两道竞赛题的证明以及关系

吴洁

1．若对于任何收敛于零的序列$\{x_n\}$，级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$都是收敛的，试证明级数$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$收敛。（第四届决赛题六（15 分））

证 用反证法。若$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$发散，即$\{S_n\} = \{\sum_{i=1}^{n} |a_i|\}$单调增加且趋于$+\infty$，亦即

$$\forall K > 0 \text{ 以及 } \forall N > 0,\ \exists m > 0,\ \text{当 } m > N \text{ 时，} \sum_{i=1}^{m} |a_i| \geq K .$$

因此，对$K = 1,\ N = 1,\ \exists m_1 > 1$，使$\sum_{i=1}^{m_1} |a_i| \geq 1$；

对$K = 2,\ N = m_1 + 1,\ \exists m_2 > m_1 + 1$，使$\sum_{i=1}^{m_2} |a_i| \geq 2 + \sum_{i=1}^{m_1} |a_i|$，从而

$S_{m_2} - S_{m_1} = \sum_{i=m_1+1}^{m_2} |a_i| \geq 2$；

由此得到存在$1 \leq m_1 < m_2 < \cdots < m_j < \cdots$，使$\sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j} |a_i| \geq j$（$j = 1,2,\cdots$，$m_0 = 0$）.

取$x_i = \frac{1}{j} \operatorname{sgn} a_i (m_{j-1} \leq i \leq m_j)$，则无论$M$多么大，只要$j - 1 > M$，总有

$m_j > m_{j-1} > j - 1 > M$，这时

$$\sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j} a_i x_i = \sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j} \frac{|a_i|}{j} x_i \geq 1 ,$$

由此可知，存在数列$x_n \to 0 (n \to \infty)$，使得$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$发散，矛盾。所以级数$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$收敛。

2.设 $u_n>0$， $S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$. 证明

（1） $p>1$ 时， $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{S_n^p}$ 收敛；（2）当 $0<p\le 1$ 且 $S_n\to+\infty(n\to\infty)$ 时， $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{S_n^p}$ 发散。

（第二届预赛题四（15 分））

证明：（1）当 $p>1$ 时，利用中值公式

$$S_n^{1-p}-S_{n-1}^{1-p}=(1-p)S^{-p}u_n, \qquad (S_{n-1}<S<S_n)$$

即得 $\frac{u_n}{S_n^p}<S^{-p}u_n=\frac{1}{p-1}(\frac{1}{S_{n-1}^{p-1}}-\frac{1}{S_n^{p-1}})$，

级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{S_{n-1}^{p-1}}-\frac{1}{S_n^{p-1}}\right)$ 的部分和为 $\frac{1}{S_1^{p-1}}-\frac{1}{S_n^{p-1}}\le\frac{1}{S_1^{p-1}}$，是收敛的，

故当 $p>1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{S_n^p}$ 收敛。

（2）由 $u_n>0$ 知 $\{S_n\}$ 单调增加，又 $S_n\to\infty$，所以 $\forall n$，$\exists p$，使 $S_{n+p}>2S_n$，于是

$$\frac{u_{n+1}}{S_{n+1}}+\frac{u_{n+2}}{S_{n+2}}+\cdots+\frac{u_{n+p}}{S_{n+p}}>\frac{u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}}{S_{n+p}}=1-\frac{S_n}{S_{n+p}}>\frac{1}{2}$$，表明 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{S_n}$ 发散。

而 $0<p<1$ 时，$\frac{u_n}{S_n^p}>\frac{u_n}{S_n}$，综上 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{S_n^p}$ 当 $0<p\le 1$ 时发散。

注：可以利用题 2 证题 1

若 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散，令 $S_n=\sum_{i=1}^{n}|a_i|$，则 $S_n\to+\infty(n\to\infty)$，由题 2 的结论（2）知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{S_n}$ 发散。取 $x_n=\frac{\operatorname{sgn}a_n}{S_n}$，则 $|x_n|\le\frac{1}{S_n}$，因此 $x_n\to 0(n\to\infty)$，并且

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sgn}a_n}{S_n}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{S_n}$$

发散，矛盾。所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛。