigma]$$

满足强度条件.



(b)

6-5 钻井装置如图所示。钻杆为空心圆管，外径 D=42mm，内径 d=36mm，单位长度重量为 q=40N/m。材料的许用应力为[σ]=120MPa，求其最大悬垂长度 L。

解：钻杆的总重量为：$W=q\cdot L=40L$

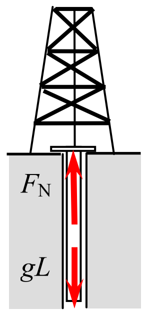
最危险截面内力：$F_N-W=0$

$\therefore F_N=W=40L$

强度条件：$\dfrac{F_N}{A}\le[\sigma]$

$\therefore A=\dfrac{\pi}{4}(D^2-d^2)$

$\therefore L\le 1102\text{m}$



习 题 6-5

6-6 图中 5mm×5mm 的方键长 L=35mm，许用剪应力[τ]=100MPa，许用挤压应力为[σ_j]=220MPa。若轴径 d=20mm，试求键允许传递给轴的最大扭矩 M 及此时在手柄处所施加的力 F。

解 (1)求键所能承受的最大剪力，根据剪切强度条件得，

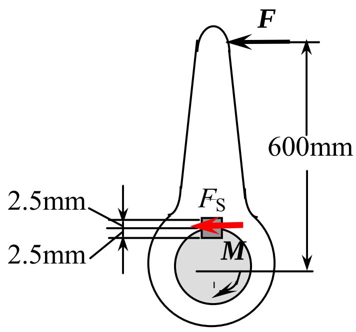
$$\frac{F_S}{A}\le[\tau]$$
$\therefore F_S\le[\tau]\cdot A\qquad F_S=17.5\text{kN}$

根据挤压强度条件：

$\dfrac{F_j}{A_j}\le[\sigma_j]\qquad \therefore\ F_j\le[\sigma_j]A_j\qquad F_j=19.25\text{kN}$

键不发生破坏，取$F_S=17.5\text{kN}$

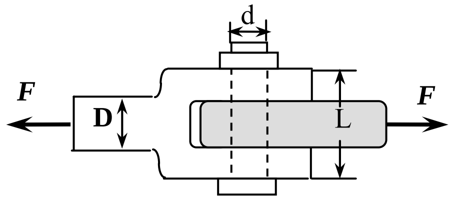
$$M=F_S\cdot\frac{d}{2}=175\text{kN}\cdot\text{mm}$$
$F\cdot 600=M\qquad \therefore F=0.292\text{kN}$



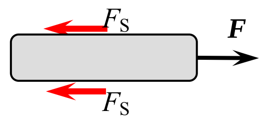
习 题 6-6

∴键允许传递给轴的最大扭矩为 175kN·mm，此时在手柄处施加的力为 0.292kN。

6-7 图示接头中二端被连接杆直径为 D，许用应力为[σ]。若销钉许用剪应力[τ]=0.5[σ]，试确定销钉的直径 d。若钉和杆的许用挤压应力为[σ_j]=1.2[σ]，销钉的工作长度 L 应为多大？



习 题 6-7



解 (1) 确定销钉的直径 d

$$2F_S = F \qquad \therefore F_S = \frac{F}{2}$$

$$\text{剪切强度条件}: \frac{F_S}{\frac{\pi}{4}d^2} \le [\tau]$$

$$\frac{\frac{F}{2}}{\frac{\pi}{4}d^2} \le [\tau]$$

确定F,考虑杆件的拉压强度£,

$$\frac{F}{\frac{\pi}{4}D^2} \le [\sigma] \qquad \therefore F \le [\sigma]\frac{\pi}{4}D^2$$

综上所述, 求得: $d \ge D$

(2)确定销钉的工作长度

$$F_{j1} = F = \frac{\pi}{4}D^2[\sigma]$$

$$\frac{F_{j1}}{t_1 \cdot d} \le [\sigma_j] \Rightarrow t_1 \ge \frac{5\pi}{24}D$$

$$F_{j2} = \frac{F}{2} = \frac{\pi}{8}D^2[\sigma] \qquad \frac{F_{j2}}{t_2 d} \le [\sigma_j] \Rightarrow t_2 \ge \frac{5\pi}{48}D$$

$$\therefore \text{销钉的工作长度} \quad L \ge 2t_2 + t_1 = \frac{5}{12}\pi D$$

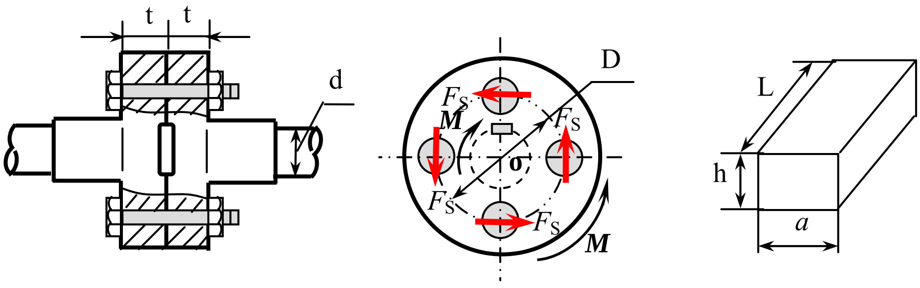
6-8 欲在厚度为 1.2mm 的板材上冲制一 100×100mm 的方孔，材料的剪切强度 τ_b=250MPa，试确定所需的冲压力 F。

解: 根据剪断条件: $\dfrac{F}{A} > \tau_b$

A 为方孔的侧面积 A＝100×1.2×4＝480(mm^2)

$$F > \tau_b \cdot A = 250 \times 480 = 120000\text{N}$$
$$= 120\text{kN}$$

6-9 联轴节如图。4 个直径 d_1=10mm 的螺栓布置在直径 D=120mm 的圆周上。轴与连接法兰间用平键连接，平键尺寸为 a=10mm，h=8mm，L=50mm。法兰厚 t=20mm，轴径 d=60mm，传递扭矩 M=0.6kN•m，设[τ]=80MPa，[σ_j]=180MPa，试校核键和螺栓的强度。

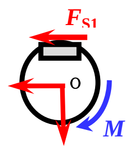


习题 6-9 图

解: (1)螺栓强度，求螺栓所承受的剪力,

$$4F_S\cdot\frac{D}{2}=M \qquad F_S=2.5\text{kN}$$

螺栓剪切强度: $\tau=\dfrac{F_S}{A}=\dfrac{2.5\times1000}{\dfrac{\pi}{4}\times10^2}=31.85\text{MPa}$



螺栓侧面挤压: $F_j=F_S=2.5\text{kN}$

$$\sigma_j=\frac{F_j}{A_j}=\frac{2500}{d_1\cdot t}=12.5\text{MPa}$$

(2)键的强度:

键所承受的剪力: $F_{S1}\cdot\dfrac{d}{2}=M\Rightarrow F_{S1}=20\text{kN}$

$$\tau=\frac{F_{S1}}{A_1}=\frac{20000}{aL}=40\text{MPa}$$

键侧面挤压 $F_{j1}=F_{S1}$

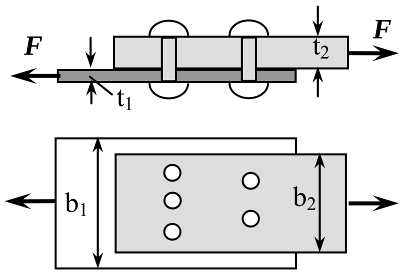
$$\sigma_j=\frac{F_{j1}}{A_{j1}}=\frac{F_{j1}}{\dfrac{h}{2}\cdot L}=100\text{MPa}$$

螺栓和键均满足强度条件.

6-10 图示搭接接头中，五个铆钉排列如图所示。铆钉直径 d=25mm，[τ]=100MPa。板 1、2 的厚度分别为 t_1=12mm, t_2=16mm, 宽度分别为 b_1=250mm，b_2=180mm。 板、钉许用挤压应力均为[σ_j]=280MPa，许用拉应力[σ]=160MPa，求其可以传递的最大载荷 F_{max}。

解：(1)考虑铆钉的剪切强度

$5F_s = F \qquad F_S = \dfrac{F}{5}$



习题 6-10 图

$\tau = \dfrac{F_S}{A} \le [\tau]$

$F \le 245.3\text{kN}$

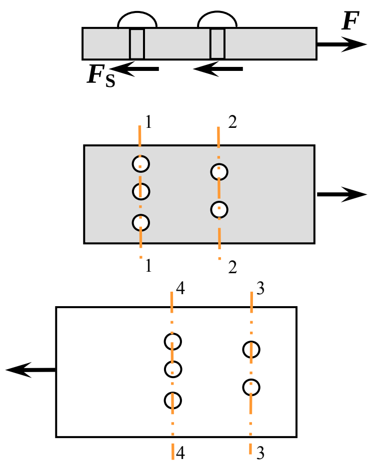
(2)考虑铆钉的挤压强度

$5F_j = F \qquad F_j = \dfrac{F}{5}$

$\dfrac{F_j}{A_j} \le [\sigma_j] \qquad A_j = dt_1$

$F \le 420\text{kN}$

(3)考虑铆钉的拉压强度



1截面：$\dfrac{\frac{3}{5}F}{(b_2 - 3d)t_2} \le [\sigma] \Rightarrow F \le 420\text{kN}$

2截面：$\dfrac{F}{(b_2 - 2d)t_2} \le [\sigma] \Rightarrow F \le 332.8\text{kN}$

3截面：$\dfrac{\frac{2}{5}F}{(b_1 - 2d)t_1} \le [\sigma] \Rightarrow F \le 960\text{kN}$

4截面：$\dfrac{F}{(b_1 - 3d)t_1} \le [\sigma] \Rightarrow F \le 336\text{kN}$

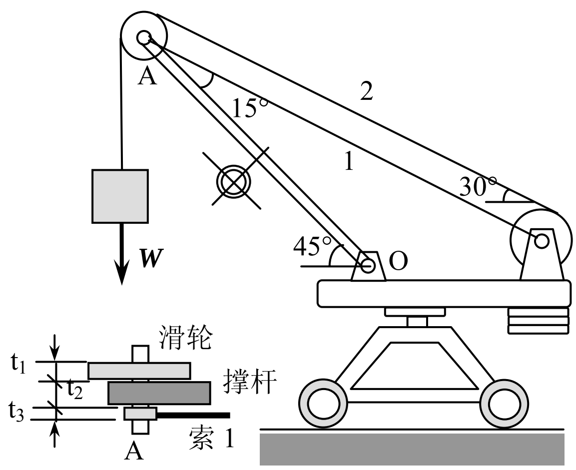
取 $F = 245.3\text{kN}$

综上所述，要保证搭接接头安全，其可传递的最大载荷为245.3kN。

6-11 起重机撑杆 AO 为空心钢管，D_1=105mm, d_1=95mm；钢索 1、2 直径均为 d_2=25mm； 材料许用应力均为[σ]=60MPa，[τ]=50MPa，[σ_j]=80MPa。

1) 试确定起重机允许吊重 ***W***。

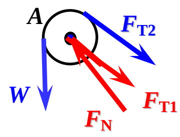
2) 设计 A 处销钉直径 d 和长度 L。



习题 6-11 图

解：(1)求撑杆和钢索的内力。A 点受力如图，由平衡方程，

$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0 \qquad \sum M_A(F) = 0$$



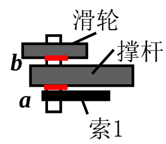
可求得:

$F_{T1} = 1.732W$，$F_{T2} = W$，$F_N = 3.35W$

(2)根据撑杆和钢索的强度条件，确定起重机允许吊重.

撑杆 $F_N = 3.35W \le [\sigma]A_{管}$ $\quad A_{管} = \dfrac{\pi}{4}(D_1^2 - d_1^2)$

$W \le 28\text{kN}$

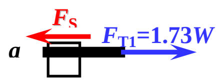


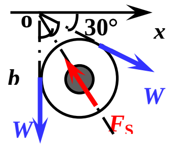
钢索1 $F_{T1} = 1.732W \le [\sigma]_{索}$ $\quad A_{索} = \dfrac{\pi}{4}d_2^2$

$W \le 17\text{kN}$

$\therefore W_{max} = 17\text{kN}$

(3)设计 A 处销钉直径 d 和长度 L



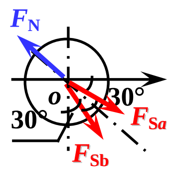


剪切面 a:

$F_{Sa} = F_{T1} = 1.732W$

剪切而b:

$\sum F_x = W\cos 30^\circ - F_{Sb}\cos 60^\circ = 0$



$\therefore F_{Sb} = 1.732W$

剪切强度条件: $\dfrac{F_S}{A} \le [\tau]$ $\qquad \dfrac{1.732}{\frac{\pi}{4}d^2} \le [\tau] \Rightarrow d \ge 27.5\text{mm}$

(4)销钉长度:考虑销钉侧面挤压

$F_{j1} = F_{T1} = 1.732W = 29.44\text{kN}$ $\qquad \dfrac{F_{j1}}{t_3 d} \le [\sigma_j] \Rightarrow t_3 \ge 13.38\text{mm}$

$F_{j2} = F_N = 3.35W = 56.9\text{kN}$ $\qquad F_{j2}/t_2 d \le [\sigma_j] \Rightarrow t_2 \ge 25.89\text{mm}$

$F_{j3} = F_{Sb} = 1.732W = 29.44\text{kN}$ $\qquad \therefore t_1 \ge 13.38\text{mm}$

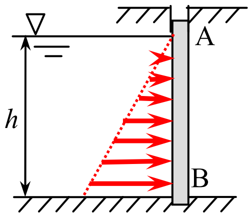
销钉的长度$L \ge t_1 + t_2 + t_3 = 52.65\text{mm}$

第七章 流体力、容器

7-1 某水渠木闸门如图。已知γ =9.8kN/m^3，宽度 b =2m，h =1.5m，求闸门上承受的水的总压力及其作用位置。

解: 闸门上的压力呈线性规律分布，

$$\text{A点的压力集度}: q_{\text{A}} = 0$$
$$\text{B点的压力集度}: q_{\text{B}} = \gamma \cdot h \cdot b = 29.4\text{kN/m}$$



习题 7-1 图

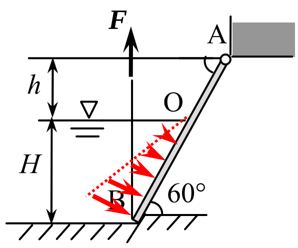
闸门上的总压力大小等于载荷分布图形的面积，

$$F_R = \frac{1}{2} \times q_b \times h = 22.05\text{kN}$$

合力作用在图形的形心，即距A点为 $\frac{2}{3}h = 1\text{m}$ 处.

7-2 如图所示闸门 AB，宽度为 1 米，可绕铰链 A 转动。已知 h =1m，H =3m，γ=9.8kN/m^3，不计闸门自重，求通过拉索开启闸门所须拉力 $\boldsymbol{F}$。

解: 闸门受力如图所示， O 点的载荷集度，



习题 7-2 图

$q_{\text{O}} = 0$， B点的载荷集度 $q_{\text{B}} = \gamma \cdot H \cdot b = 29.4\text{kN}/m$

闸门上的总压力，

$$F_{\text{R}} = \frac{1}{2} \times q_{\text{B}} \times \text{OB} \qquad \text{OB} = \frac{H}{\sin 60^{\circ}}$$

合力作用在距O点 $\frac{2}{3}\text{OB} = 2.309$处. 由平衡方程得，

$$\sum M_{\text{A}} = 0 \qquad F(H+h)/tg60^{\circ} = F_{\text{R}}(\text{AO} + \frac{2}{3}\text{OB})$$

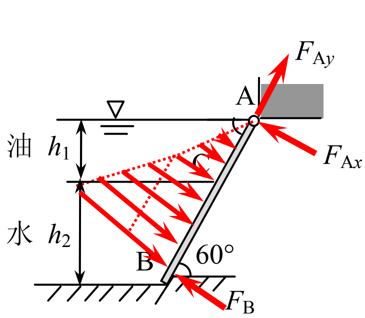
$\therefore F = 76 - 38\text{kN}$(开启所需拉力)

7-3 闸门 AB 宽为 1 米，左侧油深 h_1=1m，$\gamma_{油}$=7.84kN/m^3；水深 h_2=3m，$\gamma_{水}$=9.81kN/m^3，

a) 求闸门所受到的液体总压力及其作用位置。

b) 求 A、B 处的约束力。

c) 求 C 截面上作用内力。



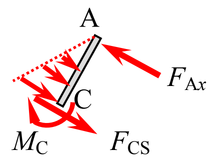
习题 7-3 图

解: a) 求闸门所受到的液体压力。A、C、B 各点的压力集度为，

$q_A = 0 \quad q_C = \gamma \cdot h_1 \cdot b = 7.84\text{kN/m}$

$q_B = q_C + \gamma_{水} \cdot h_2 \cdot b = 37.27\text{kN/m}$

将作用在用门上的分布力分成三部分,各部分合力分别为:



$$F_1 = \frac{1}{2} \times q_C \times AC = \frac{1}{2} q_C \cdot \frac{h_1}{\sin 60^\circ} = 4.53\text{kN}$$

$$F_2 = \frac{1}{2} \cdot (q_B - q_C) \times \frac{h_1}{\sin 60^\circ} = 50.97\text{kN}$$

$$F_3 = q_C \cdot \frac{h_2}{\sin 60^\circ} = 27.16\text{kN}$$

合力大小 $F_R = F_1 + F_2 + F_3 = 82.66\text{kN}$

作用点:设合力作用在距A点x处.

根据合力距定理:

$$F_R \cdot x = F_1 \times \frac{2}{3} AC + F_2 (AC + \frac{2}{3} BC) + F_3 (AC + \frac{1}{2} BC)$$

$F_R x = 258.468 \qquad x = 3.13$

b)求约束反力,闸门受力如图,由平衡方程得,

$\sum M_A = 0 \qquad F_R \cdot x = F_B \cdot AB$

$F_B = 55.95\text{kN} \qquad F_{Ax} = 26.71\text{kN} \qquad F_{Ay} = 0$

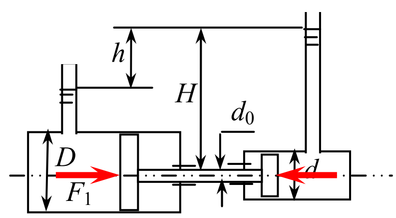
c)C截面内力,受力如图所示,由平衡方程得,

$F_{Ax} - F_1 - F_{CS} = 0 \qquad F_{CS} = 22.18\text{kN}$

$\sum M_C = 0 \qquad M_C + F_1 \cdot \frac{1}{3} AC - F_{Ax} = 0$

$M_C = 29.11\text{kNm}$

7-4 水力变压装置如图。活塞直径 D=0.3m，d=0.1m，H=9m，γ =9.8kN/m^3，求平衡状态时的 h 值。又若活塞杆材料许用应力为[σ]=100MPa，试设计其直径 d_0。



习题 7-4 图

解：活塞受力如图所示

平衡时:$F_1 = F_2$

$$F_1 = (H - h) \cdot \gamma \cdot \frac{\pi}{4} D^2$$

$$F_2 = H \cdot \gamma \cdot \frac{\pi}{4} d^2 = 692.37\text{kN}$$

由$F_1 = F_2$求得

$h = 8m$

活塞为受压杆件,根据强度条件,

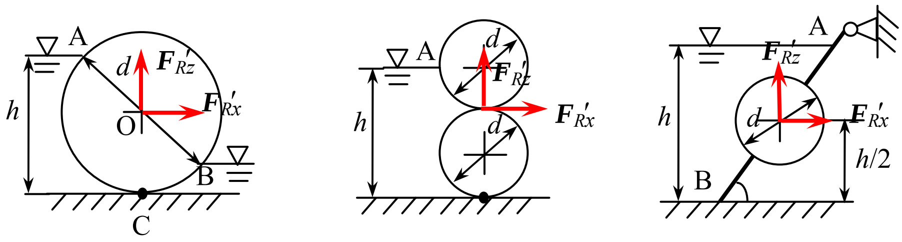
$$\frac{F_2}{\frac{\pi}{4} {d_0}^2} \le [\sigma] \Rightarrow d_0 \ge 14.85\text{mm}$$

取$d_0 = 15\text{mm}$

7-5 求图中壁面上所受到的水的总压力，γ=9.8kN/m^3。

a) d=10m， h=8m， 宽度 b=2m； b) d=4m， h=6m， 宽度 b=1m；

c) d=4m， h=10m， 宽度 b=2m；



(*a*) (b) (c)

习 题 7-5

解 a) 取筒体圆周及与其相切的垂直、水平截面间的水体作为研究对象，水体受力如图 7-5(d)所示。水体上边大气压力不计，左边压力线性分布，其总压力为：

$$F_{1q}=\frac{1}{2}\cdot h\cdot\gamma\cdot h\cdot b=\frac{1}{2}\gamma bh^2$$

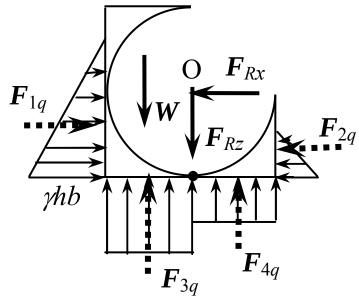


图 7-5 (d)

右边压力也为线性分布，且其总压力为：

$$F_{2q}=\frac{1}{2}\cdot(h-\frac{\sqrt{2}}{2}d)\cdot\gamma\cdot(h-\frac{\sqrt{2}}{2}d)\cdot b=\frac{1}{2}\gamma b(h-\frac{\sqrt{2}}{2}d)^2$$

底面是均匀分布压力，但注意 C 处将水分为二部分，二边压强各为γh 和 $\gamma(h-\frac{\sqrt{2}}{2}d)$；故分布压力载荷为：

$$F_{3q}=\frac{1}{2}\cdot h\cdot\gamma\cdot d\cdot b=\frac{1}{2}\gamma bdh$$

$$F_{4q}=\frac{1}{2}\cdot(h-\frac{\sqrt{2}}{2}d)\cdot\gamma\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}d\cdot b=\frac{\sqrt{2}}{8}\gamma bd(h-\frac{\sqrt{2}}{2}d)$$

水体的重力为：

$$W=[\frac{1}{2}\cdot(h+h-\frac{\sqrt{2}}{2}d)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}d+h\cdot(\frac{d}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{d}{2})]\cdot b\cdot\gamma=\frac{1}{4}\gamma bd[(2+\sqrt{2})h-d]$$

设流体总压力的水平和垂直分力如图，由平衡方程有：

$$F_{Rx}=F_{1q}-F_{2q}=\frac{1}{2}\gamma bh^2-\frac{1}{2}\gamma b(h-\frac{\sqrt{2}}{2}d)^2$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\gamma bh(2h-\frac{\sqrt{2}}{2}d)=\frac{\sqrt{2}}{4}\times9.8\times2\times8\times(2\times8-\frac{\sqrt{2}}{2}\times10)$$

$$=494.98\text{kN}$$

$$F_{Ry}=F_{3q}+F_{4q}-W=\frac{1}{2}\gamma bdh+\frac{\sqrt{2}}{8}\gamma bd(h-\frac{\sqrt{2}}{2}d)-\frac{1}{4}\gamma bd[(2+\sqrt{2})h-d]$$
$$=\frac{1}{8}\gamma bd(d-\sqrt{2}h)=\frac{1}{8}\times 9.8\times 2\times 10\times(10-\sqrt{2}\times 8)$$
$$=-32.14\text{kN}$$

筒体实际所受流体总压力示如图 7-5（a）所示。同样，因为圆筒壁上各点的水压力均垂直于壁面，过圆心 O，故其合力（总压力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}$）也必过 O 点。

