AHP 方法中关于判断矩阵一致性的研究

王 斌 常显奇
(装备指挥技术学院 研究生部, 北京 101416) (装备指挥技术学院,北京 101416)
陈浩光
(装备指挥技术学院 试验指挥系, 北京 101416)

摘 要: 从分析判断矩阵的特征根出发,推导出判断矩阵一致性和特征根的关系,即判断矩阵的最大特征根越接近于判断矩阵的维数,则该判断矩阵的一致性越好。以此为基础,进一步得出了判断矩阵一致性检验的原理和方法;给出了对判断矩阵进行一致性调整的原则。最后根据这一调整原则,提出了一种新的一致性调整的方法,并以一个实例验证该方法的正确性和可行性。

关 键 词: 系统分析; 层次分析法; 判断矩阵; 一致性
中图分类号: N 94
文献标识码: A **文 章 编 号**: CN11-3987/ G3(2002)05-0100-04

层次分析法(AHP:Analytic Hierarchy Process)的信息来源于专家对每一层次中各元素之间相对重要性所作的判断。这些判断信息经过适当的标度量化后形成判断矩阵[1]。对于判断矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$,当满足 $a_{ij}=1/a_{ij}$,且 $a_{ik}\cdot a_{kj}=a_{ij}(i,j,k=1,2,\cdots,n)$ 时,认为 A 是完全一致性矩阵。在大多数情况下,由于客观事物的复杂性和人们认识的多样性,以及认识上可能产生的片面性,专家们给出的判断矩阵很难得到完全一致性。因此,要对判断矩阵进行一致性检验,对于不满足一致性条件的要进行一致性调整,直到满足要求。本文先分析了判断矩阵一致性检验的基本原理和方法,然后介绍了一致性调整的基本原则和一种新的一致性调整方法,并以一个算例作为验证。

1 一致性检验基本原理和方法[2~4]

1.1 完全一致性判断矩阵的特征根

如果判断矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为完全一致性矩阵,即有 $a_{ij}=1/a_{ij}$, $a_{ik}\cdot a_{kj}=a_{ij}$。设 $W^T=(w_1,w_2,\cdots,w_n)$ 表示所要判断的各个元素分别所占的权重,其中 $\sum_{i=1}^{n}w_i=1$。则 $A=(a_{ij}=\frac{w_i}{w_j})_{n\times n}$;于是有

$$A\cdot W=n\cdot W \tag{1}$$

在判断矩阵 A 中,任意一行都可以用其它行的正数倍数表示,因此,A 的秩为 1,即 $R(A)=1$。结合(1)式,可以推断出 A 的最大特征根为 n,其它的特征根为 0。

1.2 一般判断矩阵的最大特征根

设 λ_{max} 为判断矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的最大特征根,其对应的特征向量为 $W^T=(w_1,w_2,\cdots,w_n)$,则有

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}=\lambda_{max}\cdot\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \tag{2}$$

将(2)式按行展开,然后将各行相加得:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{a_{ij}\cdot w_j}{w_i}=n\cdot\lambda_{max} \tag{3}$$

因为 $i=j$ 时, $a_{ij}=1$,所以 $\frac{a_{ij}\cdot w_j}{w_i}=1(i=1,2,\cdots,n)$ 于是得到

$$\sum_{i\neq j}\frac{a_{ij}\cdot w_j}{w_i}+n=n\cdot\lambda_{max} \tag{4}$$

收稿日期: 2002-04-25
作者简介: 王 斌(1977 -),男,硕士研究生.

