全国数学竞赛预、决赛

微分方程部分

首届中国大学生数学竞赛赛区赛试卷及解答

（非数学类，2009）

五、（10 分）已知

$$y_1 = xe^x + e^{2x}\ ,\ y_2 = xe^x + e^{-x}\ ,\ y_3 = xe^x + e^{2x} - e^{-x}$$

是某二阶常系数线性非齐次微分方程的三个解，试求此微分方程.

【解】：根据二阶线性非齐次微分方程解的结构的有关知识，由题设可知：e^{2x} 与 e^{-x} 是相应齐次方程两个线性无关的解，且 xe^x 是非齐次的一个特解.因此可以用下述两种解法。

【解法一】：故此方程式 $y'' - y' - 2y = f(x)$。将 $y = xe^x$ 代入上式，得

$$f(x) = (xe^x)'' - (xe^x)' - 2xe^x = 2e^x + xe^x - e^x - xe^x - 2xe^x = e^x - 2xe^x\ ,$$

因此所求方程为 $y'' - y' - 2y = e^x - 2xe^x$.

【解法二】: 故 $y=xe^{x}+c_1e^{2x}+c_2e^{-x}$ ，是所求方程的通解，由 $y'=e^{x}+xe^{x}+2c_1e^{2x}-c_2e^{-x}$ ，$y''=2e^{x}+xe^{x}+4c_1e^{2x}+c_2e^{-x}$ ，消去 c_1,c_2 得所求方程为 $y''-y'-2y=e^{x}-2xe^{x}$.

七、(15 分) 已知 $u_n(x)$ 满足 $u_n{}'(x)=u_n(x)+x^{n-1}e^{x}$ (n 为正整数)，且 $u_n(1)=\dfrac{e}{n}$ ，求函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 之和.

【解】: 先解一阶常系数微分方程，求出 $u_n(x)$ 的表达式，然后再求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的和.

由已知条件可知 $u_n{}'(x)-u_n(x)=x^{n-1}e^{x}$ 是关于 $u_n(x)$ 的一个一阶常系数线性微分方程，故其通解为

$$u_n(x)=e^{\int dx}\left(\int x^{n-1}e^{x}e^{-\int dx}dx+c\right)=e^{x}\left(\frac{x^{n}}{n}+c\right) ,$$

由条件 $u_n(1)=\frac{e}{n}$，得$c=0$，故$u_n(x)=\frac{x^n e^x}{n}$，

从而 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n e^x}{n}=e^x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$. $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$，其收敛域为 $[-1,\ 1)$，当 $x\in(-1,\ 1)$时，有

$$s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x},$$

故$s(x)=\int_0^x\frac{1}{1-t}dt=-\ln(1-x)$。当$x=-1$时，

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=-e^{-1}\ln 2.$$

于是，当 $-1\le x<1$时，有 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=-e^x\ln(1-x)$.

2010 首届中国大学生数学竞赛决赛试卷及参考答案（非数学类）

4）已知 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ 内满足 $f'(x)=\frac{1}{\sin^3 x+\cos^3 x}$，求 $f(x)$

【解】 由 $\sin^3 x+\cos^3 x=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\frac{\pi}{4}-x)[1+2\sin^2(\frac{\pi}{4}-x)]$ 得

$I=\sqrt{2}\int\frac{dx}{\cos(\frac{\pi}{4}-x)[1+2\sin^2(\frac{\pi}{4}-x)]}$，，令 $u=\frac{\pi}{4}-x$，得

$$I=-\sqrt{2}\int\frac{du}{\cos u(1+2\sin^2 u)}=-\sqrt{2}\int\frac{d\sin u}{\cos^2 u(1+2\sin^2 u)}.$$

$$\underline{\underline{令 t=\sin u}}-\sqrt{2}\int\frac{dt}{(1-t^2)(1+1t^2)}=-\frac{\sqrt{2}}{3}\left[\int\frac{dt}{1-t^2}+\int\frac{2dt}{1+2t^2}\right]$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{3}\left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+\sqrt{2}\arctan\sqrt{2}t\right]+C$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{6}\ln\left|\frac{1+\sin(\frac{\pi}{4}-x)}{1-\sin(\frac{\pi}{4}-x)}\right|-\frac{2}{3}\arctan(\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}-x))+C$$

2010年预赛（非数学类）

第二届全国大学生数学竞赛试卷及参考解答

三、（本题共 15 分）设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=2t+t^2 \\ y=\psi(t) \end{cases}$ $(t>-1)$ 所确定. 且 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{3}{4(1+t)}$，其中 $\psi(t)$ 具有二阶导数，曲线 $y=\psi(t)$ 与 $y=\int_1^{t^2} e^{-u^2}du+\dfrac{3}{2e}$ 在 $t=1$ 处相切. 求函数 $\psi(t)$.