解 b) 取筒体左侧圆周及与其相切的垂直、水平截面间的水体作为研究对象，水体受力如图 7-5(e)所示。水体上边大气压力不计，左边压力线性分布，其总压力为：

$$F_{1q}=\frac{1}{2}\cdot h\cdot\gamma\cdot b\cdot h=\frac{1}{2}\gamma bh^2$$

底面是均匀分布压力，压强为γh，分布压力载荷为：

$$F_{2q}=\frac{1}{2}\cdot\gamma\cdot h\cdot b\cdot d=\frac{1}{2}\gamma bdh$$

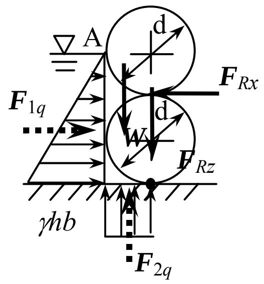


图 7-5 (e)

水体的重力为：

$$W=(h\cdot\frac{1}{2}d-\frac{3}{4}\cdot\frac{\pi d^2}{4})\cdot b\cdot\gamma=\frac{1}{2}\gamma bd(\frac{1}{2}h-\frac{3}{8}\pi d)$$

设流体总压力的水平和垂直分力如图，由平衡方程有：

$$F_{Rx}=F_{1q}=\frac{1}{2}\gamma bh^2=\frac{1}{2}\times 9.8\times 1\times 6^2=176.4\text{kN}$$

$$F_{Ry}=F_{2q}-W=\frac{1}{2}\gamma bdh-\frac{1}{2}\gamma bd(\frac{1}{2}h-\frac{3}{8}\pi d)$$
$$=\frac{1}{4}\gamma bd(h+\frac{3}{4}\pi d)=\frac{1}{4}\times 9.8\times 1\times 4\times(6+\frac{3}{4}\times\pi\times 4)$$
$$=151.12\text{kN}$$

筒体实际所受流体总压力示如图 7-5（b）所示。

解 c) 取筒体左侧圆周的水体作为研究对象，水体及受力如图 7-5(f)所示。水体上边大气压力不计，左边压力线性分布，其总压力为：

$$F_{1q}=\frac{1}{2}\cdot h\cdot\gamma\cdot b\cdot h=\frac{1}{2}\gamma bh^2$$

水体的重力为：

$$W=(h\cdot\frac{1}{2}h-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi d^2}{4})\cdot b\cdot\gamma=\frac{1}{2}\gamma b(h^2-\frac{1}{4}\pi d^2)$$

设流体总压力的水平和垂直分力如图，由平衡方程有：

$$F_{Rx}=F_{1q}=\frac{1}{2}\gamma bh^2=\frac{1}{2}\times 9.8\times 2\times 10^2=980\text{kN}$$

$$F_{Ry}=-W=-\frac{1}{2}\gamma b(h^2-\frac{1}{4}\pi d^2)$$

$$=-\frac{1}{2}\times 9.8\times 2\times(10^2-\frac{1}{4}\times\pi\times 4^2)$$

$$=-856.91\text{kN}$$

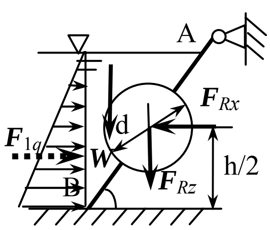
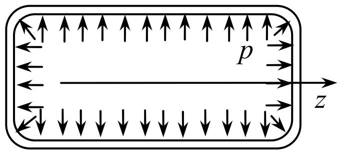


图 7-5 (f)

筒体实际所受流体总压力示如图 7-5（c）所示。

7-6 图示压力容器，内径 d=1m，壁厚 t =10mm，材料许用应力为[σ]=120MPa，试计算其最大许用压力 p。



习题 7-6 图

解：

横截面上的纵向应力 $\sigma_z=\frac{pd}{4t}$

纵截面上的环向应力 $\sigma_C=\frac{pd}{2t}$

强度条件：$\sigma_z\le[\sigma]$

$$\frac{pd}{4t}\le[\sigma]\quad p\le\frac{[\sigma]\cdot 4t}{d}=4.8\text{MPa}$$

$$\sigma_C=\frac{pd}{2t}\le[\sigma]\qquad p\le\frac{[\sigma]\cdot 2t}{d}=2.4\text{MPa}$$

$\therefore$ 压力容器允许的最大压力 $p=2.4\text{MPa}$

7-7 球形压力容器外径 D=2m，工作压力为 20 个大气压，材料许用应力为[σ]=150MPa，试设计其壁厚 t。

解：压力容器内的压力 $p=20\times 0.1013\text{MPa}=2.026\text{MPa}$

应力 $\sigma_C=\frac{pr}{2t}\le[\sigma]$

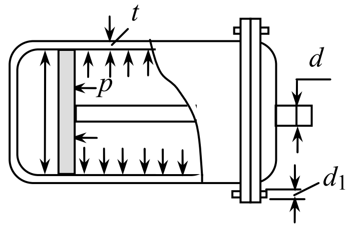
$$t\ge\frac{pr}{2[\sigma]}=\frac{2.026\times 1000}{2\times 150}=6.75\text{mm}$$

7-8 图示油缸内径 D=560mm，油压 p=2.5MPa，活塞杆直径 d=100mm。

a)若活塞杆材料σ_{ys}=300MPa，求其工作安全系数 n。

b)若缸盖用直径 d_1=30mm 的螺栓与油缸连接，螺栓材料许用应力为[σ]=100MPa，求所需的螺栓个数 k。

c)若缸体材料许用应力[σ]=120MPa, 试确定其壁厚 t。



习题 7-8 图

解：活塞所受的轴力 $F_{\mathrm{N}} = p \cdot \dfrac{\pi}{4}(D^2 - d^2) = 595815\mathrm{N}$

$$\sigma = \frac{F_{\mathrm{N}}}{\frac{\pi}{4}d^2} = 75.9\mathrm{MPa}$$

$$\text{强度条件}\sigma \le \frac{\sigma_{ys}}{n} \quad \therefore n \le 3.952$$

b)螺栓承受的拉力 F_{NS}

$$k \cdot F_{\mathrm{NS}} = F_{\mathrm{N}} \qquad \therefore F_{\mathrm{NS}} = \frac{F_{\mathrm{N}}}{k}$$

$$\text{螺栓强度条件:}\frac{F_{\mathrm{NS}}}{\frac{\pi}{4}d_1^{\,2}} \le [\sigma] \quad \frac{F_{\mathrm{N}}/k}{\frac{\pi}{4}d_1^{\,2}} \le [\sigma] \Rightarrow k = 8.433\text{取}k = 9$$

c)缸体的轴向拉力为F_{N},强度条件

$$\frac{F_{\mathrm{N}}}{\frac{\pi}{4}(D+t)^2 - \frac{\pi}{4}D^2} \le [\sigma] \Rightarrow t \ge 5.8\mathrm{mm}$$

7-9 球形压力容器直径为 D=2m，工作压力为 p=2MPa，[σ]=100MPa；二半球用 d=30mm 的螺栓紧固，[σ]=200MPa。试设计其壁厚 t 并确定螺栓数 n。

解：（1）截面设计，由强度条件有，

$$\sigma_{\mathrm{C}} = p \cdot r / 2t \le [\sigma]$$

$$t \ge pr / 2[\sigma] = 10\mathrm{mm}$$

(2)研究下半球，在螺栓连接处受拉力F_{N},由平衡方程得，

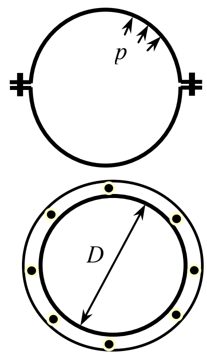
$$F_{\mathrm{N}} = F / n = p \cdot \pi r^2 / n$$

螺栓强度条件

$$\sigma = F_{\mathrm{N}} / (\frac{\pi}{4}d^2) \le [\sigma]$$

$$n \ge 4p\pi r^2 / \pi d^2[\sigma] = 40$$

$\therefore$ 需要40颗螺栓。



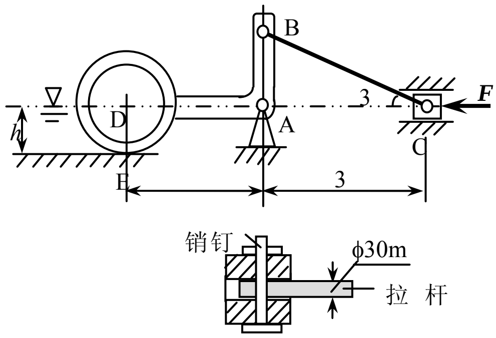
习题 7-9 图

7-10 水槽闸门开启机构如图。水深 h=1m，水槽宽度为 b=2m，γ=9.8kN/m^3。

a) 求为使水槽关闭，所需的最小力 $\boldsymbol{F}$。

b) 若 B 处销钉的直径 d=20mm，材料的许用应力为[τ]=120MPa，[σ_j]=200MPa，试校核其强度。

解：a) 求水对闸门的作用力，



习题 7-10

$F_1 = \gamma \cdot b \cdot h \cdot \frac{1}{2} h = 9800\text{N}$作用在距水面$\frac{2}{3}h$处

$F_2 = \gamma hb \cdot h = 19600\text{N}$

水重$W = \gamma(h \cdot h \cdot b - \pi \cdot \frac{h^2}{4} \cdot b) = 4214\text{N}$

水对闸门作用的合力

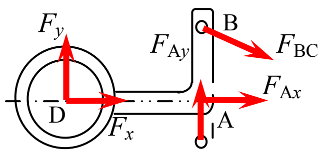
$$\left.\begin{aligned} F_x &= F_1 = 9800\text{N} \\ F_y &= F_2 - W = 15386\text{N} \end{aligned}\right\} \text{合力过}D\text{点}$$

取闸门为研究对象，闸门受力如图所示，由平衡条件得，

闸门刚关闭时，$F_\text{N} = 0, \sum M_A = 0 \Rightarrow$

$F_y \cdot 2 + F_{\text{BC}x} \cdot \text{AB} = 0 \qquad \text{AB} = \text{AC} \cdot \text{tg}30^\circ$

$\therefore F_{\text{BC}x} = 17766\text{N} = F$



F 即为使水槽关闭的最小为 F。

b）校核销钉强度

$F_\text{BC} = F_{\text{BC}x} / \cos 30^\circ = 20515\text{N}$

销钉上的剪力 $F_\text{S} = \frac{F_\text{BC}}{2} = 10257.5\text{N}$

$$\tau = \frac{F_\text{S}}{A} = \frac{F_\text{S}}{\frac{\pi}{4} d^2} = 32.7\text{MPa} < [\tau]$$

$F_\text{j} = F_\text{BC} = 20515\text{N}$

$$\sigma_\text{j} = \frac{F_\text{BC}}{A_\text{j}} = \frac{F_\text{BC}}{dt} = 34.2\text{MPa} < [\sigma_\text{j}]$$

满足强度条件。

第八章 圆轴的扭转

8-1 试作图示各杆的扭矩图。

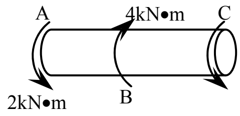
（a）解: 用截面法求AB, BC段的扭矩

$$T_{AB}+2=0$$

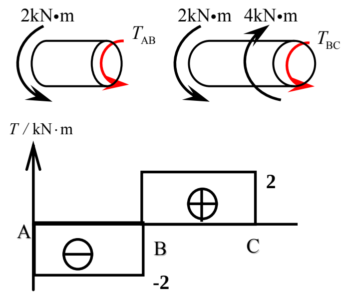
$$T_{AB}=-2(\mathrm{kN\cdot m})$$

$$T_{BC}-4+2=0$$

$$T_{BC}=2(\mathrm{kN\cdot m})$$



(a)



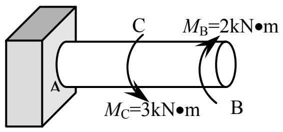
（b）解：用截面法求BC，AC段的扭矩

$$T_{BC}+2=0$$

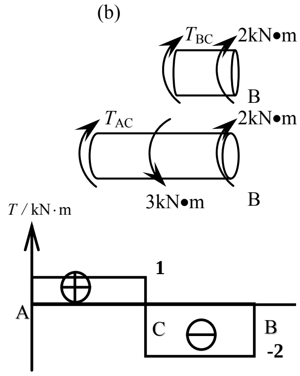
$$T_{BC}=-2(\mathrm{kN\cdot m})$$

$$T_{AC}+2-3=0$$

$$T_{AC}=1(\mathrm{kN\cdot m})$$



(b)



（c）解：用截面法求AB、BC、CD、DE各段的

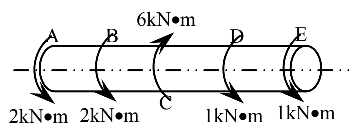
扭矩得，

$$T_{AB}=-2(\mathrm{kN\cdot m})$$

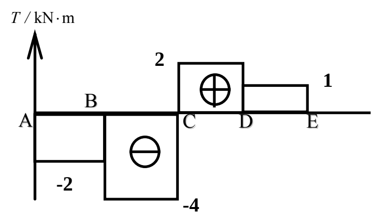
$$T_{BC}=-4(\mathrm{kN\cdot m})$$

$$T_{DC}=2\ (\mathrm{kN\cdot m})$$

$$T_{DE}=1(\mathrm{kN\cdot m})$$



(c)



8-2 一实心圆杆直径d=100mm，扭矩M_T=100kN•m，试求距圆心d/8、d/4及d/2处的剪应力，并绘出横截面上剪应力分布图。

解：$\tau = \dfrac{T}{I_\rho}\rho$　　对空心圆轴：$I_\rho = \dfrac{\pi}{32}d^4$

$$\therefore I_\rho = \frac{\pi}{32}\times(100)^4 = 9812500\text{mm}^4$$

距园心$\dfrac{d}{8}$处的剪应力：

$$\tau = \frac{T}{I_\rho}\cdot\frac{d}{8} = \frac{100\times10^6}{9812500}\times\frac{100}{8} = 127.4\text{MPa}$$

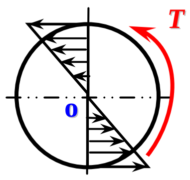
距园心$d/4$处的剪应力：

$$\tau = \frac{T}{I_\rho}\cdot\frac{d}{4} = 254.8\text{MPa}$$

距园心$\dfrac{d}{2}$处的剪应力：

$$\tau = \frac{T}{I_\rho}\cdot\frac{d}{2} = 509.6\text{MPa}$$

横截面上剪应力分布图为：



8-3 圆轴A端固定，受力如图。AC=CB=1m，剪切弹性模量G=80GPa，试求：

(1) 实心和空心段内的最大和最小剪应力，并绘出横截面上剪应力分布图；

(2))B截面相对A截面的扭转角φ_{BA}。

解：作园轴的扭矩图，d_1=80, d_2=60

(1)求AC、BC段的最大最小剪应力。

$$I_{\rho AC} = \frac{\pi}{32}d_1^4 = \frac{\pi}{32}\times80^4 = 4019200\text{mm}^4$$

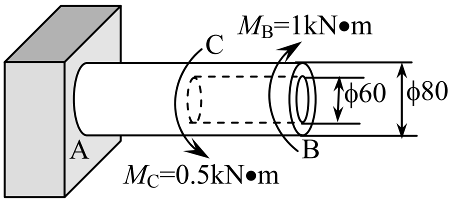
$$I_{\rho BC} = \frac{\pi}{32}(d_1^4 - d_2^4) = 2747500\text{mm}^4$$

$$\tau_{AC\max} = \frac{T_{AC}}{I_{\rho AC}}\cdot\frac{d_1}{2} = 14.56\text{MPa}$$

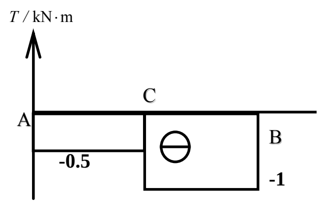
$$\tau_{AC\min} = \frac{T_{AC}}{I_{\rho AC}}\cdot\frac{d_2}{2} = 10.92\text{MPa}$$

(2)B截面相对于A截面的扭转角

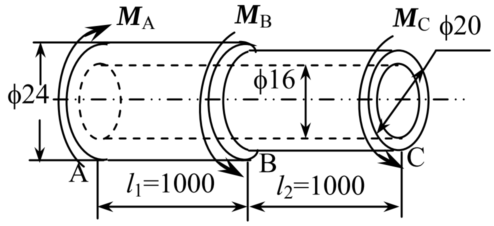
$$\varphi_{AB} = \varphi_{AC} + \varphi_{BC} = \left(\frac{T_{AC}l}{GI_{\rho AC}} + \frac{T_{BC}l}{GI_{\rho BC}}\right)\times\frac{180^\circ}{\pi} = 0.35^\circ$$

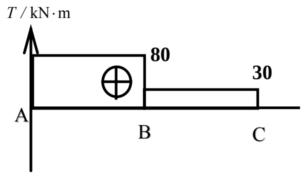


习题 8-3 图



8-4 阶梯形空心圆轴如图所示。已知A、B和C处的外力偶矩分别为M_A=80N•m、M_B=50N•m、M_C=30N•m，材料的剪切弹性模量G=80GPa，轴的许用剪应力[τ]=60MPa，许用扭转角[θ]=1°/m，试校核轴的强度与刚度。





习题 8-4 图

解：

AB段：$d_1 = 24\text{mm}$　　$d_2 = 16\text{mm}$

BC段：$d_1 = 20\text{mm}$　　$d_2 = 16\text{mm}$

作圆轴的扭矩图如图所示。

$$I_{\rho\text{AB}} = \frac{\pi}{32}(24^4 - 16^4) = 26124.8\text{mm}^4$$

$$I_{\rho\text{BC}} = \frac{\pi}{32}(20^4 - 16^4) = 9269.28\text{mm}^4$$

求各段的最大剪应力：

$$\tau_{\text{AB}\max} = \frac{T_{\text{AB}}}{I_{\rho\text{AB}}} \cdot \frac{24}{2} = 36.75\text{MPa} < [\tau]$$

$$\tau_{\text{AB}\max} = \frac{T_{\text{BC}}}{I_{\rho\text{BC}}} \cdot \frac{20}{2} = 32.37\text{MPa} < [\tau]$$

满足强度条件.

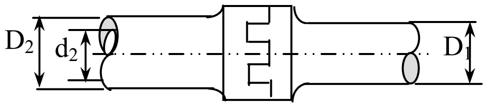
最大扭转角发生在AB段,

$$Q_{\text{AB}} = \frac{T_{\text{AB}}}{GI_{\rho\text{AB}}} = \frac{80000}{80000 \times 26124.8} \times \frac{180}{\pi}$$

$$= 0.0022^\circ / \text{mm} = 2.2^\circ / \text{m} > [\theta]$$

不满足刚度要求。

8-5 实心轴和空心轴通过牙嵌式离合器连接在一起。已知其转速n =98r/min，传递功率N_p=7.4kW，轴的许用剪应力[τ]=40MPa。试设计实心轴的直径D_1，及内外径比值为α=0.5的空心轴的外径D_2和内径d_2。



习题 8-5 图

解：（1）计算外力偶距

$$M = 9.55\frac{N\text{p}}{n} = 9.55\times\frac{7.4}{98} = 0.72\text{kNm}$$

$$\text{实心轴}: I_\rho = \frac{\pi}{32}D^4$$

$$\text{强度条件}: \tau_{\max} = \frac{T}{I_\rho}\cdot\frac{D}{2} = \frac{m}{I_\rho}\cdot\frac{D}{2} \le [\tau]$$

$$\frac{0.72\times10^6}{\frac{\pi}{32}D^4}\cdot\frac{D}{2} \le [\tau] \Rightarrow D \ge 45.1\text{mm}$$

$$\text{空心轴}: I_\rho = \frac{\pi}{32}(D^4{}_2 - d_2{}^4)$$

$$= \frac{\pi}{32}\left((2d_2)^4 - d_2{}^4\right) = \frac{15\pi}{32}d_2{}^4$$

$$\text{强度条件}: \tau_{\max} = \frac{T}{I_\rho}\cdot\frac{D_2}{2} = \frac{M}{\frac{15\pi}{32}d_2{}^4}\cdot d_2 \le [\tau] \Rightarrow d_2 \ge 23.1\text{mm}$$

$$D_2 = 2d_2 = 46.2\text{mm}$$

8-6 机械设计中，初步估算旋转轴直径时，强度与刚度条件常分别采用下列公式：

$$d \ge A(N_\text{P}/n)^{1/3} \quad ; \quad d \ge B(N_\text{P}/n)^{1/4}$$

式中N_P为功率(kW)，n为转速(r/min)。试推证上述公式并导出A、B的表达式。

解：旋转轴的强度条件：$\tau_{\max} \le [\tau]$

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_\rho} \qquad T = 9.55\frac{N\text{p}}{n}(\text{kN}\cdot\text{m}) = 9550(\frac{N\text{p}}{n})(N\cdot m) \qquad W_\rho = \frac{\pi}{16}d^3$$

$$\therefore \tau_{\max} = \frac{9550(\frac{N\text{p}}{n})}{\frac{\pi}{16}d^3} \le [\tau] \qquad 9550(\frac{N\text{p}}{n}) \le [\tau]\cdot\frac{\pi}{16}d^3$$

$$d \ge \frac{36.51}{([\tau])^{1/3}}(\frac{N\text{p}}{n})^{1/3} \qquad \therefore A = \frac{36.51}{[\tau]^{1/3}}$$

$$\text{旋转轴的刚度条件}: \theta_{\max} \le [\theta]$$

$$\frac{T}{GI_\rho}\cdot\frac{180}{\pi} \le [\theta] \qquad \frac{9550(\frac{N\text{p}}{n})}{G\cdot\frac{\pi}{32}d^4}\cdot\frac{180}{\pi} \le \theta$$

$$d \ge \frac{48.6}{([\theta]\cdot G)}(\frac{N\text{p}}{n})^{1/4} \qquad \therefore B = -\frac{48.6}{([\theta]G)^{1/4}}$$

8-7 空心钢轴的外径D=100mm，内径d=50mm，材料的剪切弹性模量G=80GPa。若要求轴在2m内的最大扭转角不超过1.5°，试求所能承受的最大扭矩及此时轴内的最大剪应力。

$$解:I_\rho=\frac{\pi}{32}(D^4-d^4)=9199218.75\text{mm}^4$$

$$刚度条件:\varphi=\frac{Tl}{GI_\rho}=\frac{T\times 2000}{80000\times 9199218.75}\times\frac{180}{\pi}\le 1.5$$

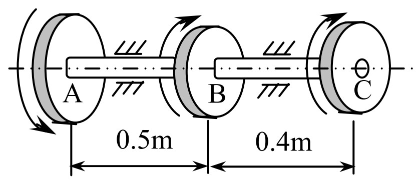
$$\therefore T\le 9.63\text{kN}\cdot\text{m}$$

即钢轴所能承受的最大扭矩为$9.63\text{kN}\cdot\text{m}$

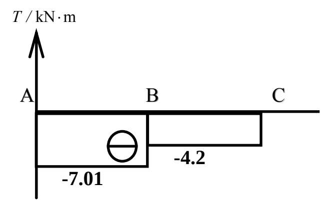
求轴内最大剪应力

$$\tau_{\max}=\frac{T}{I_\rho}\cdot\frac{D}{2}=\frac{9.63\times 10^6}{9199218.75}\times\frac{100}{2}=52.3\text{MPa}$$

8-8 传动轴的转速n=500r/min，主动轮A输入功率N_{pA}=367kW，从动轮B、C分别输出功率N_{pB}=147kW、N_{pC}=220kW。已知材料的许用剪应力[τ]=70MPa，材料的剪切弹性模量G=80GPa，许用扭转角[θ]=1°/m。试确定AB段的直径d_1和BC段的直径d_2。



习题 8-8 图



解：计算外力偶矩

$$M_{\text{A}}=9.55\frac{N_{\text{pA}}}{n}=7.01\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{\text{B}}=9.55\frac{N_{\text{pB}}}{n}=2.81\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$M_{\text{C}}=9.55\frac{N_{\text{pC}}}{n}=4.20\text{kN}\cdot\text{m}$$

作轴的扭矩图如图所示.

$$I_{\rho\text{AB}}=\frac{\pi}{32}d_1^{\ 4}\qquad I_{\rho\text{BC}}=\frac{\pi}{32}d_2^{\ 2}$$

$$强度条件:\tau_{\text{AB}\max}=\frac{T_{\text{AB}}}{I_{\rho\text{AB}}}\cdot\frac{d_1}{2}\le[\tau]$$

$$\therefore d_1\ge 79.9\text{mm}$$

$$\tau_{\text{AC}\max}=\frac{T_{\text{BC}}}{I_{\rho\text{BC}}}\cdot\frac{d_2}{2}\le[\tau]$$

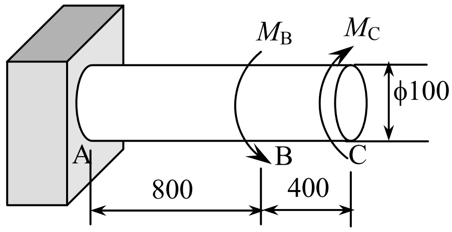
$$\therefore d_2\ge 6.74\text{mm}$$

$$刚度条件:\theta_{\text{AB}}=\frac{T_{\text{AB}}}{G_{I\rho}}\le[\theta]\Rightarrow d_1\ge 84.6\text{mm}$$

$$\theta_{\text{BC}}=\frac{T_{\text{BC}}}{G_{I\rho}}\le[\theta]\Rightarrow d_2\ge 74.4\text{mm}$$

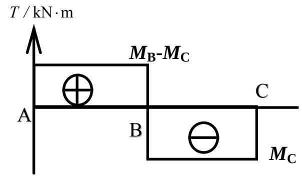
综上所述,AB段的直径d_1为84.6mm, AC段的直径d_2为74.4mm.

