



数学建模

Power Electronics
Mathematical Modeling



"电力电子数学建模的途径" Power Electronics Mathematical Modeling

电力电子电路往往分为线性区和开关切换区。线性区主要由电源、电阻、电感、电容等构成，线性区各处电压和电流关系用基尔霍夫定律表示，开关切换区在引入开关状态数学模型后也可以用同样的矩阵式得到输入输出电压电流关系，联立两区即建立时域数学模型。对非直流状态下的变换器，我们常使用同步旋转（如 dq 变换）在旋转坐标系下观察，以期将交流转为直流量进行进一步的控制，避免静差。

| 基尔霍夫定律

| 开关数学建模

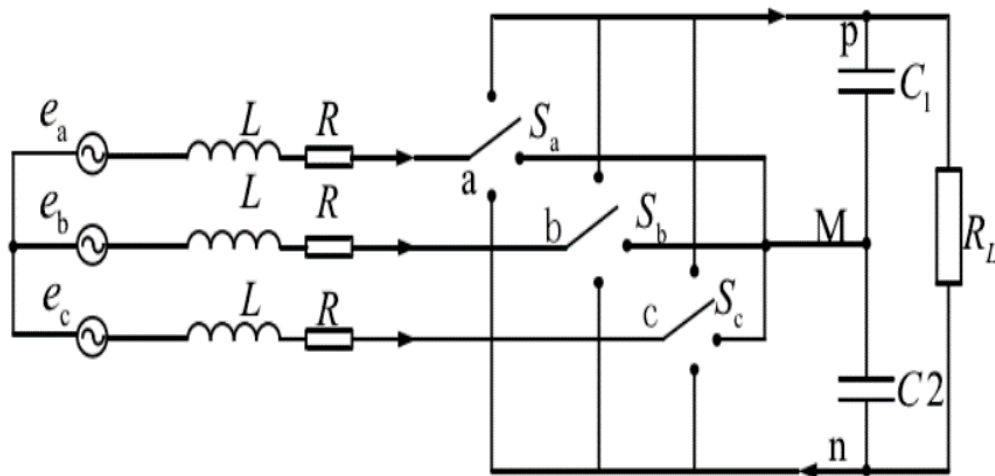
| 同步旋转坐标系

 关键词"
The keywords

用数学的手段去分析关键参数的关系，以期对分析控制提供帮助。

Analyze the relationship of key parameters through mathematical methods, thus providing assistance in analyzing and controlling the circuit.

维也纳整流电路建模假设

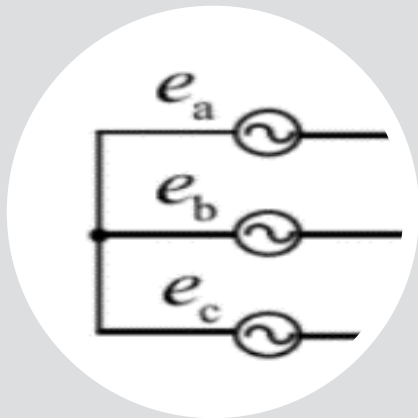


- 1.网侧输入为三相正弦电压
- 2.输入滤波电感 L 看作线性电感, 不考虑磁饱和
- 3.功率开关管看作理想开关, 忽略其导通压降
- 4.直流侧两电容完全相同, 无等效电阻
- 5.开关频率远大于交流侧基波频率
- 6.控制策略三相对称



对称假设

Symmetry assumption.

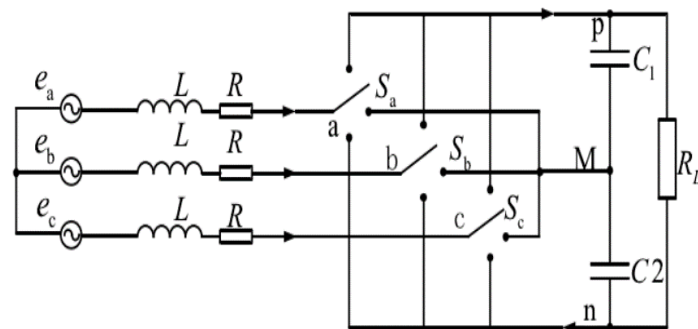


$$e_a + e_b + e_c = 0$$

$$i_a + i_b + i_c = 0$$



输入电压完全对称。
零线（如果存在）无电流



$$\begin{aligned} u_{MN} &= -\frac{1}{3}(e_a + e_b + e_c - 3e_M) \\ &= -\frac{1}{3}(u_{aM} + u_{bM} + u_{cM}) \end{aligned}$$