【解】：因为 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\psi'(t)}{2+2t}$，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{2+2t}\frac{(2+2t)\psi''(t)-2\psi'(t)}{(2+2t)^3}=\frac{(1+t)\psi''(t)-\psi'(t)}{4(1+t)^3}$$

由题设 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{3}{4(1+t)}$ ，故 $\dfrac{(1+t)\psi''(t)-\psi'(t)}{4\left(1+t\right)^3}=\dfrac{3}{4(1+t)}$ ，

从而有 $(1+t)\psi''(t)-\psi'(t)=3\left(1+t\right)^2$ ，即

$$\psi''(t)-\frac{1}{(1+t)}\psi'(t)=3\left(1+t\right)$$

设 $u=\psi'(t)$ ，故有 $u'-\dfrac{1}{(1+t)}u=3\left(1+t\right)$ ，由一阶非齐次线性微分方程通解计算公式，有

$$u=e^{-\int\left(-\frac{1}{1+t}\right)dt}\left[\int 3(1+t)e^{\int\left(-\frac{1}{1+t}\right)dt}dt+C_1\right]$$

$$=\left(1+t\right)\left[\int 3(1+t)\left(1+t\right)^{-1}dt+C_1\right]=\left(1+t\right)\left(3t+C_1\right)$$

由曲线 $y=\psi(t)$ 与 $y=\int_1^{t^2} e^{-u^2}du+\dfrac{3}{2e}$ 在 $t=1$ 处相切知

$\psi(1)=\dfrac{3}{2e},\psi'(1)=\dfrac{2}{e}$.所以有

$$u|_{t=1}=\psi'(1)=\frac{2}{e}\Rightarrow C_1=\frac{1}{e}-3.$$

于是有

$$\psi(t)=\int(1+t)(3t+C_1)dt=t^3+\frac{3+C_1}{2}t^2+C_1t+C_2。$$

由 $\psi(1)=\dfrac{3}{2e}\Rightarrow C_2=2$ ，于是有

$$\psi(t)=t^3+\frac{1}{2e}t^2+\left(\frac{1}{e}-3\right)t+2\ (t>-1).$$

(非数学类)第二届大学生数学竞赛试卷及参考答案

二、(本题 10 分) 求方程 $(2x+y-4)dx+(x+y-1)dy=0$ **的通解。**

解：所给方程改写为

$$(2xdx+ydy)+(ydx+xdy)-(4dx+dy)=0$$

即

$$d(x^2+\frac{1}{2}y^2)+d(xy)-d(4x+y)=0$$

故所求通解为

$$x^2+\frac{1}{2}y^2+xy-(4x+y)=C。$$

(非数学类)第三届预赛试卷及参考答案

(非数学类)第三届<决赛>试题及参考答案

六、(本题共 16 分,第 1 小题 6 分,第 2 小题 10 分)

(1)求解微分方程 $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} - xy = xe^{x^2}, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

(2)如 $y = f(x)$ **为上述方程的解,证明:**

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nf(x)}{n^2x^2+1}dx = \frac{\pi}{2}.$$

【解】(1) 微分方程为一阶线性微分方程，解方程的通解为

$$y=e^{\int xdx}\left[\int xe^{x^2}e^{-\int xdx}dx+C\right]=e^{\frac{x^2}{2}}\left[\int xe^{x^2}e^{-\frac{x^2}{2}}dx+C\right]$$

$$=e^{\frac{x^2}{2}}\left[\int xe^{\frac{x^2}{2}}dx+C\right]=e^{\frac{x^2}{2}}\left[e^{\frac{x^2}{2}}+C\right]=e^{x^2}+Ce^{\frac{x^2}{2}}$$

由 $y(0)=1$，得 $C=0$，所以 $y=e^{x^2}$.

