$f(x)$ 与 $f'(x)$ 有极限或有界的结论

吴洁

一、$f(x)$ 与 $f'(x)$ 极限为 0 的结论

1．有关 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ 的结论

（1）若 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续，且 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

（2）若 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有有界的导函数，且 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

（3）若 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有连续导数，且 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty} f'(x)dx$ 都收敛，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

提醒：若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$；但 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛 $\not\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

2．有关 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$ 的结论

（1）若 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调增加且有界连续，在 $(0,+\infty)$ 内 $f''(x)<0$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$.

证　由 $f(x)$ 单调增加知 $f'(x)\ge 0$，又 $f''(x)<0$ 知 $f'(x)$ 单调减少，故 $f'(x)$ 单调减少有下界 0，从而 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ 存在且非负。

若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=l>0$，则存在 $X>0$，当 $x\ge X$ 时，$f'(x)>\dfrac{l}{2}$.

而 $\forall x>X$，$f(x)-f(X)=f'(\xi)(x-X)>\dfrac{l}{2}(x-X)$，推得 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ 与函数有界矛盾。故 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$.

（2）若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内三阶导数，且存在有限极限 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to\infty} f'''(x)$，则 $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=\lim\limits_{x\to\infty} f''(x)=0$.（可推广）

证　由泰勒公式，有

$$f(x+1)=f(x)+f'(x)+\frac{1}{2}f''(x)+\frac{1}{3!}f'''(\xi)，\quad x<\xi<x+1，$$

$$f(x-1)=f(x)-f'(x)+\frac{1}{2}f''(x)-\frac{1}{3!}f'''(\eta)，\quad x-1<\eta<x，$$

两式相加得

$$f''(x)=f(x+1)-2f(x)+f(x-1)-\frac{1}{6}[f'''(\xi)-f'''(\eta)]，$$

两式相减得

$$f'(x)=\frac{1}{2}[f(x+1)-f(x-1)]-\frac{1}{12}[f'''(\xi)+f'''(\eta)],$$

由条件可知$\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to\infty}f''(x)=0$.

二、 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在的几个结论

（1）设$f(x)$在$(0,+\infty)$上可导，$a>0$，若$\lim\limits_{x\to+\infty}[af(x)+f'(x)]=l$，则$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\frac{l}{a}$.

证 注意到$(e^{ax}f(x))'=e^{ax}[af(x)+f'(x)]$，于是

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{ax}f(x)}{e^{ax}}\overset{\text{“洛”}}{=\!=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{ax}[af(x)+f'(x)]}{ae^{ax}}=\frac{l}{a}.$$

注 对有正实部的复数a，结论也成立。

（2）设$f(x)$在$(0,+\infty)$上可导，$a>0$，若$\lim\limits_{x\to+\infty}[af(x)+2\sqrt{x}f'(x)]=l$，则$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\frac{l}{a}$.

提示：$(e^{a\sqrt{x}}f(x))'=e^{a\sqrt{x}}[\frac{af(x)}{2\sqrt{x}}+f'(x)]$.

（3）设$f(x)$在$(0,+\infty)$上二次可导，若有$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+f'(x)+f''(x)]=l$，则$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$.

分析：微分方程$f(x)+f'(x)+f''(x)=0$的特征方程为$r^2+r+1=0$，特征根为

$r_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$，由此可知$r_1\cdot r_2=1$，$r_1+r_2=-1$.

证 令$\alpha=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$，$\beta=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，根据上述分析

$$\begin{aligned}f(x)+f'(x)+f''(x)&=\alpha\beta\, f(x)+(\alpha+\beta)f'(x)+f''(x)\\&=\beta\,[\alpha\, f(x)+f'(x)]+[\alpha\, f(x)+f'(x)]'\end{aligned}$$

由题设 $\lim\limits_{x\to+\infty}[\alpha\, f(x)+f'(x)]=\frac{l}{\beta}$，故利用（1），有$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\frac{l}{\alpha\beta}=l$.

（4）设$f(x)$在$(0,+\infty)$上可导，$a>0$，若$\lim\limits_{x\to+\infty}[af(x)-f'(x)]=l$，$|f(x)|\le M(0<x<+\infty)$，则$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\frac{l}{a}$.

