微积分（一）下第 8 周第三次课作业答案与提示

（柱面坐标与球面坐标）

1. 填空:

1）柱坐标下，$\int_{-3}^{3}dx\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{3}f(\sqrt{x^2+y^2})dz$ 的逐次积分为

$\underline{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^3 dz\int_0^z rf(r)dr}$ 和 $\underline{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^3 rf(r)dr\int_r^3 dz}$.

3）球坐标下 $\iiint\limits_{x^2+y^2+(z-\frac{1}{2})^2\le\frac{1}{4}} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})dxdydz$ 的逐次积分为

$\underline{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^{\cos\varphi}f(\rho)\rho^2\sin\varphi d\rho}$.

4）将逐次积分 $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 dr\int_r^1 rf(z)dz$ 化为先对 r 积分，然后对 θ 积分，再对 z 积分的逐次积分，其形式为 $\underline{\int_0^1 dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^z rf(z)dr}$.

2. 计算下列三重积分

1）$I=\iiint\limits_{\Omega}zdv$，其中 Ω 是由 $x^2+y^2+z^2\le 2$ 及 $z\ge x^2+y^2$ 所围成的区域. 答案：$\frac{7}{12}\pi$.

2）$I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dv$，其中 Ω 是由平面曲线 $\begin{cases}y^2=2z\\x=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周所得的旋转曲面与平面 $z=8$ 所围成的区域. 答案：$\frac{1024}{3}\pi$.

3）$I=\iiint\limits_{\Omega}zdxdydz$，其中 Ω 是由曲面 $z=x^2+y^2$ 与 $z=2y$ 所围成的区域. 答案：$\frac{5}{6}\pi$.

4）$I=\iiint\limits_{\Omega}xyzdv$，其中 Ω 是由球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 及三坐标面所围成的第一卦限内的区域.

答案：$\frac{1}{48}$.

5）$I=\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}dv$，其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=1$ 所围成的区域.

答案：$\frac{\pi}{6}(2\sqrt{2}-1)$.

6）$I=\iiint\limits_{\Omega}(x+z)dv$，其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 所围成的区域.

答案：$\frac{\pi}{8}$.

7) $I=\iiint\limits_{\Omega}|\sqrt{x^2+y^2+z^2}-1|\,dv$，其中$\Omega$由$z=\sqrt{x^2+y^2}$和平面$z=1$围成.

答案： $\frac{\pi}{6}(\sqrt{2}-1)$