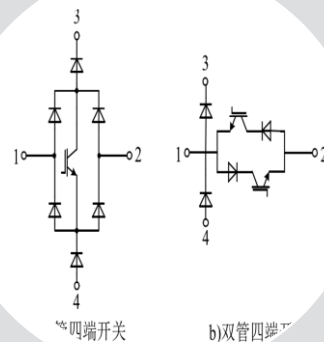
可以推导得到输出中点电压值关系。





开关假设

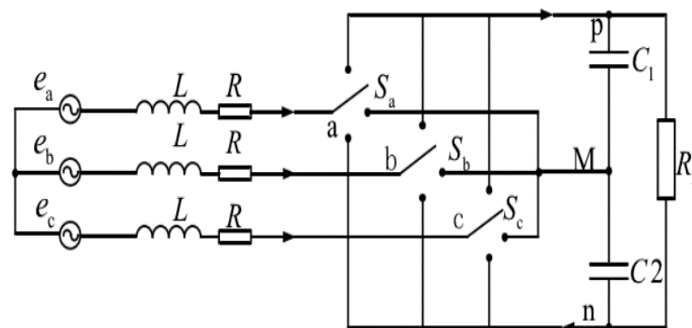
Symmetry assumption.



$$S_i = \begin{cases} p & S_i \text{ 关断} & i_i > 0 \\ z & S_i \text{ 导通} & \\ n & S_i \text{ 关断} & i_i < 0 \end{cases}$$



开关有三个状态，类似单刀三掷开关



S_{ap} 、 S_{az} 、 S_{an} ...

引入了9个变量，如上式所示，当“开关”连通到对应位置时变量值为1，否则为0.



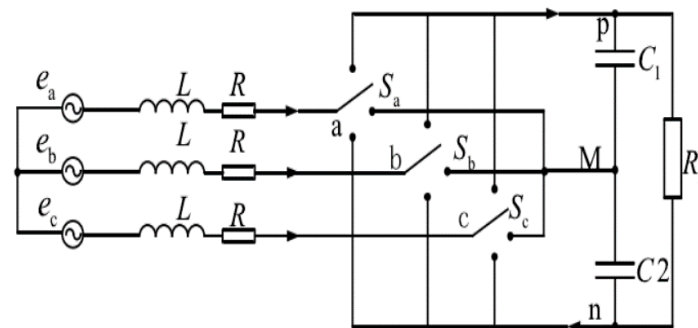
输入侧建模

Input-side modeling

$$\begin{cases} L \frac{di_a}{dt} + Ri_a + u_{aM} + u_{MN} = e_a \\ L \frac{di_b}{dt} + Ri_b + u_{bM} + u_{MN} = e_b \\ L \frac{di_c}{dt} + Ri_c + u_{cM} + u_{MN} = e_c \end{cases}$$



基尔霍夫电压定律x3





输出侧建模

Output-side modeling

$$\begin{cases} i_p - C \frac{du_{dc1}}{dt} - i_L = 0 \\ i_n - C \frac{du_{dc1}}{dt} - i_L = 0 \\ i_m + C \frac{du_{dc1}}{dt} - C \frac{du_{dc1}}{dt} = 0 \end{cases}$$



基尔霍夫电流定律x3，值得注意电流方向

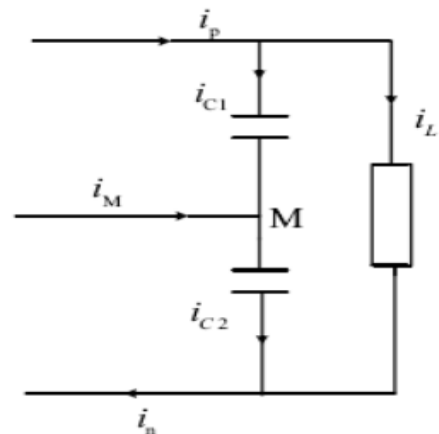
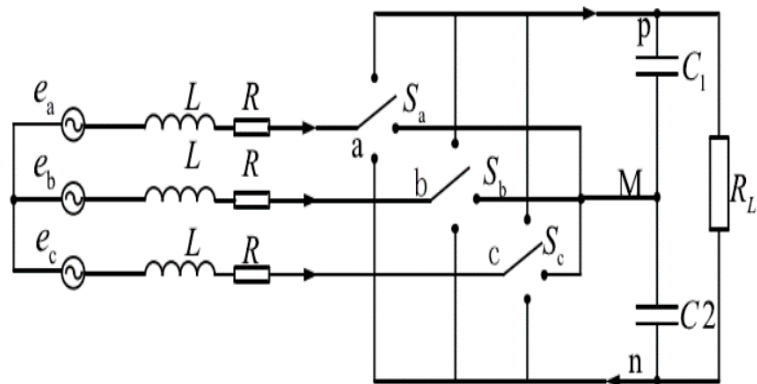


