全国大学生数学竞赛预、决赛线面积分部分题解

第一届初赛

四、（15 分）已知平面区域 $D=\{(x,y)|0\le x\le\pi,0\le y\le\pi\}$，$L$ 为 D 的正向边界，试证：

（1）$\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\oint_L xe^{-\sin y}dy-ye^{\sin x}dx;$

（2）$\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx\ge\frac{5}{2}\pi.$

（1）法一：直接计算

$$\text{左边}=\int_{\overline{OA}+\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CO}}=\int_0^\pi \pi e^{\sin y}dy-\int_\pi^0 \pi e^{-\sin x}dx=\pi\int_0^\pi\left(e^{\sin x}+e^{-\sin x}\right)dx,$$

$$\text{右边}=\int_{\overline{OA}+\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CO}}=\int_0^\pi \pi e^{-\sin y}dy-\int_\pi^0 \pi e^{\sin x}dx=\pi\int_0^\pi\left(e^{\sin x}+e^{-\sin x}\right)dx;$$

所以

$$\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\oint_L xe^{-\sin y}dy-ye^{\sin x}dx;$$

（2）由 Taylor 公式

$e^t+e^{-t}\ge 2+t^2$，得 $e^{\sin x}+e^{-\sin x}\ge 2+\sin^2 x$，

所以

$$\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\pi\int_0^\pi\left(e^{\sin x}+e^{-\sin x}\right)dx\ge\pi\int_0^\pi\left(2+\sin^2 x\right)dx=\frac{5\pi}{2}.$$

法二：利用 Green 公式

（1）$\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\iint_D\left(e^{\sin y}+e^{-\sin x}\right)dxdy,$

$\oint_L xe^{-\sin y}dy-ye^{\sin x}dx=\iint_D\left(e^{-\sin y}+e^{\sin x}\right)dxdy;$

由区域关于 $y=x$ 对称，所以

$$\iint_D\left(e^{\sin y}+e^{-\sin x}\right)dxdy=\iint_D\left(e^{-\sin y}+e^{\sin x}\right)dxdy$$

故

$$\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\oint_L xe^{-\sin y}dy-ye^{\sin x}dx;$$

（2）同上.

进一步，利用 $e^t+e^{-t}\ge 2+t^2+\frac{t^4}{12}$，可证：

$$\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx\ge\frac{81}{32}\pi.$$

第一届决赛

一 2）计算 $I=\iint_{\Sigma}\frac{axdydz+(z+a)^2dxdy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，其中 Σ 为下半球 $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧，a 为大于 0 的常数。

解：作辅助面 $\Sigma_1: z=0\left(x^2+y^2\le a^2\right)$ 下侧，由 Gauss 公式得

$$
\begin{aligned}
I&=\frac{1}{a}\iint_{\Sigma}axdydz+(z+a)^2dxdy=\frac{1}{a}\left(\iint_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}\right)\\
&=\frac{1}{a}\left(-\iiint_{\Omega}\left[a+2(z+a)\right]dxdydz+\iint_{D_{xy}}a^2dxdy\right)\\
&=-\frac{1}{a}\iiint_{\Omega}3adxdydz-\frac{2}{a}\iiint_{\Omega}zdxdydz+\frac{1}{a}\iint_{D_{xy}}a^2dxdy\\
&=-3\cdot\frac{2}{3}\pi a^3-\frac{2}{a}\int_{-a}^{0}z\cdot\pi\left(a^2-z^2\right)dz+a\cdot\pi a^2=-\frac{\pi}{2}a^3
\end{aligned}
$$

第二届初赛

六（15 分）设函数 $\varphi(x)$ 具有连续的导数，在围绕原点的任意光滑的简单闭曲线 C 上，曲线积分 $\oint_C\frac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2}$ 的值为常数。

（1）设 L 为正向闭曲线 $(x-2)^2+y^2=1$，证明：

$$\oint_C\frac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2}=0$$

（2）求 $\varphi(x)$；

（3）设 C 是围绕原点的光滑简单正向闭曲线，求

$$\oint_C\frac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2}。$$

解：如图，设 L_1 为一不含原点的简单闭曲线 $\overrightarrow{MQNRM}$；另取一点 P，则组成两个绕原点的简单闭曲线 $\overrightarrow{MPNQM}$ 及 $\overrightarrow{MPNRM}$；由已知得

$\oint_{\overline{MPNQM}}=\oint_{\overline{MPNRM}}$，即 $\int_{\overline{MPN}}+\int_{\overline{NQM}}=\int_{\overline{MPN}}+\int_{\overline{NRM}}$；

所以$\int_{\overline{NQM}} = \int_{\overline{NRM}}$，即$\int_{\overline{NRM}} - \int_{\overline{NQM}} = \int_{\overline{NRM}} + \int_{\overline{MQN}} = \oint_{L_1} = 0$；
从而积分与路径无关。
（2）设

$$P = \frac{2xy}{x^4+y^2}, Q = \frac{\varphi(x)}{x^4+y^2}; \text{令} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}\text{，即}$$

$$\frac{2x^5-2xy^2}{\left(x^4+y^2\right)^2} = \frac{\varphi'(x)\left(x^4+y^2\right)-4x^3\varphi(x)}{\left(x^4+y^2\right)^2};$$

所以

$$(\varphi'(x)+2x)y^2 + x^4\varphi'(x) - 4x^3\varphi(x) - 2x^5 = 0;$$

解得$\varphi(x) = -x^2$.

