一道竞赛题的多解与多变

吴洁

$I=\int\frac{1}{\sin^3 x+\cos^3 x}dx$ 是首届全国大学生数学竞赛决赛题，该题在利用

$$\frac{1}{\sin^3 x+\cos^3 x}=\frac{1}{(\sin x+\cos x)(\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x)}$$

的基础上，切入点不同，可以产生不同的解法；而通过对 $\sin x$ 与 $\cos x$ 的方次的增减，可以产生系列变式。

先看原题的多种解法：

解法 1　因为 $\frac{1}{\sin x+\cos x}=\frac{1}{\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})}$ 是容易积分的，因此以 $\sin x+\cos x$ 为整体，拆项，得

$$I=\int\frac{dx}{(\sin x+\cos x)(\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x)}$$

$$=\int\frac{2dx}{(\sin x+\cos x)(2-2\sin x\cos x)}=\int\frac{2dx}{(\sin x+\cos x)[3-(\sin x+\cos x)^2]}$$

$$=\frac{2}{3}\left[\int\frac{dx}{\sin x+\cos x}+\int\frac{(\sin x+\cos x)dx}{3-(\sin x+\cos x)^2}\right]$$

注意到 $(\sin x+\cos x)dx=d(\sin x-\cos x)$ ，于是

$$I=\frac{2}{3}\left[\int\frac{d(x+\frac{\pi}{4})}{\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})}+\int\frac{d(\sin x-\cos x)}{1+(\sin x-\cos x)^2}\right]$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{3}\ln\left|\csc(x+\frac{\pi}{4})-\cot(x+\frac{\pi}{4})\right|+\frac{2}{3}\arctan(\sin x-\cos x)+C\text{ 。}$$

解法 2　利用“$1=\sin^2 x+\cos^2 x$”，将分子凑出分母中所含的因式，得

$$I=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{(\sin x+\cos x)(\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x)}dx$$

$$=\int\frac{(\sin x+\cos x)^2-2\sin x\cos x+2-2}{(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)}dx$$

$$=\int\frac{\sin x+\cos x}{1-\sin x\cos x}dx+2\int\frac{1-\sin x\cos x}{(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)}dx-2I$$

而 $$\int\frac{\sin x+\cos x}{1-\sin x\cos x}dx=2\int\frac{d(\sin x-\cos x)}{1+(\sin x-\cos x)^2}=2\arctan(\sin x-\cos x)+C_1$$

$$\int\frac{1-\sin x\cos x}{(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)}dx=\int\frac{dx}{\sin x+\cos x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sin(x+\frac{\pi}{4})}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\csc(x+\frac{\pi}{4})-\cot(x+\frac{\pi}{4})\right|+C_2$$

于是 $$I=\frac{\sqrt{2}}{3}\ln\left|\csc(x+\frac{\pi}{4})-\cot(x+\frac{\pi}{4})\right|+\frac{2}{3}\arctan(\sin x-\cos x)+C$$ 。

解法 3　利用 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ 以及 $(\sin x+\cos x)dx=d(\sin x-\cos x)$ 进行分项与整合。

$$I=\int\frac{(\sin x+\cos x)dx}{(\sin x+\cos x)^2(\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x)}$$

$$=\int\frac{d(\sin x-\cos x)}{(1+2\sin x\cos x)(1-\sin x\cos x)}$$

$$=\frac{2}{3}\int[\frac{1/2}{(1-\sin x\cos x)}+\frac{1}{(1+2\sin x\cos x)}]\,d(\sin x-\cos x)$$

$$=\frac{2}{3}\int\frac{d(\sin x-\cos x)}{1+(\sin x-\cos x)^2}+\frac{2}{3}\int\frac{d(\sin x-\cos x)}{2-(\sin x-\cos x)^2}$$

$$=\frac{2}{3}\arctan(\sin x-\cos x)+\frac{\sqrt{2}}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\sin x-\cos x}{\sqrt{2}-\sin x+\cos x}\right|+C$$ 。

解法 4　抓住 $\sin x$ 与 $\cos x$ 之间的关系，利用

$$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})，\quad \sin x-\cos x=-\sqrt{2}\cos(x+\frac{\pi}{4})$$

进行恒等变形，再分项积分。

$$I=\int\frac{dx}{(\sin x+\cos x)(\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x)}$$

$$=\int\frac{dx}{(\sin x+\cos x)\frac{[(\sin x-\cos x)^2+1]}{2}}=\sqrt{2}\int\frac{d(x+\frac{\pi}{4})}{\sin(x+\frac{\pi}{4})[2\cos^2(x+\frac{\pi}{4})+1]}$$

$$=\sqrt{2}\int\frac{dt}{\sin t(2\cos^2 t+1)}$$ （令 $t=x+\frac{\pi}{4}$ ）

$$=\sqrt{2}\int\frac{\sin tdt}{\sin^2 t(3-2\sin^2 t)}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\left[\int\frac{\sin tdt}{2\sin^2 t}+\int\frac{\sin tdt}{(3-2\sin^2 t)}\right]$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{3}\int\frac{dt}{\sin t}-\frac{\sqrt{2}}{3}\int\frac{d(\cos t)}{\cos^2 t+\frac{1}{2}}\quad=\frac{\sqrt{2}}{3}\ln\left|\frac{1-\cos(x+\frac{\pi}{4})}{\sin(x+\frac{\pi}{4})}\right|-\frac{2}{3}\arctan(\sqrt{2}\cos(x+\frac{\pi}{4}))+C\ 。$$

在本题的求解过程中，涉及到

$$\int\frac{1}{\sin x+\cos x}dx=\int\frac{1}{\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})}dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\csc(x+\frac{\pi}{4})-\cot(x+\frac{\pi}{4})\right|+C\ ;$$

因 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$，所以也容易求得 $\int\frac{1}{\sin^2 x+\cos^2 x}dx=x+C$ 。

那么，如何计算 $\int\frac{1}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx$ 呢？（可参见《微积分学（上）》P180 例 5（1））

$$\int\frac{1}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx=\int\frac{1}{\cos^4 x(\tan^4 x+1)}dx=\int\frac{u^2+1}{u^4+1}du$$ （令 $\tan x=u$ ）

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{u^2-1}{\sqrt{2}u}+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan^2 x-1}{\sqrt{2}\tan x}+C.$$

进一步，还可得到

$$\int\frac{dx}{\sin^6 x+\cos^6 x}=\int\frac{dx}{(\sin^2 x+\cos^2 x)(\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x)}$$

$$=\int\frac{\sec^2 x}{\tan^4 x-\tan^2 x+1}d(\tan x)=\int\frac{\tan^2 x+1}{\tan^4 x-\tan^2 x+1}d(\tan x)$$

$$=\int\frac{1+\tan^{-2} x}{\tan^2 x+\tan^{-2} x-1}dx=\int\frac{d(\tan x-\tan^{-1} x)}{(\tan x-\tan^{-1} x)^2+1}=\arctan(\tan x-\tan^{-1} x)+C\ 。$$

（另解见韩老师课件）

在吉米多维奇的习题集上还有如下题目：

$$\int\frac{\sin xdx}{\sin^3 x+\cos^3 x}\ ;\quad\int\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx\ ;\quad\int\frac{\sin^2 x\cos^2 x}{\sin^8 x+\cos^8 x}dx\ ;\quad\int\frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}dx\ .$$