8-9 一端固定的钢制圆轴如图。在转矩M_B和M_C的作用下，轴内产生的最大剪应力为40.8MPa，自由端转过的角度为φ_{AC}=0.98×10^{-2}rad。已知材料的剪切弹性模量G=80GPa，试求作用在轴上的转矩M_B和M_C的大小。



习题 8-9 图

解：作轴的扭矩图如图所示



$$I_\rho = \frac{\pi}{32}d^4 = \frac{\pi}{32}\times 100^4 = 9812500\text{mm}^4$$

轴内产生的最大剪应力发生在BC段，

$$\tau_{\max} = \frac{T}{I_\rho}\cdot\frac{d}{2} = 40.8$$

$$\therefore T = M_{\text{C}} = 8.01\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$\varphi_{\text{AC}} = \varphi_{\text{AB}} + \varphi_{\text{BC}} = \frac{(M_{\text{B}} - M_{\text{C}})\cdot L_{\text{AB}}}{G\cdot I_\rho} - \frac{M_{\text{C}}\cdot L_{\text{BC}}}{GI_\rho}$$

$\varphi_{\text{AC}} = 0.98\times 10^{-2}\,rad$代入上式求得,

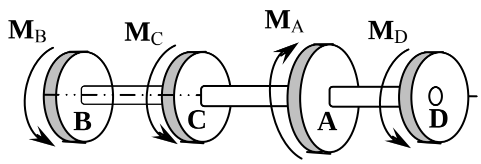
$$M_{\text{B}} = 21.63\text{kN}\cdot\text{m}$$

8-10 实心圆轴如图，已知输出扭矩M_B=M_C=1.64kN.m，M_D=2.18kN.m；材料G=80GPa，[τ]=40MPa ，[θ]=1° /m，

a）求输入扭矩M_A；

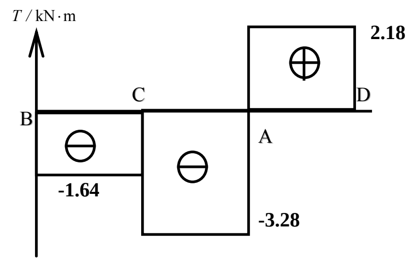
b）试设计轴的直径。

c）按α=0.5重新设计空心轴的尺寸并与实心轴比较重量。



习题 8-10 图

解：a）求输入的扭矩M_A. 根据平衡条件得，



$$M_{\text{A}} = M_{\text{B}} + M_{\text{C}} + M_{\text{D}} = 5.46\text{kN}\cdot\text{m}$$

b)设计轴的直径. 作扭矩图如图所示,

$$\text{AC为危险段}: W_{\rho\text{AC}} = \frac{\pi}{16}d^3$$

$$\text{强度条件}: \tau_{\max} = \frac{T}{W_\rho} \le [\tau]$$

$$\frac{3.28\times 10^6}{\frac{\pi}{16}d^3} \le 40 \qquad \therefore d \ge 74.84\text{mm}$$

$$\text{刚度条件}: \theta = \frac{T}{GI_\rho}\cdot\frac{180}{\pi} \le [\theta] \Rightarrow d \ge 69.96\text{mm}$$

$$\text{综上所述取}\, d = 74.84\text{mm}$$

c)按$\alpha=0.5$设计空心轴的尺寸

强度条件：$\tau_{\max}=\dfrac{T}{W_\rho}\le[\tau]$

$$W_\rho=\frac{\pi}{32}(D^4-d^4)/\frac{D}{2}\qquad D=2d$$

$$\therefore W_\rho=\frac{\pi}{32}\left[(2d)^4-d^4\right]/d=\frac{15\pi}{32}d^3$$

代入强度条件：$\dfrac{3.28\times10^6}{\dfrac{15\pi}{32}d^3}\le 40$

求得：$d\ge 38.2\text{mm},\quad D=2d=76.4\text{mm}$

刚度条件：$\theta=\dfrac{T}{GI_\rho}\times\dfrac{180}{\pi}\le[\theta]$

求得：$d\ge 35.55\text{mm},\quad D=71.1\text{mm}$

综上所述，取$D=76.4\text{mm},\quad d=38.3\text{mm}$

比较空心轴与实心轴的重量，

$$W_{空}=\pi(\frac{D^2}{4}-\frac{d^2}{4})\cdot L\cdot\gamma=3436.5L\cdot\gamma$$

$$W_{实}=\pi\cdot\frac{D^2}{4}L\cdot\gamma=4396.81L\cdot\gamma$$

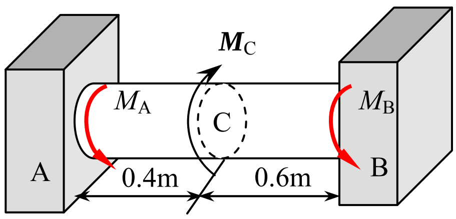
$$\frac{W_{实}}{W_{空}}=1.28$$

即实心轴的重量空心轴重量的1.28倍.

8-11 图中实心圆轴d=50mm，二端固定。

a) 已知M_C=1.64kN•m，求反力偶矩。

b) 若材料为理想塑性且τ_{ys}=100MPa，求屈服扭矩M_S和极限扭矩M_U。



习题 8-11 图

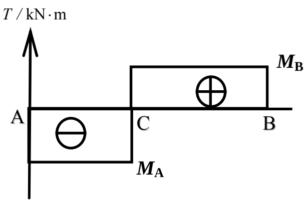
解：a)两端的反力矩如图所示，由平衡方程得，

$$M_A+M_B=M_C$$

变形协调条件：$\varphi_{AB}=\varphi_{AC}+\varphi_{BC}=0$

力与变形的物理关示

$$\varphi_{AC}=-\frac{M_AL_{AC}}{GI_\rho},\qquad \varphi_{BC}=\frac{M_BL_{BC}}{GI_\rho}$$



联立求解得：

$$M_A=\frac{L_{BC}}{L_{AB}+L_{AC}}M_C,\qquad M_B=\frac{L_{AC}}{L_{AB}+L_{AC}}\cdot M_C$$

$$\therefore M_A=0.984\text{kN}\cdot\text{m},\qquad M_B=0.656\text{kN}\cdot\text{m}$$

b)求屈服扭矩：AB段先屈服。

当$T_{\mathrm{AC}}=T_{\mathrm{S}}$时，AC段进入屈服，

$$W_{\rho}=\frac{\pi}{16}d^{3}=24531.25\mathrm{mm}^{3}$$

$$\tau_{\max}=\frac{T_{\mathrm{S}}}{W_{\rho}}=\tau_{ys}=\frac{M_{\mathrm{A}}}{W_{\rho}}$$

$$M_{\mathrm{A}}=T_{\mathrm{S}}=\tau_{ys}\cdot\frac{\pi}{16}d^{3}=2.453\mathrm{kN}\cdot\mathrm{m}$$

$$M_{\mathrm{S}}=(L_{\mathrm{AB}}+L_{\mathrm{AC}})/L_{\mathrm{BC}}\bullet T_{\mathrm{S}}=4.089\mathrm{kN}\cdot\mathrm{m}$$

求极限扭矩M_{U}，此时AC杆完全屈服，$\tau_{\mathrm{AC}}=\tau_{\max}=\tau_{ys}$;

截面上应力对轴心的矩为：$\tau_{ys}\cdot\rho\cdot dA$,

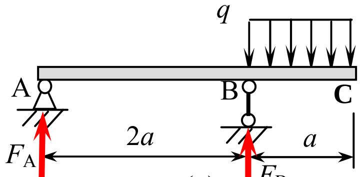
在整个面积上积分为极限扭矩T_{U}

$$T_{\mathrm{U}}=\int_{A}\tau_{ys}\cdot\rho\cdot dA=\tau_{ys}\int_{0}^{R}\rho\cdot 2\pi\rho\cdot d\rho=\frac{2\pi}{3}\tau_{ys}\cdot R^{3}$$

$$=3.27\mathrm{kN}\cdot\mathrm{m}=M_{\mathrm{A}}\quad\therefore M_{\mathrm{U}}=5.45\mathrm{kN}\cdot\mathrm{m}$$

第九章 梁的平面弯曲

9-1 试画出图中各梁的剪力图与弯矩图，并确定梁中的$|F_Q|_{\max}$和$|M|_{\max}$。



(*a*)

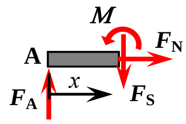
(a) 解：(1) 求支座反力，根据平衡方程得，

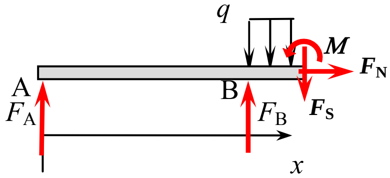
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \quad F_A + F_B = q \cdot a$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow \quad F_B \cdot 2a - q \cdot a \times (2a + \frac{a}{2}) = 0$$

求得：$F_B = \frac{5}{4} q \cdot a$，$\quad F_A = -\frac{1}{4} q \cdot a$

(2) 截面法求内力，





0≤x<2a：F_N=0，

$$F_S = F_A = -\frac{1}{4} qa$$

$$M = F_A x = -\frac{1}{4} qax$$

2a≤x≤3a：F_N=0，

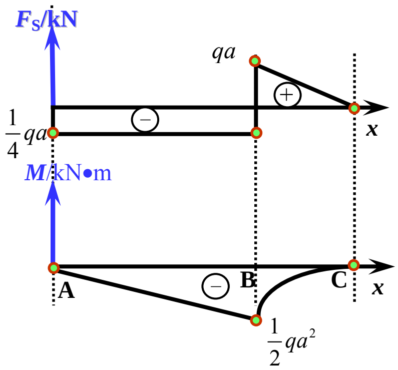
$$F_S = F_A + F_B - q(x-2a)$$

$$= -\frac{1}{4} qa + \frac{5}{4} qa - q(x-2a) = -qx + 3qa$$

$$M = F_A x + F_B (x-2a) - \frac{1}{2} q(x-2a)^2$$

$$= -\frac{1}{4} qax + \frac{5}{4} qa(x-2a) - \frac{1}{2} q(x-2a)^2$$

$$= -\frac{1}{2} qx^2 + 3qax - \frac{9}{2} qa^2$$



(3) 画梁的剪力图与弯矩图，

根据剪力方程和弯矩方程计算A、B、C各点的剪力和弯矩，

$M_A = 0 \qquad M_B = \frac{1}{2} qa^2 \qquad M_C = 0$

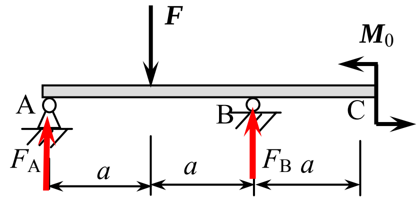
$F_{SA} = -\frac{1}{4} qa \qquad F_{SB}{}^{左} = -\frac{1}{4} qa \qquad F_{SC} = 0$

$F_{SB}{}^{右} = qa$

根据剪力方程和弯矩方程画梁的剪力图与弯矩图如图所示。

显然，在$x = 2a$处有，$|F_S|_{\max} = qa$，$\quad |M|_{\max} = \frac{1}{2} qa^2$

(b) 解：(1) 求支座反力，根据平衡方程得，

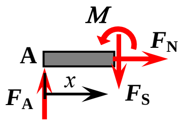


(b)

$$F_{\mathrm{A}}+F_{\mathrm{B}}=F$$
$$F\cdot a-F_{\mathrm{B}}\cdot 2a-M_0=0$$
求得:$F_{\mathrm{A}}=(Fa+M_0)/2a$

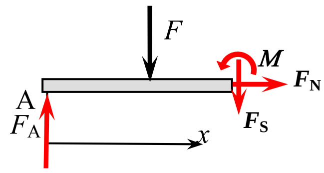
$$F_{\mathrm{B}}=(Fa-M_0)/2a$$

(2) 截面法求内力，



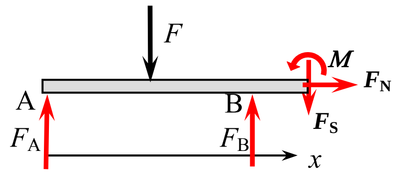
$0\le x<$a：F_{N}=0，

$$F_{\mathrm{S}}=F_{\mathrm{A}}=\left(Fa+M_0\right)/2a$$
$$M=F_{\mathrm{A}}x=\left(Fa+M_0\right)x/2a$$



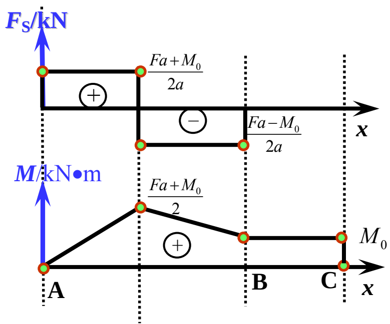
a$\le x<$2a：F_{N}=0，

$$F_{\mathrm{S}}=F_{\mathrm{A}}-F=\left(Fa+M_0\right)/2a-F$$
$$=\left(M_0-Fa\right)/2a$$
$$M=F_{\mathrm{A}}x-F(x-a)$$
$$=\left(Fa+M_0\right)x/2a-F(x-a)$$
$$=\left(F+M_0/2a\right)x+Fa$$



2a$\le x\le$3a：F_{N}=0，

$$F_{\mathrm{S}}=F_{\mathrm{A}}-F+F_{\mathrm{B}}$$
$$=\left(Fa+M_0\right)/2a-F+\left(Fa-M_0\right)/2a$$
$$=0$$
$$M=F_{\mathrm{A}}x-F(x-a)+F_{\mathrm{B}}(x-2a)$$
$$=\left(Fa+M_0\right)x/2a-F(x-a)+\left(Fa-M_0\right)(x-2a)/2a$$
$$=M_0$$



(3) 画梁的剪力图与弯矩图，

根据剪力方程和弯矩方程计算A、B、C各点的剪力和弯矩

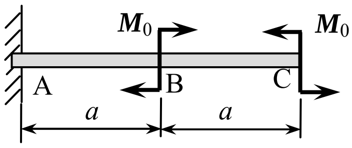
$M_{\mathrm{A}}=0$， $M_{\mathrm{B}}=M_0$， $M_{\mathrm{C}}=M_0$

$F_{\mathrm{SA}}=\dfrac{Fa+M_0}{2a}$， $F_{\mathrm{SB}}{}^{左}=-\dfrac{Fa-M_0}{2a}$ ， $F_{\mathrm{SB}}{}^{右}=0$， $F_{\mathrm{SC}}=0$

根据剪力方程和弯矩方程画梁的剪力图与弯矩图如图所示。

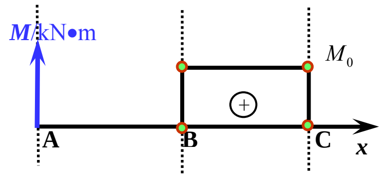
显然，在$x=a$处有，$\left|F_{\mathrm{S}}\right|_{\max}=\dfrac{Fa+M_0}{2a}$， $\left|M\right|_{\max}=\dfrac{Fa+M_0}{2}$

(c) 解：(1) 根据平衡方程，显然固定端A处没有约束反力。AB段没有内力，BC段只受弯矩的作用，弯矩大小为M_0，A、B、C各点的剪力和弯距为，



(c)

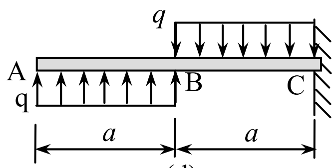
$$M_A = 0 \qquad M_B^{左} = M_0 \qquad M_B^{右} = 0 \qquad M_C = 0$$
$$F_{SA} = 0 \qquad F_{SB} = 0 \qquad F_{SC} = 0$$



（2）画剪力图和弯矩图。各截面均无剪力，弯矩图如图所示。

显然， $|F_S|_{max} = 0$， $|M|_{max} = M_0$

(d) 解：(1) 截面法求内力，

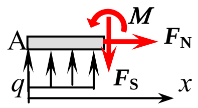


(d)

$0 \le x < a$： $F_N=0$，

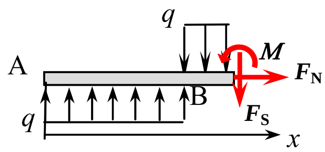
$$F_S = qx$$

$$M = qx \cdot \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}qx^2$$



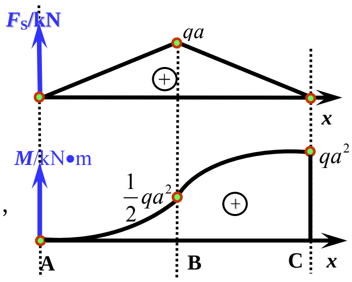
$a \le x \le 2a$： $F_N=0$，

$$F_S = qa - q(x-a)$$
$$= 2qa - qx$$



$$M = qa(x - \frac{1}{2}a) - q(x-a) \cdot \frac{1}{2}(x-a)$$
$$= -\frac{1}{2}q(x-2a)^2 + qa^2$$

(2) 画梁的剪力图与弯矩图，



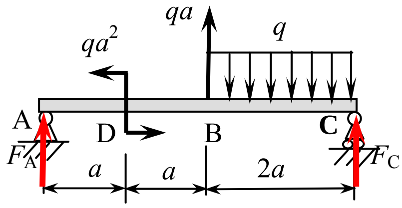
根据剪力方程和弯矩方程计算A、B、C各点的剪力和弯矩，

$$M_A = 0 \qquad M_B = \frac{1}{2}qa^2 \qquad M_C = qa^2$$
$$F_{SA} = 0 \qquad F_{SB} = qa \qquad F_{SC} = 0$$

根据剪力方程和弯矩方程画梁的剪力图与弯矩图如图所示。

显然，在$x = 2a$处有，$|F_S|_{max} = qa$， $|M|_{max} = qa^2$

(e) 解：（1）求支座反力，根据整体平衡条件

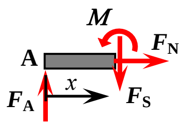


(e)

求得，$F_A=\dfrac{1}{4}qa$，　　$F_C=\dfrac{3}{4}qa$

(2) 截面法求内力，

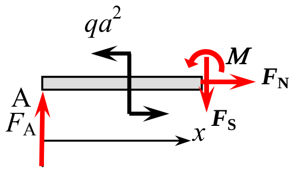
$0\le x<a$：$F_N=0$，



$$F_S=F_A=\frac{1}{4}qa$$

$$M=F_A x=\frac{1}{4}qax$$

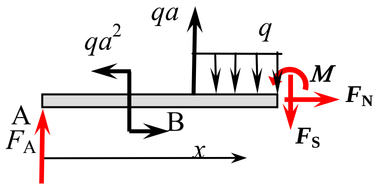
$a<x<2a$：$F_N=0$，



$$F_S=F_A=\frac{1}{4}qa$$

$$M=F_A x-qa^2=\frac{1}{4}qax-qa^2$$

$2a\le x<4a$：$F_N=0$，

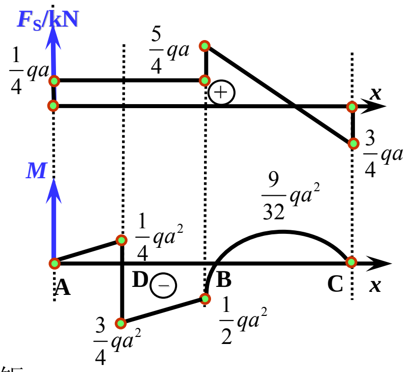


$$F_S=F_A+qa-q(x-2a)=\frac{13}{4}qa-qx$$

$$M=F_A x-qa^2+qa(x-2a)-q(x-2a)\cdot\frac{1}{2}(x-2a)$$

$$=-\frac{1}{2}qx^2+\frac{13}{4}qax-5qa^2$$

(3) 画梁的剪力图与弯矩图，



根据剪力方程和弯矩方程计算*A*、*D*、*B*、*C*各点的剪力和弯矩，

$M_A=0$　　$M_D{}^{左}=\dfrac{1}{4}qa^2$　　$M_D{}^{右}=-\dfrac{3}{4}qa^2$　　$M_B=-\dfrac{1}{2}qa^2$　　$M_C=0$

$F_{SA}=\dfrac{1}{4}qa$　　$F_{SD}=\dfrac{1}{4}qa$　　$F_{SB}{}^{左}=\dfrac{1}{4}qa$　　$F_{SB}{}^{右}=\dfrac{5}{4}qa$　　$F_{SC}=-\dfrac{3}{4}qa$

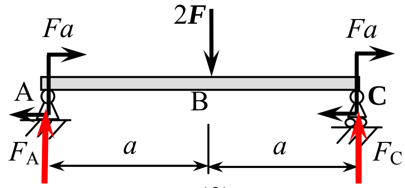
求BC段弯矩的极值，由 $\dfrac{dM}{dx}=-qx+\dfrac{13}{4}qa=0$　得，$x=\dfrac{13}{4}a$，

$x=\dfrac{13}{4}a$ 时，$M=\dfrac{9}{32}qa^2$

根据剪力方程和弯矩方程画梁的剪力图与弯矩图如图所示。

显然，在$x=2a$处有 $|F_S|_{max}=\dfrac{5}{4}qa$，在$x=a$处有 $|M|_{max}=\dfrac{3}{4}qa^2$

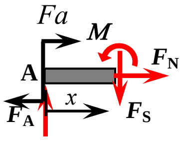
(f) 解：（1）求支座反力，根据整体平衡条件



(f)

