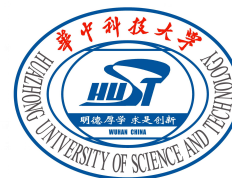


一类分母为平方的分式的不定积分

制作人：吴洁

数学与统计学院



问题:

$$1. \int \frac{\cos x + x \sin x}{(x + \cos x)^2} dx$$

$$2. \int \frac{x + \sin x \cos x}{(\cos x - x \sin x)^2} dx$$

被积函数的特点:

(1) 既含有三角函数, 又含有 x ;

(2) 分母出现了平方.

回顾

如果 $f(x), g(x)$ 均可导, 且 $g(x) \neq 0$,

$$\text{则 } \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

$$\text{以及 } \int F'(x) dx = F(x) + C$$

$$1. \int \frac{\cos x + x \sin x}{(x + \cos x)^2} dx$$

解:

$$\text{因 } \left(\frac{x}{x + \cos x} \right)' = \frac{\cos x + x \sin x}{(x + \cos x)^2}$$

$$\text{故 } \int \frac{\cos x + x \sin x}{(x + \cos x)^2} dx = \frac{x}{x + \cos x} + C$$

$$\text{考察 } \left(\frac{x}{x + \cos x} \right)'$$

$$= \frac{x + \cos x - x + x \sin x}{(x + \cos x)^2}$$

$$2. \int \frac{x + \sin x \cos x}{(\cos x - x \sin x)^2} dx$$

解：恒等变形

$$\frac{x + \sin x \cos x}{(\cos x - x \sin x)^2} = \frac{x \sec^2 x + \tan x}{(1 - x \tan x)^2}$$

$$\text{因 } \left(\frac{1}{1 - x \tan x} \right)' = \frac{\tan x + x \sec^2 x}{(1 - x \tan x)^2}$$

$$\text{故 } \int \frac{x + \sin x \cos x}{(\cos x - x \sin x)^2} dx = \frac{1}{1 - x \tan x} + C$$

$$\left(\frac{1}{\cos x - x \sin x} \right)' = \frac{2 \sin x + x \cos x}{(\cos x - x \sin x)^2}$$

$$\left(\frac{x}{\cos x - x \sin x} \right)'$$

$$= \frac{\cos x - x \sin x + x(2 \sin x + x \cos x)}{(\cos x - x \sin x)^2}$$

$$\frac{x + \sin x \cos x}{(\cos x - x \sin x)^2} = \frac{x + \sin x \cos x}{\cos^2 x (1 - x \tan x)^2}$$

$$= \frac{x \sec^2 x + \tan x}{(1 - x \tan x)^2}$$

$$\left(\frac{1}{1 - x \tan x} \right)' = \frac{\tan x + x \sec^2 x}{(1 - x \tan x)^2}$$

小结:

积分与求导互为逆运算。当被积函数具有某种特征时，
可以逆向思考，考察被积函数是哪个函数求导的结果。

练习题

$$1. \int \frac{f(x) - xf'(x)}{f^2(x)} dx; \quad 2. \int \frac{1 - \ln x}{(x - \ln x)^2} dx.$$