极 限

前言

- 基本概念清楚
- 基本定理掌握
- 基本计算熟悉

前言

- 极限是一种思想，是有限运算到无限运算的推广
  从有穷到无限，从理想到一般，由已知探究未知的方式

例如 定积分概念的形成

规则图形面积 $\longrightarrow$ 不规则图形面积

除了思想,其余都是中等数学!

前言

- 在实际计算极限时，多关注局部与整体的数值变化的依赖关系

例如 $$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^n}{n^n}$$

$$\frac{k^n}{n^n}=\left(\frac{k}{n}\right)^n \quad \to \quad ?$$

前言

$k \ll n$时

$$\frac{k^n}{n^n} = \left(\frac{k}{n}\right)^n \rightarrow 0$$

k可以远到什么程度使得这个极限依然成立

k靠近n时，即$k = n - i$

$$\frac{k^n}{n^n} = \left(\frac{k}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{i}{n}\right)^n \rightarrow e^{-i}$$

前言

猜测

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^n}{n^n}=1+e^{-1}+e^{-2}+\cdots=\frac{e}{e-1}$$

极限性质

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N, n > N, |x_n - a| < \varepsilon$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta, 0 < |x - x_0| < \delta, |f(x) - a| < \varepsilon$$

左,右极限⋯

- 唯一性
- 局部有界性
- 保不等号性
- 单调有界收敛性

极限计算的常见方法

1. 定义及等价无穷小

2. L’Hospital法则

3. 夹逼定理,微分中值定理

4. Stolz定理

5. Taylor展开

连续的定义

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta, |x - x_0| < \delta, |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

左连续，右连续

间断点及其分类

连续函数的整体性质

- 介值性质
- 最值性质
- 一致连续性质

历届试题分析

1.(11th) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(e^{\sin x}+\sqrt[3]{1-\cos x}\right)-\sin x}{\arctan(4\sqrt[3]{1-\cos x})}=$______.

Hints： L’Hospital法则不太合适

分母可以考虑先用等价无穷小

化简分子

历届试题分析

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(e^{\sin x}+\sqrt[3]{1-\cos x}\right)-\sin x}{\arctan(4\sqrt[3]{1-\cos x})}=\underline{\qquad\qquad}.$$

$$\ln\left(e^{\sin x}+\sqrt[3]{1-\cos x}\right)-\sin x=\ln\left(1+e^{-\sin x}\sqrt[3]{1-\cos x}\right)$$

$$\sim e^{-\sin x}\sqrt[3]{1-\cos x}$$

$$\arctan\left(4\sqrt[3]{1-\cos x}\right)\sim 4\sqrt[3]{1-\cos x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(e^{\sin x}+\sqrt[3]{1-\cos x}\right)-\sin x}{\arctan\left(4\sqrt[3]{1-\cos x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\sin x}\sqrt[3]{1-\cos x}}{4\sqrt[3]{1-\cos x}}$$

$$=\frac{1}{4}$$

历届试题分析

2. (8th) 若$f(1)=0, f'(1)$存在，则极限

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{f\left(\sin^2 x+\cos x\right)\tan 3x}{\left(e^{x^2}-1\right)\sin x}=\_\_\_\_\_\_.$$

Hints：L’Hospital并不合适，原因?

对相应因子考虑等价无穷小替换

f的处理，回归导数定义

历届试题分析

若$f(1)=0, f'(1)$存在，则极限

$$I=\lim_{x\to0}\frac{f\left(\sin^2 x+\cos x\right)\tan 3x}{\left(e^{x^2}-1\right)\sin x}=\underline{\qquad\qquad}.$$

$$\tan 3x \sim 3x \qquad e^{x^2}-1 \sim x^2 \qquad \sin x \sim x$$

$$\frac{f\left(\sin^2 x+\cos x\right)-f(1)}{\sin^2 x+\cos x-1}\left(\sin^2 x+\cos x-1\right) \sim f'(1)\left(\sin^2 x+\cos x-1\right)$$

$$I=\lim_{x\to0}\frac{f'(1)\left(\sin^2 x+\cos x-1\right)\cdot 3x}{x^2\cdot x}=\frac{3}{2}f'(1)$$

历届试题分析

3.(9th final) 极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x\ln\left(1+\sin^2 x\right)}=$________.

