第十二届数学竞赛级数培训

例 1 已知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$是正项发散级数，$\lambda$为正实数，求级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_1a_2\cdots a_n}{(a_2+\lambda)(a_3+\lambda)\cdots(a_{n+1}+\lambda)}$$

的和.

分析 级数通项u_n裂项为$x_{n+1}-x_n$，则部分和$\sum_{n=1}^{N}(x_{n+1}-x_n)$为$x_{N+1}-x_1$.

解 级数的通项记为u_n，考虑

$$\frac{\lambda}{a_1+\lambda}\sum_{n=1}^{N}u_n=\sum_{n=1}^{N}\frac{\lambda/a_{n+1}}{(1+\lambda/a_1)(1+\lambda/a_2)\cdots(1+\lambda/a_{n+1})}$$

$$=\sum_{n=1}^{N}\frac{(1+\lambda/a_{n+1})-1}{(1+\lambda/a_1)(1+\lambda/a_2)\cdots(1+\lambda/a_{n+1})}$$

$$=\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{(1+\lambda/a_1)\cdots(1+\lambda/a_n)}-\frac{1}{(1+\lambda/a_1)\cdots(1+\lambda/a_{n+1})}\right)$$

$$=\frac{1}{1+\lambda/a_1}-\frac{1}{(1+\lambda/a_1)\cdots(1+\lambda/a_{N+1})}\to\frac{1}{1+\lambda/a_1}\ (N\to\infty)\ .$$

其中 $(1+\lambda/a_1)\cdots(1+\lambda/a_{N+1})\ge 1+\lambda\sum_{n=1}^{N+1}\frac{1}{a_n}\to\infty$. （贝努利不等式）

原级数的和为$\frac{a_1}{\lambda}$.

练习以下数列的裂项并求和.

1) $\frac{2^n}{a^{2^n}+1}=\frac{2^n(a^{2^n}-1)}{a^{2^{n+1}}-1}=\frac{2^n(a^{2^n}+1)-2^{n+1}}{a^{2^{n+1}}-1}=\frac{2^n}{a^{2^n}-1}-\frac{2^{n+1}}{a^{2^{n+1}}-1}$,

有$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{a^{2^n}+1}=\frac{1}{a-1}\ (a>1)$.

$$\frac{a^{2^n}}{(a+1)(a^2+1)\cdots(a^{2^n}+1)}=(a-1)\frac{(a^{2^n}+1)-1}{a^{2^{n+1}}-1}=(a-1)\left(\frac{1}{a^{2^n}-1}-\frac{1}{a^{2^{n+1}}-1}\right),$$

有$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{2^n}}{(a+1)(a^2+1)\cdots(a^{2^n}+1)}=1\ (a>1)$.

2）利用恒等式 $\arctan\dfrac{a-b}{1+ab}=\arctan a-\arctan b$ 有

$$\arctan\frac{2}{n^2}=\arctan\frac{(n+1)-(n-1)}{1+(n+1)(n-1)}=\arctan(n+1)-\arctan(n-1),$$

有 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{2}{n^2}=\lim_{n\to\infty}(\arctan(n+1)+\arctan n-\arctan 1)=\frac{3\pi}{4}$.

$$\arctan\frac{1}{n^2+n+1}=\arctan\frac{(n+1)-n}{1+n(n+1)}=\arctan(n+1)-\arctan n,$$

有 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{n^2+n+1}=\lim_{n\to\infty}(\arctan(n+1)-\arctan 1)=\frac{\pi}{4}$.

$$\arctan\frac{1}{2n^2}=\arctan\frac{(2n+1)-(2n-1)}{1+(2n+1)(2n-1)},$$

有 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{2n^2}=\lim_{n\to\infty}(\arctan(2n+1)-\arctan 1)=\frac{\pi}{4}$.

$$\arctan\frac{4n}{n^4-2n^2+2}=\arctan\frac{(n+1)^2-(n-1)^2}{1+(n+1)^2(n-1)^2},$$

$$\arctan\frac{8n}{n^4-2n^2+5}=\arctan\frac{\dfrac{(n+1)^2}{2}-\dfrac{(n-1)^2}{2}}{1+\dfrac{(n+1)^2}{2}\dfrac{(n-1)^2}{2}}.$$

3) $\dfrac{n}{(n+1)!}=\dfrac{1}{n!}-\dfrac{1}{(n+1)!}$， $\dfrac{n}{(2n+1)!!}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{(2n-1)!!}-\dfrac{1}{(2n+1)!!}\right)$，

一般地 a_n 是公差为 $d(\neq 0)$ 的等差数列，则有

$$\frac{md}{a_na_{n+1}\cdots a_{n+m}}=\frac{a_{n+m}-a_n}{a_na_{n+1}\cdots a_{n+m}}=\frac{1}{a_na_{n+1}\cdots a_{n+m-1}}-\frac{1}{a_{n+1}\cdots a_{n+m}}.$$

4) $\ln\dfrac{n^3-1}{n^3+1}=\ln\dfrac{(n-1)(n^2+n+1)}{(n+1)(n^2-n+1)}=\ln\dfrac{n(n+1)+1}{n(n+1)}-\ln\dfrac{(n-1)n+1}{(n-1)n}$，

有 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\ln\frac{n^3-1}{n^3+1}=-\ln\frac{3}{2}$.

