第十二届数学竞赛模拟考试试卷（3）参考解答

一、解答下列各题（每小题 6 分，共 30 分）

1、确定值 $\alpha =$ ________________ 时，当 $x \to \infty$ 时函数 $f(x)=(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)$ 与 x^{α} 为同阶无穷大.

解 ：因为 $f(x)=(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n) = x^{1+2+\cdots+n}[(1+\frac{1}{x})(1+\frac{1}{x^2})\cdots(1+\frac{1}{x^n})]$

$$= x^{\frac{n(n+1)}{2}}[(1+\frac{1}{x})(1+\frac{1}{x^2})\cdots(1+\frac{1}{x^n})],$$

而 $$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x^k})=1，\ k=1,2,\cdots,n，$$

故 $$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})(1+\frac{1}{x^2})\cdots(1+\frac{1}{x^n})=1,$$

因此 $\alpha=\dfrac{n(n+1)}{2}$ 时，当 $x\to\infty$ 时函数 $f(x)=(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)$ 与 $x^{\frac{n(n+1)}{2}}$ 为同阶无穷大.

2、设 $x_1=a>0, x_2=b>0, x_{n+2}=\sqrt[n]{(x_{n+1})^{n-1}x_n}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

解：记 $y_n=\ln x_n$，则 $y_1=\ln a, y_2=\ln b, y_{n+2}=\dfrac{n-1}{n}y_{n+1}+\dfrac{1}{n}y_n,(n=1,2,\cdots)$；

$$\therefore y_{n+2}-y_{n+1}=-\frac{1}{n}(y_{n+1}-y_n)$$
$$=\left(-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(-\frac{1}{n-1}\right)(y_n-y_{n-1})$$
$$=\cdots=\frac{(-1)^n}{n!}(y_2-y_1)$$

于是

$$y_{n+2}=y_1+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}(y_2-y_1)；$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}y_n=\ln a+e^{-1}\ln\frac{b}{a},\quad \therefore \lim_{n\to\infty}x_n=a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{e}}$$

3、若 $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$满足 $\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial z^2}=0$，其中 f 有连续二阶

导数，求 u。

解　记$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则$u=rf(r)$，Laplace 方程变为$u_{rr}+\dfrac{2}{r}u_r=0$，即

$$r^2f''(r)+4rf'(r)+2f(r)=0,$$

方程为 Euler 方程解得，所以$f(r)=C_1\dfrac{1}{r}+C_2\dfrac{1}{r^2}$，$u=C_1+C_2\dfrac{1}{r}$．

4、求$I=\iint_{\Sigma}-ydzdx+(z+1)dxdy$其中$\Sigma:x^2+y^2=4$被平面$x+z=2$和$z=0$所截部分外侧.

解（此类题首选 Gauss 公式）

Σ如图所示

作辅助面$\Sigma_1:x+z=2\left(x^2+y^2\le 4\right)$取上侧，$\Sigma_2:z=0\left(x^2+y^2\le 4\right)$取下侧；

则$I=\oiint_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2}-\iint_{\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_2}$　（所围区域为Ω）。

有 Gauss 公式，

$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2}=\iiint_{\Omega}(-1+1)dv=0$；

对$\iint_{\Sigma_1}\left(-ydzdx+(z+1)dxdy\right)$用“统一”投影法。

$\iint_{\Sigma_1}=\iint_{D_{xy}}\left(-y\cdot 0+(2-x+1)\right)dxdy=12\pi$；

$\iint_{\Sigma_2}=-\iint_{D_{xy}}\left(0+(0+1)\right)dxdy=-4\pi$；

$\therefore I=-12\pi+4\pi=-8\pi$

5、　求$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=n}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{2k+1}$的值。

解：$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=n}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{2k+1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=n}^{\infty}\int_0^1(-1)^kx^{2k}dx=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int_0^1\sum\limits_{k=n}^{\infty}(-1)^kx^{2k}dx=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int_0^1\dfrac{(-1)^nx^{2n}}{1+x^2}dx$

$=\int_0^1\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^nx^{2n}}{1+x^2}dx=\int_0^1\dfrac{1}{(1+x^2)^2}dx=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{1}{4}$.