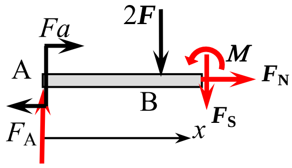
求得：$F_A = 0$，　$F_C = 2F$

(2) 截面法求内力，



0≤x<a：F_N=0，

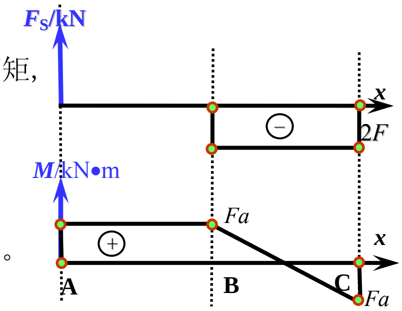
$$F_S = F_A = 0$$
$$M = F_A x + Fa = Fa$$



a≤x<2a：F_N=0，

$$F_S = F_A - 2F = -2F$$
$$M = F_A x + Fa - 2F(x-a) = -2Fax + 3Fa$$

（3）画梁的剪力图与弯矩图，



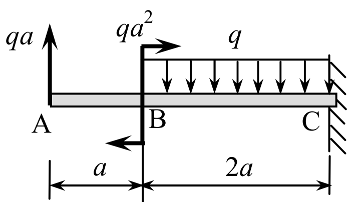
根据剪力方程和弯矩方程计算A、B、C各点的剪力和弯矩，

$F_{SA} = 0$　　$F_{SB}{}^{左} = 0$　　$F_{SB}{}^{右} = -2F$　　$F_{SC} = -2F$

$M_A = Fa$　　$M_B = Fa$　　$M_C = -Fa$

根据剪力方程和弯矩方程画梁的剪力图与弯矩图如图所示。

显然，　$|F_S|_{\max} = 2F$　　$|M|_{\max} = Fa$

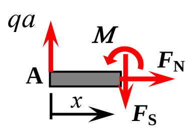


(g)

(g) 解：(1) 截面法求内力，

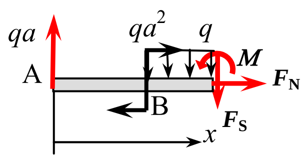
0≤x<a：F_N=0，

$$F_S = qa$$
$$M = qax$$



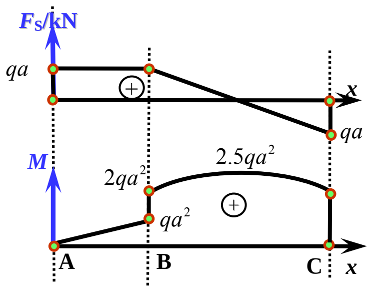
a≤x<3a：F_N=0，

$$F_S = qa - q(x-a) = -qx + 2qa$$
$$M = qax + qa^2 - q(x-a)\cdot\frac{1}{2}(x-a)$$
$$= -\frac{1}{2}qx^2 + 2qax + \frac{1}{2}qa^2$$



（2）画梁的剪力图与弯矩图，

求A、B、C各点的内力值，



$M_A = 0$　　$M_B{}^{左} = qa^2$　　$M_B{}^{右} = 2qa^2$　　$M_C = 2qa^2$

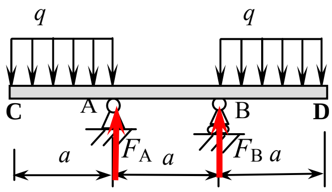
$F_{SA} = qa$　　$F_{SB} = qa$　　$F_{SC} = -qa$

求BC段弯矩的极值，由 $\dfrac{dM}{dx}=-qx+2qa=0$ 得， $x=2a$， $M=2.5qa^2$

根据剪力方程和弯矩方程画梁的剪力图与弯矩图如图所示。

显然，$|F_S|_{\max}=qa$， $|M|_{\max}=2.5qa^2$

(h) 解：（1）求支座反力，根据平衡条件求得，



(h)

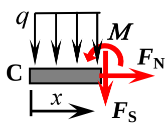
$$F_A=qa \qquad F_B=qa$$

(2) 截面法求内力，

$0\le x<a$：$F_N=0$，

$$F_S=-qx$$

$$M=\frac{1}{2}qx^2$$

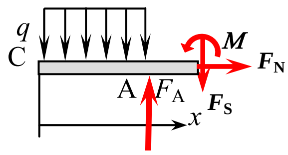


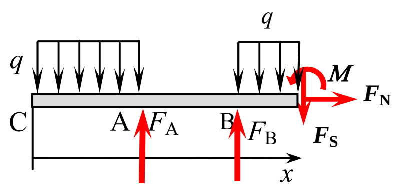
$a\le x<2a$：$F_N=0$，

$$F_S=F_A-qa=qa-qa=0$$

$$M=-qa(x-\frac{1}{2}a)+F_A(x-a)$$

$$=-\frac{1}{2}qa^2$$





$2a\le x<3a$：根据对称性，BD段内力与CA段内力对称。

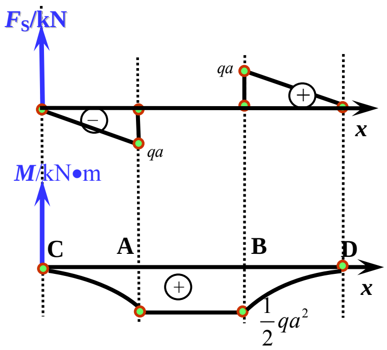
$F_N=0$，

$$F_S=F_A-qa+F_B-q(x-2a)=3qa-qx$$

$$M=-qa(x-\frac{1}{2}a)+F_A(x-a)+F_B(x-2a)-\frac{1}{2}q(x-2a)^2$$

$$=-\frac{1}{2}qx^2+3qax-\frac{9}{2}qa^2$$

（3）画梁的剪力图与弯矩图，



根据剪力方程和弯矩方程计算A、B、C各点的剪力和弯矩，

$F_{SC}=0$ $\quad F_{SA}{}^{左}=-qa$ $\quad F_{SA}{}^{右}=0$ $\quad F_{SB}{}^{左}=0$

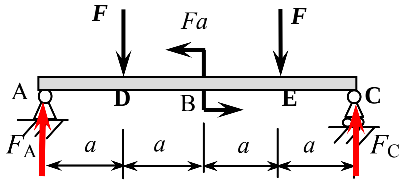
$F_{SB}{}^{右}=qa$ $\quad F_{SD}=0$

$M_C=0$ $\quad M_A=-\dfrac{1}{2}qa^2$ $\quad M_B=-\dfrac{1}{2}qa^2$ $\quad M_D=0$

根据剪力方程和弯矩方程画梁的剪力图与弯矩图如图所示。

显然，$|F_S|_{\max}=qa$， $|M|_{\max}=\dfrac{1}{2}qa^2$

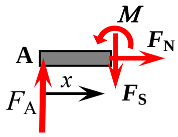
(i) 解：（1）求支座反力，根据整体平衡条件



(i)

求得：$F_A = \frac{5}{4}F$，　　$F_C = \frac{3}{4}$

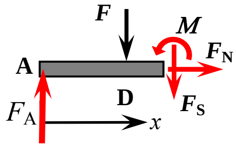
(2) 截面法求内力，



$0 \le x < a$：$F_N = 0$，

$$F_S = F_A = \frac{5}{4}F$$

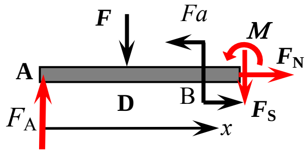
$$M = F_A x = \frac{5}{4}Fx$$



$a \le x < 2a$：$F_N = 0$，

$$F_S = F_A - F = \frac{1}{4}F$$

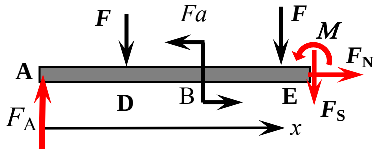
$$M = F_A x - F(x-a) = \frac{1}{4}Fx + Fa$$



$2a \le x < 3a$：$F_N = 0$，

$$F_S = F_A - F = \frac{1}{4}F$$

$$M = F_A x - F(x-a) - Fa = \frac{1}{4}Fx$$



$3a \le x < 4a$：$F_N = 0$，

$$F_S = F_A - F - F = -\frac{3}{4}F$$

$$M = F_A x - F(x-a) - Fa - F(x-3a) = -\frac{3}{4}Fx + 3Fa$$

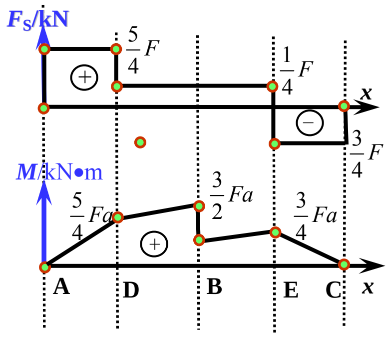
（3）画梁的剪力图与弯矩图，先求A、B、C、D、E各点的内力，

$F_{SA} = \frac{5}{4}F$　　$F_{SD}{}^{左} = \frac{5}{4}F$　　$F_{SD}{}^{右} = \frac{1}{4}F$

$F_{SB} = \frac{1}{4}F$　　$F_{SE}{}^{左} = \frac{1}{4}F$　　$F_{SE}{}^{右} = -\frac{3}{4}F$　　$F_{SC} = -\frac{3}{4}F$

$M_A = 0$　　$M_D = \frac{5}{4}Fa$　　$M_B{}^{右} = \frac{3}{2}Fa$

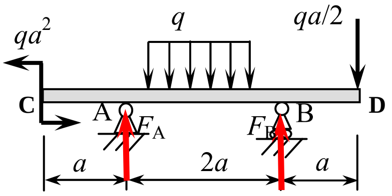
$M_B{}^{右} = \frac{1}{2}Fa$　　$M_E = \frac{3}{4}Fa$　　$M_C = 0$



根据剪力方程和弯矩方程画梁的剪力图与弯矩图如图所示。

可见，　$|F_S|_{max} = \frac{5}{4}F$，　$|M|_{max} = \frac{3}{2}Fa$

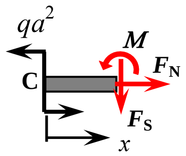
(j) 解：求支座反力，根据整体平衡条件求得，



(j)

$$F_A = \frac{5}{4}qa \qquad F_B = \frac{5}{4}qa$$

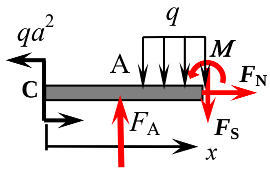
(2) 截面法求内力，



$0 \le x < a$：$F_N = 0$，

$$F_S = 0$$

$$M = -qa^2$$

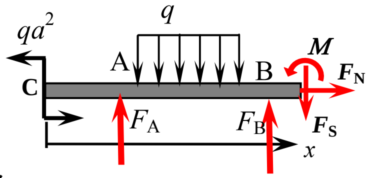


$a \le x < 3a$：$F_N = 0$，

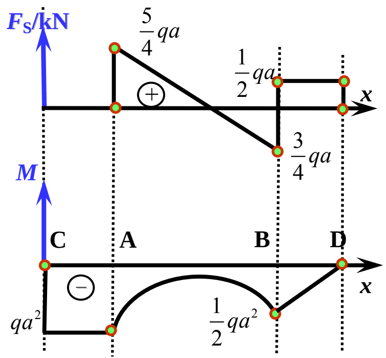
$$F_S = F_A - q(x-a) = -qx + \frac{9}{4}qa$$

$$M = -qa^2 + F_A(x-a) - q(x-a)\cdot\frac{1}{2}(x-a)$$

$$= -\frac{1}{2}qx^2 + \frac{9}{4}qax - \frac{11}{4}qa^2$$



（3）画梁的剪力图与弯矩图，先求A、B、C、D各点的内力，



$$F_{SC} = 0 \qquad F_{SA}{}^{左} = 0 \qquad F_{SA}{}^{右} = \frac{5}{4}qa$$

$$F_{SB}{}^{左} = -\frac{3}{4}qa \qquad F_{SB}{}^{右} = \frac{1}{2}qa \qquad F_{SD} = \frac{1}{2}qa$$

$$M_C = -qa^2 \qquad M_A = -qa^2 \qquad M_B = -\frac{1}{2}qa^2 \qquad M_D = 0$$

求AB段弯矩的极值，由 $\frac{dM}{dx} = -qx + \frac{9}{4}qa = 0$ 得，$x = \frac{9}{4}a$，

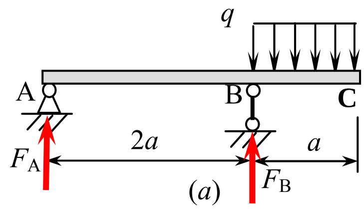
$x = \frac{9}{4}a$ 时，　$M = -\frac{7}{32}qa^2$

根据剪力方程和弯矩方程画梁的剪力图与弯矩图如图所示。

可见，$\left|F_S\right|_{max} = \frac{5}{4}qa$，　$\left|M\right|_{max} = qa^2$

9-2 利用平衡微分方程，快速画出题 9-1 图中各梁的剪力图与弯矩图。

(a) 解：(1)求支座反力，根据平衡方程得，



$$F_A + F_B = q\cdot a$$

$$F_B\cdot 2a - q\cdot a\times(2a+\frac{a}{2}) = 0$$

求得：$F_B = \frac{5}{4}q\cdot a$， $F_A = -\frac{1}{4}q\cdot a$

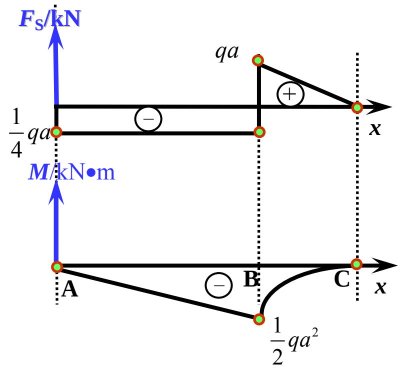
(2)计算A、B、C各点的剪力和弯矩

$M_A = 0$ $M_B = \frac{1}{2}qa^2$ $M_C = 0$

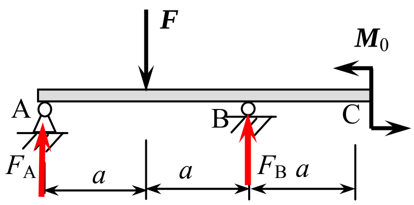
$F_{SA} = -\frac{1}{4}qa$ $F_{SB}{}^{左} = -\frac{1}{4}qa$ $F_{SC} = 0$

$F_{SB}{}^{右} = qa$

(3)利用微分关系,快速作梁的内力图如图。



(b) 解：(1) 求支座反力，根据平衡方程得，



(b)

$$F_A + F_B = F$$

$$F\cdot a - F_B\cdot 2a - M_0 = 0$$

求得:$F_A = (Fa + M_0)/2a$

$F_B = (Fa - M_0)/2a$

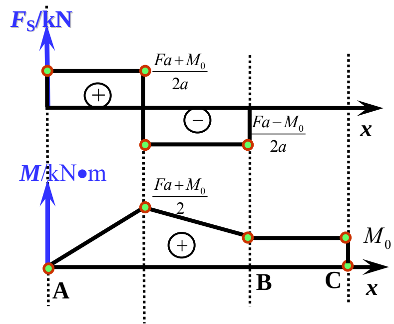
(2) 计算A、B、C各点的剪力和弯矩

$M_A = 0$， $M_B = M_0$， $M_C = M_0$

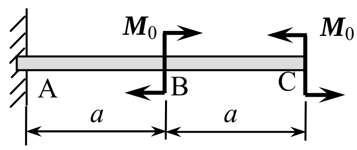
$F_{SA} = \dfrac{Fa+M_0}{2a}$ $F_{SB}{}^{左} = -\dfrac{Fa-M_0}{2a}$

$F_{SC} = 0$ $F_{SB}{}^{右} = 0$

(3) 利用微分关系, 快速作内力图.



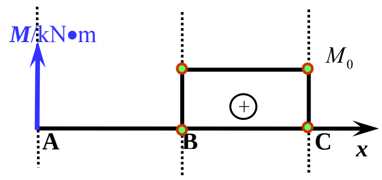
(c) 解：(1) 不用求支座反力，根据平衡条件求A、B、C各点的剪力和弯距



(c)

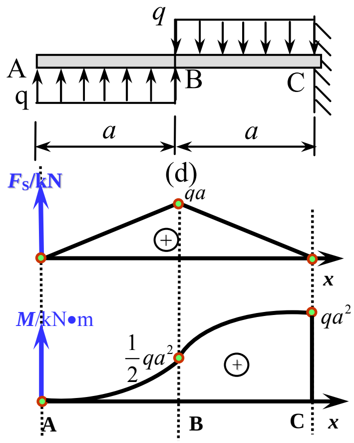
$M_A = 0$ $M_B{}^{左} = M_0$ $M_B{}^{右} = 0$ $M_C = 0$

$F_{SA} = 0$ $F_{SB} = 0$ $F_{SC} = 0$



（2）利用微分关系，快速作内力图。各截面均无剪力，弯矩图如图所示。

(d) 解：根据平衡条件求A、B、C各点的内力

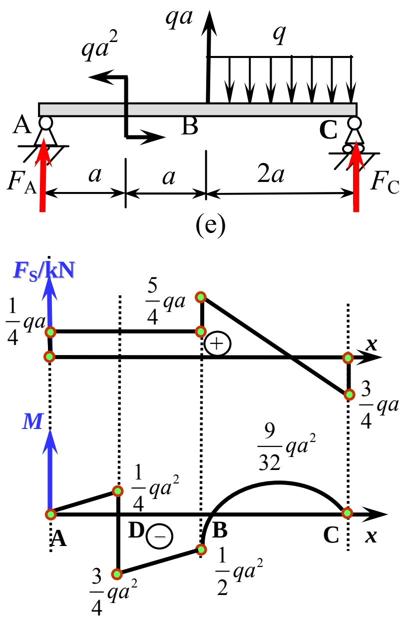


$M_A = 0$　　$M_B = \frac{1}{2}qa^2$　　$M_C = qa^2$

$F_{SA} = 0$　　$F_{SB} = qa$　　$F_{SC} = 0$

利用微分关系快速作用内力图如图所示。

(e) 解：(1) 求支座反力，根据整体平衡条件



求得, $F_A = \frac{1}{4}qa$　　$F_C = \frac{3}{4}qa$

(2) 求A、D、B、C各截面的内力

$M_A = 0$　　$M_D^{左} = \frac{1}{4}qa^2$　　$M_D^{右} = -\frac{3}{4}qa^2$

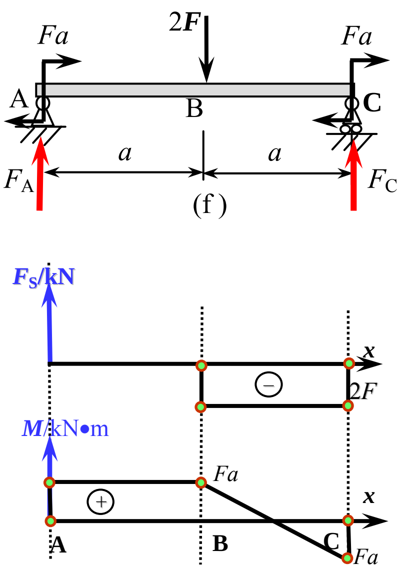
$M_B = -\frac{1}{2}qa^2$　　$M_C = 0$

$F_{SA} = \frac{1}{4}qa$　　$F_{SD} = \frac{1}{4}qa$　　$F_{SB}^{左} = \frac{1}{4}qa$

$F_{SB}^{右} = \frac{5}{4}qa$　　$F_{SC} = -\frac{3}{4}qa$

(3) 利用微分关系快速作内力图如图所示。

(f) 解：(1) 求支座反力，根据整体平衡条件



求得：$F_A = 0$　　$F_C = 2F$

(2) 求A、B、C各点的内力值

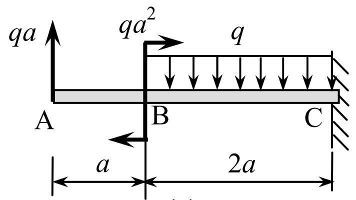
$M_A = Fa$　　$M_B = Fa$　　$M_C = -Fa$

$F_{SA} = 0$　　$F_{SB}^{左} = 0$　　$F_{SB}^{右} = -2F$

$F_{SC} = -2F$

(3) 利用微分关系快速内力图如图所示。

(g) 解：求A、B、C各点的内力值，

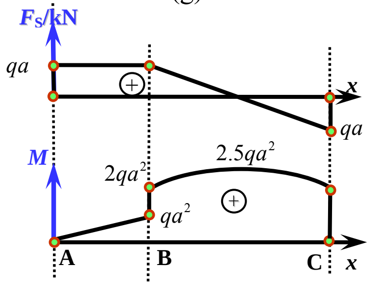


(g)

$$M_{\mathrm{A}}=0 \qquad M_{\mathrm{B}}{}^{左}=qa^2 \qquad M_{\mathrm{B}}{}^{右}=2qa^2$$

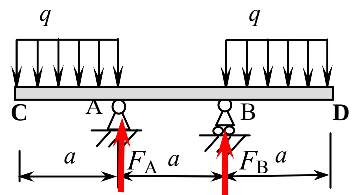
$$M_{\mathrm{C}}=2qa^2$$

$$F_{\mathrm{SA}}=qa \qquad F_{\mathrm{SB}}=qa \qquad F_{\mathrm{SC}}=-qa$$



利用微分关系快速内力图如图所示。

(h) 解：(1) 求支座反力F_{A}、F_{B}，



(h)

根据平衡条件求得：

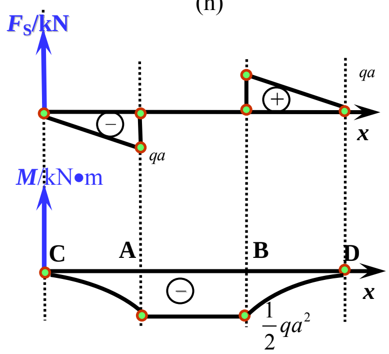
$$F_{\mathrm{A}}=qa \qquad F_{\mathrm{B}}=qa$$

(2) 求C、A、B、D各点的内力，

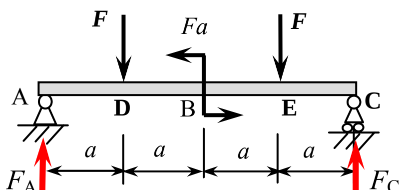
$$M_{\mathrm{C}}=0 \qquad M_{\mathrm{A}}=-\frac{1}{2}qa^2 \qquad M_{\mathrm{B}}=-\frac{1}{2}qa^2 \qquad M_{\mathrm{D}}=0$$

$$F_{\mathrm{SC}}=0 \qquad F_{\mathrm{SA}}{}^{左}=-qa \qquad F_{\mathrm{SA}}{}^{右}=0 \qquad F_{\mathrm{SB}}{}^{左}=0$$

$$F_{\mathrm{SB}}{}^{右}=qa \qquad F_{\mathrm{SD}}=0$$



(i) 解：（1）求支座反力，根据整体平衡条件



(i)

