Exercice 1 EML 2007 ECS

On se propose de simuler l'expérience probabiliste suivante :

on lance m fois une pièce de monnaie équilibrée. On appelle série une suite de lancers qui ont amené la même face on note N_k le nombre de séries dans les k premiers lancers.

Par exemple, si $m = 12$ et la suite des résultats $\omega = (FFPPPPFPPFFP)$, alors :

$$N_1(\omega) = N_2(\omega) = 1,\ N_3(\omega) = N_4(\omega) = N_5(\omega) = N_6(\omega) = 2;\ N_7(\omega) = 3, ..., N_{12}(\omega) = 6$$

a) Ecrire une fonction `def series(m):` qui prend en entrée l'entier m, simule une suite de m lancers de la pièce et donne en sortie le vecteur ligne N contenant les valeurs de $N_1, N_2, ...N_m$.

b) Ecrire une suite d'instructions qui demande un entier $m \in [\![1, 1000]\!]$, simule 10^5 fois l'expérience et donne la valeur moyenne des nombres $N_k, 1 \leqslant k \leqslant m$.

Exercice 2 Ecricome 2016 ECS

Soient a, b deux entiers strictement positifs. Une urne contient initialement a boules rouges et b boules blanches. On effectue une succession d'épreuves, chaque épreuve étant constituée des trois étapes suivantes :

— on pioche une boule au hasard dans l'urne,

— on replace la boule tirée dans l'urne,

— on rajoute dans l'urne une boule de la même couleur que celle qui vient d'être piochée.

Après n épreuves, l'urne contient donc $a + b + n$ boules.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n le nombre de boules rouges qui ont été ajoutées dans l'urne (par rapport à la composition initiale) à l'issue des n premières épreuves.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on notera R_n l'événement $\ll$ on pioche une boule rouge au n-ième tirage $\gg$.

1. Donner l'ensemble $X_n(\Omega)$ des valeurs prises par la variable aléatoire X_n en fonction de n.

2. On souhaite simuler l'expérience grâce a Python.

(a) Ecrire la fonction `tirage`, qui simule le tirage d'une boule dans une urne contenant x boules rouges et y boules blanches et qui retourne la valeur 0 si la boule est rouge et 1 si elle est blanche.

(b) Compléter la fonction suivante, qui simule n tirages successifs dans une urne contenant initialement a boules rouges et b boules blanches (selon le protocole décrit ci-dessus) et qui retourne la valeur deX_n :

```
def experience(a,b,n) :
    x ,y =a, b
    for k in range(n):
        r = tirage(x,y)
        if r = = 0:
            x = ..........
        else:
            ..........
    return  .........
```

c) Ecrire une fonction Python d'en tête :

```
def simulation (a,b,n,m) :
```

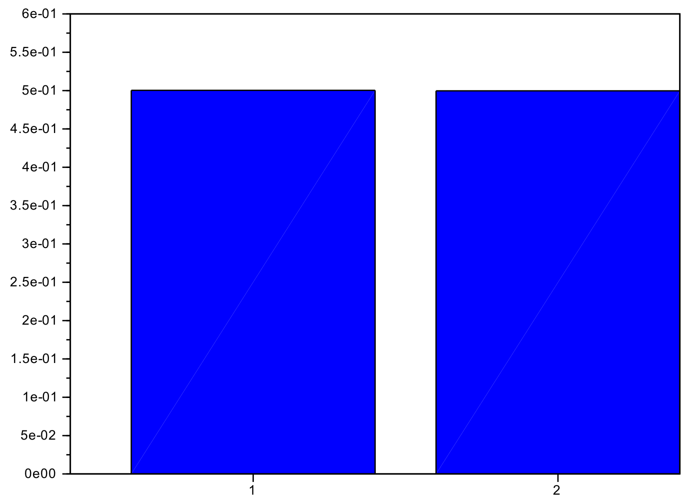
qui fait appel m fois à la fonction précédente pour estimer la loi de Xn. Le paramètre de sortie sera un vecteur contenant les approximations de $P(X_n = 0)$, $P(X_n = 1), \cdots$, $P(X_n = n)$.

