1. 无穷级数是数列极限研究的新形式

2. 数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的柯西准则：

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n > N, \forall m > 0$$
$$\left| a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+m} \right| < \varepsilon$$

3. 需熟知的数项级数

$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n \quad (a \neq 0)$ 当且仅当 $|q| < 1$ 时收敛，和为 $\frac{a}{1-q}$.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 当 $p > 1$ 时收敛，当 $p \leq 1$ 时发散.

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}$ 当 $p > 1$ 时收敛，当 $p \leq 1$ 时发散.

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p}$ 当 $p > 1$ 时收敛，当 $p \leq 1$ 时发散.

$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + \varepsilon$ $\quad \gamma \approx 0.577$，$\varepsilon$ 为无穷小.

$$1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

$$1 + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}$$

【题型 13-1】 通过计算数项级数的部分和求级数的和

策略 将通项写成某数列相邻项之差以利于计算部分和时求和抵消.

例 13-1 若 $a>1$， 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{a^{2^n}+1}$ 的和.

分析 通项的分子分母同乘 $a^{2^n}-1$ 后，可写成数列 $\frac{2^n}{a^{2^n}-1}$ 相邻两项之差.

解
$$\frac{2^n}{a^{2^n}+1}=\frac{2^n(a^{2^n}-1)}{a^{2^{n+1}}-1}=\frac{2^n(a^{2^n}+1)-2^{n+1}}{a^{2^{n+1}}-1}=\frac{2^n}{a^{2^n}-1}-\frac{2^{n+1}}{a^{2^{n+1}}-1},$$

级数的前 n 项部分和为 $S_n=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2^k}{a^{2^k}+1}=\frac{1}{a-1}-\frac{2^n}{a^{2^n}-1}$.

因为 $a>1$， $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{a^{2^n}-1}=0$，从而级数的和为 $S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{a-1}$.

例 13-2 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{2}{n^2}$ 的和.

分析 利用恒等式 $\arctan\frac{a-b}{1+ab}=\arctan a-\arctan b$，（$a>0,b>0$）将通项写成差式.

解 因为

$$\arctan\frac{2}{n^2}=\arctan\frac{(n+1)-(n-1)}{1+(n+1)(n-1)}=\arctan(n+1)-\arctan(n-1),$$

级数的部分和为

$$\begin{aligned}S_n&=(\arctan 2-\arctan 0)+(\arctan 3-\arctan 1)+\cdots+(\arctan(n+1)-\arctan(n-1))\\&=\arctan(n+1)+\arctan n-\arctan 1\end{aligned}$$

所以级数的和为 $S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$.

练习 (1) $\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{n^2+n+1}$； (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{2n^2}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{4n}{n^4-2n^2+2}$； (4) $\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{8n}{n^4-2n^2+5}$.

例 13-3 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}$ 的和.

分析 注意到 $\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$，可努力将通项写成差式.

解 记 $b_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$，（$b_n=\ln n+\gamma+\varepsilon$,这里 $\gamma\approx 0.577$ ）则部分和为

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{b_k}{k+1}-\frac{b_k}{k+2}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{b_k}{k+1}-\frac{b_{k+1}}{k+2}\right)+\sum_{k=1}^{n}\frac{b_{k+1}-b_k}{k+2}$$

$$=\frac{b_1}{2}-\frac{b_{n+1}}{n+2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+2)(k+1)}=\frac{1}{2}-\frac{b_{n+1}}{n+2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2},$$

所以级数的和为 $S=\lim_{n\to\infty}S_n=1$.

注 1 这里级数不能写成 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n+1}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n+2}$，因为相减的两个级数都是发散的.

注 2 同类练习求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n(n+1)}$ 的和，需用到结论 $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}}$.

例 13-4 设 $a_1>0, a_n-a_{n-1}=d>0$，求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_na_{n+1}\cdots a_{n+m}}$ 的和. （m 为正整数）

分析 $\{a_n\}$ 为等差数列，有 $a_{n+m}=a_n+md$，则 $\frac{md}{a_na_{n+1}\cdots a_{n+m}}=\frac{a_{n+m}-a_n}{a_na_{n+1}\cdots a_{n+m}}$ 可写成差式 $\frac{1}{a_na_{n+1}\cdots a_{n+m-1}}-\frac{1}{a_{n+1}\cdots a_{n+m}}$.

解 级数的前 n 项部分和为 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_ka_{k+1}\cdots a_{k+m}}$

$$=\frac{1}{md}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_ka_{k+1}\cdots a_{k+m-1}}-\frac{1}{a_{k+1}\cdots a_{k+m}}\right)=\frac{1}{md}\left(\frac{1}{a_1a_2\cdots a_m}-\frac{1}{a_{n+1}\cdots a_{n+m}}\right),$$

又因 $a_{n+i}=a_1+(n+i-1)d\to\infty(n\to\infty)$，所以级数的和为 $S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{md}\frac{1}{a_1a_2\cdots a_m}$.

【题型 13-2】 利用比值判别法、根值判别法对正项级数判敛

策略 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=l$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l$，则 $l<1$ 时级数收敛，$l>1$ 时级数发散；$l=1$ 时需要另法判定（可以考虑更**精细**的判别法如 Raabe 判别法）.

例 13-5 设 $a>0$，判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^{\frac{1}{2}n(n+1)}}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}$ 的敛散性.

分析 通项 u_n 有连乘积用比值判别法，在失效情形再考察通项的单调性、极限，检查级数收敛的必要条件是否满足.

解 计算易得 $\dfrac{u_n}{u_{n-1}}=\dfrac{a^n}{1+a^n}\to\begin{cases}0, & a<1,\\ \dfrac{1}{2}, & a=1,\\ 1, & a>1.\end{cases}$

当 $a\le 1$ 时，比值极限小于 1，原级数收敛.

当 $a>1$ 时，比值极限等于 1，比值判别法失效. 令 $b=\dfrac{1}{a}<1$，此时

$$u_n=\frac{1}{(1+b)(1+b^2)\cdots(1+b^n)}\qquad \text{（利用不等式 } e^x>1+x, x>0)$$

$$>\frac{1}{e^b e^{b^2}\cdots e^{b^n}}>\frac{1}{e^{b/(1-b)}}\ ,$$

收敛的必要条件 $u_n\to 0(n\to\infty)$ 不满足，所以原级数发散.

注 1 当 $a>1$ 时，$\dfrac{u_n}{u_{n+1}}=\dfrac{1+a^{n+1}}{a^{n+1}}\to 1$，比值判别法失效，也可考虑用 Raabe 判别法. 因 $n(\dfrac{u_n}{u_{n+1}}-1)=\dfrac{n}{a^{n+1}}\to 0<1$，故级数发散.

Raabe 判别法：设 $u_n>0$，且 $n(\dfrac{u_n}{u_{n+1}}-1)\to r$，则 $\sum u_n$ 当 $r>1$ 时收敛，$r<1$ 时发散.

注 2 考虑**无穷乘积** $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+b^n)$ 的收敛性，简单关联到级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+b^n)$ 的收敛性.

因级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b^n$ （$0<b<1$）收敛，故 $(1+b)(1+b^2)\cdots(1+b^n)$ 收敛于某正数.

例 13-6 判别 $\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}+\cdots$ 的敛散性.

分析 观察到通项数列有递推特征，计算比值的极限，用比值判别法判敛.

解 设 $v_0=0$，$v_1=\sqrt{2}, v_{n+1}=\sqrt{2+v_n}$，则 $v_n\to 2(n\to\infty)$. 记级数的通项为 u_n，则

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\sqrt{2-v_n}}{\sqrt{2-v_{n-1}}}=\frac{\sqrt{2^2-{v_n}^2}}{\sqrt{2-v_{n-1}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2+v_n}}=\frac{\sqrt{4-(2+v_{n-1})}}{\sqrt{2-v_{n-1}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2+v_n}}=\frac{1}{\sqrt{2+v_n}}\to\frac{1}{2}<1,$$ 由比值判别法知级数收敛.

例 13-7 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n^2}$ 的敛散性.

分析 通项为幂指式，计算根值的极限，用根值判别法判敛.

解 记通项为 u_n，

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n=\exp\lim_{n\to\infty}n\ln\left(\sqrt{n}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$=\exp\lim_{n\to\infty}n(\sqrt{n}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}-1)=\exp\lim_{n\to\infty}n^{\frac{3}{2}}\cdot\left(\sin\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$=\exp\lim_{n\to\infty}n^{\frac{3}{2}}\cdot\left(-\frac{1}{3!}(\frac{1}{\sqrt{n}})^3+o\left((\frac{1}{\sqrt{n}})^3\right)\right)=\exp\left(-\frac{1}{6}\right)<1,$$

用根值判别法知级数收敛.

【题型 13-3】 使用比较判别法及其极限形式对正项级数的判敛

策略 用**不等关系**对级数的通项进行变形以利于使用比较判别法,用**等价关系**对通项进行变形以利于使用比较判别法的极限形式. 等比级数 $\sum_{n=0}^{\infty}aq^n$ 、P-级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 以及级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^p n}$，$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^p}$ 常作为比较判别法的比较对象. **泰勒公式常用于分离(无穷小)通项的主部**，寻找通项的等价无穷小.

例 13-8 判别级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\frac{n+1}{n}}\right)$的敛散性.

分析 利用不等式$\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$对通项进行放大缩小.

解 记通项为a_n，则$0<a_n<\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$，

而正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$的部分和为$1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$有上界 1，故此级数收敛．再由比较判别法知道原级数收敛.

另法 $a_n=\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\sqrt{\ln\frac{n+1}{n}}\right)^{-1}\left(\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{1}{n})\right)$

$$\sim(\frac{2}{\sqrt{n}})^{-1}\left(\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{1}{n})\right)\sim(\frac{2}{\sqrt{n}})^{-1}\cdot\frac{1}{2n^2}=\frac{1}{4n\sqrt{n}}.$$

例 13-9 讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n!}{n^{\alpha}}$, $(\alpha>0)$的敛散性.

分析 对通项进行放缩，与 P-级数对比，用比较判别法及其极限形式判敛.

解 当$\alpha\le 2$时，通项$a_n=\frac{\ln 2+\ln 3+\cdots+\ln n}{n^{\alpha}}>\frac{n-2}{n^{\alpha}}\sim\frac{1}{n^{\alpha-1}}$，因级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$发散，用比较判别法及其极限形式得原级数发散；

当$\alpha>2$时，$a_n<\frac{n\ln n}{n^{\alpha}}=\frac{\ln n}{n^{\alpha-1}}$，取$p$： $1<p<\alpha-1$，则$\varepsilon=\alpha-1-p>0$，因为$n^p\ \frac{\ln n}{n^{\alpha-1}}=\frac{\ln n}{n^{\varepsilon}}\to 0(n\to\infty)$，而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p},(p>1)$收敛，用比较判别法及其极限形式知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{\alpha-1}}$收敛，故原级数收敛.

注 也可直接用 Stirling 公式 $\boxed{n!\sim\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}$

$$\boxed{\ln n!\sim n\ln n}.$$

例 13-10 设$\alpha>0$，讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{1^{\alpha}+2^{\alpha}+\cdots+n^{\alpha}}$ 的敛散性.

分析 级数通项的分母为一和式，将和式往黎曼和形式变化，用定积分计算和式极限，并用比较判别法的极限形式判敛.