求得：$F_A=\frac{5}{4}F$ ， $F_{\mathrm{C}}=\frac{3}{4}$

（2）求A、B、C、D、E各点的内力，

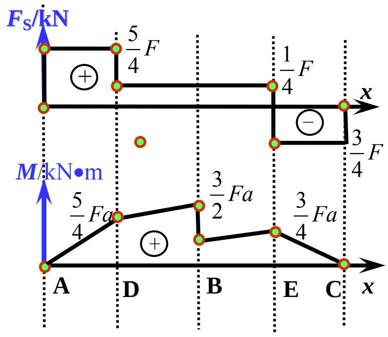
$$M_{\mathrm{A}}=0 \qquad M_{\mathrm{D}}=\frac{5}{4}Fa \qquad M_{\mathrm{B}}{}^{左}=\frac{3}{2}Fa$$

$$M_{\mathrm{B}}{}^{右}=\frac{1}{2}Fa \qquad M_{\mathrm{E}}=\frac{3}{4}Fa \qquad M_{\mathrm{C}}=0$$

$$F_{\mathrm{SA}}=\frac{5}{4}F \qquad F_{\mathrm{SD}}{}^{左}=\frac{5}{4}F \qquad F_{\mathrm{SD}}{}^{右}=\frac{1}{4}F$$

$$F_{\mathrm{SB}}=\frac{1}{4}F \qquad F_{\mathrm{SE}}{}^{左}=\frac{1}{4}F \qquad F_{\mathrm{SE}}{}^{右}=-\frac{3}{4}F$$

$$F_{\mathrm{SC}}=-\frac{3}{4}F$$



（3）利用微分关系快速作用内力图。

(j) 解：求支座反力，根据整体平衡条件求得，

$$F_{\mathrm{A}}=\frac{5}{4}qa \qquad F_{\mathrm{B}}=\frac{5}{4}qa$$

（2）求A、B、C、D各点的内力值，

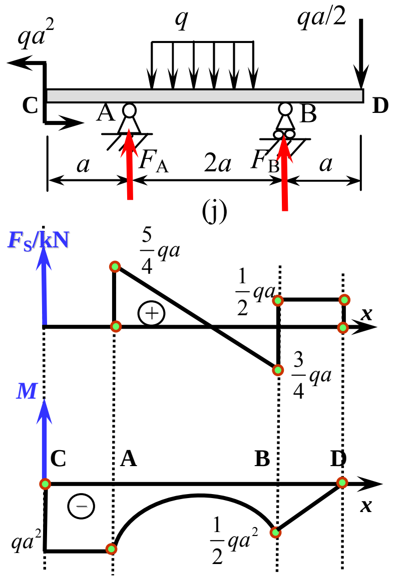
$$M_{\mathrm{C}}=-qa^2 \qquad M_{\mathrm{A}}=-qa^2$$

$$M_{\mathrm{B}}=-\frac{1}{2}qa^2 \qquad M_{\mathrm{D}}=0$$

$$F_{\mathrm{SC}}=0 \qquad F_{\mathrm{SA}}{}^{左}=0 \qquad F_{\mathrm{SA}}{}^{右}=\frac{5}{4}qa$$

$$F_{\mathrm{SB}}{}^{左}=-\frac{3}{4}qa \qquad F_{\mathrm{SB}}{}^{右}=\frac{1}{2}qa \qquad F_{\mathrm{SD}}=\frac{1}{2}qa$$

（3）利用微分关系快速作内力图。



9-3 跳板如图。A 端固支，C 处为滚动铰支承，距离 a 可调。为使不同体重的跳水者跳水时在跳板中引起的最大弯矩都相同，试问距离 a 应随体重 $\boldsymbol{W}$ 如何变化？

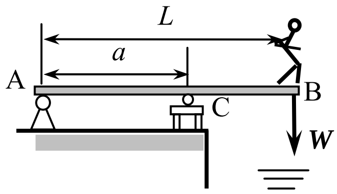
解：梁中最大弯矩发生在 C 截面

$$M_{\mathrm{C}}=W(L-a)$$

要使不同体重的跳水者在跳水时引起的最大弯矩相同，即

$$W-(L-a)=W_1(L-a)=W_2(L-a)=const$$

$$\therefore W(L-a)=const\text{即为}a\text{随}W\text{变化的条件。}$$



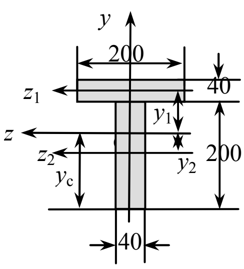
习 题 9-3

9-4 T形截面梁如图所示，试确定中性轴的位置y_c；计算截面惯性矩I_z。若承受的弯矩M=－M_0，求梁中的最大拉应力和最大压应力。

解：设中性轴距最下端为y_c

$$y_c=\frac{A_1y_1+A_2y_2}{A_1+A_2}=\frac{40\times200\times100+40\times200\times220}{40\times200\times2}$$

$$=160(\mathrm{mm})$$



习题 9-4 图

两矩形的形心轴到z轴的距离分别为，

$$y_1=(200-160)+20=60\mathrm{mm}$$

$$y_2=160-100=60\mathrm{mm}$$

截面惯性矩

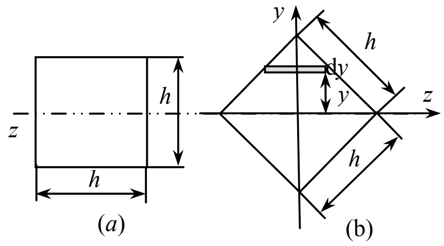
$$
\begin{aligned}
I_z &= I_{z1} + y_1{}^2 A_1 + I_{z2} + y_z{}^2 A_z \\
&= \frac{1}{12}\times 200\times 40^3 + 60^2\times 200\times 40 + \frac{1}{12}\times 40\times 200^3 + 60^2\times 200\times 40 \\
&= 8.53\times 10^7\,\mathrm{mm}^4
\end{aligned}
$$

截面弯矩 $M=-M_0$，则梁上面受拉，下面受压，

$$
\begin{aligned}
\sigma_{\max拉} &= \frac{M_0}{I_z}\cdot y_{\max} = \frac{M_0(\mathrm{kN\cdot m})}{8.53\times 10}\times 80 \\
&= 0.938 M_0(\mathrm{MPa})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_{\max压} &= \frac{M_0}{I_z} y_{z\max} = \frac{M_0(\mathrm{kN\cdot m})\times 10^6}{8.53\times 107}\times 106 \\
&= 1.876 M_0(\mathrm{MPa})
\end{aligned}
$$

9-5 正方形截面处于图示两不同位置时，如二者的最大弯曲正应力σ相等，试求二者作用弯矩之比。



习题 9-5 图

解：图(a)的最大正应力 $\sigma_{\max} = \dfrac{M_a}{W_{za}}$，　$W_{za} = \dfrac{h^3}{6}$

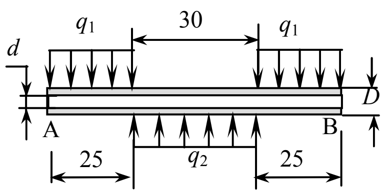
图(b)的最大正应力 $\sigma_{\max} = \dfrac{M_b}{W_{zb}}$，　$W_{zb} = I_{zb} / \dfrac{\sqrt{2}}{2}h$

$$I_{zb} = \int y^2\cdot \mathrm{d}A = 2\int_0^2 y^2\cdot 2(\frac{\sqrt{2}}{2}h - y)\cdot \mathrm{d}y = \frac{1}{12}h^4$$

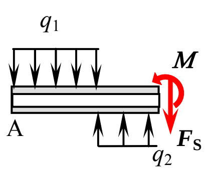
$$W_{zb} = \frac{1}{12}h^4 / \frac{\sqrt{2}}{2}h = \frac{\sqrt{2}}{12}h^3$$

$$\therefore\ \frac{M_a}{M_b} = \frac{W_{zb}}{W_{za}} = \frac{\sqrt{2}}{12}h^3 / \frac{h^3}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

9-6 空心活塞销 AB 受力如图。已知 D=20mm，d=13mm，q_1=140kN/m，q_2=233.3kNm，许用应力[σ]=240MPa，试校核其强度。



习题 9-6 图



解：AB 杆件中点的弯矩最大，为危险截面，求此截面弯矩，

$$M = -q_1\times 25\times(\frac{25}{2}+15) + q_2\times 15\times\frac{15}{2} = -70003.75\,\mathrm{N\cdot mm}$$

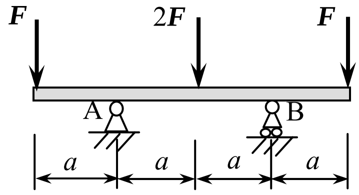
$$I_z = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4) = 6448.7\,\mathrm{mm}^4$$

$$W_z = I_z / \frac{D}{2} = 644.87\,\mathrm{mm}^3$$

$$\therefore \sigma_{\max} = \frac{M}{W_z} = 108.6\,\mathrm{MPa} < [\sigma]$$

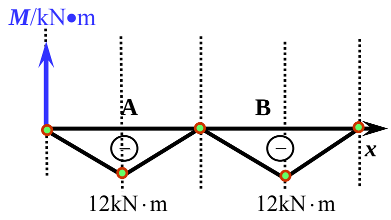
∴ 此活塞销满足强度条件。

9-7 矩形截面木梁如图所示。已知 F=10kN，a=1.2m，许用应力[σ]=10MPa。设截面的高宽比为 h/b=2，试设计梁的尺寸。



习题 9-7 图

解：（1）作梁的弯矩图如图所示，危险截面 A、B 截面。



（2）强度条件：

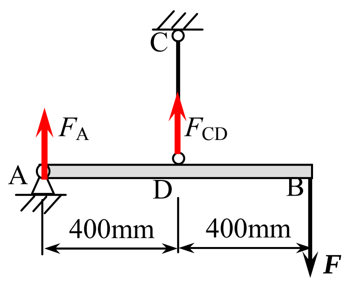
$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_z} \le [\sigma]$$

$M = 12\text{kN}\cdot\text{m}$　　$W_z = \dfrac{bh^2}{6}$　代入上式

求得：　$b = 121.6\text{mm}$

　　　　$h = 2b = 243.3\text{mm}$

9-8 梁AB由固定铰支座A及拉杆CD支承，如图所示。已知圆截面拉杆CD的直径d=10mm，材料许用应力[σ]$_{CD}$=100MPa；矩形截面横梁AB的尺寸为h=60mm，b=30mm，许用应力为[σ]$_{AB}$=140MPa。试确定可允许使用的最大载荷$F_{\max}$。



习题 9-8 图

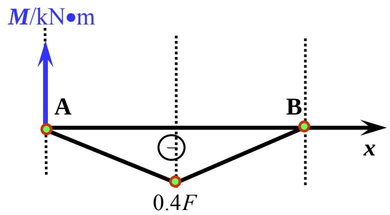
解：求约束反力，梁的受力图如图所示，

平衡方程：

$$F_A + F_{CD} = F$$
$$F_{CD} \times 400 - F \times 800 = 0$$

求解得：$F_{CD} = 2F$

作梁的弯矩图如图所示。



强度条件：

$$\text{CD杆}: \frac{F_{CD}}{A_{CD}} \le [\sigma]_{CD}$$

$$\text{梁的D截面}: \sigma = \frac{M_D}{W_z} \le [\sigma]_{AB}$$

$$A_{CD} = \frac{\pi}{4}d^2 = 78.5\text{mm}^2$$

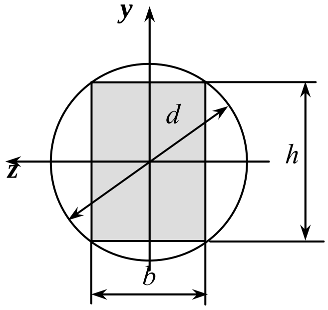
$$W_z = \frac{1}{6}bh^2 = 18000\text{mm}^3$$

由CD杆强度条件求得：$F \le 3.925\text{kN}$

由梁的正应力强度条件求得：$F \le 6.3\text{kN}$

综上所述，结构允许使用的最大载荷为，$F_{\max} = 3.925\text{kN}$

9-9 欲从直径为d的圆木中锯出一矩形截面梁，如图所示。试求使其强度为最大时的截面高宽比h/b。



习题 9-9 图

解：矩形截面梁的弯曲正应力，

$$\sigma = \frac{M}{W_z} = \frac{M}{bh^2}$$

$$b^2 + h^2 = d^2 \qquad h^2 = d^2 - b^2$$

$$\therefore \sigma = \frac{M}{\dfrac{b(d^2-b^2)}{6}} = \frac{6M}{(d^2b-b^3)}$$

要使梁的强度最大$\sigma' = 0$

$$\sigma' = \frac{6M(d^2-3b^2)}{(d^2b-b^3)^2} = 0$$

$$\therefore b = \frac{\sqrt{3}}{3}d, \qquad h = \frac{\sqrt{6}}{3}d$$

$$h/b = \sqrt{2}$$

9-10 梁承受最大弯矩 $M_{\max}$=3.5kN•m 作用，材料的许用应力[σ]=140MPa。试求选用高宽比为 h/b=2 的矩形截面与选用直径为 d 的圆形截面时，两梁的重量之比λ。

解：若选用矩形截面梁，$h/b = 2$， $h = 2b$

$$I_z = \frac{1}{12}bh^3 \qquad W_z = \frac{1}{6}bh^2 = \frac{1}{6}b(2b)^2 = \frac{2}{3}b^3$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{3.5\times10^6}{\dfrac{2}{3}b^3} \le [\sigma] = 140$$

$$\therefore b = 33.48\text{mm}, \quad h = 2b = 66.94\text{mm}$$

若选用圆形截面梁，

$$I_z = \frac{\pi}{64}d^4, \qquad W_z = \frac{\pi}{32}d^3$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{3.5\times10^6}{\pi/32d^3} \le 140$$

$$\therefore d = 63.4\text{mm}$$

重量：$W_{矩形} = h\cdot b\cdot L\cdot\gamma = 2241.15L\gamma$

$$W_{圆形} = \frac{\pi}{4}d^2L\cdot\gamma = 3155.35L\gamma$$

两梁的重量之比为，

$$\lambda = \frac{2241.15\gamma L}{3155.35\gamma L} \approx 0.71$$

9-11 矩形截面悬臂梁受力 **F** 作用，如图所示。已知截面高为 h，宽为 b，梁长为 L。如果 L/h=8，试问梁中的最大正应力$\sigma_{\max}$值与最大剪应力$\tau_{\max}$值之比为多少？

习题 9-11 图

解：梁中最大应力发生在 A 截面

$$M_A = F \cdot L$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_A}{W_z} = \frac{F \cdot L}{\frac{1}{6}bh^2}$$

最大剪应力：

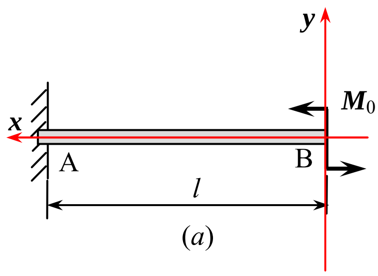
$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{F}{bh}$$

$$\sigma_{\max} : \tau_{\max} = \frac{F \cdot L}{\frac{1}{6}bh^2} : \frac{3}{2}\frac{F}{bh} = \frac{4L}{h}$$

又 $L = 8h$

$$\therefore \sigma_{\max} : \tau_{\max} = 32:1$$

9-12 试用积分法求图示梁的挠度方程和转角方程，并求B处的挠度与转角。已知各梁的EI_z为常量。



(a)

(a) 解：建立如图所示的坐标系，梁的弯矩方程为：

$$M(x) = M_0$$

挠曲线近似微分方程为，

$$y'' = \frac{M(x)}{EI_z} = \frac{M_0}{EI_z}$$

$$y' = \frac{M_0}{EI_z}x + C_1$$

$$y = \frac{M_0}{2EI_z}x^2 + C_1 x + C_2$$

位移边界条件：$x = L$ ，$y = 0$，$y' = 0$

将边界条件代入y, y'的表达式求得，

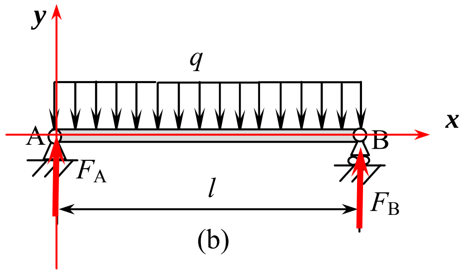
$$\theta = \frac{M_0}{EI_z}x - \frac{M_0}{WI_z}L$$

$$y = \frac{M_0}{2EI_z}x^2 - \frac{M_0 l}{EI_z}x + \frac{M_0 l^2}{2EI_z}$$

B处的挠度与转角为，

$$y_B = \frac{M_0 l^2}{2EI_z}, \qquad \theta_B = -\frac{M_0 l}{EI_z}$$

(b) 解：(1)求支座反力，根据平衡条件求得，



(b)

$$F_A=\frac{1}{2}ql\ ,\qquad F_B=\frac{1}{2}ql$$

（2）梁的弯矩方程

$$M(x)=\frac{1}{2}qlx=-\frac{1}{2}qx^2$$

（3）梁的挠度方程和转角方程，

挠曲线近似微分方程： $EI_z y''=\frac{1}{2}qlx-\frac{1}{2}qx^2$

积分得: $EI_z y'=\frac{1}{4}qlx^2-\frac{1}{6}qx^3+C_1$

$$EI_z y=\frac{1}{12}qlx^3-\frac{1}{24}qx^4+C_1x+C_2$$

边界条件： $x=0$， $y=0$； $x=L$， $y=0$

将边界条件代入挠度方程和转角方程，求得，

$$C_2=0,\quad C_1=-\frac{1}{24}al^3$$

∴梁的转角方程和挠度方程为，

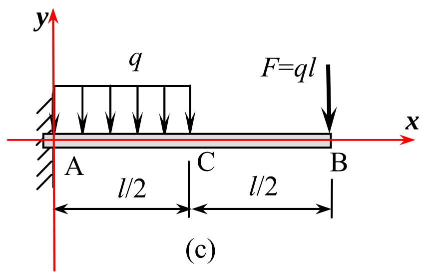
$$\theta=\frac{1}{4EI_z}qlx^2-\frac{1}{6EI_z}qx^3-\frac{1}{24EI_z}ql^3$$

$$y=\frac{1}{12EI_z}qlx^3-\frac{1}{24EI_z}qx^4-\frac{1}{24EI_z}ql^3x$$

梁中点的转角为， $\theta=0$

梁中点的挠度为， $y=\frac{5}{384EI_z}ql^4$

(c) 解：求梁的弯矩方程，



(c)

AC段: $M(x)=-\frac{1}{2}qx^2+\frac{3}{2}qlx-\frac{9}{8}ql^2$

BC段: $M(x)=-qlx-ql^2$

梁的挠曲线近似微分方程：

AC段： $EI_z y_1''=-\frac{1}{2}qx^2+\frac{3}{2}qlx-\frac{9}{8}ql^2$

BC段： $EI_z y_2''=qlx-ql^2$

积分得梁的转角方程和挠度方程为，

AC段：

$$EI_z y_1' = -\frac{1}{6}qx^3 + \frac{3}{4}qlx^2 - \frac{9}{8}ql^2x + C_1$$

$$EI_z y_1 = -\frac{1}{24}qx^4 + \frac{3}{12}qlx^3 - \frac{9}{16}ql^2x^2 + C_1x + C_2$$

BC段：

$$EI_z y_2{}^1 = \frac{ql}{2}x^2 - ql^2x + C_1'$$

$$EI_z y_2 = \frac{ql}{6}x3 - \frac{ql^2}{2}x^2 + C_1'x + C_2'$$

边界条件$: x = 0,\ y_1' = 0，\ y_1 = 0$

将边界条件代入AC段挠度方程和转角方程，求得，

$$C_2 = 0，\quad C_1 = 0$$

位移连续边界条件$: x = \frac{l}{2},\ y_1' = y_2'，\ y_1 = y_2$

代入挠度方程和转角方程，求得，

$$C_1' = -\frac{1}{48}ql^3，\quad C_2' = \frac{1}{384}ql^4$$

梁的转角方程和挠度方程为，

AC段：$\theta = -\frac{1}{6EI_z}qx^3 + \frac{3}{4EI_z}qlx^2 - \frac{9}{8}ql^2x$

$$y = -\frac{1}{24EI_z}qx^4 + \frac{3}{12}qlx^3 - \frac{9}{16}ql^2x^2$$

BC段：$\theta = \frac{ql}{2EI_z}x^2 - \frac{ql^2}{EI_z}x - \frac{ql^3}{48EI_z}$

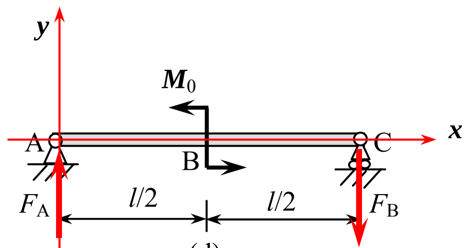
$$y = \frac{ql}{6EI_z}x^3 - \frac{ql}{2EI_z}x^2 - \frac{ql^3}{48EI_z} + \frac{ql^4}{38EI_z}$$

自由端 B 的挠度和转角为，

$$\theta_{\mathrm{B}} = -\frac{25}{48}ql^3(\downarrow)$$

$$y_{\mathrm{B}} = -\frac{135}{384EI_z}ql^4(\downarrow)$$

(d) 解：（1）求约束力，根据平衡条件，求得



(d)

$$F_B = \frac{M_0}{V} \ , \qquad F_A = \frac{M_0}{V}$$

（2）梁的弯矩方程，

AB段：$M(x) = \frac{M_0}{V} x$

BC段：$M(x) = \frac{M_0}{V} x = M_0$

（3）梁的挠曲线近似微分方程，

AB段$: EI_z y_1 ' = \frac{M_0}{V} x$

BC段$: EI_z y_2 '' = \frac{M_0}{V} x - M_0$

积分得，

AB段$: EI_z y_1 ' = \frac{M_0}{2l} x^2 + C_1$

$$EI_z y_1 = \frac{M_0}{6l} x^3 + C_1 x + C_2$$

BC段$: EI_z y_2 ' = \frac{M_0}{2l} x^2 - M_0 x + C_1 '$

$$EI_z y_2 = \frac{M_0}{2l} x^3 - \frac{M_0}{2} x^2 + C_1 ' x + C_2 '$$

边界条件$: x = 0$，$y_1 = 0$; $x = l$，$y_2 = 0$

代入 AB、BC 段的挠曲线方程，求得，$C_2 = 0$，$C_2 ' = \frac{M_0 l}{24}$

位移连续边界条件$: x = \frac{l}{2}$，$y_1 ' = y_2 '$，$y_1 = y_2$

代入挠度方程和转角方程，求得，$C_1 ' = -\frac{11 M_0 l}{24}$，$C_2 ' = -\frac{M_0 l^2}{8}$，$C_1 = -\frac{M_0 l}{24}$

∴ 梁的转角方程和挠度方程为：

AB段$: \theta = \frac{M_0}{2EI_z y} x^2 - \frac{M_0 l}{24EI_z}$

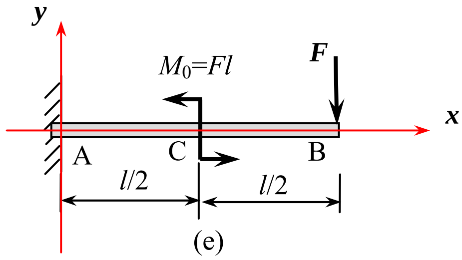
$$y_1 = \frac{M_0}{6EI_z} x^3 - \frac{M_0 l}{24EI_z} x$$

BC段$: \theta = \frac{M_0}{2lEI_z} x^2 - \frac{M_0}{EI_z} x + \frac{11E_0 l}{24EI_z}$

$$y_2 = \frac{M_0}{6lEI_z} x^3 - \frac{M_0}{2EI_z} x^2 + \frac{11M_0 l}{24EI_z} x - \frac{M_0 l^2}{8}$$