3. On s'intéresse ici au cas ou $a = b = 1$. On utilise la fonction simulation avec des valeurs de n entre 1 et 5 et on affiche à chaque fois l'estimation de la loi de X_n sous forme d'un diagramme en ≪bâtons ≫.

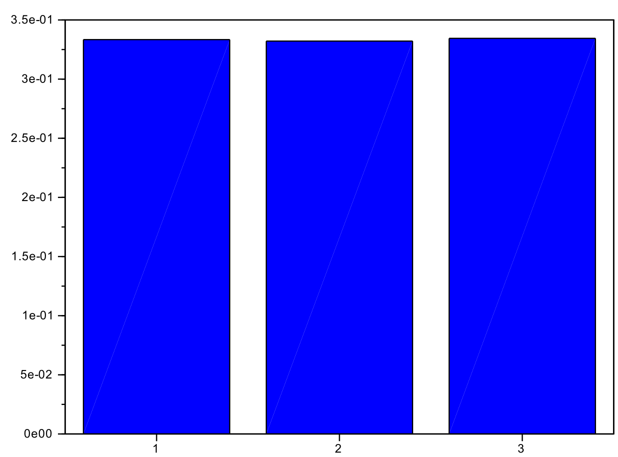
(a) A l'aide des résultats ci-dessous, conjecturer la loi de X_n.

(b) Déterminer la loi de X_1.

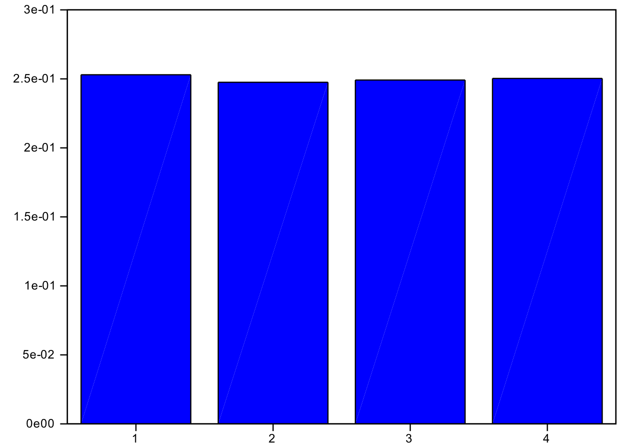
Pour $a = 1, b = 1$, $n = 1$ et $m = 100000$ on obtient :



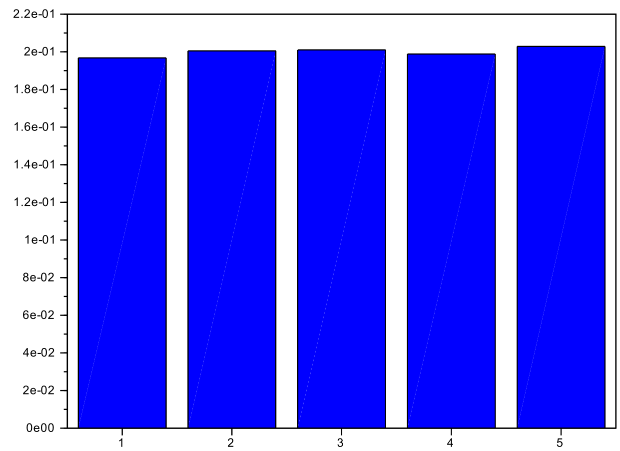
Pour $a = 1, b = 1$, $n = 2$ et $m = 100000$ on obtient :



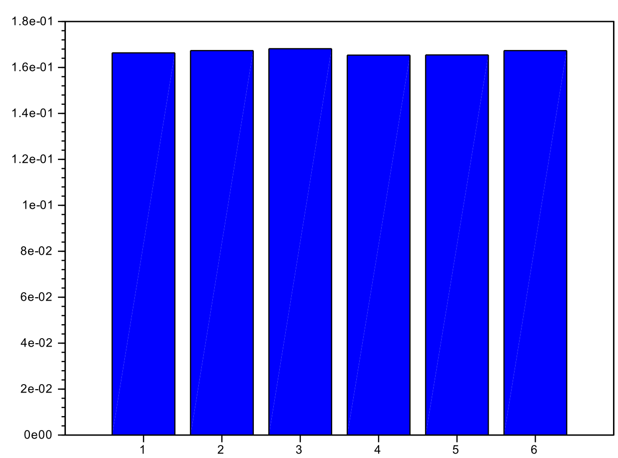
Pour $a = 1, b = 1$, $n = 3$ et $m = 100000$ on obtient :