图 2.8 直流侧电流方向规定

Fig.2.8 The direction of current flow



开关处建模

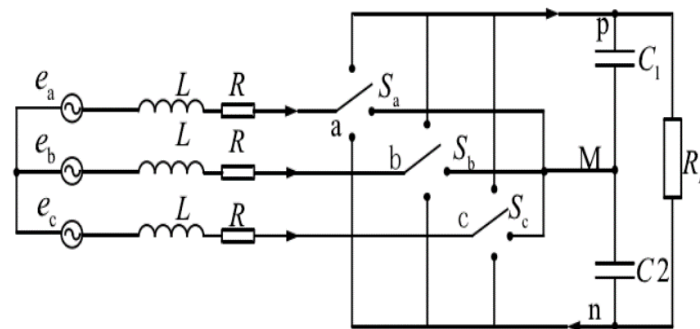
Switches Modeling

$$\begin{cases} u_{aM} = S_{ap}u_{dc1} - S_{an}u_{dc2} \\ u_{bM} = S_{bp}u_{dc1} - S_{bn}u_{dc2} \\ u_{cM} = S_{cp}u_{dc1} - S_{cn}u_{dc2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_p = S_{ap}i_a + S_{bp}i_b + S_{cp}i_c \\ i_n = S_{an}i_a + S_{bn}i_b + S_{cn}i_c \\ i_m = S_{am}i_a + S_{bm}i_b + S_{cm}i_c \end{cases}$$



通过Sij巧妙的将开关状态和电路模型结合起来，易于计算。



$$e_a + e_b + e_c = 0$$

$$u_{MN} = -\frac{1}{3} [(S_{ap} + S_{bp} + S_{cp})u_{dc1} - (S_{an} + S_{bn} + S_{cn})u_{dc2}]$$



左式与三相电压对称方程联立，我们可以得到 u_{MN}



$$\begin{cases} L \frac{di_a}{dt} + Ri_a + u_{aM} + u_{MN} = e_a \\ L \frac{di_b}{dt} + Ri_b + u_{bM} + u_{MN} = e_b \\ L \frac{di_c}{dt} + Ri_c + u_{cM} + u_{MN} = e_c \end{cases} \quad 3$$

$$\begin{cases} i_p - C \frac{du_{dc1}}{dt} - i_L = 0 \\ i_n - C \frac{du_{dc1}}{dt} - i_L = 0 \\ i_m + C \frac{du_{dc1}}{dt} - C \frac{du_{dc1}}{dt} = 0 \end{cases} \quad 4$$

$$\begin{cases} u_{aM} = S_{ap}u_{dc1} - S_{an}u_{dc2} \\ u_{bM} = S_{bp}u_{dc1} - S_{bn}u_{dc2} \\ u_{cM} = S_{cp}u_{dc1} - S_{cn}u_{dc2} \end{cases} \quad 5$$

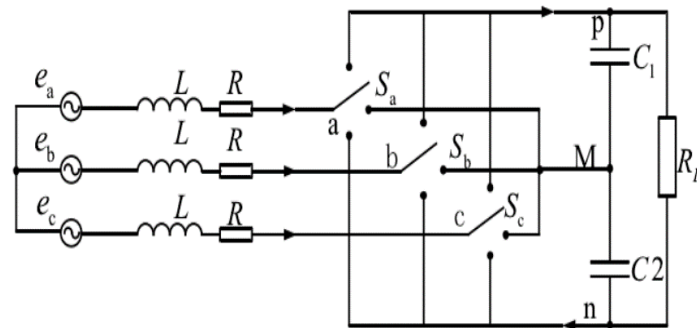
$$\begin{cases} i_p = S_{ap}i_a + S_{bp}i_b + S_{cp}i_c \\ i_n = S_{an}i_a + S_{bn}i_b + S_{cn}i_c \\ i_m = S_{am}i_a + S_{bm}i_b + S_{cm}i_c \end{cases} \quad 6$$

$$\begin{cases} L \frac{di_a}{dt} + Ri_a + \left(S_{ap} - \frac{S_{ap} + S_{bp} + S_{cp}}{3} \right) u_{dc1} - \left(S_{an} - \frac{S_{an} + S_{bn} + S_{cn}}{3} \right) u_{dc2} = e_a \\ L \frac{di_b}{dt} + Ri_b + \left(S_{ap} - \frac{S_{bp} + S_{bp} + S_{cp}}{3} \right) u_{dc1} - \left(S_{bn} - \frac{S_{an} + S_{bn} + S_{cn}}{3} \right) u_{dc2} = e_b \\ L \frac{di_c}{dt} + Ri_c + \left(S_{ap} - \frac{S_{bp} + S_{bp} + S_{cp}}{3} \right) u_{dc1} - \left(S_{bn} - \frac{S_{an} + S_{bn} + S_{cn}}{3} \right) u_{dc2} = e_c \end{cases} \quad 8$$

$$\begin{cases} S_{ap}i_a + S_{bp}i_b + S_{cp}i_c - C_1 \frac{du_{dc1}}{dt} - i_L = 0 \\ S_{an}i_a + S_{bn}i_b + S_{cn}i_c - C_2 \frac{du_{dc2}}{dt} - i_L = 0 \\ S_{am}i_a + S_{bm}i_b + S_{cm}i_c + C_1 \frac{du_{dc1}}{dt} - C_2 \frac{du_{dc2}}{dt} = 0 \end{cases} \quad 9$$

$$\mathbf{Z}_{abc} \frac{d\mathbf{X}_{abc}}{dt} = \mathbf{A}_{abc} \mathbf{X}_{abc} + \mathbf{B}_{abc} \mathbf{U}_{anc} \quad 10 \text{ 总目标}$$

$$\begin{aligned} e_a + e_b + e_c &= 0 \\ i_a + i_b + i_c &= 0 \\ S_i &= \begin{cases} p & S_i \text{ 关断} & i_i > 0 \\ z & S_i \text{ 导通} \\ n & S_i \text{ 关断} & i_i < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad 1 \quad 2$$



