第十二届数学竞赛模拟考试（1）解答

一、计算下列各题（每小题 6 分，共 30 分）

1、求极限 $l=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x^{x}-\sin a^{x}}{\left(a^{x^{x}}-a^{a^{x}}\right)x^{x}}\left(a>1\right)$

解：由 Cauchy 中值定理，取 $f\left(t\right)=\sin t, g\left(t\right)=a^{t}$，不妨认为 $x>a$ 充分靠近 a，

$\exists\xi\in\left(a^{x},x^{x}\right)$ ，所以

$$l=\frac{1}{a^{a}}\lim_{x\to a}\frac{\sin x^{x}-\sin a^{x}}{a^{x^{x}}-a^{a^{x}}}=\frac{1}{a^{a}}\lim_{x\to a}\frac{\cos\xi}{a^{\xi}\ln a}=\frac{\cos a^{a}}{a^{a^{a}+a}\ln a}$$

或直接用洛必达法则

$$l=\frac{1}{a^{a}}\lim_{x\to a}\frac{\sin x^{x}-\sin a^{x}}{a^{x^{x}}-a^{a^{x}}}=\frac{1}{a^{a}}\lim_{x\to a}\frac{\cos x^{x}\cdot x^{x}\left(\ln x+1\right)-\cos a^{x}\cdot a^{x}\ln a}{a^{x^{x}}\ln a\cdot x^{x}\left(\ln x+1\right)-a^{a^{x}}\ln a\cdot a^{x}\ln a}=\frac{\cos a^{a}}{a^{a^{a}+a}\ln a}$$

2、设 $f\left(x,y\right)$ 连续，$f\left(0,0\right)=0$，又 $f\left(x,y\right)$ 在 $\left(0,0\right)$ 处可微.求

$$l=\lim_{x\to0^{+}}\frac{\int_{0}^{x^{3}}dt\int_{\sqrt[3]{t}}^{x}f\left(t,u\right)du}{1-\sqrt[3]{1-x^{5}}}$$

解：交换极限分子的积分次序，则

$$\int_{0}^{x^{3}}dt\int_{\sqrt[3]{t}}^{x}f\left(t,u\right)du=\int_{0}^{x}du\int_{0}^{u^{3}}f\left(t,u\right)dt$$

又 $\quad 1-\sqrt[3]{1-x^{5}}\sim\dfrac{x^{5}}{3}$

所以

$$l=\lim_{x\to0^{+}}\frac{\int_{0}^{x^{3}}dt\int_{\sqrt[3]{t}}^{x}f\left(t,u\right)du}{1-\sqrt[3]{1-x^{5}}}=\lim_{x\to0^{+}}\frac{\int_{0}^{x}du\int_{0}^{u^{3}}f\left(t,u\right)dt}{\frac{x^{5}}{3}}$$

$$=\lim_{x\to0^{+}}\frac{\int_{0}^{x^{3}}f\left(t,x\right)dt}{\frac{5}{3}x^{4}}=\frac{3}{5}\lim_{x\to0^{+}}\frac{f\left(\xi,x\right)}{x},0\le\xi\le x^{3}$$

而 $f\left(\xi,x\right)=f_{x}'\left(0,0\right)\xi+f_{y}'\left(0,0\right)x+o\left(\sqrt{\xi^{2}+x^{2}}\right)$

所以

$$l=\frac{3}{5}\lim_{x\to0^{+}}\frac{f_{x}'\left(0,0\right)\xi+f_{y}'\left(0,0\right)x+o\left(\sqrt{\xi^{2}+x^{2}}\right)}{x}=\frac{3}{5}f_{y}'\left(0,0\right)$$

3、设 $y\left(x-y\right)^{2}=x$，求

$$I=\int\frac{dx}{x-3y}$$ 。

解：令 $x-y=t$，则 $x=\frac{t^3}{t^2-1}, y=\frac{t}{t^2-1}, dx=\frac{t^2\left(t^2-3\right)}{\left(t^2-1\right)^2}dt$