注：同类的题有

（1）　设$a_n=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\cdots+\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}-\ln 2$，求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$.（答案为$\ln 2-\dfrac{1}{2}$）

（2）　求$\lim\limits_{\substack{m\to+\infty\\ n\to+\infty}}\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{(-1)^{i+j}}{i+j}$。（答案为$\ln 2-\dfrac{1}{2}$）.）

二、 计算 $l=\lim\limits_{t\to 1^-}(1-t)\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{1+t^n}$.

解 记 $f(x)=\frac{t^x}{1+t^x},0<t<1$， $f(x)$ 为严格单减函数，则有

$$\int_1^{+\infty}f(x)dx<\sum_{n=1}^{\infty}f(n)<\int_0^{+\infty}f(x)dx.$$

而 $\int_0^{+\infty}f(x)dx=\int_0^{+\infty}\frac{e^{x\ln t}}{1+e^{x\ln t}}dx=\frac{1}{\ln t}\ln(1+e^{x\ln t})\Bigg|_0^{+\infty}=-\frac{\ln 2}{\ln t}$,

$t\to 1^-$ 时，$\int_0^{+\infty}f(x)dx=-\frac{\ln 2}{\ln t}\sim\frac{\ln 2}{1-t}$，进而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$ 的等价无穷大量为 $\frac{\ln 2}{1-t}$.

故所求极限为 $\ln 2$.

练习：$t\to 1^-$ 时，求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{1+t^{2n}}$、$\sum\limits_{n=0}^{\infty}t^{n^2}$ 的等价无穷大量.（答案：$\frac{\pi}{4(1-t)}$、$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-t}}$）

三、（14 分）证明：可微曲线 $C:y=f(x)\,(a\le x\le b)$ 以直线 $l:y=mx+k$ 为轴旋转所得立体的体积

$$V=\frac{\pi}{(1+m^2)^{3/2}}\int_a^b\left(f(x)-mx-k\right)^2\left(1+mf'(x)\right)dx\quad (mf'(x)>-1)$$

解：C 上一点 $P(x,f(x))$ 到 l 的距离

$$h=\frac{|mx+k-f(x)|}{\sqrt{1+m^2}}.$$

设直线 l 与 x 轴（正向）的夹角为 α，曲线 C 在点 P 的弧微分 ds 在 l 是的投影为 $d\xi$，在 P 点的切线与 x 轴（正向）的夹角为 β，那么

$$\begin{aligned}d\xi&=\cos(\beta-\alpha)ds=\cos\beta\cos\alpha\,(1+\tan\beta\tan\alpha)ds\\&=\frac{1+\tan\beta\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\beta}\sqrt{1+\tan^2\alpha}}ds\\&=\frac{1+mf'(x)}{\sqrt{1+m^2}\sqrt{1+f'(x)^2}}\sqrt{1+f'(x)^2}dx\\&=\frac{1+mf'(x)}{\sqrt{1+m^2}}dx.\end{aligned}$$

于是

$$V=\int_{t_1}^{t_2}\pi h^2 d\xi=\frac{\pi}{\left(1+m^2\right)^{3/2}}\int_a^b\left(f(x)-mx-k\right)^2\left(1+mf'(x)\right)dx$$

此处t_1,t_2 是C的端点$\left(a,f(a)\right),\left(b,f(b)\right)$在$l$上的投影的横坐标.

四、（14 分）设$f'(x)$在$[a,b]$上连续，证明：

$$\int_a^b\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt-f(x)\right)^2 dx\le\frac{1}{3}(b-a)^2\int_a^b\left(f'(t)\right)^2 dt \quad 。$$

证：左边的积分

$$I=\int_a^b\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b\left(f(t)-f(x)\right)dt\right)^2$$

$$=\int_a^b\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b\left(\int_t^x f'(u)du\right)dt\right)^2=\int_a^b J(x)dx$$

其中

$$J(x)=\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b\left(\int_t^x f'(u)du\right)dt\right)^2 \quad ;$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式得到

$$J(x)\le\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b 1^2dt\cdot\int_a^b\left(\int_t^x f'(u)du\right)^2dt$$

$$=\frac{1}{b-a}\int_a^b\left(\int_t^x f'(u)du\right)^2dt$$

$$\le\frac{1}{b-a}\int_a^b\left[\int_t^x 1^2du\cdot\int_t^x\left(f'(u)\right)^2du\right]dt$$

$$\le\frac{1}{b-a}\int_a^b\left(|x-t|\cdot\int_t^x\left(f'(u)\right)^2du\right)dt$$

$$=\frac{1}{b-a}\int_a^b\left(f'(u)\right)^2du\cdot\int_a^b|x-t|dt$$

因为

$$\int_a^b|x-t|dt=\int_a^x(x-t)dt+\int_x^b(t-x)dt$$

$$=\frac{1}{2}\left((x-a)^2+(b-x)^2\right)$$

所以

$$I\le\frac{1}{2(b-a)}\int_a^b\left(f'(u)\right)^2du\cdot\int_a^b\left((x-a)^2+(b-x)^2\right)dx$$

$$=\frac{1}{3}(b-a)^2\int_a^b\left(f'(t)\right)^2dt$$

五、（14 分）设 a_n 为实数，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n/n^2$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}=0$。

证明：已知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/n^2$ 收敛，记其和为 S，并令

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}\quad(n\geq 1),$$

则 $S_n\to S(n\to\infty)$；并且 $a_k/k^2=S_k-S_{k-1}$，我们有

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k\cdot\frac{a_k}{k^2}=\frac{1}{n}\left(\sum_{k=2}^{n}k(S_k-S_{k-1})+S_1\right)\\&=\frac{1}{n}\left(-\sum_{k=1}^{n-1}S_k+nS_n\right)=-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}S_k+S_n\\&=-\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}S_k+S_n\end{aligned}$$

依算术平均值数列收敛定理可知

$$\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}S_k\to S,(n\to\infty);$$

所以，当 $n\to\infty$ 时，上式 $\to -S+S=0$。

六、（14 分）设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，且 $\forall x: f(x)=f(x+2)=f(x+\sqrt{3})$，用 *Fourier* 级数理论证明 $f(x)$ 为常数.

证　$f(x)$ 可导，以正整数 2 为周期，同时以无理数 $\sqrt{3}$ 为周期. 由级数展开定理知

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos n\pi x+b_n\sin n\pi x],\quad a_0=\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x$$

$$a_n=\int_{-1}^{1}f(x)\cos(n\pi x)\mathrm{d}x,\quad b_n=\int_{-1}^{1}f(x)\sin(n\pi x)\mathrm{d}x\quad(n=1,2,\cdots).$$

另一方面，系数公式可如下变形

$$\begin{aligned}a_n&=\int_{-1}^{1}f(x+\sqrt{3})\cos(n\pi x)\mathrm{d}x=\int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}}f(t)\cos(n\pi(t-\sqrt{3}))\mathrm{d}t\\&=\int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}}\{f(t)\cos n\pi t\cos\sqrt{3}n\pi+f(t)\sin n\pi t\sin\sqrt{3}n\pi\}\mathrm{d}t\\&=a_n\cos\sqrt{3}n\pi+b_n\sin\sqrt{3}n\pi,\end{aligned}$$

同理 $b_n=b_n\cos\sqrt{3}n\pi-a_n\sin\sqrt{3}n\pi$. 联立

$$\begin{cases} a_n(1-\cos\sqrt{3}n\pi)-b_n\sin\sqrt{3}n\pi=0, \\ a_n\sin\sqrt{3}n\pi+b_n(1-\cos\sqrt{3}n\pi)=0 \end{cases}$$

因系数行列式值为 $2(1-\cos\sqrt{3}n\pi)\neq 0$，所以 $a_n=b_n=0, n=1,2,\cdots$，$f(x)\equiv a_0$.

分析 *Fourier* 级数系数公式，展开定理.