解 记通项为a_n，因

$$\frac{1^{\alpha}+2^{\alpha}+\cdots+n^{\alpha}}{n^{\alpha+1}}=\sum_{k=1}^{n}(\frac{k}{n})^{\alpha}\frac{1}{n}\to\int_0^1 x^{\alpha}dx=\frac{1}{1+\alpha},$$

而$\frac{\frac{1}{n^{\alpha}}}{a_n}=\frac{1^{\alpha}+2^{\alpha}+\cdots+n^{\alpha}}{n^{\alpha+1}}$，即$a_n$与$\frac{1}{n^{\alpha}}$为同阶无穷小，由比较判别法的极限形式知，原级数与P－级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$敛散性相同，即当$\alpha>1$时，原级数收敛；当$0<\alpha\le 1$时，原级数发散.

例 13-11 判别级数$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^n xdx$的敛散性.

分析 通项是积分，若直接用积分性质只能放大为 1，缩小为$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$，比较判别法用不了．但通项可写成$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx$，而$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx$可以计算出来，$\sum\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx$可以用比较判别法判敛.

解 记$b_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx$，有$b_n>b_{n+1}$，而

$$b_n\cdot b_{n+1}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{n!!}{(n+1)!!}\cdot\frac{(n-1)!!}{n!!}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{n+1},$$

所以$b_n>\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n+1}}$，由级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$发散及比较判别法知$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$发散.

又$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx\le\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\cdot\frac{\pi}{4}$，知$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx$收敛．利用级数的线性性质得$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^n xdx$发散.

例 13-12　讨论级数$\sum \frac{1}{n^p}(1-\frac{x\ln n}{n})^n$的敛散性与参数$p,x$的关系.

分析　n充分大时，$1-\frac{x\ln n}{n}>0$，级数为正项级数，可与P-级数进行比较.

解　通项$u_n=\frac{1}{n^p}(1-\frac{x\ln n}{n})^n=\frac{1}{n^p}\left[(1-\frac{x\ln n}{n})^{-\frac{n}{x\ln n}}\right]^{-x\ln n}$，

因$(1-\frac{x\ln n}{n})^{-\frac{n}{x\ln n}}\to e$，而$e^{-x\ln n}=\frac{1}{n^x}$，　取$v_n=\frac{1}{n^{p+x}}$，

下面计算$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}$.

$$\text{因}\lim_{n\to\infty}\ln\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\ln\left\{n^x(1-\frac{x\ln n}{n})^n\right\}=\lim_{n\to\infty}\left\{x\ln n+n\ln(1-\frac{x\ln n}{n})\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{x\ln n+n\left[-\frac{x\ln n}{n}-\frac{1}{2}\frac{x^2\ln^2 n}{n^2}+o\left(\frac{x^2\ln^2 n}{n^2}\right)\right]\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[-\frac{1}{2}\frac{x^2\ln^2 n}{n}+o\left(\frac{x^2\ln^2 n}{n}\right)\right]=0,$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=1$，原级数与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p+x}}$有相同的敛散性，即当且仅当$p+x>1$时原级数收敛.

思考: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-\frac{\ln n}{n})^n$敛散性如何?

例 13-13 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{a}-\sqrt{1+\frac{1}{n}})$（$a>0$）的敛散性.

分析 利用泰勒公式将通项（无穷小）变形，寻找通项的等价无穷小.

解 由泰勒公式

$e^x=1+x+x^2/2+o(x^2)$，$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)x^2+o(x^2)$，

有 $\sqrt[n]{a}=e^{\frac{1}{n}\ln a}=1+\frac{1}{n}\ln a+\frac{1}{2n^2}\ln^2 a+o(\frac{1}{n^2})$，$\sqrt{1+\frac{1}{n}}=1+\frac{1}{2n}-\frac{1}{8n^2}+o(\frac{1}{n^2})$，故级数

通项为 $a_n=\left(\ln a-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{n}+\left(\frac{1}{2}\ln^2 a+\frac{1}{8}\right)\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})$.

当 $\ln a-\frac{1}{2}\neq 0$，即 $a\neq\sqrt{e}$ 时，$a_n\sim\left(\ln a-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{n}\ (n\to\infty)$ 且不变号，知原级数发散.

当 $\ln a-\frac{1}{2}=0$，即 $a=\sqrt{e}$ 时，$a_n\sim\frac{1}{4n^2}\ (n\to\infty)$，知原级数收敛.

【题型 13-4】 变号级数判敛

策略 对变号级数，可先看其绝对值级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 是否收敛．当绝对值级数收敛时，原级数为绝对收敛．当绝对值级数发散时，分为几种情形：

（1）若用比值法判别出绝对值级数是发散的，此时通项 $|u_n|$ 是单调增加不趋于零的，故 u_n 也不趋于零，原级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散；

（2）若级数为莱布尼兹型交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$（即 a_n 单调减少趋于零），此时原级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，或确切地说是条件收敛；

（3）其它情况可利用求部分和法，加括号法，分项法等来讨论原级数的敛散性.

例 13-14 判定级数$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left[\pi\left(3+\sqrt{5}\right)^n\right]$的敛散性.

分析 通项的符号不明确，可用三角函数的周期性将通项与$\sin\left[\pi\left(3-\sqrt{5}\right)^n\right]$联系.

解 考虑$\left(3+\sqrt{5}\right)^n+\left(3-\sqrt{5}\right)^n=\sum_{k=1}^{n}C_n^k 3^{n-k}(\sqrt{5})^k+\sum_{k=1}^{n}C_n^k 3^{n-k}(-\sqrt{5})^k$

$$=\sum_{k=1}^{n}C_n^k\left[1+(-1)^k\right]3^{n-k}(\sqrt{5})^k=2\left[3^n+C_n^2 3^{n-2}\cdot 5+C_n^4 3^{n-4}\cdot 5^2+\cdots\right]=A_n$$

是偶数，所以

$$\sin\left[\pi\left(3+\sqrt{5}\right)^n\right]=\sin\left[A_n\pi-\pi\left(3-\sqrt{5}\right)^n\right]=-\sin\left[\pi\left(3-\sqrt{5}\right)^n\right],$$

$$\left|\sin\left[\pi\left(3+\sqrt{5}\right)^n\right]\right|=\sin\left[\pi\left(3-\sqrt{5}\right)^n\right]\le\pi\left(3-\sqrt{5}\right)^n$$

而正项等比级数$\sum_{n=1}^{\infty}\pi\left(3-\sqrt{5}\right)^n$收敛，故原级数绝对收敛.

例 13-15 判定级数$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\pi\dfrac{n^2+n\alpha+\beta}{n}$敛散性.

分析 通项u_n能写成$\sin\left[n\pi+\alpha\pi+\dfrac{\beta\pi}{n}\right]=(-1)^n\sin\left(\alpha\pi+\dfrac{\beta\pi}{n}\right)$.

解 当α为整数时，$u_n=(-1)^{n+\alpha}\sin\dfrac{\beta}{n}\pi$，若$\beta\ne 0$，级数是莱布尼兹型交错级数且$\left|u_n\right|\sim\dfrac{|\beta|}{n}\pi$，故级数为条件收敛；若$\beta=0$，级数通项为 0，当然收敛.

当α不为整数时，$\lim\limits_{n\to\infty}\left|u_n\right|=\left|\sin\alpha\pi\right|\ne 0$，级数发散.

例 13-16 设$u_n\ne 0$，且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{u_n}=1$，判定级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\dfrac{1}{u_n}+\dfrac{1}{u_{n+1}}\right)$敛散性.

分析 级数是交错级数但不能确定是莱布尼兹型的，其绝对值级数又是发散的，这时可通过计算部分和考虑此交错级数的敛散.

解 由$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{u_n}=1$，知$\dfrac{1}{u_n}\sim\dfrac{1}{n}$，$\dfrac{1}{u_n}+\dfrac{1}{u_{n+1}}\sim\dfrac{2}{n}$，原级数非绝对收敛．但原级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\dfrac{1}{u_n}+\dfrac{1}{u_{n+1}}\right)$的前$n$项部分和为$S_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}(\dfrac{1}{u_k}+\dfrac{1}{u_{k+1}})=\dfrac{1}{u_1}+(-1)^{n+1}\dfrac{1}{u_{n+1}}$，

其极限为$\frac{1}{u_1}$，即原级数收敛，从而是条件收敛的.

例 13-17 讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{(-1)^{n-1}}{n^p})$ $(p>0)$的敛散性.

分析 用泰勒公式将级数的通项分离为泰勒多项式与高阶无穷小之和，再用分项法给出级数的敛散.

解 通项为$u_n=\ln(1+\frac{(-1)^{n-1}}{n^p})=\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}-\frac{1}{2}\frac{1}{n^{2p}}+o(\frac{1}{n^{2p}})$，

记$b_n=\frac{1}{2}\frac{1}{n^{2p}}+o(\frac{1}{n^{2p}})\sim\frac{1}{2}\frac{1}{n^{2p}}$，$u_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}-b_n$.

当$p>1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$绝对收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$收敛，故$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$绝对收敛.

当$0<p\le\frac{1}{2}$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$条件收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$发散，故$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散.

当$\frac{1}{2}<p\le 1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$条件收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$收敛，故$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$条件收敛.

注 这里用到

绝对收敛+绝对收敛=绝对收敛

绝对收敛+条件收敛=条件收敛

例 13-18 讨论级数$1-\frac{1}{2^x}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4^x}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{(2n)^x}+\cdots(x>0)$的敛散性.

分析 级数为交错级数，$x\ne 1$时它不是莱布尼兹型的，用分项法、加括法判敛.

解 1）当$x=1$时，级数为$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}+\cdots$，它是条件收敛的.

2）当$x>1$时，考虑级数

$$1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\cdots$$

与$\frac{1}{2^x}+\frac{1}{4^x}+\cdots+\frac{1}{(2n)^x}+\cdots$

的差，前者发散，后者收敛，故级数

$$(1-\frac{1}{2^x})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4^x})+\cdots+(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{(2n)^x})+\cdots$$

发散，从而原级数发散.

（收敛级数加括号必收敛，加括级数发散原级数发散）

3）当$0<x<1$时，级数加括号变为$1-(\frac{1}{2^x}-\frac{1}{3})-(\frac{1}{4^x}-\frac{1}{5})-\cdots-(\frac{1}{(2n)^x}-\frac{1}{2n+1})-\cdots$

去掉第一项后不变号，且$\frac{1}{(2n)^x}-\frac{1}{2n+1}\sim\frac{1}{(2n)^x}$，由$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^x}$发散，知原级数发散.

【题型 13-5】 通项包含有抽象数列的级数敛散性证明

策略 常用方法有：（1）定义或基本性质（适合于任意项级数）；（2）比较判别法及其极限形式（适合于正项级数）；（3）柯西收敛准则

柯西收敛准则

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists N\ ,\forall n>N,m\geq 0,\ |a_n+\cdots+a_{n+m}|<\varepsilon$.

比较定理

正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$，若从某正整数开始$\frac{u_{n+1}}{u_n}\leq\frac{v_{n+1}}{v_n}$，则由$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛可得$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛。

例 13-19 设$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$为正项级数，数列$\{a_n\}$单调减少，试证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛的充分必要条件是级数$\sum_{n=1}^{\infty}2^n a_{2^n}$收敛.

分析 将两级数的部分和关联，利用正项级数收敛的充要条件为部分和有上界来证明.

证明 记$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k,\sigma_n=\sum_{k=1}^{n}2^k a_{2^k}$，则由数列$\{a_n\}$单调减少可得

$$S_{2^n}=a_1+a_2+(a_3+a_4)+(a_5+\cdots+a_8)+\cdots+(a_{2^{n-1}+1}+\cdots+a_{2^n})$$

$$>a_2+2a_4+4a_8+\cdots+2^{n-1}a_{2^n}=\frac{1}{2}\sigma_n,$$

另一方面

$$S_{2^n-1}=a_1+(a_2+a_3)+(a_4+\cdots+a_7)+\cdots+(a_{2^{n-1}}+\cdots+a_{2^n-1})$$

$$<a_1+2a_2+4a_4+\cdots+2^{n-1}a_{2^{n-1}}=a_1+\sigma_{n-1}.$$

所以$\{\sigma_n\}$有上界的充要条件为$\{S_{2^n}\}$有上界，故级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛的充分必要条件是级数$\sum_{n=1}^{\infty}2^n a_{2^n}$收敛.