12: 前提假设
34: 基尔霍夫定律
56: 开关特性
7: 中点电压推导
89: 输入输出状态

$$u_{MN} = -\frac{1}{3}(e_a + e_b + e_c - 3e_M) = -\frac{1}{3}[(S_{ap} + S_{bp} + S_{cp})u_{dc1} - (S_{an} + S_{bn} + S_{cn})u_{dc2}] \quad 7$$

推导的结论

Deduced conclusions

$$Z_{abc} \frac{dX_{abc}}{dt} = A_{abc} X_{abc} + B_{abc} U_{anc}$$

$$X_{abc} = [i_a \quad i_b \quad i_c \quad u_{dc1} \quad u_{dc2}]^T$$

$$B_{abc} = \text{diag}[1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0]$$

$$U_{abc} = \text{diag}[e_a \quad e_b \quad e_c \quad 0 \quad 0]$$

$$Z_{abc} = \text{diag}[L \quad L \quad L \quad C_1 \quad C_2]$$

$$A_{abc} = \text{diag} \begin{bmatrix} -R & 0 & 0 & -(S_{ap} - \frac{S_{ap} + S_{bp} + S_{cp}}{3}) & (S_{an} - \frac{S_{an} + S_{bn} + S_{cn}}{3})u_{dc2} \\ 0 & -R & 0 & -(S_{bp} - \frac{S_{ap} + S_{bp} + S_{cp}}{3}) & (S_{bn} - \frac{S_{an} + S_{bn} + S_{cn}}{3})u_{dc2} \\ 0 & 0 & -R & -(S_{cp} - \frac{S_{ap} + S_{bp} + S_{cp}}{3}) & (S_{cn} - \frac{S_{an} + S_{bn} + S_{cn}}{3})u_{dc2} \\ S_{ap} & S_{bp} & S_{cp} & -\frac{1}{R} & -\frac{1}{R} \\ S_{an} & S_{bn} & S_{cn} & -\frac{1}{R} & -\frac{1}{R} \end{bmatrix}$$

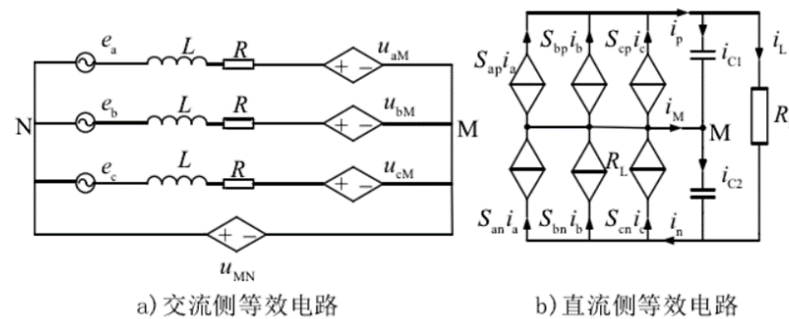


图 2.9 三相静止坐标系下电路等效图

Fig.2.9 The equivalent model under three-phase static coordinate system



我们得到了以 i_a 、 i_b 、 i_c 和 u_{dc1} 、 u_{dc2} 为状态变量的数学模型，可以进一步进行控制分析。



对称假设

开关假设

输入侧建模

输出侧建模

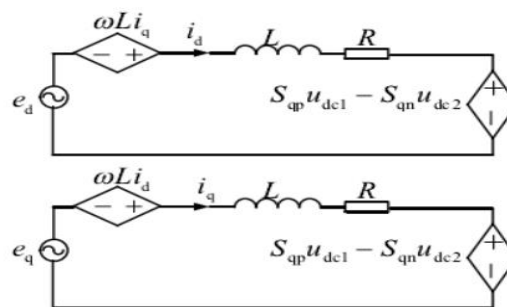
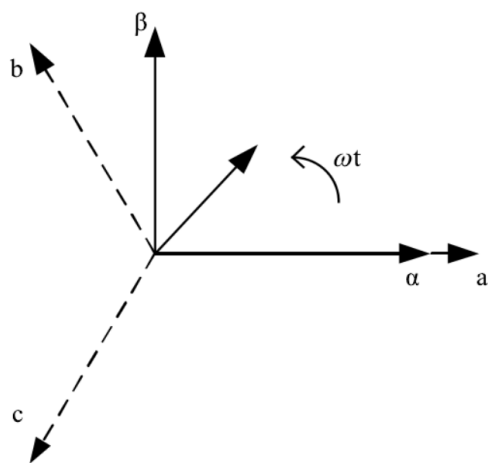
开关处建模

