第十二届数学竞赛模拟题(4)解答

一、求解下列各题（每小题 6 分，共 30 分）

1、设 $x_n=\dfrac{1}{n+1^\alpha}+\dfrac{1}{n+2^\alpha}+\cdots+\dfrac{1}{n+n^\alpha}\ (\alpha>1)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解　利用不等式 $n+k^\alpha\ge 2\sqrt{n}\cdot k^{\alpha/2}$ 有 $0<x_n\le\dfrac{1}{2\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^{\alpha/2}}$.

应用Stolz定理计算

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\alpha/2}}}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)^{\alpha/2}}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{(n+1)^{\alpha/2}}=0\quad(\alpha>1),$$

由迫敛性得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

2、求 $I=\iint\limits_S(ax+by+cz+d)^2dS$，其中 $S:x^2+y^2+z^2=R^2$

解:　由对称性与奇偶性以及轮换对称性,有

$$I=\iint\limits_S(ax+by+cz+d)^2dS=\iint\limits_S d^2dS+\iint\limits_S(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)dS$$

$$=d^2\cdot4\pi R^2+(a^2+b^2+c^2)\iint\limits_S x^2dS=d^2\cdot4\pi R^2+\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)\iint\limits_S(x^2+y^2+z^2)dS$$

$$=d^2\cdot4\pi R^2+\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)\iint\limits_S R^2dS=d^2\cdot4\pi R^2+\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)R^2 4\pi R^2$$

$$=4\pi R^2[d^2+\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)R^2].$$

3、设 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{cx\int_0^{x^2}e^{t^2}dt}=\int_e^\infty\dfrac{dx}{x(\ln x)^2}$，确定常数 a,b,c.

解　右边 $=\left.\dfrac{-1}{\ln x}\right|_e^{+\infty}=1$，注意 $\int_0^{x^2}e^{t^2}dt=\int_0^{x^2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{t^{2n}}{n!}dt=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{4n+2}}{(2n+1)n!}\sim x^2(x\to0)$，

$$左式=\lim_{n\to\infty}\frac{\left[x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right]-ax-bx^2}{cx^3},$$

当 $a=1$，$b=-\dfrac{1}{2}$，$c=\dfrac{1}{3}$ 时，等式成立.

4、设 $z(x,y)=xyf(\frac{x+y}{xy})$，且 f 可微，$z(x,y)$ 满足方程

$$x^2z_x-y^2z_y=g(x,y)z\ ,$$

求函数 $g(x,y)$.

解　$z_x=y\cdot f+xy\cdot f'\cdot\frac{-1}{x^2}$，$z_y=x\cdot f+xy\cdot f'\cdot\frac{-1}{y^2}$，有

$$x^2z_x-y^2z_y=(x-y)xyf=(x-y)z$$

所以 $g(x,y)=x-y$.

5、判别积分 $I=\int_1^{+\infty}\frac{\ln\cos\frac{1}{x}}{x^p}dx$ 的敛散性.

解：因为 I 中的被积函数是负值所以只需看广义积分

$$-I=\int_1^{+\infty}-\frac{\ln\cos\frac{1}{x}}{x^p}dx$$ 的敛散性.将被积函数写为

$$-\frac{\ln\cos\frac{1}{x}}{x^p}=-\frac{\ln\left[1-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]}{x^p}=-\frac{-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x^p}$$
$$=\frac{1}{2x^{2+p}}+o\left(\frac{1}{x^{2+p}}\right)$$

从而我们有

$$-\frac{\ln\cos\frac{1}{x}}{x^p}\sim\frac{1}{2x^{2+p}}$$

所以 $2+p>1$ 或 $p>-1$ 时，I 收敛；当 $p\le -1$ 时，I 发散.

二、(14 分) 设 $f(x),x\in(-\infty,+\infty)$ 连续，$g(x),x\in(-\infty,+\infty)$ 为正值可微函数且 $g'(x)<0,\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$.若 $\int_a^{+\infty}f(x)g(x)dx$ 收敛，证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)\int_a^x f(t)dt=0$.

证　记 $\int_a^{+\infty}f(x)g(x)dx=A$ (有限数)，这里 $x\to+\infty$ 时，$g(x)$ 为单减趋于零，$\frac{1}{g(x)}$ 为单增趋于 $+\infty$.而

$$\int_a^x f(t)dt=\int_a^x \frac{1}{g(t)} d\int_a^t f(s)g(s)ds$$ （应用分部积分法）

$$=\frac{1}{g(x)}\int_a^x f(t)g(t)dt-\int_a^x (\int_a^t f(s)g(s)ds)\cdot(\frac{1}{g(t)})'dt$$

故 $$\lim_{x\to+\infty} g(x)\int_a^x f(t)dt=\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)g(t)dt-\lim_{x\to+\infty} g(x)\int_a^x (\int_a^t f(s)g(s)ds)(\frac{1}{g(t)})'dt$$

$$=A-\lim_{x\to\infty}\frac{\int_a^x (\int_a^t f(s)g(s)ds)\cdot(\frac{1}{g(t)})'dt}{\frac{1}{g(x)}}$$ （应用洛必达法则）

$$=A-\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)g(t)dt=A-A=0 .$$

注 这是 Kronecker 引理的积分形式.

其特殊情况为：(2010 决赛)设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，$\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，求 $\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{1}{y}\int_0^y xf(x)dx$.

其离散形式为：(2019 决赛)设 $\{u_n\}$ 正值单减趋于零，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n u_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(a_1+a_2+\cdots+a_n)=0$.

证明关键是对 $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k=\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k u_k)\frac{1}{u_k}$ 应用 Abel 求和公式，并应用 Stolz 公式计算极限.