(2) 证明： 注意到 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{n}{n^2x^2+1}dx=\lim\limits_{n\to\infty}\arctan n=\frac{\pi}{2}$, 及

$$\int_0^1\frac{nf(x)}{n^2x^2+1}dx=\int_0^1\frac{ne^{x^2}}{n^2x^2+1}dx$$

$$=\int_0^1\frac{n}{n^2x^2+1}\left(e^{x^2}-1\right)dx+\int_0^1\frac{n}{n^2x^2+1}dx$$

$\forall \varepsilon > 0$ ，由 $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{x^2}-1\right)=0$ 知 $\exists \delta > 0, \forall 0 < x < \delta$ 时，有

$\left|e^{x^2}-1\right| < \varepsilon \dfrac{1}{\pi}$ ，因此有

$$\int_0^1 \frac{n}{n^2x^2+1}\left(e^{x^2}-1\right)dx$$

$$=\int_0^\delta \frac{n}{n^2x^2+1}\left(e^{x^2}-1\right)dx+\int_\delta^1 \frac{n}{n^2x^2+1}\left(e^{x^2}-1\right)dx$$

$$\le \frac{\varepsilon}{\pi}\int_0^\delta \frac{n}{n^2x^2+1}dx+(e-1)\int_\delta^1 \frac{n}{n^2x^2+1}dx$$

$$\le \frac{\varepsilon}{2}+(e-1)\frac{n}{n^2\delta^2+1}(1-\delta)\le \frac{\varepsilon}{2}+(e-1)\frac{n}{n^2\delta^2+1}$$

$\exists N, \forall n > N$ 时， $\dfrac{n}{n^2\delta^2+1}\le \dfrac{\varepsilon}{2(e-1)}$ ，因此

$$\int_0^1 \frac{n}{n^2x^2+1}\left(e^{x^2}-1\right)dx < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{n}{n^2x^2+1}\left(e^{x^2}-1\right)dx = 0$. 所以

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{n}{n^2x^2+1}f(x)dx$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{n}{n^2x^2+1}\left(e^{x^2}-1\right)dx+\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{n}{n^2x^2+1}dx=\frac{\pi}{2}$$

（非数学类）第四届<预赛>试卷及参考答案

(3) **已知函数** $z=u(x,y)e^{ax+by}$，**且** $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$ **，确定常数** a,b **，**

使函数 $z=z(x,y)$ **满足方程** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}+z=0.$

【解】： $\dfrac{\partial z}{\partial x}=e^{ax+by}\left[\dfrac{\partial u}{\partial x}+au(x,y)\right],$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=e^{ax+by}\left[\frac{\partial u}{\partial y}+bu(x,y)\right],$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^{ax+by}\left[b\frac{\partial u}{\partial x}+a\frac{\partial u}{\partial y}+abu(x,y)\right],$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}+z$$

$$=e^{ax+by}\left[(b-1)\frac{\partial u}{\partial x}+(a-1)\frac{\partial u}{\partial y}+(ab-a-b+1)u(x,y)\right],$$

若是上式等于 0，只有

$$(b-1)\frac{\partial u}{\partial x}+(a-1)\frac{\partial u}{\partial y}+(ab-a-b+1)u(x,y)=0\ ,$$

由此可得 $a=b=1$.

(4) 设函数 $u=u(x)$ **连续可微，** $u(2)=1$ **，且**

$$\int(x+2y)u\,dx+\left(x+u^3\right)u\,dy$$ **在右半平面上与路径无关，求** $u(x)$.

【解】: 由 $\dfrac{\partial\left[(x+2y)u\right]}{\partial y}=\dfrac{\partial\left[u\left(x+u^3\right)\right]}{\partial x}$ ，得

$\left(x+4u^3\right)u'=u$ ，即 $\dfrac{dx}{du}-\dfrac{1}{u}x=4u^2$ ，这是一个一阶线性微分方程，于是由公式有通解为

$$x=e^{\ln u}\left(\int 4u^2e^{-\ln u}du+C\right)=u\left(\int 4udu+C\right)=u\left(2u^2+C\right)$$

由 $u(2)=1$ 得 $C=0$ ，所以 $u=\left(\dfrac{x}{2}\right)^{1/3}$.