5) $a_1>1$， $a_{n+1}=a_n^2-a_n+1(n\in N)$，有 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n-1}-\frac{1}{a_{n+1}-1}\right)$.

例 2 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}$ 收敛并求和.

分析 注意到 $\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$，努力将级数通项裂项.

解 记 $H(n)=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ ($=\ln n+\gamma+\varepsilon$,这里 $\gamma\approx 0.577$)，则级数的部分和为

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{H_k}{k+1}-\frac{H_k}{k+2}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{H_k}{k+1}-\frac{H_{k+1}}{k+2}\right)+\sum_{k=1}^{n}\frac{H_{k+1}-H_k}{k+2}$$

$$=\frac{H_1}{2}-\frac{H_{n+1}}{n+2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+2)(k+1)}=\frac{1}{2}-\frac{H_{n+1}}{n+2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2},$$

因 $\lim_{n\to\infty}S_n=1$，所以级数收敛，且和为1.

注 级数的通项等价于 $\frac{\ln n}{n^2}$，而 $\frac{\ln n}{n^2}=o(\frac{1}{n^{3/2}})$，比较判别法给出级数收敛. 这里级数不能写成 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n+1}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n+2}$，因为相减的两个级数都是发散的.

练习 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n(n+1)}$ 的和，需用到结论 $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}}$.

例 3 已知 $a_k>0,b_k>0$，且 $b_{k+1}-b_k\geq\delta>0$，$k=1,2,\cdots$. 证明：若级数 $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ 收敛, 则级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\sqrt[k]{(a_1a_2\cdots a_k)(b_1b_2\cdots b_k)}}{b_kb_{k+1}}$ 收敛.

证 $\frac{k\sqrt[k]{(a_1b_1)(a_2b_2)\cdots(a_kb_k)}}{b_kb_{k+1}}\leq\frac{1}{b_kb_{k+1}}\sum_{i=1}^{k}a_ib_i$ （记 $A_k=\sum_{i=1}^{k}a_ib_i$）

$$\leq\frac{1}{\delta}\left(\frac{1}{b_k}-\frac{1}{b_{k+1}}\right)A_k.$$

（利用了条件 $b_{k+1}-b_k\geq\delta>0$）

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{b_k}-\frac{1}{b_{k+1}}\right)A_k=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{A_k}{b_k}-\frac{A_{k+1}}{b_{k+1}}\right)+\sum_{k=1}^{n}\frac{A_{k+1}-A_k}{b_{k+1}}$$

$$=\frac{A_1}{b_1}-\frac{A_{n+1}}{b_{n+1}}+\sum_{k=1}^{n}a_{k+1}<a_1+\sum_{k=1}^{n}a_{k+1},$$

由级数$\sum_{k=1}^{\infty}a_k$收敛，$a_1+\sum_{k=1}^{n}a_{k+1}$有界，故所论级数收敛.

注 这两个例中求和涉及阿贝尔分部求和公式.

$$\sum_{k=m}^{n}a_kb_k=A_nb_n-A_{m-1}b_m-\sum_{k=m}^{n-1}A_k(b_{k+1}-b_k)\text{，其中 }A_n=\sum_{k=1}^{n}a_k\ .$$

例 4 设$\{p_n\}$为严格单增的正数列，证明对正数α，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_{n+1}-p_n}{p_{n+1}p_n^{\alpha}}$收敛.

证 （i）若p_n的极限为有限数$A(\geq p_1>0)$，则$\sum_{n=1}^{\infty}(p_{n+1}-p_n)=A-p_1$.

因为$p_{n+1}p_n^{\alpha}\to A^{1+\alpha}$，由比较判别法知级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_{n+1}-p_n}{p_{n+1}p_n^{\alpha}}$收敛.

（ii）若$p_n\to+\infty$，当$\alpha=1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_{n+1}-p_n}{p_{n+1}p_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{p_n}-\frac{1}{p_{n+1}}\right)=\frac{1}{p_1}$为收敛级数.

当$\alpha>1$时，$\frac{p_{n+1}-p_n}{p_{n+1}p_n^{\alpha}}\leq\frac{p_{n+1}-p_n}{p_{n+1}p_n}$，由比较判别法知级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_{n+1}-p_n}{p_{n+1}p_n^{\alpha}}$收敛.