（1）又曲线L：$(x-2)^2+y^2=1$所围区域不含原点，所以由积分与路径无关等价条件知

$$\oint_L \frac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2} = \oint_L \frac{2xydx-x^2dy}{x^4+y^2} = 0$$

或由 Green 公式（设L所围区域为D）

$$\oint_L \frac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2} = \oint_L \frac{2xydx-x^2dy}{x^4+y^2} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial P} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = 0;$$

（3）设$C_1: x^4+y^2=\varepsilon^2$为正向简单闭曲线，$D_1$为所围区域；且$\varepsilon$足够小使$C_1$含在$C$内；所以

$$\oint_C \frac{2xydx+\varphi(x)dy}{x^4+y^2} = \oint_{C_1} \frac{2xydx-x^2dy}{x^4+y^2} = \frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{D_1}(-2x-2x)dxdy = 0\text{。}$$

第二届决赛

五、（16 分）已知Σ是空间曲线$\begin{cases} x^2+3y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$绕$y$轴旋转而成的椭球面，$S$表示曲面$\Sigma$的上半部分$(z \geq 0)$，$\Pi$是椭球面$S$在$P(x,y,z)$点处的切平面，$\rho(x,y,z)$是原点到切平面$\Pi$的距离，$\lambda$，$\mu$，$\nu$表示$S$的外法线的方向余弦。

1）计算$\iint_S \frac{z}{\rho(x,y,z)}dS$；

2）计算$\iint_S z(\lambda x+3\mu y+\nu z)dS$，其中$\Sigma$为外侧。

解：Σ 的方程为 $x^2+3y^2+z^2=1$。记 $F(x,y,z)=x^2+3y^2+z^2-1$，

则椭球面 Σ 在点 $P(x,y,z)$ 处的法向量为：$\vec{n}=\{F_x,F_y,F_z\}=2\{x,3y,z\}$；

故 Σ 在点 P 处的切平面 Π 的方程为：

$x(X-x)+3y(Y-y)+z(Z-z)=0$，即 $xX+3yY+zZ=1$；

从而 $\rho(x,y,z)=\left(x^2+9y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}$。

（1）在曲面 S 上，

$$z=\sqrt{1-x^2-3y^2}, z_x=-\frac{x}{z}, z_y=-\frac{3y}{z};$$

$$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\frac{\sqrt{1+6y^2}}{z}dxdy;\quad \rho(x,y,z)=\left(1+6y^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

记 $D_{xy}:x^2+3y^2\le 1,$ 令 $x=r\cos\theta, y=\frac{\sqrt{3}}{3}r\sin\theta$，则 $D_{xy}:0\le r\le 1,0\le\theta\le 2\pi$；

$$\iint_S\frac{z}{\rho(x,y,z)}dS=\iint_{D_{xy}}z\left(1+6y^2\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{1+6y^2}}{z}dxdy$$
$$=\iint_{D_{xy}}\left(1+6y^2\right)dxdy=\iint_{D_{xy}}dxdy+6\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\sin^2\theta\, r^3dr$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$$

（2）作辅助面 $S_1:z=0\left(x^2+3y^2\le 1\right)$，取下侧；$\Omega$ 为 S,S_1 所围区域。则

$$\iint_S z(\lambda x+3\mu y+\nu z)dS=\oiint_{S+S_1}-\iint_{S_1}\quad;$$

由 Gauss 公式及第一、二类曲面积分的关系得

$$\oiint_{S+S_1}z(\lambda x+3\mu y+\nu z)dS=\oiint_{S+S_1}xzdydz+3yzdzdx+z^2dxdy$$
$$=6\iiint_\Omega zdxdydz=6\int_0^1 z\cdot\pi\cdot 1\cdot\frac{(1-z)^2}{\sqrt{3}}dz=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi\quad;$$

$$\iint_{S_1}z(\lambda x+3\mu y+\nu z)dS=0,$$

故 $\iint_S z(\lambda x+3\mu y+\nu z)dS=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi.$

第三届初赛

六、（15 分）设函数 $f(x)$ 连续，a,b,c 为常数，Σ 是单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$.记第一型曲面积分 $I=\iint_\Sigma f(ax+by+cz)dS$.求证：

$$I=2\pi\int_{-1}^{1}f\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,u\right)du.$$（此题称为普阿桑公式）

证：法一

由Σ面积为4π，当a,b,c都为零时，等式显然成立。

当它们不全为零时，可知原点到平面$ax+by+cz+d=0$的距离是$\dfrac{|d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$。

设平面$P_u:u=\dfrac{ax+by+cz}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$，其中$u$固定，则$|u|$是原点到平面$P_u$的距离，从而$-1\le u\le 1$。两平面$P_u$和$P_{u+du}$截单位球$\Sigma$的截下的部分上，被积函数取值为$f\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,u\right)$。这部分摊开可以看成是一个细长条；这个细长条的长是$2\pi\sqrt{1-u^2}$，宽是$\dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}}$，它的面积为$2\pi\,du$，故得证。

法二

取新坐标面$ouvw$。ovw平面即$ax+by+cz=0$；u轴垂直此平面。设两坐标系间正交变换

$$\begin{cases}u=\dfrac{1}{k}(ax+by+cz)\\ v=a_1x+b_1y+c_1z\\ w=a_2x+b_2y+c_2z\end{cases}$$，其中$k=\sqrt{a^2+b^2+c^2},|J|=1$；