例 13-20 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数，$\{v_n\}$ 为正实数列，记 $a_n = v_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - v_{n+1}$，如果 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$，且 a 为正实数或正无穷，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

分析 注意到 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n v_n - u_{n+1}v_{n+1}}{u_{n+1}} = a$，验证 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n v_n - u_{n+1}v_{n+1})$ 收敛，用正项级数比较判别法证明.

证明 由 $\lim_{n\to\infty} a_n = a > 0$ 得，存在 N，当 $n \geq N$ 时，$a_n > 0$，即 $\frac{u_n v_n}{u_{n+1}} - v_{n+1} > 0$，或 $u_n v_n - u_{n+1}v_{n+1} > 0$。

而正项级数 $\sum_{n=N}^{\infty}(u_n v_n - u_{n+1}v_{n+1})$ 的部分和 $u_N v_N - u_{n+1}v_{n+1} < u_N v_N$ 有上界，故级数收敛，再由比较判别法得 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

注 库麦尔（Kummer）判别法

> $\sum u_n$ 为正项级数，$\{v_n\}$ 为正实数列，且 $\sum \frac{1}{v_n}$ 发散，记 $a_n = v_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - v_{n+1}$，
>
> $\lim_{n\to\infty} a_n = a$，则 $a > 0$ 时 $\sum u_n$ 收敛，$a < 0$ 时 $\sum u_n$ 发散。

取 $v_n = 1, v_n = n,$ 分别得到达朗贝尔比值判别法和拉阿比判别法。

例 13-21 设$a_n>0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}=q$，试证明当$q>1$时$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，当$q<1$时$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散.

分析 从极限条件可得$\ln\dfrac{1}{a_n}\sim q\ln n$，即$\ln\dfrac{1}{a_n}\sim\ln n^q$，$a_n$可与$\dfrac{1}{n^q}$比较.

证明 当$q>1$时，取p：$q>p>1$，由$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}=q>p$，对充分大的$n$都有$\dfrac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}>p$，即$a_n<\dfrac{1}{n^p}$，所以原级数收敛。

当$q<1$时，由$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}=q<1$，对充分大的$n$都有$\dfrac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}<1$，即$a_n>\dfrac{1}{n}$，所以原级数发散.

注 1 此题易犯如下错误：从$\ln\dfrac{1}{a_n}\sim\ln n^q$得$a_n\sim\dfrac{1}{n^q}$是错的．如取$a_n=\dfrac{1}{n\ln^{\beta}n}$，此时$\ln\dfrac{1}{a_n}\sim\ln n$，但是$a_n\sim\dfrac{1}{n}$不成立．这也说明题中$q=1$时敛散性不定.

注 2 设a_n,b_n为正无穷大，若$a_n\sim b_n$，则$\ln a_n\sim\ln b_n$;反之不然.

例 13-22 设级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \ (u_n>0)$发散，又$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$，证明：（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{S_n}$发散；（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{S_n^2}$收敛.

分析 级数通项$\frac{u_n}{S_n}$不容易缩小，比较判别法用不了，考虑用柯西收敛准则证明其发散；而通项$\frac{u_n}{S_n^2}\le\frac{u_n}{S_nS_{n-1}}$容易放大，直接用比较判别法证明.

证明 正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散，知$S_n\to\infty$.

（1）$\forall n,\exists p,\ S_{n+p}>2S_n$，此时

$$\frac{u_{n+1}}{S_{n+1}}+\frac{u_{n+2}}{S_{n+2}}+\cdots+\frac{u_{n+p}}{S_{n+p}}>\frac{u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}}{S_{n+p}}=1-\frac{S_n}{S_{n+p}}>\frac{1}{2},$$

表明$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{S_n}$不满足柯西收敛准则，故发散.

（2）$\frac{u_n}{S_n^2}\le\frac{u_n}{S_nS_{n-1}}=\frac{S_n-S_{n-1}}{S_nS_{n-1}}=\frac{1}{S_{n-1}}-\frac{1}{S_n}$，正项级数$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{S_{n-1}}-\frac{1}{S_n}\right)$的前$n$项部分和为$\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_{n+1}}\le\frac{1}{S_1}$,是收敛的，由比较判别法知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{S_n^2}$收敛.

注 此题实际为 Abel-Dini 定理的部分结论

Abel-Dini 定理 设正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散，$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$，则$p>1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{S_n^p}$收敛；而$p\le1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{S_n^p}$发散。

只需利用微分中值公式 $S_n^{1-p}-S_{n-1}^{1-p}=(1-p)S^{-p}u_n$，$(S_{n-1}<S<S_n)$

将通项放大，$\frac{u_n}{S_n^p}<S^{-p}u_n=\frac{1}{p-1}(\frac{1}{S_{n-1}^{p-1}}-\frac{1}{S_n^{p-1}})$，可证收敛部分.

或 $$\frac{u_n}{S_n^p}=\frac{S_n-S_{n-1}}{S_n^p}<\int_{S_{n-1}}^{S_n}\frac{1}{x^p}dx=\frac{1}{p-1}(\frac{1}{S_{n-1}^{p-1}}-\frac{1}{S_n^{p-1}})$$

例 13-23 设$b_n > 0$，若$\lim\limits_{n\to\infty} n(\frac{b_n}{b_{n+1}} - 1) = r$，证明

(1)当$r > 0$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n$收敛；

(2)当$r > 1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收敛.

分析 从极限条件来推证数列$\{b_n\}$单减趋于零，用莱布尼兹判别法证交错级数收敛，与 P-级数对比去证$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收敛.

证明 (1)由$\lim\limits_{n\to\infty} n(\frac{b_n}{b_{n+1}} - 1) = r > 0$可得，对充分大的$n$，有$n(\frac{b_n}{b_{n+1}} - 1) > 0$，故数列$\{b_n\}$从某项起单减有下界 0，从而收敛，进而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_n - b_{n+1})$也收敛．又$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n - b_{n+1}}{n^{-1}b_{n+1}} = r > 0$，由比较判别法，知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{-1}b_{n+1}$也收敛．若$\{b_n\}$的极限为正数，应有$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{-1}b_{n+1}$发散，导致矛盾，所以$\{b_n\}$的极限为零．交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n$为莱布尼兹型，故收敛.

(2)这里用一个不等式：$\alpha > \beta$，n充分大时，$1 + \frac{\alpha}{n} > (1 + \frac{1}{n})^{\beta}$ 。

（由$f(x) = 1 + \alpha x - (1+x)^{\beta} = (\alpha - \beta)x + o(x^2)$，易知不等式成立.）

由条件$\lim\limits_{n\to\infty} n(\frac{b_n}{b_{n+1}} - 1) = r > 1$，让$r > \alpha > \beta > 1$，则对充分大的$n$，有

$$n(\frac{b_n}{b_{n+1}} - 1) > \alpha,$$

即有$\frac{b_n}{b_{n+1}} > 1 + \frac{\alpha}{n} > (1 + \frac{1}{n})^{\beta} = \frac{(n+1)^{\beta}}{n^{\beta}}$，表明数列$\{n^{\beta}b_n\}$从某项单减，必有上界$M$，所以$b_n \le M / n^{\beta}$，故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收敛.（或用比较定理）

注 1 第一小题的证明也可如下考虑：由 $\lim_{n\to\infty} n(\frac{b_n}{b_{n+1}}-1)=r>0$，让 $r>\alpha>\beta>0$，则对充分大的 n，有，即有 $\frac{b_n}{b_{n+1}}>1+\frac{\alpha}{n}>(1+\frac{1}{n})^{\beta}=\frac{(n+1)^{\beta}}{n^{\beta}}$，表明数列 $\{n^{\beta}b_n\}$ 从某项单减，必有上界 M $n(\frac{b_n}{b_{n+1}}-1)>\alpha$，所以 $b_n\le M/n^{\beta}$，$\{b_n\}$ 趋于零.

注 2 第二小题的证明可如下考虑：由条件 $\lim_{n\to\infty} n(\frac{b_n}{b_{n+1}}-1)=r>1$，得 $\lim_{n\to\infty}\frac{nb_n-(n+1)b_{n+1}}{b_{n+1}}=r-1>\alpha>0$，对充分大的 n，有 $\frac{nb_n-(n+1)b_{n+1}}{b_{n+1}}>\alpha>0$，由级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(nb_n-(n+1)b_{n+1})$ 收敛，可得 $\sum_{n=1}^{\infty}b_{n+1}$ 也收敛．（**Kummer 判别法证明过程再现**）

例 13-24 设 $\{a_n\}$ 满足不等式 $0\le a_k\le 100a_n$，其中 $n\le k\le 2n,\ n=1,2,\cdots$，又级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，证明：$\lim_{n\to\infty} na_n=0$.

分析 利用柯西收敛准则（$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛 $\Leftrightarrow\ \forall m\ge 0,\ \lim_{n\to\infty}\left|a_n+a_{n+1}+\cdots+a_{n+m}\right|=0$）及题设不等式条件对 na_n 估值.

证明 由 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，知 $a_n+a_{n+1}+\cdots+a_{2n-1}\to 0(n\to\infty)$，又 $0\le a_{2n}\le 100a_n$，$0\le a_{2n}\le 100a_{n+1}$，$\cdots,0\le a_{2n}\le 100a_{2n-1}$，所以 $0\le na_{2n}\le 100(a_n+a_{n+1}+\cdots+a_{2n-1})\to 0$，即 $\lim_{n\to\infty}(2n)a_{2n}=0$，又 $0\le(2n+1)a_{2n+1}\le(2n+1)100a_{2n}<200(2n)a_{2n}\to 0$，故 $\lim_{n\to\infty}(2n+1)a_{2n+1}=0$，综上得 $\lim_{n\to\infty}na_n=0$.

例 13-25 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，且 $\{a_n\}$ 单调减少，证明：$\lim_{n\to\infty}na_n=0$

分析 利用柯西收敛准则及数列 $\{a_n\}$ 的单调性对 na_n 估值.

证明 由 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，知 $a_n+a_{n+1}+\cdots+a_{2n-1}\to 0(n\to\infty)$，又 $\{a_n\}$ 正值单减，

有 $na_{2n} \le a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{2n-1} \to 0(n \to \infty)$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}(2n)a_{2n} = 0$.

又 $(2n+1)a_{2n+1} \le (2n+1)a_{2n} < 2(2n)a_{2n} \to 0(n \to \infty)$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}(2n+1)a_{2n+1} = 0$，

综上得 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$.

例 13-26 若对于任意收敛于 0 的数列 $\{x_n\}$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ 都是收敛的，试证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛.

分析 用反证法，在级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 非绝对收敛时，寻找一个收敛于 0 的数列 $\{x_n\}$，使级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ 发散，导致矛盾即可.

证明 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| = +\infty$，则 $\forall k, n,\ \exists m,\ \sum\limits_{i=n}^{m} |a_i| \ge k$.