当$0<\alpha<1$时，$\sum_{n=1}^{N}\frac{p_{n+1}-p_n}{p_{n+1}p_n^{\alpha}}=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{p_n^{\alpha-1}}\left(\frac{1}{p_n}-\frac{1}{p_{n+1}}\right)<\sum_{n=1}^{N}\int_{\frac{1}{p_{n+1}}}^{\frac{1}{p_n}}x^{\alpha-1}dx$

$$<\int_0^{\frac{1}{p_1}}x^{\alpha-1}dx=\frac{1}{\alpha}\frac{1}{p_1^{\alpha}},$$

因此级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_{n+1}-p_n}{p_{n+1}p_n^{\alpha}}$收敛.

注 取$p_n=n$，则有 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt[p]{n}}<p,\ p>1$.

例 5（**Abel-Dini**） 设正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散，$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$，则$p>1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{S_n^p}$收敛；而$p\leq1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{S_n^p}$发散.

证 （i）$p>1$时，$\frac{u_n}{S_n^p}=\frac{S_n-S_{n-1}}{S_n^p}=\int_{S_{n-1}}^{S_n}\frac{1}{S_n^p}dx<\int_{S_{n-1}}^{S_n}\frac{1}{x^p}dx=\frac{1}{p-1}(\frac{1}{S_{n-1}^{p-1}}-\frac{1}{S_n^{p-1}})$，

因 $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{S_{n-1}^{p-1}}-\frac{1}{S_{n}^{p-1}}\right)=\frac{1}{S_{1}^{p-1}}$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{S_n^p}$ 收敛.

（ii） $p=1$ 时，考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{S_n}=\sum_{n=1}^{\infty}(1-\frac{S_{n-1}}{S_n})$ 的敛散. 因为无穷乘积 $\prod_{n=2}^{\infty}\frac{S_{n-1}}{S_n}$ 发散到 0，即级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\ln\frac{S_{n-1}}{S_n}$ 发散到 $-\infty$，因 $\ln\frac{S_{n-1}}{S_n}\sim\frac{S_{n-1}}{S_n}-1$，有 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{S_{n-1}}{S_n}-1)$ 发散，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{S_n}$ 发散.

$p<1$ 时，$\frac{u_n}{S_n^p}>\frac{u_n}{S_n}$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{S_n^p}$ 发散.

注（Dini）设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，$r_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k$，则 $p<1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{r_n^p}$ 收敛；而 $p\geq 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{r_n^p}$ 发散.

例 6 若对于任意收敛于 0 的数列 $\{x_n\}$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx_n$ 都是收敛的，试证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛.

证 （反证法）假定 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散，则 $S_n=\sum_{k=1}^{n}|a_n|\to\infty$，$x_n=\frac{\operatorname{sgn}(a_n)}{S_n}\to 0$，由 **Abel-Dini** 定理知：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{S_n}$ 发散，即 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx_n$ 发散. 这与题设条件矛盾，故 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛.

另证 假定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散到 $+\infty$，则 $\forall k,n,\quad \exists m>n,\quad \sum_{i=n}^{m}|a_i|\geq k$.

因此对 $k=1,n=1$，存在 m_1，使 $\sum_{i=1}^{m_1}|a_i|\geq 1$；

对 $k=2,n=m_1+1$，存在 m_2，使 $\sum_{i=m_1+1}^{m_2}|a_i|\geq 2$；……

由此得到 $1\leq m_1<m_2<\cdots<m_k<\cdots$，使 $\sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k}|a_i|\geq k$.

取 $x_i=\frac{1}{k}\operatorname{sgn}a_i$，$m_{k-1}<i\leq m_k$，则 $\sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k}a_ix_i=\sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k}|a_i|\frac{1}{k}\geq 1$. 这时数列 $\{x_n\}$ 收敛于 0，

但级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ 不满足柯西收敛准则是发散的，与题设矛盾．故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 应为绝对收敛．

例 7 （**Kummer 判别法**）设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，$\sum \frac{1}{v_n}$ 为正项级数，且 $\sum \frac{1}{v_n}$ 发散，记 $a_n = v_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - v_{n+1}$，$\lim_{n\to\infty} a_n = a$，则（1）$a>0$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；（2）$a<0$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散．

证 （1）由 $\lim_{n\to\infty} a_n = a > 0$ 得，存在 N，当 $n \ge N$ 时，$a_n = \frac{u_n v_n - u_{n+1} v_{n+1}}{u_{n+1}} > 0$，即有 $u_n v_n - u_{n+1} v_{n+1} > 0$．而正项级数 $\sum_{n=N}^{\infty} (u_n v_n - u_{n+1} v_{n+1})$ 的部分和 $u_N v_N - u_{n+1} v_{n+1}$ 有上界 $u_N v_N$，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n v_n - u_{n+1} v_{n+1})$ 收敛，由比较判别法得 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛．

(2) 由 $\lim_{n\to\infty} a_n < 0$ 得,存在 N，当 $n \ge N$ 时，$a_n < 0$，即 $u_n v_n - u_{n+1} v_{n+1} < 0$．写作 $\frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{1/v_{n+1}}{1/v_n}$，用比较定理由 $\sum \frac{1}{v_n}$ 发散，知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

注 取 $v_n = 1, v_n = n,$ 分别得到达朗贝尔比值判别法和拉阿比判别法.