则球面$\Sigma:x^2+y^2+z^2=1\Leftrightarrow\Sigma':u^2+v^2+w^2=1$；

则 $I=\iint_{\Sigma}f(ax+by+cz)dS=\iint_{\Sigma'}f(ku)dS$

取Σ'的球面坐标：$v=\sin\varphi\cos\theta,w=\sin\varphi\sin\theta,u=\cos\varphi,dS=\sin\varphi\,d\varphi\,d\theta$；

则

$$\iint_{\Sigma'}f(ku)dS=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}f(k\cos\varphi)\sin\varphi\,d\varphi=2\pi\int_0^{\pi}f(k\cos\varphi)\sin\varphi\,d\varphi；$$

令$u=\cos\varphi$，得

$$I=\iint_{\Sigma'}f(ku)dS=2\pi\int_0^{\pi}f(k\cos\varphi)\sin\varphi\,d\varphi=2\pi\int_{-1}^{1}f(ku)du.$$

补利用曲面参数方程计算曲面积分：

若积分曲面S可用参数方程给出：

$x=x(u,v),y=y(u,v),z=z(u,v),(u,v)\in S'$，且有连续偏导数；

则我们可求出

$$A=\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},B=\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},C=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)};$$

或

$$E=x_u^2+y_u^2+z_u^2,G=x_v^2+y_v^2+z_v^2,F=x_u x_v+y_u y_v+z_u z_v;$$

则可把曲面积分化为二重积分：

$$\iint_S f(x,y,z)dS=\iint_{S'} f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{A^2+B^2+C^2}dudv;$$

或 $\iint_S f(x,y,z)dS=\iint_{S'} f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}dudv$。

特别，若 S 为球面：$x=R\sin\varphi\cos\theta,y=R\sin\varphi\sin\theta,z=R\cos\varphi$，

则

$$dS=\sqrt{EG-F^2}d\varphi d\theta=R^2\sin\varphi d\varphi d\theta。$$

法三：取新坐标系 $ouvw$，其中原点不变。平面 $ax+by+cz=0$ 即 ovw 面，u 轴垂直该面；则

$$u=\frac{ax+by+cz}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$ （原点到该平面距离）；

在新坐标系下 $I=\iint_\Sigma f(ax+by+cz)dS=\iint_{\Sigma'} f\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}u\right)dS$；

球面方程为 $\Sigma':u^2+v^2+w^2=1$，或 $v^2+w^2=\left(\sqrt{1-u^2}\right)^2$；

则球面方程的参数方程为

$$u=u,v=\sqrt{1-u^2}\cos\theta,w=\sqrt{1-u^2}\sin\theta$$

其中 $-1\le u\le 1,0\le\theta\le 2\pi$；因此

$$dS=\sqrt{EG-F^2}dud\theta=\sqrt{\frac{1}{1-u^2}(1-u^2)-0}\,dud\theta=dud\theta;$$

于是

$$I=\iint_\Sigma f(ax+by+cz)dS=\iint_{\Sigma'} f\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}u\right)dS$$
$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_{-1}^1 f\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}u\right)du=2\pi\int_{-1}^1 f\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}u\right)du$$

第三届决赛

五、（12 分）设连续可微函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F(xz-y,x-yz)=0$（其中 $F(u,v)$ 有连续偏导数）唯一确定，L 为正向单位圆周。试求：

$$I=\oint_L (xz^2+2yz)dy-(2xz+yz^2)dx$$

解：令 $Q=xz^2+2yz, P=-(2xz+yz^2)$，则

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=2(xz+y)\frac{\partial z}{\partial x}+2(x+yz)\frac{\partial z}{\partial y}+2z^2$$

利用 Green 公式，有

$$I=2\iint_{x^2+y^2\le 1}\left[(xz+y)\frac{\partial z}{\partial x}+(x+yz)\frac{\partial z}{\partial y}+z^2\right]dxdy\text{；}$$

方程 $F=0$ 对 x 求导，得

$$\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\right)F_u+\left(1-y\frac{\partial z}{\partial y}\right)F_v=0\text{，即}\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{zF_u+F_v}{xF_u-yF_v}\text{；}$$

同理可得 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{F_u+zF_v}{xF_u-yF_v}$。于是可得

$(xz+y)\dfrac{\partial z}{\partial x}+(x+yz)\dfrac{\partial z}{\partial y}=1-z^2$；所以

$$I=\oint_L (xz^2+2yz)dy-(2xz+yz^2)dx=2\iint_{x^2+y^2\le 1}dxdy=2\pi\text{。}$$

第四届初赛

一（4）设函数 $u=u(x)$ 连续可微，$u(2)=1$，且 $\int_L (x+2y)udx+(x+u^3)udy$ 在右半平面上与路径无关，求 $u(x)$。

解：由 $\dfrac{\partial[(x+2y)u]}{\partial y}=\dfrac{\partial[u(x+u^3)]}{\partial x}$，得

$(x+4u^3)u'=u$，即 $\dfrac{dx}{du}-\dfrac{1}{u}x=4u^2$，这是一个一阶线性微分方程。由通解公式得

$$x=e^{\ln u}\left(\int 4u^2e^{-\ln u}du+C\right)=u\left(\int 4udu+C\right)=u(2u^2+C)\text{；}$$

由$u(2)=1$得$C=0$，所以$u=\left(\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$。

第四届决赛

二、（15 分）设曲面$\Sigma: z^2=x^2+y^2, 1\le z\le 2$。其面密度为常数$\rho$。求在原点处的质量为 1 的质点和$\Sigma$之间的引力（记引力常数为$G$）