因此对 $k=1, n=1$，存在 m_1，使 $\sum\limits_{i=1}^{m_1} |a_i| \ge 1$；

对 $k=2, n=m_1+1$，存在 m_2，使 $\sum\limits_{i=m_1+1}^{m_2} |a_i| \ge 2$；

…

由此得到 $1 \le m_1 < m_2 < \cdots < m_k < \cdots$，使 $\sum\limits_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} |a_i| \ge k$. 取 $x_i = \dfrac{1}{k}\operatorname{sgn} a_i,\quad m_{k-1} < i \le m_k$，

则 $\sum\limits_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} a_i x_i = \sum\limits_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} |a_i| \dfrac{1}{k} \ge 1$. 这时数列 $\{x_n\}$ 收敛于 0，但级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ 不满足柯西收敛准则是发散的，与题设矛盾. 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 应为绝对收敛.

注 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散时，有 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k| \to \infty$，$x_n = \dfrac{\operatorname{sgn}(a_n)}{S_n} \to 0$，由 Abel-Dini 定理知：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{|a_n|}{S_n}$ 发散，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ 发散, 这样也与条件矛盾.

【题型 13-6】 求幂级数的收敛区间与收敛域

策略 套用公式 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ 或 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$ 或者对绝对值级数使用比值法求收敛半径，写收敛区间 $(x_0-R,\ x_0+R)$，讨论端点的敛散性. 注意逐项求导与逐项积分不改变收敛半径，但收敛区间端点敛散性可能变化.

例 13-27 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(1-n\ln(1+\dfrac{1}{n})\right)x^n$ 的收敛域.

分析 先套用公式求收敛半径，确定收敛区间，再考察收敛区间端点级数的敛散性.

解 幂级数的系数 $a_n=1-n\ln(1+\dfrac{1}{n})=1-n\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{2n^2}+o(\dfrac{1}{n^2})\right)=\dfrac{1}{2n}+o(\dfrac{1}{n})\sim\dfrac{1}{2n}$，

$a_{n+1}\sim\dfrac{1}{2(n+1)}\sim\dfrac{1}{2n}$，由收敛半径公式 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ 得幂级数的收敛半径为 1，从而收敛区间为 $(-1,1)$.

当 $x=-1$ 时幂级数成为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(1-n\ln(1+\dfrac{1}{n})\right)$，这里 $a_n=1-n\ln(1+\dfrac{1}{n})\sim\dfrac{1}{2n}$ 趋于零，下证 $\{a_n\}$ 单调减少. 设 $f(x)=1-\dfrac{\ln(1+x)}{x}(0<x\le 1)$，

$$f'(x)=\frac{\ln(1+x)-\dfrac{x}{1+x}}{x^2}=\frac{\ln(1+x)-\ln(1+0)-\dfrac{x}{1+x}}{x^2}=\frac{\dfrac{x}{1+\xi}-\dfrac{x}{1+x}}{x^2}>0(0<\xi<x)$$

所以 $a_n=f(\dfrac{1}{n})$ 单调减少，交错级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ 为莱布尼兹型是收敛的，且为条件收敛.

当 $x=1$ 时幂级数成为正项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(1-n\ln(1+\dfrac{1}{n})\right)$ 是发散的.

综上所述幂级数的收敛域为 $[-1,1)$.

注 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(1-n\ln(1+\dfrac{1}{n})\right)$ 的条件收敛也可如下证明：

$$a_n=1-n\ln(1+\frac{1}{n})=1-n\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+o(\frac{1}{n^3})\right]=\frac{1}{2n}-\frac{1}{3n^2}(1+o(1)),$$

记 $b_n=\dfrac{1}{3n^2}(1+o(1))$，级数为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}$（条件收敛）与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_n$（绝对收敛）之差.

例 13-28 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n(3^n+(-2)^n)}x^n$ 的收敛域.

分析 先套用公式求收敛半径，确定收敛区间，再考察收敛区间端点级数的敛散性.

解 幂级数的系数 $a_n=\dfrac{1}{n3^n}\cdot\dfrac{1}{1+(-2/3)^n}\sim\dfrac{1}{n3^n}$，$a_{n+1}\sim\dfrac{1}{(n+1)3^{n+1}}\sim\dfrac{1}{n3^{n+1}}$，由收敛半径公式 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ 得幂级数的收敛半径为 3，从而收敛区间为 $(-3,3)$.

当 $x=-3$ 时幂级数成为交错级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n\left(1+(-2/3)^n\right)}$，由于

$$\frac{1}{n\left(1+(-2/3)^n\right)}=\frac{1}{n}\left(1-(-2/3)^n+o\left((-2/3)^n\right)\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{n}(-2/3)^n(1+o(1)),$$

记 $b_n=\dfrac{1}{n}(-2/3)^n(1+o(1))$，交错级数为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_n$ 之差，前者条件收敛，后者绝对收敛，故交错级数为条件收敛.

当 $x=3$ 时，幂级数成为正项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n\left(1+(-2/3)^n\right)}$ 发散.

综上所述幂级数的收敛域为 $[-3,3)$.

例 13-29　设 $\{a_n\}$ 为正项数列，$A_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ 。若 $A_n\to\infty$, 且 $\frac{a_n}{A_n}\to 0$，证明幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 1.

分析　构造一个幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}A_nx^n$，考虑它与 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径之间的关系.

证明　设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}A_nx^n$ 的收敛半径分别为 r 、R，易知 $r\ge R$．由 $A_n\to\infty$ 知幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 在 1 处发散，从而 $r\le 1$.

又由 $\frac{a_n}{A_n}\to 0$ 得 $R=\lim_{n\to\infty}\frac{A_{n-1}}{A_n}=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{a_n}{A_n})=1$.

综上 $r=1$.

【题型 13-7】　将函数为展开为幂级数

策略　主要是使用间接展开法，即利用基本展开式进行变量替换，加减运算，幂级数的逐项求导与逐项求积等来展开函数．基本展开式有：

(1) $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\quad |x|<1$；(2) $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\quad |x|<+\infty$；

(3) $\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad |x|<+\infty$；(4) $\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},\quad |x|<+\infty$；

(5) $\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1},\quad -1<x\le 1$；(6) $\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\quad -1\le x\le 1$.

例 13-30　将下列函数展开成 x 的幂级数：

（1）$f(x)=\ln(1+x^2+x^4)$；（2）$f(x)=\arctan\frac{x-x^2}{1+x^3}$；

（3）$f(x)=\int_0^x t^2\cos t\,dt$；（4）$f(x)=\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{e^{x^2}-1}{x^2}\right)$.

分析　将(1)(2)中函数写作二函数之差再展开；(3)(4)用逐项求导与逐项求积来展开.

解　（1）当 $|x|<1$ 时，$f(x)=\ln(1-x^6)-\ln(1-x^2)$，利用 $\ln(1-t)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}$，有

$f(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{6n}}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n}=\sum_{k=1}^{\infty}a_k x^k,|x|<1$，其中 $a_{2n+1}=0$，当 $n\neq 3m$ 时 $a_{2n}=\frac{1}{n}>1$，当 $n=3m$ 时 $a_{2n}=a_{6m}=-\frac{2}{3m}$.

（2）$f(x)=\arctan\frac{x-x^2}{1+x^3}=\arctan x-\arctan x^2$，利用 $\arctan t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n+1}}{2n+1}$，

$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{4n+2}}{2n+1}=\sum_{k=1}^{\infty}a_k x^k,|x|<1$，其中 $a_{2n+1}=\frac{(-1)^n}{2n+1}$，$a_{4n+2}=\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}\ (n=0,1,2\cdots)$，其它系数为零.

（3）由 $t^2\cos t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n+2}}{(2n)!}$，$t\in(-\infty,+\infty)$，逐项积分得

$$f(x)=\int_0^x t^2\cos t dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+3}}{(2n+3)(2n)!},\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

（4）由 $\frac{e^{x^2}-1}{x^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-2}}{n!}$，$t\in(-\infty,+\infty)$，逐项求导两次得

$$f(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(2n-2)(2n-3)x^{2n-4}}{n!},\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

例 13-31　将函数 $f(x)=\cos^4 x+\sin^4 x$ 展开成 $x-\frac{\pi}{3}$ 的幂级数.

分析　利用倍角公式将函数中正余弦的幂次降下来再作变量替换展开函数.

解　$f(x)=1-2\cos^2 x\cdot\sin^2 x=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x$，令 $x-\frac{\pi}{3}=t$，则

$$f(x)=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos(\frac{4\pi}{3}+4t)=\frac{3}{4}-\frac{1}{8}\cos 4t+\frac{\sqrt{3}}{8}\sin 4t$$

$$=\frac{5}{8}-\frac{1}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^{2n}t^{2n}}{(2n)!}+\frac{\sqrt{3}}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}4^{2n-1}t^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$=\frac{5}{8}-\frac{1}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^{2n}}{(2n)!}(x-\frac{\pi}{3})^{2n}+\frac{\sqrt{3}}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}4^{2n-1}}{(2n-1)!}(x-\frac{\pi}{3})^{2n-1},\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

例 13-32　设（1）设 $y=x^3\sin x$，则 $y^{(10)}(0)=?$（2）设 $y=\frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$，则 $y^{(10)}(0)=?$

分析 将函数间接展开为泰勒级数 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$，利用泰勒级数的系数公式 $a_n=\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$来求函数在定点的高阶导数．

解 （1）$y=x^3\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+4}}{(2n+1)!}$，级数中 x^{10} 的系数为 $a_{10}=\dfrac{(-1)^3}{(2\cdot3+1)!}=\dfrac{-1}{7!}$，用系数公式 $a_{10}=\dfrac{y^{(10)}(0)}{10!}$ 得 $y^{(10)}(0)=-720$．

（2）$y=(1+x)(1-x)^{-\frac{1}{2}}=(1-x)^{-\frac{1}{2}}+x(1-x)^{-\frac{1}{2}}$，将其展开为幂级数，级数中 x^{10} 的系数为 $\begin{pmatrix}-1/2\\10\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1/2\\9\end{pmatrix}=\dfrac{1}{10!}\cdot\dfrac{-1}{2}\cdot\dfrac{-3}{2}\cdots\cdots\dfrac{-19}{2}-\dfrac{1}{9!}\cdot\dfrac{-1}{2}\cdot\dfrac{-3}{2}\cdots\cdots\dfrac{-17}{2}=\dfrac{1}{10!}\cdot\dfrac{39\cdot17!!}{2^{10}}$，所以 $y^{(10)}(0)=10!a_{10}=\dfrac{39\cdot17!!}{2^{10}}$．

例 13-33 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x\dfrac{\sin t}{t}dt, & x\neq0,\\ A, & x=0\end{cases}$

（1）确定常数 A，使 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内任意次可导，并求它的幂级数展开式；

（2）求 $f^{(8)}(0)$ 与 $f^{(9)}(0)$．

分析 要 $f(x)$ 可导，须有 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，这足以确定 A．将函数展开为麦克劳林级数用系数确定函数在零点的高阶导数．

解 （1）$A=\lim_{x\to0}\dfrac{\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt}{x}=\lim_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$．又

$$\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nt^{2n}}{(2n+1)!}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x\frac{(-1)^nt^{2n}}{(2n+1)!}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)},$$

所以 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^nx^{2n}}{(2n+1)!(2n+1)}$，因为幂级数在收敛区间内任意次可导，所以 $f(x)$ 在 R 内任意次可导．

（2）由 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 知 $f^{(n)}(0)=n!a_n$，所以 $f^{(8)}(0)=8!a_8=8!\dfrac{(-1)^4}{9!\cdot9}=\dfrac{1}{81}$；而

$f^{(9)}(0)=9!a_9=0$.

例 13-34 设 $f(x)=\dfrac{1}{1-x-x^2}$，$a_n=\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(0)$，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n a_{n+2}}$ 收敛.

分析 展开函数为麦克劳林级数，则 a_n 为其系数．验证 $\{a_n\}$ 为斐波那契数列即满足 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$.