Raabe 判别法: 设 $u_n > 0$，且 $n(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1) \to r$，则 $\sum u_n$ 当 $r>1$ 时收敛，$r<1$ 时发散.

比较定理: 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$，若 $\frac{u_{n+1}}{u_n} \le \frac{v_{n+1}}{v_n}$，则由 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛可得 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

例 8 设 $b_n > 0$，若 $\lim_{n\to\infty} n(\frac{b_n}{b_{n+1}} - 1) = r$，证明

(1)当 $r>0$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n$ 收敛；(2)当 $r>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛.

证 (1)由 $\lim_{n\to\infty} n(\frac{b_n}{b_{n+1}} - 1) = r > 0$ 可得，对充分大的 n，有 $n(\frac{b_n}{b_{n+1}} - 1) > 0$，故数列 $\{b_n\}$

从某项起单减有下界 0，从而收敛，进而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - b_{n+1})$ 也收敛．题设条件写做 $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n - b_{n+1}}{n^{-1}b_{n+1}} = r > 0$，由比较判别法，知 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}b_{n+1}$ 也收敛．若 $\{b_n\}$ 的极限为正数，应有 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}b_{n+1}$ 发散，导致矛盾，所以 $\{b_n\}$ 的极限为零．交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n$ 为莱布尼兹型，故收敛．

(2)这里用一个不等式：$\alpha > \beta$，n 充分大时，$1+\frac{\alpha}{n} > (1+\frac{1}{n})^{\beta}$ ．

（ 由 $f(x) = 1 + \alpha x - (1+x)^{\beta} = (\alpha - \beta)x + o(x^2)$，易知不等式成立.）

由条件 $\lim_{n\to\infty} n(\frac{b_n}{b_{n+1}} - 1) = r > 1$，则对充分大的 n，有 $n(\frac{b_n}{b_{n+1}} - 1) > \alpha$，($r > \alpha > \beta > 1$)

即有 $\frac{b_n}{b_{n+1}} > 1 + \frac{\alpha}{n} > (1+\frac{1}{n})^{\beta} = \frac{(n+1)^{\beta}}{n^{\beta}}$，表明数列 $\{n^{\beta}b_n\}$ 从某项单减，必有上界 M，所以 $b_n \le M/n^{\beta}$，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛.

例 9 **Ermakoff 判别法** 设 f 是 $[1,+\infty)$ 上的正值单减函数，且 $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x f(e^x)}{f(x)} = \lambda$，则当 $\lambda < 1$ 时，$\sum f(n)$ 收敛；当 $\lambda > 1$ 时，$\sum f(n)$ 发散.

证 （i）当 $\lambda < 1$ 时，取 $q \in (\lambda, 1)$，$\exists A \ge 1$，$\forall x \ge A$，$e^x f(e^x) < q f(x)$.

考虑数列 $x_0 = 1, x_1 = e, x_2 = e^{x_1}, \cdots, x_{n+1} = e^{x_n}, \cdots$，$x_n \to +\infty$. 当 $x_{n-1} \ge A$ 时，

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} e^x f(e^x)dx < q\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx,$$

即 $\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)dt < q\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(t)dt$，进而 $\int_{x_{n+m-1}}^{x_{n+m}} f(t)dt < q^m\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(t)dt$ （$m = 1, 2, \cdots$），

所以 $\int_1^{\infty} f(t)dt = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)dt$ 收敛，由积分判别法知 $\sum f(n)$ 收敛.

（ii）当 $\lambda > 1$ 时，只要 x_n 充分大，$\int_{x_{n-1}}^{x_n} e^x f(e^x)dx > \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$，

即 $\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)dt > \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(t)dt$，这时 $\int_1^{\infty} f(t)dt = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)dt$ 发散，由积分判别法知 $\sum f(n)$

发散.

例 10（Kronecker）设 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为单调递减的正实数列，$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为实数列，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n u_n$ 收敛，试证 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)u_n = 0$.

