例1 设$f(x)$在$(0,+\infty)$上连续，且满足条件

$$f\left(x^2\right)=f(x)\ \ (x>0)$$

证明：$f(x)$为一常数。

分析：考虑关系，如果是

$$f(x)=f\left(x^2\right)=f\left(x^4\right)=\cdots$$

无论$x>1$还是$x<1$，x^{2^n}的极限都不在$(0,+\infty)$内！

证明：对任意$x \in (0, +\infty)$，依题意有

$$f(x) = f\left(\sqrt{x}\right) = f\left(\sqrt[4]{x}\right) = \cdots = f\left(\sqrt[2^n]{x}\right)$$

令$n \to +\infty$，有

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[2^n]{x} = 1$$

由$f(x)$在$x = 1$点连续，得

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} f\left(\sqrt[2^n]{x}\right) = f(1)$$

证毕。

设$f(x)$在$(0,+\infty)$上有定义，且满足条件

$$f\left(x^2\right)=f(x)\ \ (x>0)$$

问：$f(x)$是否必为一常数?

例2 设$f(x)$在(a,b)内只有第一类间断点，且对任意$\forall x,y\in(a,b)$有

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leq\frac{f(x)+f(y)}{2}$$

求证：$f(x)$在(a,b)内连续。

分析：条件似乎很少

条件已经很强

1）(a,b)内没一点都有定义

2）第一类间断点

$\forall x_0 \in (a, b) \quad h > 0$ small enough

$x_0 + h, x_0 - h \in (a, b)$

$$f(x_0) = f\left(\frac{x_0 + h + x_0 - h}{2}\right)$$

$$\leq \frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h)}{2}$$

$$f(x_0) \leq \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}$$

$$f\left(\frac{x_0+h+x_0}{2}\right) \le \frac{f(x_0+h)+f(x_0)}{2}$$

$$f(x_0+0) \le f(x_0)$$

$$f\left(\frac{x_0-h+x_0}{2}\right) \le \frac{f(x_0-h)+f(x_0)}{2}$$

$$f(x_0-0) \le f(x_0)$$

确界

上确界：一个有上界的集合M的最小上界称为该集合的上确界，记为$\sup M$

例 $\left\{-1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{3},\cdots,-\frac{1}{n},\cdots\right\}$

$M=\{x|x<\sqrt{2},x\text{为有理数}\}$

刻画：1）$x\le\sup M,\forall x\in M$

2）$\forall\varepsilon>0,\exists x\in M,\sup M<x+\varepsilon$

下确界：一个有下界的集合$\boldsymbol{M}$的最小上界称为该集合的下确界，记为 $\inf \boldsymbol{M}$

例 $\{\mathbf{1}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}, \cdots, \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}, \cdots\}$

$\boldsymbol{M} = \{\boldsymbol{x} | \boldsymbol{x} > \boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{x}\text{为有理数}\}$

刻画：1）$\boldsymbol{x} \geq \inf \boldsymbol{M}, \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{M}$

2）$\forall \boldsymbol{\varepsilon} > \mathbf{0}, \exists \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{M}, \inf \boldsymbol{M} > \boldsymbol{x} - \boldsymbol{\varepsilon}$

确界存在定理:

任何一个有上（下）界的实数集都存在上（下）确界。

注：确界存在定理⇔单调有界数列必有极限

连续

二、性质

1. 介值性质

2. 最值性质

3. 定义本身：极限可达性

例3 设为$f(x)$: $[0,1] \to [0,1]$连续函数，$f(0)=0$，$f(1)=1$，$f\big(f(x)\big)=x$。试证：$f(x)=x$。

