微积分（一）下第 10 周第二次课作业答案与提示

（平面曲线积分与路径无关条件等）

1. 填空：

1）设 L 是从 $A(0,0)$ 到 $B(b,b)$ 的曲线弧，则 $\int_L dx+dy=\underline{2b}$.

2）设 L 是沿曲线 $x^2+y^2=R^2, y\geq 0$ 从 $(-R,0)$ 到 $(R,0)$，则 $\int_L \frac{dx+dy}{x^2+y^2}=\underline{\frac{2}{R}}$.

3）设 L 是从 $A(a_1,b_1)$ 到 $B(a_2,b_2)$ 的曲线弧，则 $\int_L ydx+xdy=\underline{a_2b_2-a_1b_1}$.

4）设 L 是曲线 $x^2+y^2=R^2, x>0, y>0$，则 $\int_L \{x,y\}\cdot \boldsymbol{dr}=\underline{0}$.

5）若 $\frac{(ax+y)dx-(x-y+b)dy}{x^2+y^2}$ 为某函数 $u(x,y)$ 的全微分，则

$a=\underline{1}$，$b=\underline{0}$，$u(x,y)=\underline{\frac{\ln(x^2+y^2)}{2}+\arctan\frac{x}{y}}$.

6）积分 $\int_{(-2,1)}^{(3,0)}(x^4+4xy^3)dx+(6x^2y^2-5y^4)dy=\underline{48}$.

2. 计算 $I=\int_L(1+3x^2y-2y)dx+(x^3-2x)dy$，其中 L 从点 $A(1,0)$ 按逆时针方向沿圆周 $x^2+y^2=1$ 到达点 $B(0,1)$，再沿直线 $y=1+x$ 到点 $E(-1,0)$. 答案：-2

3. 设 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有连续导数，L 是从 $A(3,\frac{2}{3})$ 到 $B(1,2)$ 的直线段，计算

$I=\int_L \frac{1+y^2f(xy)}{y}dx+\frac{x}{y^2}\left[y^2f(xy)-1\right]dy$. 答案：$-4$

4. 计算 $I=\int_L(3xy+\sin x)dx+(x^2-ye^y)dy$, 其中 L 是曲线 $y=x^2-2x$ 上以 $O(0,0)$ 为起点, $A(4,8)$ 为终点的弧段. 答案：$\frac{448}{3}-\cos 4-7e^8$.

5. 证明下列方程是全微分方程,并求其通解：

（1）$(3x^2+6xy^2)dx+(6x^2y+4y^2)dy=0$；（2）$e^y dx+(xe^y-2y)dy=0$.

答案：通解为 $x^3+3x^2y^2+\frac{4}{3}y^3=C$.

答案：通解为 $xe^y-y^2=C$.