（非数学类）第四届<决赛>试卷及参考答案

2、设 $f(u,v)$ 具有连续偏导数，且满足 $f_u(u,v)+f_v(u,v)=uv$，
求 $y(x)=e^{-2x}f(x,x)$ 所满足的一阶微分方程，并求其通解。

【解】：$y'(x)=-2e^{-2x}f(x,x)+e^{-2x}f_u(x,x)+e^{-2x}f_v(x,x)$

$$=-2y+x^2e^{-2x}.$$

因此，所求一阶微分方程为 $y'+2y=x^2e^{-2x}$.该微分方程为一阶线性微分方程，所以由通解公式，有

$$y=e^{-\int 2dx}\left[\int x^2e^{-2x}e^{\int 2dx}dx+C\right]=\left(\frac{x^3}{3}+C\right)e^{-2x}.$$

3、求在 $[0,+\infty)$ **上的可微函数** $f(x)$ **，使** $f(x)=e^{-u(x)}$**,其中** $u=\int_0^x f(t)dt$**.**

【解】:由题意 ,有 $e^{-\int_0^x f(t)dt}=f(x)$,即 $\int_0^x f(t)dt=-\ln f(x)$

两边求导可得 $f'(x)=-f^2(x)$ ，并且 $f(0)=e^0=1$，可得

$$f(x)=\frac{1}{x+1}.$$

（非数学类）第五届<预赛>试卷及参考答案

（非数学类）第五届<决赛>试卷及参考答案

三、（12 分）设当 $x > -1$ 时，可微函数 $f(x)$ 满足条件

$$f'(x)+f(x)-\frac{1}{1+x}\int_0^x f(t)dt=0 \text{ 且 } f(0)=1.$$

试证：当 $x \ge 0$ 时，有 $e^{-x} \le f(x) \le 1$ 成立。

【证明】：由题设可知 $f'(0)=-1$，则所给方程可变形为

$$(1+x)f'(x)+(1+x)f(x)-\int_0^x f(t)dt=0$$

两端关于 x 求导并整理得

$$(1+x)f''(x)+(2+x)f'(x)=0$$

这是一个可降阶的二阶微分方程，可用分离变量法求得

$$f'(x)=\frac{Ce^{-x}}{1+x}.$$

由 $f'(0)=-1$ 得 $C=-1$ ，即 $f'(x)=-\frac{e^{-x}}{1+x}<0$. 函数 $f(x)$ 单调递减。而 $f(0)=1$ ，所以当 $x\geq 0$ ， $f(x)\leq 1$。

对 $f'(t)=-\frac{e^{-t}}{1+t}<0$ 在 $[0,x]$ 上进行积分，得

$$f(x)=f(0)-\int_0^x\frac{e^{-t}}{1+t}dt\geq 1-\int_0^x e^{-t}dt=e^{-x}.$$

（非数学类）第六届<预赛>试卷及参考答案

(1) 已知 $y_1 = e^x$ **和** $y_2 = xe^x$ **是齐次二阶常系数线性微分方程的解，则该微分方程是** $\underline{y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 0.}$

【解】：由解的表达式可知微分方程对应的特征方程有二重根 $r = 1$，故所求微分方程为 $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 0.$

（非数学类）第六届<决赛>试卷及参考答案

(2) 设实数 $a \neq 0$ **，微分方程** $\begin{cases} y'' - ay'^2 = 0, \\ y(0) = 0, y'(0) = -1 \end{cases}$ **的解为**

$\underline{y = -\dfrac{1}{a}\ln(ax+1).}$

【解】:微分方程为可降阶微分方程，令 $p=y'$,则微分方程转换为 $p'-ap^2=0$ ，分离变量后有

$$\frac{dp}{p^2}=adx\Rightarrow-\frac{1}{p}=ax+C_1$$

由 $p(0)=-1\Rightarrow C_1=0$.所以有

$$y'=-\frac{1}{ax}\Rightarrow y=-\frac{1}{a}\ln\left(ax+C_2\right)$$

由 $y(0)=0\Rightarrow C_2=1$ ，所以解为 $y=-\frac{1}{a}\ln\left(ax+1\right)$.

