2020 年竞赛模拟试题（2）参考解答

一、(每小题 6 分，共 30 分）

(1) 求积分 $I=\int_0^{\pi}\ \ln\sin x\mathrm{d}x$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\alpha}\ln\sin x=\lim\limits_{t\to 0^+}t^{\alpha}\ln t=0,\ \lim\limits_{x\to\pi^-}(\pi-x)^{\alpha}\ln\sin x=0,\ \alpha\in(0,1)$，积分是收敛的.

$$I=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x\cos x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\ln 2+\ln\sin 2x)\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}\ln 2+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin 2x\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{\pi}{2}\ln 2+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\ \ln\sin t\mathrm{d}t=-\frac{\pi}{2}\ln 2+\frac{1}{2}I,$$

所以 $I=-\pi\ln 2$.

(2) 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2+2n-1}{n!}$ 的和.

解 $$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n-1)+3n-1}{n!}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}+3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

$$=3\mathrm{e}+1.$$

(3) 设 $D:x^4+y^4\le 1$， 求 $\iint\limits_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解 边界曲线为 $\partial D:r=(\cos^4\theta+\sin^4\theta)^{-1/4}$，记 $r(\theta)=(\cos^4\theta+\sin^4\theta)^{-1/4}$

$$I=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{r(\theta)}r^3dr=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos^4\theta+\sin^4\theta}d\theta$$

$$\overset{t=\tan^2\theta}{=}\int_0^{\infty}\frac{1+t^2}{1+t^4}dt=\int_0^{\infty}\frac{d(t-t^{-1})}{(t-t^{-1})^2+2}dt=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

(4) 求 $I=\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\arctan\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

解 $I=\int_0^{+\infty}\ (\int_0^1\dfrac{1}{1+x^2+y^2}dy)dx$ （因 $\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{1+x^2+y^2}dx$ 一致收敛，可换序）

$$=\int_0^1 dy\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2+y^2}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}dy=\frac{\pi}{2}\ln(1+\sqrt{1+y^2})\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}\ln(1+\sqrt{2}).$$

(5) 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n}$ 非绝对收敛.

证 $|\cos x|+|\cos(x+1)|$ 为连续周期正值函数，设其最小值为 $m>0$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos n|}{n}=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{|\cos 2k|}{2k}+\frac{|\cos(2k+1)|}{2k+1}\right),$$

注意 $\frac{|\cos 2k|}{2k}+\frac{|\cos(2k+1)|}{2k+1}>\frac{|\cos 2k|+|\cos(2k+1)|}{2k+1}>m\frac{1}{2k+1}$

易知原级数非绝对收敛.

另证 $\frac{|\cos n|}{n}\ge\frac{\cos^2 n}{n}=\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}\cos 2n$，而 A-D 判别法给出级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n}{n}$ 是收敛的，

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n}{n}$ 发散，原级数非绝对收敛.

二、(14 分)若 n 为正整数，求 $M=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2}}$ 的整数部分.

解 $$M=\sum_{k=1}^{n^2}\frac{1}{\sqrt{k}}=1+\sum_{k=2}^{n^2}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{\sqrt{k}}dx$$

$$<1+\sum_{k=2}^{n^2}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{\sqrt{x}}dx=1+\int_1^{n^2}\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2n-1;$$

同理

$$M=\sum_{k=1}^{n^2}\int_k^{k+1}\frac{1}{\sqrt{k}}dx>\sum_{k=1}^{n^2}\int_k^{k+1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\int_1^{n^2+1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

$$=2(\sqrt{n^2+1}-1)>2n-2.$$

故 M 的整数部分为 $2n-2$.

另解 记 $f(x)=\sqrt{x},f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}(x>0)$，则由微分中值公式

$$\sqrt{k}-\sqrt{k-1}=\frac{1}{2\sqrt{\xi}},\qquad (k-1<\xi<k)$$

有 $\frac{1}{2\sqrt{k}}<\sqrt{k}-\sqrt{k-1}<\frac{1}{2\sqrt{k-1}}$， 或 $\sqrt{k+1}-\sqrt{k}<\frac{1}{2\sqrt{k}}<\sqrt{k}-\sqrt{k-1}$，

故 $$M=\sum_{k=1}^{n^2}\frac{1}{\sqrt{k}}<1+2\sum_{k=2}^{n^2}(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})=2n-1,$$

及 $$M=\sum_{k=1}^{n^2}\frac{1}{\sqrt{k}}>2\sum_{k=1}^{n^2}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})=2(\sqrt{n^2+1}-1)>2n-2$$

综上，M 的整数部分为 $2n-2$.

注 这里的不等式 $\sqrt{k+1}-\sqrt{k}<\frac{1}{2\sqrt{k}}<\sqrt{k}-\sqrt{k-1}$ 用初等数学也可快速得到.