Hints: 分母可以考虑先做等价无穷小替换

分子可以先化简，再做等价无穷小替换

历届试题分析

极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x\ln\left(1+\sin^2 x\right)}=$________.

$$\ln(1+\sin^2 x)\sim\sin^2 x\sim x^2$$

$$\tan x-\sin x=\frac{\sin x\,(1-\cos x)}{\cos x}\sim\frac{1}{2}x^3$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x\ln(1+\sin^2 x)}=\frac{1}{2}$$

历届试题分析

4.(10th final)

设函数 $y=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1-a\sin^2 x}-b}{x^2}, & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续，则 $a+b$ 的值为________

Hints: 唯一知道的是连续点，自然需要用连续的定义

两个量，要么可以将 $a+b$ 作为一个整体出现，要么解出来，需要两个方程.

历届试题分析

(1) 设函数 $y=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1-a\sin^2 x}-b}{x^2}, & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续，则 $a+b$ 的值为______

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-a\sin^2 x}-b}{x^2}=2$$

$$\sqrt{1-a\sin^2 x}-b\to 0\ (x\to 0)\quad \Rightarrow b=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-a\sin^2 x}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-a\ \sin^2 x}-1}{-a\sin^2 x}\cdot\frac{-a\ \sin^2 x}{x^2}=-\frac{1}{2}a$$

$$\Rightarrow a=-4\Rightarrow a+b=-3$$

历届试题分析

5.(10th) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}=$ ________.

Hints：L’Hospital法则有点繁琐

熟悉等价无穷小关系$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$

在分子中插入一些项，分别计算极限

历届试题分析

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}=\underline{\qquad\qquad}.$$

$$1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\,\sqrt[3]{\cos 3x}=1-\cos x+\cos x\left(1-\sqrt{\cos 2x}\,\sqrt[3]{\cos 3x}\right)$$

$$1-\sqrt{\cos 2x}\,\sqrt[3]{\cos 3x}=1-\sqrt{\cos 2x}+\sqrt{\cos 2x}\left(1-\sqrt[3]{\cos 3x}\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\,\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\cos x\frac{1-\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$$

$$+\lim_{x\to 0}\cos x\sqrt{\cos 2x}\,\frac{1-\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$$

$$=\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}=3$$

历届试题分析

6.(9th) 设 $f(x)$ 具有二阶连续导数，且

$$f(0)=f'(0)=0, f''(0)=6,$$

则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x)}{x^4}=$ ________。

Hints: L’Hospital法则

Taylor展开

历届试题分析

设 $f(x)$ 具有二阶连续导数，且

$$f(0)=f'(0)=0, f''(0)=6,$$

则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x)}{x^4}=$ ________。

1） $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2=\frac{1}{2}f''(\xi)x^2$

$$f(\sin^2 x)=\frac{1}{2}f''(\xi)(\sin^2 x)^2$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin^2 x)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}f''(\xi)\frac{\sin^4 x}{x^4}=\frac{1}{2}f''(0)=3$$

历届试题分析

设 $f(x)$ 具有二阶连续导数，且

$$f(0)=f'(0)=0, f''(0)=6,$$

则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x)}{x^4}=$ ________。

2) $$\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin^2 x)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(\sin^2 x)\cdot 2\sin x\cos x}{4x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f'(\sin^2 x)}{2x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f'(\sin^2 x)}{\sin^2 x}\cdot\frac{\sin^2 x}{2x^2}=3$$

7.(3rd) $$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2\left(1-\ln(1+x)\right)}{x}.$$

Hints：若用L’Hospital，可预见到比较繁琐

第一个函数结构并不友好，可以考虑Taylor展开

若注意到这两点，就能有新思路:1. $\ln(1+x)\sim x$;