证 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n u_n$ 收敛，记 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k u_k$， $S_0 = 0$，则 $\{S_n\}$ 有极限 S.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (a_k u_k)\cdot u_k^{-1} = \sum_{k=1}^{n} (S_k - S_{k-1})\cdot u_k^{-1} = S_n u_n^{-1} - \sum_{k=1}^{n-1} S_k (u_{k+1}^{-1} - u_k^{-1}),$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} u_n \sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty}\{S_n - \frac{\sum\limits_{k=1}^{n-1} S_k (u_{k+1}^{-1} - u_k^{-1})}{u_n^{-1}}\} = S - \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n-1} S_k (u_{k+1}^{-1} - u_k^{-1})}{u_n^{-1}}$$

$$= S - \lim_{n\to\infty} \frac{S_n (u_{n+1}^{-1} - u_n^{-1})}{u_{n+1}^{-1} - u_n^{-1}} = S - S = 0.$$

注 以下结论都归并到 Kronecker .

①设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，$\{p_n\}$ 单增趋于 $+\infty$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{p_n} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k p_k = 0$.

特别地 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，有 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} k a_k = 0$.

②设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，$\{a_n\}$ 正值单减，有 $\lim\limits_{n\to\infty} n a_n = 0$.

③设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ 收敛，有 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = 0$ 即 $\overline{a}_n \to 0$.

④设 $\delta > 0, \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\delta}}$ 收敛，有 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\delta}} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = 0$.

例 11 试证级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ 非绝对收敛.

证 注意 $f(x) = |\sin x| + |\sin(x+1)|$ 为连续周期函数，其最小值 $m > 0$.

$$\frac{|\sin(2k-1)|}{2k-1} + \frac{|\sin(2k)|}{2k} \ge \frac{|\sin(2k-1)| + |\sin(2k)|}{2k} \ge \frac{m}{2k},$$

因$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$发散，所以$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{|\sin(2k-1)|}{2k-1}+\frac{|\sin(2k)|}{2k}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n|}{n}$发散.

事实上，$|\sin 1+\sin 2+\cdots+\sin n|=\frac{|\sin\frac{2n+1}{2}-\sin\frac{1}{2}|}{2\cos\frac{1}{2}}$有界，由 A-D 判别法知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}$是收敛的，故为条件收敛.

例 12 设$\{a_n\}$为正项数列，$A_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$。若$A_n\to\infty$, 且$\frac{a_n}{A_n}\to 0$，证明幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$的收敛半径为 1.

证 设$\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$与$\sum_{n=1}^{\infty}A_n x^n$的收敛半径分别为$r$、$R$，易知$r\ge R$．由$A_n\to\infty$知幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$在 1 处发散，即有收敛半径$r\le 1$．又由$\frac{a_n}{A_n}\to 0$得

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{A_{n-1}}{A_n}=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{a_n}{A_n})=1.$$

综上$r=1$.

例 13 求$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(4n+1)(4n+3)}$的和.

解 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(4n+1)(4n+3)}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{4n+1}-\frac{1}{4n+3})=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots)$，

因$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1}=\arctan x, x\in[-1,1]$，所以原级数的和为$\frac{\pi}{8}$.

例 14 求值$\dfrac{1+\frac{\pi^4}{4!2^4}+\frac{\pi^8}{8!2^8}+\frac{\pi^{12}}{12!2^{12}}+\cdots}{\frac{1}{8}+\frac{\pi^4}{6!2^6}+\frac{\pi^8}{10!2^{10}}+\frac{\pi^{12}}{14!2^{14}}+\cdots}$

解 记所求分式的分子分母分别为S,T，

$$\cos\frac{\pi}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(\frac{\pi}{2})^{2n}=\left(1+\frac{\pi^4}{2^4 4!}+\frac{\pi^8}{2^8 8!}+\cdots\right)-\left(\frac{\pi^2}{2^2 2!}+\frac{\pi^6}{2^6 6!}+\frac{\pi^{10}}{2^{10}10!}+\cdots\right)=S-\pi^2 T,$$

所以$\frac{S}{T}=\pi^2$.

例 15 求级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!!x^{2n+1}}{(2n+1)!!}$ 的和函数.

解 易求级数的收敛半径为 1，收敛区间为$(-1,1)$. 设和函数为$S(x)$，则

$$S'(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!x^{2n}}{(2n-1)!!}=1+x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n(2n-2)!!x^{2n-1}}{(2n-1)!!}=1+x\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-2)!!x^{2n}}{(2n-1)!!}\right)'$$

$$=1+x(xS(x))',$$

即 $$(1-x^2)S'(x)-xS(x)=1,S(0)=0,$$

解得 $$S(x)=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}，（-1<x<1）.$$

例 16 设$f(x)$是仅有正零点的多项式函数，满足$\frac{f'(x)}{f(x)}=-\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$. 证明：$c_n>0$，（$n\geq 0$），极限$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{c_n}}$存在，且等于$f(x)$的最小零点.

证 设m次多项式$f(x)$为$A(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_m)$， $0<a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_m$.