梁中点的挠度和转角：$y_B = 0$ ，$Q_B = \frac{M_0 l}{12EI_z}$

(e) 解：求 AC、BC 段的弯矩方程，



(e)

$$AC段: M(x) = Fx$$
$$BC段: M(x) = Fx - Fl$$

AC 段的挠曲线微分方程：

$$EI_z y_1'' = Fx$$

BC 段的挠曲线微分方程：

$$EI_z y_2'' = Fx - Fl$$

积分得，

$$\text{AC段：} EI_z y_1' = \frac{F}{2}x^2 + C_1$$
$$EI_z y_1 = \frac{F}{6}x^3 + C_1 x + C_2$$
$$\text{BC段}: EI_z y_2' = \frac{F}{2}x^2 - Flx + C_1'$$
$$EI_z y_2 = \frac{F}{6}x^3 - \frac{Fl}{2}x^2 + C_1' x + C_2'$$

边界条件: $x = 0$，$y_1' = 0$，$y_1 = 0$

求得: $C_1 = 0$ ， $C_2 = 0$

位移连续条件：$x = \frac{l}{2}$， $y_1' = y_2'$， $y_1 = y_2$

求得：$C_1' = \frac{Fl^2}{2}$ ， $C_2' = -\frac{Fl^3}{8}$

挠度方程和转角方程如下：

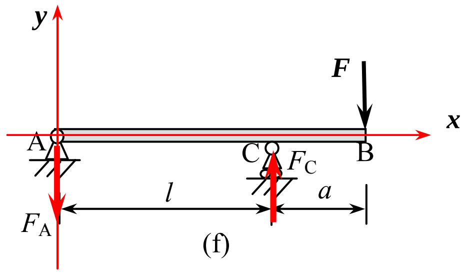
$$\text{AC段}: \theta_1 = \frac{F}{2EI_z}x^2$$
$$y_1 = \frac{F}{6EI_z}x^3$$
$$\text{BC段}: \theta_2 = \frac{F}{2EI_z}x^2 - \frac{Fl}{EI_z}x + \frac{Fl^2}{2EI_z}$$
$$y_2 = \frac{F}{6EI_z}x^3 - \frac{Fl}{2EI_z}x^2 + \frac{Fl^2}{2EI_z}x - \frac{Fl^3}{8EI_z}$$

B 截面的挠度和转角为：

$$y_{\mathrm{B}} = \frac{Fl^3}{24EI_z} \text{ ，} \qquad \theta_{\mathrm{B}} = 0$$

(f) 解：（1）求支座反力，根据平衡条件，求得，

$$F_A = \frac{Fa}{l} \quad , \quad F_C = \frac{F(l+a)}{l}$$



(f)

（2）梁的弯曲方程，

$$\text{AB段}: M(x) = -\frac{Fa}{l}x$$

$$\text{BC段}: M(x) = -F(l+a-x) = Fx - F(l+a)$$

（3）梁的挠曲线微分方程，

$$\text{AB段}: EI_z y_1'' = -\frac{Fa}{l}x$$

$$\text{BC段}: EI_z y_2'' = Fx - F(l+a)$$

积分得：

$$\text{AC段：}\quad EI_z y_1' = -\frac{Fa}{2l}x^2 + C_1$$

$$EI_z y_1 = -\frac{Fa}{6l}x^3 + C_1 x + C_2$$

$$\text{BC段}: EI_z y_2' = \frac{F}{2}x^2 - F(l+a)x + C_1$$

$$EI_z y_2 = \frac{F}{6}x^3 - \frac{F(l+a)}{2}x^2 + C_1' + C_2'$$

边界条件：$x = 0$，$y_1 = 0$；　$x = l$，$y_1 = 0$

求得：$C_2 = 0$，　$C_1 = \dfrac{Fal}{6}$

位移连续条件：$x = l$，$y_1' = y_2'$，$y_1 = y_2$

求得：$C_1' = \dfrac{Fl^2}{2} + \dfrac{2}{3}Fal$，　$C_2' = -\dfrac{Fal^2}{6} - \dfrac{Fl^3}{6}$

（4）梁的挠度方程和转角方程如下：

$$\text{AC段}: \theta_1 = -\frac{Fa}{2lEI_z}x^2 + \frac{Fal}{6EI_z}$$

$$y_1 = -\frac{Fa}{6lEI_z}x^3 + \frac{Fal}{6EI_z}x$$

$$\text{BC段}: \theta_2 = \frac{F}{2EI_z}x^2 - \frac{F(l+a)}{EI_z}x + \frac{Fl^2}{2EI_z} + \frac{2Fal}{3EI_z}$$

$$y_2 = \frac{F}{6EI_z}x^3 - \frac{F(l+a)}{2EI_z}x^2 + \frac{Fl^2}{2EI_z}x + \frac{2Fal}{3EI_z}x - \frac{Fal^2}{6EI_z} - \frac{Fl^3}{6EI_z}$$

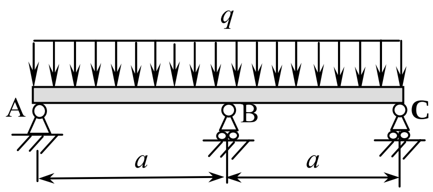
B 截面的挠度和转角为：

$$y_B = -\frac{Fa^2(l+a)}{3EI_z} \quad , \qquad \theta_B = -\frac{Fa(2l+3a)}{6EI_z}$$

*9-13 宽为 b、高为 h 的矩形截面梁静不定连续梁 ABC 如图，弹性模量为 E，屈服强度为σ_{ys}。

1）试求各处支反力。

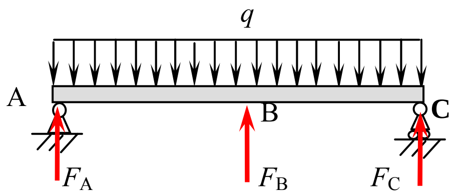
2）试求梁的屈服载荷 q_s 和极限载荷 q_u。



习题 9-13 图

解：1）求支座反力

a)选取静定的基本梁如图



b)梁的平衡条件

$$\begin{cases} F_A + F_B + F_C = 2qa \\ F_B \cdot a + F_C \cdot 2a - q \cdot 2a \cdot a = 0 \end{cases}$$

c) 变形几何条件

$$y_B = y_{B(q)} + y_{B(F_B)} = 0$$

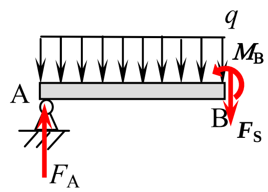
d) 力与变形的物理关系(用积分法或叠加法可求得)，

$$y_{B(q)} = -\frac{5qa^4}{24EI}\ , \qquad y_{B(F_B)} = \frac{F_B a^3}{6EI}$$

联立求解得：$F_A = \dfrac{3}{8}qa$，　$F_B = \dfrac{5}{4}qa$，　$F_C = \dfrac{3}{8}qa$

2）求梁的屈服载荷 q_s 和极限载荷 qu

a) 确定梁的危险截面为 B 截面，此截面的弯矩为，



$$M_B = -\frac{1}{2}qa^2 + \frac{3}{8}qa^2 = -\frac{1}{8}qa^2$$

B截面的最大应力 $\sigma_{max} = \dfrac{M_B}{W_z}$，　$W_z = \dfrac{bh^2}{6}$

$$\sigma_{max} = \frac{\frac{1}{8}qa^2}{\frac{bh^2}{6}} = \frac{3qa^2}{4bh^2}$$

b）当 q 增大到主屈服截荷 q_s 时，B 截面开始进入屈服，

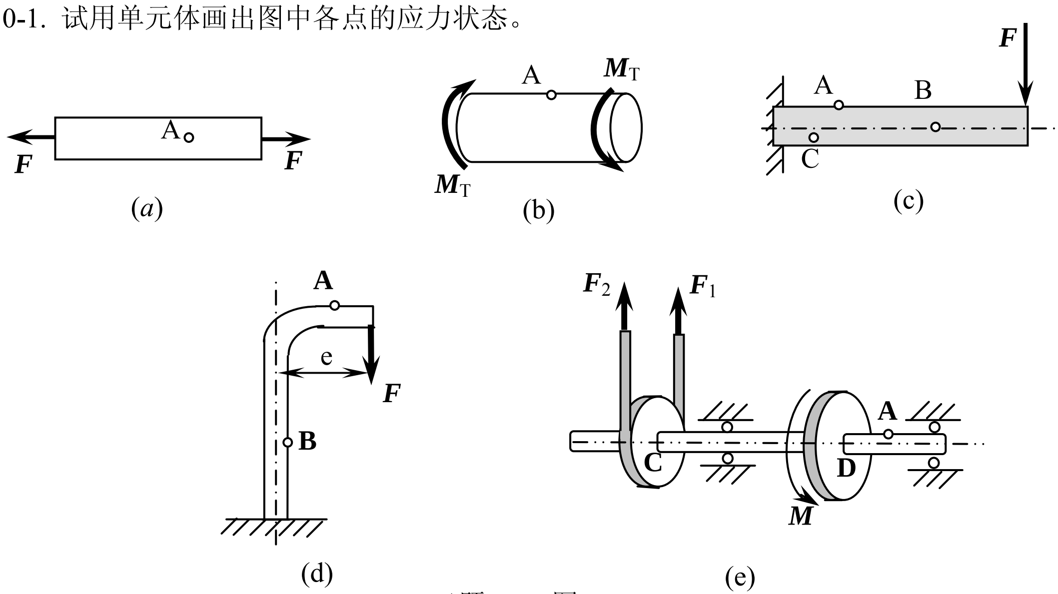
$$\sigma_{max} = \sigma_{ys} = \frac{3q_s a^2}{4bh} \qquad \therefore q_s = \frac{4\sigma_{ys}bh^2}{3a^2}$$

c) 当 q 增大至某一临界值 q_u 时，B 截面各点均达到屈服，中性轴以上应力的合力 $\sigma_{ys} \cdot b \cdot h/2$，中性轴以下应力的合力同样等于 $\sigma_{ys}bh/2$，两力方向相反，形成力偶。其对中性轴的力偶矩为，$\sigma_{ys}bh^2/4 = M_u = \dfrac{1}{8}q_u a^2$。

$$\therefore q_u = \frac{2\sigma_{ys}bh^2}{a^2}$$

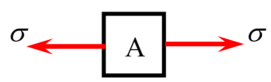
第十章 应力状态、强度理论与组合变形

10-1. 试用单元体画出图中各点的应力状态。

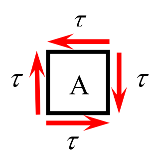


习题 10-1 图

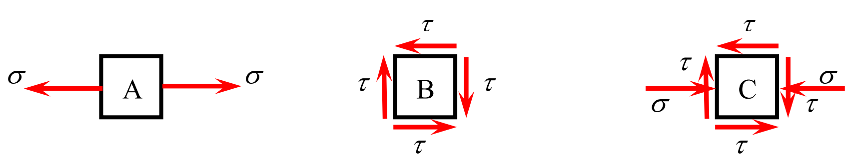
（a）解：过 A 点取微单元体，单元体的左右相邻截面为与轴线垂直的横截面，上下相邻截面分别为与轴线平行的水平截面，前后截面为与轴线平行的竖直截面，单元体厚度为单位长 1。由于物体只受轴向拉力，A 点为单向拉应力状态，如图所示。



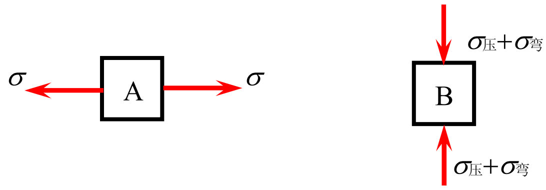
（b）解：过 A 点取单位长为 1 的微单元体，单元体的左右相邻截面为与轴线平行的竖直截面，上下相邻截面为与轴线平行的水平截面，前后截面为与轴线垂直的横截面。由于物体只受纯扭转作用，A 点为纯剪应力状态，如图所示。



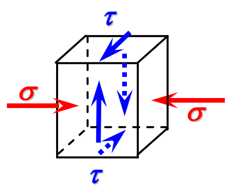
（c）解：过 A、B、C 各点取微单元体，单元体的左右相邻截面为与轴线垂直的横截面，上下相邻截面分别为与轴线平行的水平截面，前后截面为与轴线平行的竖直截面，单元体厚度为单位长 1。物体受横向力 F 作用，各点应力状态如图所示。



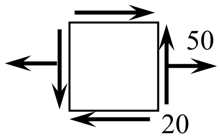
（d）解：过 A、B 各点取微单元体，单元体厚度为单位长 1。A 单元体的左右相邻截面为与轴线垂直的横截面，上下相邻截面分别为与轴线平行的水平截面，前后截面为与轴线平行的竖直截面；B 单元体的上下左右相邻截面为与轴线垂直的横截面，左右相邻截面和前后截面分别为与轴线平行的两个竖直截面；物体受横向力 F 作用，A 点只受弯曲作用，B 点受弯曲和轴向压力作用，A、B 两点应力状态如图所示。



（e）解：过 A 点取单位长为 1 的微单元体，单元体的左右相邻截面为与轴线垂直的横截面，上下相邻截面为与轴线平行的水平截面，前后截面为与轴线平行的竖直截面。由于物体在 A 点受扭转和弯曲作用，A 点应力状态如图所示。



10-2 一点的应力状态如图，单位均为 MPa。1）求主应力和主平面位置；2）求最大剪应力。



(a)

（a） 解：$\sigma_x = 50\text{MPa}$，$\sigma_y = 0$，$\tau_{xy} = -20\text{MPa}$

（1）求主应力和主平面位置

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{\max}\\ \sigma_{\min}\end{matrix}\right\} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \sqrt{(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2})^2 - \tau_{xy}{}^2} = \begin{cases}57.02\text{MPa}\\ -7.02\text{MPa}\end{cases}$$

$$\sigma_1 = \sigma_{\max} = 57.02\text{MPa}, \quad \sigma_2 = \sigma_{\min} = -7.02\text{MPa}$$

主平面 $\quad \text{tg}2\alpha = \dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} = -1.25$

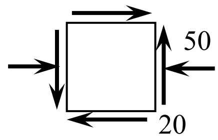
$$\alpha = -25.67^\circ; \quad \alpha + 90^\circ = 64.33^\circ$$

主应力 σ_1 的方位角为 -25.67°，σ_2 的方位角为 64.33°。

（2）最大应力为，

$$\tau_{\max} = \sqrt{(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2 + \tau_{xy}{}^2} = 32.02$$

（b） 解：$\sigma_x = -50\text{MPa}$ ，$\sigma_y = 0$，$\tau_{xy} = -20\text{MPa}$



(b)

（1）求主应力和主平面位置

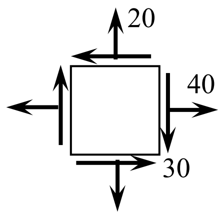
$$\left.\begin{matrix}\sigma_{\max}\\ \sigma_{\min}\end{matrix}\right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + \tau_{xy}{}^2} = \begin{cases}-57.02\text{MPa}\\ 7.02\text{MPa}\end{cases}$$

$\sigma_1 = \sigma_{\max} = 7.02\text{MPa}$， $\sigma_2 = \sigma_{\min} = -57.02\text{MPa}$

主平面：$\text{tg}2\alpha = \dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \Rightarrow \alpha = 25.67^\circ$， $\sigma + 90^\circ = 115.67^\circ$

（2）最大应力 $\tau_{\max} = \sqrt{(\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + \tau_{xy}{}^2} = 32.02\text{MPa}$

（c）解：$\sigma_x = 10\text{MPa}$， $\sigma_y = 20\text{MPa}$



(c)

（1）求主应力和主平面位置

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{\max}\\ \sigma_{\min}\end{matrix}\right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + \tau_{xy}{}^2} = \begin{cases}61.61\text{MPa}\\ -1.63\text{MPa}\end{cases}$$

$\sigma_1 = 61.63\text{MPa}$， $\sigma_2 = -1.63\text{MPa}$

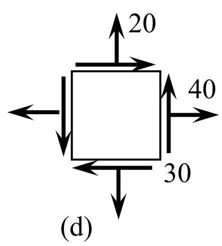
主平面 $\text{tg}2\alpha = \dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} = 0.3333$

$\alpha = 18.44^\circ$， $\alpha + 90^\circ = 108.44^\circ$

（2）最大应力

$$\tau_{\max} = \sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}) + \tau_{xy}{}^2} = 31.63\text{MPa}$$

（d）解：$\sigma_x = 10\text{MPa}$，$\sigma_y = 20\text{MPa}$， $\tau_{xy} = -30\text{MPa}$



(d)

习题 10-2 图

（1）求主应力和主平面位置

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{\max}\\ \sigma_{\min}\end{matrix}\right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2})^2 + \tau_{xy}{}^2} = \begin{cases}61.63\text{MPa}\\ -1.63\text{MPa}\end{cases}$$

主应力 $\sigma_1 = 61.63\text{MPa}$ $\sigma_2 = -1.63\text{MPa}$

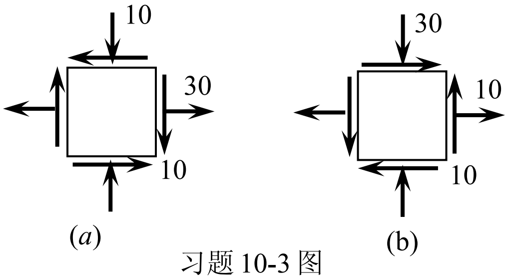
主平面 $\text{tg}2\alpha = \dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} = -0.3333$

$\alpha = -18.44^\circ$， $\alpha + 90^\circ = 71.56^\circ$

（2）最大应力

$$\tau_{\max} = \sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + \tau_{xy}{}^2} = 31.63\text{MPa}$$

10-3 某构件危险点应力状态如图，图中应力的单位均为MPa。E=200GPa，μ=0.3，求其最大拉应力和最大拉应变。



习题 10-3 图

（a）解：$\sigma_x = 30\text{MPa}$， $\sigma_y = -10\text{MPa}$， $\tau_{xy} = 10\text{MPa}$

最大拉应力，

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{\max}\\ \sigma_{\min}\end{matrix}\right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + \tau_{xy}{}^2} = \begin{cases}32.36\text{MPa}\\ -12.36\text{MPa}\end{cases}$$

最大拉应变，

$$\varepsilon_{\max} = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)\right]$$

$\sigma_1 = 32.36\text{MPa}$， $\sigma_2 = 0$， $\sigma_3 = -12.36\text{MPa}$

$$\therefore \varepsilon_{\max} = \frac{1}{200\times 10^3}\left[32.36 - 0.3(0 - 12.36)\right]$$

$$= 18.10^{-4}$$

（b）解：$\sigma_x = 10\text{MPa}$， $\sigma_y = -30\text{MPa}$， $\tau_{xy} = -10\text{MPa}$

最大拉应力，

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{\max}\\ \sigma_{\min}\end{matrix}\right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + \tau_{xy}{}^2} = \begin{cases}12.36\text{MPa}\\ -32.36\text{MPa}\end{cases}$$

$\therefore$ 最大拉应力 $\sigma_1 = 12.36\text{MPa}$

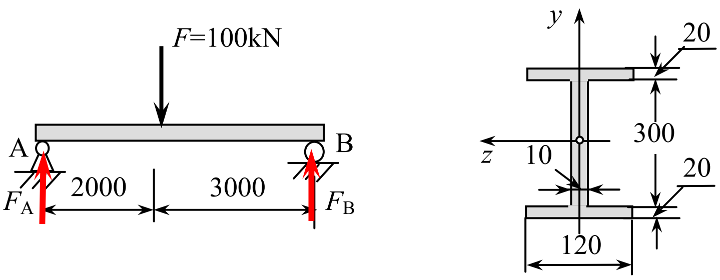
最大拉应变，

$\sigma_1 = 12.36\text{MPa}$， $\sigma_2 = 0$， $\sigma_3 = -32.36\text{MPa}$

$$\varepsilon_{\max} = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]$$

$$= \frac{1}{200\times 10^3}[12.36 - 0.3(0 - 32.36)] = 2.2\times 10^4$$

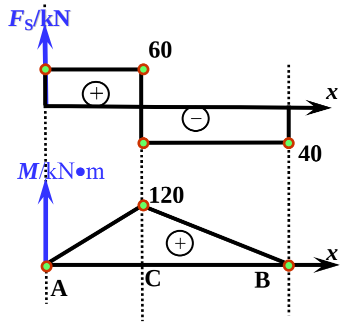
10-4 工字钢截面简支梁如图，材料许用应力为[σ]=160MPa，试按第三强度理论校核其强度。



习题 10-4 图

解：（1）求支座反力并作梁的内力图，由平衡方程可求得，

$$F_A = 60\text{kN}, \quad F_B = 40\text{kN}$$



作梁的内力图如图的示，显然，C截面为危险截面，

$$M_C = 120\text{kN}\cdot\text{m}, \quad F_{SC} = 60\text{kN}$$

（2）求截面的正应力

$$\sigma = \frac{M}{I_z}\cdot y, \quad I_z = \frac{1}{12}(BH^3 - bh^3)^4$$

$$B = 120, \quad H = 300 + 2\times 20 = 340$$

$$b = 120 - 10 = 110, \quad h = 300, \quad b_1 = 10$$

$$\therefore I_z = 14554\times 10^8\,\text{mm}^4$$

$y=\dfrac{H}{2}$ 处，$\sigma_{\max} = \dfrac{M}{I_z}\cdot y = 120\times 10^6\times 170/(1.4554\times 10^8) = 140.17\text{MPa}$

$y=\dfrac{h}{2}$ 处，$\sigma = \dfrac{M}{I_z}\cdot y = 120\times 10^6\times 150/(1.4551\times 10^8) = 123.68\text{MPa}$

y=0 处，$\sigma = 0$

（3）截面剪应力

$y = 0$处，$\tau = \tau_{\max} = \dfrac{F_S S_z}{I_z\cdot b_1} = \dfrac{60\times 10^3\times 496500}{1.4554\times 10^8\times 10} = 20.47\text{MPa}$

$$(S_z = \frac{b_1 h_2}{8} + \frac{B}{8}(H^2 - h^2) = 4965\text{mm}^3)$$

$y = \dfrac{h}{2}$处，$\tau = \dfrac{F_S S_z}{I_z\cdot b_1} = \dfrac{60\times 10^3\times 384000}{1.4554\times 10^8\times 10} = 15.83\text{MPa}$，

$$(S_z = \frac{B}{8}(H^2 - h^2) = 384000\text{mm}^3)$$

（4）强度校核：$y = \dfrac{H}{2}$处，$\tau = 0$　应力状态为单向应力状态

$\sigma_1 = \sigma_{\max} = 140.17\text{MPa}$，$\sigma_2 = \sigma_3 = 0$

$\therefore \sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 = 140.17\text{MPa} < [\sigma]$　强度足够

$y = 0$处，为纯剪切应力状态

$\sigma = 0$，$\tau = \tau_{\max} = 20.47\text{MPa}$，$\sigma_1 = \tau = 20.47\text{MPa}$

$\sigma_2 = 0$，$\sigma_3 = -\tau = -20.4\text{MPa}$，

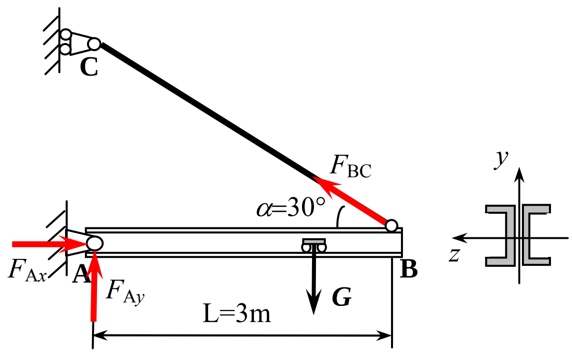
$\therefore \sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 = 2\tau = 40.94\text{MPa} < [\sigma]$　强度足够

$y = \dfrac{h}{2}$处，为平面应力状态

$$\left.\begin{matrix}\sigma_1\\ \sigma_3\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}(\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2})$$