三、（14 分）设 f 连续，且 $\int_0^1 f(x)dx=0$，证明对正整数 n，存在 $c\in(0,1)$ 使

$$n\int_0^c x^n f(x)\mathrm{d}x=c^{n+1}f(c).$$

证 若 f 恒为零，结论自明. f 不恒为零时，存在不同的两点 $a,b\in[0,1]$，满足

$$f(a)=\max f(x)>0, f(b)=\min f(x)<0.$$

令

$$F(x)=\begin{cases} f(x)-\dfrac{n}{x^{n+1}}\displaystyle\int_0^x t^n f(t)dt, x\in(0,1] \\ f(0)(1-\dfrac{n}{n+1}), \qquad x=0 \end{cases}$$

这里显然 $\lim\limits_{x\to 0+}F(x)=F(0)$，即 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续.

下证 $F(a)>0$. $a=0$ 时是显然的. $a>0$ 时

$$\begin{aligned} F(a)&=f(a)-\frac{n}{a^{n+1}}\int_0^a t^n f(t)dt \\ &>f(a)-\frac{n}{a^{n+1}}\int_0^a t^n f(a)dt=f(a)(1-\frac{n}{n+1})>0. \end{aligned}$$

同样证明 $F(b)<0$.

由零点定理得证.

四、（14 分）设椭球面 $S:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 在点 $P(x,y,z)\in S$ 处的切平面为 Π，记原点到平面 Π 的距离为 $h(x,y,z)$. 求（1）$I=\iint\limits_S h(x,y,z)\mathrm{d}S$，（2）$I=\iint\limits_S\frac{1}{h(x,y,z)}\mathrm{d}S$.

分析 椭球面$S:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$在$P(x,y,z)$点的切平面方程为

$$\frac{x}{a^2}X+\frac{y}{b^2}Y+\frac{z}{c^2}Z=1,\quad \text{（切平面上动点坐标为}(X,Y,Z)\text{）}$$

原点到该平面的距离为$h(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{x^2}{a^4}+\dfrac{y^2}{b^4}+\dfrac{z^2}{c^4}}}$. 它也可以由矢量运算得到.

解 （1）记曲面的单位外法矢量为$\vec{n}$，则$h(x,y,z)=\{x,y,z\}\cdot\vec{n}$

$$I=\oiint_S h(x,y,z)dS=\oiint_S \vec{r}\cdot\vec{n}dS=3\iiint_\Omega dv=4\pi abc.$$

（2）记上半椭球面为S_1，描述为$z=c\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}$，$(x,y)\in D$, D为$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1$.

注意$z_x=-\dfrac{c^2}{a^2}\dfrac{x}{z},z_y=-\dfrac{c^2}{b^2}\dfrac{y}{z}$，所以椭球面的面积微元为

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\mathrm{d}\sigma=\sqrt{1+\frac{c^4}{a^4}\frac{x^2}{z^2}+\frac{c^4}{b^4}\frac{y^2}{z^2}}\mathrm{d}\sigma=\frac{\sqrt{\dfrac{x^2}{a^4}+\dfrac{y^2}{b^4}+\dfrac{z^2}{c^4}}}{z/c^2}\mathrm{d}\sigma.$$

故$I=\displaystyle\iint_S\frac{1}{h(x,y,z)}\mathrm{d}S=2\iint_{S_1}\frac{1}{h(x,y,z)}\mathrm{d}S$

$$=2\iint_D\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}\,\frac{\sqrt{\dfrac{x^2}{a^4}+\dfrac{y^2}{b^4}+\dfrac{z^2}{c^4}}}{z/c^2}\mathrm{d}\sigma$$

$$=2c\iint_D\frac{\dfrac{x^2}{a^4}+\dfrac{y^2}{b^4}+\dfrac{1}{c^2}(1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2})}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}}\mathrm{d}\sigma\qquad (x=ar\cos\theta,y=br\sin\theta)$$

$$=2c\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{\dfrac{1}{a^2}r^2\cos^2\theta+\dfrac{1}{b^2}r^2\sin^2\theta+\dfrac{1}{c^2}(1-r^2)}{\sqrt{1-r^2}}abr\mathrm{d}r$$

$$=\frac{4\pi}{3}abc(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}).$$

五、(14 分) (1)设$f(x,y)$在闭区域D：$x^2+y^2\le R^2$上有二阶连续偏导数，D的边界

为 L，证 $\oint_L [xf_x(x,y)+yf_y(x,y)]ds = R\iint\limits_D [f_{xx}(x,y)+f_{yy}(x,y)]dxdy$.

(2) 设 $f(x,y)$ 有连续偏导数，曲线 L： $x^2+y^2=R^2$，求 $\oint_L [xf_y - yf_x]\mathrm{d}s$.