于是

$$I=\int\frac{t}{t^2-1}dt=\frac{1}{2}\ln\left|t^2-1\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|(x-y)^2-1\right|+C$$

4、求 $I=\int_L\left(1+\left(xy+y^2\right)\sin x\right)dx+\left(x^2+xy\right)\sin ydy$，其中 $L:x^2+xy+y^2=1\left(y\geq 0\right)$

从点 $(-1,0)$ 到 $(1,0)$ 的弧。

解：L 如图示。

分析：此题直接计算或用格林公式计算都比较麻烦。

注意到曲线方程 $x^2+xy+y^2=1$ 可得：

$x^2+xy=1-y^2, xy+y^2=1-x^2$；从而

$$I=\int_L\left(1+\left(1-x^2\right)\sin x\right)dx+\left(1-y^2\right)\sin ydy$$

显然有：$P_y=0=P_x$；故积分与路径无关。

故可另选路径 $L_1:y=0\left(x:-1\to 1\right)$；

$$\therefore I=\int_{-1}^{1}\left[1+\left(1-x^2\right)\sin x\right]dx=2.$$

5、求 $I=\iint_\Sigma xdS$，其中 Σ 是曲面 $y^2+z^2=a^2, x=0, x=a+z$ 所围立体的表面.

解：如图 $\Sigma=\Sigma_{上}+\Sigma_{下}+\Sigma_{侧}$

所以 $I=\iint_{\Sigma_{上}}+\iint_{\Sigma_{下}}+\iint_{\Sigma_{侧}}$ ；

$\iint_{\Sigma_{上}}xdS=\iint_{D_{yz}}(a+z)\sqrt{2}\,dydz=\sqrt{2}a\iint_{D_{yz}}dydz=\sqrt{2}\pi a^3$；

$\iint_{\Sigma_{下}}xdS=0$；

$\Sigma_{侧}$：$y=\pm\sqrt{a^2-z^2}, (y,z)\in D_{yz}:0\leq x\leq a+z, -a\leq z\leq a;$

$$\therefore \iint_{\Sigma_{侧}} xdS = 2\iint_{D_{xz}} x\sqrt{1+y_x^2+y_z^2}dxdz$$

$$= 2\int_{-a}^{a} dz \int_0^{a+z} x\sqrt{1+\left(\frac{-z}{\sqrt{a^2-z^2}}\right)^2+0}\, dx$$

$$= a\int_{-a}^{a} \frac{(a+z)^2}{\sqrt{a^2-z^2}} dz = \frac{3}{2}\pi a^3;$$

$$\therefore I = (\sqrt{2}+\frac{3}{2})\pi a^3.$$

二（14 分）、求 $F(x,y)=x^2+2hxy+y^2+2x+2fy+C$ 的极值点，其中 h,f，C 为常数。

解：

$$F_x = 2(x+hy+1), F_y = 2(hx+y+f),$$
$$F_{xx}=2, F_{xy}=2h, F_{yy}=2,$$
$$F_{xy}^2 - F_{xx}F_{yy} = 4(h^2-1)$$

1） $h^2>1$ 时无极值；

2） $h^2<1$ 时，满足 $F_x=F_y=0$ 的 (x,y) 是极值点。此时

$$x=(1-fh)/(h^2-1), y=(f-h)/(h^2-1);$$

3） $h=1$ 时，若 $f\neq 1$，则方程 $F_x=F_y=0$ 无解，所以不存在极值点；

若 $f=1$，则方程 $F_x=F_y=0$ 等价于 $x+y+1=0$，此时

$$\begin{aligned}F(x,y)&=x^2+2hxy+y^2+2x+2fy+C\\&=x^2+2xy+y^2+2x+2y+C\\&=(x+y)^2+2(x+y)+C=(-1)^2+2(-1)+C=C-1\end{aligned}$$