推导与结论

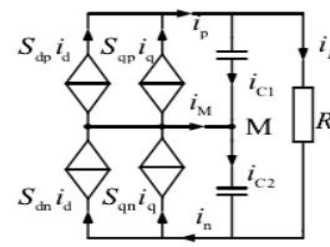
DQ坐标变换

$$\begin{bmatrix} x_d \\ x_q \end{bmatrix} = T_{abc/dq} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix}$$

$$T_{abc/dq} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos(\omega t + \beta) & \cos(\omega t + \beta - 2\pi/3) & \cos(\omega t + \beta + 2\pi/3) \\ -\sin(\omega t + \beta) & -\sin(\omega t + \beta - 2\pi/3) & -\sin(\omega t + \beta + 2\pi/3) \end{bmatrix}$$



a) 交流侧等效电路



b) 直流侧等效电路

图 2.11 两相旋转坐标系下电路等效图

Fig.2.11 The equivalent model under two-phase rotary coordinate system

将电压、电流、开关函数经dq变换

$$Z_{dq} \frac{dX_{dq}}{dt} = A_{dq} X_{dq} + B_{dq} U_{dq}$$

DQ坐标变换

DQ coordinate transformation

$$Z_{dq} \frac{dX_{dq}}{dt} = A_{dq} X_{dq} + B_{dq} U_{dq}$$

$$X_{abc} = [i_d \quad i_q \quad u_{dc1} \quad u_{dc2}]^T$$

$$B_{abc} = \text{diag}[1 \quad 1 \quad 0 \quad 0]$$

$$U_{abc} = \text{diag}[e_d \quad e_q \quad 0 \quad 0]$$

$$Z_{abc} = \text{diag}[L \quad L \quad C_1 \quad C_2]$$

$$A_{abc} = \text{diag} \begin{bmatrix} -R & \omega L & -S_{dp} & S_{dn} \\ -\omega L & -R & -S_{qp} & S_{qn} \\ S_{dp} & S_{qp} & -\frac{1}{R} & -\frac{1}{R} \\ S_{dn} & S_{qn} & -\frac{1}{R} & -\frac{1}{R} \end{bmatrix}$$

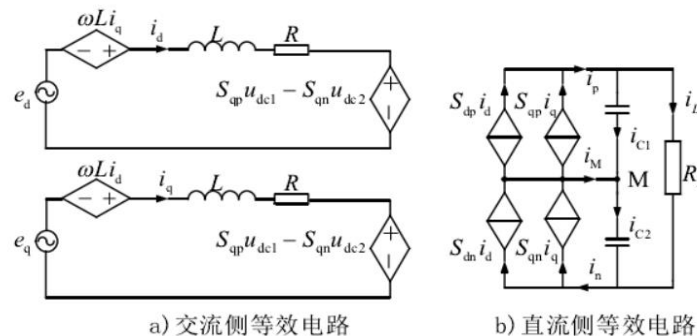


图 2.11 两相旋转坐标系下电路等效图

Fig.2.11 The equivalent model under two-phase rotary coordinate system

我们得到了以 i_d 、 i_q 和 u_{dc1} 、 u_{dc2} 为状态变量的数学模型，可以进一步进行控制分析。

已知 S_{ij} 为 1 和 0 的交错量，-0.5 后其滤波后是一个正弦量，将之转换为 dq 坐标系下，便是直流量（当然需要低通滤波）。



控制器设计

Controller design





"电力电子控制器设计的途径

Pathways to power electronic controller design

电力电子电路设计控制器时，先根据电路需求和真实控制器性能确定控制方案。常用的有PID控制（大部分电路）、滑膜控制、神经网络控制等等。值得注意的是，PI控制只支持稳态直流控制，对交流情况有相位差，常用PR控制或DQ变换后PI进行弥补。控制方案设计之后，对一些控制方案，可以通过小信号模型转为线性系统，使用经典自控理论进行分析设计。类似于神经网络的控制方案则通过寻找最大代价函数自适应达到要求。而滑膜控制（包括滞环控制）则因其特性可以自动的达到相关稳定要求。

| 常用控制器设计 | 交直流设计区别 | 小信号模型

 关键词"
The keywords

在数学建模的基础上依据需求和限制进行控制器的设计与参数选择。

Design and parameter selection of controllers based on requirements and constraints through mathematical modeling



