微分方程主要结论一览

一、一阶微分方程

隐式 $F(x,y,y')=0$,显式 $y'=f(x,y)$

1、可分离变量 $\dfrac{dy}{dx}=f(x)g(y)$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx$$

注意：若 $g(y)=0 \Rightarrow y=y_0$

也可能是原方程之解。

2、齐次方程 $\dfrac{dy}{dx}=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 令 $u=\dfrac{y}{x}, y=xu, y'=u+xu'$

代入原方程，得 $u+xu'=f(u)\Rightarrow\int\dfrac{du}{f(u)-u}=\int\dfrac{dx}{x}$

类似还有 $\dfrac{dx}{dy}=g\left(\dfrac{x}{y}\right)$ 可令 $v=x/y$

补：k次齐次函数概念

若可微函数f满足 $f(tx,ty)=t^k f(x,y)$

则称 f 为二元 k 次齐次函数.易得

$$xf_x'+yf_y'=kf(x,y)$$

3、可化为可分离变量的方程

(1)、$\frac{dy}{dx}=f(ax+by+c)$ 令 $u=ax+by+c$

(2)、$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$

若 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\lambda$, 令 $u=a_2x+b_2y+c_2$

若 $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$, 先解 $\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0\\ a_2x+b_2y+c_2=0\end{cases}$ 得唯一解(x_0,y_0)

再令$\begin{cases}x=X+x_0\\ y=Y+y_0\end{cases}$, 原方程化为$\frac{dY}{dX}=g\left(\frac{Y}{X}\right)$

4、全微分方程（恰当方程）

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0,\text{其中}\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

必存在 $F(x,y)$ 满足 $dF(x,y)=M(x,y)dx+N(x,y)dy$

可得解：$F(x,y)=c$

或选折线 $(x_0,y_0)\to(x,y_0)\to(x,y)$ 积分，得

$$\int_{x_0}^{x}M(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}N(x,y)dy=c$$

若存在 $\lambda(x,y)$ 使 $(\lambda M)dx+(\lambda N)dy=0$ 为全微分方程，则称 $\lambda(x,y)$ 为积分因子。

由$\dfrac{\partial}{\partial y}(\lambda M)=\dfrac{\partial}{\partial x}(\lambda N)$, 得$\lambda_y M+\lambda M_y=\lambda_x N+\lambda N_x$

或$N\lambda_x-M\lambda_y=\lambda(M_y-N_x)$

常用积分因子有：

$$\frac{1}{x^2+y^2},\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{1}{x^2},\frac{1}{y^2},\frac{1}{xy}$$

常用方法有：拆项、拼凑、重新组合等。

5、一阶线性微分方程

标准形式 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$, 或 $\frac{dx}{dy}+P(y)x=Q(y)$

公式: $y=e^{-\int P(x)dx}[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C]$ 或常数变易法

贝努利($Bernoulli$)方程:

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^{\alpha} \quad (\alpha\neq 0,1)$$

令: $z=y^{1-\alpha}\Rightarrow \frac{dz}{dx}+(1-\alpha)P(x)z=(1-\alpha)Q(x)$

化为上面的标准形式

6 、特殊代换

二、可降阶的高阶微分方程

一般 $F(x,y,y',y'')=0$, 其中可求解形式为 $y''=f(x,y,y')$

1、$y^{(n)}=f(x)$：积分 n 次.

2、$y''=f(x,y')$ 令 $y'=p$, 则原方程化为一阶方程：

$$\frac{dp}{dx}=f(x,p)$$

3、$y''=f(y,y')$ 令 $y'=p$, 则 $y''=p\frac{dp}{dy}$

则原方程化为 $p\frac{dp}{dy}=f(y,p)$ 再求解.

三、高阶线性微分方程解的结构（以二阶为例）

非齐次：$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \cdots\cdots\cdots (1)$

齐次：$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \ \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$

解的结构： 1、若 $y_1(x), y_2(x)$ 是(2)的解，

则 $C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ 也是(2)的解.

2、若 $y_1(x)/y_2(x) \neq$ 常数（此时称两者线性无关）

则(2)的通解为 $\bar{Y} = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$

3、若 $y^*(x)$ 是(1)的特解，$\bar{Y}(x)$ 是(2)的通解，

则 $y = \bar{Y} + y^*$ 是(1)的通解.

4、若 $f(x) = f_1(x) + \cdots + f_k(x)$， $y_i^*(x)$ 分别是

$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_k(x)$ 的特解$(i=1,2,\cdots,k)$,

则 $y_1^*(x) + y_2^*(x) + \cdots + y_k^*(x)$ 是(1) 的特解.

5、任何(1) 的两解之差亦是(2) 之解.

6、二阶以上的方程也有类似结论.

