

【基础科学理论与应用】

综合因素作用下的单摆运动分析

鞠衍清¹, 张风雷²

(1. 辽东学院 机电学院, 辽宁 丹东 118003; 2. 辽东学院 实验中心, 辽宁 丹东 118003)

摘要: 对摆绳阻力进行了定量分析。综合考虑单摆系统的空气阻力、摆绳重力及复摆因素后, 借助 MATLAB 软件, 用数值计算的方法对单摆运动进行了动力学描述。通过与实测数据比较发现, 理论计算结果与实测值符合得很好。为此, 为确定实际单摆实验的最佳摆角提出了一种依据。

关键词: 单摆; 摆绳; 空气阻力; MATLAB

中图分类号: O322; O241.7 **文献标志码:** A **文章编号:** 1673-4939 (2010) 02-0151-04

影响单摆作简谐振动的因素很多, 许多文献对影响单摆运动周期的因素进行了分析。其中文献[1-6]用解析的方法对空气阻力、空气浮力、摆角、复摆、摆球线度、偏摆等因素对单摆周期的影响进行了分析, 并给出了各自的修正; 文献[7-9]采用不同的方法对抽象化阻尼作用下的单摆运动进行了描述。但对摆绳阻力对单摆运动的影响以及综合具体因素作用下的单摆运动分析, 至今尚未见报道。作者按照单摆实验装置的一般配置, 首先对摆绳受到的空气阻力进行分析, 然后综合摆角、摆绳重力、复摆、摆球及摆绳所受的空气阻力和浮力(因实验中采用的摆绳很细, 长度较短, 故摆绳的浮力予以不计), 通过数值分析的方法, 对单摆的摆角及周期变化进行动力学描述, 并将理论计算结果与实测数据进行比较。

1 影响单摆简谐振动因素的分析

如图1所示, 除摆球重力、摆绳重力外, 摆绳阻力、摆球阻力、摆球浮力也会影响到单摆作简谐振动。

1.1 摆绳受到的空气阻力

物体在介质中运动时受到的总阻力包括摩擦阻力和压差阻力, 压差阻力占总阻力的比例随物体的形状、姿态、表面的光滑程度、雷诺数等不同。

形如摆绳这样的圆柱形的钝头物体, 由于不发生边界层分离, 其所受到的总阻力可认为全部是压差阻力。根据文献[10], 当无限长圆柱体作与其高的方向垂直运动时, 其单位长度受到的空气阻力(压差阻力)为

$$F_{Dl} = \frac{1}{2} \rho C_{Dl} v^2 d \quad (1)$$

其中 ρ 为空气的密度, C_{Dl} 为圆柱体的阻力系数, v 为圆柱体的线速度, d 为圆柱体的直径。 C_{Dl} 与圆柱体运动的雷诺数有关, 二者的关系如图2所示。

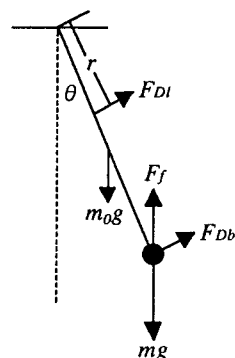


图1 单摆系统的受力

根据单摆实验的一般设计, 摆绳的长度远远大于其截面直径, 因此可视为无限长圆柱。通过对单

收稿日期: 2010-04-01

基金项目: 辽宁省教育厅科研基金项目 (2009A266)

作者简介: 鞠衍清 (1965—), 男, 辽宁丹东人, 教授级高级实验师, 硕士, 主要从事大学物理的教学与研究。

摆实验的实测, 摆绳运动的雷诺数 $Re_l (= \frac{\rho v d}{\mu})$, 其中 μ 为空气的粘度系数) 在 0 ~ 50 范围内。根据图 2, 可拟合出此区间内 C_{Dl} 的值:

$$C_{Dl} = \begin{cases} 10^{1.1127 - 0.6655 \log_{10} Re_l} \dots 0 \leq Re_l \leq 10 \\ 10^{0.5934 - 0.1472 \log_{10} Re_l} \dots 10 \leq Re_l \leq 50 \end{cases} \quad (2)$$