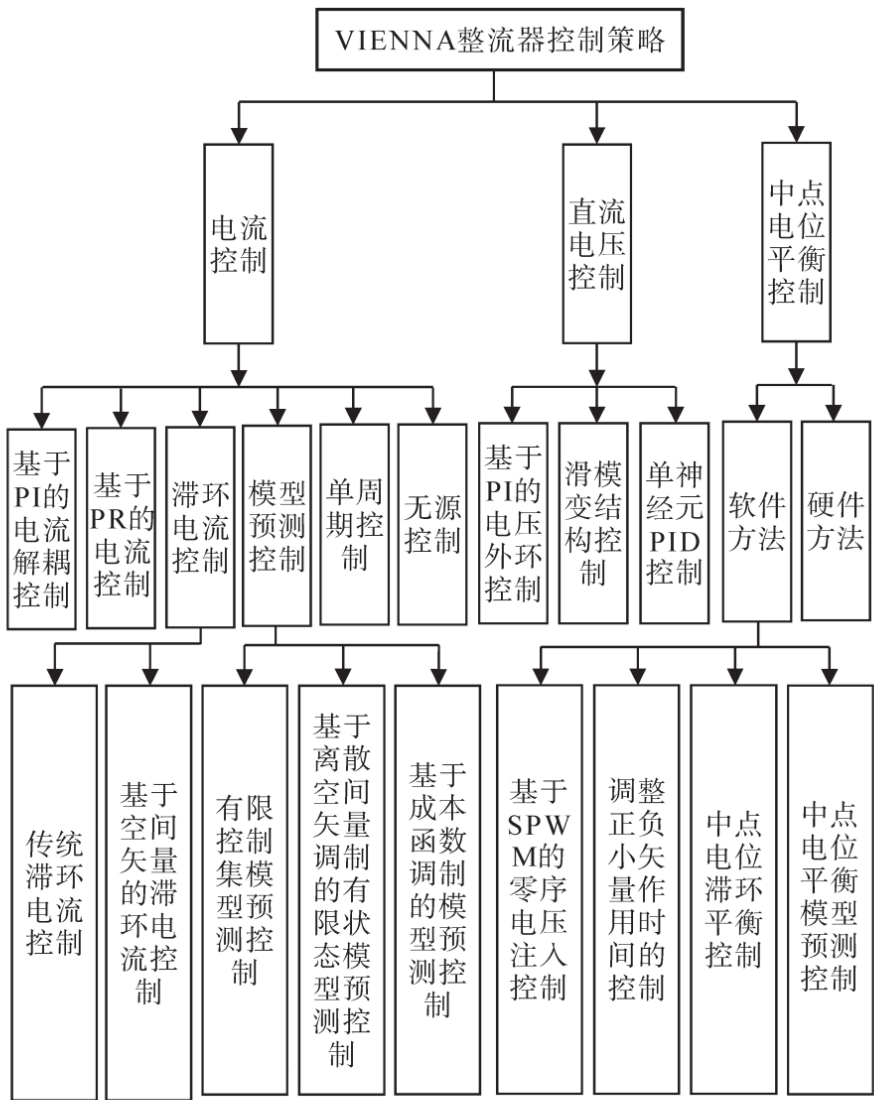


图4 VIENNA 整流器控制策略分类图

Fig.4 Schematic diagram of VIENNA rectifier control strategy classification

表1 各种电流控制策略对比表

电流控制策略	特点
基于PI控制器的电流解耦控制策略	结构简单;技术成熟;应用广泛;系统阶数降低;PI控制器对系统参数敏感;动态响应性能差
基于PR控制器的电流控制策略	无静差跟踪;计算量适中;不易调节参数;易引起系统谐振
传统滞环电流控制策略	实现简单;动态性能好;鲁棒性强;开关频率不固定,影响网侧电流质量
基于空间矢量的滞环电流控制策略	动态响应速度快;开关频率波动小;实现过程繁琐;电流低次谐波变大
模型预测控制策略	易于实现;动态响应速度快;可同时对多个目标进行约束;开关频率不固定;不能保证控制精度;对采样频率依赖较高
单周期控制策略	实现简单;频率固定;鲁棒性好;灵活性较低,应用受限;参数设计与调整过程繁琐
无源控制策略	鲁棒性好;抗干扰能力强;PBC控制器设计繁琐;计算量大
模糊比例谐振控制策略	无静差跟踪;可实时调整控制器参数;控制器设计难度大
反馈线性化控制	动态性能较好;建模过程和控制器设计较为复杂
直接功率控制	实现简单;单位功率因数控制;电流谐波小;依赖采样频率;计算误差大