三、(14 分)对连续非负函数 $f(x)$，记 $\mu_n=\int_0^1 x^n f(x)dx$. 证明: $\mu_{n+1}\mu_0\ge\mu_n\mu_1$.

证 记 $D=\left[0,1;0,1\right]$，则

$$I=\mu_{n+1}\mu_0-\mu_n\mu_1=\int_0^1 x^{n+1}f(x)dx\int_0^1 f(x)dx-\int_0^1 x^n f(x)dx\int_0^1 xf(x)dx$$

$$=\iint_D x^{n+1}f(x)f(y)dxdy-\iint_D x^n yf(x)f(y)dxdy$$

$$=\iint_D x^n(x-y)f(x)f(y)dxdy$$ （由轮换对称性）

$$=\iint_D y^n(y-x)f(x)f(y)dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\iint_D (x-y)(x^n-y^n)f(x)f(y)dxdy \ge 0 .$$

注 这是关于矩的不等式，同样有 $\mu_{n+1}/\mu_n \ge \mu_n/\mu_{n-1}$. 它们可作为**切比雪夫不等式**的特例.

(切比雪夫不等式)设 $p(x)$ 为连续非负函数， $f(x),g(x)$ 为同单调的即

$\forall x_1,x_2$，有 $[f(x_1)-f(x_2)][g(x_1)-g(x_2)]\ge 0$.

则 $$\int_a^b f(x)g(x)p(x)dx\int_a^b p(x)dx \ge \int_a^b f(x)p(x)dx\int_a^b g(x)p(x)dx .$$

四、(14 分)设对于半空间 $x>0$ 内任意的光滑有向封闭曲面 S，都有

$$\oiint_S xf(x)dydz - xyf(x)dzdx - e^{2x}zdxdy = 0 ,$$

其中函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内具有连续的一阶导数，且 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$，求 $f(x)$.

解 由 Gauss 公式得

$$0=\oiint_S xf(x)dydz - xyf(x)dzdx - e^{2x}zdxdy \ =\pm\iiint_\Omega [xf'(x)+(1-x)f(x)-e^{2x}]dv ,$$

在 $x>0$ 内有 $f'(x)+\dfrac{1-x}{x}f(x)=\dfrac{e^{2x}}{x}$，因此

$$f(x)=\frac{1}{x}e^x(e^x+C) ,$$

用条件 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$ 得 $C=-1$，从而 $f(x)=\dfrac{1}{x}e^x(e^x-1)$.

五、(14 分)设 Σ 表示球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 位于柱面 $x^2+y^2=x$ 内、平面 $z=0$ 上方的部分，取外侧. 计算 $I=\iint\limits_\Sigma x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$.

解 应用统一投影法

$$I=\iint_\Sigma \{x^2\cdot(-z_x)+y^2\cdot(-z_y)+z^2\}dxdy$$

$$=\iint_\Sigma \{\frac{x^3}{z}+\frac{y^3}{z}+z^2\}dxdy \qquad （D: x^2+y^2\le x）$$

$$=\iint_D (\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2-y^2}}+\frac{y^3}{\sqrt{1-x^2-y^2}}+1-x^2-y^2)d\sigma$$

$$=\iint_D (\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2-y^2}}+1-x^2-y^2)d\sigma$$

$$=2\int_0^1 dr\int_0^{\arccos r}\frac{r^4\cos^3\theta}{\sqrt{1-r^2}}d\theta+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\cos\theta}(r-r^3)dr$$ (计算关键)

$$=\frac{38}{105}+\frac{5\pi}{32}.$$

六、 (14 分)设 $f(x)$ 为正值单调减少函数，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x f(e^x)}{f(x)}=\lambda$，试证（1）$\lambda<1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$ 收敛；（2）$\lambda>1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$ 发散.

证 令 $x_0=1, x_1=e, x_2=e^{x_1},\cdots,x_{n+1}=e^{x_n},\cdots$，则 $\{x_n\}$ 单调增加趋于正无穷大.

(1) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x f(e^x)}{f(x)}=\lambda<1$，取 $q:\lambda<q<1$. 由极限的比较性质知 $\exists A$，当 $x>A$ 时

$$\frac{e^x f(e^x)}{f(x)}<q\text{ ,即 }e^x f(e^x)<qf(x).$$

于是 $n>A$ 时必有

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n}e^x f(e^x)dx<q\int_{x_{n-1}}^{x_n}f(x)dx.$$

对上式左端之积分作变量代换就是 $\int_{x_n}^{x_{n+1}}f(x)dx$，因此

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}}f(x)dx<q\int_{x_{n-1}}^{x_n}f(x)dx,$$

如此 $\sum\int_{x_n}^{x_{n+1}}f(x)dx$ 必收敛.(记 $\int_{x_{n-1}}^{x_n}f(x)dx=a_n$，有 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}<\dfrac{q^{n+1}}{q^n}$，而等比级数 $\sum q^n$ 收敛，由比较定理即得）

这样 $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，进一步有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$ 收敛. (积分判别法)

(2) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x f(e^x)}{f(x)}=\lambda>1$，则知 $\exists A$，当 $x>A$ 时 $e^x f(e^x)>f(x)$.

当 $n>A$ 时必有 $\int_{x_{n-1}}^{x_n}e^x f(e^x)dx>\int_{x_{n-1}}^{x_n}f(x)dx$， 也就是

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}}f(x)dx>\int_{x_{n-1}}^{x_n}f(x)dx.$$

如此 $\sum\int_{x_n}^{x_{n+1}}f(x)dx$ 必发散，进一步有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$ 发散.

注 这是正项级数的厄玛珂夫判别法！