证明 因 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$，$a_n=\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(0)$，则 $(1-x-x^2)\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n=1$，即

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n-\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+2}=1$$

$$\text{或}-1+a_0+(a_1-a_0)x+\sum_{n=0}^{\infty}(a_{n+2}-a_{n+1}-a_n)x^{n+2}=0$$

所以 $a_0=a_1=1,\quad a_{n+2}-a_{n+1}-a_n=0$（$n\ge 0$），且 $a_n\to\infty$.

故 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n a_{n+2}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+2}-a_n}{a_n a_{n+2}}=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+2}})=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}=2 .$$

【题型 13-8】 求幂级数的和函数

策略 利用以下基本求和公式：

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$，$|x|<1$；　(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} = e^x$，$|x|<+\infty$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n = \dfrac{x}{(1-x)^2}$，$|x|<1$；　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n} = -\ln(1-x), -1 \le x < 1$；

(5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin x$，$|x|<+\infty$；(6) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos x$，$|x|<+\infty$；

(7) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan x$，$|x| \le 1$

借助分拆系数、变量代换、逐项求导与逐项求积性质，将所求级数转换为上述基本求和公式中的级数．有时可以建立以和函数为未知函数的微分方程，通过解方程来得到和函数．

例 13−35 求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n^3}{(n+1)!} x^n$ 的收敛区间与和函数．

分析 利用收敛半径公式求收敛区间，将系数分拆求和函数．

解 $R = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3}{(n+1)!} \cdot \dfrac{(n+2)!}{(n+1)^3} = +\infty$，收敛区间为 $(-\infty,+\infty)$．

又 $\dfrac{n^3}{(n+1)!} = \dfrac{(n+1)n(n-1)+(n+1)-1}{(n+1)!}$，所以

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{(n+1)!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)n(n-1)}{(n+1)!}(-x)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(n+1)!}(-x)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}(-x)^n$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!}(-x)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(-x)^n + \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}(-x)^{n+1},$$

$$=(x^2+1)e^{-x}+\frac{e^{-x}-1}{x}，（x\neq 0）$$

注意 $x=0$ 时，级数的和为零．所以和函数为 $S(x)=\begin{cases}(x^2+1)e^{-x}+\dfrac{e^{-x}-1}{x}, x\neq 0,\\ 0, \qquad\qquad\qquad\qquad x=0.\end{cases}$

例 13-36 求幂级数的 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n-3}x^n$ 和函数 $(x\geq 0)$．

分析 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n-3}t^{4n-3}$ 的和函数，作变量替换即可．

解 因为 $\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n-3}t^{4n-3}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}t^{4n-4}=\frac{1}{1-t^4}$，（$|t|<1$），所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n-3}t^{4n-3}=\int_0^t\frac{1}{1-t^4}dt=\frac{1}{2}\left(\arctan t+\frac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t}\right)，（|t|<1）.$$

令 $t=\sqrt[4]{x}$，可得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n-3}x^n=\frac{1}{2}x^{\frac{3}{4}}\left(\arctan\sqrt[4]{x}+\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt[4]{x}}{1-\sqrt[4]{x}}\right)$，$(0\leq x<1)$．

例 13-37 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})x^n$ 的收敛区间与和函数.

分析 利用系数分拆可求和函数，也可用级数乘积运算来求和函数.

解 $R=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{a_n}}=1$，收敛区间为 $(-1,1)$．以下用两个方法求和函数 $S(x)$．

法一 $xS(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1})x^{n+1}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}$

$=S(x)-x-(-\ln(1-x)-x)=S(x)+\ln(1-x)$，所以 $S(x)=\frac{-\ln(1-x)}{1-x}$，（$-1<x<1$）.

法二 考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})x^n$ 为 $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$ 的柯西乘积，故和函数为

$\dfrac{-\ln(1-x)}{1-x}$，（$-1<x<1$）.

例 13-38 求级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(2n)!!x^{2n+1}}{(2n+1)!!}$ 的和函数.

分析 利用逐项求导建立微分方程来求和函数.

解 容易求得级数的收敛半径为 1，收敛区间为$(-1,1)$. 设和函数为$S(x)$，则

$$S'(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!x^{2n}}{(2n-1)!!}=1+x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n(2n-2)!!x^{2n-1}}{(2n-1)!!}=1+x\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-2)!!x^{2n}}{(2n-1)!!}\right)'$$

$$=1+x(xS(x))',$$

即可建立方程 $(1-x^2)S'(x)-xS(x)=1,S(0)=0$，

解得 $S(x)=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$，（$-1<x<1$）.

【题型 13-9】 利用幂级数求数项级数的和.

策略 构造适当的幂级数，求其和函数，让数项级数的和成为幂级数在某收敛点的和函数值. 一般地求$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$，可以直接构造幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，但为了求和函数简便，选取恰当的幂级数是必要的.

例 13-39 求下列数项级数的和：

（1）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n^2-n+1}{2^n}$； （2）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(4n+1)(4n+3)}$；

（3）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}n}{(2n-1)!}$.

分析 一般地把$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$看作幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在 1 处的取值即可，有时需要构造适当的幂级

数$\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$，这里系数$b_n$尽可能简单，将数项级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n$看作幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$在特殊点的取值.

解（1）构造幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}(n^2-n+1)x^n$，则其收敛区间为$(-1,1)$，记其和函数为$S(x)$，

则$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)x^n+\sum_{n=0}^{\infty}x^n=x^2(\sum_{n=0}^{\infty}x^n)''+\sum_{n=0}^{\infty}x^n$

$$=x^2(\frac{1}{1-x})''+\frac{1}{1-x}=\frac{2x^2}{(1-x)^3}+\frac{1}{1-x}，\ -1<x<1，$$

故数项级数的和为　$S(-\frac{1}{2})=\frac{32}{27}$.

（2）因级数收敛，且可变为$\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4n+1}-\frac{1}{4n+3}\right)=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots)$

利用$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}=\arctan x$，$-1\le x\le 1$，得数项级数的和为$\frac{\pi}{8}$.

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{(2n-1)!}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}[(2n-1)+1]}{(2n-1)!}=\frac{1}{2}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\right\}$，

而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n}}{(2n)!}\Bigg|_{x=1}=\cos 1$，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}\Bigg|_{x=1}=\sin 1，$$

所以数项级数的和为$S=\frac{1}{2}(\cos 1+\sin 1)$

例 13-40　求值（1）$\dfrac{1+\frac{\pi^4}{4!2^4}+\frac{\pi^8}{8!2^8}+\frac{\pi^{12}}{12!2^{12}}+\cdots}{\frac{1}{8}+\frac{\pi^4}{6!2^6}+\frac{\pi^8}{10!2^{10}}+\frac{\pi^{12}}{14!2^{14}}+\cdots}$；（2）$\dfrac{1+\frac{\pi^4}{5!}+\frac{\pi^8}{9!}+\frac{\pi^{12}}{13!}+\cdots}{\frac{1}{6}+\frac{\pi^4}{7!}+\frac{\pi^8}{11!}+\frac{\pi^{12}}{15!}+\cdots}$.

分析　利用$\cos a=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{a^{2n}}{(2n)!}=\left(1+\frac{a^4}{4!}+\frac{a^8}{8!}+\cdots\right)-\left(\frac{a^2}{2!}+\frac{a^6}{6!}+\frac{a^{10}}{10!}+\cdots\right)$以及

$\sin a=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!}=\left(a+\frac{a^5}{5!}+\frac{a^9}{9!}+\cdots\right)-\left(\frac{a^3}{3!}+\frac{a^7}{7!}+\frac{a^{11}}{11!}+\cdots\right)$，抓住其特点来求值.

解 记所求分式的分子分母分别为S,T，

（1）$0=\cos\frac{\pi}{2}=\left(1+\frac{\pi^4}{2^4 4!}+\frac{\pi^8}{2^8 8!}+\cdots\right)-\left(\frac{\pi^2}{2^2 2!}+\frac{\pi^6}{2^6 6!}+\frac{\pi^{10}}{2^{10}10!}+\cdots\right)=S-\pi^2 T$，

所以$\frac{S}{T}=\pi^2$.

（2）$0=\sin\pi=\left(\pi+\frac{\pi^5}{5!}+\frac{\pi^9}{9!}+\cdots\right)-\left(\frac{\pi^3}{3!}+\frac{\pi^7}{7!}+\frac{\pi^{11}}{11!}+\cdots\right)=\pi S-\pi^3 T$，

所以$\frac{S}{T}=\pi^2$.

例 13-41 令$a_n=\frac{1}{4n+1}+\frac{1}{4n+3}-\frac{1}{2n+2}$，求级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n$的和.

分析 利用$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=\ln(1+x),-1<x\le 1$，可得$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots=\ln 2$，对$a_n$作变形，将$\sum_{n=0}^{\infty}a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$联系起来.

解 因为$a_n=(\frac{1}{4n+1}-\frac{1}{4n+2}+\frac{1}{4n+3}-\frac{1}{4n+4})+(\frac{1}{4n+2}-\frac{1}{4n+4})$

所以$\sum_{n=0}^{\infty}a_n=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{4n+1}-\frac{1}{4n+2}+\frac{1}{4n+3}-\frac{1}{4n+4})+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}\right)$

$=\ln 2+\frac{1}{2}\ln 2=\frac{3}{2}\ln 2$

例 13-42 设银行存款的年利率为r，并依年复利计算．某基金会希望通过存款A万元实现第一年提取 1 万元，第二年提取 4 万元，．．．．，第n年提取n^2万元，并能按此规律一直提取下去，问A至少应为多少万元？

分析 若第一年末提取a_1万元,则应存入的金额为$A_1=a_1\cdot\frac{1}{1+r}$万元;第二年末提取$a_2$万元，则应存入的金额为$A_2=a_2\cdot\frac{1}{(1+r)^2}$万元；……；第$n$年末提取$a_n$万元，则应存入的金额为$A_n=a_n\cdot\frac{1}{(1+r)^n}$万元；因此，$A=\sum_{n=1}^{\infty}A_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{(1+r)^n}$.

解 按分析可得$A=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(1+r)^n}$．欲求此数项级数的和，设$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n$，

$x\in(-1,1)$.

因为$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)nx^n-\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=x(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1})''-x(\sum_{n=1}^{\infty}x^n)'$

$=x(\frac{1}{1-x}-1-x)''-x(\frac{1}{1-x}-1)'=\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$， $x\in(-1,1)$，

故$A=\frac{(1+r)(2+r)}{r^3}$.

【题型 13-10】 利用级数讨论反常积分的敛散并求积分

策略 常见方法：（1）将积分$\int_0^{+\infty}f(x)dx$与$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{b_{n-1}}^{b_n}f(x)dx$联系（$b_0=0$，$b_n$单调增加趋于无穷大），计算或估计积分$a_n=\int_{b_{n-1}}^{b_n}f(x)dx$，研究级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$的敛散性并计算反常积分.（2）将被积函数展开为幂级数，再用幂级数的逐项积分性质计算积分.

例 13-43 试证明反常积分$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$收敛，但非绝对收敛.

分析 用反常积分的比较判别法考虑$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$的敛散性，并用级数处理$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$的绝对收敛性.

证明 用分部积分法有$\int_1^b\frac{\sin x}{x}dx=\frac{-\cos x}{x}\Big|_1^b-\int_1^b\frac{\cos x}{x^2}dx$. 由$\left|\frac{\cos x}{x^2}\right|\le\frac{1}{x^2}$及$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$收敛，知$\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}dx$收敛. 又$\frac{\cos b}{b}\to 0(b\to+\infty)$，所以$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$收敛，即$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$收敛.

考虑$\int_0^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}dx$的收敛性，只需弄清级数$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\frac{|\sin x|}{x}dx$的敛散性即可. 因$a_k=\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\frac{|\sin x|}{x}dx\ge\frac{1}{k\pi}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}|\sin x|dx=\frac{2}{k\pi}$，由比较判别法知$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\frac{|\sin x|}{x}dx$发散，故$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$非绝对收敛.

例 13-44 讨论反常积分$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^{2p}\sin^2x}dx$ $(p>0)$的敛散性.

分析 将积分与级数$\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}f(x)dx$关联.

证明 记$a_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{1}{1+x^{2p}\sin^2 x}dx$. 当$p>1$时，有

$$a_n<\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{1}{1+(n\pi)^{2p}\sin^2 x}dx=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1}{1+(n\pi)^{2p}\sin^2 x}dx\text{(因被积函数以}\pi\text{为周期)}$$

$$=2\int_0^{\pi/2}\frac{1}{1+(n\pi)^{2p}\sin^2 x}dx=2\int_0^{\pi/2}\frac{d\tan x}{1+((n\pi)^{2p}+1)\tan^2 x}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{(n\pi)^{2p}+1}}\arctan(\sqrt{(n\pi)^{2p}+1}\tan x)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{\sqrt{(n\pi)^{2p}+1}}\sim\frac{\pi^{1-p}}{n^p};$$

当$0<p\le 1$时，有

$$a_n>\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{1}{1+((n+1)\pi)^{2p}\sin^2 x}dx=\frac{\pi}{\sqrt{(n+1)^{2p}\pi^{2p}+1}}\sim\frac{\pi^{1-p}}{n^p}.$$

由比较判别法知级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{1}{1+x^{2p}\sin^2 x}dx$当且仅当$p>1$时收敛，从而反常积分$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^{2p}\sin^2 x}dx$也是仅当$p>1$时收敛.

例 13-45 计算$\int_0^{+\infty}e^{-2x}|\sin x|dx$.

分析 将积分与级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}f(x)dx$关联.

证明 记$a_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}e^{-2x}|\sin x|dx$，令$x=n\pi+t$，有$a_n=e^{-2n\pi}\int_0^{\pi}e^{-2t}\sin tdt$. 再分部积分可得$a_n=\frac{1+e^{-2\pi}}{5}e^{-2n\pi}$，此时$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$为收敛的等比级数，且和为$\frac{1+e^{-2\pi}}{5}\frac{1}{1-e^{-2\pi}}=\frac{1}{5}\frac{e^{2\pi}+1}{e^{2\pi}-1}$. 故反常积分也收敛到$\frac{1}{5}\frac{e^{2\pi}+1}{e^{2\pi}-1}$.

例 13-46 已知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$，求

（1）$\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+e^x}dx$，　（2）$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^3(e^{\pi/x}-1)}$.

分析 利用$\int_0^{+\infty}e^{-kx}dx=\frac{1}{k}\quad(k>0)$，将被积函数展开成级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_ne^{-nx}$，在其收敛域内逐项积分.

解（1）$\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+e^x}dx=-\int_0^{+\infty}xd\ln(1+e^{-x})=-x\ln(1+e^{-x})\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\ln(1+e^{-x})dx$

$$=\int_0^{+\infty}\ln(1+e^{-x})dx=\int_0^{+\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}e^{-nx}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\int_0^{+\infty}e^{-nx}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$$

（2）令$t=\frac{\pi}{x}$,　　$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^3(e^{\pi/x}-1)}=\frac{1}{\pi^2}\int_0^{+\infty}\frac{tdt}{e^t-1}$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int_0^{+\infty}td\ln(1-e^{-t})=\frac{1}{\pi^2}\left[t\ln(1-e^{-t})\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}\ln(1-e^{-t})dt\right]$$

$$=\frac{-1}{\pi^2}\int_0^{+\infty}\ln(1-e^{-t})dt=\frac{1}{\pi^2}\int_0^{+\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{-nt}dt$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^{+\infty}e^{-nx}dx=\frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{6}.$$

例 13-47　设$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}(0\le x\le 1)$，(1)证明$f(x)+f(1-x)+\ln x\ln(1-x)=\frac{\pi^2}{6}$；（2）求$I=\int_0^1\frac{1}{2-x}\ln\frac{1}{x}dx$.

分析　常值问题证明只需验证导数为零即可. 积分计算需将被积函数展开为在积分区间上收敛的级数.

证明　（1）令等式的左边为$F(x)$，则

$$F'(x)=f'(x)-f'(1-x)+\frac{\ln(1-x)}{x}-\frac{\ln x}{1-x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x)^{n-1}}{n}+\frac{\ln(1-x)}{x}-\frac{\ln x}{1-x},$$

利　用　$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x),\ (0\le x<1)$　，　$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x)^n}{n}=-\ln x,\ (0<x\le 1)$　，　得

$F'(x)=0,(0<x<1)$，所以$F(x)=C$，$(0<x<1)$.

又$F(0+)=f(0)+f(1)+\lim\limits_{x\to 0+}\ln x\ln(1-x)=f(1)=\frac{\pi^2}{6}$，所以$C=\frac{\pi^2}{6}$.

（2）令$2-x=t$，$I=-\int_1^2\frac{\ln(2-t)}{t}dt=-\int_1^2\frac{1}{t}\left(\ln 2+\ln(1-\frac{t}{2})\right)dt$

$$=-\ln^2 2+\int_1^2\frac{1}{t}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{t}{2}\right)^n dt=-\ln^2 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(1-\frac{1}{2^n})=-\ln^2 2+\frac{\pi^2}{6}-f(\frac{1}{2}).$$

从所证的等式可得 $f(\frac{1}{2})=\frac{\pi^2}{12}-\frac{1}{2}\ln^2 2$，所以 $I=\frac{\pi^2}{12}-\frac{1}{2}\ln^2 2$.

【题型 13-11】 综合题

例 13-48 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的部分和为 S_n，求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{-S_n x}$ 的收敛域.

分析 依级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛和发散两种情形来讨论 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{-S_n x}$ 的敛散，并确定收敛域.

解 若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛于 S，则由 $\lim_{n\to\infty}e^{-S_n x}=e^{-Sx}$ 及比较判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{-S_n x}$ 收敛，此时收敛域为 $\left(-\infty,+\infty\right)$.

若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散到 $+\infty$，则当 $x\le 0$ 时，$a_n e^{-xS_n}\ge a_n$，由比较判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{-S_n x}$ 发散；当 $x>0$ 时，

$$a_n e^{-xS_n}=\frac{a_n}{e^{xS_n}}\le\frac{2a_n}{x^2S_n^2}\le\frac{2(S_n-S_{n-1})}{x^2S_nS_{n-1}}=\frac{2}{x^2}\left(\frac{1}{S_{n-1}}-\frac{1}{S_n}\right)$$

（这里用到不等式 $e^t>\frac{t^2}{2},(t>0)$）

$$\boxed{\text{或 } a_n e^{-xS_n}=e^{-xS_n}(S_n-S_{n-1})\le\int_{S_{n-1}}^{S_n}e^{-xt}dt=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{e^{xS_{n-1}}}-\frac{1}{e^{xS_n}}\right)}$$

由 $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{S_{n-1}}-\frac{1}{S_n}\right)$ 收敛，知 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{-S_n x}$ 收敛.

综合即得 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{-S_n x}$ 的收敛域为 $\left(0,+\infty\right)$.

例 13-49 设 $a_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}-\ln 2$，证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛，并求和.

分析 注意到$\int_0^1 x^{k-1}dx=\frac{1}{k}$，$\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx=\ln 2$，可将级数的通项变形.

证明 $a_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}-\ln 2=\int_0^1\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}x^{k-1}dx-\int_0^1\frac{1}{1+x}dx$

$=(-1)^{n-1}\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx$，因积分$\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx=\frac{1}{1+\xi}\int_0^1 x^n dx=\frac{1}{1+\xi}\frac{1}{n+1}\to 0(n\to\infty)$，且是单调减少的，故级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$是莱布尼兹型的，收敛且为条件收敛.

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx=\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{1+x}dx=\int_0^1\frac{xdx}{(1+x)^2}=\ln 2-\frac{1}{2}.$$

例 13-50 证明：当$p\ge 1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt[p]{n}}<p$.

分析 利用微分中值公式给出不等式，将通项放大为一个差式.

证明 设级数通项为u_n，则$u_n=n^{1-\frac{1}{p}}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=n^{\frac{p-1}{p}}\left(\left(\frac{1}{\sqrt[p]{n}}\right)^p-\left(\frac{1}{\sqrt[p]{n+1}}\right)^p\right)$，由微分中值公式 $b^p-a^p=p\xi^{p-1}(b-a)$得

$$u_n=pn^{\frac{p-1}{p}}\xi^{p-1}\left(\frac{1}{\sqrt[p]{n}}-\frac{1}{\sqrt[p]{n+1}}\right) \qquad （\frac{1}{\sqrt[p]{n+1}}<\xi<\frac{1}{\sqrt[p]{n}}）$$

$$<p\left(\frac{1}{\sqrt[p]{n}}-\frac{1}{\sqrt[p]{n+1}}\right),$$

所以$\sum_{n=1}^{\infty}u_n<p\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[p]{n}}-\frac{1}{\sqrt[p]{n+1}}\right)=p$.

或 $u_n=n^{1-\frac{1}{p}}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{p}-1}dx<\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}}x^{\frac{1}{p}-1}dx$

$$=p\left(\frac{1}{\sqrt[p]{n}}-\frac{1}{\sqrt[p]{n+1}}\right)$$

例 13-51 求解方程$(1-x^2)y''+2y=0,$其中$y(0)=0,\ y'(0)=1$.

分析 利用幂级数来解微分方程.

解 设 $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ ，则初始条件 $y(0)=0,\ y'(0)=1$ 对应 $a_0=0,\ a_1=1$. 将幂级数逐项求导两次有 $y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n x^{n-2}$ ，代入方程得

$$(1-x^2)\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n x^{n-2}+2\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=0\ ,$$

即 $$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n x^{n-2}-\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n x^n+2\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=0\ ,$$

亦即 $$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_n x^n+2\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=0\ ,$$

或 $$\sum_{n=0}^{\infty}\{(n+2)(n+1)a_{n+2}-n(n-1)a_n+2a_n\}x^n=0,$$

所以 $(n+2)(n+1)a_{n+2}-n(n-1)a_n+2a_n=0$，即 $a_{n+2}=\dfrac{n-2}{n+2}a_n$.

由 $a_0=0,\ a_1=1$，得 $a_2=a_4=a_6=\cdots a_{2n}=\cdots=0$，

$$a_{2n+1}=\frac{2n-3}{2n+1}a_{2n-1}=\frac{2n-3}{2n+1}\cdot\frac{2n-5}{2n-1}\cdot\frac{2n-7}{2n-3}\cdot\cdots\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{-1}{3}a_1$$

$$=\frac{-1}{(2n+1)(2n-1)}\ ,$$

因此 $y=-\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}x^{2n+1}$ ($|x|<1$) 为微分方程的解.

例 13-52 设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上为连续的偶函数，且 $f(\frac{\pi}{2}+x)=-f(\frac{\pi}{2}-x)$ ，而 $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$，证明： $a_{2n}=0$.

分析 利用偶函数展开的余弦级数的系数公式 $a_n=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx$ 进行积分计算.