将(4)式进行变换得:

$$n\cdot\lambda_{max}-n=\sum_{0\le i<j\le n}a_{ij}\cdot\frac{w_j}{w_i}+\sum_{0\le j<i\le n}a_{ij}\cdot\frac{w_j}{w_i}=$$

$$\sum_{0\le i<j\le n}\left(a_{ij}\cdot\frac{w_j}{w_i}+\frac{1}{a_{ij}}\cdot\frac{w_j}{w_i}\right)\ge$$

$$n\cdot(n-1) \qquad (5)$$

即 $\lambda_{max}\ge n$,当且仅当 $a_{ij}\cdot\frac{w_j}{w_i}=1$ 时,$\lambda_{max}=n$。

从以上的推导可以知道,判断矩阵的最大特征根 λ_{max}不小于 n,当且仅当 $a_{ij}\cdot\frac{w_j}{w_i}=1$,即 A 为完全一致性矩阵时,$\lambda_{max}$才等于 n。

1.3　一致性检验原理

如果判断矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$中,各个元素分别所占的权重为$(w_1,w_2,\cdots,w_n)$,令 $a_{ij}=\frac{w_i}{w_j}(1+\delta_{ij})$,其中:$\delta_{ij}>-1(i,j=1,2,\cdots,n)$。可知,当对于任意 i 和 j,都满足 $\delta_{ij}=0$ 时,A 为一致性矩阵。因此,$|\delta_{ij}|$越接近于0,则 A 的一致性越好。

将 $a_{ij}=\frac{w_i}{w_j}(1+\delta_{ij})$代入(5)式得:

$$n\cdot\delta_{max}=\sum_{0\le i<j\le n}\left[(1+\delta_{ij})+\frac{1}{1+\delta_{ij}}\right] \qquad (6)$$

将$\frac{1}{1+\delta_{ij}}$的泰勒展开式为

$$\frac{1}{1+\delta_{ij}}=1-\delta_{ij}+\delta_{ij}^2-\frac{\delta_{ij}^3}{1+\delta_{ij}}$$

如果$|\delta_{ij}|<1$则

$$n\cdot\lambda_{max}-n\approx n\cdot(n-1)+\sum_{0\le i<j\le n}\delta_{ij}^2 \qquad (7)$$

令 $\delta=\max_{i,j=1,2,\cdots,n}|\delta_{ij}|$,$\bar{\delta}^2=\frac{2\sum_{0\le i<j\le n}\delta_{ij}^2}{n(n-1)}$ 则

$$n\cdot\lambda_{max}-n\le n\cdot(n-1)+\frac{n\cdot(n-1)}{2}\delta^2 \qquad (8)$$

$$n\cdot\lambda_{max}-n\approx n\cdot(n-1)+\frac{n\cdot(n-1)}{2}\bar{\delta}^2 \qquad (9)$$

即

$$\frac{\bar{\delta}^2}{2}\approx\frac{\lambda_{max}-n}{n-1}\le\frac{\delta^2}{2} \qquad (10)$$

从(10)式中可知,当 δ 越接近于0时,$\frac{\lambda_{max}-n}{n-1}$(即判断矩阵最大特征根以外其余特征根的负平均值)越接近于0,A 的一致性越好。且$\frac{\lambda_{max}-n}{n-1}$正好界于$\frac{\bar{\delta}^2}{2}$和$\frac{\delta^2}{2}$之间,因此,$\frac{\lambda_{max}-n}{n-1}$也在一定程度上反映了判断矩阵 A 的一致性的好坏,而且,A 的最大特征根λ_{max}可以利用矩阵的知识很容易求得,相比起来,$\bar{\delta}$和 δ就难求得多。所以,使用$\frac{\lambda_{max}-n}{n-1}$来替代 $\bar{\delta}$和 δ,作为判断矩阵 A 的一致性指标(consistent index),记作:$C.I=\frac{\lambda_{max}-n}{n-1}$。

为了得到一个对不同阶数判断矩阵均适用的一致性检验的临界值,还必须考虑一致性与矩阵阶数之间的关系。事实上,矩阵阶数越高,判断矩阵越难达到一致性。为此,层次分析法的创始人 Satty 提出了用平均随机一致性指标 $R.I$ 修正 $C.I$ 的方法,即,用 $C.R=\frac{C.I}{R.I}$ 代替 $C.I$,进行一致性检验。当 $C.R<0.1$ 时,认为判断矩阵具有可接受的一致性,否则,由于判断矩阵偏离一致性程度过大而需要对 A 进行一致性调整。

2　一致性调整[5]