整体介绍

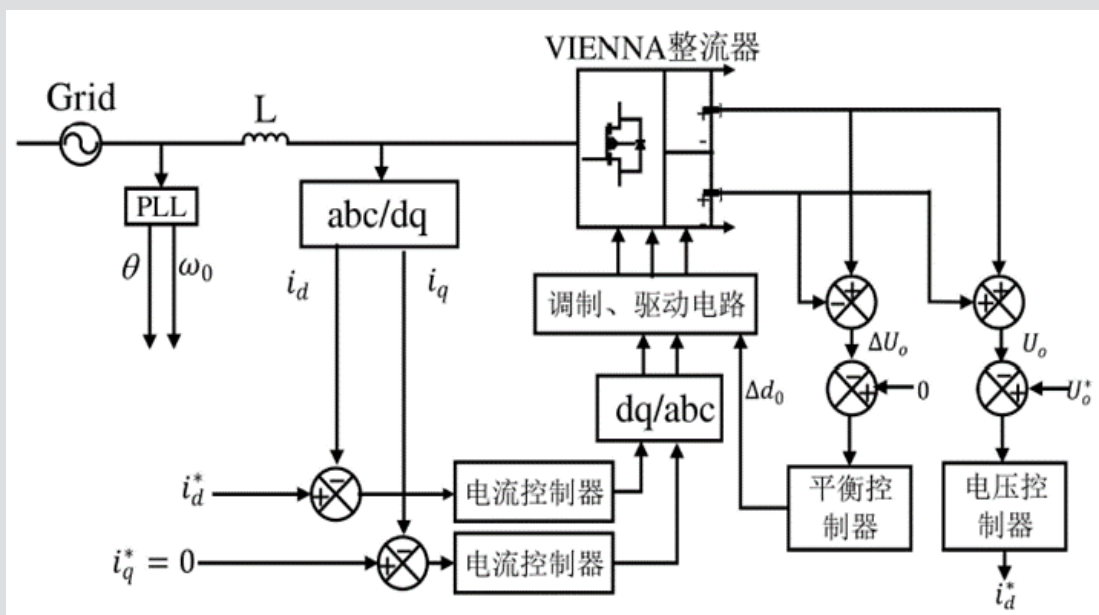
DQ双环

电流内环

电压外环

滞环设计

dq旋转坐标系下控制框图



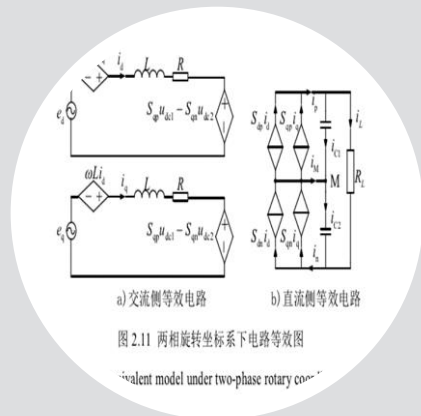
在确定好控制方案——dq旋转坐标系下的双环控制后，根据数学建模进行前馈解耦和双环参数设计。依次进行内环、外环设计。

After determining the control scheme - dual-loop control in dq rotating coordinate system - feedforward decoupling and dual-loop parameter design are performed based on mathematical modeling.



控制器设计——电流内环

Current inner loop controller design



$$L \frac{di_d}{dt} = -Ri_d + wLi_q - u_d + e_d$$

$$L \frac{di_q}{dt} = -Ri_q + wLi_d - u_q + e_q$$

电流环设计时，认定在内环状态下输出电压是完美的直流电压。只关注S开关的直流量。



$$u_d^* = e_d - PI(i_{d\text{ref}} - i_d) + wLi_q$$

$$u_q^* = e_q - PI(i_{q\text{ref}} - i_q) - wLi_d$$



$$L \frac{di_d}{dt} = -Ri_d - u_d + u_d^* + PI(i_{d\text{ref}} - i_d)$$

$$L \frac{di_q}{dt} = -Ri_q - u_q + u_q^* + PI(i_{q\text{ref}} - i_q)$$



$$i_d(s) = \frac{1}{Ls + 1} u_d^*(s)$$

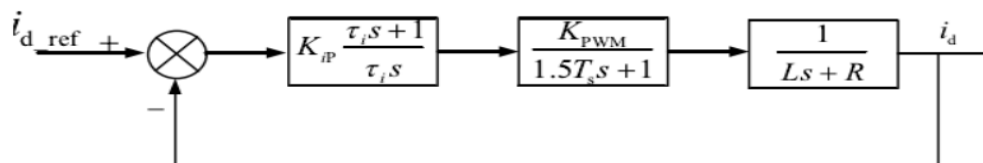
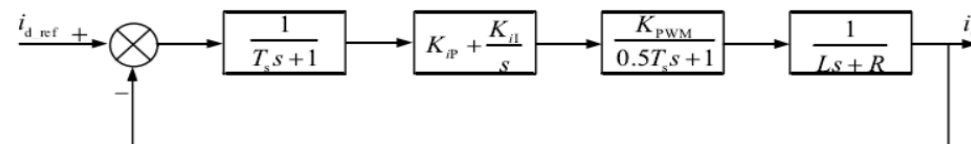
$$i_q(s) = \frac{1}{Ls + 1} u_q^*(s)$$

令调制波dq坐标系下电压为左1式值。

后进行带入，得到左2式。

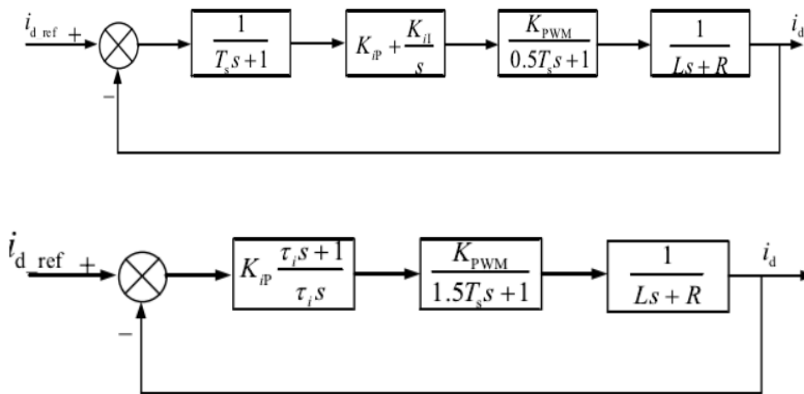
使用小信号处理后使用自控方式处理。

注意PI在小信号部分，故理论上对宏观无影响。



控制器设计——电流内环

Current inner loop controller design



$$W_{oi}(s) \approx \frac{K_{ip} K_{PWM}}{R \tau_i s (1.5 T_s s + 1)}$$

$$\text{where } K_{ip} + \frac{K_{il}}{s} = K_{ip} \frac{\tau_i s + 1}{\tau_i s}$$