解：设引力$\overrightarrow{F}=\{F_x,F_y,F_z\}$，由对称性$F_x=F_y=0$。记$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$；从原点出发过点$(x,y,z)$的射线与$z$轴的夹角为$\theta$.则有$\cos\theta=\dfrac{z}{r}$。质点和面积微元之间的引力为

$$dF=G\frac{\rho dS}{r^2}\text{，而 } dF_x=G\frac{\rho dS}{r^2}\cos\theta=G\rho\frac{z}{r^3}dS\text{；所以 } F_z=\iint_\Sigma G\rho\frac{z}{r^3}dS\text{；}$$

在z轴上的区间$[1,2]$上取小区间$[z,z+dz]$，相应于该小区间有

$dS=2\pi z\sqrt{2}dz=2\sqrt{2}\pi zdz$，而$r=\sqrt{2z^2}=\sqrt{2}z$，故有

$$F_x=\iint_\Sigma G\rho\frac{z}{r^3}dS=\int_1^2 G\rho\frac{2\sqrt{2}\pi z^2}{2\sqrt{2}z^3}dz=G\rho\pi\ln 2\text{。}$$

或

$$F_z=\iint_\Sigma G\rho\frac{z}{r^3}dS=G\rho\iint_{D_{xy}}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\left(\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}\cdot\sqrt{2}dxdy$$

$$=\frac{G\rho}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^2\frac{dr}{r}=G\rho\pi\ln 2$$

第五届初赛

六、（14 分）设Σ是一个光滑封闭曲面，方向朝外。给定第二型曲面积分

$$I=\iint_\Sigma\left(x^3-x\right)dydz+\left(2y^3-y\right)dzdx+\left(3z^3-z\right)dxdy$$

试确定曲面Σ，使得积分I的值最小，并求该最小值。

解：设Σ所围的立体为Ω，则由 Gauss 公式，有

$$I=\iiint_\Omega\left(3x^2+6y^2+9z^3-3\right)dv=3\iiint_\Omega\left(x^2+2y^2+3z^2-1\right)dv\text{；}$$

为了使得I达到最小，就是要求Ω使得$x^2+2y^2+3z^2-1\le 0$

的空间区域最大，即

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|x^2+2y^2+3z^2\le 1\right\}$$

以Ω是一个椭球，Σ为椭球Ω的表面时，积分I最小；下面求此最小值。

令$x=r\sin\varphi\cos\theta, y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi\sin\theta, z=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cos\varphi$，则

$$I=\frac{1}{\sqrt{6}}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^1\left(r^2-1\right)r^2dr=-\frac{4\sqrt{6}}{15}\pi。$$

七、（14分）设$I_a=\int_C\dfrac{ydx-xdy}{\left(x^2+y^2\right)^a}$，其中$a$为常数，曲线$C$为椭圆

$x^2+xy+y^2=r^2$，取正向。求极限$\lim\limits_{r\to+\infty}I_a(r)$。

解：先求正交变换

由$x^2+xy+y^2=r^2$，得

$$A=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix},|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 1-\lambda\end{vmatrix}=0，得\lambda_1=\frac{3}{2}，\lambda_2=\frac{1}{2}；$$

从而得正交变换矩阵

$$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}，得正交变换\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}；$$

作变换

$x=\dfrac{u+v}{\sqrt{2}}, y=\dfrac{u-v}{\sqrt{2}}$，则曲线$C$变为$uov$平面的$\Gamma:\dfrac{3}{2}u^2+\dfrac{1}{2}v^2=r^2$，

也是取正向且有$x^2+y^2=u^2+v^2$，

$$ydx-xdy=udv-vdu, I_a=\int_\Gamma\frac{udv-vdu}{\left(u^2+v^2\right)^a}；$$

令$u=\sqrt{\dfrac{2}{3}}r\cos\theta, v=\sqrt{2}r\sin\theta$，则有 $udv-vdu=\dfrac{2}{\sqrt{3}}r^2d\theta$；

$$I_a(r)=\frac{2r^{2(1-a)}}{\sqrt{3}}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\left(\frac{2}{3}\cos^2\theta+2\sin^2\theta\right)^a}=\frac{2r^{2(1-a)}}{\sqrt{3}}J_a；$$

其中$J_a=\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\left(\frac{2}{3}\cos^2\theta+2\sin^2\theta\right)^a}$

因此当$a>1$和$a<1$时，所求极限分别为0和∞；
当$a=1$时

$$J_1=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\frac{2}{3}\cos^2+2\sin^2\theta}=2\sqrt{3}\arctan\left(\sqrt{3}\tan\theta\right)_0^{\frac{\pi}{2}}=\sqrt{3}\pi;$$

故所求极限为

$$\lim_{r\to+\infty}I_a(r)=\begin{cases}0,a>1\\2\pi,a=1\\\infty,a<1\end{cases}。$$

问题：$C:3x^2-2xy+3y^2=r^2$，$\lim\limits_{r\to+\infty}I_a(r)$

第五届决赛

五、（12 分）设函数$f(x)$连续可导，$P=Q=R=f\left(\left(x^2+y^2\right)z\right)$，

有向曲面Σ_t是圆柱体$x^2+y^2\le t^2,0\le z\le1$的表面，方向朝外。记第二型曲面积分

$I_t=\iint_{\Sigma_t}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$，求极限$\lim\limits_{t\to0^+}\frac{I_t}{t^4}$。

解：由 Gauss 公式

$$I_t=\iiint_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv=\iiint_\Omega\left(2xz+2yz+x^2+y^2\right)f'\left(\left(x^2+y^2\right)z\right)dv；$$