由条件知$\{\ln|f(x)|\}'=-\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$，即$\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{x-a_i}=-\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$.又

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{x-a_i}=-\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{a_i}\frac{1}{1-x/a_i}=-\sum_{i=1}^{m}\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{a_i^{\,n+1}}x^n\}=-\sum_{n=0}^{\infty}\{\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{a_i^{\,n+1}}\}x^n，（|x|<a_1）$$

所以

$$c_n=\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{a_i^{\,n+1}}>0.$$

这时

$$\sqrt[n]{\frac{1}{a_1^{\,n+1}}}\leq\sqrt[n]{c_n}\leq\sqrt[n]{m}\sqrt[n]{\frac{1}{a_1^{\,n+1}}},$$

又$\sqrt[n]{m}\to 1,\sqrt[n]{(\frac{1}{a_1})^{n+1}}\to\frac{1}{a_1}$，由追敛性即得极限$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{c_n}}$存在，且等于$f(x)$的最小零点.

例 17 设数列$\{p_n\}$定义如下：$p_0=1$，

$$p_n+\frac{p_{n-1}}{1!}+\frac{p_{n-2}}{2!}+\cdots+\frac{p_1}{(n-1)!}+\frac{p_0}{n!}=1,$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty}p_n$.

解 设 $p(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}p_nx^n$，则由条件知

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(p_n+\frac{p_{n-1}}{1!}+\cdots+\frac{p_0}{n!}\right)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x},$$

注意 $\mathrm{e}^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$，将级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$与$\sum\limits_{n=0}^{\infty}p_nx^n$ 作柯西乘积

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}p_nx^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(p_n+\frac{p_{n-1}}{1!}+\cdots+\frac{p_0}{n!}\right)x^n,$$

即有 $\mathrm{e}^x p(x)=\frac{1}{1-x}$， 所以 $p(x)=\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-x}$.

再将 $p(x)$ 展为幂级数

$$p(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}\right)x^n.$$

故 $p_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$， 从而 $\lim\limits_{n\to\infty}p_n=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}=\mathrm{e}^{-1}$.

例 18 设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}(0\le x\le 1)$，（1）证明 $f(x)+f(1-x)+\ln x\ln(1-x)=\frac{\pi^2}{6}$；（2）求 $I=\int_0^1\frac{1}{2-x}\ln\frac{1}{x}dx$.

证（1）令等式的左边为$F(x)$，则

$$\begin{aligned}F'(x)&=f'(x)-f'(1-x)+\frac{\ln(1-x)}{x}-\frac{\ln x}{1-x}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x)^{n-1}}{n}+\frac{\ln(1-x)}{x}-\frac{\ln x}{1-x},\end{aligned}$$

利用$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x),(0\le x<1)$，得 $F'(x)=0$，所以 $F(x)=C$，$(0<x<1)$.

又 $F(0+)=f(0)+f(1)+\lim\limits_{x\to 0+}\ln x\ln(1-x)=f(1)=\dfrac{\pi^2}{6}$，所以 $C=\dfrac{\pi^2}{6}$.

（2）令 $2-x=t$，$I=-\int_1^2\dfrac{\ln(2-t)}{t}dt=-\int_1^2\dfrac{1}{t}\left(\ln 2+\ln(1-\dfrac{t}{2})\right)dt$

$=-\ln^2 2+\int_1^2\dfrac{1}{t}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{t}{2}\right)^n dt=-\ln^2 2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}(1-\dfrac{1}{2^n})=-\ln^2 2+\dfrac{\pi^2}{6}-f(\dfrac{1}{2})$.

从所证的等式可得 $f(\dfrac{1}{2})=\dfrac{\pi^2}{12}-\dfrac{1}{2}\ln^2 2$，所以 $I=\dfrac{\pi^2}{12}-\dfrac{1}{2}\ln^2 2$.

例 19 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，且 $\forall x: f(x)=f(x+2)=f(x+\sqrt{3})$，用 *Fourier* 级数理论证明 $f(x)$ 为常数.

证　$f(x)$ 以正整数 2 为周期，同时以无理数 $\sqrt{3}$ 为周期. 将函数展开成以 2 为周期的 *Fourier* 级数，有（f 可导，展开式以等式形式成立）

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos n\pi x+b_n\sin n\pi x],$$

$a_0=\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x$，$a_n=\int_{-1}^{1}f(x)\cos(n\pi x)\mathrm{d}x$，$b_n=\int_{-1}^{1}f(x)\sin(n\pi x)\mathrm{d}x$（$n=1,2,\cdots$）.