$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma_2 + 4\tau^2} = 124.7\text{MPa} < [\sigma]$　满足强度条件。

10-5 吊车可在横梁AB上行走，横梁AB由二根20号槽钢组成。由型钢表可查得20号槽钢的截面积为A=32.84cm^2，W_z=191 cm^3。若材料的许用应力[σ]=120MPa，假定拉杆BC强度足够，试确定所能允许的最大吊重G_{max}。



习题 10-5 图

解：（1）求支座反力及BC杆的拉力

$$G\cdot x=F_{BCy}\cdot L\Rightarrow F_{BCy}=\frac{Gx}{L}$$

$$F_{Ay}=G-F_{BCy}=\frac{G(L-x)}{L}$$

$$F_{BCx}=F_{Ax}=\text{ctg}30^\circ\cdot F_{BCy}=\sqrt{3}\cdot\frac{Gx}{L}$$

（2）求梁的弯矩

$$M(x)=F_{BCy}\cdot(L-x)=\frac{Gx}{L}\cdot(L-x)$$

（3）确定弯矩的最大值

$$\frac{dM(x)}{dx}=0\text{ 得，}\quad x=\frac{1}{2}\text{，即在梁中点, 弯矩最大}$$

$$M_{\max}=\frac{GL}{4}=\frac{3}{4}G(\text{N}\cdot\text{m})$$

（4）确定最大吊重$G_{\max}$

梁的变形为压弯组合变形

$$\sigma'=\frac{F_N}{2A}=\frac{F_{BCx}}{2A}\ ,\quad F_{BCx}=\sqrt{3}\frac{Gx}{L}=\sqrt{3}\cdot\frac{G\cdot\frac{1}{2}}{L}=\frac{\sqrt{3}}{2}G$$

$$\sigma'=\frac{\sqrt{3}}{2}G/2A=\frac{\sqrt{3}G}{4A}$$

$$\sigma''=\frac{M}{2W_z}=\frac{3}{4}G/2W_z=\frac{3G}{8W_z}$$

$$\sigma=\sigma'+\sigma''=\frac{\sqrt{3}G}{4A}+\frac{3G}{8W_z}\le[\sigma]$$

由此求得$G_{\max}=57.27\text{kN}$

∴ 此吊梁所能允许的最大吊重为 57.27kN。

10-6 图示矩形截面悬臂木梁高为h，[σ]=10MPa，若h/b=2，试确定其截面尺寸。

解：梁的固定端为危险截面，固定端的弯矩为，

$$M_1=F_1\times2=1.6\text{kN}\cdot\text{m}$$
$$M_2=F_2\times1=1.65\text{kN}\cdot\text{m}$$

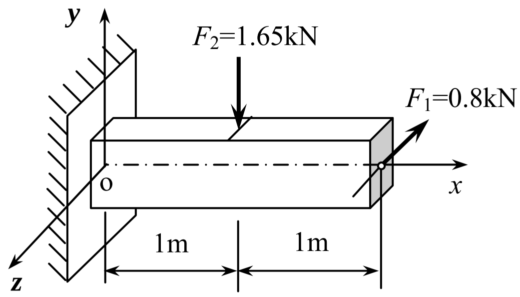
固定端截面的最大应力为，

$$\sigma_{\max}=\frac{M}{W_z}$$

由M_1引起的应力，前面受拉，后面受压，

$$W_{z1}=\frac{bh^2}{6}=\frac{b^2\cdot 2b}{6}=\frac{b^3}{3}$$

$$\therefore \sigma_{\max 1}=\frac{M_1}{W_{z1}}=\frac{1.6\times10^6}{\frac{b^3}{3}}=\frac{4.8\times10^6}{b^3}$$



习题 10-6 图

由M_2引起的应力，上侧受拉，下侧受压，

$$W_{z2}=\frac{bh^2}{6}=\frac{b(2b)^2}{6}=\frac{2b^3}{3}$$

$$\sigma_{\max 2}=\frac{M_2}{W_{z2}}=\frac{1.65\times10^6}{\frac{2b^3}{3}}$$

$$\sigma_{\max}=\sigma_{\max 1}+\sigma_{\max 2}$$

$$=\frac{4.8\times10^6}{b^3}+\frac{1.65\times3\times10^6}{2b^3}\le[\sigma]$$

将$[\sigma]$代入上式求得

$$b\approx 90\text{mm},\quad h=2b=180\text{mm}$$

10-7 直径为d=80mm的圆截面杆在端部受力F_1=60kN、F_2=3kN和扭矩M_T=1.6kN•m的载荷作用，L=0.8m，$[\sigma]$=160MPa，试按第四强度理论校核其强度。

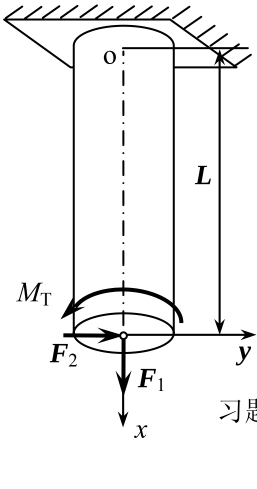
解：危险截面为固定端，由F_1引起的拉应力：

$$\sigma_1=\frac{F_1}{\frac{\pi}{4}d^2}=\frac{60\times10^3}{\frac{\pi}{4}\times80^2}=11.94\text{MPa}$$

由F_2引起的弯曲应力：

$$\sigma_2=\frac{M_{\max}}{W_z}=\frac{F_2\cdot L}{\frac{\pi}{32}d^3}=47.77\text{MPa}$$

$$\sigma=\sigma_1+\sigma_2=59.71\text{MPa}$$



习题 10-7 图

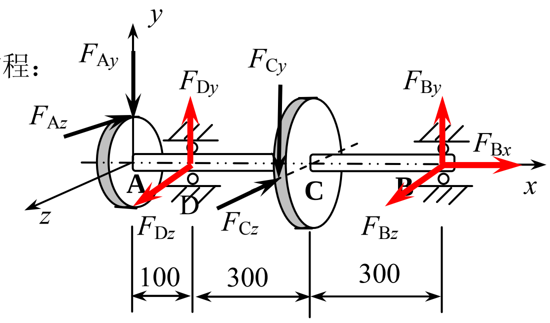
由M_T引起的扭应力：

$$\tau=\frac{M_T}{W_T}=\frac{M_T}{\frac{\pi}{16}d^3}=\frac{1.6\times10^6\times16}{3.14\times80^3}=15.92\text{MPa}$$

根据第四强度理论：

$$\sigma_{r4}=\sqrt{\sigma^2+3\tau^2}=65.77\text{MPa}<[\sigma]$$ 满足强度条件。

10-8 钢传动轴如图。齿轮A直径D_A=200mm，受径向力F_{Ay}=3.64kN、切向力F_{Az}=10kN作用；齿轮C直径D_C=400mm，受径向力F_{Cz}=1.82kN、切向力F_{Cy}=5kN作用。若[σ]=120MPa，试按第三强度理论设计轴径d。



习题 10-8 图

解：(1) 求约束反力，轴的受力如图所示，平衡方程：

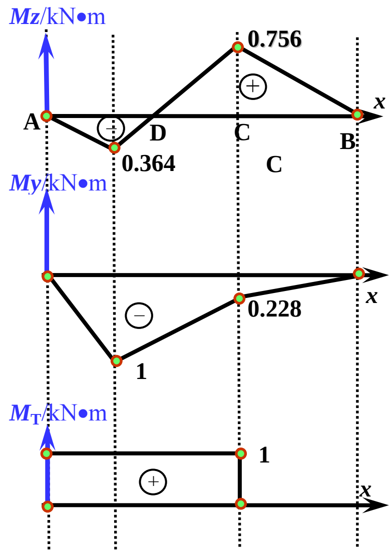
$$\sum F_x = F_{Bx} = 0$$
$$\sum F_y = F_{By} + F_{Dy} - F_{Ay} - F_{Cy} = 0$$
$$\sum F_z = F_{Bz} + F_{Dz} - F_{Cz} - F_{Az} = 0$$
$$\sum M_x = F_{Az} \times 0.1 - F_{Cy} \times 0.2 = 0(\text{满足})$$
$$\sum M_y = -F_{Dz} \cdot AD + F_{Cz} \cdot AC - F_{Bz} \cdot AB = 0$$
$$\sum M_z = F_{Dy} \cdot AD - F_{Cy} \cdot AC + F_{By} \cdot AB = 0$$

联立求解得:

$F_{Bx} = 0$， $F_{By} = 1.89\text{kN}$， $F_{Bz} = -0.76\text{kN}$

$F_{Dy} = 6.75\text{kN}$， $F_{Dz} = 12.5\text{kN}$

（2）作轴的内力图



轴发生弯扭组合变形，xy与xz平面内的弯矩图及扭矩图如图所示。由内力图可确定D截面为危险截面。

$$M_D = \sqrt{0.364^2 + 1^2} = 1.064\text{kN} \cdot \text{m}$$

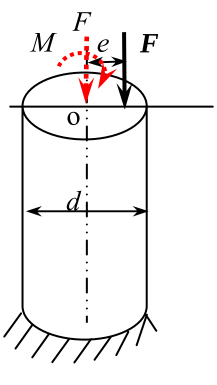
根据第三强度理论得，

$$\sigma = \frac{1}{W}\sqrt{M_D{}^2 + M_T{}^2} \le [\sigma], \quad W = \frac{\pi}{32}d^3$$

$$\frac{1}{\frac{\pi}{32}d^3}\sqrt{1.064^2 + 1^2} \le [\sigma]$$

$$\therefore \quad d \ge 49.87\text{mm}$$

10-9 混凝土圆柱如图，受偏心压缩载荷$\boldsymbol{F}$作用。为保证截面各处均不出现拉应力，试确定所允许的最大偏心距离e。



习 题 10-9

解：将力移到轴线上，得到圆柱的受力图所示。

$$M = F \cdot e$$

由F引起的轴向压应力，

$$\sigma_1 = \frac{F}{A} = \frac{F}{\frac{\pi}{4}d^2} = \frac{4F}{\pi d^2}$$

由M引起的轴向弯曲应力，

$$\sigma_2=\frac{M}{W}=\frac{F\cdot e}{\frac{\pi}{32}d^3}=\frac{32Fe}{\pi d^3}$$

$$\sigma_{拉}=\sigma_2-\sigma_1=\frac{32Fe}{\pi d^3}-\frac{4F}{\pi d^2}$$

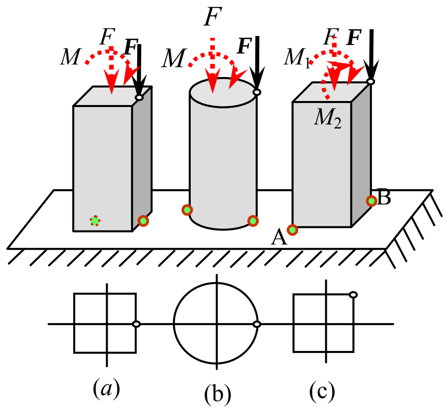
要保证截面不出现拉应力，$\sigma_{拉}=0$

即 $\dfrac{32Fe}{\pi d^3}-\dfrac{4F}{\pi d^2}=0$

$\therefore\ e=\dfrac{d}{8}$

即$e\le\dfrac{d}{8}$截面上不会出现拉应力。

10-10 三种情况下杆的受力如图所示。若杆的横截面面积相等，试求三杆中最大拉、压应力之比。



习 题 10-10

解：图（a）所示情况，将力F移至杆件轴线，则杆受到轴向力F和力矩M的作用，设矩形截面边长为a，则，$a^2=A$，

$$M=F\cdot a/2=F\cdot\sqrt{A}/2$$

杆中最大拉应力在左侧边界上，

$$\sigma_{a拉\max}=\frac{M}{W_z}-\frac{F}{A}=\frac{F\cdot\frac{\sqrt{A}}{2}}{\frac{A\sqrt{A}}{6}}-\frac{F}{A}=\frac{2F}{A}$$

最大压应力出现在右侧边界，

$$\sigma_{a压\max}=\frac{M}{W_z}+\frac{F}{A}=\frac{4F}{A}$$

图(b)所示情况，将力移至杆件轴线，杆受到轴向力F和力矩M的作用，设圆柱截面直径为d，则，$\dfrac{\pi}{4}d^2=A$ ，$d=2\sqrt{\dfrac{A}{\pi}}$，

$$M=F\cdot d/2=F\sqrt{\frac{A}{\pi}}$$

杆中最大拉应力和最大压应力分别为，

$$\sigma_{b拉\max}=\frac{M}{W}-\frac{F}{A}=\frac{F\sqrt{\dfrac{A}{\pi}}}{\dfrac{\pi}{32}(2\sqrt{\dfrac{A}{\pi}})^3}-\frac{F}{A}=\frac{3F}{A}$$

$$\sigma_{b压\max}=\frac{M}{W}+\frac{F}{A}=\frac{5F}{A}$$

图(c)所示情况，将力移至杆件轴线，杆受到轴向压力和力矩M_1和M_2的作用，设矩形截面边长为a，则，$a^2=A$，

$$M_1=M_2=F\cdot a/2=F\sqrt{A/2}$$

最大拉应力出现在A点，最大压应力出现在B点，

$$\sigma_{c拉\max}=\frac{M_1}{W}+\frac{M_2}{W}-\frac{F}{A}=\frac{5F}{A}$$

$$\sigma_{c压\max}=\frac{M_1}{W}+\frac{M_2}{W}+\frac{F}{A}=\frac{7F}{A}$$

∴ 最大拉应力之比为：$\sigma_{c拉\max}:\sigma_{c拉\max}:\sigma_{c拉\max}=2:3:5$

最大压力之比为：$\sigma_{c压\max}:\sigma_{c压\max}:\sigma_{c压\max}=4:5:7$

10-11 斜齿轮传动轴如图所示，斜齿轮直径D=300mm，轴径d=50mm。齿面上受径向力F_y=1kN、切向力F_z=2.4kN及平行于轴线的力F_x=0.8kN作用。若[σ]=160MPa，试按第四强度理论校核轴的强度。

解：（1）求支座反力，轴受力如图所示，建立平衡方程，

$$\sum F_x=F_{Ax}+F_x=0$$

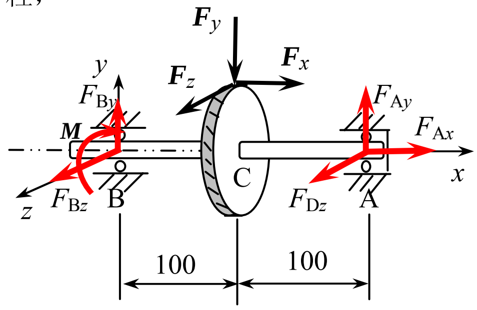
$$\sum F_y=F_{By}+F_{Ay}-F_y=0$$

$$\sum F_z=F_{Az}+F_{Bz}+F_z=0$$

$$\sum M_x=F_z\cdot\frac{D}{2}-M=0$$

$$\sum M_y=-F_z\cdot \mathrm{BC}-F_{Az}\cdot \mathrm{AB}=0$$

$$\sum M_z=-F_y\cdot \mathrm{BC}-F_x\cdot\frac{D}{2}+F_{Ay}\cdot \mathrm{AB}=0$$



习题 10-11 图

联立求解得，

$$F_{Ax}=-0.8\text{kN}，\quad F_{Ay}=1.1\text{kN}，\quad F_{Az}=-1.2\text{kN}$$

$$F_{By}=-0.1\text{kN}，\quad F_{Bz}=-1.2\text{kN}，\quad M=0.36\text{kN}\cdot\text{m}$$

（2）作轴的内力图

轴发生弯扭组合变形，xy与xz平面内的内力图如图所示。由内力图可确定C截面为

危险截面。

（3）危险点应力

合成弯矩：$M=\sqrt{M_y{}^2+M_z{}^2}$

$$=\sqrt{0.11^2+0.12^2}=0.163\text{kN}\cdot\text{m}$$

$$\sigma_{弯}=\frac{M}{W}=\frac{0.16^3\times10^6}{\dfrac{\pi}{32}\times50^3}=13.29\text{MPa}$$

$$\sigma_{压}=\frac{F}{A}=\frac{0.8\times10^3}{\dfrac{\pi}{4}\times50^2}=0.41\text{MPa}$$

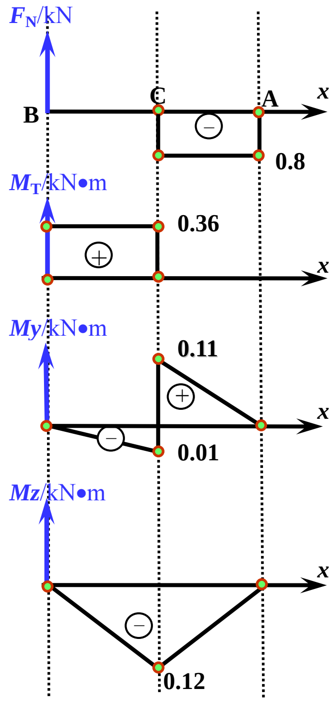
$$\tau=\frac{M_T}{W_T}=\frac{0.36\times10^6}{\dfrac{\pi}{16}\times50^3}=14.68\text{MPa}$$

（4）根据强度理论校核轴的强度

$$\sigma=\sigma_{弯}+\sigma_{压}=17.39\text{MPa}$$

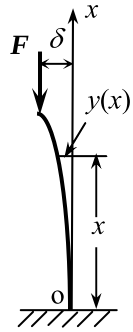
$$\sigma_{r4}=\sqrt{\sigma^2+3\tau^2}=30.8\text{MPa}<[\sigma]$$

满足强度条件。



第十一章 压杆的稳定

11-1 一端固定，另一端自由的细长压杆如图所示。假定在微弯平衡状态时自由端的挠度为δ，试由挠曲线近似微分方程求解临界载荷F_{cr}。



习题 11-1 图

解：杆在任一截面处弯矩为：

$$M(x)=M-Fy$$

挠曲线近似微分方程为：

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{M(x)}{EI}=\frac{M-Fy}{EI}$$

定义， $k^2=\frac{F}{EI}$ ，上式成为，

$$\frac{d^2y}{dx^2}+k^2y=\frac{M}{EI}$$

上述二阶常微分方程的通解为，

$$y=A\sin kx+B\cos kx+M/F$$

为确定积分常数 A、B，将挠度方程微分得到截面转角为，

$$y^{'}=\theta=Ak\cos kx-Bk\sin kx$$

边界条件为：

$$x=0,\quad y_0=0,\quad \theta_0=0$$
$$x=l,\quad y_l=\delta$$

将边界条件代入通解，得到，

$$B+M/F=0$$
$$Ak=0$$
$$A\sin kx+B\cos kx+M/F=\delta$$
$$M=F\delta$$

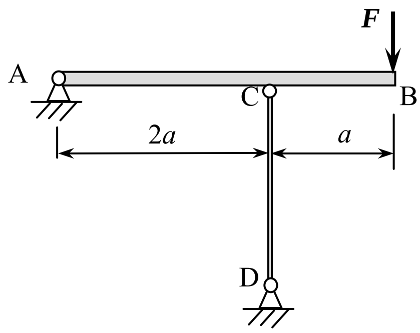
由上面几式得， $A=0$ ， $\cos kl=0$

$$kl=n\pi+\frac{\pi}{2}\ ,\quad n=1,\quad kl=\frac{\pi}{2}$$

所以压杆的临界载荷为，

$$F_{cr}=\frac{\pi^2EI}{4l^2}$$

11-2 图中AB为刚性梁，低碳钢撑杆CD直径 d=40mm，长l=1.2m，E=200GPa，试计算失稳时的载荷F_{max}。



习题 11-2 图

解：$\lambda_{\mathrm{p}}=100,\quad \lambda_{\mathrm{S}}=60,\quad a=310\mathrm{MPa},\quad b=1.14\mathrm{MPa}$

$\lambda=\mu l/i,\quad \mu=1$

$i=(I/A)^{1/2}=10\mathrm{mm}$

$\lambda=120$，$\lambda>\lambda_{\mathrm{p}}$，为大柔度杆。

故，$\sigma_{\mathrm{cr}}=\dfrac{\pi^2 E}{\lambda^2}=136.94\mathrm{MPa}$

$F_{\mathrm{cr}}=\sigma_{\mathrm{cr}}A=136.94\times 40^2\pi/4\mathrm{N}=172.0\mathrm{kN}$

又由M（A）=0，有 $F\times 3a=F_{\mathrm{cr}}\times 2a$

得 F=$\dfrac{2}{3}F_{\mathrm{cr}}=114.66\mathrm{kN}$

11-3 二端球形铰支的细长压杆，截面积A=1500mm^2，l=1.5m，E=200GPa，试计算下述不同截面情况下的临界载荷F_{cr}，并进行比较。

a) 直径为d的圆形截面；

b) 边长为a的方形截面；

c) b/h=3/5的矩形截面。

解： $F_{\mathrm{cr}}=\dfrac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}$　　　　(1)

其中，$E=200\mathrm{GPa}$，$l=1.5\mathrm{m}$，$A=1500\mathrm{mm}^2$，

由题意 $\mu=1$

a）　I=$\pi d^4/64$　　　　(2)

由 $A=1500\mathrm{mm}^2=\pi d^2/4$，得，$d$=43.71mm，代入(2)得，$I$=$179\times 10^{-9}$

于是，由(1)式得 $F_{\mathrm{cr}}=156.9\mathrm{kN}$。

b）由 $A=1500\mathrm{mm}^2=a^2$，且 $I=a^4/12$，得，I=187.5×10^{-9}

代入(1)式得：$F_{\mathrm{cr}}=163.9\mathrm{kN}$

c）由 A=1500mm^2，且 $b/h=3/5$，易知 b=30mm， h=50mm

考虑两个方向上的 F_{cr}，当 $I_1=bh^3/12=312\times10^{-9}$ 时，

$$F_{\text{cr1}}=\frac{\pi^2 EI_1}{(\mu l)^2}=273.44\text{kN}$$

同样地，当 $I_2=hb^3/12=112\times10^{-9}$ 时，

$$F_{\text{cr2}}=\frac{\pi^2 EI_2}{(\mu l)^2}=98.16\text{kN}$$

故取 $F_{\text{cr}}=F_{\text{cr2}}=98.16\text{kN}$。

11-4 一端固定、另一端铰支的细长压杆，截面积 A=16cm^2，承受压力 F=240kN作用，E=200GPa，试用欧拉公式计算下述不同截面情况下的临界长度 l_{cr}，并进行比较。

a) 边长为4cm的方形截面；

b) 外边长为5cm、内边长为3cm的空心方框形截面。

解： 依题意，$F=\dfrac{\pi^2 EI}{(\mu l_{\text{cr}})^2}$ 故，$l_{\text{cr}}=\sqrt{\dfrac{\pi^2 EI}{\mu^2 F}}$

其中 $\mu=0.7$， $E=200\text{GPa}$， $F=240\text{kN}$

a）当边长 a=4cm 时，$I_1=a^4/12=213\times10^{-9}\text{m}$

故，$l_{\text{cr1}}=\sqrt{\dfrac{\pi^2 EI_1}{\mu^2 F}}=1892\text{mm}$

b）当边长 a=3cm， b=5cm 时，

$$I_2=(b^4-a^4)/12=453\times10^{-9}$$

故，$l_{\text{cr2}}=\sqrt{\dfrac{\pi^2 EI_2}{\mu^2 F}}=2758\text{mm}$

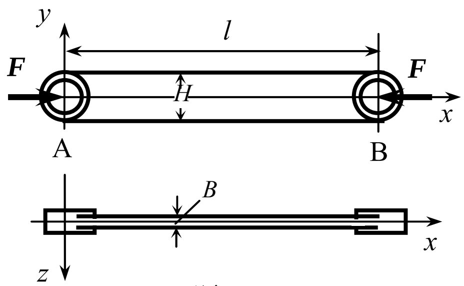
所以第二种情况 l_{cr} 要长些。

11-5 图中矩形截面低碳钢制连杆AB受压。在 xy 平面内失稳时，可视为二端铰支；在 xz 平面内失稳时，可视为二端固定，考虑接触面间隙后取 μ=0.7；若按大柔度杆设计，试问截面尺寸 B/H 设计成何值为佳？讨论按中柔度杆、小柔度杆设计又如何？