是常数函数，也无极值点（非广义）。类似地，$h=-1$ 时也无极值点。

结论：当 $-1<h<1$，有极值点 $(x,y)=((1-fh)/(h^2-1),(f-h)/(h^2-1))$。

三（14 分）、设 $f(x)$ 是区间 $[0,1]$ 上的非负连续上凸函数，并且 $f(0)=1$，则

$$\int_0^1 xf(x)dx \le \frac{2}{3}\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2$$

证：令

$$A=\int_0^1 f(x)dx,\quad B=\int_0^1 xf(x)\,dx$$

由分部积分得到

$$B=\int_0^1 xd\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)=x\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)_0^1-\int_0^1\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)dx$$

$$=A-\int_0^1\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)dx$$

又 $f(x)$ 是上凸函数，且 $f(0)=1$ 所以

$$f(t)\ge\frac{f(x)-1}{x}t+1,(0\le t\le x)$$

所以 $\int_0^x f(t)\,dt\ge\frac{f(x)-1}{x}\frac{x^2}{2}+x=\frac{1}{2}xf(x)+\frac{1}{2}x$ ；

从而

$$A-B\ge\int_0^1\left(\frac{1}{2}xf(x)+\frac{1}{2}x\right)dx=\frac{B}{2}+\frac{1}{4}\quad,$$

即

$$B\le\frac{2}{3}\left(A-\frac{1}{4}\right)\quad;$$

注意 $0\le(2A-1)^2=4A^2-4A+1,\therefore A-\frac{1}{4}\le A^2$ ，

从而

$$B\le\frac{2}{3}\left(A-\frac{1}{4}\right)\le\frac{2}{3}A^2\quad,$$

于是本题得证。

四（14 分）、给定曲面

$$5x^2+12y^2+z^2+12xy+6yz+4xz=2$$

1） 求内含曲面且与曲面相切的圆柱面的准线方程；

2） 求曲面所围立体的体积 V 。

解：1）由曲面方程解出

$$z=-(2x+3y)\pm\sqrt{2-x^2-3y^2}\quad;$$

因此 $z=z(x,y)$ 的定义域为 $x^2+3y^2\le 2$，即平面 $z=0$ 上的椭圆

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\sqrt{2/3}\right)^2}=1$$

所围区域。椭圆的长半轴长为 $\sqrt{2}$，故所求圆柱面的母线方程是平面 $z=0$ 上的圆

$x^2+y^2=2$；

2）设曲面投影区域 $D: x^2+3y^2\le 2$ ，则体积

$$V=\iint_D\left[\left((-2x+3y)+\sqrt{2-x^2-3y^2}\right)-\left(-(-2x+3y)-\sqrt{2-x^2-3y^2}\right)\right]dxdy$$
$$=2\iint_D\sqrt{2-x^2-3y^2}\,dxdy$$

令 $x=\sqrt{2}r\cos\theta, y=\sqrt{2/3}r\sin\theta$ ，则

$$V=\frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\sqrt{2-2r^2}\,rdr=\frac{4\sqrt{6}\pi}{9}$$

五（14 分）、设函数 $f\in C[a,b]$，在 (a,b) 上二次可微.证明：对于任何 $c\in(a,b)$，存在 $\xi=\xi(c)\in(a,b)$，使得

$$\frac{1}{2}f''(\xi)=\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)}+\frac{f(b)}{(b-c)(b-a)}+\frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}$$

解法一：

1）定义 $[a,b]$ 上的函数

$$\varphi(x)=f(x)-\frac{b-x}{b-a}f(a)-\frac{x-a}{b-a}f(b)-A(x-a)(x-b),$$

其中 A 是一个待定常数.显然 $\varphi(a)=\varphi(b)=0$.对于任何一个给定的 $c\in(a,b)$，我们确定 A 使得 $\varphi(c)=0$.于是 A 满足关系式

$$(b-a)f(c)-(b-c)f(a)-(c-a)f(b)-(b-a)(c-a)(c-b)A=0$$

显然 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微，因此 $\varphi(x)$ 在 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 上满足 Rolle 定理的条件.于是存在两个实数 $\xi_1=\xi_1(c)\in(a,c),\xi_2=\xi_2(c)\in(c,b)$ 使得 $\varphi'(\xi_1)=0$，$\varphi'(\xi_2)=0$；

