微积分（一）下第 6 周第一次课作业答案与提示

微分学的几何应用

1. 填空:

1）曲线 $x=t-\sin t$，$y=1-\cos t$，$z=4\sin\dfrac{t}{2}$ 在点 $(\dfrac{\pi}{2}-1,1,2\sqrt{2})$ 处的切线方程是

$\underline{x+1-\pi/2=y-1=(z-2\sqrt{2})/\sqrt{2}}$，法平面方程是 $\underline{x+y+\sqrt{2}z=\pi/2+4}$.

2）曲线 $\begin{cases}x^2-z=0\\3x+2y+1=0\end{cases}$ 上的点 $(1,-2,1)$ 处的法平面与直线 $\begin{cases}9x-7y-21z=0\\x-y-z=0\end{cases}$ 间的夹角是 $\underline{0}$.

3）曲线 $\begin{cases}xyz=1\\y^2=x\end{cases}$ 在点 $(1,1,1)$ 处的切线的方向余弦是 $\underline{2/\sqrt{14}}$，$\underline{1/\sqrt{14}}$，$\underline{-3/\sqrt{14}}$.

4）曲面 $x^2-xy-8x+z+5=0$ 在点 $(2,-3,1)$ 处的切平面方程是 $\underline{x+2y-z+5=0}$，法线方程是

$\underline{x-2=(y+3)/1=-(z-1)}$.

2. 在曲面 $z=xy$ 上求一点，使这点的法线垂直于平面 $x+3y+z+4=0$ 并写出此法线方程.

答案：所求点为 $(-3,-1,3)$，法线方程为 $x+3=(y+1)/3=z-3$.

3. 证明曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}\ (a>0)$ 上任一点的切平面在各坐标轴上的截距之和等于 a.

提示：求切平面并化为截距式.

4. 平面 $3x+\lambda y-3z+16=0$ 与椭球 $3x^2+y^2+z^2=16$ 相切，求 λ.　　答案：$\lambda=\pm 2$.

5. 求由曲线 $\begin{cases}3x^2+2y^2=12\\z=0\end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周所得的旋转面在点 $(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$ 处指向外侧的单位法矢量.　　答案：$\boldsymbol{n}^\circ=\{0,\dfrac{\sqrt{10}}{5},\dfrac{\sqrt{15}}{5}\}$.

6. 分别用平面 $x=3, y=4$ 截球面 $x^2+y^2+z^2=169$ 的两截线，求两截线在其交点处的切平面方程.

答案：$\begin{cases}3x+4y+12z\pm 169=0,\\x=3\end{cases}$ 与 $\begin{cases}3x+4y+12z\pm 169=0,\\y=4\end{cases}$.

7. 设直线 $\begin{cases}x+y+b=0\\x+ay-z-3=0\end{cases}$ 在平面 π 上，而平面 π 与曲面 $z=x^2+y^2$ 相切于点 $(1,-2,5)$，求 a,b.

答案：$a=-5,b=-2$.

8. 设 $f(u)$ 可微，证明曲面 $z=xf(\dfrac{y}{x})$ 上任意一点处的切平面都通过原点.

提示：求切平面并注意曲面上的点满足 $z=xf(\dfrac{y}{x})$.