解：对于大柔度杆情况，

在 xy 平面内，有，

$$F_{cr1}=\frac{\pi^2 EI_1}{(\mu_1 l)^2}=\frac{\pi^2 EBH^3/12}{(1\times l)^2}=\frac{\pi^2 EBH^3}{12l^2}$$



习 题 11-5

在 xz 平面内，有，

$$F_{cr2}=\frac{\pi^2 EI_2}{(\mu_2 l)^2}=\frac{\pi^2 EHB^3/12}{(0.7\times l)^2}=\frac{\pi^2 EHB^3}{12(0.7l)^2}$$

当 $F_{cr1}=F_{cr2}$ 时最稳定，此时有，

$$\frac{\pi^2 EBH^3}{12l^2}=\frac{\pi^2 EHB^3}{12(0.7l)^2},$$

所以，$B/H=0.7$

对于中柔度杆情况，有，$\lambda=\mu l/i$

临界应力 $\sigma_{cr}=a-b\lambda$

当 $\sigma_{cr1}=\sigma_{cr2}$ 时最稳定，此时，$\lambda_1=\lambda_2$，则

$$\mu_1/i_1=\mu_2/i_2$$

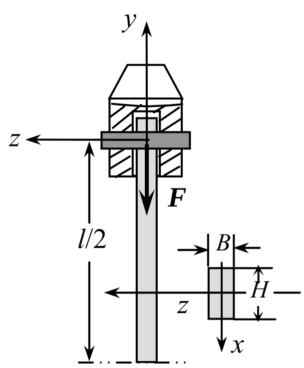
所以 $B/H=0.7$

对于大柔度杆情况，失稳与 B/H 无关。

11-6 图示矩形截面木杆，二端约束相同，B=0.2m，H=0.3m，l=10m。已知F=120kN，σ_{ys}=20MPa，E=10GPa。若取n_{st}=3.5，试校核杆的稳定性。

解：首先判断杆的类型。

$$\lambda_P=\pi\sqrt{E/\sigma_s}=\pi\sqrt{10\times10^9/20\times10^6}=22.4$$



习题 11-6 图

因为 $I=BH^3=0.2\times0.3^3/12=4.5\times10^{-4}\,\text{m}^4$，

或，$I=HB^3/12=0.3\times0.2^3/12=2\times10^{-4}\,\text{m}^4$

取 $I=4.5\times10^{-4}\,\text{m}^4$，则$i=(I/A)^{1/2}=0.0866$

得 $\lambda=\mu l/i=57.73>\lambda_P$，因此属于大柔度杆。

由于 B=0.2<H=0.3，所以只需校核 yz 平面内的 F 即可。

在 yz 平面内，$F_{\mathrm{cr2}}=\dfrac{\pi^2 EI_2}{(\mu l)^2}=\dfrac{\pi^2 EHB^3/12}{(0.5\times l)^2}=789\mathrm{kN}$

$n=F_{\mathrm{cr2}}/F=6.57>3.5$

所以系统稳定。

11-7 某铬锰钢制挺杆二端铰支，直径 d=8mm，L=100mm。若规定的许用稳定安全系数为 n_{st}=4，试确定杆的许用载荷 $\boldsymbol{F}_{\max}$。

解：杆两端铰支，故 $\mu=1$，

惯性矩 $I=\pi d^4/64=200.96\mathrm{mm}^4$,

惯性半径 $i=(I/A)^{1/2}=2\mathrm{mm}$,

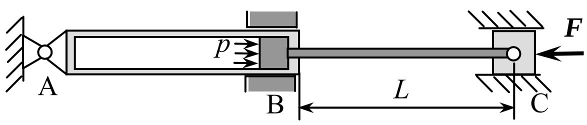
因此，其柔度 $\lambda=\mu l/i=100/2=50$

对于铬锰钢 $\lambda_{\mathrm{p}}=55$，$\lambda<\lambda_{\mathrm{p}}$，所以属于小柔度杆。

查表得 $\sigma_{\mathrm{s}}=780\mathrm{MPa}$

故 $F_{\max}=F_{\mathrm{cr}}/n=\sigma_{\mathrm{s}}A/n=780\times10^6\times\pi\times64\times10^{-6}/16=9.8\mathrm{kN}$

11-8 活塞杆 BC 由优质碳钢制成，E=210GPa，直径 d=40mm，L=1m，若规定稳定安全系数为 n_{st}=5，试确定许用最大压力 $F_{\max}$。



习题 11-8 图

解：活塞杆可以简化为 B 端固定，C 端铰支的压杆，$\mu=0.7$，惯性半径为 i=10mm 。

柔度：$\lambda=\mu l/i=0.7\times1000/10=70$

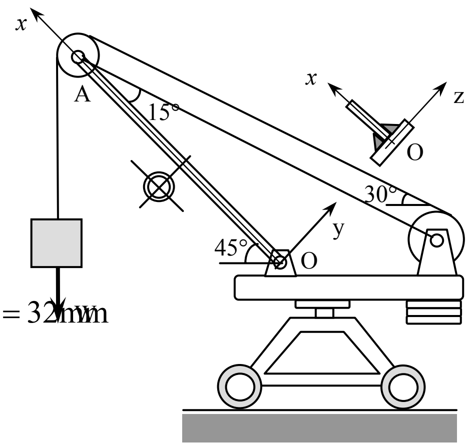
查表得优质碳钢 $\lambda_{\mathrm{p}}=100$，$\lambda_{\mathrm{s}}=60$

$\lambda_{\mathrm{p}}>\lambda>\lambda_{\mathrm{s}}$，为中柔度杆，查得 $a=461\mathrm{MPa}$， $b=2.57\mathrm{MPa}$

$\therefore\ \sigma_{cr}=a-b\lambda=281.1\text{MPa},$

$$F_{max}=F_{cr}/n_{st}=\sigma_{cr}A/n_{st}$$
$$=281.1\times10^6\times\pi\times40\times40\times10^{-6}/4\times5=70.6\text{kN}$$

11-9 图示简易起重机的起重臂为 E=200GPa 的优质碳钢钢管制成，长 L=3m，截面外径 D=100mm，内径 d=80mm，规定的稳定安全系数为 n_{st}=4，试确定允许起吊的载荷 W。（提示：起重臂支承可简化为 O 端固定，A 端自由。）



习题 11-9 图

解：AO 杆的惯性矩为，

$$\text{I}=\frac{\pi(\text{D}^4-\text{d}^4)}{64},\quad i=\sqrt{I/A},$$

将 $D=100\text{mm},\quad d=80\text{mm}$ 代入上式得，

$$A=2826\text{mm}^2,\quad I=2896.7\times10^3\text{mm}^4,\quad i=32\text{mm}$$

又由于 AO 一端固定一端自由，故 $\mu=2$

$\therefore\ \lambda=\mu l/i=187.5>\lambda_p$，为大柔度杆。 AO 杆上的最大压力为，

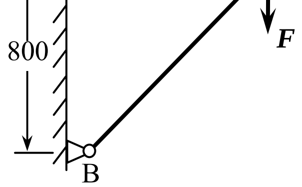
$$F=F_{cr}/n_{st}=\frac{\pi^2EI}{(\mu l)^2}/4=39.7\text{kN}。$$

因为 $F_x=F\cos45^\circ=28\text{kN}=T_x$

所以 $T_y=T_x\text{tg}30^\circ=16.17\text{kN}$

故， $W=F_x-T_y=11.83\text{kN}$

11-10 图中AC、BC均为低碳钢圆截面杆，载荷F=120kN，若许用应力[σ]=180MPa，许用稳定安全系数n_{st}=4，试设计二杆的直径。



习题 11-10 图

解：由于 BC 杆上的压力比 AC 杆大，因此这里只需考虑 AC 杆即可。

$$F=120\text{kN},\quad F_{BC}=150\text{kN}$$

当杆为大柔度杆时，钢材使用最少。因为，

$$F_{\rm cr}=F_{\rm BC}n_{\rm st}=600\text{kN}=\frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}$$

其中，$I=\pi d^4/64$，$\mu=0.7$，$I=200\text{GPa}$，

解得，$d=41.8\text{mm}$

11-11 长 L=6m 的 20a 号工字钢（低碳钢制）直杆，在温度为 T_1=20°C 时二端固定安装，此时杆不受力。若已知材料的线膨胀系数 α=1.2×10^{-5}/°C，E=200GPa，试估计温度升至 T_2=50°C 时，工作安全系数 n 为多大？

（提示：查附录中型钢表可知，20a 号工字钢截面积 A=35.6 cm^2，I_y=158 cm^4，W_y=31.5 cm^3，I_z=2370 cm^4，W_z=237 cm^4）

解：$\lambda=\mu l/i$，由于两端固定，故取 $\mu=0.5$，

而，l=6，$i=(I/A)^{1/2}$，得，$i_y=2.1\text{cm}$

$\lambda_{\min}=142.9>100$ 为大柔度杆。

查低碳钢，$\sigma_{\rm cr}=180\text{MPa}$

所以，$F_{\rm cr}=\sigma_{\rm cr}A=640.8\text{kN}$

当 T 升高 30^0C 时，$\Delta L=\alpha\Delta TL=1.08\times10^{-3}\text{m}$

$$F=\frac{\Delta LEA}{L}=\frac{1.08\times10^{-3}\times200\times10^9\times35.6\times10^{-4}}{6}=128.1\text{kN}$$

$$n=\frac{F_{\rm cr}}{F}=\frac{640.8}{128.1}=5$$

第十二章 疲劳与断裂

12-1 已知循环最大应力 S_{max}=200MPa，最小应力 S_{min}=50MPa，计算循环应力变程ΔS、应力幅 S_a、平均应力 S_m 和应力比 R。

解：$\Delta S = S_{max} - S_{min} = 200 - 50 = 150\text{MPa}$

$$S_a = \frac{\Delta S}{2} = 75\text{MPa}$$

$$S_m = \frac{S_{max} + S_{min}}{2} = \frac{200 + 50}{2} = 125\text{MPa}$$

$$R = \frac{S_{min}}{S_{max}} = \frac{50}{200} = 0.25$$

12-2 已知循环应力幅 S_a=100MPa，R=0.2，计算 S_{max}、S_{min}、S_m 和ΔS。

解：$\Delta S = 2S_a = 200\text{MPa}$

$S_{max} - S_{min} = \Delta S = 200\text{MPa}$ …………（a）

$R = S_{min} / S_{max} = 0.2$ ……………………（b）

结合 a、b 两式，计算得到：$S_{max} = 250\text{MPa}, S_{min} = 50\text{MPa}$

则：$S_m = (S_{max} + S_{min})/2 = (250 + 50)/2 = 150\text{MPa}$

12-3. 若疲劳试验频率选取为 f=20Hz，试估算施加 10^7 次循环需要多少小时。

解：$t = \dfrac{10^7}{20\text{Hz}} = 5 \times 10^5\text{s} = 139$ 小时

12-4. 某构件承受循环应力 S_{max}=525MPa，S_{min}= −35MPa 作用，材料的基本 S-N 曲线为 $S^3_{max}N$=8.2×10^{12}，S_u=900MPa，试估算构件的寿命。

解：1) 确定工作循环应力幅和平均应力，

$$S_a = \frac{1}{2}(S_{max} - S_{min}) = 280\text{MPa}$$

$$S_m = \frac{1}{2}(S_{max} + S_{min}) = 245\text{MPa}$$

2) 估算对称循环下的基本 S-N 曲线，

m=3/lg(0.9/k)=11.752

$C=(0.9S_u)^m\times10^3=7.904\times10^{35}$

3) 循环应力水平等寿命转换，

为了利用基本 S-N 曲线估计疲劳寿命， 需要将实际工作循环应力水平等寿命地转换为对称循环（$R=-1$，$S_m=0$）的应力水平 S_{-1}。由 $S_a/S_{-1}+S_m/S_u=1$ 可知,

S_{-1}=430.77MPa

4) 估计构件寿命,

对称循环（S_{-1}=430.77MPa，S_m=0）条件下的寿命，可由基本 S-N 曲线得到，即,

$N=C/S^m=7.904\times10^{35}/430.77^{11.752}$=87136 次

由于工作循环应力水平（S_{max}=525MPa，$S_{min}=-35$ MPa）与转换后的对称循环（S_{-1}=430.77MPa，S_m=0）是等寿命的，故可估计构件寿命为 N=87136 次循环。

12-5．某起重杆承受脉冲循环（R=0）载荷作用，每年作用的载荷谱统计如下表所示，S-N 曲线可用 $S^3_{max}N=2.9\times10^{13}$。

a) 试估算拉杆的寿命为多少年？

b) 若要求使用寿命为 5 年，试确定可允许的 S_{max}。

S_{maxi} (MPa)	500	400	300	200
n_i（10^6 次）	0.01	0.03	0.1	0.5

解：根据已知得 S－N 曲线得到不同 S_{max} 下的寿命，见下表：

$S_{max\,i}$/MPa	500	400	300	200
$N_i/10^6$ 次	0.232	0.453	1.074	3.625

则,

a） 根据，$D=\lambda\sum\frac{n_i}{N_i}$

得， $\lambda=D/\sum\frac{n_i}{N_i}=1/(\frac{0.01}{0.232}+\frac{0.03}{0.453}+\frac{0.1}{1.074}+\frac{0.5}{3.625})=2.94$

b）由相对 Miner 理论可得,

$$\frac{\sum(\frac{n_i}{N_i})_B}{\sum(\frac{n_i}{N_i})}=\frac{\lambda}{\lambda'}=\frac{2.94}{5}$$

又因为，$S^3_{max}N=2.9\times10^{13}=\text{Const}$

上式可写成,

$$\frac{S'^3_{max}}{S^3_{max}} = \frac{2.94}{5}$$

得， $S'_{max} = 0.838 S_{max} = 419\text{MPa}$

12-6 某材料σ_{ys}=350MPa，用 B=50mm，W=100mm，L=4W 的标准三点弯曲试样测试的断裂韧性，预制裂纹尺寸 a=53mm。由试验得到的 **F**-V 曲线知断裂载荷 F_Q=54 kN，试计算该材料的断裂韧性 K_{1C} 并校核其有效性。

解：标准三点弯曲试样的应力强度因子为,

$$K_Q = \frac{3F_Q L}{2BW^2}\sqrt{\pi a} f(\frac{a}{w}) \qquad (1)$$

其中： $f(\frac{a}{w}) = 1.090 - 1.735(\frac{a}{w}) + 8.20(\frac{a}{w})^2 - 14.18(\frac{a}{w})^3 + 14.57(\frac{a}{w})^4$

已知： $\frac{a}{w} = 0.53$，得： $f(\frac{a}{w}) = 1.5124$。

将各项数据代入（1）式，得： $K_Q = 40.0\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$ 。

对其进行有效性验证,

$B = 50\text{mm} \geq 2.5(K_Q / \sigma_{ys})^2 = 32.6\text{mm}$ 。

满足有效性条件，即得到, $K_{1C} = K_Q = 40.0\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$ 。

12-7　材料同上题，若采用 B=50mm，W==100mm 的标准紧凑拉伸试样测试其断裂韧性，预制裂纹尺寸仍为 a=53mm。试估算试验所需施加的断裂载荷 **F**。

解：若采用标准紧凑拉伸试样，断裂时有：

$$K_1 = \frac{P\sqrt{a}}{BW} f(\frac{a}{w}) = K_{1C} \qquad (1)$$

转换得到,

$$F = \frac{K_{1C}BW}{\sqrt{a} f(\frac{a}{w})} \qquad (2)$$

其中, $f(\frac{a}{w}) = 29.6 - 185.5(\frac{a}{w}) + 655.7(\frac{a}{w})^2 - 1017.0(\frac{a}{w})^3 + 638.9(\frac{a}{w})^4$ 。

已知, $\frac{a}{w} = 0.53$，计算得到, $f(\frac{a}{w}) = 14.4755$ 。

将各项数据代入（2）式，得到, $F = 60\text{kN}$ 。

12-8 已知某一含中心裂纹 $2a$=100mm 的大尺寸钢板，受到拉应力σ_{c1}=304MPa 作用时发生断裂，若在另一相同的钢板中，有一中心裂纹 $2a$=40mm，试估计其断裂应力σ_{c2}。

解：有 $K=f\sigma\sqrt{\pi a}$,又因为两个钢板的材料相同，所以 $K1=K2$

因为，$\sigma_{c1}\sqrt{\pi a_1}=\sigma_{c2}\sqrt{\pi a_2}$

所以,

$$\sigma_{c2}=\frac{\sqrt{\pi a_1}}{\sqrt{\pi a_2}}\sigma_{c1}=\frac{\sqrt{\pi\times 100/2}}{\sqrt{\pi\times 40/2}}\times 304$$
$$=480\,\text{MPa}$$

12-9 某合金钢在不同热处理状态下的性能为：

1) 275°C回火：σ_{ys}=1780 MPa，K_{IC}=52MPa$\sqrt{\text{m}}$；

2) 600°C 回火：σ_{ys}=1500 MPa，K_{IC}=100MPa$\sqrt{\text{m}}$；

设工作应力σ=750MPa，应力强度因子表达式为 $K=1.12\sigma\sqrt{\pi a}$，试问二种情况下的临界裂纹长度 a_c 各为多少？

解：由 $K=1.12\sigma\sqrt{\pi a}$， $a_c=\frac{1}{\pi}\left(\frac{K_{IC}}{1.12\sigma_{ys}}\right)^2$

275°C 回火：$a_{c1}=\frac{1}{\pi}\left(\frac{K_{IC1}}{1.12\sigma_{ys1}}\right)^2=\frac{1}{3.14}\left(\frac{52}{1.12\times 1780}\right)^2=0.00022\text{m}$

600 °C 回火：$a_{c2}=\frac{1}{\pi}\left(\frac{K_{IC2}}{1.12\sigma_{ys2}}\right)^2=\frac{1}{3.14}\left(\frac{100}{1.12\times 1500}\right)^2=0.0011\text{m}$

12-10 某宽板含有中心裂纹 $2a_0$，受 R=0 的循环载荷作用，K_C=120MPa$\sqrt{\text{m}}$，裂纹扩展速率为 $da/dN=2\times 10^{-12}(\Delta K)^3$m/c（$K$ 的单位为 MPa$\sqrt{\text{m}}$）；试对于 a_0=0.5mm，2mm 二种情况分别计算σ_{max}=300MPa 时的寿命。

解：为宽板中心裂纹，所以：$f=1$ ，$K=\sigma\sqrt{\pi a}$，

故，$\Delta K=K_{max}-K_{min}=(\sigma_{max}-\sigma_{min})\sqrt{\pi a}=\Delta\sigma\sqrt{\pi a}$。

根据裂纹扩展速率公式，得：$m=3$，$C=2\times 10^{-12}$ 。

将 $a_c=\frac{1}{\pi}(\frac{K_C}{\sigma_{max}})^2$ 代入Paris公式得，

$$N_{\mathrm{C}}=\frac{1}{C(f\Delta\sigma\sqrt{\pi})^{m}(0.5m-1)}\left(\frac{1}{a_{0}^{\frac{m}{2}-1}}-\frac{1}{a_{\mathrm{c}}^{\frac{m}{2}-1}}\right)。$$

即可求出寿命 N_{C} 为，

$a_0=0.5\mathrm{mm}$ 时，$N_{\mathrm{C}}=2.680\times10^{5}$；

$a_0=2\mathrm{mm}$ 时，$N_{\mathrm{C}}=1.293\times10^{5}$。

12-11 某构件含一边裂纹。受 σ_{max}=200MPa，σ_{min}=20MPa 的循环应力作用，已知 $K_{\mathrm{C}}=150\mathrm{MPa}\sqrt{\mathrm{m}}$，构件的工作频率为 f=0.1Hz，为保证安全，每 1000 小时进行一次无损检查，试确定检查时所能允许的最大裂纹尺寸 a_i。

[可用裂纹扩展速率为：$\mathrm{d}a/\mathrm{d}N=4\times10^{-14}(\Delta K)^4$ m/c)]

解：1）计算临界裂纹尺寸，

对于边裂纹构件，$f=1.12$，　$K=\sigma\sqrt{\pi a}$。有

$$a_{\mathrm{c}}=\frac{1}{\pi}\left(\frac{K_{\mathrm{C}}}{f\sigma_{\max}}\right)^{2}=0.143\mathrm{m}$$

2）检查期间的循环次数，

$N=0.1\times3600\times1000=3.6\times10^{5}$ 次

3）检查时所能允许的裂纹尺寸 a_i，在下一次检查周期内经历N次循环后，将不应扩展到引起破坏的裂纹尺寸 a_{c}，故在临界状态下，由公式可得，

$$\frac{1}{a_i}=N_{\mathrm{C}}C(f\Delta\sigma\sqrt{\pi})^{m}+\frac{1}{a_{\mathrm{c}}}=241.5$$

注意本题 $m=4$，应力幅 $\Delta\sigma=\sigma_{\max}-\sigma_{\min}=180\mathrm{MPa}$，解得，

$$a_i=\left(\frac{1}{241.5}\right)\mathrm{m}=4.14\mathrm{mm}$$

所以，检查中所能允许的最大裂纹尺寸为 $a_i=4.14\mathrm{mm}$。

12-12 某中心裂纹宽板承受循环载荷作用，R=0。已知 $K_{\mathrm{c}}=100\mathrm{MPa}\sqrt{\mathrm{m}}$，$\Delta K_{\mathrm{th}}=6\mathrm{MPa}\sqrt{\mathrm{m}}$，$\mathrm{d}a/\mathrm{d}N=3\times10^{-12}(\Delta K)^3$ m/c；假定 a_0=0.5mm，试估算：

a) 裂纹不扩展时的最大应力 $\sigma_{\max1}$。

b) 寿命为 $N=0.5\times10^6$ 次时所能允许的最大循环应力 $\sigma_{\max2}$。

解：a）对于中心裂纹宽板，f＝1，则：

$$K=\sigma\sqrt{\pi a}$$

$$\Delta K=K_{\max}-K_{\min}=(\sigma_{\max}-\sigma_{\min})\sqrt{\pi a}=\sigma_{\max}\sqrt{\pi a}$$

由 $\Delta K\le\Delta K_{\mathrm{th}}=6\mathrm{MPa}\sqrt{\mathrm{m}}$ 可得：$\sigma_{\max}\le\dfrac{\Delta K_{\mathrm{th}}}{\sqrt{\pi a}}=151.4\mathrm{MPa}$

即裂纹不扩展时的最大应力为 151.4Mpa。

b）临界裂纹尺寸 a_{c} 为：$a_{\mathrm{c}}=\dfrac{1}{\pi}(\dfrac{K_{\mathrm{c}}}{S_{\max}})^2$

临界状态时有，$S_{\max}{}^m=\dfrac{1}{CN(\sqrt{\pi})^m(0.5m-1)}(\dfrac{1}{a_0{}^{\frac{m}{2}-1}}-\dfrac{1}{a_{\mathrm{c}}{}^{\frac{m}{2}-1}})$

其中：m＝3，$C=3\times10^{-12}$，$N=0.5\times10^{6}$，$a_0=0.5\times10^{-3}\mathrm{m}$

代入上述两式，得，$S_{\max}=214\mathrm{MPa}$