2） 再设

$$\varphi'(x)=f'(x)+\frac{f(a)}{b-a}-\frac{f(b)}{b-a}-A\left(2x-(a+b)\right)$$

显然 $\varphi'(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 满足 Rolle 定理条件，故存在 $\xi=\xi(c)\in(a,b)$，使得 $\varphi''(c)=0$.

又$\varphi''(x)=f''(x)-2A$，故$A=\dfrac{1}{2}f''(\xi)$.将它代入 1）中即得所要结果.

方法二：

1） 对于给定的$c\in(a,b)$，定义函数

$$\varphi(x)=\begin{vmatrix} f(x) & x^2 & x & 1 \\ f(a) & a^2 & a & 1 \\ f(b) & b^2 & b & 1 \\ f(c) & c^2 & c & 1 \end{vmatrix}$$

显然$\varphi(a)=\varphi(b)=\varphi(c)=0$.在$[a,c],[c,b]$上应用 Rolle 定理，则存在两个实数

$\xi_1=\xi_1(c)\in(a,c),\xi_2=\xi_2(c)\in(c,b)$使得$\varphi'(\xi_1)=\varphi'(\xi_2)=0$；又$\varphi'(x)$在$[\xi_1,\xi_2]$ 上

满足 Rolle 定理条件，因此存在$\xi=\xi(c)\in(\xi_1,\xi_2)\in(a,b)$，使得$\varphi''(\xi)=0$.

而

$$\varphi''(x)=\begin{vmatrix} f''(x) & 2 & 0 & 0 \\ f(a) & a^2 & a & 1 \\ f(b) & b^2 & b & 1 \\ f(c) & c^2 & c & 1 \end{vmatrix}$$

将右边行列式展开即得所求结果.

六（14 分）、已知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^{-1}$ 是正项发散级数，实数$\lambda>0$.求下列级数的和：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_1a_2\cdots a_n}{(a_2+\lambda)(a_3+\lambda)\cdots(a_{n+1}+\lambda)}$$

解：1）用S_n表示所求级数的和，且令

$$A_n=\frac{a_1a_2\cdots a_n}{(a_2+\lambda)(a_3+\lambda)\cdots(a_{n+1}+\lambda)}\quad(n\geq 1)$$

则

$$\frac{A_k}{A_{k-1}}=\frac{a_k}{a_{k+1}+\lambda}\quad,$$

即 $A_ka_{k+1}+A_k\lambda=A_{k-1}a_k\quad(k>1)$

将上式两边从$k=2$ 到$k=n$ 求和，即得关系式

$$A_n a_{n+1} + S_n \lambda - A_1 \lambda = A_1 a_2;$$

2） 注意

$$\begin{aligned} 0 < A_n a_{n+1} &= a_1 \frac{a_2 a_3 \cdots a_{n+1}}{(a_2+\lambda)(a_3+\lambda)\cdots(a_{n+1}+\lambda)} \\ &= a_1 \left(1+\frac{\lambda}{a_2}\right)^{-1} \left(1+\frac{\lambda}{a_3}\right)^{-1} \cdots \left(1+\frac{\lambda}{a_{n+1}}\right)^{-1} \end{aligned},$$

应用不等式：当 $\alpha_k > -1 (k = 1, \cdots, n)$ 时

$$\prod_{k=1}^{n} (1+\alpha_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k,$$

即可得到

$$0 < A_n a_{n+1} < a_1 \lambda^{-1} \left(\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{a_k} \right)^{-1};$$

又已知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-1}$ 发散，由上式推出 $\lim_{n\to\infty} A_n a_{n+1} = 0$。从而

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = A_1 (a_2 + \lambda) / \lambda = a_1 / \lambda.$$