由对称性

$$\iiint_\Omega(2xz+2yz)f'\left(\left(x^2+y^2\right)z\right)dv=0，从而$$

$$I_t=\iiint_\Omega\left(x^2+y^2\right)f'\left(\left(x^2+y^2\right)z\right)dv$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^t rdt\int_0^1 r^2f'\left(r^2z\right)dz=2\pi\int_0^t\left[\int_0^1 r^3f'\left(r^2z\right)dz\right]dr;$$

所以

$$\lim_{t\to0+}\frac{I_t}{t^4}=\lim_{t\to0+}\frac{2\pi\int_0^t\left[\int_0^1 r^3f'\left(r^2z\right)dz\right]dr}{t^4}=\frac{\pi}{2}\lim_{t\to0+}\frac{\int_0^1 t^3f'\left(t^2z\right)dz}{t^3}$$

$$=\frac{\pi}{2}\lim_{t\to0+}\frac{\int_0^1 f'\left(t^2z\right)d\left(t^2z\right)}{t^2}=\frac{\pi}{2}\lim_{t\to0+}\frac{f\left(t^2\right)-f(0)}{t^2}=\frac{\pi}{2}f'(0)$$

第六届初赛

四、（14 分）（1）设一球缺高为 h，球半径为 R。证明该球缺的体积为 $\frac{\pi}{3}(3R-h)h^2$，球冠的面积为 $2\pi Rh$.

（2）设球体 $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\le 12$ 被平面 $P: x+y+z=6$ 所截的小球缺为 Ω。记球缺上的球冠为 Σ，方向指向球外，求第二型曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma} xdydz+ydzdx+zdxdy$$

证明：（1）设球缺所在的球表面方程为 $x^2+y^2+z^2=R^2$，球缺的中心线为 z 轴，且设球缺所在的圆锥顶角为 2α。

所以过任一 $z\in[R-h,R]$ 的截面方程为 $\qquad x^2+y^2=R^2-z^2$；

所以球缺的体积 $V=\iiint_{\Omega} dv=\int_{R-h}^{R}\pi\left(R^2-z^2\right)dz=\frac{\pi}{3}(3R-h)h^2$；

$$\Sigma: z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}, dS=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy$$

$$S=\iint_{D_{xy}}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy, D_{xy}: x^2+y^2\le R^2-(R-h)^2$$

球冠的面积 $S=\iint_{\Sigma} dS=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{R^2-(R-h)^2}}\frac{R}{\sqrt{R^2-r^2}}rdr=2\pi Rh$

或利用球面参数方程 $\begin{cases}x=R\sin\varphi\cos\theta\\ y=R\sin\varphi\sin\theta, dS=R^2\sin\varphi d\varphi d\theta\\ z=\cos\varphi\end{cases}$；

$S=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\alpha}R^2\sin\varphi d\varphi=2\pi R^2(1-\cos\varphi)=2\pi Rh$。

（2）作辅助面

$\Sigma_1: x+y+z=6$，取下侧；则

$$I=\iint_{\Sigma} xdydz+ydzdx+zdxdy=\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}$$

$$=\iiint_{\Omega_1}3dv+\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma_1}(x+y+z)dS=3V+2\sqrt{3}S$$

令 $X=x-1, Y=y-1, Z=z-1$，则

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\le 12\\ x+y+z=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}X^2+Y^2+Z^2\le 12\\ X+Y+Z=3\end{cases};$$

得球缺顶点为$(2,2,2)$，球缺底圆中心为$(1,1,1)$，因此$h=\sqrt{3},R=2\sqrt{3}$；所以

球缺底圆半径$R_1=\sqrt{R^2-(R-h)^2}=\sqrt{2Rh-h^2}$

$$I=3\cdot\frac{\pi}{3}(3R-h)h^2+2\sqrt{3}\cdot\pi\left(2Rh-h^2\right)$$
$$=\pi\left(3\cdot 2\sqrt{3}-\sqrt{3}\right)+2\sqrt{3}\cdot\pi\left(2\cdot 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}-3\right)=33\sqrt{3}\pi$$

第六届决赛

一、（5）设曲线积分$I=\oint_L\frac{xdy-ydx}{|x|+|y|}$，其中$L$是以$(1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1)$为顶点的正方形的边界曲线，方向为逆时针方向，则$I=4$。

解：将$|x|+|y|=1$代入，再由 Green 公式，得

$$I=\oint_L xdy-ydx=\iint_D 2dxdy=4。$$

类题：

求$I=\oint_L\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$，其中$L$为以下正向曲线：

1）$x^2+y^2=a^2\ (a>0)$；

2）$|x|+|y|=a$；

3）$4x^2+y^2=a^2$；

4）$(x-1)^2+y^2=a^2,(a\neq 1)$；

5）任一条无重点，且不经过原点的分段光滑正向闭曲线；

6）任一绕原点k次分段光滑正向闭曲线。

求$I=\oiint_\Sigma\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$，$\Sigma$为以下外侧闭曲面：

1）$4x^2+y^2+2z^2=a^2$;

2）$z=1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}\quad(z\ge 0)$;

3）任一不经过原点的闭曲面。

第七届初赛： 无线面积分题；

第七届决赛

六、（14 分）设 $P(x,y,z)$ 和 $R(x,y,z)$ 在空间上有连续偏导数，设上半球面

$S: z = z_0 + \sqrt{r^2 - (x-x_0)^2 - (y-y_0)^2}$ 方向向上；若对任何点 (x_0,y_0,z_0) 和

$r>0$，第二型曲面积分 $\iint_S Pdydz + Rdxdy = 0$，证明：$\dfrac{\partial P}{\partial x} \equiv 0$。