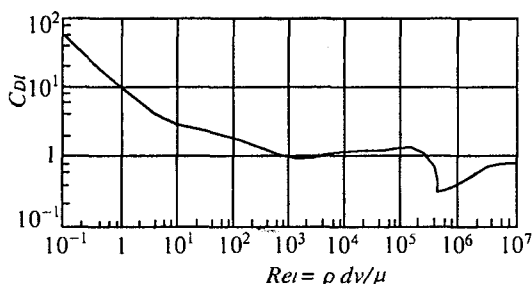


图 2 摆绳运动雷诺数与阻力系数关系

由于单摆是作摆动, 摆绳上不同点的线速度不同, 因而雷诺数也不同。因此, 摆绳上不同点所受到的空气阻力也不同。

1.2 摆球受到的空气阻力

球体在介质中运动受到的阻力的计算公式为^[10]

$$F_{D_b} = \frac{1}{2} \rho C_{D_b} \pi R^2 v^2 \quad (3)$$

其中 R 为球体的半径。

实验中摆球运动的速度较小, 属于小雷诺数运动, 根据文献 [10], 其阻力系数可分段表示为

$$C_{D_b} = \begin{cases} \frac{24}{Re_b} (1 + \frac{3}{16} Re_b) \dots 0 \leq Re_b \leq 5 \\ \frac{11}{\sqrt{Re_b}} \dots 5 \leq Re_b \leq 300 \end{cases} \quad (4)$$

1.3 摆球受到的空气浮力

$$F_f = \rho_a V g \quad (5)$$

其中 ρ_a 为摆球的密度; $V = \frac{4}{3} \pi R^3$, 为摆球的体积。

2 综合因素作用下的摆角及周期变化的理论描述及实验验证

2.1 单摆运动的动力学公式

综合考虑上述因素后, 单摆实际上是一个多力作用下的复摆系统。

根据文献 [11], 摆绳及摆球系统对悬点的转动惯量为

$$I = \frac{2}{5} m R^2 + m l^2 + \frac{1}{3} m_0 (l - R)^2 \quad (6)$$

其中 $m = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_b$, 为摆球的质量 (ρ_b 为摆球密度); l 为摆长; $m_0 = \frac{1}{4} \pi d^2 l \rho_l$, 为摆绳质量 (ρ_l 为摆绳密度)。

根据转动定理^[12], 综合考虑上述因素后单摆运动的动力学方程为

$$I \ddot{\theta} = -m g l \sin \theta - \frac{1}{2} m_0 g (l - R) \sin \theta + F_f l \sin \theta + F_{D_b} l + \int_0^l F_{D_l} r dr \quad (7)$$

其中 r 为摆绳上某一点距悬点的距离。

2.2 数值求解

式(7)为非线性、非齐次微分方程, 还涉及到复杂的积分运算, 只能用数值方法求解。选初始摆角分别为 5° 、 10° 和 15° , 利用 MATLAB 软件, 得到单摆摆角的变化曲线 (见图 3 ~ 5); 绘制出了考虑及忽略综合因素的作用两种条件下不同初始摆角时的单摆周期比 T/T_0 ($T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$, $0.5^\circ \leq \theta_{\max} \leq 90^\circ$) (见图 6); 为更具体地考察上述条件下周期比 T/T_0 的变化情况, 还绘制了 $T/T_0 - 1$ 的变化曲线 ($0.5^\circ \leq \theta_{\max} \leq 10^\circ$) (见图 7)。

同时, 为验证理论计算结果的准确性, 作者对摆角的变化进行了实测。实测值与理论值的比较见表 1。

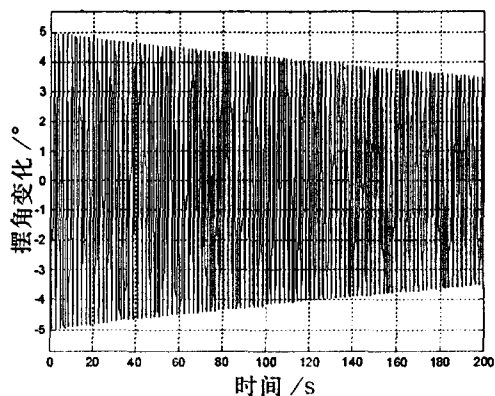


图 3 摆角随时间变化情况 ($\theta_{\max} = 5^\circ$)

