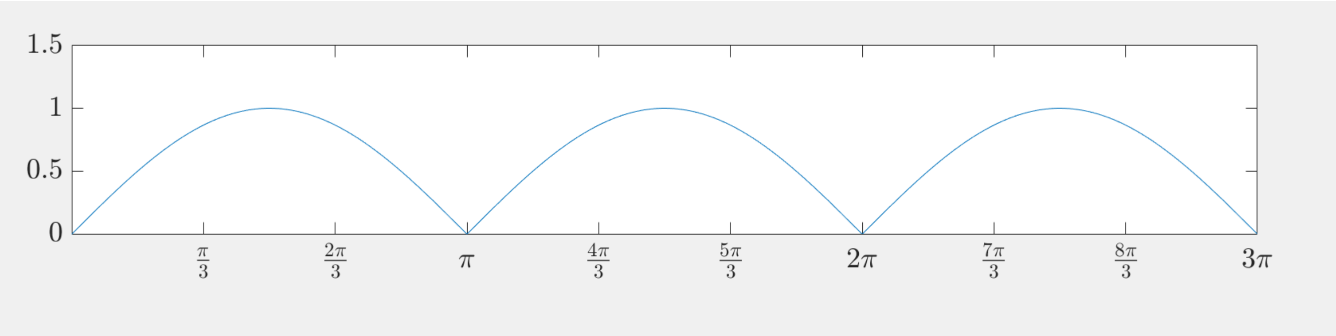
证明：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{\sum_{m=1}^{k}m|\sin m|}{k^3}\neq 0$$

首先，分析$\sum_{m=1}^{k}m|\sin m|$，发现对于$f(x)=|\sin x|$，有

$$\forall x\in\left[k\pi-\frac{2\pi}{3},k\pi-\frac{\pi}{3}\right],\text{且}|\sin x|>\frac{\sqrt{3}}{2} \tag{1}$$



这里需要注意的是：以上区间的长度为$\frac{\pi}{3}$，且$\frac{\pi}{3}>1$，也就是说，在该区间内，必定有至少一个、至多两个整数。因此，我们可以在 1~n 的所有正整数中找到这样一个子序列$\{a_{\mathrm{m}}\}$，它满足：

$$\forall i\in N,i\in\left(0,\left[\frac{k}{\pi}+1\right]\right),\text{有}a_i\in\left[i\pi-\frac{2\pi}{3},i\pi-\frac{\pi}{3}\right] \tag{2}$$

由此，显然有：

$$\sum_{m=1}^{k}m|\sin m|>\sum_{i=1}^{\left[\frac{k}{\pi}\right]}a_i|\sin a_i| \tag{3}$$

再由(1)(2)(3)，我们有$a_i>i\pi-\frac{2\pi}{3}>(i-1)\pi,|\sin a_i|>\frac{\sqrt{3}}{2}$，进而：

$$\sum_{m=1}^{k}m|\sin m|>\sum_{i=1}^{\left[\frac{k}{\pi}\right]}a_i|\sin a_i|>\sum_{i=1}^{\left[\frac{k}{\pi}\right]}(i-1)\pi\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi\frac{\left[\frac{k}{\pi}\right]\left(\left[\frac{k}{\pi}\right]-1\right)}{2}>\frac{\sqrt{3}}{4}\pi\frac{(k-2)^2}{\pi^2}=\frac{\sqrt{3}}{4\pi}(k-2)^2$$

可以发现，$\sum_{m=1}^{k}m|\sin m|>\frac{\sqrt{3}}{4\pi}(k-2)^2\propto k^2$，进而，我们可以推出：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{\sum_{m=1}^{k}m|\sin m|}{k^3}>\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{\sqrt{3}}{4\pi k^3}(k-2)^2=\frac{\sqrt{3}}{4\pi}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{(k-2)^2}{k^3}=\frac{\sqrt{3}}{4\pi}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{k^2}{k^3}>\frac{\sqrt{3}}{8\pi}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{\sum_{m=1}^{k}m|\sin m|}{k^3}>\frac{\sqrt{3}}{8\pi}>0$$