证明 对 $a_{2n}=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos 2nxdx$ 作换元 $x=t+\dfrac{\pi}{2}$，有

$$a_{2n}=\frac{2(-1)^n}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(t+\frac{\pi}{2})\cos 2ntdt$$

$$=\frac{2(-1)^n}{\pi}\left\{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(t+\frac{\pi}{2})\cos 2ntdt+\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t+\frac{\pi}{2})\cos 2ntdt\right\}$$（第一个积分令 $t=-u$ ）

$$=\frac{2(-1)^n}{\pi}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(-u+\frac{\pi}{2})\cos 2nudu+\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t+\frac{\pi}{2})\cos 2ntdt\right\}$$（用题设条件）

$$=\frac{2(-1)^n}{\pi}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} -f(u+\frac{\pi}{2})\cos 2nudu+\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t+\frac{\pi}{2})\cos 2ntdt\right\}=0.$$

例 13-53 设函数 $f(x)$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上可积, a_k,b_k 是 $f(x)$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上以 2π 为周期的傅里叶系数,试证明对任意自然数 n , $\frac{a_0^2}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx$.

分析 利用系数公式 $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx$ ， $b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx$ 和三角函数系的特征来证明不等式．当 $m\ne n$ 时， $\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cdot\cos nxdx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cdot\sin nxdx=0$ ，当 $n\ne 0$ 时， $\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nxdx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nxdx=\pi$ ，而 $\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cdot\sin nxdx=0$.

证明 因为 $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$（连续点处成立），

记 $S_n=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$ ，则有 $\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-S_n)^2dx\ge 0$ ，即

$$\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx-2\int_{-\pi}^{\pi}S_nf(x)dx+\int_{-\pi}^{\pi}S_n^2dx\ge 0,$$

利用三角函数系的特征可得 $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}S_n^2dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)$ ，又由系数公式可得 $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)S_ndx=\frac{a_0^2}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)$ ，故得不等式.

补充柯西乘积

例 1 设数列$\{p_n\}$定义如下： $p_0=1$，

$$p_n+\frac{p_{n-1}}{1!}+\frac{p_{n-2}}{2!}+\cdots+\frac{p_2}{(n-2)!}+\frac{p_1}{(n-1)!}+\frac{p_0}{n!}=1,$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty}p_n$.

解 设 $p(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}p_nx^n$，则由条件知

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(p_n+\frac{p_{n-1}}{1!}+\cdots+\frac{p_0}{n!}\right)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x},$$

注意 $e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$，将级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$与$\sum\limits_{n=0}^{\infty}p_nx^n$ 作柯西乘积运算得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(p_n+\frac{p_{n-1}}{1!}+\cdots+\frac{p_0}{n!}\right)x^n,$$

且该级数的和函数应为 $p(x)e^x$. 即有

$$p(x)e^x=\frac{1}{1-x}\text{，进一步有 }p(x)=\frac{e^{-x}}{1-x}.$$

再将 $p(x)$ 展为幂级数

$$p(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}\right)x^n.$$

故 $p_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$， 从而 $\lim\limits_{n\to\infty}p_n=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}=e^{-1}$.

补充阿贝尔变换　　A-D 判别法

$Abel$ **变换（分部求和公式）**

记 $A_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$，则

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=A_nb_n-\sum_{k=1}^{n-1}A_k(b_{k+1}-b_k)$$

或
$$\sum_{k=m}^{n}a_kb_k=A_nb_n-A_{m-1}b_m-\sum_{k=m}^{n-1}A_k(b_{k+1}-b_k)$$

$Dirichlet$ **判别法** 若 $\{A_n\}$ 有界，$\{b_n\}$ 单调趋于零，则级数 $\sum a_nb_n$ 收敛.

$Abel$ **判别法** 若 $\sum a_n$ 收敛，$\{b_n\}$ 单调有界，则级数 $\sum a_nb_n$ 收敛.

例 1　证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}$ 条件收敛.

证明 记 $A_n=\sin 1+\sin 2+\cdots+\sin n$，$b_n=\frac{1}{n}$. 注意

$$2[\sin\theta+\sin 2\theta+\cdots+\sin n\theta]\sin\frac{\theta}{2}=\cos\frac{\theta}{2}-\cos\frac{2n+1}{2}\theta,$$

所以 $$A_n=\frac{\cos\frac{1}{2}-\cos\frac{2n+1}{2}}{2\sin\frac{1}{2}},$$ 显然有界.

由 **A-D 判别法**知级数收敛.

下面考虑 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n|}{n}$ 的敛散性. 因为 $\sin x$ 与 $\sin(x+1)$ 不同时为零，所以连续周期函数

$|\sin x|+|\sin(x+1)|$ 具有正的最小值设为 m. 而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n|}{n}=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{|\sin(2k-1)|}{2k-1}+\frac{|\sin 2k|}{2k}\right),$$

这时

$$\frac{|\sin(2k-1)|}{2k-1}+\frac{|\sin 2k|}{2k}>\frac{|\sin(2k-1)|+|\sin 2k|}{2k}\geq\frac{m}{2k},$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n|}{n}$ 发散.

注 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}$的和为$\frac{\pi-1}{2}$.

例 2 （Kronecker 引理）设$\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$为单调递减的正实数列，$\lim_{n\to\infty}u_n=0$，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$为实数列，级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_nu_n$收敛，试证 $\lim_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)u_n=0$.

证 级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_nu_n$收敛，记其部分和为$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_ku_k$，则$\{S_n\}$有极限$S$.

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(a_ku_k)\cdot u_k^{-1} \qquad \text{（分部求和公式）}$$

$$=S_nu_n^{-1}-\sum_{k=1}^{n-1}S_k(u_{k+1}^{-1}-u_k^{-1}),$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)u_n=\lim_{n\to\infty}u_n\{S_nu_n^{-1}-\sum_{k=1}^{n-1}S_k(u_{k+1}^{-1}-u_k^{-1})\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\{S_n-\frac{\sum_{k=1}^{n-1}S_k(u_{k+1}^{-1}-u_k^{-1})}{u_n^{-1}}\}$$

$$=S-\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n-1}S_k(u_{k+1}^{-1}-u_k^{-1})}{u_n^{-1}} \qquad \text{（应用 Stolz 公式）}$$

$$=S-\lim_{n\to\infty}\frac{S_n(u_{n+1}^{-1}-u_n^{-1})}{u_{n+1}^{-1}-u_n^{-1}}=0.$$

13.3 精选备赛练习

13.1 求下列级数的和 (1)$\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{n^2+n+1}$；(2)$\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{2n^2}$.

13.2　求下列级数的和(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3n+1}{(n+2)!}$；(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+6n^2+11n+5}{(n+3)!}$，

(3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+2}{(n+2)!+(n+1)!+n!}$.

13.3　若 $a>1$，求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{2^n}}{(a+1)(a^2+1)\cdots(a^{2^n}+1)}$ 的和.

13.4　设 a,d,r 为正整数，$u_n=\frac{1}{(a+nd)(a+(n+1)d)\cdots(a+(n+r)d)}$，求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ 的和.

13.5　求级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\ln\frac{n^3-1}{n^3+1}$ 的和.

13.6　求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n(n+1)}$ 的和.

13.7　判别级数 $\sqrt{3}+\sqrt{3-\sqrt{6}}+\sqrt{3-\sqrt{6+\sqrt{6}}}+\sqrt{3-\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}}+\cdots$ 的敛散性.

13.8　判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3\sqrt{3}\sqrt[3]{3}\cdots\sqrt[n]{3}}$，(2)　$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n!}$，

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha^{\ln n}}$，($\alpha>0$)，(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln(n+1))^{\ln(n+1)}}$.

13.9　讨论下列级数的敛散性：（1）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\tan\pi\sqrt{n^2+2}$，（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\pi\sqrt{n^2+1}$.

13.10　设 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left[n(n+1)^a(n+2)^b\right]$，问 a,b 取何值时该级数收敛.

13.11　讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x_n^2}$ 的敛散性，其中 x_n 是方程 $x=\tan x$ 的正根按递增顺序编号而得的序列.

13.12　设 $\{na_n\}$ 收敛，求证级数 $\sum_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n-1})$ 收敛的充要条件是级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

13.13　设 $\{u_n\}$ 是单调增加的正数数列，试证当 $\{u_n\}$ 有界时级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$ 收敛.

13.14　设 $a_1=2,\ a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{1}{a_n}), n=1,2,3\cdots$，证明：（1）$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在；（2）级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$ 收敛.

13.15　设 F_n 为斐波那契数列，$F_0=1$，$F_1=1$，$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$，$n>1$.（1）证明 $\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\le F_n\le 2^{n-1}$；（2）级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{F_n}$ 收敛，级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln F_n}$ 发散.

13.16　设数列 $\{a_n\}$ 单调减少，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，试证 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{a_1+a_2+\cdots a_n}{n}$ 收敛.

13.17　设数列 $\{S_n\}$ 满足 $2S_{n+1}=S_n+\sqrt{S_n^2+u_n}$，$u_n>0$，$S_1=1$，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的充要条件是数列 $\{S_n\}$ 收敛.

13.18　判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的敛散性，已知 $u_1=2$，其一般项 u_n 与部分和 S_n 有如下关系：$2S_n^2=2u_nS_n-u_n\ (n\ge 2)$.

13.19　（1）构造一正项级数，可用根值法审敛而不能用比值法审敛；（2）构造二级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l,\quad 0<|l|<+\infty$，但二级数敛散性不同.

13.20　两个正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$，满足 $\frac{u_n}{u_{n+1}}\ge\frac{v_n}{v_{n+1}}\ (n=1,2,3\cdots)$，讨论两个级数敛散性之间的关系.

13.21　设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的邻域内有一阶连续导数，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a>0$，证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n f(\frac{1}{n})$ 条件收敛.

13.22　设偶函数 $f(x)$ 的二阶导数 $f''(x)$ 在 $x=0$ 的邻域内连续，且 $f(0)=1,\ f''(0)=2$，证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[f(\frac{1}{n})-1\right]$ 绝对收敛.

13.23　若正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，且$\{a_n\}$单调减少，证明：$\sum_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n+1})$收敛.

13.24　设$f(x)$是在$(-\infty,+\infty)$内的可微函数，且$|f'(x)|<mf(x)$，其中$0<m<1$，任取实数a_0，定义$a_n=\ln f(a_{n-1}),n=1,2,\cdots$，证明：$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})$绝对收敛.

13.25　设$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$为正项级数，试证明(1)若$\lim_{n\to\infty}(\frac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\frac{1}{b_{n+1}})>0$，则$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛；(2)若$\lim_{n\to\infty}(\frac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\frac{1}{b_{n+1}})<0$，且$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$发散.

13.26　设级数的部分和为$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n$，判断该级数的敛散性.

13.27　设$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，试证明$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}ka_k=0$.

13.28　设$a_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$，定义$(\sum_{n=1}^{\infty}a_n)^2=\sum_{n=1}^{\infty}c_n$，其中$c_n=\sum_{k=1}^{n}a_ka_{n+1-k}$，证明$\sum_{n=1}^{\infty}c_n$发散.

13.29　已知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$，求下列级数的和（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)^2}$，（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)^2(n+2)^2}$.

13.30　已知某级数的部分和为$S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\frac{3}{2^4}+\frac{5}{2^5}+\frac{8}{2^6}+\frac{13}{2^7}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{2^{n-1}}+\frac{a_n}{2^n}$，其中$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$，$n=3,4,5\cdots$。（1）证明该级数收敛；（2）求此级数的和.

13.31　交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$收敛于$S$，记其部分和为$S_n$. 将该级数重排如下：$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\cdots$，记其部分和为$\sigma_n$，和为$\sigma$. 试证明：
（1）$\sigma_{3n}=S_{4n}+\frac{1}{2}S_{2n}$，（2）$\sigma\neq S$.

13.32　设$f(x)=x^{100}e^{x^2}$，则$f^{(200)}(0)=?$

13.33　设$m\geq 1$为正整数，a_n是$(1+x)^{n+m}$中x^n的系数，求$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{a_n}$.

