

微积分（一）下第7周第一次课作业答案与提示

二重积分的定义与性质

1. 填空:

1) 若 g_1, g_2 在全平面连续且满足 $g_1(x, y) < g_2(x, y)$, 则曲面 $z = g_1(x, y)$ 、 $z = g_2(x, y)$

与柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 所围立体的体积用二重积分可表示为 $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} (g_2(x, y) - g_1(x, y)) d\sigma$.

$$2) \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} d\sigma = \frac{2\pi R^3}{3}.$$

3) 设平面区域 D 由 $x=0, y=0, x+y=\frac{1}{2}, x+y=1$ 围成, 若

$$I_1 = \iint_D [\ln(x+y)]^7 dx dy, \quad I_2 = \iint_D (x+y)^7 dx dy, \quad I_3 = \iint_D [\sin(x+y)]^7 dx dy$$

则 I_1, I_2, I_3 之间大小顺序为 $I_1 < I_3 < I_2$.

2. 估计积分 $I = \iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 16}} d\sigma$ 的值, 其中 D 是长方形域: $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$.

答案: $\frac{2}{5} \leq I \leq \frac{1}{2}$.

3. 求 $l = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi t^2} \iint_D e^{x^2 - y^2} \cos(x+y) d\sigma$, 其中 D 为 $x^2 + y^2 \leq t^2$ ($t > 0$).

答案: 1. 提示: 利用积分中值定理.