提示：$(e^{-ax}f(x))'=e^{ax}[-af(x)+f'(x)]$.

注 $|f(x)|\le M$不可缺少。

比如：$f(x)=e^{x}+l$，满足 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-f'(x)]=l$，但 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\neq l$.

想想，具体证明时，$|f(x)|\le M$ 用在哪里了？

三、$f'(x)$有界的有关结论

（1）若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内二阶导数，且 $f(x)$ 和 $f''(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界，则 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界。

证　依题意，存在正常数M_0，M_2，使$\forall x\in(-\infty,+\infty)$，有$|f(x)|\le M_0$，$|f''(x)|\le M_2$。由泰勒公式，有

$$f(x+1)=f(x)+f'(x)+\frac{1}{2}f''(\xi),\quad x<\xi<x+1,$$

所以　$|f'(x)|\le|f(x+1)|+|f(x)|+\frac{1}{2}|f''(\xi)|\le 2M_0+\frac{M_2}{2}$，故 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界。

（2）若 $f(x)$ 和 $f'''(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界，则 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界。

证 依题意，存在正常数M_0，M_3，使$\forall x\in(-\infty,+\infty)$，有$|f(x)|\le M_0$，$|f'''(x)|\le M_3$。由泰勒公式，有

$$f(x+1)=f(x)+f'(x)+\frac{1}{2}f''(x)+\frac{1}{3!}f'''(\xi),\quad x<\xi<x+1,$$

$$f(x-1)=f(x)-f'(x)+\frac{1}{2}f''(x)-\frac{1}{3!}f'''(\eta),\quad x-1<\eta<x,$$

于是，两式相加得

$$f''(x)=f(x+1)-2f(x)+f(x-1)-\frac{1}{6}[f'''(\xi)-f'''(\eta)],$$

所以　$|f''(x)|\le|f(x+1)|+|2f(x)|+|f(x-1)|+\frac{1}{6}[|f'''(\xi)|+|f'''(\eta)|]\le 4M_0+\frac{M_3}{3}$

两式相减得

$$f'(x)=\frac{1}{2}[f(x-1)-f(x+1)]-\frac{1}{12}[f'''(\xi)+f'''(\eta)],$$

所以　$|f'(x)|\le\frac{1}{2}[|f(x+1)|+|f(x-1)|+\frac{1}{12}[|f'''(\xi)|+|f'''(\eta)|]\le M_0+\frac{M_3}{6}$，

综上，$f'(x)$ 和 $f''(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界。

（3）若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上二阶可导，且$|f(x)|\le M_0$，$|f''(x)|\le M_2$，$-\infty<x<+\infty$，则 $|f'(x)|\le\sqrt{2M_0M_2}$，$-\infty<x<+\infty$。

证 由泰勒公式 $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2$，$\xi$ 介于 x 与 x_0 之间。

任取 $h>0$，令 $x=x_0+h$ 及 $x=x_0-h$，则

则 $f(x_0-h)=f(x_0)-f'(x_0)h+\frac{1}{2}f''(\xi_1)h^2$

$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{1}{2}f''(\xi_2)h^2$ ，$x_0-h<\xi_1<x_0<\xi_2<x_0+h$

于是，两式相减得

$$2f'(x_0)h=f(x_0+h)-f(x_0-h)+\left[\frac{1}{2}f''(\xi_1)-\frac{1}{2}f''(\xi_2)\right]h^2,$$

从而由题设得

$$|f'(x_0)|h\le M_0+\frac{M_2}{2}h^2，或|f'(x_0)|\le\frac{M_0}{h}+\frac{M_2}{2}h 。$$

如果 $M_2=0$，则 $|f'(x_0)|\le\frac{M_0}{h}(h>0)$，令 $h\to 0$，得 $f'(x_0)=0$。

如果 $M_2>0$，由 $|f'(x_0)|\le\frac{M_0}{h}+\frac{M_2}{2}h$ 得二次三项式 $M_2h^2-2|f'(x_0)|h+2M_0\ge 0\,(h>0)$，

故其判别式 $4|f'(x_0)|^2-8M_0M_2\le 0$，于是 $|f'(x)|\le\sqrt{2M_0M_2}$。