Pour $a = 1, b = 1$, $n = 4$ et $m = 100000$ on obtient :



Pour $a = 1, b = 1$, $n = 5$ et $m = 100000$ on obtient :



Exercice 3 Ecricome 2017 ECS

Pour tout entier n strictement positif, on considère l'expérience suivante :

on dispose de n urnes initialement vides, numérotées de 1 à n et on dispose d'un grand stock de boules que l'on dépose une à une dans ces urnes.

Pour chaque boule, on choisit au hasard, de façon équiprobable, l'urne dans laquelle la boule est déposée.

On note X_n le rang du premier tirage pour lequel une des urnes contiendra deux boules.

1. Compléter la fonction Python suivante pour qu'elle simule une réalisation de la variable aléatoire X_n :

```
def tirage(n):
   urnes = np.zeros(n)
   X=0
   choix = ........
   while ........:
       urnes[......] = urnes[......]+1
       choix = ................
       X=...............
  return  .............
```

2. On suppose dans cette question que $n = 1$.

Déterminer la loi de X_1 ainsi que son espérance et sa variance.

3. On suppose dans cette question que $n = 2$.

Déterminer la loi de X_2 ainsi que son espérance et sa variance.

4. On se place ici dans le cas général, n désigne un entier strictement positif.

a) Déterminer $X_n(\Omega)$ en justifiant brièvement.

On Montrer que :

$$\forall k \in [\![2, n+1]\!], \quad P(Xn = k) = \frac{n!(k-1)}{n^k(n-k+1)!}$$

et que, pour tout entier strictement positif n, X_n admet une espérance.

b) On souhaite écrire une fonction Python qui calcule $E(X_n)$ en fonction de n.

Ecrire la fonction `Esperance` en Python à cet effet.

Exercice 4 EDHEC 2015

On désigne par α et p deux réels de $]0, 1[$. Un joueur participe à un jeu constitué d'une suite de manches. Avant chaque manche y compris la première, le joueur a une probabilité α de ne pas être autorisé à jouer la manche en question, (on dit qu'il est disqualifié, et c'est définitif), et une probabilité $1 - \alpha$ d'y être autorisé, et ceci indépendamment du fait qu'il ait gagné ou perdu la manche précédente s'il y en a eu une. A chaque manche jouée, le joueur gagne un euro avec la probabilité p et perd un euro avec la probabilité $1 - p$. Si le jeu a commencé, le joueur joue jusqu'à ce qu'il soit disqualifié, et on suppose que les manches sont jouées de façon indépendantes. On note :

— X le nombre de manches jouées par le joueur avant d'être disqualifié.

— Y le nombre de manches gagnées par le joueur.

— G le gain du joueur à la fin du jeu.

On admet que X, Y et G sont des variables aléatoires réelles définies toutes les trois sur le même espace probabilisé (Ω, A, P).

1. (a) Donner la loi de X. (On pourra noter D_k l'événement "Le joueur ne joue pas la k-ème manche").

(b) On pose $T = X + 1$. Reconnaître la loi de T.

(c) Exprimer G en fonction de X et Y.

2. (a) Ecrire un programme Python pour qu'il simule l'expérience aléatoire étudiée et affiche les valeurs prises par X et Y .

3. Quelles commandes faut-il ajouter aux précédentes pour calculer et afficher la valeur prise par G ?

Exercice 5 EDHEC 2017 ECS

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère n variables aléatoires, notées$X_1, X_2 \cdots , X_n$, définie sur un même espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{A}; P)$, indépendantes, suivant toutes la même loi uniforme sur [0,1]

On note M_n la variable aléatoire définie par $M_n = max\,(X_1; X_2, \cdots , X_n)$, c'est à dire que pour tout ω dans Ω, on a $M_n(\omega) = max\,(X_1(\omega), X_2(\omega), \cdots , X_n(\omega))$. On admet que M_n est une variable aléatoire et on note F_{M_n}sa fonction de répartition.