证：记上半球面 S 的底平面为 D，方向向下，S，D 围成的区域记为 Ω。由 Gauss 公式得

$$0 = \iint_S Pdydz + zdxdy = \oiint_{S+D} - \iint_D \quad = \iiint_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dv + \iint_{D_{xy}} Rdxdy\ ;$$

所以

$$\iiint_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dv = -\iint_{D_{xy}} Rdxdy\ ; \qquad \text{（*）}$$

由积分中值定理得

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)_{(\xi,\eta,\zeta)} \frac{2\pi}{3} r^3 = -R(\omega,\tau,z_0)\cdot \pi r^2，\text{其中}(\xi,\eta,\zeta)\in\Omega,(\omega,\tau,z_0)\in D\ ;$$

即

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)_{(\xi,\eta,\zeta)} \frac{2r}{3} = -R(\omega,\tau,z_0)；\text{令 } r\to 0，\text{则}(\omega,\tau,z_0)\to(x_0,y_0,z_0),$$

$R(\omega,\tau,z_0)\to R(x_0,y_0,z_0)=0$；由点 (x_0,y_0,z_0) 的任意性，故 $R(x,y,z)\equiv 0$；

从而由（*）得

$$\iiint_\Omega \frac{\partial P}{\partial x} dv = 0\ ;$$

再由 Ω 的任意性（因为 r 任意）和 $\dfrac{\partial P}{\partial x}$ 的连续性，得 $\dfrac{\partial P}{\partial x}\equiv 0$。

第八届决赛

四、（14 分）设函数 $f(x,y,z)$ 在区域 $\Omega = \{(x,y,z) | x^2+y^2+z^2 \le 1\}$ 上具有连续二阶偏导数，

且满足 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$，计算 $I = \iiint_\Omega \left(x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} + z\dfrac{\partial f}{\partial z} \right) dxdydz$。

解：法一

记球面Σ：$x^2+y^2+z^2=1$的外侧的单位法向量为$\vec{n}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$，则

$$\frac{\partial f}{\partial n}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma\text{；}$$

考虑积分等式

$\oiint_\Sigma \frac{\partial f}{\partial n}dS=\oiint_\Sigma\left(x^2+y^2+z^2\right)\frac{\partial f}{\partial n}dS$，对两边都用 Gauss 公式，得

$$\oiint_\Sigma \frac{\partial f}{\partial n}dS=\oiint_\Sigma\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma\right)dS$$

（1）

$$=\iiint_\Omega\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)dv$$

$$\oiint_\Sigma\left(x^2+y^2+z^2\right)\frac{\partial f}{\partial n}dS=\oiint_\Sigma\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma\right)dS$$

（2）

$$=2\iiint_\Omega\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}\right)dv+\iiint_\Omega\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)dv$$

将已知条件及（1）代入（2），并整理得

$$I=\frac{1}{2}\iiint_\Omega\left(1-\left(x^2+y^2+z^2\right)\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)dv$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^1\left(1-\rho^2\right)\rho^3d\rho=\frac{\pi}{6}$$

法二：因为

$$\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial z}+z\frac{\partial f}{\partial z}\right)=\{x,y,z\}\cdot\left\{\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right\},$$

$u=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right),v=f(x,y,z)$，则

$\nabla u=\{x,y,z\},\nabla v=\left\{\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right\}$；由 Green 第一公式，得

$$I=\iiint_\Omega\nabla u\nabla vdxdydz=\oiint_\Sigma u\frac{\partial v}{\partial n}dS-\iiint_\Omega u\Delta vdxdydz\text{；}$$

$$\oiint_\Sigma u\frac{\partial v}{\partial n}dS=\oiint_\Sigma\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma\right)dS$$

$$=\frac{1}{2}\oiint_\Sigma\left(\frac{\partial f}{\partial x}dydz+\frac{\partial f}{\partial y}dzdx+\frac{\partial f}{\partial z}dzdx\right)=\frac{1}{2}\iiint_\Omega\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)dxdydz$$

$$=\frac{1}{2}\iiint_\Omega\sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$$

$$\iiint_\Omega u\Delta v dxdydz=\iiint_\Omega \frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)dxdydz$$
$$=\frac{1}{2}\iiint_\Omega \left(x^2+y^2+z^2\right)\sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$$

所以

$$I=\frac{1}{2}\iiint_\Omega\left(1-\left(x^2+y^2+z^2\right)\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)dv$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^1\left(1-\rho^2\right)\rho^3 d\rho=\frac{\pi}{6}$$

第九届预赛

三（14）设曲线Γ为在$x^2+y^2+z^2=1, x+z=1, x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0$，且从$A(1,0,0)$到$B(0,0,1)$的一段。求$I=\int_\Gamma ydx+zdy+xdz$。

法一（降维法）令$z=1-x, \therefore dz=-dx$；

$$\therefore I=\int_L ydx+(1-x)dx+x(-dx)$$
$$=\int_L (y-x)dx+(1-x)dy$$

其中L为Γ在xy平面上的投影曲线：

$$L:\frac{(x-1/2)^2}{(1/2)^2}+\frac{y^2}{\left(\sqrt{2}/2\right)^2}=1,(y\geq 0);$$

作辅助线$L_1: y=0,(x:0\to 1)$，则有 Green 格式

$$I=\oint_{L+L_1}-\int_{L_1}$$
$$=\iint_D(-1-1)dxdy-\int_0^1(-x)dx=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$$

