第二届北京市大学生数学竞赛题：

设 $f(x)$ 定义在长度不小于 2 的闭区间上，且满足 $|f(x)|\le 1$，$|f''(x)|\le 1$，证明：$|f'(x)|\le 2$。

证 不失一般性，设 $f(x)$ 定义在 $[-1,1]$ 上，由泰勒公式

$$f(1)=f(x)+f'(x)(1-x)+\frac{1}{2}f''(\xi)(1-x)^2,\quad \xi\in(x,1),$$

$$f(-1)=f(x)+f'(x)(-1-x)+\frac{1}{2}f''(\eta)(-1-x)^2,\quad \eta\in(-1,x),$$

因此 $$f(1)-f(-1)=2f'(x)+\frac{1}{2}f''(\xi)(1-x)^2-\frac{1}{2}f''(\eta)(1+x)^2,$$

由条件 $|f(x)|\le 1, |f''(x)|\le 1$，得

$$2|f'(x)|\le |f(1)|+|f(-1)|+|\frac{1}{2}f''(\xi)(1-x)^2|+|\frac{1}{2}f''(\eta)(1+x)^2|$$

$$\le 2+\frac{1}{2}(1-x)^2+\frac{1}{2}(1+x)^2=3+x^2\le 4,$$

所以 $|f'(x)|\le 2$。

相关问题：

（1）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，$f(0)=f(1)$，且 $|f''(x)|\le 2$。证明：当 $x\in[0,1]$ 时，$|f'(x)|\le 1$。

（2）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，$f(0)=f(1)$，且当 $x\in(0,1)$ 时，$|f''(x)|\le A$。证明：$|f'(x)|\le \frac{A}{2}$。

（3）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且满足 $|f(x)|\le a$，$|f''(x)|\le b$，其中 a,b 为非负常数，c 为 $(0,1)$ 内任意一点，证明：$|f'(c)|\le 2a+\frac{b}{2}$（练习 4-37，第六届预赛题）

（4）设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上二阶可导，且当 $x\in[0,2]$ 时，$|f(x)|\le 1$，$|f''(x)|\le 1$。证明：当 $x\in[0,2]$ 时，$|f'(x)|\le 2$。