信号与系统总结与分析

信号与系统在学什么呢?一言以蔽之,用数学的手段(傅里叶等)处理signal & system,从而使得人类可以更好的理解他们,处理他们(针对LTI system)

LTI

Linear:加减乘除积分微分

Time-invariant:时移

该数学手段的本质— ”力的分解”

信号与系统中常用的数学工具包括傅里叶级数（FS）、傅里叶变换（FT）、离散时间傅里叶变换（DTFT）、离散傅里叶变换（DFT）、拉普拉斯变换（Laplace）和 Z 变换等。这些方法表面上看种类繁多，但它们本质上完成的是相同的任务：对信号 $x(t)$ 进行线性分解，将其表示为一组独立基底的线性叠加。这种分解的思想类似于物理力学中的受力分解，将力分解到 x、y、z 坐标轴上，从而使得每个方向上的分量可以独立分析。

需要特别注意的是，积分与加法在本质上并没有区别，这意味着基底可以是连续的。例如，在傅里叶变换、DTFT、拉普拉斯变换和 Z 变换中，所使用的基底即是连续的。

所谓的信号分析，其核心是通过对 $x(t)$ 的分解，使信号在各个“维度”上可以单独研究。对于线性时不变系统（LTI 系统），信号经过系统的响应可以简化为频域中的乘积关系：

$$Y = X \cdot H$$

在传统理解中，数学变换的目标是将复杂的卷积运算转化为简单的乘积运算。这与分解的思想并不矛盾，事实上，乘积运算之所以成立，是因为不同基底之间（例如不同的 w、s、z 值）是独立的，类似于正交基底的概念。这种独立性为系统分析提供了极大的便利。

简而言之，信号与系统的数学手段核心在于将信号分解到各个独立的“坐标”上，方便后续的单独处理和分析。通过这种方式，我们能够从复杂的信号与系统中提取关键信息，简化问题求解过程。

该数学手段的内涵— “频域”

通过研究上述提到的基底，我们惊讶地发现，这些基底实际上是可以被我们直观理解的——它们对应于**频率**！在傅里叶变换中，频率描述了信号的振荡快慢，而在拉普拉斯变换和 Z 变换中，它们扩展为复频率和离散频率。

频率的直观感受可以类比为圆周运动的投影，它表示振荡的速度。在信号 $x(t)$ 中，我们可以通过傅里叶变换提取出所有具有相同振荡速度的分量并叠加它们，得到频率对应的幅值表示。其数学表达为：

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

以傅里叶变换为例，它将信号中所有与 $e^{j\omega t}$ 同步的分量通过积分提取出来，结果就是频域中的 $X(\omega)$。反之，频域中的每个分量也可以还原回时域信号：

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$$

坐标系选择与变换直观性

在实际处理中，选择与物理现象一致的坐标系至关重要。保持坐标边界与物理规律的一致性，可以帮助我们更容易识别规律并简化计算。

以傅里叶变换为例，它可以理解为在观察系统时，我们选择了一个以相同速度运行的参考框架：

- 假设信号中有正弦分量 $\sin(\omega t)$；
- 我们在频域中对 $\sin(\omega t)$ 进行基底投影，相当于以同样的速度“运行”到与它同步的状态；
- 在此状态下，时间变量 t 的影响被消除，便于更直接地分析频率分量的特性。

这一变换就如同观察对方跑步时，与对方保持相同速度前进，从而能够清楚地看到对方的动作细节。

拉普拉斯变换与 Z 变换的扩展

在拉普拉斯变换和 Z 变换中，除了频率分量的提取，它们还对信号的指数增长或衰减进行了建模。拉普拉斯变换公式为：

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}\,dt$$

其中 $s = \sigma + j\omega$ 包含了指数变化的速率 σ 和频率 ω。

Z 变换则是拉普拉斯变换的离散版本：

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}$$

拉普拉斯和 Z 变换的核心思想是通过引入指数变化的因子（如 e^{-st} 和 z^{-n}），将信号的复杂增长或衰减部分抵消掉，便于进行频域分析。多数情况下，我们可以用 $s = j\omega$ 来忽略指数增长部分，直接从复频域跳回频率域。

一个有趣的结论

由于所有周期信号都可以通过傅里叶分解表示，因此任何包含周期性运动的系统（如连杆系统）都可以通过首尾相接的曲线形式完全描绘。这进一步体现了傅里叶变换在描述物理现象中的强大能力。

离散和连续— 究竟有那么重要吗?”我不觉得”

傅里叶级数（FS）、傅里叶变换（FT）、离散时间傅里叶变换（DTFT）、离散傅里叶变换（DFT）、拉普拉斯变换和 Z 变换可以看作是两对数学处理方法：**离散与连续。**

离散与连续的应用场景

1. **傅里叶级数（FS）：** 当信号 $x(t)$ 为周期函数时，傅里叶级数用于分析其频谱分量。
2. **离散傅里叶变换（DFT）：** 当信号 $x[n]$ 为有限长度的离散序列时，DFT 用于对其频谱进行离散化分析。

对于这些方法，我们会注意到：

- **低频信息的缺失：** 由于周期限制，FS 和 DFT 无法描述超出周期 T 或长度 N 的低频信息。
- **频率分辨率受限：** 对于 DFT，频率间隔有限，频谱细节无法解析。

3. **离散时间傅里叶变换（DTFT）：** DTFT 适用于无限长的离散信号，其频域特性表现为 2π 周期的重复。采样间隔 T_s 决定了可观测的最高频率：

$$f_{max} = \frac{1}{2T_s}$$

   这也是采样定理的重要来源，即采样频率必须大于两倍的最高信号频率。

   在 DTFT 中，频率范围通常定义为 $-\pi$ 到 π，这对应于采样信号的频率限制。此外，DTFT 将离散信号的最高频率成分映射到 π。
4. **傅里叶变换（FT）：** 适用于非周期连续信号，其频谱无周期性限制，可以连续覆盖所有频率。