13.34　求幂级数的和函数：（1）$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(4n)!}x^{4n}$，（2）$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!!}x^{2n}$，（3）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}$， （4） $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a+d)(a+2d)\cdots(a+(n-1)d)}{d(2d)\cdots(nd)}x^n$.

13.35 设 $a_0=1,a_1=-2,a_2=\frac{7}{2},a_{n+1}=-(1+\frac{1}{n+1})a_n(n\geq 2)$ 。证明当 $|x|<1$ 时幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 收敛，并求其和函数 $S(x)$.

13.36 已知 F_n 为斐波那契数列，$F_0=1$ ，$F_1=1$，$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$，$n>1$。求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}F_nx^n$ 的收敛半径与和函数.

13.37 证明：$\dfrac{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!!}}{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!!}}=\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$.

13.38 求下列级数的和（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n!}$，（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n!}$.

13.39 证明当 $|x|<1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x^n\sin n\alpha$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}x^n\cos n\alpha$ 收敛并求其和.

13.40 设函数 $z(k)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^k}{n!}e^{-1}$，（1）求 $z(0),z(1),z(2)$ 之值;（2）证明 k 取正整数时，$z(k)$ 亦为正整数.

13.41 设 $f_0(x)=e^x,f_{n+1}(x)=xf_n'(x),n=0,1,2\cdots$，证明 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_n(1)}{n!}=e^e$.

13.42 讨论反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x}{\cos^2 x+x^{\alpha}\sin^2 x}dx$ 的敛散性，α 为任意实数.

13.43 证明：$\int_0^1 x^xdx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$.

13.44 设 $a_n=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots+\frac{(-1)^n}{2n+1}-\frac{\pi}{4}$，证明：级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 条件收敛，并求和.

13.4 答案与提示

13.1 (1) $\frac{\pi}{4}$ ；(2) $\frac{\pi}{4}$.

13.2 (1) $\dfrac{3}{2}$ ；(2) $\dfrac{5}{3}$；(3)1.

13.3 1.

13.4 $\dfrac{1}{rd}\cdot\dfrac{1}{a(a+d)(a+2d)\cdots(a+(r-1)d)}$.

13.5 $\ln\dfrac{2}{3}$.

13.6 记$b_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$，部分和$T_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{b_k}{k}-\dfrac{b_{k+1}}{k+1}\right)+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{b_{k+1}-b_k}{k+1}=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2}-\dfrac{b_{n+1}}{n+1}\to\dfrac{\pi^2}{6}$.

13.7 $v_1=\sqrt{6},v_{n+1}=\sqrt{6+v_n}$，$\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{\sqrt{3-v_n}}{\sqrt{3-v_{n-1}}}=\dfrac{1}{\sqrt{3+v_n}}\to\dfrac{1}{\sqrt{6}}<1$，级数收敛.

13.8 (1)利用$\ln(1+\dfrac{1}{n})<\dfrac{1}{n}$得$1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}>\ln(n+1)>\ln n$，通项$a_n\le\dfrac{1}{3^{\ln n}}=\dfrac{1}{n^3}$，原级数收敛.

(2) $\dfrac{1}{\ln n!}>\dfrac{1}{n\ln n}$，而级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$发散，原级数发散.

(3) $\dfrac{1}{\alpha^{\ln n}}=\dfrac{1}{n^{\ln\alpha}}$，$\alpha>e$时级数收敛；$1<\alpha\le e$时级数发散.

(4) $\dfrac{1}{(\ln(n+1))^{\ln(n+1)}}=\dfrac{1}{(n+1)^{\ln\ln n(n+1)}}<\dfrac{1}{(n+1)^2}$，级数收敛.

13.9 (1)条件收敛；(2)条件收敛.

13.10 提示：用泰勒公式将通项变形

$$a_n=(1+a+b)\ln n+(a+2b)\frac{1}{n}-\frac{1}{2}(a+4b)\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})$$

当$a=-2,b=1$时级数收敛.

13.11 提示：说明根x_n的范围在$\left(n\pi-\pi/2,\ \ n\ \ \pi+\pi/2\right)$内，级数收敛.

13.12 提示：考虑二级数的部分和S_n与σ_n，验证$S_n=-\sigma_{n-1}-a_0+na_n$.

13.13 提示：$0\le a_n=\dfrac{u_{n+1}-u_n}{u_{n+1}}\le\dfrac{u_{n+1}-u_n}{u_1}$，验证级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{n+1}-u_n)$收敛.

13.14 提示：$a_{n+1}\ge1,\ a_{n+1}=\dfrac{1}{2}(a_n+\dfrac{1}{a_n})\le\dfrac{1}{2}(a_n+\dfrac{a_n^2}{a_n})=a_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$.

13.15 提示：$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}\le2F_{n-1}$，$F_n\le2^{n-1}F_1=2^{n-1}$，$F_n\ge F_{n-1}+\dfrac{1}{2}F_{n-1}=\dfrac{3}{2}F_{n-1}$.

13.16 提示：记$b_n=\dfrac{a_1+a_2+\cdots a_n}{n}$，验证$\{b_n\}$单调减少趋于零，用 Lebniz 判别法.

13.17 提示：$S_{n+1}(S_{n+1}-S_n)=\dfrac{u_n}{4}$，$S_n\ge 1$，利用不等式

$S_{n+1}-S_n\le\dfrac{u_n}{4}\le(S_{n+1}+S_n)(S_{n+1}-S_n)=S_{n+1}^2-S_n^2$.

13.18 提示：$S_n=\dfrac{S_{n-1}}{1+2S_{n-1}},S_1=1$.

13.19 （1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2+(-1)^n}{3^n}$，（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left((-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{n}\right)$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

13.20 提示：$u_{m+k}\le\dfrac{u_m}{v_m}v_{m+k}$，由$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛可得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，由$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散可得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$发散.

13.21 提示：$f(0)=0,f'(0)=a>0$，在零点的邻域内$f'(x)>0$，$f(\dfrac{1}{n})$单调减少，$f(\dfrac{1}{n})\sim\dfrac{1}{n}$.

13.22 提示：$f'(0)=0$，由泰勒公式得$f(\dfrac{1}{n})-1=\dfrac{1}{n^2}+o(\dfrac{1}{n^2})$.

13.23 提示：部分和$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}k(a_k-a_{k+1})=\sum\limits_{k=1}^{n+1}a_k-(n+1)a_{n+1}$，由**例** 15-25 知道

$(n+1)a_{n+1}\to 0$.

13.24 提示：$\left|a_n-a_{n+1}\right|=\left|\ln f(a_{n-1})-\ln f(a_n)\right|=\left|\dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}\right|\left|a_{n-1}-a_n\right|\le m\left|a_{n-1}-a_n\right|$

$\le\cdots\le m^{n-1}\left|a_1-a_2\right|$.

13.25 提示：（1）n充分大时$\dfrac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}>\delta$，即$\dfrac{a_n}{b_n}-\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}>\delta a_{n+1}$；（2）$n\ge N$时

$\dfrac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}<0$，即$\dfrac{b_{n+1}}{b_n}<\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$，故有$\dfrac{b_{n+1}}{b_N}<\dfrac{a_{n+1}}{a_N}$.

13.26 提示：$a_n=S_n-S_{n-1}=\dfrac{1}{n}+\ln(1-\dfrac{1}{n})=-\dfrac{1}{2n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$，级数收敛.

13.27 提示：$\sum\limits_{k=1}^{n}ka_k=\sum\limits_{k=1}^{n}k(S_k-S_{k-1})=-S_1-S_2-\cdots-S_{n-1}+nS_n$，

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}ka_k=-\frac{S_1+S_2+\cdots+S_n}{n}+\frac{S_n}{n}+S_n\to -S+S=0\,.$$

13.28　提示：$\left|c_n\right|=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n+1-k}}>\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}=1$.

13.29　提示：(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{2}{n(n+1)}\right)=\frac{\pi^2}{3}-3$，

(2) $\frac{\pi^2}{4}-\frac{39}{16}$.

13.30　提示：通项比值的极限为 $l=\frac{1+\sqrt{5}}{4}<1$，级数收敛．又

$u_n=\frac{a_n}{2^n}=\frac{a_{n-1}+a_{n-2}}{2^n}=\frac{1}{2}u_{n-1}+\frac{1}{4}u_{n-2}$，$\sum_{n=3}^{\infty}u_n=\frac{1}{2}\sum_{n=3}^{\infty}u_{n-1}+\frac{1}{4}\sum_{n=3}^{\infty}u_{n-2}$，和 $S=2$.

13.31　提示：$\sigma_{3n}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4k-3}-\frac{1}{4k-2}+\frac{1}{4k-1}-\frac{1}{4k}\right)+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)$.

13.32　$\frac{200!}{50!}$.

13.33　提示：$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{a_n}=m!\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+m)(n+m-1)\cdots(n+1)}=\frac{m}{m-1}$.

13.34　（1）$\frac{e^x+e^{-x}}{4}+\frac{1}{2}\cos x$，（2）$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!!}x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\frac{-x^2}{2})^n=e^{-\frac{x^2}{2}}$，（3）

$S'(x)=1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{2n-2}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-3)}=1+xS(x),S(0)=0$，$S(x)=e^{\frac{x^2}{2}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$，

（4）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}(-\frac{a}{d})(-\frac{a}{d}-1)\cdots(-\frac{a}{d}-(n-1))(-x)^n=\left(1-x\right)^{-a/d}-1$（$-1<x<1$）.

13.35　提示：$S(x)=1-2x+\frac{7}{2}x^2-\frac{7(4x^3+3x^4)}{6(1+x)}$，（$-1<x<1$）.

13.36　提示：$R=\frac{\sqrt{5}-1}{2},S(x)=\frac{x+x^2}{1-x-x^2}$，（$-R<x<R$）.

13.37　提示：分子分母分别为 $S(x),T(x)$，$S(0)=0,T(0)=1$，

则 $S'(x)=xS(x)+1, T'(x)=xT(x)$，解得 $S(x)=e^{\frac{x^2}{2}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$， $T(x)=e^{\frac{x^2}{2}}$.

13.38　提示：利用 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$. (1) $e^{\cos x}\sin\sin x$ ，(2) $e^{\cos x}\cos\sin x-1$.

13.39　提示： $\dfrac{x\sin\alpha}{(1-x\cos\alpha)^2+x^2\sin^2\alpha}$ 与 $\dfrac{1-x\cos\alpha}{(1-x\cos\alpha)^2+x^2\sin^2\alpha}-1$.

15.40　（1） $z(0)=1,\ z(1)=1,\ z(2)=2$ ，(2) $z(k)=e^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^{k-1}}{(n-1)!}=e^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(n+1)^{k-1}}{n!}$

$$=e^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sum_{i=0}^{k-1}C_{k-1}^{i}n^{i}}{n!}=\sum_{i=0}^{k-1}C_{k-1}^{i}z(i).$$

13.41　提示： $f_0(x)=e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{x^k}{k!}$， $f_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{k^n x^k}{k!}$，

所以 $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{f_n(1)}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{k^n}{k!}\dfrac{1}{n!}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{k^n}{n!}\dfrac{1}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{e^k}{k!}=e^e$.

13.42　$\alpha>2$ 时收敛，$\alpha\le 2$ 时发散.

13.43　提示： $\int_0^1 e^{x\ln x}dx=\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}x^n\ln^n x dx=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}\int_0^1 x^n\ln^n x dx$，分部积分.

13.44　提示： $a_n=(-1)^n\int_0^1\dfrac{x^{2n+2}}{1+x^2}dx$

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n=\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}dx=\int_0^1\frac{x^2dx}{(1+x^2)^2}=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}.$$