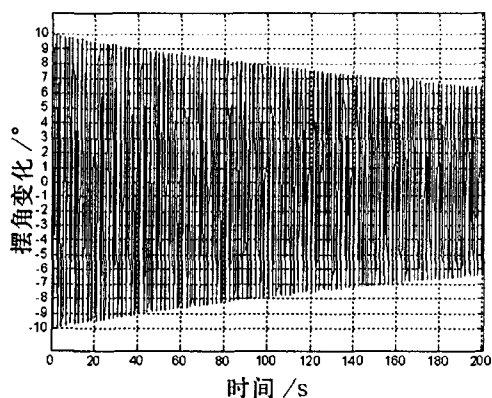
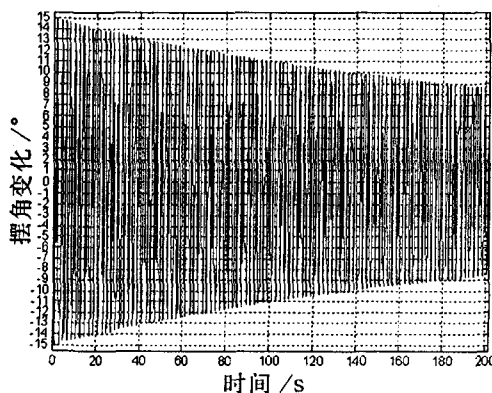
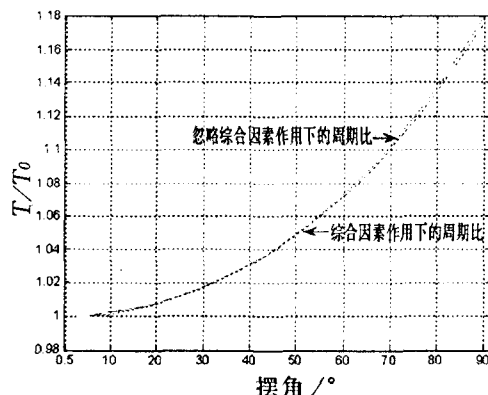
图4 摆角随时间变化情况 ($\theta_{\max}=10^\circ$)图5 摆角随时间变化情况 ($\theta_{\max}=15^\circ$)

图6 两种条件下的周期比情况 [0, 90°]

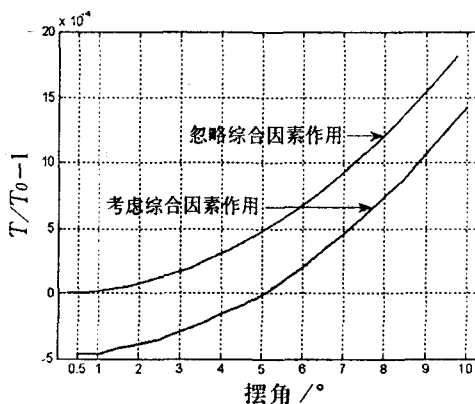


图7 两种条件下的周期比情况 [0, 10°]

表1 摆角变化的实测数据与理论结果比较

时间 (s)	0	40		80		120		160		200	
		实测	理论	实测	理论	实测	理论	实测	理论	实测	理论
摆角 (°)	5	4.75	4.72	4.50	4.47	4.25	4.23	4.01	3.76	3.75	3.80
	10	9.25	9.21	8.50	8.52	7.80	7.90	7.25	7.37	6.75	6.85
	15	13.50	13.43	12.25	11.16	11.10	11.05	10.10	10.10	9.25	9.27

2.3 理论结果及其与实测结果的比较

2.3.1 由表1可看出, 综合因素作用下摆角变化的理论计算结果与实测值符合得很好, 说明本文对各影响因素的计量是准确的;

2.3.2 由图6可看出, 在各因素的作用下, 单摆周期比忽略这些因素时要小一些。随着初始摆角的增大, 这种差距也随之增大;

2.3.3 从图7可看出, 综合因素对单摆周期比的影响在 $10^{-4} - 10^{-3}$ 数量级。如按本文实验配置, 当摆角小于 5° 时, 实际的振动周期 T 小于理想周期, 反之亦反。只有当摆角等于 5° 时二者才相等 ($T/T_0 = 1$)。分析其原因: 摆球及摆绳的重力 (矩) 使单摆周期变小, 而各种阻力 (矩) 使单摆周期变大。当摆角小于 5° 时, 重力 (矩) 的作用