2.1　一致性调整的原则

显而易见,对判断矩阵进行一致性调整的目的就是为了消除专家所给出的判断信息的不一致性。因此一致性调整的原则之一就是能够使调整后的判断矩阵的一致性得到改善,经过一次或多次的调整,逐步达到一致性的要求。

另外,判断矩阵定量的描述了专家的判断信息,代表专家的意见。因此,进行一致性调整的第二个原则就是要能有效的提取原专家判断矩阵的准确判断信息,保证调整后的矩阵的可信度,即要保证调整后的矩阵能代表专家的意见。

2.2　一致性调整的一种新方法

在(8)式中 $n\cdot(\lambda_{max}-1)\le n\cdot(n-1)+\sum_{0\le i<j\le n}\delta_{ij}^2$,$|\delta_{ij}|$越接近于0,$\lambda_{max}$越接近于0,判断矩阵的一致性越好。由此可知,影响判断矩阵一致性的关键参数为 δ_{ij},只要能降低$|\delta_{ij}|$的值,就可以改善判断矩阵的一致性。

对于判断矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$,通过一致性的充要条件 $a_{ik}\cdot a_{kj}=a_{ij}$和 $a_{ij}=1/a_{ij}$,可以利用 A 中的部分数据(如某一行或某一列),得到一个新的完全一致性矩阵 $B=(b_{ij})_{n\times n}$。

令 $a_j=b_{ij}(1+\delta_{ij})$,$(\delta_{ij}>-1)$。并设通过调整后的判断矩阵为 $C=(c_{ij})_{n\times n}$,且 $c_{ij}=b_{ij}(1+\tilde{\delta}_{ij})$,$(\tilde{\delta}_{ij}>-1)$。如果对于 $0\le i<j\le n$,均有 $0\le|\tilde{\delta}_{ij}|\le|\delta_{ij}|$,则根据公式(10)有$\frac{\tilde{\delta}^2}{2}\approx$

$\frac{\tilde{\lambda}_{max}-n}{n-1} \le \frac{\delta^2}{2} \approx \frac{\lambda_{max}-n}{n-1}$,因此 C 的一致性优于 A 。

设 $\tilde{\delta}_{ij} = (1-t)\delta_{ij}, 0 < t \le 1$。于是可以得到:

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \bar{a}_{ij}[1+(1-t)\delta_{ij}] = \\ &\bar{a}_{ij}(1+\delta_{ij}-t\cdot\delta_{ij}) = \\ &(1-t)a_{ij}+t\cdot b_{ij} \end{aligned} \tag{11}$$

从(11)式中可以知道,在产生的新判断矩阵 C 中,有 $100\times(1-t)$%的信息来源于 A,而有 $100\times t$%的信息来源于完全一致性矩阵 B 。当 t 的值越小,则保留的 A 的信息越大,可信度越大;反之则越少。t 的取值可以根据具体的问题具体分析。

这种方法的步骤如下:

步骤 1:对原判断矩阵 A 进行一致性检验,如果满足一致性要求则结束;如果不满足则到步骤 2;

步骤 2:根据原判断矩阵 A 得到完全一致性矩阵 B ;

步骤 3:然后根据问题的性质确定 t 的值;

步骤 4:根据(11)式对 A 进行调整,得到 C ;

步骤 5:将 $\tilde{A}$代替原判断矩阵 ,返回步骤 1。

2.3 关于航天器返回过程的算例

航天器的返回过程是航天器飞行的一个重要阶段。航天器的返回着陆系统由以下几个分系统组成:制动离轨系统、降落伞系统、着陆缓冲装置、回收标位装置和某些溅水着陆的航天器使用的漂浮装置和扶正装置。使用层次分析法来分析航天器飞行中的航天器安全、准确返回这一阶段,如图 1 所示。