法二 （参数法）令

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos t \\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin t & (t:0\to\pi) \\ z=1-x=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos t \end{cases}$$

$$I=\int_0^{\pi}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t\left(-\frac{1}{2}\sin t\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos t\right)\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos t\right)\frac{1}{2}\sin t\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$$

法三 （参数法）令

$$\begin{cases} y=\sqrt{2x-x^2} \\ z=1-x \end{cases},\quad (x:1\to 0)$$

$$I=\int_1^0\left(\sqrt{2x-x^2}+(1-x)\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}-x\right)$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^1\sqrt{\frac{1-x}{x}}dx+\int_0^1 xdx$$

法四 （斯托克斯公式）

在 $x+z=1$ 上作辅助线 $\Gamma_1:\overrightarrow{BA}:\begin{cases} x+z=1 \\ y=0 \end{cases}$，$\Sigma:x+z=1$，取下侧，则

$$I=\oint_{\Gamma+\Gamma_1}-\int_{\Gamma_1}$$

$$=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix}-\int_{\Gamma_1} ydx+zdy+xdz$$

$$=-\iint_{\Sigma} dydz+dzdx+dxdy-\int_{\Gamma_1} ydx+zdx+xdz$$

$$=-2\iint_{D_{xy}} dxdy+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$$

第九届决赛

一（3）:（5 分）设函数 $f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数，

满足 $df(x,y)=ye^ydx+x(1+y)e^ydy$， $f(0,0)=0$ 则 $f(x,y)=$ ______ 。

$f(x,y)=xye^y$

（4）（5 分）满足 $\dfrac{du(t)}{dt}=u(t)+\int_0^1 u(t)dt$ 及 $u(0)=1$ 的可微函数 $u(t)=$ _______ 。

$u(t)=\dfrac{2e^t-e+1}{3-e}$ 。

六（12 分）设 $f(x,y)$ 在区域 $D\{(x,y)|x^2+y^2\le a^2\}$ 上具有一阶连续偏导数，且满足

$f(x,y)\big|_{x^2+y^2=a^2}=a^2, \max\limits_{(x,y)\in D}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]=a^2$，其中 $a>0$；证明：

$$\left|\iint_D f(x,y)dxdy\right|\le\frac{4}{3}\pi a^4。$$

解：在 Green 公式

$$\oint_L Pdx+Qdy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial y}-\frac{\partial P}{\partial x}\right)dxdy$$

中，分别令 $P=yf(x,y),Q=0$ 及 $P=0,Q=xf(x,y)$，得

$$\iint_D f(x,y)dxdy=-\oint_L yf(x,y)dx-\iint_D f\frac{\partial f}{\partial y}dxdy$$

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\oint_L xf(x,y)dy-\iint_D x\frac{\partial f}{\partial x}dxdy$$

两式相加，得

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\frac{1}{2}\oint_L(-ydx+xdy)f(x,y)-\frac{1}{2}\iint_D\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)dxdy$$

又 $f(x,y)\big|_{x^2+y^2=a^2}=a^2$，所以

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\frac{a^2}{2}\oint_L(-ydx+xdy)-\frac{1}{2}\iint_D\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)dxdy$$
$$=I_1+I_2$$

对 I_1 在利用 Green 公式

$$I_1=\frac{a^2}{2}\oint_L -ydx+xdy=a^2\iint_D dxdy=\pi a^4；$$

对 I_2 的被积函数应用柯西不等式，得

$$|I_2|\le\frac{1}{2}\iint_D\left|x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right|dxdy$$
$$\le\frac{1}{2}\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$
$$\le\frac{a}{2}\iint_D\sqrt{x^2+y^2}dxdy=\frac{1}{3}\pi a^4$$

所以

$$\left|\iint_D f(x,y)dxdy\right| \le \pi a^4 + \frac{\pi a^4}{3} = \frac{4\pi a^4}{3}。$$

类题：（Poincare 不等式）设 D 是由简单光滑曲线 L 围成的区域，$f(x,y)$ 在 D 及其边界上有连续偏导数，且有 $f(x,y)=0\left((x,y)\in L\right)$，则

$$\iint_D f^2(x,y)\,dxdy \le \max_D\left\{x^2+y^2\right\}\iint_D\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]dxdy$$

证：由格林公式

$$\oint_L Pdx+Qdy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

令 $P=yg(x,y),Q=0$，得

$$\iint_D g(x,y)dxdy=-\oint_L yg(x,y)dx-\iint_D y\frac{\partial g}{\partial y}dxdy \qquad （1）$$

令 $P=0,Q=xg(x,y)$，得

$$\iint_D g(x,y)dxdy=-\oint_L xg(x,y)dx-\iint_D x\frac{\partial g}{\partial x}dxdy \qquad （2）$$

（1）+（2）得

$$\iint_D g(x,y)dxdy=\frac{1}{2}\oint_L xg(x,y)dy-yg(x,y)dx-\frac{1}{2}\iint_D\left(x\frac{\partial g}{\partial x}+y\frac{\partial g}{\partial y}\right)dxdy \qquad （3）$$

当 $g=f^2(x,y),f(x,y)=0\,(x,y)\in L$ 时

$$\iint_D f^2(x,y)dxdy=-\iint_D\left[xf(x,y)\frac{\partial f}{\partial x}+yf(x,y)\frac{\partial f}{\partial y}\right]dxdy$$

