

《高等数学（一）》期中考试试卷

2023 — 2024 学年 第一学期

一、填空题 (20' = 4' × 5)

1. 设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{|x|}{n}$, 则 $f(-2023) =$ _____。
2. 已知函数 $y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = \frac{t}{1+t} \\ y = \frac{t}{1+t} \end{cases}$ 确定, 则 $\frac{d^2y}{dx^2} =$ _____。
3. 函数极限 $\lim_{x \rightarrow 2} (3-x)^{\frac{x-5}{x-2}} =$ _____。
4. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 且 $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{3}{n}$ ($n=1, 2, \dots$), 则 $f'(0) =$ _____。
5. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 2e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0. \end{cases}$ 则 $a =$ _____ 时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

二、选择题 (20' = 4' × 5)

6. 设当 $x \rightarrow 0$ 时, $(1-\cos x) \ln(1+x^2)$ 是比 $x \sin(x^n)$ 高阶的无穷小, $x \sin(x^n)$ 是比 $e^{x^2}-1$ 高阶的无穷小, 则正整数 $n =$ ()
A. 1; B. 2; C. 3; D. 4。
7. 如果 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$, 则必有 ()
A. $f(x) = 3$; B. $\exists \delta > 0$, 当 $x \in U^\circ(2; \delta)$ 时, $f(x) \neq 3$;
C. $f(x)$ 在 $x=2$ 处无定义; D. $\exists \delta > 0$, 当 $x \in U^\circ(2; \delta)$ 时, $f(x) < 4$ 。
8. 曲线 $y = 2^{2-x}$ 在点 $P(2, 1)$ 处的切线方程是 ()
A. $x \ln 2 + y = 1$; B. $x + y \ln 2 = 1$; C. $x \ln 2 + y = 2 \ln 2$; D. $x \ln 2 + y = 1 + 2 \ln 2$ 。
9. 函数极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^4}{x+1} \left(\sin \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \sin \frac{2}{x} \right) =$ ()
A. 0; B. 1; C. 2; D. 3。
10. 若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 则下列命题错误的是 ()
A. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f(0) = 0$; B. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(-x)}{x}$ 存在, 则 $f(0) = 0$;
C. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}$ 存在, 则 $f'(0) = 0$; D. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(-x)}{x}$ 存在, 则 $f'(0) = 0$ 。

三、计算题 (50' = 10' × 5)

11. 计算函数极限 $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e}$ 。
12. 已知 $y = x^2 3^x$, 试求 $y^{(4)}(0)$ 。

13. 计算由方程 $y = 1 + xe^y$ 所确定函数 $y(x)$ 的二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}\bigg|_{x=0}$ 。

14. 设函数 $f(x) = \ln(1+x^2)$, $y = f^2\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)$, 求 $dy\big|_{x=0}$ 。

15. 计算数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$ 。

四、证明题 (10' = 10' × 1)

16. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$ 。求证: $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界。