利用 $\sqrt{3}$ 为周期，系数公式又可如下变形

$$\begin{aligned}a_n&=\int_{-1}^{1}f(x+\sqrt{3})\cos(n\pi x)\mathrm{d}x=\int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}}f(t)\cos(n\pi(t-\sqrt{3}))\mathrm{d}t\\&=\int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}}\{f(t)\cos n\pi t\cos\sqrt{3}n\pi+f(t)\sin n\pi t\sin\sqrt{3}n\pi\}\mathrm{d}t\\&=a_n\cos\sqrt{3}n\pi+b_n\sin\sqrt{3}n\pi,\end{aligned}$$

同理 $b_n=b_n\cos\sqrt{3}n\pi-a_n\sin\sqrt{3}n\pi$. 联立

$$\begin{cases}a_n(1-\cos\sqrt{3}n\pi)-b_n\sin\sqrt{3}n\pi=0,\\ a_n\sin\sqrt{3}n\pi+b_n(1-\cos\sqrt{3}n\pi)=0\end{cases}$$

因系数行列式值为 $2(1-\cos\sqrt{3}n\pi)\neq 0$，所以 $a_n=b_n=0, n=1,2,\cdots$，$f(x)\equiv a_0$.

例 20（***Tauber* 定理**）设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 1，记 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，$x\in(-1,1)$.

若$\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$， $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = S$，则$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = S$.

证 由$\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$知$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}|ka_k| = 0$.又由$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = S$给出$\lim\limits_{n\to\infty} f(1-\frac{1}{n}) = S$，

故$\forall\varepsilon > 0$，$\exists N$，当$n > N$时有

$$n|a_n| < \frac{\varepsilon}{3}，\ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k|a_k| < \frac{\varepsilon}{3}，\ \left|f(1-\frac{1}{n}) - S\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

因
$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k - S\right| \le \left|\sum_{k=1}^{n} a_k (1-x^k)\right| + \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k\right| + \left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k - S\right|$$

$$\le (1-x)\sum_{k=1}^{n} k|a_k| + \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{\infty} k|a_k||x|^k + |f(x) - S| \quad ,\quad \forall x \in (-1,1).$$

$\forall n > N$，取$x = 1 - \frac{1}{n}$，有

$$(1-x)\sum_{k=1}^{n} k|a_k| = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k|a_k| < \frac{\varepsilon}{3},$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{\infty} k|a_k||x|^k < \frac{1}{n}\frac{\varepsilon}{3}\sum_{k=n+1}^{\infty}|x|^k < \frac{1}{n}\frac{\varepsilon}{3}\frac{1}{1-x} = \frac{\varepsilon}{3},$$

$$|f(x) - S| = \left|f(1-\frac{1}{n}) - S\right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

综上有$\forall n > N$，不等式$\left|\sum\limits_{k=0}^{n} a_k - S\right| < \varepsilon$成立. 故$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = S$.

例 21 设数列$\{a_n\}$单减且趋于零，$0 < q < 1$，则级数$\sum \frac{a_n}{n^q}$收敛的充要条件是：

i) $a_n = O(n^{q-1})$，ii) 级数$\sum (a_n - a_{n+1}) n^{1-q}$收敛.

分析 因为$H_n(q) = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^q} \sim \frac{n^{1-q}}{1-q}, q \in (0,1)$，所以$\sum (a_n - a_{n+1}) n^{1-q}$收敛等价于

$\sum (a_n - a_{n+1}) H_n(q)$收敛.

证 由 Abel 分部求和公式知（$H_0(q) = 0$）

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^q}=\sum_{k=1}^{n}a_k(H_k(q)-H_{k-1}(q))=a_nH_n(q)+\sum_{k=1}^{n-1}(a_k-a_{k+1})H_k(q)\ .$$

必要性　设 $\sum\frac{a_n}{n^q}$ 收敛，则部分和 $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^q}$ 有界. 由数列 $\{a_n\}$ 单减，有

$$a_n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^q}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^q}.$$

即 $a_nH_k(q)=O(1)$ 或 $a_n=O(\frac{1}{H_n(q)})=O(n^{q-1})$. 此时正项级数 $\sum(a_n-a_{n+1})H_n(q)$ 的部分和有界，从而收敛. 再由比较判别法得到级数 $\sum(a_n-a_{n+1})n^{1-q}$ 收敛.

充分性也是清楚的！

例 22 设 $0<\alpha\le 1$，数列 $\{x_n\}$ 满足条件

$$x_1>0\ ,\quad x_{n+1}=x_n+\frac{1}{n^\alpha x_n}\ (n\ge 1)\ ,$$

则 $x_n\to+\infty$，并求 x_n 的等价无穷大量.

解 易知 $\{x_n\}$ 单增且 $x_n\ge x_1>0$. 记 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lambda$,则 $\lambda=+\infty$. 事实上，若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lambda$ 为有限正数，则 $\sum\frac{1}{n^\alpha x_n}$ 与 $\sum\frac{1}{n^\alpha}$ 同为发散级数，$\sum(x_{n+1}-x_n)=\sum\frac{1}{n^\alpha x_n}$ 也发散，这与 $\{x_n\}$ 收敛矛盾！

对 $0<\alpha\le 1$，　有　　$x_{n+1}^2-x_n^2=\dfrac{2}{n^\alpha}+\dfrac{1}{n^{2\alpha}x_n^2}$,

累加可得　　$x_n^2-x_1^2=\sum\limits_{k=1}^{n-1}(\dfrac{2}{k^\alpha}+\dfrac{1}{k^{2\alpha}x_k^2})$.