四、二阶变系数线性方程求解

1、齐次方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$

若观测得 $y_1(x)$ 是一特解，令 $y_2(x) = y_1(x)u(x)$

代入原方程，得

$$y_2(x) = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx} dx,$$得齐次方程通解:

$$\overline{Y} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

2、非齐次方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$

若已知或通过上述方法求得齐次方程的通解

$$\overline{Y}=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$$

变易常数求特解，令 $y^*=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)$

代入非齐次方程，得 $\begin{cases} y_1C_1'+y_2C_2'=0 \\ y_1'C_1'+y_2'C_2'=f(x) \end{cases}$

$$C_1(x)=\int\frac{-y_2f(x)}{W}dx,\quad C_2(x)=\int\frac{y_1f(x)}{W}dx$$

其中 $W=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$

非齐次通解为 $y=C_1y_1+C_2y_2+C_1(x)y_1+C_2(x)y_2$

五、常系数线性微分

1、二阶齐次线性微分方程 $y'' + py' + qy = 0$

特征方程为 $r^2 + pr + q = 0$

1）、特征根 $r_1 = r_2 = r$， 通解为 $\bar{Y} = (C_1 + C_2 x)e^{rx}$

2）、特征根 $r_1 \neq r_2$,通解为 $Y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

3）、特征根 $r = \alpha \pm i\beta$,通解为

$$\bar{Y} = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$$

2、n阶常系数齐次方程

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} y' + p_n y = 0$$

特征方程 $r^n + p_1 r^{n-1} + \cdots + p_{n-1} r + p_n = 0$

根据特征方程根的情况，通解有以下结论:

1）、单实根 r_i , 给出一项　$C_i e^{r_i x}$;

2）、有一对单复根 $\alpha \pm i\beta$, 给出两项

$$e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x);$$

3）、有 k 重实根 r, 给出 k 项

$$e^{rx}(C_1 + C_2 x + \cdots + C_k x^{k-1})$$

4）、有一对 k 重复根 $\alpha \pm i\beta$，给出 2 k 项

$$e^{\alpha x}[(C_1 + C_2 x + \cdots + C_k x^{k-1}) \cos \beta x + (B_1 + B_2 x + \cdots + B_k x^{k-1}) \sin \beta x]$$

3、非齐次方程 $y'' + py' + qy = f(x)$

先求齐次方程的通解，再根据非齐次项 $f(x)$ 的构造，用待定系数法求其特解.

1）、$f(x) = e^{\lambda x} P_m(x) \Rightarrow y^* = x^k Q_m(x) e^{\lambda x}$

$$\text{其中 } k = \begin{cases} 0, \text{若}\lambda\text{不是特征根;} \\ 1, \text{若}\lambda\text{是特征单根;} \\ 2, \text{若}\lambda\text{是二重特征根.} \end{cases}$$

$Q_m(x)$ 是与 $P_m(x)$ 同次的多项式.

2）、$f(x) = e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x + P_n(x)\sin\omega x]$

$$\Rightarrow y^* = x^k e^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x + R_m^{(2)}(x)\sin\omega x]$$

其中$k=\begin{cases}0,\text{若}\lambda\pm i\omega\text{不是特征根；}\\1,\text{若}\lambda\pm i\omega\text{是特征根.}\end{cases}$

$R_m^{(1)}(x),R_m^{(2)}(x)$为两m次多项式， $m=\max\{l,n\}$

4）、若$f(x)$为其他情形，可试用常数变易法求其特解（见（四））.

六、欧拉方程

$$x^n y^{(n)}+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}xy'+a_ny=f(x)$$

令 $x=e^t,t=\ln x$,记$D^k=\dfrac{d^k}{dt^k}$,

则 $x^k y^{(k)}=D(D-1)\cdots(D-k+1)y$

可将欧拉方程化为常系数微分方程求解.

七、常系数线性微分方程组

1、一阶方程组

$$
\begin{cases}
a_0 \dfrac{dx}{dt} + a_1 x + b_0 \dfrac{dy}{dt} + b_1 y = f(t) \\
c_0 \dfrac{dx}{dt} + c_1 x + d_0 \dfrac{dy}{dt} + d_1 y = g(t)
\end{cases}
$$

从方程组中消去一个未知函数及其导数，得到只含一个未知函数的二阶微分方程，再解此一元微分方程，最后将求得的函数代入原方程组，即可求得另一未知函数.

2、高阶线性微分方程组（只含两个变量）

$$\begin{cases} a_0x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\cdots+a_nx+b_0y^{(m)}+\cdots+b_my=f(t) \\ c_0x^{(n)}+c_1x^{(n-1)}+\cdots+c_nx+d_0y^{(m)}+\cdots+d_my=g(t) \end{cases}$$

引进算子$D^k=\dfrac{d^k}{dt^k}$,则方程组简化为

$$\begin{cases} P(D)x+Q(D)y=f(t) \\ R(D)x+S(D)y=g(t) \end{cases}$$

如 $P(D)=a_0D^n+a_1D^{n-1}+\cdots+a_n,Q(D),R(D),S(D)$类似.

再用消元法或克莱蒙法则得到只含一个未知函数的更高阶微分方程求解.

含两个以上变量的方程组类似求解.

八、常用建立微分方程 之方法

1、利用几何量建立微分方程

如：切线斜率、面积、体积、弧长等.

2、利用物理定律建立微分方程

如：牛顿第二定律、虎克定律、冷却定律等.

3、利用微元法建立微分方程

4、利用微分、积分、级数抽象关系式建立微分方程

5、利用题目所表述的特殊关系建立微分方程