开环传递函数。对之使用
自控手段设计控制器



$$W_{ci}(s) = \frac{1}{1 + \frac{R \tau_i}{K_{ip} K_{PWM}} s + \frac{1.5 T_s \tau_i}{K_{ip} K_{PWM}} s^2}$$

闭环参数，也可以对此进行分析设计控制器。



$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_{ip} K_{PWM}}{1.5 T_s \tau_i}}$$

$$\xi = \frac{R \tau_i}{K_{ip} K_{PWM}} / 2 * \omega_n = \frac{R \sqrt{\tau_i}}{\sqrt{6 K_{ip} K_{PWM} T_s}}$$

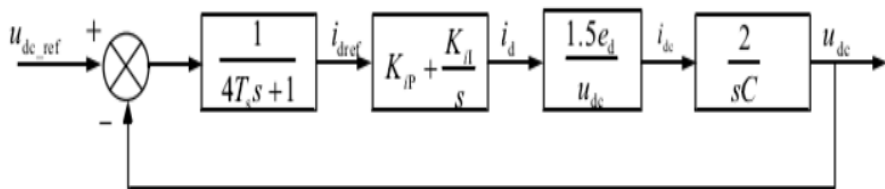
令 $\xi = 0.707$ ，模为1，可计算的对应KP，KI。使得内环传递函数约为

$$W_{ci}(s) = \frac{1}{1 + 3 T_s s}$$



控制器设计——电压外环

Voltage outer loop controller design



$$u_{dc} = \frac{2}{sC} i_{dc}$$

瞬时功率理论可以得到电压电流关系

$$W_{ou}(s) = \frac{3e_d K_{up}(\tau_u s + 1)}{Cu_{dc}\tau_u s^2(4T_s s + 1)}$$

开环传递函数。对之使用自控手段设计控制器

通过适当设置PM，使闭环函数可以尽快跟随的同时外环慢于内环5倍，我们可以得到相关参数如下。

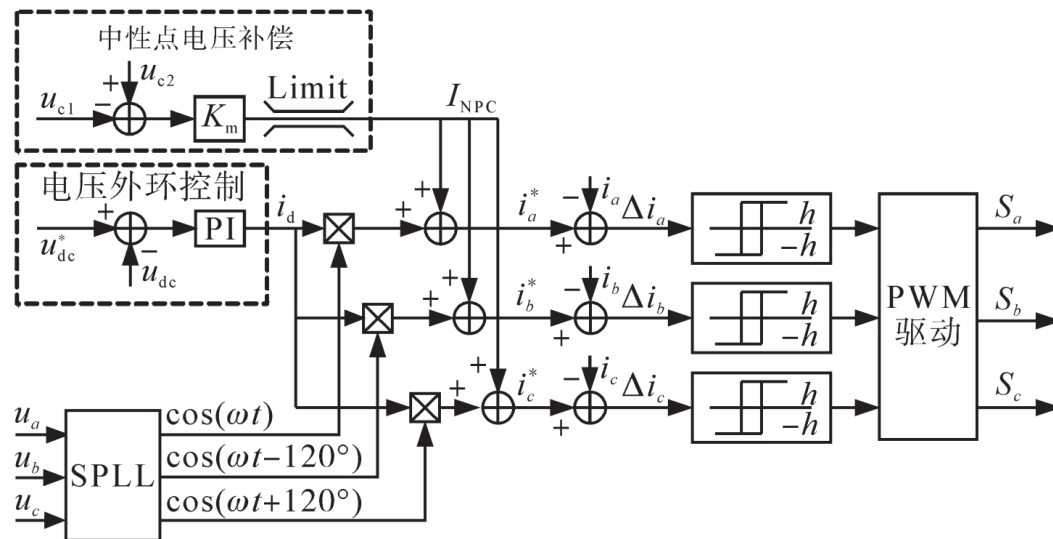
$$K_{up} = \frac{Cu_{dc}}{20T_s e_d}$$

$$K_{ui} = \frac{Cu_{dc}}{400T_s^2 e_d}$$



控制器设计——滞环设计

Hysteresis loop controller design



$$\begin{cases} \text{if } i_a \geq 0, S_a = \begin{cases} 1 & i_a < i_a^* - h \\ 0 & i_a > i_a^* + h \end{cases} \\ \text{if } i_a < 0, S_a = \begin{cases} 1 & i_a > i_a^* + h \\ 0 & i_a < i_a^* - h \end{cases} \end{cases}$$

该控制策略结构简单，鲁棒性强，在负载突变情况下仍具备良好动态响应性能，但其存在的不足之处是开关频率不固定，导致网侧滤波电感的滤波效果下降，进而影响到网侧电流质量。