2. On pose $Y_n = n\,(1 - M_n)$.

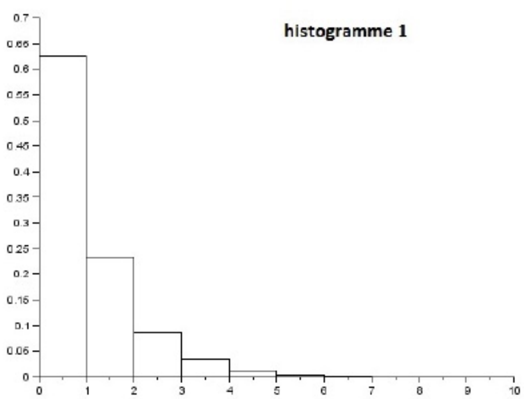
(a) Ecrire une fonction Python afin qu'il simule la variable aléatoire Y_n.

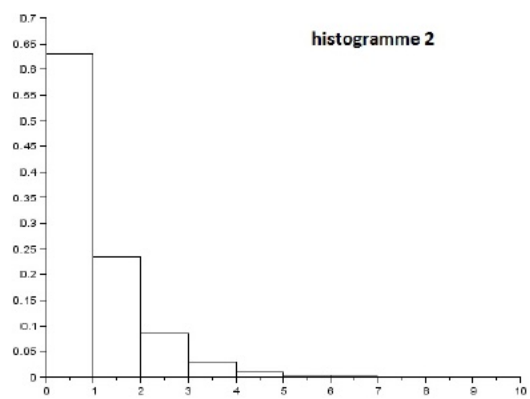
Chacun de ces scripts simule 10000 variables indépendantes, regroupe les valeurs renvoyées en 10 classes qui sont les intervalles $[0, 1],]1, 2], \cdots ,]9, 10]$, et trace l'histogramme correspondant (la largeur de chaque rectangle vaut 1 et leur hauteur est proportionnelle à l'effectif de chaque classe).

Ecrire un script (1) dans lequel on simule les variables aléatoires suivent la loi exponentielle de paramètre 1 et renvoie l'histogramme (1) ci-dessous, pour $n = 1000$.

Ecrire un script (2) dans lequel les variables aléatoires suivent la même loi que Y_n et renvoie l'histogramme (2) ci-dessous, pour $n = 1000$.

Quelle conjecture peut-on émettre quant au comportement de la suite des variables aléatoires (Y_n) ?





Exercice 6 EML 2021 ECS

On désigne par n un entier de $\mathbb{N}$ supérieur ou égal à 2. On dispose d'une urne rouge et d'une urne bleue ainsi que de n boules rouges et de n boules bleues, ces $2n$ boules étant supposées indiscernable au toucher.

Initialement, on place les $n$boules rouges dans l'urne rouge et les n boules bleues dans l'urne bleue.

On procède alors à une succession d'épreuves aléatoires, chaque épreuve consiste à échanger au hasard une boule de l'urne rouge avec une boule de l'urne bleue. Après chaque épreuve, chaque urne contient donc toujours $n$boules.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on définit la variable Z_k égale au nombre de boules rouges présentes dans l'urne rouge à l'issue de la kième épreuve.

On pose $Z_0 = n$

a) Déterminer la loi de Z_1

b) Ecrire une une fonction qui prend, en entrée le nombre n initial de boules rouge et le nombre k d'épreuve réalisées, elle renvoie une simulation de Z_k.

c) Ecrire une fonction en Python d'entête `def esperance(n,k)` qui, prenant en entrée le nombre n initiale de boule rouges et le nombre k d'épreuves réalisées, renvoie une estimation de l'espérance deZ_k.

Exercice 7 (d'après oral ESCP 2013 sans préparation) :

Dans une file d'attente de n personnes, résultant de la distribution au hasard de ces personnes, se trouvent deux amis Jean et Paul. Quelle est la probabilité que Jean soit séparé de Paul par m personnes ? Quel est le nombre de personnes le plus probable qui séparent Jean et Paul ?