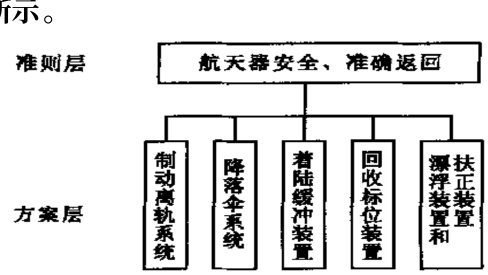

图 1 航天器的返回着路系统的层次结构

专家根据航天器安全、准确返回这一准则,对其方案层中与之相关的 5 个元素的相关重要性进行判断,得到判断矩阵 A,由于系统的复杂性,判断矩阵 A 不一定完全满足一致性要求。根据以上提出的判断矩阵的调整方法,对其进行调整,其步骤如下:

判断矩阵 A 为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 9 \\ \frac{1}{2} & 2 & 1 & 5 & 2 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 1 & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{9} & \frac{1}{2} & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

则 $w = (0.328\,8, 0.341\,3, 0.089\,2, 0.198\,0, 0.042\,4)^T$, $C.I = 0.13$, $R.I = 0.116 > 0.1$,此时不满足一致性要求。

以第 1 行和第 1 列为基准产生一致性矩阵 B

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 5 & 6 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{5}{2} & 3 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 1 & \frac{6}{5} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{5}{6} & 1 \end{pmatrix}$$

由(11)式产生 C

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & \frac{2}{2+t} & 5 & \frac{18}{2+t} \\ \frac{1}{2} & 1-\frac{t}{2} & 1 & 5-\frac{5t}{2} & \frac{6}{3-t} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{10-5t} & 1 & \frac{6}{30-25t} \\ \frac{1}{6} & \frac{2+t}{18} & 0.5-\frac{t}{6} & 5-\frac{25t}{6} & 1 \end{pmatrix}$$

取 $t = 1/3$,则 C 中的 $w = (0.346, 0.329, 0.078, 0.20, 0.047)^T$, $C.I = 0.066$, $R.I = 0.068 < 0.1$,正好满足一致性要求。于是得到调整后的矩阵为

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & \frac{6}{5} & 5 & \frac{54}{7} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{6} & 1 & \frac{25}{6} & \frac{9}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{6}{25} & 1 & \frac{18}{65} \\ \frac{1}{6} & \frac{7}{54} & \frac{4}{9} & \frac{65}{18} & 1 \end{pmatrix}$$

3 结 束 语

本文通过数学的推导,对层次分析法中判断矩阵的一致性进行了研究。分析了判断矩阵一致性检验的原理和一致性调整的原则,得到了判断

矩阵的最大特征根及其一致性的数学关系;然后根据这些关系按照一致性调整的原理提出了一种新的一致性调整的方法。

参 考 文 献

[1] 陈　5. 决策分析[M]. 北京:科学出版社,1987.

[2] 许树柏. 层次分析法原理[M]. 天津:天津大学出版社,1988.

[3] 谭跃进,陈英武,易进先. 系统工程原理[M]. 长沙:国防科技大学出版社,1999.

[4] 王懋赞,刘民超,刘文山. 如何增加层次分析法中判断矩阵的一致性[J]. 系统工程理论与实践,1993,13(1):61-63.

[5] 王国华,梁　. 专家判断矩阵的一种调整方法[J]. 系统工程学报,2001,19(4):90-96.

Study on Consistency of Judgment Matrix in Analytic Hierarchy Process

Wang Bin

(Postgraduate, The Academy of Equipment Command & Technology, Beijing 101416, China)

CHANG Xian-qi

(The Academy of Equipment Command & Technology, Beijing 101416, China)

CHEN Hao-guang

(Department of Test Commanding, The Academy of Equipment Command & Technology, Beijing 101416, China)

Abstract: In this paper, the characteristic root of judgment matrix is discussed. And the relationship between the consistency and characteristic root of judgment matrixis analyzed, the nearer is the characteristic root close to the dimension of judgment matrix is analyzed. The better is the consistency of judgment matrix. According to the above, the primary theory and methods of consistency examination of judgment matrix and the primary rules of regulating it is acquired. According to these rules, a new means of regulating judgment matrix is also introduced, the validity and feasibility of this method is validated by an example.

Key words: system analysis; analytic hierarchy process; judgment matrix; consistency

(责任编校:程万鑫)