微积分（一）下第 5 周第三次课作业答案与提示

方向导数与梯度

1. 填空:

1）函数 $u = xyz$ 在点 M $(1,1,1)$ 处沿方向 $l = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ 的方向导数

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_M = \underline{\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma}，\quad 梯度 \mathbf{grad}\, u(M) = \underline{\{1,1,1\}}.$$

2）$u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ 在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的梯度 $\mathbf{grad}\, u(M_0)$

的模是 $\underline{u_0^2}$，其方向余弦是 $\underline{-x_0u_0}$，$\underline{-y_0u_0}$，$\underline{-z_0u_0}$ （$u_0 = \dfrac{1}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}}$）

3）在原点沿任何方向存在方向导数，但是没有偏导的函数有 $\underline{f(x, y) = |x + y|}$.

2. 求 $u = x^2 - xy + y^2$ 在点 $(1,1)$ 处沿方向 $\boldsymbol{l} = \{\cos\alpha, \cos\beta\}$ 的方向导数，并讨论此方向导数在哪个方向上方向导数最大、最小以及为 0.

答案：$\left.\dfrac{\partial z}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{(1,1)} = \sqrt{2}\sin(\alpha + \dfrac{\pi}{4})$，

当 $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ 时，方向导数有最大值 $\sqrt{2}$；当 $\alpha = \dfrac{5\pi}{4}$ 时，方向导数有最小值 $-\sqrt{2}$；

当 $\alpha = \dfrac{3}{4}\pi$ 或 $\alpha = -\dfrac{1}{4}\pi$ 时，方向导数等于零.

3. 求 $u = x^2 + y^2 - z^2$ 在点 $A(a,0,0)$ 及点 $B(0,a,0)$ 的梯度矢量之间的夹角 θ.

答案： $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

4. 设 $f(x, y, z) = x^2yz$， $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$，求 $\mathbf{grad}\ (\mathbf{grad}\, f \cdot \mathbf{grad}\, g)$.

答案：$\mathbf{grad}\ (\mathbf{grad}\, f \cdot \mathbf{grad}\ g) = 4\{2xyz, x^2z, x^2y\}$.

5. 求$u=\ln(x^2+y^2)$在点$M_0(x_0,y_0)$处沿过此点等量线的外法线方向$\boldsymbol{n}$的方向导数.

解 等量线为$\ln(x^2+y^2)=C_1 \Rightarrow x^2+y^2=C$，在$M_0(x_0,y_0)$处外线方向$\boldsymbol{n}=\{x_0,y_0\}$，

于是$\left.\dfrac{\partial \ln(x^2+y^2)}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{M_0}=\left.\left\{\dfrac{2x}{x^2+y^2},\dfrac{2y}{x^2+y^2}\right\}\right|_{M_0}\cdot \boldsymbol{n}^{\circ}$

$$=\left.\left\{\frac{2x_0}{{x_0}^2+{y_0}^2},\frac{2y_0}{{x_0}^2+{y_0}^2}\right\}\right|_{M_0}\cdot\left\{\frac{x_0}{\sqrt{{x_0}^2+{y_0}^2}},\frac{y_0}{\sqrt{{x_0}^2+{y_0}^2}}\right\}=\frac{2}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}.$$

6. 设$u=\ln\dfrac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$，试求$|\mathbf{grad}\ u|=1$的轨迹方程.

解 记$r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$，则$u=-\ln r$

所以$\mathbf{grad}\ u=-\dfrac{1}{r}\{\dfrac{x-a}{r},\dfrac{y-b}{r},\dfrac{z-c}{r}\}$，$|\mathbf{grad}\ u|=\dfrac{1}{r}$，

于是由题设知所求轨迹为$r=1$，即单位球面$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=1$.

7. 设$f(r)$可导，其中$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$为点$P(x,y,z)$处矢径$\boldsymbol{r}$的模，试证明：

$\mathbf{grad}\ f(r)=f'(r)\boldsymbol{r}^{\circ}$.

证 $\mathbf{grad}\ f(r)=\{\dfrac{x}{r}f'(r),\dfrac{y}{r}f'(r),\dfrac{z}{r}f'(r)\}=f'(r)\cdot\dfrac{1}{r}\{x,y,z\}=f'(r)\boldsymbol{r}^{\circ}$.

8. 讨论函数$f(x,y)=|x+y|$在点$(0,0)$处的偏导数的存在性，沿着哪个方向存在方向导数？

解 由$f(x,0)=|x|$知，$f_x(0,0)$不存在；同理$f_y(0,0)$不存在，从而不可微。

设任一射线的倾角为$\alpha\quad(0\le\alpha<2\pi)$，则射线上点$(x,y)=(\rho\cos\alpha,\rho\sin\alpha)$（$\rho$为$(x,y)$到$(0,0)$的距离），于是

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial \boldsymbol{n}}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(\rho\cos\alpha,\rho\sin\alpha)-f(0,0)}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho|\cos\alpha+\sin\alpha|}{\rho}=|\sin\alpha+\cos\alpha|,$$

即$f(x,y)$在$(0,0)$处沿任意方向$\boldsymbol{n}$的方向导数存在，且等于$|\sin\alpha+\cos\alpha|$.