分析：结合图形

证明：反证法。若不然，则存在$x_0 \in (0,1)$使得

$$f(x_0) > x_0 \text{或} f(x_0) < x_0$$

不妨假设$f(x_0) > x_0$。考虑集合

$$M_a = \{a \in [0, x_0] | f(x) > x, \forall x \in (a, x_0)\}$$

$$M_b = \{b \in (x_0, 1] | f(x) > x, \forall x \in (x_0, b)\}$$

由连续性，存在$\delta > 0$，使得

$$f(x) > x, \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (0,1)$$

故M_a, M_b均非空且有界，由确界存在定理，存在

$$\alpha = \inf M_a, \beta = \sup M_b$$

显然$\alpha, \beta \in [0,1]$，并且对$x \in (\alpha, \beta)$有$f(x) > x$。（为什么？）

由连续性，易知$f(\alpha) = \alpha, f(\beta) = \beta$。

接下来，我们首先说明
$\forall x \in (\alpha,\beta), f(x) \in (\alpha,\beta)$。

若不然，则存在$x_1 \in (\alpha,\beta)$使得
$f(x_1) = \beta$，(为什么)
由题意

$$\beta = f(\beta) = f\big(f(x_1)\big) = x_1$$

矛盾。

既然$\forall x \in (\alpha, \beta), f(x) \in (\alpha, \beta)$，由$\alpha, \beta$的定义即知

$$f\big(f(x)\big) > f(x)$$

另一方面，依题意

$$f\big(f(x)\big) = x$$

从而，当$x \in (\alpha, \beta)$时

$$x > f(x)$$

矛盾！

综上，$f(x) = x, \forall x \in [0, 1]$。

例4 设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，$f(0)=f(1)$。则对任意自然数$n\geq 2$，存在$\xi\in[0,1-\frac{1}{n}]$使得

$$f\left(\xi+\frac{1}{n}\right)=f(\xi)$$

分析：自然的想法是令

$$g(x)=f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)$$

$$g(0)=f\left(\frac{1}{n}\right)-f(0),g\left(1-\frac{1}{n}\right)=f(1)-f(1-\frac{1}{n})$$

证明：若不然，由连续性，有对所有$x \in [0, 1-\frac{1}{n}]$

$$f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)>0\text{或}f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)<0$$

不妨设$f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)>0$。于是由连续性

$$f\left(\frac{1}{n}\right)-f(0)>0$$

$$f\left(\frac{2}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n}\right)>0$$

$$\cdots$$

$$f(1)-f\left(1-\frac{1}{n}\right)>0$$

求和，得

$$\boldsymbol{f(1)-f(0)>0}$$

矛盾！证毕。

例5 设$\boldsymbol{f(x)}$在$\left[\boldsymbol{0},\frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{2}}\right]$上连续，

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x\,dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x\,dx=0$$

试证：$\boldsymbol{f(x)}$在$\left(\boldsymbol{0},\frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{2}}\right)$内至少有两个不同的零点。

分析：利用积分中值定理，一个零点存在性容易得到。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x\,dx = 0 \Longrightarrow f(\xi_1) = 0$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x\,dx = 0 \Longrightarrow f(\xi_2) = 0 \ ?$$

考察函数$f(x)$在$(0,\xi_1)$以及$(\xi_1,\frac{\pi}{2})$是否有零点。

如果除ξ_1点之外再无零点，那么依照连续性质，函数值在$(0,\xi_1)$同号，在$(\xi_1,\frac{\pi}{2})$内也同号，并且在这两个区间内的函数值是异号的。

考察积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin(x-\xi_1)\,dx = 0$$

而另一方面$f(x)\sin(x-\xi_1)$在$(0,\xi_1)$以及$(\xi_1,\frac{\pi}{2})$内要么都大于零，要么都小于零。矛盾。

导数

一、一元函数的导数

导数定义及单侧导数定义

求导规则：复合函数求导链式规则

参数方程求导法则

隐函数求导法则

二、多元函数的偏导数

偏导数的定义及本质

方向导数定义与计算

导数是什么?