由 Cauchy 不等式

$$\begin{aligned}\iint_D f^2(x,y)dxdy&=\left|\iint_D f^2(x,y)dxdy\right|\le\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\,|f(x,y)|\cdot\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}dxdy\\&\le\max_{(x,y)\in D}\sqrt{x^2+y^2}\cdot\iint_D|f(x,y)|\cdot\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}dxdy\\&\le\max_{(x,y)\in D}\sqrt{x^2+y^2}\cdot\left[\iint_D f^2(x,y)dxdy\right]^{\frac{1}{2}}\cdot\left[\iint_D\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right)dxdy\right]^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

两端消去$\left[\iint_D f^2(x,y)\,dxdy\right]^{\frac{1}{2}}$，再平方即得

$$\iint_D f^2(x,y)\,dxdy \le \max_D\left\{x^2+y^2\right\}\iint_D\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]dxdy$$

第十届预赛

二（8 分）设$f(t)$在$t\neq 0$时一阶连续可导，且$f(1)=0$；求函数

$f(x^2-y^2)$，使得曲线积分$\int_L y\left(2-f(x^2-y^2)\right)dx+xf(x^2-y^2)dy$与路径无关。

解：令$P=y\left(2-f(x^2-y^2)\right), Q=xf(x^2-y^2)$

于是

$$\begin{aligned}P_y&=2-f(x^2-y^2)+y\left(-f'(x^2-y^2)(-2y)\right)\\&=2-f(x^2-y^2)+2y^2f'(x^2-y^2)\\Q_x&=f(x^2-y^2)+2x^2f'(x^2-y^2)\end{aligned}$$

由积分与路径无关条件，$P_y=Q_x$，得

$$(x^2-y^2)f'(x^2-y^2)+f(x^2-y^2)-1=0；$$

令$u=x^2-y^2$，得$uf'(u)+f(u)-1=0$；

$$\frac{df(u)}{1-f(u)}=\frac{du}{u},\frac{1}{1-f(u)}=C_1u,$$

$$f(u)=1+\frac{C}{u}$$

由$f(1)=0, C=-1, \therefore f(x^2-y^2)=1-\frac{1}{x^2-y^2}$

第十届决赛

一（3）5 分设曲线 L 由空间区域 $0\le x\le 1,0\le y\le 1,0\le z\le 1$

的表面与平面 $x+y+z=\dfrac{3}{2}$ 的交线，

则 $\left|\oint_L\left(z^2-y^2\right)dx+\left(x^2-z^2\right)dy+\left(y^2-z^2\right)dz\right|=\dfrac{9}{2}$

第九届预赛，一（1）

已知可导函数 $f(x)\cos x+2\int_0^x f(t)\sin t dt=x+1$，则 $f(x)=$ ________ 。

两边求导，得

$$f'(x)\cos x+f(x)\sin x=1, f'(x)+f(x)\tan x=\sec x\text{；}$$

从而,由一阶线性微分方程求解公式得

$$f(x)=\sin x+\cos x\text{。}$$

补 1：设 Γ 为椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 被平面 $lx+my+nz=0$ 所截成的一个正向椭圆曲线，

求 $I=\int_\Gamma (x-y)dx+(y-z)dy+(z-x)dz$

解:设平面上以 Γ 为边界的部分曲面为 Σ，取上侧；平面上侧法向量为

$$\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}\{l,m,n\}.$$

由 stokes 公式，得

$$I=\frac{1}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}\iint_\Sigma\begin{vmatrix} l & m & n\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x-y & y-z & z-x\end{vmatrix}dS=\frac{l+m+n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}\iint_\Sigma dS$$

$$=\frac{l+m+n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}\sigma(\Sigma)$$

其中 $\sigma(\Sigma)$ 为所截的椭圆面积，下求此面积.

解法 1：令 $d^2=x^2+y^2+z^2$

$$F=d^2+\lambda(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1)+\mu(lx+my+nz)$$

$$\begin{cases} F_x = 2x + \dfrac{2\lambda x}{a^2} + l\mu \cdots\cdots(1) \\ F_y = 2y + \dfrac{2\lambda y}{b^2} + m\mu \cdots\cdots(2) \\ F_z = 2z + \dfrac{2\lambda z}{c^2} + n\mu \cdots\cdots(3) \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \cdots\cdots(4) \\ lx + my + nz = 0 \cdots\cdots(5) \end{cases}$$

$(1)x + (2)y + (3)z \Rightarrow d^2 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -d^2$ 代入（4）

$\dfrac{l^2 a^2}{a^2 - d^2} + \dfrac{m^2 a^2}{b^2 - d^2} + \dfrac{n^2 a^2}{c^2 - d^2} = 0$ 化简后为 d^2 的一元二次方程

$d_1^2 d_2^2$ 为方程的常数项，所以 $d_1 d_2 = abc \dfrac{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}{\sqrt{l^2 a^2 + m^2 b^2 + n^2 c^2}}$

所以 $\sigma(\Sigma) = \pi d_1 d_2$

解法 2：（椭圆 $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1$ 的面积 $S = \dfrac{\pi}{\sqrt{AC - B^2}}$）

$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ lx + my + nz = 0 \end{cases} \Rightarrow$ 消去 z 得到椭圆在 xoy 面上的投影区域

$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1$ 设面积为 D

$\cos\gamma = \dfrac{n}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$

椭圆的面积 $\sigma(\Sigma) = \dfrac{D}{\cos\gamma} = \pi abc \dfrac{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}{\sqrt{l^2 a^2 + m^2 b^2 + n^2 c^2}}$.

所以 $I = \pi abc \dfrac{l + m + n}{\sqrt{l^2 a^2 + m^2 b^2 + n^2 c^2}}$