证 (1) L 上 (x,y) 点处曲线的单位切矢量为 $\vec{\tau}=\frac{1}{R}\left(-y,x\right)$（曲线为逆时针方向），

$$\oint_L [xf_x+yf_y]\mathrm{d}s = R\oint_L (-f_y,f_x)\cdot\vec{\tau}\,\mathrm{d}s$$

$$= R\oint_L -f_y\mathrm{d}x + f_x\mathrm{d}y \qquad （用格林公式）$$

$$= R\iint\limits_D (f_{xx}+f_{yy})\mathrm{d}\sigma$$

（2）令 $x=R\cos t, y=R\sin t,(0\le t\le 2\pi)$，则 $z=f(x,y)=f(R\cos t,R\sin t)$，且

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=f_x\cdot R(-\sin t)+f_y\cdot R\cos t = xf_y - yf_x$$

$$\oint_L [xf_y-yf_x]\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}R\mathrm{d}t = Rz\Big|_0^{2\pi} = Rf(R\cos t,R\sin t)\Big|_0^{2\pi}=0 .$$

注 （2）不能用像（1）一样用格林公式！（条件仅有一阶连续偏导）

六、(14 分) 设 $\{x_n\}$ 为实数列, 若 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{n}$ 收敛, 证明 $\overline{x_n}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\to 0\ (n\to\infty)$.

证 记 $\sigma_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{k},\sigma_0=0$，由 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{n}$ 收敛，知 $\sigma_n\to\sigma(n\to\infty)$. 而

$$\overline{x_n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(k\cdot\frac{x_k}{k}\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k\left(\sigma_k-\sigma_{k-1}\right)$$

$$=\frac{1}{n}\left\{n\sigma_n-\sum_{k=1}^{n-1}\sigma_k\right\}=\sigma_n-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\sigma_k ,$$

由 Stolz 公式得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\sigma_k=\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=\sigma$，上式给出 $\overline{x_n}\to 0\ (n\to\infty)$.

五、（14 分）设椭球面 $S:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 在点 $P(x,y,z)\in S$ 处的切平面为 Π，记原点到平面 Π 的距离为 $h(x,y,z)$. 求(1) $\iint\limits_S h(x,y,z)\mathrm{d}S$ ； (2) $\iint\limits_S \dfrac{1}{h(x,y,z)}\mathrm{d}S$.

分析 椭球面 $S:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 在 $P(x,y,z)$ 点的切平面方程为

$$\frac{x}{a^2}X+\frac{y}{b^2}Y+\frac{z}{c^2}Z=1,\quad \text{（切平面上动点坐标为}(X,Y,Z)\text{）}$$

而原点到该平面的距离为 $h(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{x^2}{a^4}+\dfrac{y^2}{b^4}+\dfrac{z^2}{c^4}}}$.

解 记动点 $P(x,y,z)$ 点的矢径为 $\vec{r}$ ，椭球面 $S:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 在 $P(x,y,z)$ 点的单位法矢量为 $\vec{n}$ ，则 $h(x,y,z)=\vec{r}\cdot\vec{n}$.

(1) $\iint\limits_S h(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint\limits_S \vec{r}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S$

$=\iiint\limits_\Omega \nabla\cdot\vec{r}\mathrm{d}v=3\iiint\limits_\Omega \mathrm{d}v=3v=4\pi abc$.

(2) 记上半椭球面为 S_1，描述为 $z=c\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}$ ，$(x,y)\in D$： $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1$.

注意 $z_x=-\dfrac{c^2}{a^2}\dfrac{x}{z},z_y=-\dfrac{c^2}{b^2}\dfrac{y}{z}$，所以椭球面的面积微元为

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\mathrm{d}\sigma=\sqrt{1+\frac{c^4}{a^4}\frac{x^2}{z^2}+\frac{c^4}{b^4}\frac{y^2}{z^2}}\mathrm{d}\sigma=\frac{\sqrt{\dfrac{x^2}{a^4}+\dfrac{y^2}{b^4}+\dfrac{z^2}{c^4}}}{z/c^2}\mathrm{d}\sigma .$$

故 $\displaystyle\iint\limits_S \frac{1}{h(x,y,z)}\mathrm{d}S=2\iint\limits_{S_1}\frac{1}{h(x,y,z)}\mathrm{d}S$

$$=2\iint\limits_D \sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}\,\frac{\sqrt{\dfrac{x^2}{a^4}+\dfrac{y^2}{b^4}+\dfrac{z^2}{c^4}}}{z/c^2}\mathrm{d}\sigma$$

$$= 2c\iint_D \frac{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{1}{c^2}(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2})}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}\mathrm{d}\sigma$$

$$= 2c\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 \frac{\frac{1}{a^2}r^2\cos^2\theta+\frac{1}{b^2}r^2\sin^2\theta+\frac{1}{c^2}(1-r^2)}{\sqrt{1-r^2}}abr\mathrm{d}r$$

$$= \frac{4\pi}{3}abc(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}).$$