因 $\dfrac{1}{n^{2\alpha}x_n^2}=o(\dfrac{1}{n^\alpha})$，$x_n^2$ 应该以 $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2}{k^q}$ 为主部，下证 $x_n^2\sim\begin{cases}\dfrac{2n^{1-\alpha}}{1-\alpha},0<\alpha<1,\\ 2\ln n,\quad \alpha=1.\end{cases}\quad(n\to\infty)$.

注意 $0<\alpha<1$ 时，$(n+1)^{1-\alpha}-n^{1-\alpha}=n^{1-\alpha}\left[(1+\dfrac{1}{n})^{1-\alpha}-1\right]\sim\dfrac{1-\alpha}{n^\alpha}\ (n\to\infty)$.

由 Stolz 定理，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2}{n^{1-\alpha}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}^2-x_n^2}{(n+1)^{1-\alpha}-n^{1-\alpha}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha}}{1-\alpha}(\frac{2}{n^{\alpha}}+\frac{1}{n^{2\alpha}x_n^2})=\frac{2}{1-\alpha}\quad ;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}^2-x_n^2}{\ln(n+1)-\ln n}=\lim_{n\to\infty}n(\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2x_n^2})=2\quad .$$

证毕.

例 23 设 $\{a_n\}$ 是不全为零的非负数列，且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛，试证：

（i）级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$ 收敛；（ii） $(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n})^2<\pi\sqrt{\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2}\cdot\sqrt{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2}{n^2}}$ （**Carlson Inequality**）.

证 （i）由不等式 $\frac{a_n}{n}\le\frac{1}{2}(a_n^2+\frac{1}{n^2})$， $\frac{a_n^2}{n^2}\le a_n^2$，

及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$， $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的收敛性，知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$， $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2}{n^2}$ 都收敛.

(ii) 记 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2=S$， $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2}{n^2}=T\ (<S)$，任给 $\lambda>0$，由 **Cauchy-Schwartz** 不等式得

$$(\sum_{n=1}^{N}\frac{a_n}{n})^2=\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{n^2+\lambda^2}}\cdot\frac{a_n\sqrt{n^2+\lambda^2}}{n}\right)^2\le\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2+\lambda^2}\cdot\sum_{n=1}^{N}\frac{a_n^2(n^2+\lambda^2)}{n^2},$$

让 $N\to+\infty$，有

$$(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n})^2\le(S+\lambda^2T)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+\lambda^2}.$$

注意 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+\lambda^2}<\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+\lambda^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2\lambda}$，故对任意正数 λ 有 $(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n})^2<\frac{S+\lambda^2T}{2\lambda}\pi$.

又 $\sqrt{ST}\le\frac{S+\lambda^2T}{2\lambda}$，所以 $(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n})^2<\pi\sqrt{ST}$.

注 Carlson Inequality 的积分形式：设 $f(x)$ 为非负实值函数，且 $f^2(x)$， $x^2f^2(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可积，则 $\left(\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x\right)^2\le\pi\sqrt{\int_0^{+\infty}f^2(x)\mathrm{d}x}\cdot\sqrt{\int_0^{+\infty}x^2f^2(x)\mathrm{d}x}$.

例 24 设正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n}$收敛，证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(p_1+p_2+\cdots p_n)^2}p_n$收敛.

证 设$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n}=T$，并记$q_n=p_1+p_2+\cdots p_n$，$q_0=0$，则

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{(p_1+p_2+\cdots p_k)^2}p_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{q_k^2}p_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{q_k^2}(q_k-q_{k-1})$$

$$\le\frac{1}{p_1}+\sum_{k=2}^{n}\frac{k^2}{q_kq_{k-1}}(q_k-q_{k-1})=\frac{1}{p_1}+\sum_{k=2}^{n}\frac{k^2}{q_{k-1}}-\sum_{k=2}^{n}\frac{k^2}{q_k}$$

$$\le\frac{1}{p_1}+\sum_{k=1}^{n}\frac{(k+1)^2}{q_k}-\sum_{k=2}^{n}\frac{k^2}{q_k}=\frac{2}{p_1}+\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{q_k},$$

由柯西不等式

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{q_k}\le\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{q_k^2}p_k}\cdot\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{p_k}},$$

从而$S_n\le\frac{2}{p_1}+2\sqrt{S_nT}+T$，由此可得$\sqrt{S_n}\le\sqrt{T}+\sqrt{\frac{2}{p_1}+2T}$，即部分和有上界，故级数收敛.