第七届《预赛》(非数学类)试卷及参考答案

第七届《决赛》(非数学类)试卷及参考答案

(1) **微分方程** $y''-(y')^3=0$ **的通解是** $\underline{y=C_2\pm\sqrt{2(C_1-x)}}$

【解】:令 $y'=p$,则 $y''=p'=p^3$,这是可分离变量的微分方程,有 $\dfrac{dp}{p^3}=dx$,积分得到 $-\dfrac{1}{2}p^{-2}=x-C_1$,即

$$p=y'=\frac{\pm 1}{\sqrt{2\left(C_1-x\right)}}$$,积分得 $y=C_2\pm\sqrt{2(C_1-x)}$.

【注】:完全正确 6 分,缺正负号扣 1 分。

第八届全国预赛(非数学类)试题及参考解答

3 .设 $f(x)$ 有连续导数 ,且 $f(1)=2$. 记 $z=f\left(e^x y^2\right)$,若 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=z$,

求 $f(x)$ 在 $x>0$ 的表达式。

【解】: 由题设，得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'\left(e^x y^2\right)e^x y^2=f\left(e^x y^2\right)$. 令 $u=e^x y^2$,

得到当 $u>0$,有

$$f'(u)u=f(u),\text{即}\frac{f'(u)}{f(u)}=\frac{1}{u}\Rightarrow\left(\ln f(u)\right)'=\left(\ln u\right)'.$$

所以有

$$\ln f(u)=\ln u+C_1, f(u)=cu.$$

再由初值条件得 $f(u)=2u$. 所以当 $x>0$ 时，有 $f(x)=2x$.

第八届全国大学生数学竞赛决赛参考答案

2、设可微函数 $f(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=-f(x,y)$，$f\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)=1$，

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{f\left(0,y+\dfrac{1}{n}\right)}{f(0,y)}\right)^{n}=e^{\cot y}$，则 $f(x,y)=e^{-x}\sin y$。

解：由 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=-f(x,y)$，两边积分，得

$$\ln f(x,y)=-x+\ln\varphi(y)，所以\ f(x,y)=\varphi(y)e^{-x}，$$

所以 $\varphi(y)$ 可微；又

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f\left(0,y+\frac{1}{n}\right)}{f(0,y)}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\varphi\left(y+\frac{1}{n}\right)}{\varphi(y)}\right)^n=\exp\left[\lim_{n\to\infty}n\ln\frac{\varphi\left(y+\frac{1}{n}\right)}{\varphi(y)}\right]$$

$$\lim_{n\to\infty}n\ln\frac{\varphi\left(y+\frac{1}{n}\right)}{\varphi(y)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\varphi\left(y+\frac{1}{n}\right)-\ln\varphi(y)}{\frac{1}{n}}=\frac{d\ln\varphi(y)}{dy}=\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}$$ ，

所以

$\dfrac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}=\cot y$，两边积分，得 $\varphi(y)=C\sin y$。

由 $f\left(0,\frac{\pi}{2}\right)=1$， $f(0,y)=\varphi(y)$，所以 $C=1$;从而

$f(x,y)=e^{-x}\sin y$。

第九届预赛，一（1）

已知可导函数 $f\left(x\right)\cos x+2\int_0^x f\left(t\right)\sin t dt=x+1$，则 $f\left(x\right)=$ ________

两边求导，得

$$f'\left(x\right)\cos x+f\left(x\right)\sin x=1, f'\left(x\right)+f\left(x\right)\tan x=\sec x\text{；}$$

从而,由一阶线性微分方程求解公式得

$$f\left(x\right)=\sin x+\cos x\text{。}$$

第九届决赛，一（3）：

（5 分）设函数 $f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数，满足 $df(x,y)=ye^{y}dx+x(1+y)e^{y}dy$

$f(0,0)=0$，则 $f(x,y)=xye^{y}$ 。

（4）（5 分）满足 $\frac{du(t)}{dt}=u(t)+\int_0^1 u(t)dt$ 及 $u(0)=1$ 的可微函数 $u(t)=$ ________ 。

$u(t)=\frac{2e^{t}-e+1}{3-e}$ 。