导数本质上也是一种分析问题的方式:
局部线性化

导数刻画函数的性质（由李老师介绍）

三、举例

1. 定义及简单规则求导

例1 已知$\begin{cases} x=\ln\left(1+e^{2t}\right) \\ y=t-\arctan e^{t} \end{cases}$，求$\frac{d^2y}{dx^2}$。（第二届决赛）

解：$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1-\frac{e^t}{1+e^{2t}}}{\frac{2e^{2t}}{1+e^{2t}}}=\frac{1-e^{-t}+e^{-2t}}{2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{\frac{dy}{dx}}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{1}{2}e^{-t}-e^{-2t}}{\frac{2e^{2t}}{1+e^{2t}}}$$

$$=\frac{1}{4}(e^{-t}-2e^{-2t}+e^{-3t}-2e^{-4t})$$

例2 求证：在实轴上不存在可微函数$f(x)$，使其满足

$$f(f(x)) = -x^3 + x^2 + 1$$

证明：若存在这样的函数$f(x)$。则有

$$f(-x^3 + x^2 + 1) = f\left(f(f(x))\right) = -f^3(x) + f^2(x) + 1$$

取$x = 1$，有

$$f(1) = -f^3(1) + f^2(1) + 1$$

易得$f(1) = 1$。

对$f(f(x)) = -x^3 + x^2 + 1$ 两边求导

$$f'\big(f(x)\big)f'(x) = -3x^2 + 2x$$

令$x = 1$，则有

$$f'\big(f(1)\big)f'(1) = f'(1)f'(1) = -1$$

矛盾！证毕。

例3 设$f(x)$在$(-\delta,\delta)$内有定义，对任意$x,y\in(-\delta,\delta)$，有$f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$.又$f(x)$在$x=0$处可导，且$f'(0)=1$。求$f'(x)$及$f(x)$。

分析：首先易得$f(0)=0$

然后，考虑固定x，用定义讨论$f'(x)$

$$f'(x)=\lim_{y\to 0}\frac{f(x+y)-f(x)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}-f(x)}{y}$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{1+f^2(x)}{1-f(x)f(y)}\cdot\frac{f(y)}{y}=\left(1+f^2(x)\right)f'(0)$$

例 设函数$y=y(x)$由方程$x=\int_1^{y-x}\left(\sin\frac{\pi t}{4}\right)^2 dt$所确定，求$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=$ ________（第六届预赛）

分析：隐函数求导数问题

$$F(x,y)=x-\int_1^{y-x}\left(\sin\frac{\pi t}{4}\right)^2 dt$$

$$F_x=1+\left(\sin\frac{\pi(y-x)}{4}\right)^2 \quad F_y=-\left(\sin\frac{\pi(y-x)}{4}\right)^2$$

$$x = 0$$

$$0 = \int_1^y \left(\sin\frac{\pi t}{4}\right)^2 dt \qquad y = 1$$

$$y'\Big|_{x=0} = -\frac{F_x(0,1)}{F_y(0,1)} = 3$$

例4 设$f(u,v)$具有连续偏导数，且满足

$$f_u(u,v)+f_v(u,v)=uv$$

求$y(x)=e^{-2x}f(x,x)$所满足的一阶微分方程，并求其通解。（第四届决赛）

解：对$y(x)$求导数，得

$$y'(x)=-2e^{-2x}f(x,x)+e^{-2x}(f_u(x,x)+f_v(x,x))$$

即

$$y'(x)=-2y(x)+e^{-2x}x^2$$

通解为 $$y=\left(\frac{x^3}{3}+C\right)e^{-2x}$$

2. 高阶导数计算举例

1） Taylor系数计算（略）

2） 数学归纳法（略）

3） 寻找递推关系

例1 设$y=(\arcsin x)^2$

1. 证明: $\left(1-x^2\right)y''-xy'=2$;

2. 证明: $\left(1-x^2\right)y^{(n+2)}-(2n+1)xy^{(n+1)}-n^2y^{(n)}=0$, $n\geq 1$;

3. 证明: $y^{(n+2)}(0)=n^2y^{(n)}(0)$;

4. 求$y^{(n)}(0)$.