2. $(1+x)^{\frac{2}{x}}\to e^2$

历届试题分析

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2\left(1-\ln(1+x)\right)}{x}.$$

$$1)\ (1+x)^{\frac{2}{x}}=e^{\frac{2}{x}\ln(1+x)}=e^{\frac{2}{x}\left(x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)}=e^2e^{-x+o(x)}$$

$$=e^2\left(1-x+o(x)\right)$$

$$e^2(1-\ln(1+x))=e^2\left(1-x+o(x)\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2(1-\ln(1+x))}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{o(x)}{x}=0$$

历届试题分析

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2(1-\ln(1+x))}{x}.$$

2) $(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2(1-\ln(1+x))=(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2+e^2\ln(1+x)$

$$(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2=e^2\left(e^{2\left(\frac{1}{x}\ln(1+x)-1\right)}-1\right)\sim 2e^2\left(\frac{1}{x}\ln(1+x)-1\right)$$

$$\sim 2e^2\left(-\frac{1}{2}x\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2(1-\ln(1+x))}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{e^2\ln(1+x)}{x}$$

$$=0$$

8.(2ed) 求 $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}$.

Hint: 最直接也许也是最合理的想法是将后面的函数具体化

解：由

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}=e^{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=e^{x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)}=e^{x-\frac{1}{2}+o(1)}$$

历届试题分析

求 $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}$.

可得

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2} = \lim_{x\to\infty} e^{-x}e^{x-\frac{1}{2}+o(1)}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}}$$

历届试题分析

9.(1st) **第二题**：求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{e}{x}}$，其中 n 是给定的正整数.

解：

$$\lim_{x\to 0}\frac{e}{x}\ln\left(\frac{e^x(e^{nx}-1)}{n(e^x-1)}-1+1\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e}{x}\left(\frac{e^x(e^{nx}-1)}{n(e^x-1)}-1\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}e\,\frac{e^{(n+1)x}-(n+1)e^x+n}{nx^2}=\frac{n+1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{e}{x}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{e}{x}\ln\left(\frac{e^x(e^{nx}-1)}{n(e^x-1)}-1+1\right)}=e^{\frac{n+1}{2}}$$

历届试题分析

10.(9th final) 求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}\right]$.

Hint: 直接用Stirling公式$n!\sim\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$替代并不适合，因为涉及到了差运算。

基本想法是将差化成积,将指数幂数统一成指数形式。

解：$$\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}=\sqrt[n]{n!}\left(\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}-1\right)$$

历届试题分析

$$\sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e} (n \to +\infty)$$

$$\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}} - 1 = e^{\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} \ln k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln k} - 1$$

$$= e^{\frac{1}{n+1}\ln(n+1) - \frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n} \ln k} - 1$$

$$\sim \frac{1}{n+1}\ln(n+1) - \frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n} \ln k$$

历届试题分析

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}\left(\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{e}\left(\frac{1}{n+1}\ln(n+1)-\frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\ln k\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{e}\left(\ln n-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln k\right)$$

$$=-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{e}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\ln\frac{k}{n}$$

$$=-\frac{1}{e}\int_0^1\ln x\,dx=\frac{1}{e}$$

历届试题分析

Remarks:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)=\int_a^b f(x)dx$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{e}$$

历届试题分析

11.(4th final) 计算 $\lim\limits_{x\to0+}\left[\ln\left(x\ln a\right)\cdot\ln\left(\dfrac{\ln ax}{\ln\left(x/a\right)}\right)\right],(a>1).$

解: $\dfrac{\ln ax}{\ln\dfrac{x}{a}}\to 1$

$$\ln\frac{\ln ax}{\ln\frac{x}{a}}=\ln\left(1+\left(\frac{\ln ax}{\ln\frac{x}{a}}-1\right)\right)\sim\frac{\ln ax-\ln\frac{x}{a}}{\ln\frac{x}{a}}=\frac{2\ln a}{\ln\frac{x}{a}}$$

$$\lim_{x\to0+}\left[\ln(x\ln a)\cdot\ln\frac{\ln ax}{\ln\frac{x}{a}}\right]=\lim_{x\to0+}\ln\left(x\ln a\right)\cdot\frac{2\ln a}{\ln\frac{x}{a}}=2\ln a$$

历届试题分析

12.(8th final) **第六题**：设$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n.$

(1)证明：极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在；

(2)记 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=C$，讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-C\right)$的敛散性.