大于阻力 (矩) 的作用, 致使实际周期 T 小于理想周期 T_0 ; 当摆角大于 5° 时, 情形则相反。为此, 在实际实验中, 如计算中不对上述各种影响因素进行修正, 仅以 T_0 来计算周期, 初始摆角并非越小越好, 而应有一个最佳值。

3 结论与讨论

(1) 影响单摆作简谐振动的因素是多方面的。虽然在计算阻力系数时采取了近似的方法, 但得到的结果与实测值符合得很好, 说明虽然还有一些其它因素会影响到单摆的运动, 但它们的影响相对更小, 或者是可以消除的;

(下转第156页)

A Discussion on the Proof of an Example in Higher Mathematics

YIN Wen - yun, BIAN Jun - hui

(Communication Training Base, PLA General Staff Department, Xuanhua 075100, China)

Abstract: In an example in *Higher Mathematics* (the 5th edition, published by Tongji University Press), a better result is obtained by a condition that is the same as integral mean - value theorem, but the proof leads to the imprecision of the teaching material system which results in a circular argument mistake. This problem is pointed out and two methods to modify it are given.

Key words: integral mean - value theorem; integral upper limit function; continuation; integrable; circular argument

(上接第 153 页)

(2) 从图 7 的计算结果可看出, 受各种因素的影响, 最佳初始角会随实验装置的不同而变化。为保证单摆实验的精确度, 实验前可按本文提供的方法确定最佳的初始摆角;

(3) 实测中采用的摆绳是表面光滑、刚性较大、粗细均匀的胶丝线。作为比较, 我们另用目前常用的同样直径的棉绳及尼龙绳作摆绳进行了实测, 结果发现摆角衰减的速度要快得多, 对单摆周期的影响也会更大, 说明非光滑表面的摆绳阻力更大。为此, 实验中应选择表面光滑的线作为摆绳。

参考文献:

- [1] 龚善初. 影响单摆振动周期的参数研究 [J]. 大学物理, 2006 (6): 12 - 15.
- [2] 罗均华, 王新兴. 影响单摆振动周期因素的研究 [J]. 河西学院学报, 2002 (5): 16 - 18.
- [3] 倪燕茹. 单摆的系统误差修正与测量不确定性评定 [J]. 重庆工学院学报, 2007 (4): 21 - 23.
- [4] 陈贤隆, 林祥龙. 复摆的空气阻尼修正 [J]. 大学物

理, 1991 (12): 24 - 25.

- [5] 戚明. 单摆测重力加速度的阻尼修正 [J]. 大学物理, 1987 (12): 20 - 22.
- [6] 刘文瑞, 其木苏荣. 摆球线度对摆动周期的影响 [J]. 大学物理, 1998 (6): 19 - 21.
- [7] 罗颖, 罗兴垠. 用 Matlab 软件求单摆的运动 [J]. 赣南师范学院学报, 2005 (3): 90 - 92.
- [8] 熊化高, 陈浩. 有阻尼单摆的冲击波解 [J]. 大学物理, 2007 (12): 18 - 19.
- [9] 陈文华, 龚善初. 单摆振动分析 [J]. 湖南理工学院学报: 自然科学版, 2007 (1): 66 - 70.
- [10] 王平, 韩振兴, 朱墨娟等. 流体力学大全 [M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1990.
- [11] 林抒, 龚建雄. 普通物理实验 [M]. 北京: 人民教育出版社, 1983: 88 - 94.
- [12] 哈尔滨工业大学理论力学教研室. 理论力学 I (第 6 版). 北京: 高等教育出版社. 2002: 264 - 265.

(责任编辑: 王漓江)

Dynamic Analysis of a Simple Pendulum with MATLAB

by Taking Some Drag Forces into Consideration

JU Yan - qing¹, ZHANG Feng - lei²

(1. College of Mechanical and Electronic Engineering, Eastern Liaoning University, Dandong 118003, China;

2. Experimental Center, Eastern Liaoning University, Dandong 118003, China)

Abstract: Air drag of the wire of a simple pendulum was quantitatively analyzed. By taking air drag forces of the wire and the ball, gravity of the wire into consideration, the dynamics of a simple pendulum as a compound pendulum was discussed by a numerical method with MATLAB. Theoretical results are in good agreement with the experimental data. Accordingly, some advice about the simple pendulum experiment is proposed.

Key words: simple pendulum; pendulum wire; air drag; MATLAB