含 $xf_x(x,y)+yf_y(x,y)$ 和 $xf_y(x,y)-yf_x(x,y)$ 的若干问题

吴洁

之前，我们碰到过类似于下面题目的例题或习题：

设 $f(x,y)$ 在闭区域 D： $x^2+y^2\le 1$ 上有二阶连续偏导数，且

$$f_{xx}(x,y)+f_{yy}(x,y)=e^{-(x^2+y^2)},$$

则 $\iint\limits_D [xf_x(x,y)+yf_y(x,y)]dxdy=\dfrac{\pi}{2e}$.

其实，含 $xf_x(x,y)+yf_y(x,y)$ 或 $xf_x(x,y)-yf_y(x,y)$ 题目不少。

一、微分部分问题

1. 设 $D\subset \mathbf{R}^2$ 是包含原点的凸区域， f 在 D 上有连续偏导数。若有

$$xf_x(x,y)+yf_y(x,y)=0,$$

则 $f(x,y)\equiv C$ （常数）.

证 由中值定理，对 $(x,y)\in D$，

$$f(x,y)-f(0,0,)=f_x(\theta x,\theta y)x+f_y(\theta x,\theta y)y \quad (0<\theta<1)$$

$$=\frac{1}{\theta}[f_x(\theta x,\theta y)\theta x+f_y(\theta x,\theta y)\theta y]=0. \qquad \text{证毕。}$$

注 1）若 D 不包含原点，则结论不一定成立。如 $f(x,y)=\arctan\dfrac{y}{x}$.

2）中值定理：设 $\delta>0$， $f(x,y)$ 在 $D=\{(x,y)\,\|\, x-x_0|<\delta, |y-y_0|<\delta\}$ 可微，则

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=f_x(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)\Delta x+f_y(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)\Delta y$$

（$0<\theta<1$）.

2. 设 $f(x,y)$ 为可微函数，则 $f(x,y)$ 为 n 次齐次函数的充要条件是

$$xf_x(x,y)+yf_y(x,y)=nf(x,y).$$

（$f(x,y)$ 为 n 次齐次函数，即对任何 x,y,t 成立 $f(tx,ty)=t^n f(x,y)$）

证 必要性 若 $f(tx,ty)=t^n f(x,y)$，两边对 t 求导：

$$x f_{tx}(tx,ty)+y f_{ty}(tx,ty)=nt^{n-1}f(x,y)$$

取$t=1$得$x f_x(x,y)+y f_y(x,y)=n f(x,y)$.

充分性 若$x f_x(x,y)+y f_y(x,y)=n f(x,y)$，令$\varphi(t)=\dfrac{f(tx,ty)}{t^n}$，则

$$\varphi'(t)=\frac{tx f_{tx}(tx,ty)+ty f_{ty}(tx,ty)-n f(tx,ty)}{t^{n+1}}=0,$$

从而$\varphi(t)=C$（常数），因$\varphi(1)=f(x,y)$，故$\varphi(t)=f(x,y)$，即$f(tx,ty)=t^n f(x,y)$.

注 该结论可以推广到三元函数。

二、积分部分问题

1．设$f(x,y)$在闭区域D：$x^2+y^2\le R^2$上有二阶连续偏导数，D的边界为L，则

$$\oint_L [x f_x(x,y)+y f_y(x,y)]ds=R\iint_D [f_{xx}(x,y)+f_{yy}(x,y)]dxdy\ .$$

解 令$x=R\cos t,\ y=R\sin t\,(0\le t\le 2\pi)$，化曲线积分为定积分，有

$$\oint_L [x f_x(x,y)+y f_y(x,y)]ds=\int_0^{2\pi}[R\cos t\, f_x(R\cos t,R\sin t)+R\sin t\, f_y(R\cos t,R\sin t)]Rdt$$

$$=R\int_0^{2\pi}\left(R\cos t\, f_x+R\sin\theta\, f_y\right)dt$$

注意到$R\cos t\,dt=dy$，$R\sin t\,dt=-dx$，所以

$$R\int_0^{2\pi}\left(R\cos t\, f_x+R\sin\theta\, f_y\right)dt=R\oint_C f_x dy-f_y dx\overset{Green公式}{=\!=\!=\!=\!=\!=}R\iint_D (f_{xx}+f_{yy})dxdy$$.证毕。

（2）设$f(x,y)$有连续偏导数，曲线L：$x^2+y^2=R^2$，则$\oint_L [x f_y(x,y)-y f_x(x,y)]ds=0$.

解 令$x=R\cos t,\ y=R\sin t\,(0\le t\le 2\pi)$，则$xf_y(x,y)-y f_x(x,y)=f_t(R\cos t,R\sin t)$，

化曲线积分为定积分，有

$$\oint_L [x f_y(x,y)-y f_x(x,y)]ds=\int_0^{2\pi} f_t\cdot Rdt=R f(R\cos t,R\sin t)\Big|_0^{2\pi}=0$$

（3）设$f(x,y)$在闭区域D：$x^2+y^2\le R^2$上有一阶连续偏导数，$\varphi(t)$连续，则

$$\iint_D [x f_y-y f_x]\varphi(x^2+y^2)dxdy=0\ .$$

解 令$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$，则$xf_y(x,y)-y f_x(x,y)=f_\theta$，于是

$$\iint_D [xf_y - yf_x]\varphi(x^2+y^2)\,dxdy = \int_0^R \varphi(r^2)\,rdr\int_0^{2\pi} f_\theta d\theta \text{，}$$

因 $\int_0^{2\pi} f_\theta d\theta = f(r\cos\theta, r\sin\theta)\Big|_0^{2\pi} = 0$，所以 $\iint_D [xf_y - yf_x]\varphi(x^2+y^2)dxdy = 0$.

（4）设平面闭区域 D 以分段光滑闭曲线 L 为边界，$f(x,y)$ 在 D 上有二阶连续偏导数，则

ⅰ）$\oint_L [xf_x + yf_y]dy - [xf_y - yf_x]dx = \iint_D x[f_{xx} + f_{yy}]dxdy$ ；

ⅱ）$\oint_L [xf_x + yf_y]dx + [xf_y - yf_x]dy = -\iint_D y[f_{xx} + f_{yy}]dxdy$.

（由格林公式直接可得结论）