拉普拉斯变换与 Z 变换的区别

拉普拉斯变换和 Z 变换也体现了离散与连续的特点：

- **拉普拉斯变换：** 适用于连续时间信号，频域是连续的。
- **Z 变换：** 适用于离散时间信号，频域则是离散化的。

尽管 Z 变换的频域是离散的，其幅度控制因子（指数增长或衰减）仍然是连续的。这种连续的控制因子使得 Z 变换在一定程度上表现得类似于拉普拉斯变换。

重要结论

上述方法的本质区别在于处理信号的时间和频率域属性：

- 连续时间和离散时间决定了信号的时间特性；
- 周期性和有限性限制了信号的频率分辨率。

正是这些差异，使得我们能够在不同场景中选择最适合的数学工具来对信号进行分析和处理。

信号与系统可以考什么？

1. ## 信号与系统可能的考察内容

   1. **信号变换与频域分析**
      掌握如何对已知的信号 $x(t)$ 或系统的脉冲响应 $h(t)$ 进行以下变换：
      - 傅里叶级数（FS）
      - 傅里叶变换（FT）
      - 离散时间傅里叶变换（DTFT）
      - 离散傅里叶变换（DFT）
      - 拉普拉斯变换（Laplace）
      - Z 变换
   2. **逆变换的应用**
      了解如何对已知的频域表示（如 $X(\omega)$ 或 $H(\omega)$）进行逆变换，还原时域信号或系统响应。
   3. **系统分析与建模**
      掌握如何通过以下方式求解系统的响应 $h(t)$ 或频域响应 $H(\omega)$：
      - 微分方程或差分方程
      - 电路图或系统结构图
   4. **卷积的原理与计算**
      理解卷积运算的基本原理，包括连续卷积和离散卷积的定义与计算方法：

      $$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau \quad (\text{连续})$$

      $$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] \quad (\text{离散})$$
   5. **信号处理与系统输出**
      学会使用信号与系统的基本理论预测系统的输出，例如通过频域分析或时域分析确定输出信号的特性。
   6. **其他重要知识点**
      - 快速傅里叶变换（FFT）的计算复杂度：$O(N\log N)$
      - 离散傅里叶变换（DFT）的计算复杂度：$O(N^2)$
      - 采样定理及其应用：采样频率 f_s 应满足 $f_s>2f_{max}$ 以避免频谱混叠。

针对考试进行分析

FS、FT、DTFT、DFT、Laplace 和 Z 变换及其逆变换

基础公式

1. **傅里叶级数（FS）**

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jkw_0t}$$

$$c_k = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)e^{-jkw_0 t}\,dt$$

2. **傅里叶变换（FT）**

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

3. **离散时间傅里叶变换（DTFT）**

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n}\,d\Omega$$

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$$

4. **离散傅里叶变换（DFT）**

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{j\frac{2\pi k}{N}n}$$

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi k}{N}n}$$

5. **拉普拉斯变换（Laplace）**

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\beta-j\infty}^{\beta+j\infty} X(s)e^{st}\,ds$$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}\,dt$$

6. **Z 变换（Z）**

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint X(z)z^{n-1}\,dz$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

计算稳态值或初值

1. **Z 变换：**

$$x[0] = \lim_{z\to\infty} X(z)$$

$$x[\infty] = \lim_{z\to 1} X(z)\cdot(z-1)$$

2. **拉普拉斯变换：**

$$x(0) = \lim_{s\to\infty} sX(s)$$

$$x(\infty) = \lim_{s\to 0} sX(s)$$

常见函数的变换

1. 常数 1：

$$FS: c_0 = 1, \quad FT: 2\pi\delta(\omega), \quad DTFT: \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\Omega + 2k\pi)$$

拉普拉斯和 Z 变换无特定表示。

2. 单位阶跃 $u(t)/u[n]$:

$$FT: \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega), \quad DTFT: \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\Omega + 2k\pi) + \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}}$$

$$Laplace: \frac{1}{s}, \quad Z: \frac{z}{z-1}$$

3. 单位脉冲 $\delta(t)/\delta[n]$:

$$FT: 1, \quad DTFT: 1, \quad Laplace: 1, \quad Z: 1$$

数学变换的性质

1. **线性性:**
   变换保留线性叠加特性。
2. **时移:**
   根据变换公式可得，时移的结果是信号的频域乘以一个指数因子。例如:

$$FT: x(t - t_0) \leftrightarrow X(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

3. **频移:**
   信号的频移对应时域乘以指数因子。例如:

$$FT: x(t)e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow X(\omega - \omega_0)$$

4. **微分与积分:**
   - 微分时:

$$FT: \frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega X(\omega)$$

$$Laplace: \frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow sX(s) - x(0_+)$$

   - 积分时:

$$FT: \int x(t)\, dt \leftrightarrow \frac{X(\omega)}{j\omega}$$

$$Laplace: \int x(t)\, dt \leftrightarrow \frac{X(s)}{s}$$

5. **卷积与乘积:**
   时域卷积对应于频域乘积，反之亦然。

专有名词的英文

- 已掌握的术语: `signal`, `system`, `Fourier Series`, `complex`, `even`, `odd`, `filter`。
- 需记忆的术语: `trigonometric exponential`, `line spectra (FS)`, `rectangular polar spectrum (FT, DTFT)`。

一些重要结论

1. 若信号为实值，则其频域满足:

$$X(-\omega) = \overline{X(\omega)}$$

2. 若信号为奇偶对称，则其频域的虚部或实部为零。

这些结论有助于快速判断信号的频域特性。