带积分型余项的泰勒公式及其应用

吴洁

定理 设$f(x)$在点x_0的邻域$U(x_0)$内有连续的$n+1$阶导数，则$\forall x\in U(x_0)$，有

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x),$$

其中$R_n(x)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}f^{(n+1)}(x)(x-t)^n dt$。

证 从 $R_n(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$可得：

$R_n^{(k)}(x_0)=0$，$k=1,2,\cdots,n$，$R_n^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x)$。

逐次积分，得

$$\begin{aligned}R_n(x)&=\int_{x_0}^{x}R_n{}'(t)dt=\int_{x_0}^{x}R_n{}'(t)d(t-x)=(t-x)R_n{}'(t)+\int_{x_0}^{x}R_n{}''(t)(x-t)dt\\&=\int_{x_0}^{x}R_n{}''(t)(x-t)dt=-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}R_n{}''(t)d(x-t)^2=\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}R_n{}'''(t)(x-t)^2dt\\&=\cdots=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}R_n^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt\text{。}\end{aligned}$$

说明：（1）对$R_n(x)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}f^{(n+1)}(x)(x-t)^n dt$右边用积分中值定理，有

$$\begin{aligned}R_n(x)&=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}f^{(n+1)}(x)(x-t)^n dt=\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)\int_{x_0}^{x}(x-t)^n dt\\&=-\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-t)^{n+1}\Big|_{x_0}^{x}=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1},\end{aligned}$$

其中ξ介于x_0与x之间，这就是拉格朗日型余项。

（2）将余项中的被积函数$f^{(n+1)}(x)(x-t)^n$看成一整体，用积分中值定理，有

$$\begin{aligned}R_n(x)&=\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n\int_{x_0}^{x}dt\\&=\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n(x-x_0)\quad\text{（}\xi\text{介于}x_0\text{与}x\text{之间）}\\&=\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1}\quad\text{（}\xi=x_0+\theta(x-x_0)\text{）}\end{aligned}$$

这是柯西型余项。

（3）由于积分型余项中不含中值，因此带积分型余项的泰勒公式常用于比较精确的表达式中。

（4）带积分型余项的泰勒公式可改写为

$$\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(x)(x-t)^n dt = n![f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k] \qquad (*)$$

应用

当被积函数为某一函数乘以（积分上限—积分变量）的高次幂时，可考虑用＊式。

例 1 计算 $\int_0^1 e^x(1-x)^n dx$（n 为正整数）。（注意被积函数的形式）

解 设 $f(x)=e^x$，则 $f^{(n+1)}(x)=e^x$，于是

$$\int_0^1 e^x(1-x)^n dx = n![e^1-e^0-e^0\cdot 1-\cdots-\frac{1}{n!}e^0\cdot 1^n] = n![e-2-\cdots-\frac{1}{n!}]\text{。}$$

例 2 计算 $\int_a^b \frac{1}{x^{n+2}}(b-x)^n dx$（$n$ 为正整数，$0<a<b$）。

解 设 $f(x)=\frac{1}{x}$，则 $f^{(n+1)}(x)=\frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{x^{n+2}}$，于是

$$\int_a^b \frac{1}{x^{n+2}}(b-x)^n dx = \int_a^b \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}(\frac{1}{x})^{(n+1)}(b-x)^n dx$$

$$=\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot n!\left[\frac{1}{b}-\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}(b-a)-\frac{1}{a^3}(b-a)^2+\cdots+\frac{(-1)^n}{a^{n+1}}(b-a)^n\right]$$

$$=\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\frac{(a-b)^{n+1}}{a^{n+1}b}\text{。}$$

例 3 计算 $\int_0^1 x^m(1-x)^n dx$。

解 $\int_0^1 x^m(1-x)^n dx = \int_0^1\left[\frac{x^{m+n+1}\cdot m!}{(m+n+1)!}\right]^{(n+1)}(1-x)^n dx = n!\frac{m!}{(m+n+1)!}$。

最后，看一道普特南数学竞赛试题（第 35 届 B-5）

例 4 证明：对于每个整数 $n\geq 0$ 都有 $1+\frac{n}{1!}+\frac{n^2}{2!}+\cdots+\frac{n^n}{n!}>\frac{e^n}{2}$。（普特兰第 35 届 B-5）

（注：可以利用 $e^x-\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!}=\frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n e^t dt$ 以及 $n!=\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$）

证：由提示可知，即证 $\sum_{k=1}^{n}\frac{n^k}{k!}=e^n-\frac{1}{n!}\int_0^n (n-t)^n e^t dt>\frac{e^n}{2}$ 或 $n!>2e^{-n}\int_0^n (n-t)^n e^t dt$，

即 $$\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt > 2e^{-n} \int_0^n (n-t)^n e^t dt 。$$

对右边换元：令 $u = n - t$，则 $\int_0^n (n-t)^n e^t dt = \int_n^0 u^n e^{n-u}(-du) = e^n \int_0^n u^n e^{-u} du$，

于是即证 $\int_0^{+\infty} u^n e^{-u} du > 2\int_0^n u^n e^{-u} du$，亦即 $\int_n^{+\infty} u^n e^{-u} du > \int_0^n u^n e^{-u} du$ 。

注意到被积函数 $u^n e^{-u}$ 非负，因此 $\int_0^{+\infty} u^n e^{-u} du > \int_0^n u^n e^{-u} du$ 成立，为此对左边换元：令 $h = u - n$（$u = n$，$h = 0$），则 $\int_n^{+\infty} u^n e^{-u} du = \int_0^{+\infty} (n+h)^n e^{-(n+h)} dh$；右边被积函数相应也变成关于 n 与 h 的函数，但积分区间为 $[0, n]$，为此令 $u = n - h$，则

$\int_0^n u^n e^{-u} du = \int_0^n (n-h)^n e^{-(n-h)} dh$，因此所证等式等价于

$$\int_0^{+\infty} (n+h)^n e^{-(n+h)} dh > \int_0^n (n-h)^n e^{-(n-h)} dh \quad （0 \le h \le n）$$

如果能证明 $(n+h)^n e^{-(n+h)} \ge (n-h)^n e^{-(n-h)}$，则上式成立，亦即原不等式成立。

由于 $(n+h)^n e^{-(n+h)} \ge (n-h)^n e^{-(n-h)} \Leftrightarrow n\ln(n+h) - h \ge n\ln(n-h) + h$，

令 $g(h) = n\ln(n+h) - n\ln(n-h) - 2h$，则 $g(0) = 0$，当 $0 < h < n$ 时，

$$g'(h) = \frac{n}{n+h} + \frac{n}{n-h} - 2 = \frac{2n^2}{n^2 - h^2} - 2 = \frac{2h^2}{n^2 - h^2} > 0$$

所以 $g(h)$ 在 $[0, n]$ 上单调增加，从而当 $0 \le h \le n$ 时，$g(h) \ge 0$.　　　　证毕。